JOSEPH FAYET

Invariants de quelques équations différentielles et réduction de celles-ci à des équations à coefficients constants

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__186__1_0>

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Joseph FAYET

Professeur au Lycée français de Madrid

1re THÈSE. — Invariants de quelques équations différentielles et réduction de celles-ci a des équations a coefficients constants.

2e THÈSE. — Intégrales de Lebesgue et fonctions d'ensemble.

Soutenues le devant la Commission d'Examen

MM. Henri DULAC, *Président.*

SIRE, EYRAUD *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1937

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. LONGCHAMBON, ✻, ✠, ❦ A.

Assesseur

M. VANEY, ✻, ❦ I., ✠.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, C. ✻, ❦ I.
RIGOLLOT, ✻, ❦ I.
COUTURIER, ✻, ❦ I., ✠.

Professeurs

MM. DULAC, ✻, ❦ I., *Calcul différentiel et intégral.*
BEAUVERIE, ✻, ❦ I., ✠, *Botanique.*
MEUNIER, O. ✻, ❦ I., *Chimie industrielle.*
SIRE, ✻, ❦ I., ✠, *Mécanique rationnelle et appliquée.*
VANEY, ✻, ❦ I., ✠, *Zoologie.*
CARDOT, ✻, ❦ I., *Physiologie générale.*
ROMAN, ✻, ❦ I., *Géologie.*
LOCQUIN, ✻, ❦ I., *Chimie générale.*
LONGCHAMBON, ✻, ✠, ❦ A., *Minéralogie.*
DOUIN, ✻, ✠, ❦ I., *Botanique.*
DÉJARDIN, ❦ I., *Physique générale.*
SOLLAUD, ❦ I., *Zoologie.*
THIBAUD, ❦ A., *Physique expérimentale.*
LEMARCHANDS, ❦ I., *Chimie.*
EYRAUD, ❦ I., *Mathématiques.*
FROMAGEOT, ❦ A., *Chimie biologique.*
AUMÉRAS, ❦ A., *Chimie physique.*

Maîtres de conférences

M. DŒUVRE, ❦ I., *Chimie organique.*

Maîtres de conférences adjoints

M. BONNET, ✻, ❦ I., *Zoologie générale et agricole.*

Chargés de cours complémentaires

Mlle BACHRACH, ❦ I., *Physiologie.*
MM. DUFAY, *Astronomie et Physique supérieure.*
VIRET, ❦ I., *Étude des roches.*
RANSON, *Géométrie supérieure.*
MAYET, ✻, ❦ I., ✠, *Antropologie.*
PELOSSE, ❦ I., *Sériciculture.*
DARESTE DE LA CHAVANNE, ❦ I., *Géographie physique.*
SEYEWETZ, ✻, ❦ I, *Matières colorantes artificielles.*
THOVERT, *Physique.*
PIERRON, *Chimie.*
MERMET, *Mécanique des fluides.*

Secrétaire

M. ROUX, ❦ A.

A

M. Henri DULAC

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON
EXAMINATEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Témoignage de ma profonde gratitude.

A LA MÉMOIRE

DE M. LE CHANOINE F. BONNASSIEUX
VICE-RECTEUR DE FOURVIÈRES

AL SEÑOR DON PEDRO PUIG ADAM
Y A LA SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

AL SEÑOR DON JULIO REY PASTOR
Y AL SEMINARIO MATEMÁTICO DE BUENOS-AYRES

PREMIÈRE THÈSE.

INVARIANTS

DE

QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET RÉDUCTION DE CELLES-CI

A DES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS

INTRODUCTION.

La recherche des invariants d'une équation différentielle et leur emploi pour mettre une équation sous forme canonique et obtenir de nouveaux cas d'intégration, a fait l'objet de nombreux travaux [1].

La théorie des invariants des équations différentielles linéaires, abordée par Laguerre [a, b] et Brioschi [a, b] fut complétée par Halphen [a, b].

R. Liouville [d] a étudié les invariants de l'équation [2]

$$y'' - y' + a_0 y'^3 + 3a_1 y'^2 + 3a_2 y' + a_3 = 0.$$

R. Liouville [a; b; c] et Appell [a] ont étudié les invariants de

$$y' = a_0 + 3a_1 y + 3a_2 y^2 + a_3 y^3.$$

Appell [a] et Elliot ont étudié les invariants de

$$y' = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p}.$$

[1] On est prié de se reporter à l'index bibliographique placé à la fin de cette introduction pour avoir l'indication des travaux auxquels nous faisons allusion.

[2] Dans tout ce qui suit, a_i; a; b; c; d, désignent des fonctions de x.

Appell [a] a de plus formé les invariants des équations du deuxième ordre et du deuxième degré, linéaires et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées et en a fait des applications à l'intégration de ces équations.

Certains de ces résultats ont été généralisés par Rivereau qui a de plus étudié les invariants des équations homogènes du second ordre et du troisième degré en y, y' et y'' et des équations homogènes du troisième ordre et du second degré en y, y', y'', y'''.

M. Peyovitch [a] a formé les invariants des équations de la forme

$$ay^2 + 2byy' + cy'^2 + d = 0$$

et explicité [b] les équations linéaires et homogènes d'ordre quelconque réductibles aux équations de même forme à coefficients constants par un changement de variable indépendante $d\xi = u(x)\,dx$.

Dans ce travail, comme on l'a fait dans la plupart de ceux qui viennent d'être cités, j'emploierai uniquement des changements de variables de la forme

$$(1) \qquad y = \lambda(x)Y + \mu(x), \qquad dX = (\nu x)\,dx.$$

Je me suis proposé de former les invariants de certaines classes d'équations différentielles, ainsi que les formes canoniques de ces équations.

Dans les cas particuliers où ces formes canoniques sont à coefficients constants, il en résulte des cas évidents d'intégrabilité.

Dans le cas où ces formes canoniques ne sont pas à coefficients constants, j'ai montré que ces formes canoniques pouvaient être utilisées pour reconnaître si l'équation différentielle pouvait être ramenée à une équation de même forme à coefficients constants et obtenir ensuite cette équation. Ce procédé avait déjà été employé pour certaines des équations différentielles signalées plus haut (*voir* en particulier Appell [a] et Peyovitch [b]).

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle soit réductible à une équation à coefficients constants et la recherche de cette équation lorsque ces conditions sont vérifiées peut, pour toutes les équations que j'ai étudiées, se faire, comme je l'ai montré, par une méthode directe, sans faire intervenir ni invariants, ni forme canonique. Par cette seconde méthode, les calculs paraissent plus rapides. Cette même méthode permet aussi de montrer, tout au moins pour les équations les plus générales de chaque type étudié, que la réduction à une équation à coefficients constants, lorsqu'elle est possible, s'effectue *sans quadrature*, tandis que la formation des invariants exige des quadratures dans les cas les plus généraux.

Après un chapitre relatif aux invariants différentiels, j'étudie dans les autres chapitres, les équations suivantes

$$y' = p(y), \qquad y'' = p(y).$$

$p(y)$ étant un polynome en y de degré quelconque dont les coefficients sont des fonctions de x; et les équations

$$p(y, y') = 0,$$

où $p(y, y')$ est un polynome du second ou du troisième degré en y, y' dont les coefficients sont des fonctions de x seul; et enfin les équations

$$p(y, y', y'') = 0,$$

où p est un polynome du second degré en y, y', y'', dont les coefficients ne dépendent que de x.

