GÉZA KUNETZ

Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__189__1_0>

SÉRIE A. N° 340
N° D'ORDRE :
364.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

(Sciences Mathématiques)

PAR

GÉZA KUNETZ

Licencié ès Sciences Mathématiques.

1^{re} THÈSE. — Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le Mars 1937, devant la Commission d'examen :

MM. M. FRÉCHET, *Président.*

J. PÉRÈS, } *Examinateurs.*
G. DARMOIS, }

LIBRAIRIE L. RODSTEIN
17, rue Cujas, 17
PARIS (Ve).

—

1937.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

A MES PARENTS.

A MA PETITE SŒUR,

A LA MEMOIRE DE MON AMI, LE D[r] SZÉKELY ISTVÁN.

A MON CHER MAITRE,

MONSIEUR LE PROFESSEUR G. DARMOIS,

Témoignage de ma profonde reconnaissance.

INTRODUCTION.

Le but de notre travail est de donner un aperçu systématique des conditions auxquelles doit satisfaire une fonction donnée, pour pouvoir être considérée comme la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Dans un premier chapitre nous examinons l'évolution historique de la notion de fonction caractéristique. Nous faisons remonter ses origines à Laplace et nous suivons son développement à travers les œuvres de Laplace, Poisson, Cauchy, Poincaré, et M. P. Lévy.

Dans les deux chapitres suivants nous envisageons successivement les deux cas qui se présentent suivant que l'on définit la fonction caractéristique, comme la valeur probable de e^{-xt} (définition A), ou, comme celle de e^{ixt} (définition B). Les deux cas ont été étudiés respectivement par MM. Widder et Bochner en particulier, qui ont donné, les premiers, des conditions générales, nécessaires et suffisantes. Nous exposons d'abord brièvement leurs résultats et nous en donnons une interprétation très simple et conforme à l'esprit du calcul des probabilités. Nous recherchons ensuite des conditions, peut-être moins générales, mais plus simples et d'une application plus commode. Pour cela nous commençons par étudier les conditions que l'on peut déduire des résultats généraux. Ainsi, dans le Chapitre II, $\varphi(t)$ étant la valeur probable de e^{-xt} définie par l'intégrale de Stieltjes $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}\, d\,F(x)$ nous avons trouvé le système de conditions :

$$H_n(t) \equiv \begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi'(t) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(n)}(t) \\ \varphi'(t) & \varphi''(t) & \ldots\ldots\ldots & \varphi^{(n+1)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi^{(n)}(t) & \varphi^{(n+1)}(t) & \ldots & \varphi^{(2n)}(t) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Dans le Chapitre III, où $\varphi\ (t)$ est la valeur probable de e^{ixt},

donnée par $\varphi\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,x\,i\,t}\ d\,F\ (x)$ nous sommes conduits pour

$\varphi\,(t)$ pair, aux conditions :

$$(-1)^{\frac{n\,(n+1)}{2}} \left[H^n_o + \Sigma\,(-1)^{p+1}\ H^n_{p,\,q}\ \varphi^{(p)}\ (t)\quad \varphi^{(q)}\ (t) \right] \geqslant o$$

avec $p \leqslant n$; $q \leqslant n$; $p + q =$ pair ; $H^n_o = H^n\ (o)$ $H^n_{p,q} =$ $=$ mineur de H^n_o relatif au terme de la $p + 1^{ieme}$ ligne et de la $q + 1^{ieme}$ colonne.

Nous établissons également d'autres conditions, obtenues d'une manière indépendante de celles qui précèdent.

Dans le chapitre suivant, nous donnons des applications des résultats acquis. Nous précisons d'abord les liaisons qui existent entre ceux des deux chapitres précédents, en établissant avec rigueur dans quels cas on peut adjoindre aux conditions du Chapitre II, relatives à la fonction $\varphi\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,x\,i\,t}\ d\ F\ (x)$ celles du du Chapitre III, relatives à la fonction $\varphi\ (-i\,t)$, et inversement. Nous en profitons pour étudier dans quels cas les fonctions :

$$e^{\,P\,(t)} \quad [P\ (t) = \text{polynome}]\ ; \frac{1}{1 + a\,t^2 + b\,t^4}\ ; \quad \frac{1 + k}{1 + k\,ch^n\,t}$$

et d'autres, peuvent être des fonctions caractéristiques. Nous terminons en donnant quelques systèmes de conditions suffisantes.

Enfin, dans un dernier Chapitre, nous appliquons nos résultats à la résolution d'un problème statistique, dont nous établissons d'ailleurs une démonstration directe.

Avant de terminer, nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à M. le Professeur Georges Darmois pour son aide constante, ses encouragements et ses conseils qu'il nous a prodigués au cours de notre travail.

CHAPITRE PREMIER.

HISTORIQUE.

1° La notion de fonction caractéristique semble avoir ses origines dans le premier ouvrage qui se soit occupé systématiquement du Calcul des Probabilités, et qui en a d'ailleurs jeté les fondements, dans la Théorie Analytique des Probabilités de Laplace. Cette notion s'y présente sous deux formes assez distinctes.

D'une part, de par sa définition, c'est la « fonction génératrice », introduite dès le début de l'ouvrage, qui s'en rapproche le plus. Voici en effet comment Laplace la définit [1,a] :

« Soit y_x une fonction quelconque de x ; si l'on forme la suite infinie

$$y_o + y_1 \, t + y_2 \, t^2 + \quad \ldots \quad y_x \, t^x + \quad \ldots \, y_\infty \quad t^\infty$$

on peut toujours concevoir une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, donne cette suite : cette fonction est ce que je nomme fonction génératrice de y_x ».

On voit que x étant une variable ne pouvant prendre que des valeurs entières, y_x désignant la probabilité de la valeur x, si l'on fait le changement de variable $t = e^{\,i\omega}$ la fonction génératrice sera la valeur probable de $e^{\,i\omega}$, c'est-à-dire précisément ce qu'on appelle aujourd'hui la fonction caractéristique de la loi y_x [2,a]. Il est cependant à remarquer que c'est Laplace lui-même qui effectue cette transformation [1,b], pour en déduire le couple de formules :

$$U(\omega) = \sum_o^\infty y_x \quad e^{\,i\omega x} \; ; \quad y_x = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\omega) \quad e^{-\,i\omega x} \; d\omega$$

qui est l'analogue, pour des variables entières, des formules de réciprocité de Fourier. Cependant dans les applications de la fonction génératrice ainsi définie, Laplace s'éloigne de l'usage que l'on fait actuellement de la fonction caractéristique.

Plus loin au contraire, sans parler cette fois-ci de fonctions génératrices, Laplace se sert systématiquement, dans l'étude des épreuves répétées, d'une méthode qui est, au fond, celle de la fonction caractéristique.

Il considère en effet [1,c] une variable x pouvant prendre toutes les valeurs entières de $-n$ à $+n$ avec la même probabilité, cette probabilité restant d'ailleurs invariable au cours des épreuves. « Si l'on nomme s le nombre des observations, le coefficient de $e^{il\omega}$ dans le développement du polynome $(e^{-in\omega} + e^{-i(n-1)\omega} + \ldots + e^{in\omega})^s$ sera le nombre des combinaisons dans lesquelles la somme des erreurs, (Σx), est l. Ce coefficient est le terme indépendant de $e^{i\omega}$ et de ses puissances dans le développement du même polynome multiplié par $e^{-il\omega}$ ». Il en déduit pour la probabilité que l'on ait $\Sigma x = l$,

$$P_l = \frac{1}{(2n+1)^s} \frac{1}{\pi} \int_o^{\pi} d\omega \cos \omega l \, . \, (1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega)^s$$

et il montre que pour s très grand cette probabilité tend vers la loi limite de Laplace-Gauss.

Dans un cas un peu plus général, la probabilité de la valeur x étant $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, avec φ pair, on trouve pour la même probabilité :

$$P_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega \cos l\omega \left[\varphi\left(\frac{o}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\cos\omega + 2\varphi\left(\frac{2}{n}\right)\cos 2\omega + \ldots + 2\varphi\left(\frac{n}{n}\right)\cos n\omega \right]^s$$

Voici comment Laplace transforme cette expression. On a :

$$2\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\omega = 2\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2}\,\varphi\left(\frac{x}{n}\right)n^2\,\omega^2 + \dots$$

Posons $x' = \left(\frac{x}{n}\right)$ $\quad d\,x' = \left(\frac{1}{n}\right)$ et supposons n très grand.

La quantité qui est entre crochets dans l'expression de P_l devient :

$$2\,n\int_o^1 \varphi(x')\,d\,x' \quad - \quad n^3\,\omega^2\int_o^1 x'^2\,\varphi(x')\,d\,x' + \dots$$

et avec

$$k = \int_o^1 \varphi(x')\,d\,x' \qquad k'' = \int_o^1 x'^2\,\varphi(x')\,d\,x'$$

elle se transforme en $n\,k\left(1 - \frac{k''}{k}\,n^2\,\omega^2 + \dots\right)$

Si on l'élève à la puissance s, tenant compte de ce que $n\,k = 1$ on aura $\left(1 - \frac{k''}{k}\,n^2\omega^2 + \dots\right)^s$

Lorsque s est grand, ceci « diffère peu » de e^{-t^2}, avec $t^2 = \frac{s\,k''}{k}\,n^2\,\omega^2$. Dès lors on aura

$$P_l = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\,\pi\,n}\sqrt{\frac{k}{k''\,s}}\,\cos\frac{l\,t}{n}\sqrt{\frac{k}{k''\,s}}\;e^{-t^2}\,d\,t =$$

$$\frac{1}{2\,n\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{k''\,s}}\;e^{-\frac{l^2}{4\,n^2}\cdot\frac{k}{k''\,s}}$$

On est donc à nouveau conduit à la loi limite de Laplace-Gauss.

Laplace généralise encore ce qui précède au cas où les probabilités varient à chaque épreuve, mais ces deux exemples suffisent pour montrer le chemin qu'il suit : 1° Etablissement de ce que nous appelons aujourd'hui la fonction caractéristique de la variable x résultant d'une épreuve : $\Sigma\ \varphi\left(\frac{x}{n}\right)e^{\,i\omega x}$. 2° Fonction caractéristique de la variable $\Sigma\ x$, résultant de l'ensemble des épreuves : $\left[\Sigma\ \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\ e^{\,i\omega x}\right]^s$ 3° Calcul de la limite de cette fonction caractéristique lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment : e^{-t^2}. 4° Détermination, par une formule analogue à la formule de réciprocité de Fourier, de la loi limite

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2}},\ \text{avec}\ \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{2\ n^2}\ \frac{k}{k''\ s}$$

Il applique dans tout ceci, implicitement, la propriété fondamentale des fonctions caractéristiques d'après laquelle la fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques des variables composantes, et il admet, sans le démontrer, que la limite de la fonction caractéristique est la fonction caractéristique de la loi limite.

On voit que la voie ainsi suivie par Laplace est identique, dans ses grandes lignes, à celle que l'on suit aujourd'hui pour la détermination des lois limites à l'aide des fonctions caractéristiques. Ses procédés ne sauront évidemment pas satisfaire les exigences actuelles de rigueur, mais il n'en est pas moins que l'idée fondamentale et l'emploi systématique des fonctions caractéristiques se trouvent déjà développés dans l'œuvre de Laplace.

2° La contribution de Poisson à la question des fonctions caractéristiques n'est pas essentielle : elle consiste surtout en quelques généralisations et simplifications des résultats de Laplace [3]. Il est cependant à remarquer que certains de ses résultats contiennent implicitement les formules de réciprocité de Fourier [4], valables cette fois-ci, dans le cas général, et non seulement pour les valeurs entières de la variable, comme chez Laplace.

3° Cauchy, au contraire, introduit la fonction caractéristique par des considérations entièrement différentes de celles de Laplace. Voici comment il y est conduit [5,a] :

Soient $\varphi_1(\varepsilon_1)$, $\varphi_2(\varepsilon_2$ ... $\varphi_n(\varepsilon_n)$ les lois de probabilité de $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ avec $a_i < \varepsilon_i < b_i$, et soit

$$R = \varphi_1(\varepsilon_1) \cdot \varphi_2(\varepsilon_2) \ldots \varphi_n(\varepsilon_n)$$

Soit de plus ω une fonction des $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, et soit P la probabilité pour que la valeur de ω soit comprise entre ω_1 et ω_2. On aura

$$P = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} I(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)\, R\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$$

à condition de choisir pour I une fonction (appelée par Cauchy « restricteur »), telle qu'elle soit nulle pour les valeurs des ε_i qui donnent une valeur de ω extérieur à (ω_1, ω_2), et égale à l'unité pour les autres valeurs. On vérifie que l'on peut prendre

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\vartheta(\tau - \omega) i}\, d\tau\, d\vartheta$$

Si on a, en particulier, $\omega = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$ et si l'on pose

$$A_j = \int_{a_j}^{b_j} e^{-i \lambda_j \vartheta \varepsilon_j}\, \varphi_j(\varepsilon_j)\, d\varepsilon_j$$

on aura

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} A_1 A_2 \ldots A_n\, e^{i\vartheta\tau}\, d\tau\, d\vartheta$$

On voit que A_j n'est autre que la fonction caractéristique, et que la formule précédente exprime la propriété fondamentale des fonctions caractéristiques, celle relative à leur produit.

Cauchy donne des applications concernant la loi de Gauss, dont il démontre, par cette méthode, la stabilité, et concernant la loi $f(\varepsilon) = \frac{k}{2} e^{-k|\varepsilon|}$ dont il détermine la fonction caractéristique, qui est évidemment la loi de Cauchy $\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}$.

Il établit d'ailleurs d'autre part plus explicitement la définition et les propriétés des fonctions caractéristiques, qu'il appelle [5,b] fonctions auxiliaires. Ainsi il pose, pour celle de ε

$$\varphi(\vartheta) = \int_a^b e^{-i\varepsilon\vartheta} f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et il remarque que celle de $\omega = \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$ sera

$$\Phi(\vartheta) = \varphi(\lambda_1 \vartheta) \cdot \varphi(\lambda_2 \vartheta) \ldots \varphi(\lambda_n \vartheta)$$

Il donne également la formule de réciprocité et s'en sert pour démontrer, sous certaines conditions, la loi limite de Laplace-Gauss.

4° C'est à Poincaré [6] que l'on doit la dénomination et la définition actuelle de la fonction caractéristique : valeur probable de $e^{\alpha x}$. Il signale la relation qui existe entre le développement de cette fonction et les moments de la loi des probabilités (c'est-à-dire les valeurs probables des diverses puissances de x) ainsi que les formules de réciprocité de Fourier. La propriété fondamentale des fonctions caractéristiques est également, pour la première fois, énoncée et démontrée explicitement : « Si deux quantités x et y sont indépendantes, et si $f(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$ sont les fonctions caractéristiques correspondantes, alors la fonction relative à $x + y$ sera le produit $f(\alpha) \cdot f_1(\alpha)$ ». Il retrouve d'ailleurs à l'aide des fonctions caractéristiques la propriété de stabilité de la loi de Gauss, sans se douter que Cauchy l'a déjà trouvée par la même méthode.