Dans le cas où $p(y, y')$ est du second degré en y, y', je recherche les cas où l'intégrale générale est une fonction rationnelle de la constante d'intégration. Une forme particulière de l'équation $p(y, y') = 0$ où p est du troisième degré en y et y' nous conduit à résoudre directement la question suivante : établir les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les coefficients de l'équation

$$y' \Sigma a_i y^i + b_0 + \Sigma b_{i+1} y^{i+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

pour qu'elle admette un facteur intégrant ne dépendant que de x.

Enfin, pour l'équation linéaire et homogène d'ordre n

$$(2) \qquad f(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

dont Halphen [*b*] et M. Peyovitch [*b*] ont étudié les invariants et semi-invariants et formé les conditions nécessaires et suffisantes pour leur réduction à une équation à coefficients constants, j'ai montré que celles des équations (2) qui sont réductibles à une équation à coefficients constants sont *caractérisées* par la condition suivante : il existe quatre fonctions $G(x)$; $g(x)$; $\alpha(x)$; $\beta(x)$ telles que l'on ait l'identité

$$G(x) f[\alpha(x) y' + \beta(x) y] \equiv \frac{d}{dx}[g(x) f(y)].$$

On a l'interprétation suivante : pour que l'équation (2) soit réductible à une équation linéaire à coefficients constants, il faut et il suffit que toute solution de $f(y) = 0$ soit une solution de

$$(3) \qquad f[\alpha(x)y' + \beta(x)y] = 0.$$

J'ai également montré que si (2) est réductible à une équation à coefficients constants, on sait également intégrer l'équation (3). J'ai indiqué diverses applications géométriques de ces propriétés.

Terminons cette introduction en énonçant la convention suivante dont il sera fait usage dans le cours du travail.

Si une équation différentielle donnée peut être ramenée à une équation différentielle à coefficients constants par un changement de variable (1), on dira que cette équation donnée est *réductible*.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

APPELL. — *a. Sur les Invariants de quelques équations différentielles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1889].

b. Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable [*Acta Mathematica*, 1891].

c. Comptes rendus de l'Académie des Sciences [4 juillet 1887; 12 novembre 1888].

BRIOSCHI. — *a. Sur les équations différentielles linéaires, lettre de M. Brioschi à M. Laguerre* [*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. VII].

b. Comptes rendus, t. 93, p. 941.

A. CAHEN. — *Thèse* [Gauthier-Villars, Paris, 1899].

CHAZY. — *a. Thèse* [*Acta Mathematica*, 1910].

b. Acta Mathematica, 1911.

c. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1911.

ELLIOT. — *Comptes rendus*, 1886, 1887, 1890.

J. FAYET. — *a. Sur l'équation* $y' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ [*Revista Matematica hispano-americana*, Madrid, 1935].

b. Sur les équations différentielles linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants par un changement de variable $d\xi = u(x)dx$ [*Revista*, Madrid, 1936].

HALPHEN. — *a. Thèse : Sur les Invariants différentiels.*

b. Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables, 1883.

KUMMER. — *Journal de Crelle*, t. 15.

LAGUERRE. — *a. Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre* [*Comptes rendus*, t. 88, p. 116].

b. Sur quelques Invariants des équations différentielles linéaires [*Comptes rendus*, t. 88, p. 224].

R. LIOUVILLE. — *a. Comptes rendus*, 1886, 1887.

b. American Journal of Mathematica, t. X, p. 283.

c. Œuvres, t. II, p. 19 et 26.

d. Journal de l'École Polytechnique, LXII Cahier.

MITRINOVITCH. — *a. Remarque sur une équation différentielle du premier ordre* [*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. III, 1934].

b. Thèse [Belgrade, 1935].

PEYOVITCH. — *a. Thèse : Glas srpoke kraljevske Akademije*, t. 109 [Belgrade, 1923].

b. Sur les Semi-Invariants des équations différentielles [*Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1925, p. 208].

RIVEREAU. — *Thèse : Sur les Invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées* [Gauthier-Villars, Paris, 1890].

REY PASTOR. — *Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales lineales* [*Revista matematica hispano-americana*, Madrid, 1936].

VOGT. — *Thèse : Sur les Invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre* [Gauthier-Villars, Paris, 1889].

CHAPITRE I.

INVARIANTS.

1. Définitions. — Considérons, par exemple, une équation différentielle

$$p(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

où p est un polynome en y, y', ..., $y^{(n)}$ dont les coefficients $a_i[i = 1, 2, \ldots, r]$ sont des fonctions quelconques de x. Si nous faisons le changement de variables

$$y = \lambda(x)Y + \mu(x), \qquad dX = \nu(x)\,dx \tag{2}$$

et si nous supposons que, dans la nouvelle équation

$$P\left(X, Y, \frac{dY}{dX}, \ldots, \frac{d^nY}{dX^n}\right) = 0,$$

le polynome P soit de la même forme que p, à un terme de p ayant pour coefficient a_s correspond un terme de P qui s'en déduit en remplaçant y par Y et les dérivées $y^{(\gamma)}$ par $\frac{d^\gamma Y}{dX^\gamma}$. Soit α_s le coefficient de ce terme de P. Ce coefficient α_s s'exprime rationnellement au moyen des a_i, de λ, μ, ν et des dérivées de λ, μ, ν. Supposons que l'on n'ait pas remplacé dans ces diverses fonctions x en fonction de X. Désignons par $I(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ une fonction des a_i et de leurs dérivées, pouvant même dépendre de fonctions primitives de fonctions rationnelles des a_i et de leurs dérivées.

Si, quels que soient les a_i et les fonctions arbitraires λ, μ, ν, on a

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_r) \equiv I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \tag{3}$$

on dira que $I(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est un invariant de (1) pour le changement de variables (2). $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ est une fonction des a_i qui est indépendante des fonctions arbitraires λ, μ, ν.

Si l'on a une fonction $J(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ telle que, quels que soient a_i et les fonctions λ, μ, ν, on ait, en désignant par $F(\lambda, \mu, \nu)$ une certaine fonction de λ, μ, ν

$$F(\lambda, \mu, \nu) J(a_1, a_2, \ldots, a_r) \equiv J(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

on dit que $J(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est un *invariant relatif* de (1) pour le changement de variables (2), tandis que I, satisfaisant à la condition (3) est un *invariant absolu*.

Remarquons que l'on peut être amené à considérer le cas où l'une des trois fonctions λ, μ, ν, s'exprime en fonction des deux autres, ou le cas où deux d'entre elles s'expriment en fonction de la troisième. $I(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est un invariant pour cette transformation particulière si l'identité (3) a lieu quels que soient les a_i et les fonctions ou la fonction qui restent arbitraires.

On peut être amené à considérer un changement de variables (2) ne dépendant que d'une ou deux fonctions, pour obtenir une équation $P = 0$ qui soit de la même forme que l'équation (1) ou pour avoir des résultats plus simples.