Poincaré applique la fonction caractéristique pour montrer que la somme d'un grand nombre d'erreurs partielles, très petites et indépendantes, suit à la limite une loi de Laplace-Gauss. Cependant, bien que sa manière de procéder soit sensiblement la même que celle que l'on emploie actuellement, la démonstration qu'il donne n'a aucune prétention de rigueur.

5° L'introduction de la méthode des fonctions caractéristiques dans la littérature moderne, et son développement actuel, sont entièrement dûs aux travaux de M. P. Lévy. C'est en lui donnant une base solide et l'appliquant d'une manière systématique à presque tous les problèmes de probabilité que P. Lévy en a fait un des instruments les plus précieux de la recherche moderne. Nous devons nous borner ici à énoncer quelques points essentiels de ses résultats, en renvoyant pour le reste à son Calcul des Probabilités.

Ayant modifié la définition de Poincaré [2,a], et adopté celle de la valeur probable de e^{ixt}, modification dont nous verrons les avantages au cours de notre travail, P. Lévy démontre deux théorèmes fondamentaux qui rendrons légitime l'emploi de la méthode des fonctions caractéristiques.

L'introduction des intégrales de Stieltjes lui permet d'abord de définir cette fonction, dans tous les cas, par la formule [2,a]

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dF(x)$$

où $F(x)$ désigne la probabilité pour que l'on ait $-\infty < \xi < x$. Il démontre alors (2,b), en établissant la formule d'inversion, valable quelle que soit la loi — continue ou discontinue — :

$$F(x) - F(o) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T=\infty} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \frac{1 - e^{ixt}}{it} dt$$

que cette fonction $\varphi(t)$ détermine complètement la loi.

Le second théorème important s'énonce comme suit : [2,c] Si une loi de probabilité, dépendant d'un paramètre, tend vers une limite, la fonction caractéristique de cette loi tend, elle aussi, et cela uniformément dans tout intervalle fini, vers une limite, celle-ci étant la fonction caractéristique de la loi limite.

Réciproquement, si une fonction caractéristique tend, uniformément dans tout intervalle fini, vers une limite, alors la loi correspondante tend, elle aussi, vers une limite, et celle-ci correspond à la fonction caractéristique limite.

En s'appuyant sur les résultats qui précèdent, il démontre alors en toute rigueur que, sous certaines conditions précises, la loi de probabilité de la quantité

$$X = \frac{\Sigma\, m_i\, \xi_i}{\Sigma\, m_i^2}$$

où m_i^2 est la valeur probable de x_i^2, et où $\xi_i = \frac{x_i}{m_i}$, tend, pour $n \longrightarrow \infty$, vers une loi de Gauss réduite $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Nous sommes obligé, pour la brièveté, d'arrêter ici notre résumé historique et de laisser de côté les autres résultats très importants tant de M. P. Lévy lui-même que de ceux qui, comme MM. Darmois, de Finetti, Kolmogoroff, Feldheim, se sont occupé à sa suite de la question des fonctions caractéristiques et en ont fait un puissant instrument de recherche et d'exposition.

CHAPITRE II.

1° Dans ce qui suit, nous adopterons pour la fonction caractéristique la définition (A). Dans ces conditions, pour que la fonction (réelle, d'une variable réelle) $\varphi(t)$, puisse être fonction caractéristique, il est clair qu'il faut et il suffit que l'on puisse la mettre sous la forme :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} \, d\mathrm{F}(x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(A)}$$

où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction non-décroissante et bornée. Si l'on a alors $\mathrm{F}(\infty) - \mathrm{F}(-\infty) = \mathrm{M}$, on pourra considérer la fonction $\mathrm{F}_1(x) = \frac{1}{\mathrm{M}} \mathrm{F}(x)$ ce qui conduira à $\frac{1}{\mathrm{M}} \varphi(t)$. Par l'addition d'une constante, ce qui ne change rien à $\varphi(t)$, on pourra s'arranger pour que l'on ait $\mathrm{F}_1(-\infty) = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{F}_1(\infty) = 1$. On sait que dès lors $\mathrm{F}_1(x)$ aura toutes les propriétés d'une fonction des probabilités totales [2,d], et sa fonction caractéristique sera $\frac{1}{\mathrm{M}} \varphi(t)$.

Or, M. D.-V. Widder a démontré récemment [7,a] que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(t)$ admette la représentation (A) avec $\mathrm{F}(x)$ non-décroissant, l'intégrale convergeant pour $a < t < b$, est que $\varphi(t)$ soit continu et que l'on ait :

$$\mathrm{K} \equiv \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{n} \varphi(s_i + s_j) \, \xi_i \xi_j \geqslant 0 \ldots \ldots$$

pour toute valeur de n, ξ et $a < s < b$.

Pour que $\varphi(t)$ puisse être fonction caractéristique, nous devons encore avoir, d'après ce qui a été dit au début, $F(x)$ borné. Or, on a :

$$\varphi(o) = \int d\,F(x) = F(\infty) - F(-\infty) \;;$$

nous devons donc avoir $\varphi(o) \leqslant M < \infty$, et cela suffit.

3° La démonstration de M. Widder repose sur deux lemmes importants. Le premier ayant un caractère très général, nous renverrons pour sa démonstration à l'ouvrage de son auteur, et nous ne démontrerons que le second. Le premier de ces lemmes qui est dû à M. S. Bernstein [8], est le suivant :

Si la fonction $\varphi(t)$ est continue pour $a < t < b$ est si :

$$\Delta^{2n}\varphi(c) = \sum_{k=o}^{2n} (-1)\,k \quad C_k^{2n} \quad \varphi(c + k\delta) \geqslant O \qquad n = o, 1, 2..$$

pour tout choix de c et δ tel que

$$a < c < c + \delta < \;..< c + 2n\delta < b$$

alors $\varphi(t)$ est analytique pour $a < t < b$.

Le second est de Hamburger [9,a] et s'énonce ainsi :
Soit $\varphi(z)$ une fonction analytique, régulière pour les valeurs réelles $a < z < b$. Soit α un point de cet intervalle et soit

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=o}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} (z - \alpha)^\nu \qquad \ldots \qquad (2)$$

le développement de $\varphi(z)$ autour de α. Posons de plus

$$C_m = \begin{vmatrix} c_1 & \ldots\ldots & c_{m+1} \\ c_2 & \ldots\ldots & c_m \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ c_m & \ldots\ldots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

Si les déterminants C_m sont tous positifs, alors la fonction $\varphi(z)$ existe dans la bande $a + \delta \leqslant z \leqslant b - \delta$, et elle peut y être représentée par l'intégrale de Stieltjes, absolument et uniformément convergente

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zu} \, d\,\Phi(u)$$

En effet, dans ces conditions, d'après la théorie des moments, [9,b] on peut déterminer une fonction non-décroissante $\Psi(u)$, telle que l'on ait

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} u^\nu \, d\,\Psi(u)$$

De plus, en s'appuyant sur le fait que l'on a, d'après un théorème de Cauchy, ϱ étant le rayon de convergence de (2)

$$c_\nu \gg \frac{\nu\,!\;k}{(\varrho - \delta)^\nu}$$

on peut montrer très aisément, que l'on a, quel que soit ν

$$\int_{o}^{\infty} u^\nu \, d\,\Psi(u) \leqslant \frac{\nu\,!\;k_1}{(\varrho - \delta)^\nu} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{o} u^\nu \, d\,\Psi(u) \leqslant \frac{\nu\,!\;k_1}{(\varrho - \delta)^\nu} \qquad (3)$$

Dès lors, formons la somme :

$$\varphi_2(z) = \sum_{\nu = o}^{\infty} \frac{\displaystyle\int_{o}^{\infty} u^\nu \, d\,\Psi(u)}{\nu\,!} (z - \alpha)^\nu$$

D'après (3) elle est absolument et uniformément convergente

$|z-\alpha| \leqslant \varrho - 2\,\delta$. On peut alors intervertir l'ordre des sommations et on obtient

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{(z-\alpha)\,u} \; d\,\Psi(u)$$

On aura de même

$$\varphi_1(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{(z-\alpha)\,u} \; d\Psi(u)$$

Mais on voit que l'on a

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-\alpha)\,u} \; d\Psi(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\,u} \; d\Psi(u)$$

avec

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-\alpha v} \; d\Psi(v)$$

C.Q.F.D.

3° Ces deux lemmes étant acquis, nous passons à la démonstration du théorème de M.Widder. La nécessité de ses conditions est immédiate et nous le démontrerons dans le n° suivant. Montrons qu'elles sont suffisantes. On vérifie d'abord facilement, et nous le verrons d'ailleurs au n° 5, que la condition $K \geqslant o$ entraîne la condition $\Delta^{2n}\,\varphi(c) \geqslant o$ du premier lemme. Comme d'autre part, $\varphi(t)$ est, par hypothèse, continu, il résulte de ce lemme qu'il est analytique. Dès lors, on se trouve dans les conditions d'application du lemme de Hamburger. Or, la positivité de K entraîne, on le sait, celle des déterminants C_m qui figurent dans ce lemme, et qui ne sont d'ailleurs autres que les déterminants (6) du n° 5. Il résulte alors du lemme de Hamburger que $\varphi(t)$ admet la représentation requise, C.Q.F.D.

4° Nous allons donner maintenant une interprétation simple des conditions (1), interprétation qui expliquera le rôle qu'elles jouent en Calcul des Probabilités.

D'abord les conditions (1) sont nécessaires. En effet, supposons que $\varphi(t)$ soit une fonction caractéristique. Alors K représente l'espérance mathématique (ou la valeur probable) de la quantité non-négative $[\xi_0 e^{-s_0 x} + \ldots + \xi_n e^{-s_n x}]^2$, et par suite ne peut pas être négatif non plus.

Pour ce qui est de la suffisance des conditions (1), nous ne la démontrerons pas ici d'une façon rigoureuse, et nous nous bornerons à des cas particuliers. Nous admettrons que $\varphi(t)$ peut être mis sous la forme (A) et nous montrerons que si, de plus, il satisfait à (1), $F(x)$ ne pourra pas être décroissant.

Supposons d'abord que $F(x)$ soit constitué uniquement par un nombre fini de sauts. Autrement dit, la probabilité ou la masse sera concentrée en un nombre fini de points, tous les autres ayant une probabilité nulle.

Soient $x_o, x_1 \ldots \quad \ldots x_n$ ces points, et soient $p_o, p_1 \ldots p_n$ les probabilités correspondantes. Nous avons à montrer que tous les p_i doivent être $> o$. Supposons, en effet, que l'on ait, par exemple, $p_o < o$. Déterminons les $n + 1$ nombres $\xi_o \ldots \xi_n$ de façon à ce qu'ils satisfassent aux n équations :

$$A_1 \equiv \xi_o e^{-s_o x_1} + \ldots \quad \ldots + \xi_n e^{-s_n x_1} = o$$

$$A_n \equiv \xi_o e^{-s_o x_n} + \ldots \quad \ldots + \xi_n e^{-s_n x_n} = o$$

où on pourra donner aux s_i des valeurs arbitraires avec la seule restriction que l'on ait :

$$A_o \equiv \xi_o e^{-s_o x_o} + \xi_1 e^{-s_1 x_o} + \ldots + \xi_n e^{-s_n x_o} \neq o$$

Dès lors on aura :

$$K \equiv p_o A_o^2 + p_1 A_1^2 + \ldots + p_n A_n^2 = p_o A_o^2 < o$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $K \geqslant o$. On est donc conduit à une contradiction en supposant un quelconque des $p_i < o$. Tous les p_i doivent donc être $> o$. C.Q.F.D.

Dans un cas plus général nous aurons, étant donné notre hypothèse,

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{o}^{n} \xi_i \, e^{-s_i x} \right)^2 d\,F\,(x) \geqslant o$$

Posons $\xi_i = \xi \left(\dfrac{i\,A}{n} \right) \qquad s_i = \dfrac{i\,A}{n}$

et supposons que x soit borné, au moins d'un côté, par exemple à gauche : $x > -$ B. Nous aurons, en faisant tendre n vers l'infini :

$$K = \int_{-B}^{\infty} \left(\int_{o}^{A} \xi\,(u)\; e^{-x\,u}\; d\,u \right)^2 d\,F\,(x)$$

et, à la limite, pour $A \longrightarrow \infty$

$$K = \int_{-B}^{\infty} \left(\int_{o}^{\infty} \xi\,(u)\; e^{-x\,u}\; d\,u \right)^2 d\,F\,(x)$$

Supposons alors que $F\,(x)$ soit décroissant sur un segment $\alpha_1\,\alpha_2$. Posons

$$\eta\,(x) = \int_{o}^{\infty} \xi\,(u)\; e^{-x\,u}\; d\,u \quad \dots\;\dots\;\dots \qquad (4)$$

Or il existe des formules d'inversion pour cette intégrale [7,b], formules valables pour toutes les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale (4) converge. Déterminons alors une fonction $\eta\,(x)$ de façon qu'elle satisfasse aux conditions suivantes : 1° on a $|\eta\,(x)|^2 < \varepsilon$ en dehors du segment $(\alpha_1\,\alpha_2)$. 2° soit $\alpha'_1\,\alpha'_2$ un segment fini, intérieur au segment $\alpha_1\,\alpha_2$ et soit $\displaystyle\int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d\,F\,(x) = -\,a$, a étant

$> o$ et fini. On prendra alors à l'intérieur du segment $\alpha'_1\, \alpha'_2$ $|\eta(x)|^2 > m$, avec $m = a\,\varepsilon$. 3° La « transformé » de $\eta(x)$ donnée par une des formules d'inversion mentionnées, soit $\xi\,(u)$. rend convergente l'intégrale (4) pour $-\,B < x < \infty$. On a alors

$$K = \int_{-B}^{\alpha_1} [\eta(x)]^2 \quad d\,F + \int_{\alpha_2}^{\infty} [\eta(x)]^2 \quad d\,F +$$

$$+\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \quad [\eta(x)]^2 \quad d\,F < \varepsilon - m\,a = o$$

Donc on aura, $K < o$, ce qui est absurde, donc $F(x)$ ne peut nulle part décroître. C.Q.F.D.