On peut en particulier prendre $\nu(x) = 1$ et $\mu(x) = 0$, on obtient le changement : $y = \lambda(x) Y$, *changement de fonction seule*. En prenant $\lambda(x) = 1$, $\mu(x) = 0$, on a : $dX = \nu(x)\, dx$, *changement de variable seule*. Dans ces deux cas, les fonctions I et J ont été désignées par Laguerre semi-invariants absolus et semi-invariants relatifs respectivement.

Halphen, à la suite de Laguerre, Brioschi, etc., a appelé *forme canonique* d'une équation différentielle une forme réduite de l'équation considérée dans laquelle tous les coefficients α_i autres que 0 et 1 sont des invariants absolus.

Dans la plupart des invariants I que nous rencontrerons figure une fonction primitive dont la présence introduit dans I une constante arbitraire. Pour distinguer ces invariants d'autres invariants, on pourra dire que ce sont des invariants qui dépendent d'un paramètre.

Il paraît au premier abord naturel d'éviter l'introduction de cette constante, en ne considérant que des fonctions primitives nulles pour une valeur fixe de la variable. On constate facilement que cette convention ne suffit pas pour conserver la définition donnée d'un invariant. On verra par exemple, au n° 2, que, si dans la formule (2), λ est une constante c ou si λ fonction de x est remplacé par $c\lambda$, les invariants trouvés ne satisfont pas [1] à la condition (3). Ils sont multipliés par une constante lorsqu'on fait la substitution (2).

---

(1) *Voir* Appell [a], p. 370.

Dans les invariants I dépendant d'une primitive que nous rencontrerons, cette primitive est l'exposant d'une exponentielle qui est en facteur dans tous les termes de I. Nous conviendrons de dire qu'une expression $I(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ dépendant d'une primitive de la façon qui vient d'être indiquée est un invariant, si k étant une constante, on a, au lieu de la relation (3) la relation

$$(4) \qquad I(a_1, a_2, \ldots, a_r) = k I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r).$$

2. Formation d'invariants. — Nous allons montrer, sur un exemple, comment, en recherchant une forme réduite d'une équation, on obtient des invariants et une forme canonique. Dans la suite du travail, nous ne reviendrons pas sur le détail des calculs et des raisonnements tout à fait analogues à ceux que nous allons exposer.

Considérons l'équation différentielle

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = \sum [a_i y^i] = p(y) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n),$$

dans laquelle les a_i désignent des fonctions quelconques de la variable x.

La substitution

$$(6) \qquad y = \lambda(x) v + \mu(x), \qquad du = \nu(x)\, dx,$$

donne l'équation

$$(7) \qquad \frac{dv}{du} = \sum [\alpha_i v^i] \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Si l'on pose

$$p'(\mu) = \frac{dp}{d\mu}, \qquad p^{(s)}(\mu) = \frac{d^s p}{d\mu^s}, \qquad \mu' = \frac{d\mu}{dx}, \qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dx},$$

on a

$$(8) \qquad \alpha_0 = \frac{p(\mu) - \mu'}{\lambda\nu}, \qquad \alpha_1 = \frac{\lambda p'(\mu) - \lambda'}{\lambda\nu}, \qquad \alpha_j = \frac{\lambda^{j-1} p^{(j)}(\mu)}{j!\,\nu}$$
$$(j = 2, 3, n).$$

Cherchons à déterminer tous les systèmes de fonctions

$$\lambda = L(x), \qquad \mu = M(x), \qquad \nu = N(x),$$

qui ramènent (5) à une forme réduite (7) où l'on a

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_{n-1} = 0, \qquad \alpha_n = 1,$$

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha_{n-1} = 0 \text{ donne} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{n-1} + n a_n M = 0, \\ \alpha_1 = 0 \text{ donne} \ldots\ldots\ldots\ldots & p'(M) = \dfrac{\lambda'}{\lambda}, \quad L = e^{\int p'(M)\,dx}, \\ \alpha_n = 1 \text{ donne} \ldots\ldots\ldots\ldots & N = a_n L^{n-1}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par c une constante arbitraire et par $l(x)$ la fonction particulière L obtenue en supposant que $\int p'(\mathrm{M})\,dx$ soit nul pour une valeur fixe $x = x_0$, on obtient, par les formules

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = cl(x), \qquad \mathrm{M} = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \mathrm{N} = a_n \mathrm{L}^{n-1}, \\ y = cl(x)\mathrm{Y} + \mathrm{M}, \qquad d\mathrm{X} = \mathrm{N}\,dx, \end{array}\right.$$

toutes les substitutions qui ramènent (1) à une équation de la forme

$$(11)\qquad \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{A}_0 + \sum [\mathrm{A}_s \mathrm{Y}^s] + \mathrm{Y}^n \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-2),$$

où l'on a

$$(12)\qquad \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_{n-1} = 0, \qquad \mathrm{A}_0 = \frac{p(\mathrm{M}) - \mathrm{M}'}{a_n \mathrm{L}^n}, \qquad \mathrm{A}_s = \frac{p^{(s)}(\mathrm{M})}{s!\, a_n \mathrm{L}^{n-s}}.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{H}_s(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ un certain polynome homogène et de degré $n - s$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et par $\mathrm{H}_0(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ la somme de l'expression $\dfrac{(a_n a'_{n-1} - a_{n-1} a'_n) a_n^{n-2}}{n}$ et d'un certain polynome homogène et de degré n en $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on a

$$\mathrm{A}_i = \frac{\mathrm{H}_i(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{i!\, a_n^{n-i+1} \mathrm{L}^{n-i}} \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, n-2).$$

Montrons que l'équation (11) est une équation canonique, c'est-à-dire que les A_i sont des invariants.

Désignons par C une constante arbitraire et par $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ des fonctions de u qui se déduisent respectivement de L, M, N en remplaçant les a_i par les α_i de même indice. D'après ce qui a été démontré pour (5), les seules substitutions pour lesquelles l'équation (7) se met sous la forme réduite

$$(13)\qquad \frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{U}} = \mathfrak{A}_0 + \sum [\mathfrak{A}_s \mathrm{V}^s] + \mathrm{V}^n \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-2),$$

sont de la forme

$$(14)\qquad v = \mathrm{C}\mathcal{L}(u)\mathrm{V} + \mathfrak{M}(u), \qquad d\mathrm{U} = \mathfrak{N}(u)\,du$$

et l'on a

$$\mathfrak{N} = \mathrm{C}^{n-1} \alpha_n \mathcal{L}^{n-1}, \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\mathrm{H}_i(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{i!\, \mathrm{C}^{n-i} \alpha_n^n \mathcal{L}^{n-i}} \qquad (i = 0, 2, \ldots, n-2).$$

On arrive d'autre part à une forme réduite de (7) de la façon suivante.

On fait d'abord dans (7) la substitution inverse de (6) ce qui donne l'équation (5). On fait ensuite sur celle-ci la substitution (10). En éliminant y et dx entre les formules (6) et (10), on a

$$(15) \qquad v = \frac{LY}{\lambda} + \frac{M-\mu}{\lambda}, \qquad dX = \frac{N}{\nu}\,du,$$

formules qui définissent la résultante des deux substitutions indiquées et qui transforment l'équation (7) en l'équation (11). On remplacera x en fonction de u dans (15) de manière à obtenir des formules analogues à (10), v et u remplaçant x et y. Il est bien évident que u, U, X ne sont définis qu'à une constante additive près. On pourrait faire ces constantes toutes nulles simultanément, trois des variables x, u, U, X étant fonctions de la quatrième, mais il peut être commode de disposer de ces constantes additives pour simplifier les formules.