5° Nous pouvons transformer les conditions (1) de manière à les rendre plus facilement applicables. Elles équivalent d'abord à ce que les déterminants

$$\varphi(2\,s_o) \quad , \quad \begin{vmatrix} \varphi(2\,s_o) & \varphi(s_o + s_1) \\ \varphi(s_1 + s_o) & \varphi(2\,s_1) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \varphi(2\,s_o) & \varphi(s_o + s_1) & \varphi(s_o + s_2) \\ \varphi(s_1 + s_o) & \varphi(2\,s_1) & \varphi(s_1 + s_2) \\ \varphi(2\,s_2) & \varphi(s_2 + s_1) & \varphi(2\,s_2) \end{vmatrix}, \quad \text{etc.} \;\ldots \quad (5)$$

soient tous $\geqslant o$. On peut mettre ces déterminants en particulier sous la forme de déterminants de Hankel, en posant $s_i = s_o + i\,\alpha$ et $2\,s_o = t$. On aura, pour le troisième, par exemple :

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi(t+\alpha) & \varphi(t+2\,\alpha) \\ \varphi(t+\alpha) & \varphi(t+2\,\alpha) & \varphi(t+3\,\alpha) \\ \varphi(t+2\,\alpha) & \varphi(t+3\,\alpha) & \varphi(t+4\,\alpha) \end{vmatrix} \geqslant o$$

Si l'on fait subir à ces déterminants les transformations classiques que l'on applique aux déterminants de Hankel [10], on obtient

$$\varphi(t) \geqslant o \qquad \begin{vmatrix} \varphi(t) & \Delta\,\varphi(t) \\ \Delta\,\varphi(t) & \Delta^2\,\varphi(t) \end{vmatrix} \geqslant o$$

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \Delta\,\varphi(t) & \Delta^2\,\varphi(t) \\ \Delta\,\varphi(t) & \Delta^2\,\varphi(t) & \Delta^3\,\varphi(t) \\ \Delta^2\,\varphi(t) & \Delta^3\,\varphi(t) & \Delta^4\,\varphi(t) \end{vmatrix} \geqslant o \qquad \text{etc.}$$

Or puisque de cela il résulte, en particulier, que les éléments de la diagonale principale seront $\geqslant o$, on aura $\Delta^{2n}\,\varphi(t) \geqslant o$, fait dont nous nous sommes servi dans la démonstration du théorème de Widder au n° 3.

Dès lors, puisque $\varphi(t)$ est analytique, donc indéfiniment dérivable, ceci équivaut à

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi'(t) \;\ldots\ldots & \varphi^{(n)}(t) \\ \varphi'(t) & \varphi''(t) \;\ldots\ldots & \varphi^{(n+1)}(t) \\ \varphi^{(n)}(t) & \varphi^{(n+1)}(t) \;. & \varphi^{(2n)}(t) \end{vmatrix} \geqslant o \;\ldots\ldots (6)$$

Les conditions (6) sont évidemment nécessaires, et comme nous l'avons vu avec Hamburger [9], si on leur adjoint la condition d'analycité, elles sont également suffisantes.

Remarquons d'ailleurs, qu'elles donnent, pour $t = o$, toutes les relations qui doivent exister entre les moments d'une loi de probabilité.

Nous pouvons donner une interprétation analogue à celle du n° précédent pour les conditions (6), du moins pour leur nécessité. En effet elles expriment que si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique, et si $\mathrm{E}(n)$ désigne l'espérance mathématique de n, on aura :

$$\mathrm{E}\left(\xi_0\, e^{-xt} + \xi_1\, x\, e^{-xt} + \xi_2\, x^2\, e^{-xt} + . + \xi_n\, x^n\, e^{-xt}\right)^2 \geqslant o$$

6° Pour les valeurs successives de n les inégalités (6) donnent des conditions nécessaires, qui se présentent, pour les petites valeurs de n, sous une forme assez simple. Ainsi on a :

$$n = o \qquad \varphi \geqslant o$$

$$n = 1 \qquad \varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant o$$

$$n = 2 \qquad \varphi\,\varphi''\,\varphi^{\mathrm{IV}} + 2\,\varphi'\,\varphi''\,\varphi''' - (\varphi\,\varphi'''^2 + \varphi'^2\,\varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi''^3) \geqslant o$$

Les inégalités précédentes se réduisent encore davantage si l'on introduit la fonction $\psi(t) = \log \varphi(t)$. On a alors successivement :

$$n = o \qquad \psi \text{ réel}$$

$$n = 1 \qquad \psi'' \geqslant o$$

$$n = 2 \qquad 2\,\psi''^3 + \psi''\,\psi^{\mathrm{V}} - \psi'''^2 \geqslant o$$

et pour $n = 3$ on obtient, toute réduction faite, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \psi'' & \psi''' & \psi^{\mathrm{IV}} \\ \psi''' & 2\,\psi''^2 + \psi^{\mathrm{IV}} & 6\,\psi''\,\psi''' + \psi^{\mathrm{V}} \\ \psi^{\mathrm{IV}} & 6\,\psi''\,\psi''' + \psi^{\mathrm{V}} & 6\,\psi''^3 + 9\,\psi''\,\psi^{\mathrm{IV}} + 9\,\psi'''^2 + \psi^{\mathrm{VI}} \end{vmatrix} \geqslant o$$

On aura d'ailleurs d'autres conditions, moins restrictives mais plus simples, en écrivant que les éléments de la diagonale principale ou encore les mineurs principaux du second ordre doivent être positifs.

Remarquons en passant que la condition $\psi'' \geqslant o$ qui exprime que la courbe $y = \psi(t)$ tourne sa concavité vers les y positifs, est une généralisation d'une propriété bien connue des moments de divers ordres d'une loi de probabilité. On sait en effet [2,e], que la courbe $y(p) = \log \mathrm{E}(x^p)$ tourne sa concavité vers les $y > o$. D'ailleurs on obtient cette propriété en écrivant que $\mathrm{E}(\alpha\, x^p + \beta\, x^q)^2$ est nécessairement positif, tandis que la condition $\psi'' \geqslant o$ s'obtient, d'après notre interprétation, en écrivant que l'on a

$$\mathrm{E}\ [\alpha\,(e^x)^p + \beta\,(e^x)^q] \geqslant o$$

7° En dehors des inégalités (6) les conditions (5) peuvent nous fournir, pour un choix convenable des s_ν, d'autres conditions simples, qui sont évidemment dans leur ensemble équivalentes à l'ensemble des inégalités (6), mais qui sont indépendantes des quelques relations simples que nous avons déduites de (6) dans le n° précédent, et qui peuvent être pour certaines fonctions $\varphi(t)$ plus utiles.

Remarquons d'abord, que si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique, $\varphi'(o)$ ayant une valeur finie, on pourra toujours lui substituer une autre fonction caractéristique dont la dérivée à l'origine sera nulle. En effet on pourra prendre la fonction $\Phi = \varphi\, e^{-\varphi'(o)\, t}$, qui est la fonction caractéristique de la loi centrée, et on aura $\Phi'(o) = o$. Nous supposerons dans ce qui suit que cette transformation a déjà été effectuée sur les fonctions $\varphi(t)$ que nous considérerons.

Les deux premières fonctions (5) ne peuvent rien donner de plus que ce qui en a été tiré sous la forme (6). La troisième condition, au contraire, peut nous fournir une relation nouvelle, assez simple. Posons en effet : $s_0 = o,\ s_1 = \frac{x}{2},\ s_2 = \alpha$.

On aura

$$\begin{vmatrix} \varphi(o) & \varphi\left(\frac{x}{2}\right) & \varphi(\alpha) \\ \varphi\left(\frac{x}{2}\right) & \varphi(x) & \varphi\left(\frac{x}{2}+\alpha\right) \\ \varphi(\alpha) & \varphi\left(\frac{x}{2}+\alpha\right) & \varphi(2\alpha) \end{vmatrix} \geqslant o.$$

On calcule la valeur de ce déterminant, puis, en considérant α comme infiniment petit, on développe les φ suivant les puissances successives de α. Le terme indépendant de α et le coefficient de α disparaissent et dès lors c'est le coefficient de α^2 qui donnera le signe de l'expression. En écrivant que ce coefficient est $\geqslant o$ et en tenant compte de ce que $\varphi'(o) = o$ et $\varphi(o) = 1$, on aura

$$\varphi(t) - \varphi^2\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant \frac{\varphi'^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\varphi''(o)}$$

On peut d'ailleurs montrer que cette condition n'est pas équivalente aux trois premières conditions (6) que nous avons déduites au n° précédent, ou plutôt que celles-ci ne l'entraînent pas comme conséquence. On vérifiera par exemple que la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$, qui ne satisfait pas la condition que nous venons d'obtenir, satisfait au contraire les trois conditions (6) mentionnées.

8° Considérons maintenant des fonctions $\varphi(t)$ paires. On peut donner dans ce cas un autre système de conditions nécessaires. En effet nous pouvons écrire, si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique,

$$\varphi(t) = 2\int_o^\infty f(x)\, ch\, x t\, d x$$

Nous savons, d'après ce qui a été dit dans le cas général, qu'il est nécessaire que $\varphi(t)$ soit analytique ; dès lors nous pouvons le dériver un nombre quelconque de fois. Nous aurons :

$$k \text{ pair} \qquad \varphi^{(k)}(t) = 2\int_o^\infty x^k f(x)\, ch\, x t\, d x \geqslant o$$

$$k \text{ impair} \qquad \varphi^{(k)}(t) = 2\int_o^\infty x^k f(x)\, sh\, x t\, d x \begin{array}{ll} > o & \text{si } t > o \\ = o & \text{si } t = o \\ < o & \text{si } t < o \end{array}$$

On peut résumer ces conditions en écrivant qu'il faut avoir

$$\varphi^{(k)} \geqslant o \quad \text{si } k \text{ pair}$$

$$t\,\varphi^{(k)}(t) \geqslant o \quad \text{si } k \text{ impair} \ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (7).$$

Ces conditions ne sont cependant pas toujours suffisantes.

9° Dans les cas où $\varphi(t)$ est pair, nous pouvons obtenir également par d'autres méthodes de nouvelles conditions nécessaires. Ainsi la méthode qui nous a servi au n° 7 peut nous donner ici, pour un autre choix des s_i, un résultat assez simple. Prenons en effet $s_0 = -\frac{x}{2} + \alpha \quad s_1 = \frac{x}{2} \quad s_2 = -\frac{x}{2} - \alpha.$

Nous aurons, compte tenu de ce que $\varphi(t)$ est pair,

$$\begin{vmatrix} \varphi(x-2\alpha) & \varphi(o) & \varphi(x) \\ \varphi(\alpha) & \varphi(x) & \varphi(\alpha) \\ \varphi(x) & \varphi(\alpha) & \varphi(x+2\alpha) \end{vmatrix} \geqslant o$$

En opérant comme plus haut on est conduit à l'inégalité

$$\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant \frac{\varphi''}{\varphi}$$

et comme $\frac{\varphi''}{\varphi}$ est toujours $\geqslant o$, on voit qu'elle est plus restrictive que la seconde inégalité (6).

Mais on peut aussi obtenir, d'une manière plus directe, sans se servir des déterminants (5), des conditions qui sont parfois plus restrictives que celles que nous avons données jusqu'ici.

Remarquons d'abord que la condition $\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant o$ équivaut à l'inégalité de Schwarz :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xt}\, dx \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, e^{-xt}\, dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, e^{-xt}\, dx\right)^2$$

Or cette inégalité peut être renforcée en écrivant que l'on a aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-xt}\, dx \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, e^{-xt}\, dx \geqslant$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, e^{-xt}\, dx \right)^2$$

Si $\varphi(t)$ est quelconque, cette inégalité ne peut rien donner, car le côté droit ne s'exprime pas uniquement en fonction de $\varphi(t)$. Au contraire si $\varphi(t)$ est pair, ce qui entraîne la parité de $f(x)$, des transformations convenables nous conduisent à la condition

$$\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant \underset{t}{\mathrm{Max}}\; [\varphi'(i\,t)]^2$$

Ceci nous suggère que l'emploi direct de l'inégalité de Schwarz pourra nous donner d'autres formules intéressantes. Effectivement, pour $\varphi(t)$ pair, on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, [ch\, xt - 1]\, dx \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, [ch\, xt + 1]\, dx \geqslant$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, sh\, xt\, dx \right)^2$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, [ch\, xt + 1]\, dx \,.\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, [ch\, xt - 1]\, dx \geqslant$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, sh\, xt\, dx \right)^2$$

ce qui équivaut à

$$[\varphi(t) - \varphi(o)]\,[\varphi''(t) + \varphi''(o)] \geqslant [\varphi'(t)]^2$$

et

$$[\varphi''(t) - \varphi''(o)]\,[\varphi(t) + \varphi(o)] \geqslant [\varphi'(t)]^2$$

Cela montre en particulier que l'on doit avoir $\varphi(t \geqslant \varphi(o)$ et $\varphi''(t) \geqslant \varphi''(o)$ et on en tire d'autre part, par addition et multiplication, et en posant $\varphi(o) = 1$

$$\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant \varphi''(o) \quad \text{et} \quad [\varphi''^2 - \varphi''^2_o)\;(\varphi^2 \,..\, 1) \geqslant \varphi'^{\text{IV}}$$

D'une façon analogue les inégalités de Schwarz

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,[ch\,x\,t - 1]\,d\,x \;.\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\,x \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\,x\,sh\,\frac{x\,t}{2}\,f(x)\,d\,x\right)^2$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,[ch\;t\,x - 1]\,d\,x \;.\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,d\,x \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\,x\,sh\,\frac{x\,t}{2}\,f(x)\,d\,x\right)^2$$

donnent les conditions

$$(\varphi'' - \varphi''_o) > 2\,\varphi'^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad (\varphi - \varphi_o)\,\varphi''_o \geqslant 2\,\varphi'^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Par des procédés semblables on peut obtenir d'autres conditions du même genre.

Les inégalités précédentes sont d'ailleurs valables dans le cas général pour la partie paire de la fonction caractéristique.

10° On peut se demander dans quels cas les formes quadratiques K qui figurent dans les conditions (1) sont définies-positives et dans quels cas elles ne sont que semi-définies. Nous allons montrer que si 1° n est fini, 2° la transformé $f(x)$ *de* $\varphi(t)$ est positive et non nulle sur un intervalle de longueur finie, soit (α_1, α_2) et 3° $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$, alors les formes K seront définies-positives. On a en effet

$$K \equiv E\,(\xi_0\, e^{-s_0 x} + \quad \dots \quad \dots \quad + \xi_n\, e^{-s_n x})^2$$

Or comme $f(x)$ *est* $> o$ pour $\alpha_1 < x < \alpha_2$, et qu'il n'est jamais négatif, il faudra avoir, pour que l'on ait $K = o$,

$$A(x) \equiv \xi_0\, e^{-s_0 x} + \dots + \xi_n\, e^{-s_n x} \equiv 0 \qquad \text{si } \alpha_1 < x \leqslant \alpha_2.$$

Posons pour un instant $s_i = -t_i$ et développons $e^{t_i x}$ en série entière. Nous aurons

$$A(x) = A_0 + \frac{A_1\, x}{1} + \frac{A_2\, x^2}{2} + \dots \dots + \frac{A_n\, x^n}{n\,!} + \dots\dots$$

Or la fonction analytique $A(x)$ devant être identiquement nulle sur un segment fini, on sait qu'il faudra avoir, en particulier,

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = o$$

ou

$$\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n = o$$

$$\xi_0\, t_0 + \xi_1\, t_1 + \dots + \xi_n\, t_n = o$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\xi_0\, t_0^n + \xi_1\, t_1^n + \dots + \xi_n\, t_n^n = o$$

Pour que ceci soit possible on devra avoir

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ t_o & t_1 & \cdots\cdots & t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_o^n & t_1^n & \cdots\cdots & t_n^n \end{vmatrix} = o$$

Or on vérifie facilement que l'on a $D = \prod_{i>j\,;\,j=o} (t_i - t_j)$ donc si tous les t_i sont différents, D ne peut pas être nul [11,a], C.Q.F.D.

On a des résultats analogues en ce qui concerne les déterminants (6). En effet Widder a démontré [7,c] que si ces déterminants sont $> o$ pour $n = 0, 1 \ \ldots \ k - 1$ et si le déterminant pour $n = k$ est nul, alors les déterminants pour $n = k + 1$, $k + 2 \ldots$ seront également $= 0$, et la fonction $F(x)$ sera constituée uniquement par un nombre fini de sauts positifs. On voit immédiatement que ce dernier résultat est identique à celui que nous venons d'établir pour les formes (5).

11° Considérons en particulier les dérivées d'ordre pair de φ. On a

$$\varphi^{(2n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-xt} \, dF(x)$$

et l'on voit que l'on ne peut avoir, pour une valeur finie de t, $\varphi^{(2n)}(t) = o$, que si $dF(x)$ est partout nul, sauf peut-être à l'origine, cas qui correspond à une distribution réduite à une seule masse placée au point o. Ce cas banal écarté nous pourrons donc affirmer qu'il faudra avoir $\varphi^{(2n)}(t) > o$.

Ceci peu d'ailleurs être facilement déduit des conditions (6). A cet effet rappelons d'abord, ce qui se vérifie d'ailleurs immédiatement que si les formes quadratiques $\sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{n} a_{ij} x_i x_j$ sont positives (définies ou semi-définies), et si $a_{ii} = o$ alors on a aussi $a_{ij} = o$. Or, les conditions (6) expriment que les formes quadratiques $\Sigma\ \varphi^{(i+j)}\ (t)\ x_i\ x_j$ sont positives. Donc d'après ce qui précède $\varphi^{(2i)} = o$ entraîne $\varphi^{(i)} = \ldots = \varphi^{(i+n)} = o$, et on vérifie sans peine que ceci permet d'annuler toutes les dérivées de φ au point t jusqu'à l'ordre $2n - 1$ inclusivement, sauf peut-être la fonction φ elle-même. Or comme n peut être rendu arbitrairement grand et que φ est analytique, ceci entraîne qu'elle doit se réduire à une constante — cas que nous avons écarté plus haut.

CHAPITRE III.

1° Nous allons considérer maintenant la fonction caractéristique définie de la manière habituelle, c'est-à-dire sons la forme (B). Nous avons mentionné dans l'introduction les avantages de cette définition : elle fait correspondre à chaque loi de probabilité une fonction caractéristique, et on démontre [2,b] qu'inversement la fonction caractéristique détermine complètement la loi, c'est-à-dire $F(x)$, que l'on obtient d'ailleurs par la formule d'inversion de M. P. Lévy [2,b].

$$F(x) - F(o) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} \, dt \quad .. \quad (1)$$

En particulier si $F(x)$ est dérivable on a les formules de réciprocité de Fourier, si l'on pose $f(x) = F'(x)$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) \, dx$$

et

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) \, dt \quad .... \quad (2)$$

Dès lors, comme dans le cas précédent, pour que la fonction (en général complexe, d'une variable réelles), $\varphi(t)$ puisse être fonction caractéristique il faut et il suffit qu'elle admette une représentation de la forme

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\, F(x)$$

où $F(x)$ est non-décroissant et borné, ou encore que la formule (1) fournisse une telle fonction. Si $F(x)$ est dérivable, cette condition sera que $f(x) = F'(x)$ soit $\geqslant o$ et intégrable pour $-\infty < x < \infty$.

Ce deuxième cas était étudié et résolu par Mathias [11,b], et ses résultats ont été complétés et étendus au cas général par S. Bochner [12,a].

En effet ce dernier a démontré que, pour que $\varphi(t)$ satisfasse aux conditions précédentes, il faut et il suffit qu'il possède les propriétés suivantes : 1° il est continu et borné ; 2° il est hermitien, c'est-à-dire on a $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$; 3° on a

$$K \equiv \sum_{i=o}^{n} \sum_{j=o}^{n} \varphi(s_i - s_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqslant o \quad \dots \quad (3)$$

quels que soient les nombres réels s_i et les quantités complexes ξ_i.

2° Comme dans le chapitre précédent la nécessité des conditions (3) découle de ce que, si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique, on aura

$$K \equiv E\left[\left(\xi_o e^{i s_o x} + \dots \xi_n e^{i s_n x}\right)\left(\bar{\xi}_o e^{-i s_o x} + \dots + \bar{\xi}_n e^{-i s_n x}\right)\right]$$

$$= E\left[\left|\sum_j \xi_j e^{i s_j x}\right|^2\right] \geqslant o.$$

Pour démontrer leur suffisance nous supposerons d'abord que $\varphi(t)$ est absolument intégrale dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. L'intégrale $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx}\, dt$ existe alors, et on a

$\varphi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{itx}\, dx$ [$f(x)$ pouvant avoir *a priori* un signe quelconque]. Nous montrerons que, si de plus les trois conditions du n° 1 sont vérifiées, $f(x)$ sera positif. Pour cela on montre d'abord, comme au Chapitre II, que (3) entraîne

$$K \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \xi(u)\, e^{ixu}\, du \,.\, \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi(u)}\, e^{-ixu}\, du \right] f(x)\, dx \geqslant o$$

Posons $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(u)\, e^{ixu}\, \mathrm{du} = \eta(x)$; on aura $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi(u)}\, e^{-ixu} = \overline{\eta(x)}$

et $K \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\eta(x)|^2 \; \mathrm{f}(x)\, dx \geqslant o.$

Supposons alors $f(x)$ négatif dans l'intervalle fini (α_1, α_2). Nous pourrons choisir une fonction $\eta(x)$ telle qu'elle soit nulle à l'extérieur de l'intervalle (α_1, α_2) et différente de zéro à l'intérieur. Sous des conditions très larges (il suffit par exemple [12,a] de prendre pour $\eta(x)$ une fonction deux fois dérivable), on aura alors

$$\eta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\, \eta(x)\, dx$$

et en prenant pour $\xi(u)$ la fonction ainsi obtenue on aura $k < o$, ce qui est absurde. Donc $f(x)$ ne peut être négatif, C.Q.F.D.

Supposons maintenant que $\varphi(t)$, satisfaisant toujours aux trois conditions du n° 1, ne soit plus absolument intégrale. Considérons alors la fonction

$$\Phi(t) = \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, g(x)\, dx$$

$g(x)$ étant $\geqslant o$ et absolument intégrable $\Phi(t)$ satisfaira également aux trois conditions du n° 1. En effet les deux premières se vérifient immédiatement, et quant à la troisième, on a

$$\sum_{j\,k}^{n} \Phi\,(s_j - s_k)\,\xi_j\,\bar{\xi}_k =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ \sum_{j\,k}^{n} \varphi\,(s_i - s_k)\ e^{i\,s_j\,x}\ \xi_j\ \ldots\ e^{-i\,s_k\,x}\,\bar{\xi}_k\right] g\,(x)\ dx$$

et comme la quantité entre crochets est, à cause de (3), $> o$ l'expression entière le sera. $\Phi\,(t)$ satisfait donc également à la troisième condition.

En particulier, on peut prendre pour $\Phi\,(t)$ la fonction $\varphi_n\,(t)$:

$$\varphi_n\,(t) = \varphi\,(t)\ e^{-\frac{x^2}{n}}$$

Ces fonctions étant absolument intégrables et satisfaisant aux trois conditions du n° 1 sont par conséquent des fonctions caractéristiques. Mais si $n \longrightarrow \infty$ ces fonctions tendent vers $\varphi\,(t)$, qui est par suite, d'après un théorème de M. P. Lévy [2,c], lui-même fonction caractéristique. La proposition se trouve ainsi démontrée dans le cas général.

3° On peut encore exprimer les conditions (3) en écrivant que les déterminants, dont la valeur est réelle puisque $\varphi\,(t)$ est hermitien,

$$\varphi\,(o)\quad ;\quad \begin{vmatrix} \varphi\,(o) & \varphi\,(s_0 - s_1) \\ \varphi\,(s_1 - s_0) & \varphi\,(o) \end{vmatrix}\ ;$$

$$\begin{vmatrix} \varphi\,(o) & \varphi\,(s_0 - s_1) & \varphi\,(s_0 - s_2) \\ \varphi\,(s_1 - s_0) & \varphi\,(o) & \varphi\,(s_1 - s_2) \\ \varphi\,(s_2 - s_0) & \varphi\,(s_2 - s_1) & \varphi\,(o) \end{vmatrix}\ ;\ \text{etc.}\ \ldots \qquad (4)$$

sont tous $\geqslant o$. Si l'on pose comme au Chapitre II, $s_1 = s_o + i\alpha$ on aura

$$\begin{vmatrix} \varphi(o) & \varphi(-\alpha) & \dots & \varphi(-n\alpha) \\ \varphi(\alpha) & \varphi(o) & \dots & \varphi(-\overline{n-1}\,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(n\alpha) & \dots & \dots & \varphi(o) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} \varphi(n\alpha) & \dots & \varphi(o) \\ \varphi(\overline{n-1}\,\alpha) & \dots & \varphi(-\alpha) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(o) & \dots & \varphi(-n\alpha) \end{vmatrix} \geqslant o$$

Ceci étant un déterminant de Hankel on aura, si $\varphi(t)$ est dérivable à l'origine, en faisant tendre α vers o

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} \varphi(o) & \dots\dots & \varphi^{(n)}(o) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^{(n)}(o) & \dots\dots & \varphi^{(2n)}(o) \end{vmatrix} \geqslant o \;.. \quad (5)$$

Les conditions (5) sont analogues aux conditions (6) du Chapitre II, mais on voit qu'elles ne sont valables qu'à l'origine. On arrive d'ailleurs au même résultat en essayant de généraliser l'interprétation que nous avons donnée de ces conditions au chapitre précédent. En effet on vérifie facilement qu'en écrivant que l'on a

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\xi_o\, e^{ixt} + \xi_1\,(ix\; e^{ixt} + \,..\, + \xi_n\,(ix)^n\, e^{ixt}\Big)$$

$$\Big(\overline{\xi_o}\, e^{-ixt} + \overline{\xi_1}\,(-ix)\, e^{-ixt} + \,.\, + \overline{\xi_n}\,(-ix)^n\, e^{-ixt}\Big)\Big] \geqslant o$$

on tombe précisément sur les conditions (5).

4° Comme les transformations que nous avons effectuées au n° précédent sur les conditions (4) ne nous ont pas donné des relations liant la valeur de $\varphi(t)$ et celle de ses dérivées en un point quelconque, nous pouvons essayer un autre choix des s_i.

Les deux premières conditions (4) sont bien connues et s'interprètent immédiatement. Ce sont en effet les inégalités

$$\varphi(o) \geqslant o \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x)| \leqslant \varphi(o)$$

Dans la troisième posons par exemple $s_0 = x$, $s_1 = \alpha$, $s_2 = -\alpha$. Opérant comme dans les exemples du Chapitre II, et en supposant que $\varphi(t$ a été mis sous une forme telle que $\varphi'(o) = o$ et $\varphi(o) = 1$, on aura

$$(|\varphi|^2 - 1)\ \varphi_0'' - |\varphi'|^2 \geqslant o$$

Il est à remarquer que φ''_0 est négatif [d'après (5)] ; posons alors, comme il est d'usage, $\varphi''_0 = -\sigma^2$. La condition précédente devient $\sigma^2 \geqslant \sigma^2\ |\varphi|^2 + |\varphi'|^2$, ou, si la loi est normée, c'est-à-dire si l'on a $\sigma^2 = 1$: $|\varphi|^2 + |\varphi'|^2 \leqslant 1$.

On pourrait déduire d'autres conditions pour les valeurs successives de n, mais elles se compliquent rapidement.

Au contraire, l'inégalité de Schwarz peut nous donner encore quelques conditions assez simples, si l'on met en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de $\varphi(t)$, soit $\varphi = P + i\,Q$. Ainsi les inégalités

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ [1 - \sin x t]\ dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\ [1 + \sin x t]\ dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x) \cos x t\ dx\right)^2$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ [1 + \sin x t]\ dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\ [1 - \sin x t]\ dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x) \cos x t\ dx\right)^2$$

donnent

$$(1 - Q) \quad (- P''_0 - Q'') - Q'^2 \geqslant o$$

et

$$(1 + Q) \quad (- P''_0 + Q'') - Q'^2 \geqslant o$$

On obtient d'une manière analogue les quatre inégalités

$$\left[- P''(o) + Q''(t)\right] \geqslant \left[Q'\left(\frac{t}{2}\right) + P'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$$

et

$$\left[- P''(o) - Q''(t)\right] \geqslant \left[Q'\left(\frac{t}{2}\right) - P'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$$

$$- P''(o)\left[1 - Q(t)\right] \geqslant \left[Q'\left(\frac{t}{2}\right) + P'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$$

et

$$- P''(o)\left[1 + Q(t)\right] \geqslant \left[Q'\left(\frac{t}{2}\right) - P'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2$$

5° Nous allons résumer dans ce qui suit quelques propriétés importantes des fonctions caractéristiques, qui peuvent être utiles lorsqu'il s'agit de décider si une fonction donnée appartient ou non à cette catégorie.

Ainsi M. P. Lévy a montré [2,f] que si $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique de la loi $F(x)$, on aura

$$I(x) = \lim_{T = \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{-itx} \, dx = F(x + o) - F(x - o)$$

c'est-à-dire égale à la masse située au point x. En particulier, si $F(x)$ est continu $I = o$.

M. Bochner a, dans son ouvrage cité [12,b] retrouvé ce résultat et l'a complété de la manière suivante. Soit $\alpha(\xi)$ une fonction continue et bornée et telle que la valeur limite

$$\varphi(t) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \alpha(\xi)\,\overline{\alpha(\xi - t)}\, d\,\xi$$

existe. Dans ce cas $\varphi(t)$ est fonction caractéristique. On montre en effet aisément qu'il satisfait aux trois conditions du n° 1. Si l'on considère alors la quantité

$$J(x) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \alpha(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\,\xi$$

on trouve la relation $I(x) = |J(x)|^2$.

Ce résultat est à rapprocher de ceux de Mathias [11,c], concernant le cas où $F(x)$ est dérivable. En effet, ayant montré que si l'intégrale

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)\, \overline{a(\xi - t)}\, d\,\xi$$

existe $\varphi(t)$ est fonction caractéristique, l'auteur affirme qu'inversement, sous certaines conditions d'intégrabilité, on aura, en posant

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx}\, dt \quad \text{et} \quad a(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{f(x)}\, e^{ix\xi}\, dx$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)\, \overline{a(\xi - t)}\, d\,\xi$$

On voit que $a(\xi)$, qui est analogue à $\alpha(\xi)$, est la fonction caractéristique, à une constante près, de $\sqrt{f(x)}$; il n'est donc pas étonnant que la quantité $J(x)$ de Bochner représente la racine carrée de la masse située en x.

Il est à remarquer que le résultat précédent de Mathias est en somme la réciproque, au sens des formules de réciprocité de Fourier, d'un cas particulier de cette proposition bien connue que la loi de la somme de deux variables indépendantes a pour fonctions caractéristique le produit des fonctions caractéristiques des lois composantes.