Nous venons de voir que l'on obtient pour (7) les deux équations réduites (11) et (13). Les substitutions qui, en partant de (7), conduisent à (11) ou à (13) sont (4) et (15). Toutes les deux sont de la forme (10), u et v remplaçant x et y; X et Y étant remplacés par U et V dans (14). On a donc, en désignant par k une constante

$$(16) \qquad Y = kV, \qquad dU = k^{n-1}\,dX.$$

On retrouve ces relations (16) si l'on applique les formules (8) à la recherche de la substitution (6), qui permet de passer de (11) à (13).

L'identification des équations (11) et (13) en tenant compte de (16), donne

$$A_i = k^{n-1}\mathfrak{A}_i \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, n-2).$$

Les A_i, dont un facteur est l'expression L^{i-n} dans laquelle une primitive figure en exposant, sont donc des invariants puisque A_i et $\mathfrak{A}_i$ ne diffèrent que par un facteur constant.

L'identification des formules (14) et (15) en tenant compte de (16) donne

$$\frac{kL}{\lambda} = \mathcal{L}, \qquad \frac{M-\mu}{\lambda} = \mathfrak{M}, \qquad \frac{k^{n-1}N}{\nu} = \mathfrak{N}.$$

On peut remarquer que le facteur constant c qui figure dans L étant fixé, on peut choisir le facteur constant C qui figure dans $\mathcal{L}$ de telle manière que l'on ait $k = 1$. Dans ces conditions, on a

$$(17) \quad Y = V, \quad U = X, \quad A_i = \mathfrak{A}_i, \quad L = \lambda\mathcal{L}, \quad M - \mu = \lambda\mathfrak{M}, \quad N = \nu\mathfrak{N}.$$

L'équation (13) devient identique à l'équation (11). Dans les formules (14), Y et X remplacent V et U.

Le raisonnement qui vient d'être développé montre que L et N sont des invariants relatifs, tandis que X, A_0, A_s [$s = 2, 3, \ldots, n - 2$] sont des invariants absolus de l'équation (5).

Ce même raisonnement s'appliquera dans la suite pour établir l'existence d'invariants et de formes canoniques relatives à quelques équations différentielles.

CHAPITRE II.

CAS D'INTÉGRABILITÉ DE $y' = p(y)$.

3. **Réduction de $y' = p(y)$ à une équation à coefficients constants.** — Lorsque les coefficients de l'équation (5) sont constants, celle-ci s'intègre par une quadrature. On aura donc des cas d'intégration en réduisant par la substitution (6) l'équation (5) à coefficients variables à une équation à coefficients constants, lorsque cela est possible. Bien que les conditions pour que (5) soit réductible aient été obtenues par Appell [a, c] à l'aide des invariants, nous indiquerons d'une façon un peu moins brève qu'il ne l'a fait les raisonnements qui conduisent à ces résultats, ainsi que la manière d'obtenir la substitution (6) qui donne une équation à coefficients constants. En effet, les raisonnements ainsi développés s'appliquent immédiatement aux divers autres cas que nous voulons considérer. Nous exposerons de plus une méthode directe (sans employer les invariants) permettant de trouver les conditions pour que l'équation (5) soit réductible, ainsi que la substitution (6) qui opère la réduction. Cette deuxième méthode met en évidence que, lorsque la réduction est possible, μ, λ, ν s'obtiennent en général sans quadrature. La seule quadrature qui se présentera sera celle qui donne $X = \int \nu(x)\,dx$. X ne sera défini qu'à une constante additive près. Nous négligerons cette constante pour simplifier l'écriture. Il n'y aurait aucune difficulté à la rétablir si cela devenait utile.

1. Première Méthode. — Avec les notations employées au n° 2, nous supposerons que (5) est une équation à coefficients variables, qui est réduite à une équation à coefficients constants (7) par la substitution (6).

La substitution (10) faite dans (5) donne l'équation canonique (11). La substitution (14), qui, d'après la remarque faite (au bas de la page 11), s'écrit

$$(18) \qquad v = C\mathcal{L}(u)Y + \mathcal{M}(u), \qquad dX = \mathcal{N}\,du,$$

donne également l'équation canonique (11).

Calculons $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ à l'aide de l'équation (7) dont les coefficients sont constants. On peut toujours en remplaçant v par $v + c$ dans (7) supposer que l'on a : $\alpha_{n-1} = 0$. En désignant par a et k des constantes, on obtient

$$\mathcal{M} = 0, \qquad \mathcal{L} = e^{au}, \qquad \mathcal{N} = ke^{(n-1)au}.$$

En remplaçant u par $u + h$ on peut supposer que l'on a

$$\mathcal{N} = (n-1)ae^{(n-1)au}, \qquad X = e^{(n-1)au}, \qquad C\mathcal{L}(u) = Ke^{au},$$

K étant une constante, (18) devient

$$(19) \qquad v = YX^{\frac{1}{n-1}}, \qquad \frac{dX}{X} = (n-1)a\,du.$$

L'équation (11) se présente donc sous la forme

$$(20) \qquad \frac{dY}{dX} = Y^n + \sum\left[K_i X^{\frac{n-i}{1-n}}\right] \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, n-2).$$

On conclut de ce qui précède que la condition nécessaire pour que (5) soit réductible et que l'équation canonique (11) ait la forme (20).

Cette condition est suffisante car la substitution inverse de (19)

$$(21) \qquad Y = ve^{-au}, \qquad X = e^{(n-1)au},$$

donnera une équation (7) à coefficients constants.

Remarque I. — La condition nécessaire et suffisante trouvée peut s'exprimer par $n - 2$ relations entre les coefficients a_i de (5). En effet, puisque l'équation canonique (11) doit avoir la forme (20), on a les conditions

$$A_i = K_i X^{\frac{n-i}{1-n}} \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, n-2).$$

Après dérivation et élimination de X entre les égalités précédentes et leurs dérivées par rapport à X, ces $n - 2$ conditions s'écrivent

$$(22) \qquad (A_i)^{2n-(i+1)}\left(\frac{dA_i}{dX}\right)^{-(n-i)} = \text{const.} \qquad (i = 0, 2, 3, \ldots, n-2).$$

Posons, d'après les formules (12)

$$(23)\quad A_0=\frac{\frac{p(M)-M'}{a_n}}{L^n}=\frac{T_0}{L^n},\quad A_i=\frac{\frac{p^{(i)}(M)}{i!\,a_n}}{L^{n-i}}=\frac{T_i}{L^{n-i}}\quad (i=2,3,\ldots,n-2).$$

Dérivons par rapport à X, on obtient, puisque $N=a_nL^{n-1}$

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_0}{dX}=\dfrac{\frac{1}{a_n}T'_0-\frac{n}{a_n}T_0\,p'(M)}{L^{2n-1}}, \\[2ex] \dfrac{dA_i}{dX}=\dfrac{\frac{1}{a_n}T'_i-\frac{n-i}{a_n}T_i\,p'(M)}{L^{2n-(i+1)}} \qquad (i=2,3,\ldots,n-2). \end{cases}$$