6° Si la fonction $\varphi(t)$ est réelle, pour qu'elle puisse être fonction caractéristique elle doit être paire, puisque, d'après la deuxième condition du n° 1, il est nécessaire qu'elle soit hermitienne. Pour ces fonctions réelles, paires et continues, nous pouvons donner, d'après Mathias [11,d], un autre système de conditions nécessaires et suffisantes. Posons en effet

$$C_{2n}(p) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p\,x)\, e^{-x^2}\, H_{2n}(x)\, d\,x$$

où

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{d\,x^n} e^{-x^2}$$

Mathias démontre alors que, pour que $\varphi(t)$ soit fonction caractéristique, il faut et il suffit que l'on ait $C_{2n}(p) \geqslant o$ pour tout $p > o$ et $n = 1, 2, \ldots$ A vrai dire, il faudrait encore ajouter la condition que $\varphi(o)$ soit borné. Pour montrer la nécessité de la condition, remarquons d'abord, ce qui se vérifie immédiatement, que si $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique différente d'une constante, alors $(-1)^n \varphi^{2n}(t)$ est également fonction caractéristique, du moins si $\varphi^{2n}(o)$ est borné. Dès lors, on voit sans peine que, si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique, on aura, quels que soient n et $p > o$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\, d\,t$$

où $\Phi(t)$ est fonction caractéristique. Mais alors si $F(x)$ est dérivable au point $x = o$ on aura $C = F'(o)$ et C devra par conséquent être $\geqslant o$, et si $F(x)$ est discontinu, l'intégrale donnant C n'aura pas de sens, mais d'après les résultats du n° précédent

$$C_1 = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int \Phi(t)\, dt$$

sera égale à la masse située au point o et devra par conséquent être encore $\geqslant o$. Pour la suffisance nous renvoyons à la démonstration de l'article cité de Mathias.

7° Dans le cas où $\varphi(t)$ est pair, la méthode des inégalités de Schwarz nous donne des conditions analogues à celles obtenues au Chapitre II. Ainsi on démontre immédiatement que l'on a encore

$$(1+\varphi)(\varphi'' - \varphi''_o) - \varphi'^2 \geqslant o \quad \text{et} \quad (1-\varphi)(-\varphi'' - \varphi''_o) - \varphi'^2 \geqslant o.$$

et, en les additionnant et multipliant :

$$\varphi\,\varphi'' - \varphi'^2 \geqslant \varphi''_o \qquad \text{et} \qquad (1-\varphi^2)(\varphi''^2_o - \varphi''^2) \geqslant \varphi'^4.$$

Il est cependant à remarquer qu'ici φ''_o est $\leqslant o$.

On aura aussi, par la même méthode :

$$-\varphi''_o + \varphi'' \geqslant 2\,\varphi'^2\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad -\varphi''_o(1-\varphi) \geqslant 2\,\varphi'^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Le calcul des déterminants (4) du n° 3 devient également plus simple lorsque $\varphi(t)$ est pair. Ainsi pour $n = 2$ (déterminant à trois rangées) si l'on pose $s_o = t \quad s_1 = o \quad s_2 = -t$, on aura la condition

$$1 + \varphi(t) \geqslant 2\,\varphi^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

condition que l'on peut d'ailleurs vérifier directement par une inégalité de Schwarz.

8° La relation précédente lie les valeurs de $\varphi(t)$ en trois points différents, à savoir aux points $o, \frac{t}{2}$ et t. Si l'on veut au contraire obtenir toutes les relations que l'on peut tirer de (4) et liant la valeur de $\varphi(t)$ en deux points seulement, par exemple à l'origine et en un point quelconque t, on peut procéder de la manière suivante. On prendra dans (4) $s_o = t$ et $s_i = -(i-1)\,\alpha$. On obtient ainsi la condition

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t) & \varphi(t+\alpha)\dots\varphi(t+l\alpha) & \dots\varphi(t+n\alpha) \\ \varphi(t) & 1 & \varphi(\alpha) \quad \dots\varphi(l\alpha) & \dots\varphi(n\alpha) \\ \varphi(t+\alpha) & \varphi(\alpha) & 1 \quad \dots\varphi(\overline{l-1}\,\alpha) & \dots\varphi(\overline{n-1}\,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(t+k\alpha) & \varphi(k\alpha) & \dots\dots \quad \dots\varphi(|l-k|\,\alpha) & \dots\varphi(\overline{n-k}\,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(t+n\alpha) & \varphi(n\alpha) & \dots\dots \quad \dots\varphi(|l-n|\,\alpha) & \dots 1 \end{vmatrix} \geqslant o$$

Il faudra ensuite faire tendre α vers zéro et écrire que la partie principale de D_n est $\geqslant o$. Ce calcul devient cependant, pour n tant soit peu grand, très compliqué. Par une transformation convenable de D_n on peut cependant obtenir directement l'expressions finale. Posons

$$H^n = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(\alpha) & \dots\dots & \varphi(n\alpha) \\ \varphi(\alpha) & 1 & \dots\dots & \varphi(\overline{n-1}\,\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(n\alpha) & \dots\dots & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}$$

On sait que ce déterminant, qui est hankélien, a pour partie principale, si $\alpha \longrightarrow o$

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \alpha^{n(n+1)} H^n_o =$$

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \alpha^{n(n+1)} \begin{vmatrix} \varphi(o) & \dots\dots & \varphi^n(o) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi^n(o) & \dots\dots & \varphi^{(2n)}(o) \end{vmatrix}$$

Soit H^{lk} le mineur de H^n, pris avec son signe, relatif à l'élément de la $l+1^{\text{ieme}}$ colonne et de la $k+1^{\text{ieme}}$ ligne. On aura

$$D_n = H^n - \sum_{k=o}^{n} \sum_{l=o}^{n} \varphi(t+k\alpha)\ \varphi(t+l\alpha)\ H^{lk} =$$

$$= H^n - \sum_{k,l} \sum_{p,q} \varphi^{(p)}(t)\ \varphi^{(q)}(t)\ \frac{\alpha^{p+q}}{p!q!}\ k^p\ l^q\ H^{lk} =$$

$$= H^n - \sum_{p,q} \left[\frac{\alpha^{p+q}}{p!q!}\ \varphi^{(p)}(t)\ \varphi^{(q)}(t) \sum_{k,l} k^p\ l^q\ H^{lk}\right]$$

$$= H^n + \sum_{p,q} A_{p,q} \frac{\alpha^{p+q}}{p!q!}\ \varphi^{(p)}(t)\ \varphi^{(q)}(t)$$

avec la convention $o^o = 1$ et $A_{p,q} = - \sum_{k,l} k^p\ l^q\ H^{lk}$.

On vérifie facilement que l'on a, si $p\ q \neq o$,

$$A_{p,q} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \varphi(2\alpha) & \dots & \varphi(n\alpha) \\ \varphi(\alpha) & -1^p & \varphi(\alpha) & \dots & \dots\dots \\ \varphi(2\alpha) & -2^p & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(n\alpha) & -n^p & \dots\dots & \dots & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(\alpha) & 0 & \dots \\ \varphi(\alpha) & 1 & -1^p\,2^q & \dots \\ \varphi(2\alpha) & \varphi(\alpha) & -2^p\,2^q & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ \varphi(n\alpha) & \varphi(\overline{n-1}\alpha) & -n^p\,2^q & \dots \end{vmatrix} + \dots \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & -1^p\,l^q & \dots \\ \dots & \dots & -2^p\,l^q & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \varphi(n\alpha) & \dots & -n^p\,l^q & \dots \end{vmatrix} + \dots =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(\alpha) & \dots & \varphi(l\,\alpha) & \dots & \varphi(n\,\alpha) \\ \varphi(\alpha) & 1 - 1^p\,1^q & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(k\,\alpha) & \dots\dots & \dots & \varphi(|l-k|\,\alpha) - k^p\,l^q & \dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(n\,\alpha) & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & 1 - n^p\,n^q \end{vmatrix} - H^n$$

Pour $p = o$, $q = 0$, on a

$$A_{oo} = - \Sigma\, H^{lk} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 - 1 & \varphi(\alpha) - 1 & \dots & \varphi(n\,\alpha) - 1 \\ \varphi(\alpha) - 1 & 1 - 1 & \dots & \varphi(\overline{n-1}\,\alpha) - 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(n\,\alpha) - 1 & \varphi(\overline{n-1}\,\alpha) - 1 & \dots & 1 - 1 \end{vmatrix} - H^n$$

ce qui donne facilement

$$A_{oo} = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,\alpha^{n(n+1)} \begin{vmatrix} \varphi''(o) & \dots & \varphi^{(n)}(o) \\ \varphi'''(o) & \dots & \varphi^{(n+1)}(o) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi^{(n)}(o) & \dots & \varphi^{(2n)}(o) \end{vmatrix}$$

Enfin si $p = o$ $q \neq 0$ on a

$$A_{o,q} = -\Sigma\, l^q\, H^{lk} =$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & \varphi(\alpha) - 1 & \dots\ \varphi(l\,\alpha) - l^2 & \dots & \varphi(n\,\alpha) - n^2 \\ \varphi(\alpha) & 1 - 1 & \dots\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots & \dots\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \varphi(k\,\alpha) & \varphi(\overline{k-1}\,\alpha) - 1 & \dots\ \varphi(|l-k|\,\alpha - l^q & \dots & \varphi(\overline{n-k}\,\alpha) - n^q \\ \dots & \dots\dots & \dots\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \varphi(n\,\alpha) & \dots\dots & \dots\ \dots\dots\dots & \dots & 1 - n^q \end{array}\right| - H^n$$

D'ailleurs si $p + q \neq o$, $\alpha^{p+q}\, H^n$ est de degré supérieur en α que H^n et par conséquent n'interviendra pas dans la partie principale de D_n.

Soit alors $||a_{lk}||$ le déterminant dont le terme de la $l + 1^{\text{ième}}$ colonne et de la $k + 1^{\text{ième}}$ ligne est a_{lk}. On aura

$$A_{p,q} = ||\, \varphi(|l-k|\,\alpha) - l^q\, k^p\, || - H^n$$

valable si $p\, q \neq o$ et avec la convention $o^o = 1$.

Nous allons montrer que la partie principale de $A_{p,q}$ est exactement de degré $n(n+1) - (p+q)$ en α, si $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$, et de degré supérieur si p ou q dépassent n. D'après la remarque précédente, il nous suffit de considérer le déterminant

$$A'_{p,q} = ||\, \varphi(|l-k|\,\alpha) - l^q\, k^p\, ||$$

Appliquons lui les transformations classiques que l'on fait subir à un déterminant de Hankel [10], et posons en général $\Delta_k\,(a_n) = \sum_i (-1)^i\, C_i^k\, \alpha_{n-i}$. D'ailleurs on aura $\Delta_k\, \varphi\,(n\,\alpha) = \varepsilon\, \alpha^k\, \varphi^{(k)}\,(o) + \dots$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Notre déterminant deviendra :

$$\begin{vmatrix}
1 & \Delta_1\varphi & \cdots & \Delta_q\varphi & \Delta_{q+1}\varphi & \cdots & \Delta_n\varphi \\
\Delta_1\varphi & \Delta_2\varphi - 1 & \cdots & \Delta_{q+1}\varphi - \Delta_q(q)^q & \Delta_{q+2}\varphi & \cdots & \Delta_{n+1}\varphi \\
\Delta_2\varphi & \Delta_3\varphi - \Delta_2(2^p) & \cdots & \Delta_{q+2}\varphi - \Delta_q(q)^q\Delta_2(2^p) & \Delta_{q+3}\varphi & \cdots & \Delta_{n+2}\varphi \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Delta_p\varphi & \Delta_{p+1}\varphi - \Delta_p(p^p) & \cdots & \Delta_{q+p}\varphi - \Delta_q(q^q)\Delta_p(p^p) & \Delta_{q+p+1}\varphi & \cdots & \Delta_{n+p}\varphi \\
\Delta_{p+1}\varphi & \Delta_{p+2}\varphi & \cdots & \Delta_{q+p+1}\varphi & \Delta_{q+p+2}\varphi & \cdots & \Delta_{n+p+1}\varphi \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Delta_n\varphi & \Delta_{n+1}\varphi & \cdots & \Delta_{q+n}\varphi & \Delta_{q+n+1}\varphi & \cdots & \Delta_{2n}\varphi
\end{vmatrix}$$

Les termes constants disparaissent donc à partir de la $q + 2^{\text{ieme}}$ colonne et de la $p + 2^{\text{ieme}}$ ligne, et ils sont proportionnels dans deux rangées quelconques. Multiplions alors la $q + 1^{\text{ieme}}$ colonne par des constantes convenables et retranchons-la des colonnes n° 2, 3... q, puis opérons de même avec la ligne n° $p + 1$. Nous aurons fait disparaître ainsi tous les termes constants à l'exception de celui de la $q + 1^{\text{ieme}}$ colonne et $p + 1^{\text{ieme}}$ ligne, cette constante étant d'ailleurs égale à $-\Delta_q(q^q)\,\Delta_p(p^p) = -\,q\,!\;p\,!$. Dès lors, étant donné la forme de $\Delta\varphi$, nous pourrons mettre en facteur dans chaque rangée d'ordre k, α^{k-1}, exception faite de la $q + 1^{\text{ieme}}$ colonne et de la $p + 1^{\text{ieme}}$ ligne. Nous aurons donc, en facteur du déterminant, $\alpha^{2(1+2+\ldots+n)-(p+q)} = \alpha^{n(n+1)-(p+q)}$ et le coefficient de cette puissance de α sera, compte tenu du fait que φ est pair

$$\begin{vmatrix}
1 & o & \varphi''(o) & o & \varphi^{\text{IV}}(o) & \cdots & o & \cdots & \cdots \\
o & -\varphi''(o) & o & -\varphi^{\text{IV}}(o) & o & \cdots & o & \cdots & \cdots \\
\varphi''(o) & o & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & o & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
o & o & o & \cdots & \cdots & \cdots & -p!\,q! & \cdots & o \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & o & \cdots & \varphi^{(2n)}(o)
\end{vmatrix}$$

c'est-à-dire, au signe près, le mineur relatif au terme de la $q + 1^{\text{ieme}}$ colonne et $p + 1^{\text{ieme}}$ ligne du déterminant H_0^n, multiplié par $-p!q!$. On vérifie facilement que l'on tombe finalement sur la condition

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[H^n_0 + \Sigma (-1)^p H^n_{p,q} \; \varphi^{(p)}(t)\, \varphi^{(q)}(t) \right] \geqslant o$$

avec $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, $p + q =$ pair, $H^n_{p,q}$ étant le mineur de H^n_0 défini plus haut.

Il nous faut encore montrer que le degré de $A_{p,q}$ dépasse $n(n+1) - (p+q)$ si p ou q dépassent n. Supposons en effet $q > n$ et effectuons les mêmes transformations que plus haut. Il est clair que l'on ne pourra aller que jusqu'à la colonne d'ordre n et en conséquence on pourra mettre en facteur de $A_{p,q}$

$$\alpha^{\,n(n+1)-(p+n)}.$$

Or puisque $q > n$, on a $n(n+1) - (p+n) > n(n+1) - (p+q)$, C.Q.F.D.