Et par suite les $n-2$ relations entre les a_i peuvent s'écrire, en substituant (23) et (24) dans (22)

$$(25)\quad \frac{\left[\frac{1}{a_n}T'_i-\frac{n-i}{a_n}p'(M)T_i\right]^{n-i}}{T_i^{2n-(i+1)}}=\text{const.}\qquad (i=0,2,3,\ldots,n-2).$$

On peut exprimer autrement les $n-3$ dernières conditions (25). Si l'on élimine L entre les formules (23), on obtient

$$\frac{T_i^n}{T_0^{n-i}}=\frac{A_i^n}{A_0^{n-i}}\qquad (i=2,3,\ldots,n-2),$$

D'où, d'après les expressions (12) de A_0 et A_i

$$(26)\quad \frac{T_i}{T_0^{\frac{n-i}{n}}}=\text{const.}\qquad (i=2,3,\ldots,n-2).$$

Remarque II. — En remplaçant $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ par leurs valeurs dans les formules (17), on a

$$\lambda=Le^{-au},\qquad \mu=M,\qquad \nu=\frac{N}{k}e^{(1-n)au}.$$

On obtient ainsi la substitution (2) qui permet de passer directement de (5) à une équation à coefficients constants lorsque (5) est réductible. Mais il est à remarquer que l'expression de L exige une quadrature. Nous allons montrer qu'on peut exprimer les fonctions λ, μ, ν de la substitution (2) permettant d'opérer la réduction, sans aucune quadrature, quand cette réduction est possible.

Supposons l'équation (5) réductible à une équation (7) à coefficients constants. La substitution (10) donne à l'équation (5) la forme (20).

Remplaçons dans cette substitution (10), Y et dX par leurs expressions (19) en fonction de u et v. Nous obtenons ainsi la substitution

$$y = LX^{-\frac{1}{n-1}}v + M, \qquad du = \frac{1}{a(n-1)}NX^{-1}\,dx.$$

Or, d'après les expressions des invariants et d'après l'expression de N, nous avons

$$A_0 = T_0L^{-n} = K_0X^{-\frac{n}{n-1}}, \qquad NX^{-1} = a_nX^{-1}L^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$LX^{-\frac{1}{n-1}} = K_0^{-\frac{1}{n}}T^{\frac{1}{n}}, \qquad NX^{-1} = a_nK_0^{-\frac{n-1}{n}}T_0^{\frac{n-1}{n}}.$$

Par suite, la substitution permettant de passer directement de l'équation (5) supposée réductible à une équation (7) à coefficients constants peut s'écrire

$$(27) \qquad y = K_0^{-\frac{1}{n}}T_0^{\frac{1}{n}}v + M, \qquad du = \frac{1}{a(n-1)}K_0^{-\frac{n-1}{n}}a_nT_0^{\frac{n-1}{n}}.$$

Nous voyons que cette substitution, d'après l'expression (23) de T_0 n'exige *aucune quadrature*.

La réduction s'opérera encore sans quadrature si $p(M) - M'$ est identiquement nul pourvu que les $p^{(i)}M$ ne soient pas tous nuls. La formule de substitution serait alors

$$y = kT^{\frac{1}{n-i}}v + M, \qquad du = k^{n-1}a_nT_i^{\frac{n-1}{n-i}}dx \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-2).$$

Ce n'est que dans le cas où tous les $p^{(i)}M$ sont nuls que la réduction exige une quadrature.

II. Deuxième Méthode. — Remarquons d'abord que si l'équation (5) est réductible par la substitution (2) à une équation à coefficients constants

$$(28) \qquad \frac{dY}{dx} = \sum A_iY^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

on peut toujours supposer : $A_{n-1} = 0$, en changeant Y en Y + C.

L'équation (28) peut s'écrire

$$(29) \qquad \frac{dY}{dX} = v\sum A_iY^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

D'autre part, substituant dans (5) les expressions de y et de y' tirées de (2), on a

$$\frac{dY}{dx}+\frac{\lambda'}{\lambda}Y+\frac{\mu'}{\lambda}=\frac{p(\lambda Y+\mu)}{\lambda}. \tag{30}$$

En développant $p(\lambda Y+\mu)$ par la formule de Taylor, on a

$$\frac{dY}{dx}=\frac{p(\mu)-\mu'}{\lambda}+\frac{\lambda p'(\mu)-\lambda'}{\lambda}Y+\sum\left[\frac{\lambda^{j-1}}{j!}p^{(j)}(\mu)Y^j\right] \tag{31}$$
$$(j=2, 3, \ldots, n).$$

Identifions (30) et (31) en supposant $A_{n-1}=0$; écrivons de la façon suivante les équations d'identification

$$p(\mu)-\mu'=A_0\lambda\nu, \qquad \lambda^{j-1}p^{(j)}(\mu)=j!\,A_j\nu, \qquad \lambda^{n-1}a_n=A_n\nu \tag{32}$$
$$(j=2, 3, \ldots, n-2);$$
$$\lambda p'(\mu)-\lambda'=A_1\lambda\nu, \qquad a_{n-1}+na_n\mu=0 \tag{33}$$

La dernière des équations (33) détermine μ; on peut donc reconnaître quelles sont celles des constantes A_0 et A_j figurant dans les équations (32) qui sont nulles; A_n n'est jamais nul et l'on peut, si cela est utile prendre $A_n=1$.

Nous avons pour déterminer λ et ν les $n-1$ équations (32) et la première des équations (33). Nous pouvons donc former $n-2$ conditions, en général distinctes, pour que l'équation (5) soit réductible, et calculer λ et ν.

Si l'une des constantes A_0 et A_j n'est pas nulle, l'équation correspondante associée à la dernière des équations (32) donne d'une façon très simple λ et ν sans quadrature et toutes les constantes A_0, A_j, A_n sont déterminées en fonction de deux d'entre elles que l'on peut choisir arbitrairement.

Si toutes les constantes A_0 et A_j sont nulles, on pourra prendre $A_1=0$, $A_n=1$. λ et ν seront déterminées par la dernière équation (32) et la première équation (33). La réduction à l'équation (29) avec $A_j=A_0=0$ sera possible en déterminant λ par une quadrature.

Dans tous les cas, le nombre des conditions de réduction sera diminué d'autant d'unités qu'il y a de nombres A_0, A_j nuls.

4. Cas particulier. Équation $y'=a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3$. — Nous avons montré [*voir* J. Fayet, *a*] que le changement de variables

$$y=LY+M, \qquad dX=N\,dx,$$

avec

$$M=-\frac{a_2}{3a_3}, \qquad L=e^{\int\left(a_1-\frac{a_2^2}{3a_3}\right)dx}, \qquad N=a_3L^2,$$

donne à cette équation la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + A$$

$$A = \frac{p(M) - M'}{LN} = \frac{\frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1 a_2}{3a_3^2} + \frac{2}{27}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + \frac{1}{3a_3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)'}{L^3} = \frac{T}{L^3}$$

et que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit réductible est que A soit de la forme $KX^{-\frac{3}{2}}$, K désignant une constante, condition qui peut s'exprimer encore par la relation

$$\left[\frac{1}{a_3}T' - \frac{3}{a_3}\left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}\right)T\right]^3 T^{-5} = \text{const.}$$

Lorsque la réduction est possible, la substitution qui l'effectue directement est de la forme

$$y = kT^{\frac{1}{3}}v + M, \qquad du = k^2 a_3 T^{\frac{2}{3}},$$

k désignant une constante arbitraire non nulle.

Exemple I. — L'équation

$$y' = -4y^2 + 3xy^3$$

satisfait à la condition que nous venons d'indiquer. La substitution

$$y = \frac{1}{x}v, \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

la transforme en l'équation à coefficients constants

$$\frac{dv}{du} = v - 4v^2 + 3v^3.$$

Exemple II. — Plus généralement, l'équation [1]

$$y' = -\frac{a}{\alpha}y^2 - \frac{x}{\alpha}y^3,$$

où a et α désignent des constantes quelconques, est aussi réductible.

---

[1] Cette équation rentre aussi dans l'un des cas d'intégrabilité de $y' = p(y)$ où $p(y)$ est du 3e degré en y, qui a été signalé par Appel [a] et étendu par Mitrinovitch [b].

La substitution

$$y = \frac{1}{x} v, \qquad du = \frac{1}{x} dx,$$

la transforme en l'équation à coefficients constants

$$\frac{dv}{du} = v - \frac{a}{\alpha} v^2 - \frac{1}{\alpha} v^3;$$

Exemple III. — On vérifiera encore que l'équation

$$y' = \frac{1}{a} y - \frac{2x}{a} y^2 + \frac{x(x-a)}{a} y^3$$

est aussi réductible et que la substitution

$$y = \frac{1}{x-a} v, \qquad du = \frac{x}{x-a} dx$$

la transforme en

$$a \frac{dv}{du} = v(v-1)^2.$$

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $y'' = p(y)$.

5. Forme canonique de l'équation $y'' = p(y)$. — Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' = p(y) \equiv \sum a_i y^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

dans laquelle les a_i sont des fonctions quelconques de la variable x.

Appliquons-lui la substitution (6) du Chapitre I. Nous montrons tout d'abord qu'il est possible de lier les fonctions $\lambda(x)$ et $\nu(x)$ de façon que l'équation transformée soit de la même forme que (1).

Des formules (6) du Chapitre I, on tire

$$y' = \lambda\nu \frac{dv}{du} + \lambda' v + \mu',$$

$$y'' = \lambda\nu^2 \frac{d^2 v}{du^2} + (2\lambda'\nu + \lambda\nu')\frac{dv}{du} + \lambda'' v + \mu''.$$

Pour que la nouvelle équation ne contienne pas $\frac{dv}{du}$, on voit qu'il suffit de prendre par exemple $\nu = \lambda^{-2}$. Appliquons donc à l'équation (1) la substitution

$$(2) \qquad y = \lambda(x) v + \mu(x), \qquad du = \lambda^{-2}(x)\, dx.$$

Cette équation devient

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{du^2} = \mathrm{P}(v) \equiv \sum \alpha_i v^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où les α_i ont pour expressions

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_0 = \lambda^3[p(\mu) - \mu''], & \alpha_1 = \lambda^3[p'(\mu)\lambda - \lambda''], \\ \alpha_j = \dfrac{\lambda^{j+3} p^{(j)}(\mu)}{j!} & (j = 2, 3, \ldots, n), \end{cases}$$

μ'' et λ'' désignant les dérivées secondes de μ et λ par rapport à x; $p'(\mu)$, $p^{(j)}(\mu)$ désignant les dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial \mu}$, $\frac{\partial^j p}{\partial \mu^p}$.

Cherchons à déterminer tous les systèmes de fonctions

$$\lambda = \mathrm{L}(x), \qquad \mu = \mathrm{M}(x),$$

qui ramènent (1) à une forme réduite (3), où l'on a

$$\alpha_n = 1, \qquad \alpha_{n-1} = 0;$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_{n-1} = 0 \text{ donne} \\ a_{n-1} + n a_n \mathrm{M} = 0; \\ \alpha_n = 1 \text{ donne} \\ \mathrm{L} = a_n^{-\frac{1}{n+3}}. \end{cases}$$

On obtient ainsi, par les formules

$$(6) \qquad y = \mathrm{L}\mathrm{Y} + \mathrm{M}, \qquad dx = \mathrm{L}^{-2}\, dx,$$

toutes les substitutions qui ramènent (1) à une équation de la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2} = \mathrm{Y}^n + \sum [\mathrm{A}_j \mathrm{Y}^j] + \mathrm{A}_1 \mathrm{Y} + \mathrm{A}_0 \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-2),$$

dont les coefficients s'expriment par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_0 = \mathrm{L}^3[p(\mathrm{M}) - \mathrm{M}''], \qquad \mathrm{A}_1 = \mathrm{L}^3[p'(\mathrm{M})\mathrm{L} - \mathrm{L}''], \\ \mathrm{A}_j = \dfrac{\mathrm{L}^{j+3} p^{(j)}(\mathrm{M})}{j!} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-2). \end{cases}$$

Les raisonnements du nº 2, montrent que les A_0, A_1, A_j sont des invariants de (1) pour la substitution (2) et que par suite l'équation (7) est la forme canonique de (1).

6. **Réduction de l'équation** $y'' = p(y)$. — Si les coefficients a_i de l'équation (1) sont constants, cette équation s'intègre par quadratures. Multiplions en effet les deux membres de l'équation (1) par $2y'$ et intégrons, nous obtenons

$$y'^2 = \sum \left[\frac{2}{i+1} a_i y^{i+1}\right] + \text{const.} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) soit réductible.

Première méthode. — Supposons que l'équation (1), à coefficients variables soit réductible à une équation (3), à coefficients constants. Il est évident qu'en remplaçant v par $av+b$, on peut déterminer les constantes a et b de façon que l'on ait $\alpha_n = 1$, $\alpha_{n-1} = 0$. L'équation (7) se présente alors sous la forme

$$(9) \qquad \frac{d^2 Y}{dX^2} = Y^n + \sum C_i Y^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2).$$

On pourrait dire aussi que les invariants calculés à l'aide de l'équation (3) à coefficients constants sont des constantes. Il en est donc de même des invariants calculés à l'aide de (1).

Ainsi, pour que (1) soit réductible, il est nécessaire que les invariants (8) soient des constantes. La condition est évidemment suffisante. Cette condition peut donc être exprimée par les $n-1$ relations distinctes

$$(10) \qquad \begin{cases} L^3[p(M) - M''] = C_0, \qquad L^3[p'(M)L - L''] = C_1, \\ \dfrac{L^{j+3}\, p^{(j)}(M)}{j!} = C_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-2), \end{cases}$$

et les valeurs trouvées pour M et L montrent que, lorsqu'elle est possible, la réduction de (1) peut être effectuée *sans quadrature*.

Deuxième méthode. — Supposons que l'équation (1) donne par la substitution (2) une équation (3) à coefficients constants.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, on peut toujours remplacer λ par $a\lambda$ et μ par $\mu + b$, a et b étant des constantes telles que l'on ait $\alpha_n = 1$, $\alpha_{n-1} = 0$. On est donc amené à faire la substitution (6) et les expressions (8) doivent être des constantes.