La formule précédente est valable tant que les dérivées qui y figurent existent. Elle donne d'ailleurs pour les valeurs successives de n, si l'on pose encore $(-1)^{\frac{n}{2}} \varphi^{(n)}(o) = \varphi^n_1$,

$n = 1 \qquad [\varphi_1''] - \varphi^2 [\varphi_1''] - \varphi'^2 \geqslant o$

$n = 2 \qquad [\varphi_1''(\varphi_1^{IV} - \varphi_1''^2)] - \varphi^2 [\varphi_1'' \varphi_1^{IV}] - 2 \varphi \varphi'' [\varphi_1''^2] -$

$\qquad\qquad \varphi'^2 [\varphi_1^{IV} - \varphi_1''^2] - \varphi''^2 [\varphi_1''] \geqslant o$

$n = 3 \qquad [(\varphi_1^{IV} - \varphi_1''^2)(\varphi_1'' \varphi_1^{VI} - \varphi_1^{IV2})] - \varphi^2 [\varphi_1^{IV} (\varphi_1'' \varphi_1^{VI} - \varphi_1^{IV2})] -$

$\qquad\qquad 2 \varphi \varphi'' [\varphi_1'' (\varphi_1'' \varphi_1^{VI} - \varphi_1^{IV2})] - \varphi'^2 [\varphi_1^{VI} (\varphi_1^{I} - \varphi_1''^2)] -$

$\qquad\qquad 2 \varphi' \varphi''' [\varphi_1^{IV} (\varphi_1^{VI} - \varphi_1''^2)] - \varphi''^2 [\varphi_1'' \varphi_1^{VI} - \varphi_1^{IV2}] -$

$\qquad\qquad \varphi'''^2 [\varphi_1'' (\varphi_1^{IV} - \varphi_1''^2)] \geqslant o$

où les quantités entre crochets sont toutes des constantes positives.

Il est d'ailleurs intéressant à remarquer que les premiers membres des inégalités précédentes sont, pour $t \to o$ des infiniment petits du même ordre que $t^{2(n+1)}$.

9° En ce qui concerne le caractère défini ou semi-défini des formes hermitiennes (3) et des déterminants (4) les résultats du n° 10 du Chapitre II sont encore valables et se démontrent de la même façon. Pour ce qui est des déterminants (5) les résultats du Chapitre II sont encore applicables, mais ne le sont, bien entendu, qu'à l'origine. Il s'en suit, comme on le vérifie d'ailleurs directement, que l'on devra avoir $(-1)^n \varphi^{(2n)}(o) \geqslant o$ et non nul (à moins que $\varphi(t)$ soit constant), mais on ne pourra *a priori* rien affirmer quant au signe de $\varphi^{(2n)}(t)$.

CHAPITRE IV.

1° Avant de passer aux applications nous allons préciser les liaisons qui existent entre les résultats des deux chapitres qui précèdent.

Soit d'abord à trouver si une fonction (réelle et analytique, de la variable réelle t), $\varphi(t)$ peut être représentée sous la forme

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \, d\,F(x)$$

avec $F(x)$ borné et non-décroissant. Aux conditions du Chapitre II nous pouvons adjoindre celles du Chapitre III relatives à la fonction $\varphi(-it)$, ou plus exactement les conditions nécessaires de ce chapitre.

Supposons en effet que $\varphi(t)$ admette la représentation indiquée, quel que soit t. Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} \, d\,F(x)$ converge et représente une fonction analytique quel que soit la variable complexe z [12,c]. Il en sera donc ainsi, en particulier, de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, d\,F(x).$$

Or puisque la fonction qu'elle représente est analytique elle est nécessairement identique à $\varphi(-it)$. Donc cette dernière admet la représentation $\varphi(-it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$ et doit par conséquent satisfaire aux conditions du Chapitre III, C.Q.F.D.

En résumé nous voyons que si $\varphi(t)$ admet A alors $\varphi(-it)$ admet B, ou, ce qui revient au même, si $\varphi(-it)$ n'admet pas B alors $\varphi(t)$ n'admet pas A.

2° Soit maintenant à trouver si une fonction (hermitienne, de la variable réelle t), $\varphi(t)$, admet la représentation

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\mathrm{F}(x)$$

Aux conditions du Chapitre III, on ne pourra pas en général adjoindre celles du Chapitre II relatives à la fonction $\varphi(it)$. Ceci sera cependant légitime si $\varphi(t)$ est analytique et dans tout domaine connexe, comprenant l'origine, où $\varphi(t)$ n'admet aucun point singulier. Il en résulte en particulier que si $\varphi(t)$ est une fonction entière le passage à $\varphi(it)$ est légitime quel que soit t.

Pour le prover nous allons démontrer la proposition suivante :

Supposons que pour une certaine valeur z_0 de la variable complexe $z = \xi + i\eta$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{z_0 x}\, d\mathrm{F}(x)$ converge, et soit sa valeur $\varphi(z_0)$. Soit de plus $\varphi(z)$ une fonction analytique admettant le point $z = z_0$ comme point ordinaire. On sait qu'il existe alors une cercle de centre z_0 tel que, à l'intérieur de ce cercle, $\varphi(z)$ n'admette aucun point singulier. Nous allons montrer que pour une valeur z quelconque, intérieur à ce cercle, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\, d\mathrm{F}(x)$ converge et, de plus, sa valeur est $\varphi(z)$.

Remarquons d'abord que si l'intégrale converge en tout point d'un segment contenant le point z_0, sa valeur sur ce segment ne peut être que $\varphi(z)$. En effet, comme au n° précédent, cette valeur est une fonction analytique dont on connaît l'expression en un point ordinaire, donc de rayon de convergence non nul, elle conserve donc la même expression au moins jusqu'au premier point singulier de ce segment.

On pourrait également dire, que deux fonctions admettant la même intégrale de Laplace sur des segments ayant des points communs sont identiques [12,d].

Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\varphi(z)$ étant analytique et l'intégrale convergeant pour $z = z_0$, elle converge sur tout segment contenant z, et intérieur au domaine de régularité de $\varphi(z)$ autour de z_0.

Pour cela il suffit de démontrer la proposition suivante.

Le point limite des points de divergence de l'intégrale considérée, sur un segment quelconque, est un point singulier de $\varphi(z)$.

Pour le montrer nous allons transcrire la démonstration d'une proposition identique de Landau [13], relative aux séries de Dirichlet à coefficients positifs.

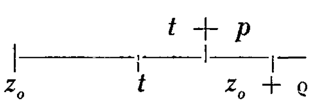
Soit en effet $z = t$ le point limite en question (c'est ou bien le premier point où l'intégrale diverge, ou bien le dernier où elle converge), et supposons que ce point soit un point ordinaire de $\varphi(z)$. $\varphi(z)$ étant analytique en z_0 nous pouvons écrire

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \varphi^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{z_0 x} (z - z_0)^n \, d\,F(x)$$

Mais le point $z = t$ étant supposé ordinaire, la série entière précédente admet un rayon de convergence $\rho > |t - z_0|$. Soit alors p une valeur telle que

$$t < |t + p| < z_0 + \rho$$



La formule précédente est alors valable pour $z = t + p$ et donne

$$\varphi(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{z_o x} (t - z_o + p)^n \, d\,\mathrm{F}(x)$$

Or, l'intégrale étant absolument convergente, on a le droit d'intervertir le signe de sommation et celui d'intégration, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z_o x} \, d\,\mathrm{F}(x) \sum_{o}^{\infty} \frac{x^n (t - z_o + p)^n}{n\,!} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{z_o x} e^{tx - z_o x + px} \, d\,\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+p)x} \, d\,\mathrm{F}(x)$$

L'intégrale convergerait donc pour $z = t + p$ quel que soit $|t + p| < z_o + \rho$ ce qui est contraire à l'hypothèse. $z = t$ ne peut donc pas être un point ordinaire de $\varphi(z)$, C.Q.F.D.

3° Une des applications les plus intéressantes de ce qui précède est relative à des fonctions caractéristiques de la forme $\varphi(t) = e^{\mathrm{P}(t)}$, où $\mathrm{P}(t)$ est un polynome. (Dans tout ce qui suit nous désignerons par $\varphi(t)$ la valeur probable de e^{ixt} et par $\varphi_1(t) = \varphi(i\,t)$ celle de e^{-xt}). D'abord, comme $\varphi(t)$ doit être hermitien, on devra avoir $\mathrm{P}(t) = \mathrm{A}(t) + i\,t\,\mathrm{B}(t)$, $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{B}(t)$ étant des polynomes pairs à coefficients réels. Il y a plusieurs cas à considérer.

Supposons d'abord que le terme du plus haut degré de $\mathrm{P}(t)$ soit une puissance impaire de t, soit $i\,b\,t^{2n+1}$. Nous aurons $\varphi_1(t) = \varphi(i\,t) = e^{\mathrm{Q}(t) + b_1 t^{2n+1}}$, $\mathrm{Q}(t)$ étant un polynome de de degré inférieur à $2\,n + 1$. Comme $\varphi_1(t)$ est une fonction entière, nous avons le droit, d'après les résultats du n° précédent, d'appliquer les conditions du Chapitre II pour toute valeur de t. Considérons alors la condition $\psi'' \geqslant o$ (Chapitre II, n° 6). On a ici, si

$n \geqslant 1$, $\psi'' = Q''(t) + b_2\, t^{2n-1}$ et on voit que, quel que soit le signe de b_2, ψ'' finit par devenir négatif, soit lorsque $t \to \infty$, soit lorsque $t \to -\infty$. Ce cas est donc à écarter. (Le cas $n = o$ est banal : c'est celui de la fonction e^{iat}, fonction caractéristique de la distribution dont la seule masse est concentrée au point $x = a$).

Supposons en second lieu que le terme du plus haut degré de $P(t)$ soit de la forme $a\, t^{4n}$. Nous aurons $\varphi(t) = e^{Q(t) + a\, t^{4n}}$. Si l'on a $a > o$, c'est la condition $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(o)$ (Chapitre III, n° 4), qui se trouvera en défaut pour $t \to \infty$. Si l'on a $a < o$, soit $a = -a_1$, nous aurons $\varphi_1(t) = \varphi(i\, t) = e^{Q_1(t) - a_1\, t^{4n}}$ et c'est la condition $\varphi_1(t) \geqslant \varphi_1(o)$ (Chapitre III, n° 9), qui ne sera pas vérifiée, quand $t \to \infty$. Ce cas est donc également à écarter.

Supposons enfin que le terme du plus haut degré de p (t) soit de la forme $a\, t^{4n+2}$. Le cas $a > o$ est, comme ci-dessus, à écarter, et pour les mêmes raisons. Cependant si l'on a $a < o$ les méthodes précédentes ne permettent pas de trancher la question. Toutefois, comme nous allons le voir plus loin, on pourra limiter supérieurement la grandeur de $|a|$.

4° Complétons ce qui précède par une remarque qui a déjà été faite par Mathias [11,e]. Rappelons d'abord que, comme on a $\varphi(o) = 1$, $P(t)$ n'aura pas de terme constant, et que, de plus, comme on peut toujours supposer $\varphi'(o) = o$ (Chapitre II, n° 7), il n'aura pas non plus de terme du premier degré. Au contraire il est nécessaire que le coefficient du terme du second degré soit différent de zéro. En effet s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\varphi''(o) = [P''(o) + P'^2(o)]\, \varphi(o) = o,$$

ce qui est inadmissible (Chapitre II, n° 11).

5° Les numéros qui précèdent excluent en particulier les fonctions $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} + a\, i\, t^3}$ et $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - a\, t^4}$, quel que soit a mais ils ne permettent aucune affirmation précise en ce qui concerne par exemple la fonction $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - a\frac{t^6}{6}}$. Cependant, comme nous l'avons dit plus haut, nous pouvons limiter la grandeur de a. Voici comment on peut procéder. Partons de la condition $\varphi'' \varphi - \varphi'^2 \geqslant \varphi''(o)$ (Chapitre III, n° 7). Elle nous donne ici

$$(1 + 5\,a\,t^4) \leqslant e^{t^2 + \frac{a\,t^6}{3}}$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de t doit l'être en particulier pour une valeur telle que $a\,t^4 = 1$. Or pour cette valeur la condition devient

$$6 \leqslant e^{\frac{4}{3\sqrt{a}}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{a} \leqslant \frac{4}{3 \log_e 6}$$

ce qui donne $a < 0{,}56$. Les valeurs supérieures de a sont donc à écarter.

On peut au moyen d'autres conditions restreindre davantage la valeur de a, mais on ne peut guère espérer de l'annuler par des procédés analogues à ceux que nous venons d'employer. Soit en effet $F(a, t) \geqslant o$, une condition qu'il faudrait mettre en défaut. Les conditions dont nous disposons sont telles que, pour la fonction considérée, $F(a, t)$ est continu au voisinage de $a = o$, pour toute valeur finie de t. On peut donc écrire

$$F(a, t) = F(o, t) + a\,F'(\vartheta\,a, t).$$

Or, $e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant fonction caractéristique, $F(o, t) \geqslant o$ et on ne pourra avoir $F(a, t) < o$ quelque petit soit a que, soit pour une valeur t_1 telle que $F(o, t_1) = o$, soit pour $F'(\vartheta\,a, t) \longrightarrow \infty$ ce qui n'est possible que pour $t \longrightarrow \infty$. Or il se trouve que l'on n'a $F(o, t) = o$ que pour $t = o$, mais alors on a également $F(a, t) = o$, et, d'autre part pour $t \longrightarrow \infty$ nos conditions ne donnent non plus rien. Il en résulte que, si, comme il semble probable, $e^{-\frac{t^2}{2} - a\frac{t^6}{6}}$ ne peut être fonction caractéristique pour aucune valeur de a, ceci ne pourra être montré que par une infinité de conditions de notre type, ou bien alors par des considérations d'un genre différent.

6° Dans les exemples que nous avons vus jusqu'ici le passage de $\varphi(t)$ à $\varphi(i\,t)$ était toujours légitime. Il n'en est pas ainsi dans tous les cas. Considérons par exemple la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{ch\, t}$

On pourrait vérifier qu'elle satisfait à toutes nos conditions, mais il est plus simple de montrer directement qu'elle est fonction caractéristique, en déterminant la loi correspondante. On a en effet :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{ch\, t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1+ix)t}}{1+e^{-2t}}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-us}}{1-e^{-u}}\, du$$

avec $u = 2t$ et $s = \dfrac{1+ix}{2}$. Or on sait que la dernière intégrale a pour valeur $\dfrac{1}{2 \sin \pi s}$ .Si l'on substitue la valeur de s on trouve

$$f(x) = \frac{1}{2\, ch \frac{\pi x}{2}}$$

On voit que $f(x)$ est toujours $\geqslant o$ et on vérifie que son intégrale de $-\infty$ à ∞ est bien égale à l'unité. $f(x)$ est donc une loi de probabilité et par conséquent $\varphi(t)$ une fonction caractéristique.