Exemple. — Soit l'équation différentielle

$$y'' = \frac{C_0}{f^3} + \frac{f''}{f} y + \sum \left[\frac{C_i}{f^{i-3}} y^i\right] \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

où f désigne une fonction quelconque de x, C_0 et C_i des constantes. On vérifiera qu'elle satisfait aux conditions de réductibilité (10). En particulier, la substitution

$$y = fv, \qquad du = f^{-2}\, dx$$

la réduit à

$$\frac{d^2 v}{du^2} = C_0 + \Sigma(C_i Y^i) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

7. Cas où $p(y)$ est du second degré. — Les raisonnements que nous avons faits au n° 5 et au n° 6 sont valables quel que soit n, mais les calculs faits pour ramener (1) dans le cas de $n > 2$, à une équation canonique, ou à une équation (3) à coefficients constants ne sont plus valables pour $n = 2$.

La substitution (2) ramène alors (1) à l'équation

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2, \tag{11}$$

où les α_i sont

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \lambda^3[a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 - \mu''] = \lambda^3[p(\mu) \quad - \mu''],\\
\alpha_1 &= \lambda^3[(a_1 + 2a_2\mu)\lambda - \lambda''] \quad = \lambda^3[p'(\mu)\lambda - \lambda''],\\
\alpha_2 &= a_2\lambda^5 \qquad\qquad\qquad\quad\; = \frac{1}{2}\lambda^5 p''(\mu).
\end{aligned}$$

Cherchons à déterminer λ et μ de façon que $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$. On obtient, en désignant par L et M les expressions obtenues pour λ et μ

$$L = a_2^{-\frac{1}{5}}, \qquad M = \frac{1}{2a_2}\frac{L''}{L} - \frac{a_2}{2a_1}.$$

X et Y désignant les variables canoniques, on obtient l'équation canonique

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = Y^2 + A(X) \qquad \text{avec } A(X) = L^3[p(M) - M''].$$

Pour que l'équation considérée soit réductible, il faut et il suffit que l'on ait

$$L^3[p(M) - M''] = \text{const.} \tag{12}$$

Exemples : 1° Soit l'équation différentielle

$$y'' = \frac{4}{x^3} - \frac{4}{x^4}y + \frac{2}{x^5}y^2.$$

La substitution

$$y = 2^{-\frac{1}{5}}xv + x, \qquad du = 2^{\frac{2}{5}}x^{-2}\,dx$$

la réduit à l'équation

$$\frac{d^2 v}{du^2} = 2^{\frac{2}{5}} + v^2.$$

2° Soit l'équation différentielle plus générale

$$y'' = af^{-3} + f''f^{-1}y + bf^{-5}y^2,$$

dans laquelle a et b désignent des constantes, f une fonction quelconque de x. La substitution

$$y = fv, \qquad du = f^{-2}\,dx$$

la réduit à l'équation

$$\frac{d^2 v}{du^2} = a + bv^2.$$

3° Soit encore l'équation différentielle du troisième ordre, homogène par rapport à y et à ses dérivées y', y'', y''', et du quatrième degré.

$$y^3 y''' - 3y^2 y' y'' + 2yy'^3 = a_0 y^4 + a_1 y^3 y' + a_2 y^2 y'^2$$

et dans laquelle a_0, a_1, a_2 sont des fonctions quelconques de x. La substitution $y' = yz$ la transforme en l'équation

$$z'' = a_0 + a_1 z + a_2 z^2.$$

Si a_0, a_1, a_2 satisfont à la condition (12), l'intégration de (13) se ramène à l'intégration d'une équation à coefficients constants.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE ET DU DEUXIÈME DEGRÉ EN y ET y'.

En dehors des problèmes analogues à ceux traités dans les Chapitres précédents, nous chercherons les équations de cette classe dont l'intégrale générale est une fonction rationnelle de la constante d'intégration.

8. **Formes canoniques de l'équation complète.** — Si le coefficient du terme en y'^2 n'est pas identiquement nul, on peut écrire l'équation générale du premier ordre et du deuxième degré en y et y' sous la forme

$$f(y, y') \equiv y'^2 + ay^2 + 2byy' + 2cy' + 2dy + e = 0, \tag{1}$$

où a, b, c, d, e représentent des fonctions de x.

Faisons la substitution

$$y = \lambda(x)v + \mu(x), \qquad du = \nu(x)\,dx, \tag{2}$$

l'équation (1) devient

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \alpha v^2 + 2\beta v\frac{dv}{du} + 2\gamma\frac{dv}{du} + 2\delta v + \varepsilon = 0. \tag{3}$$

Les coefficients α, β, γ, δ, ε ont pour expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} + 2b\frac{\lambda'}{\lambda} + a\right], \qquad \beta = \frac{1}{\lambda\nu}[\lambda' + b\lambda], \qquad \gamma = \frac{1}{\lambda\nu}[\mu' + b\mu + c],\\ &\delta = \frac{1}{\lambda^2\nu^2}[(\lambda' + b\lambda)\mu' + (b\lambda' + a\lambda)\mu + c\lambda' + d\lambda], \qquad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2\nu^2}f(\mu, \mu'). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Particularisons les fonctions λ, μ et ν de la façon suivante. Prenons pour λ une fonction L telle que $\beta = 0$, soit

$$L' + bL = 0, \qquad L = e^{-\int b\,dx}. \tag{5}$$

Les coefficients α, γ, δ, ε deviennent

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{1}{\nu^2}(a-b^2), & \gamma = \dfrac{1}{L\nu}(\mu'+b\mu+c), \\ \delta = \dfrac{1}{L\nu^2}[(a-b^2)\mu+d-bc], & \varepsilon = \dfrac{1}{L^2\nu^2}f(\mu,\mu'). \end{array}\right.$$

Premier cas : $\mathfrak{A} \equiv b^2 - a \neq 0$. — Prenons pour μ la fonction M qui annule δ, soit

$$(7)\qquad M = -\frac{bc-d}{b^2-a} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \qquad \text{avec } \mathfrak{B} \equiv bc-d.$$

Enfin, prenons pour ν la fonction N telle que l'on ait $\alpha = \varepsilon' = \pm 1$ avec $\varepsilon'\mathfrak{A} > 0$, ce qui donne

$$(8)\qquad N = (\varepsilon'\mathfrak{A})^{\frac{1}{2}}.$$

La substitution

$$(9)\qquad y = LY + M, \qquad dX = N\,dx$$

ramène l'équation (1) à une équation de la forme

$$(10)\qquad \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + \varepsilon Y^2 + I(X)\frac{dY}{dX} + J(X) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

avec

$$(11)\qquad I(X) = \frac{1}{LN}[M'+bM+c], \qquad J(X) = \frac{1}{L^2N^2}f(M, M').$$

Pour montrer que la forme (11) est une forme canonique de l'équation (1), il suffira de prouver, par le raisonnement du n° 2 du Chapitre I que $I(X)$ et $J(X)$ sont des invariants.