Considérons cependant la fonction $\varphi_1(t) = \varphi(it) = \dfrac{1}{\cos t}$

Nous savons (Chapitre II, n° 6), que l'on doit avoir $\varphi_1(t) \geqslant o$; or cette condition n'est vérifiée, dans le cas présent, que pour $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\dfrac{1}{\cos t}$ n'admet pas pour tout t la représentation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}\, f(x)\, dx$$

Ceci provient du fait que $\dfrac{1}{\cos t}$ admet les points $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$

comme pôles et dès lors (Chapitre IV, n° 2), le passage, en dehors du segment $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ n'est plus légitime. On vérifie d'ailleurs directement que, si l'on a bien

$$\frac{1}{\cos t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{2\, ch \frac{\pi x}{2}}\, dx = \int_{o}^{\infty} \frac{ch\, t\, x}{ch\, \frac{\pi}{2}\, x}\, dx$$

pour $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, l'intégrale n'a plus de sens pour $|t| \geqslant \frac{\pi}{2}$

7° Un autre exemple où l'importance de la légitimité du passage de $\varphi(t)$ à $\varphi(it)$ apparaît, est celui de la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + a\,t^2 + b\,t^4}$$

On vérifie d'abord facilement que, pour que $\varphi(t)$ puisse être fonction caractéristique il faut que l'on ait $a > o$ et $b \geqslant o$. Je dis qu'il faut avoir, de plus, $a^2 - 4\,b \geqslant o$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et considérons la fonction

$$\varphi_1(t) = \varphi(i\,t) = \frac{1}{1 - a\,t^2 + b\,t^4}$$

Puisque, par hypothèse, $a^2 - 4\,b < o$, le dénominateur n'a pas de racine réelle et $\varphi_1(t)$ est régulier quel que soit t. Il doit donc satisfaire aux conditions du Chapitre II. Or on voit que la condition $\varphi_1(t) \geqslant \varphi_1(o)$ n'est pas satisfaite quand $t \longrightarrow \infty$. Notre affirmation se trouve ainsi démontrée. Il n'en est pas de même si $a^2 - 4\,b > o$. Dans ce cas en effet le dénominateur a deux racines réelles et positives en t^2, donc quatre racines réelles en t, soient $\pm\, t_1$ et $\pm\, t_2$. Dès lors le passage de $\varphi(t)$ à $\varphi(i\,t)$ n'est légitime que tant que $|t| < t_1$ si l'on suppose $t_1 < t_2$. Or pour ces valeurs de t la condition précédente n'est plus en défaut.

On peut d'ailleurs montrer directement que si $a^2 - 4\,b > o$,

$\dfrac{1}{1 + a\,t^2 + b\,t^4}$ est effectivement fonction caractéristique et vérifier que dans le cas contraire il ne l'est pas. En effet considérons d'abord le premier cas, et appelons $-\alpha^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2b}$ et $-\beta^2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2b}$ les deux racines, réelles et négatives, de $1 + a\,u + b\,u^2$. La méthode des résidus donne alors facilement, comme pour une loi de Cauchy,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{1 + a\,t^2 + b\,t^4}\,dt = \frac{\alpha\,e^{-\alpha|x|}}{2\,(2 - a\,\alpha^2)} + \frac{\beta\,e^{-\beta|x|}}{2\,(2 - a\,\beta^2)}$$

Montrons que $f(x)$ est toujours $\geqslant o$. Comme $\alpha < \beta$ an a $e^{-\alpha|x|} > e^{-\beta|x|}$ et comme d'autre part

$$2 - a\,\alpha^2 = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2b}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right) > o,$$

on aura

$$f(x) > \frac{e^{-\beta|x|}}{2}\left[\frac{\alpha}{2 - a\,\alpha^2} + \frac{\beta}{2 - a\,\beta^2}\right]$$

$$= \frac{b\,e^{-\beta|x|}}{\sqrt{a^2 - 4b}}\left[\frac{\alpha}{a - \sqrt{a^2 - 4b}} - \frac{\beta}{a + \sqrt{a^2 - 4b}}\right]$$

$$= \frac{e^{-\beta|x|}}{4\sqrt{a^2 - 4b}}\left[\alpha\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) - \beta\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)\right]$$

Il suffit donc de montrer que

$$\alpha\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) > \beta\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

ou, en élevant au carré

$$\left(a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)\left(2a^2 - 4b + 2a\sqrt{a^2 - 4b}\right) >$$
$$\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)\left(2a^2 - 4b - 2a\sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

ou $4b\sqrt{a^2 - 4b} > -4b\sqrt{a^2 - 4b}$ ce qui est évident. Donc, dans ce cas, $\varphi(t)$ est bien fonction caractéristique.

Au contraire si $a^2 - 4b < o$, les racines en t, de $1 + a t^2 + b t^4$ ne sont plus imaginaires pures, mais des quantités de la forme $p + i q$. Dès lors $f(x)$ sera de la forme

$$f(x) = 2\, e^{qx}\, (A \cos p x + B \sin p x)$$

et il ne pourra pas conserver un signe constant.

8° Voilà enfin un autre exemple analogue au précédent. C'est celui de la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1 + k}{1 + k\, ch\, t}$. Il est évidemment nécessaire que k soit $> o$ pour que $\varphi(t)$ soit fonction caractéristique. Je dis que, de plus, il faut que l'on ait $k \geqslant 1$ et que d'ailleurs cela suffit. On a en effet $\varphi_1(t) = \varphi(i t) = \dfrac{k + 1}{1 + k \cos t}$. Si k est < 1 le dénominateur ne s'annule jamais, $\varphi_1(t)$ est régulier pour toute valeur de t, et doit, par conséquent, satisfaire aux conditions du Chapitre II. Or on doit avoir (Chapitre II, n° 8), pour $t > o$, $\varphi'_1(t) > o$, et ici nous avons $\varphi'_1(t) = \dfrac{(1 + k)\, k \sin t}{(1 + k \cos t)^2}$, qui ne reste évidemment pas $> o$. La première partie de notre affirmation se trouve ainsi démontrée. Pour démontrer la seconde partie, et pour vérifier en même temps la première, nous pouvons avoir recours à la recherche de la loi de probabilité $f(x)$. Nous ne donnerons que les résultats. Pour $k < 1$ on trouve

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}\; \frac{\sin(|x| \log \alpha)}{ch\, \pi x} \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{k}\,(1 + \sqrt{1 - k^2})$$

qui ne conserve manifestement pas un signe constant, tandis que pour $k > 1$ on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{k + 1}{k - 1}}\; \frac{sh\, a\, |x|}{sh\, \pi x} \quad \text{avec } a = \operatorname{arctg} \sqrt{k^2 - 1}$$

qui reste toujours $\geqslant o$.

Les mêmes résultats sont d'ailleurs valables, du moins pour $k < 1$, pour la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1 + k}{1 + k\, ch^n\, t}$$

De plus, pour n pair, $\varphi(t)$ ne sera fonction caractéristique pour aucune valeur de k, comme on le voit facilement par passage à $\varphi_1(t)$.

9° Mentionnons encore quelques fonctions que l'on peut écarter d'une manière analogue à celle du n° 4 de ce Chapitre. Ce sont entre autres les fonctions

$$\frac{1}{1 + \sum\limits_{n=2}^{n} a_{2n}\, t^{2n}} \; ; \quad \frac{1}{e}\, e^{\frac{1}{1 + \sum\limits_{n=2}^{n} a_{2n}\, t^{2n}}} \; ; \quad \frac{1}{ch\,(t^n)} \qquad \text{si } n > 2 \; ;$$

On vérifie en effet que pour ces fonctions on a $\varphi''(o) = o$, ce qui est impossible.

10° Nous nous sommes occupé jusqu'ici principalement des conditions nécessaires pour qu'une fonction puisse être fonction caractéristique. Considérons maintenant, pour terminer, quelques conditions suffisantes. Commençons par celles données par B. de Finetti [14]. Il démontre que si $\varphi(t)$ est fonction caractéristique alors la fonction

$$\Phi(t) = e^{p\,[\varphi(t) - 1]}$$

(p = constante réelle et $> o$), l'est également. En effet on a

$$\Phi(t) = e^{p\,[\varphi(t) - 1]} = \lim_{n = \infty} \left[\left(1 - \frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n}\, \varphi(t) \right]^n$$

La quantité entre crochets est, pour $n > p$, une combinaison linéaire, à coefficients $> o$ et de somme égale à l'unité, de deux fonctions caractéristiques $\varphi(t)$ et 1. Elle est donc elle-même fonction caractéristique ainsi que sa puissance n^{ieme}. Il en résulte que $\Phi(t)$, limite d'une suite de fonctions caractéristiques, est elle- même une fonction caractéristique, C.Q.F.D.

Ce résultat permet en particulier de construire de nouvelles fonctions caractéristiques à partir de celles déjà connues. Si l'on prend par exemple $\varphi(t) = e^{it}$ on aura

$$\Phi(t) = e^{p\,(e^{it} - 1)}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi des « petits nombres » ou loi de Poisson : $f(x) = e^{-p}\,\dfrac{p^x}{x\,!}$

11° Passons à un autre système de conditions suffisantes donné par G. Pólya [15,a]. Il démontre que si $\varphi(t)$ est pair et si l'on a pour $t > o$, $\varphi'(t) < o$ et $\varphi''(t) > o$, alors $\varphi(t)$ est fonction caractéristique. On a en effet

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \varphi(t)\cos x\,t\,d\,t = -\frac{1}{\pi\,x}\int_o^\infty \varphi'(t)\sin x\,t\,d\,t$$

si l'on intègre par parties. Sous cette dernière forme on voit que, si les conditions ci-dessus sont vérifiées, $f(x)$ sera la somme d'une série à termes alternés et décroissants, et aura par conséquent le signe du premier terme. Celui-ci étant $> o$ il en sera de même de $f(x)$. C.Q.F.D. Remarquons que les conditions précédentes entraînent la non-analyticité de $\varphi(t)$. Nous avons vu en effet (Chapitre III, n° 9) que, si $\varphi(t)$ était analytique, il fallait avoir $\varphi''(o) < o$.

Les conditions de Pólya permettent de montrer en particulier que $\varphi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ est fonction caractéristique pour $o < \alpha < 1$ [15,b].

12° Signalons enfin, avec Mathias [11,f], que $\varphi(t)$ sera fonction caractéristique, si, étant continu et borné, on peut mettre $\varphi(x - y)$ sous la forme :

$$\varphi(x-y)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu\,\varphi_\nu(x)\,\overline{\varphi_\nu(y)} \qquad \text{avec } \lambda_\nu>0$$

ceci étant d'ailleurs à rapprocher des résultats du même auteur que nous avons signalés au n° 5 du Chapitre III. On a en effet dans ce cas :

$$K=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\varphi(s_i-s_j)\,\xi_i\,\overline{\xi_j}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu\sum_{i=0}^{n}\varphi_\nu(s_i)\,\xi_i\sum_{j=0}^{n}\overline{\varphi_\nu(s_j)}\,\overline{\xi_j}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu\left|\varphi_\nu(s_i)\,\xi_i\right|^2\geqslant 0$$

Il en résulte (Chapitre III, n° 1), que $\varphi(t)$ est fonction caractéristique.

On peut ainsi montrer, par exemple, qu'il en est ainsi de $e^{-p^2t^2}$. On a en effet :

$$e^{-p^2(x-y)^2}=e^{-p^2x^2}\,e^{-p^2y^2}\,e^{2p^2xy}=e^{-p^2x^2}\,e^{-p^2y^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\,p^2)^\nu}{\nu\,!}\,x^\nu\,y^\nu=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\,p^2)^\nu}{\nu\,!}\,(e^{-p^2x^2}\,x^\nu)\,(e^{-p^2y^2}\,y^\nu)$$

qui est bien de la forme demandée.

CHAPITRE V.

1° Nous exposerons dans ce Chapitre un problème de la Statistique mathématique, qui se résout au moyen des fonctions caractéristiques, et dont le résultat final peut être trouvé immédiatement en possession de nos critères donnés dans les Chapitres précédents.

La question se rattache aux travaux de Spearman sur l'étude des aptitudes mentales [16]. La définition mathématique du problème est la suivante :

« De nombreuses aptitudes mentales peuvent être considérées comme résultant d'une combinaison (linéaire) de deux facteurs (indépendants). L'un de ces facteurs est commun à toutes les aptitudes du groupe, l'autre facteur, dit spécifique, est particulier à chaque aptitude. Les facteurs spécifiques sont indépendants.

Si, dans un groupe de n aptitudes, on fait correspondre à chacune la grandeur x_i, on doit avoir

$$x_i = a_i\, g + s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les a_i étant des constantes, g le facteur commun et s_i le facteur spécifique » [17].

Nous avons démontré [18] qu'une substitution linéaire, à déterminant non nul, effectuée sur les variables aléatoires x_i ne peut conduire, exception faite de certains cas très particuliers que nous allons préciser, à un facteur commun que si les variables g et s_i suivent des lois de Gauss.

2° Reproduisons d'abord cette démonstration directe. Supposons que les g et s_i sont réduits, c'est-à-dire que leurs espérences mathématiques sont nulles et leurs écarts types égaux à 1. Soit la nouvelle variable

$$y_i = \Sigma\, \alpha_{ik}\, x_k = \mathrm{A}_i\, h + t_i$$

La conservation du facteur commun se traduit par l'identité entre les fonctions caractéristiques des lois (anciennes et nouvelles) à n variables: :

$$\varphi_0 (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) \; \varphi_1 (u_1) \; \varphi_2 (u_2) \dots \varphi_n (u_n) =$$

$$\Phi_0 (A_1 U_1 + \dots) \; \Phi_1 (U_1) \dots \Phi_n (U_n)$$

où l'on a

$$u_i = \Sigma \, \alpha_{ki} \, U_k$$

Introduisons la fonction

$$\psi = \log \varphi :$$

$$\psi_0 (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + \psi_1 (u_1) + \dots + \psi_n (u_n) = \tag{1}$$

$$\Psi_0 (A_1 U_1 + \dots + A_n U_n) + \Psi_1 (U_1) + \dots + \Psi_n (U_n)$$

Effectuons, sur les u, la substitution :

$$u_1 = v_1, \; u_2 = v_2, \dots u_l = \frac{1}{a_l} (v_l - a_1 v_1 - a_2 v_2 \dots a_n v_n), \dots, u_n = v_n,$$

et

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = v_l$$

Dérivons maintenant l'identité (1) quatre fois de suite, successivement par rapport à U_i, U_j, v_p, v_q. Nous obtenons :

$$\psi_0' \, \Sigma \, a_k \, \alpha_{ik} + \psi' \, \alpha_{i1} + \psi_2' \, \alpha_{i2} + \dots + \psi_n' \, \alpha_{in} \equiv A_i \, \Psi_0' + \Psi_1'$$

$$\psi_0'' \, \Sigma \, a_k \, \alpha_{ik} \, \Sigma \, a_k \, \alpha_{jk} + \psi_1'' \, \alpha_{i1} \, \alpha_{j1} + \dots + \psi_n'' \, \alpha_{in} \, \alpha_{jn} \equiv A_i \, A_j \, \Psi_0''$$

$$\psi_p''' \, \alpha_{ip} \, \alpha_{jp} - \psi_l''' \, \alpha_{jl} \, \alpha_{il} \, \frac{a_p}{a_l} \equiv A_i A_j \, \Sigma \, A_k \frac{\partial U_k}{\partial v_p} \, \Psi_0'''$$

$$\psi_l^{\text{IV}} \, \alpha_{il} \, \alpha_{jl} \frac{a_p a_q}{a_l^2} \equiv \Psi_0^{\text{IV}} \, A_i A_j \, \Sigma \, A_k \frac{\partial U_k}{\partial v_p} \, \Sigma \, A_k \frac{\partial U_k}{\partial v_q}$$

C'est cette dernière équation qui nous servira comme point de départ. On vérifie facilement que l'on a

$$\Sigma\, A_k \frac{\partial U_k}{\partial v_p} = \Sigma_p - \frac{a_p}{a_l}\, \Sigma_l,$$

avec

$$\Sigma_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots\dots\dots & \alpha_{1},\,_{l+1}, & A\,, & \alpha_1,\,_{i+1}, & \dots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \dots & \dots\dots\dots & \dots & A_2 & \dots\dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} \dots & \dots\dots\dots & \dots & A_n & \dots\dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}$$

En particulier, si l'on n'avait pas fait la substitution sur les u, on aurait

$$\Sigma\, A_k \frac{\partial U_k}{\partial u_p} = \Sigma_p$$

Considérons donc l'identité

$$\psi_l^{IV}\ \alpha_{ii}\ \alpha_{jl} \frac{a_p a_q}{a_l^2} = \Psi_o^{IV}\, A_i A_j \left(\Sigma_p - \frac{a_p}{a_l}\Sigma_l\right)\left(\Sigma_q - \frac{a_q}{a_l}\Sigma_l\right) \tag{2}$$

et essayons d'abord de la satisfaire sans que les deux membres soient nuls. Il faut pour cela que

$$\frac{\psi_l^{IV}}{\Psi_o^{IV}} = \text{constante}.$$

Si les deux Ψ^{IV} ne se réduisent pas à des constantes, pour que la condition précédente puisse être vérifiée, il faudra qu'ils soient des fonctions du même argument. On devra donc avoir

$$ku_l \equiv A_1U_1 + A_2U_2 + . + A_nU_n = u_1\Sigma_1 + u_2\Sigma_2 + . + u_l\ \Sigma_l + . + u_n\Sigma_n$$

(on vérifie, en effet sans peine, la dernière égalité).

Il en résulte

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \ldots, \Sigma_l = k, \ldots, \Sigma_n = 0.$$

On peut alors montrer que ces dernières égalités entraînent

$$A_i = k\,\alpha_{il}$$

Si maintenant, ayant fait un changement de variables différent sur les u, nous écrivons l'identité (2) avec un indice $m \neq l$, le second membre sera nul, comme

$$\Sigma_p = \Sigma_q = \Sigma_m = 0,$$

et il devra en être de même du premier. Ceci nécessite ou bien $\psi_m{}^{\text{IV}} = 0$, ou bien $\alpha_{im}\,\alpha_{jm} = 0$. Supposons alors que nous n'astreignions pas les variables g et s_i à suivre des lois particulières : nous devons alors écarter l'hypothèse $\psi_m{}^{\text{IV}} = 0$, et il faudra avoir $\alpha_{im}\,\alpha_{jm} = 0$, ce qui signifie que tous les α_{im} sont nuls, sauf peut-être un pour chaque valeur de m, c'est-à-dire que s_m ne peut faire partie que d'une seule des variables nouvelles. On montre d'ailleurs facilement qu'il doit en être de même de g. Une seule des anciennes variables, s_l, fera partie de toutes les nouvelles, et sa loi sera d'ailleurs, du moins à une translation près, celle du nouveau facteur commun. Il n'en résulte pas forcément que ce sera précisément s_l, le nouveau facteur commun, mais ce cas, qui est celui de l'exemple donné par M. G. Darmois, rentre en tous cas dans la catégorie précédente.

Supposons donc $\psi_m{}^{\text{IV}} = 0$ et posons $\psi_m{}''' = c_m$. Nous aurons, comme :

$$\psi_l{}^{\text{IV}} = \Psi_0{}^{\text{IV}}\,k^4,$$

et par suite,

$$\psi_l''' = B + k^4 \Psi_0''' :$$

$$c_m \, \alpha_{im} \, \alpha_{jm} - (B + k^4 \Psi_0''') \, \alpha_{il} \, \alpha_{jl} \frac{a_m}{a_l} \equiv - k^3 \Psi_0''' \, \alpha_{il} \, \alpha_{jl} \frac{a_m}{a_p}$$

il en résulte $k = 1$, et

$$c_m \, \alpha_{im} \, \alpha_{jm} \frac{1}{a_m} = B \, \alpha_{il} \, \alpha_{jl} \frac{1}{a_l} ;$$

le second membre ne dépend pas de m, donc :

$$\frac{c_m}{a_m} \alpha_{im} \, \alpha_{jm} = \frac{c_n}{a_n} \alpha_{in} \, \alpha_{jn} ,$$

et de même

$$\frac{c_m}{a_m} \alpha_{im} \, \alpha_{km} = \frac{c_n}{a_n} \alpha_{in} \, \alpha_{kn}$$

donc

$$\frac{\alpha_{jm}}{\alpha_{km}} = \frac{\alpha_{jn}}{\alpha_{kn}} ,$$

valable si m et $n \neq l$.

Les colonnes des α seraient donc proportionnelles entres elles, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que la transformation est à déterminant non nul, et conduirait d'ailleurs à des y_i tous proportionnels entre eux. Nous devons donc supposer $\Psi_m''' = 0$, et toutes les variables, à l'exception de s_v et de celles qui ne font partie que de l'une des variables nouvelles, auront leur ψ'' constants, et suivront par conséquent une loi de Gauss. Le B de plus haut sera d'ailleurs nul ; on aura donc

$$\psi_l''' = \Psi_0''' ,$$

et

$$\psi_l'' = B' + \Psi_0'' .$$

Le nouveau facteur commun aura donc, à une loi de Gauss près (ce qui veut dire que l'on pourra décomposer le nouveau facteur commun en une variable de Gauss et une autre suivant exactement la loi de s_l) la même loi que s_l. On aura d'ailleurs la condition, les g et s_i étant réduits :

$$\Sigma\, a_k\, \alpha_{ik}\, \Sigma\, a_k\, \alpha_{jk} + \alpha_{i1}\, \alpha_{j1} + \ldots$$
$$+ \alpha_{i,\,l-1}\,\alpha_{j,\,l-1} + \alpha_{i,\,l+1}\,\alpha_{j,\,l+1} + \ldots + \alpha_{in}\,\alpha_{jn} + B'\,\alpha_{il}\,c_{jl} = 0.$$

Un cas particulier est celui étudié par M. Darmois, où c'est l'ancien facteur commun qui se conserve, cas que l'on obtient en prenant pour s_l précisément g, c'est-à-dire en effectuant les dérivations sans faire d'abord une substitution sur les u.

Supposons maintenant que tous les ψ_l^{IV} soient constants, et posons $\psi_l^{\mathrm{IV}} = d_l$, et $\Psi_0^{\mathrm{IV}} = D_0$. Nous aurons

$$d_l\, \alpha_{il}\, \alpha_{jl} \frac{a_p a_q}{a_l^2} = D_0 A_i A_j\, (\Sigma_p - \frac{a_p}{a_l}\, \Sigma_l)\, (\Sigma_q - \frac{a_q}{a_l}\, \Sigma_l)$$

et de même

$$d_l\, \alpha_{il}\, \alpha_{kl} \frac{a_p a_q}{a_l^2} = D_0 A_i A_k\, (\Sigma_p - \frac{a_p}{a_l}\, \Sigma_l)\, (\Sigma_q - \frac{a_q}{a_l}\, \Sigma_l).$$

En divisant, il vient

$$\frac{\alpha_{jl}}{\alpha_{kl}} = \frac{A_j}{A_k}\,;$$

le second membre est indépendant de l, donc

$$\frac{\alpha_{il}}{\alpha_{jl}} = \frac{\alpha_{im}}{\alpha_{jm}}\,,$$

ce qui est inadmissible, comme nous l'avons montré plus haut.

Il nous reste à considérer le cas où les deux membres de l'identité (2) sont nuls. Le cas où $\alpha_{il}\, \alpha_{jl} = 0$ a déjà été considéré. Nous devons donc supposer tous les ψ_l^{IV} nuls. Posons

$$\psi_l''' = c_l$$

Nous aurons

$$c_p\, \alpha_{ip}\, \alpha_{jp} - c_l\, \alpha_{il}\, \alpha_{jl} \frac{a_p}{a_l} = C_0 A_i A_j \left(\Sigma_p - \frac{a_p}{a_l}\, \Sigma_l\right)$$

ou

$$\frac{c_p}{a_p}\frac{\alpha_{ip}}{A_i}\frac{\alpha_{jp}}{A_j}-\frac{c_l}{a_l}\frac{\alpha_{il}}{A_i}\frac{\alpha_{jl}}{A_j} = C_o\left(\frac{\Sigma_p}{a_p}-\frac{\Sigma_l}{a_l}\right)$$

Le second membre est indépendant de i et j.

En posant

$$\frac{\alpha_{ip}}{A_i}\sqrt{\frac{c_p}{a_p}} = b_i\ ,$$

et

$$\frac{\alpha_{il}}{A_i}\sqrt{\frac{c_l}{a_l}} = c_i$$

nous pouvons écrire

$$b_ib_j - c_ic_j = b_ib_k - c_ic_k\ ,$$

et

$$b_lb_j - c_lc_j = b_lb_k - c_lc_k\ ,$$

ou

$$b_i\,(b_j - b_k) = c_i\,(c_j - c_k),$$

et

$$b_l\,(b_j - b_k) = c_l\,(c_j - c_k).$$

On a donc ou bien $b_j = b_k$ et $c_j = c_k$, ou bien

$$\frac{b_i}{c_i} = \frac{b_l}{c_l} = k\ ;$$

d'ailleurs k doit être égale à $\pm$ 1. La première de nos équations (en b et c) devient en effet

$$c_ic_j\,(k^2 - 1) = c_ic_k\,(k^2 - 1),$$

donc on a ou bien $k = \pm$ 1, ou bien $c_j = c_k$, cas que nous avons déjà rencontré. Or $b_i = b_j$ signifie

$$\frac{\alpha_{ip}}{A_i} = \frac{\alpha_{jp}}{A_j}\ ,$$

donc

$$\frac{\alpha_{ip}}{\alpha_{im}} = \frac{\alpha_{jp}}{\alpha_{jm}}\ ,$$

ce qui est inadmissible. $b_i = c_i$ signifie

$$\alpha_{ip} \sqrt{\frac{c_p}{a_p}} = \alpha_{il} \sqrt{\frac{c_l}{a_l}},$$

donc

$$\frac{\alpha_{ip}}{\alpha_{il}} = \frac{\alpha_{jp}}{\alpha_{jl}},$$

également inadmissible.

Nous devons donc supposer tous les ψ_l''' nuls, et les variables doivent suivre des lois de Gauss. La condition à laquelle doit satisfaire la transformation pour conduire alors à un facteur commun, est la relation entre les ψ'', qui est anaogue à une condition d'orthogonalité des α.

3° Nous allons montrer maintenant que la partie essentielle de la démonstration qui précède peut être obtenue plus rapidement à l'aide de nos résultats actuels.

Nous voyons en effet que si l'on ne suppose pas tous les ψ^{IV} constants ou nuls on est conduit à des cas très particuliers. D'autre part, l'inadmissibilité de la relation

$$\psi^{\text{IV}} = \text{constante (différente de zéro)}$$

suit immédiatement d'un de nos résultats antérieurs. En effet nous avons montré (Chapitre IV, n° 3) que la fonction

$$\varphi(t) = e^{a\,t^2 + a'\,t^4}$$

ne peut être fonction caractéristique pour aucune valeur des constantes a et a', ($a' \neq o$). Notre proposition en résulte.

Il en est de même dans le cas où l'on suppose $\psi^{\text{IV}} = o$ donc $\varphi''' =$ constante (non nulle), puisque nous avons démontré au même endroit que la fonction

$$\varphi(t) = e^{a\,t^2 + i\,a'\,t^3}$$

ne peut non plus être fonction caractéristique.

Nous devons donc supposer tous les ψ''' nuls, ce qui est identique à la conclusion de la démonstration directe.

BIBLIOGRAPHIE.

[1,a] LAPLACE. — Théorie Analytique des Probabilités. Livre I, Chapitre Premier, page 7.
b] Loc. cit., p. 83.
c] Loc. cit., Livre II, Chap. IV, p. 309 et suivantes.
p. 161.

[2,a] Paul LEVY. — Calcul des Probabilités. Partie II, Chap. II,
b] Loc. cit., p. 166.
c] Loc. cit., p. 195.
d] Loc. cit., p. 145.
e] Loc. cit., p. 157.

[3] POISSON. — Recherches sur la probabilité des jugements. Chap. IV, p. 246 et suivantes.

[4] Voir aussi MOLINA. — The Theorie of Probability, etc. Bulletin of the Amer. Math. Soc. T. 36, 1930, p. 369.

[5,a] CAUCHY. — Œuvres. Tome XII, p. 87.
b] Loc. cit., p. 125.

[6] POINCARE. — Calcul des Probabilités. (2e édition). Chap. XI, p. 206.

[7,a] D.-V. WIDDER. — Necessary and sufficient conditions, etc. Bulletin of the Amer. Math. Soc. T. 40, 1934, p. 321.
b] The inversion of the Laplace Integral. Trans. of the Amer. Math. Soc. T. 36, 1934, p. 145.
c] Laplace Integrals. Trans. of the Amer. Math. Soc. T. 33, 1931, p. 851.

[8] S. BERNSTEIN. — Leçons sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques d'une variable réelle. 1926. p. 190-197.

[9,a] HAMBURGER. — Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Polya. Math. Zeitschrifft, T. 7, 1919, p. 302.
b] Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentproblems. Math. Annalen, T. 81-82, p. 235. Voir en particulier Kap. II, p. 226-289.

[10] Voir par ex. KOWALESKY. — Determinantentheorie.

[11,a] MATHIAS. — Ueber positive Fourier Intégrale. Math. Zeitschrift, T. 16, 1923, p. 103-125, en particulier, p. 115.
b] Loc. cit., p. 108.
c] Loc. cit., p. 124.
d] Loc. cit., p. 122.
e] Loc. cit., p. 111.
f] Loc. cit., p. 104.

[12,a] S. BOCHNER. — Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Chap. IV, p. 74.
b] Loc. cit., p. 80.

[13] LANDAU. — Math. Annalen, T. 61, p. 536.

[14] DE FINETTI. — Le funzioni caratteristiche di legge instantanea. Rendic. della Acad. dei Lincei, T. XII, p. 278.

[15,a] G. POLYA. — Ueber die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. Math. Zeitschrift, T. 2, 1918, p. 378.
b] Herleitung des Gaussschen Fehlergestzes. Math. Zeitschrift, T. 18, 1923, p. 104.

[16] SPEARMAN. — Abilities of man. 1927.

[17] G. DARMOIS. — Sur les deux facteurs de Spearman. C. R. t. 199, 1934, p. 1176.

[18] G. KUNETZ. — Sur la conservation du facteur commun de Spearman, C. R. 1935, p. 8[illegible]1-867.