Deuxième cas : $\mathfrak{A} \equiv b^2 - a \equiv 0$, $\mathfrak{B} \equiv bc - d \neq 0$. — L'équation (1) s'écrit

$$(12)\qquad f(y, y') \equiv (y'+by)^2 + 2cy' + 2dy + e = 0.$$

Par la substitution (2), l'équation (12) devient

$$(13)\qquad \left(\frac{dv}{du} + \beta v\right)^2 + 2\gamma\frac{dv}{du} + 2\delta v + \varepsilon = 0,$$

où l'on a, d'après (4),

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta = \dfrac{1}{\lambda\nu}(\lambda'+b\lambda), \qquad \gamma = \dfrac{1}{\lambda\nu}(\mu'+b\mu+c), \\ \delta = \dfrac{1}{\lambda^2\nu^2}[(\lambda'+b\lambda)\mu'+b(\lambda'+b\lambda)\mu+c\lambda'+d\lambda], \\ \varepsilon = \dfrac{1}{\lambda^2\nu^2}f(\mu,\mu'). \end{array}\right.$$

Comme précédemment, particularisons les fonctions λ, μ, ν. Prenons pour λ une fonction L qui annule β, pour μ, une fonction M qui annule γ. Nous aurons

$$(15)\qquad \mathrm{L} = e^{-\int b\,dx}, \qquad \mathrm{M}' + b\mathrm{M} + c = 0.$$

Les coefficients δ et ε s'écrivent alors

$$(16)\qquad \delta = \frac{1}{\mathrm{L}\nu^2}(d - bc) = -\frac{\mathcal{B}}{\mathrm{L}\nu^2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{L}^2\nu^2}[-2\mathcal{B}\mathrm{M} - \mathcal{C}],$$

si l'on pose

$$c^2 - e \equiv \mathcal{C}.$$

Enfin choisissons ν de façon à avoir $2\delta = \varepsilon' = \pm 1$ avec $\varepsilon'\mathcal{B} > 0$. Nous aurons

$$(17)\qquad \nu(x) \equiv \mathrm{N} = \left[\frac{2\varepsilon'\mathcal{B}}{\mathrm{L}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La substitution (9) réduit l'équation (12) à la forme

$$(18)\qquad \left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^2 + \mathrm{Y} + \mathrm{I}(\mathrm{X}) = 0 \qquad \text{avec } \mathrm{I} = \frac{-2\mathcal{B}\mathrm{M} - \mathcal{C}}{\mathrm{L}^2\mathrm{N}^2},$$

car en changeant Y en — Y, on peut toujours supposer que le coefficient de Y est $+1$.

On montrerait encore, suivant la méthode indiquée au n° **2** du Chapitre I que si $\mathcal{B} \equiv bc - d$ n'est pas identiquement nul, (18) est une forme canonique de l'équation (12).

Troisième cas : $\mathcal{A} \equiv b^2 - a \equiv 0$, $\mathcal{B} \equiv bc - d \equiv 0$. — L'équation (1) s'écrit

$$(19)\qquad f(y, y') \equiv (y' + by)^2 + 2c(y' + by) + e = 0$$

et peut par conséquent, être décomposée en deux équations linéaires.

La substitution (2) donne l'équation

$$(20)\qquad \left(\frac{dv}{du} + \beta v\right)^2 + 2\gamma\left(\frac{dv}{du} + \beta v\right) + \varepsilon = 0,$$

où l'on a, utilisant les formules (14)

$$(21)\qquad \beta = \frac{1}{\lambda\nu}(\lambda' + b\lambda), \qquad \gamma = \frac{1}{\lambda\nu}(\mu' + b\mu + c), \qquad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2\nu^2}f(\mu, \mu').$$

Prenons pour λ et μ des fonctions L et M qui annulent respectivement β et γ. Le coefficient ε s'écrit alors

$$\varepsilon = \frac{1}{L^2 \nu^2}(e - c^2) = -\frac{\mathcal{C}}{L^2 \nu^2} \tag{22}$$

et nous avons

$$L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M' + bM + c = 0.$$

Prenons $\varepsilon = \pm 1$ de façon que $\varepsilon\mathcal{C}$ soit négatif et choisissons pour fonction ν l'expression N définie par

$$N = \frac{(-\varepsilon\mathcal{C})^{\frac{1}{2}}}{L}. \tag{23}$$

La substitution (9) réduit l'équation (19) à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 \mp 1 = 0. \tag{24}$$

Quatrième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont identiquement nuls. — L'équation (1) se réduit à

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 = 0.$$

9. Formes canoniques de l'équation sans terme en y'^2. — Supposons que l'équation générale du premier ordre et du deuxième degré en y et y' ne contienne pas de terme en y'^2. On écrit cette équation sous la forme

$$f(y, y') \equiv yy' + ay^2 + by' + cy + d = 0, \tag{25}$$

a, b, c, d représentant des fonctions quelconques de x.

La substitution (2) appliquée à (25) donne l'équation

$$v\frac{dv}{du} + \alpha v^2 + \beta\frac{dv}{du} + \gamma v + \delta = 0, \tag{26}$$

les coefficients α, β, γ, δ, ayant pour expressions

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{\lambda\nu}(\lambda' + a\lambda), \qquad \beta = \frac{1}{\lambda}(\mu + b), \\ &\gamma = \frac{1}{\lambda^2\nu}[(\mu + b)\lambda' + (\mu' + 2a\mu + c)\lambda], \qquad \delta = \frac{1}{\lambda^2\nu}f(\mu, \mu'). \end{aligned} \right.$$

Prenons pour λ et μ des fonctions L et M qui annulent respectivement α et β. Nous avons

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &L' + aL = 0, \qquad L = e^{-\int a\,dx}, \qquad M = -b, \\ &\gamma = \frac{1}{L\nu}[c - 2ab - b'] \equiv \frac{\mathcal{A}}{L\nu}, \qquad \delta = \frac{1}{L^2\nu}[ab^2 - bc + d] \equiv \frac{\mathcal{B}}{L^2\nu}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\mathcal{A} \equiv c - 2ab - b', \qquad \mathcal{B} \equiv ab^2 - bc + d.$$

Premier cas : $\mathcal{A} \not\equiv 0$. — Choisissons pour ν la fonction N pour laquelle on a $\gamma = 1$,

$$\text{(29)} \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathcal{A}}{\mathrm{L}}.$$

La substitution (9) réduit l'équation (25) à la forme

$$\text{(30)} \qquad \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + \mathrm{Y} + \mathrm{I}(\mathrm{X}) = 0 \quad \text{avec } \mathrm{I}(\mathrm{X}) = \frac{\mathcal{B}}{\mathrm{L}^2\mathrm{N}}.$$

On montrera, comme au Chapitre I, n° 2 que I(X) est un invariant. L'équation (30) est donc une forme canonique de (25) si l'on n'a pas $\mathcal{A} \equiv c - 2ab - b' \equiv 0$.

Deuxième cas : $\mathcal{A} \equiv 0$, $\mathcal{C} \equiv d - ab^2 - bb' \not\equiv 0$. — Si $\mathcal{A}$ est identiquement nul, l'équation (25) s'écrit

$$\text{(31)} \qquad f(y, y') \equiv yy' + ay^2 + by' + (2ab + b')y + d = 0$$

et devient, par la substitution (2)

$$\text{(32)} \qquad v\frac{dv}{du} + \alpha v^2 + \beta\frac{dv}{du} + (2\alpha\beta + \beta')v + \delta = 0$$

et l'on a

$$\alpha = \frac{1}{\lambda\nu}(\lambda' + a\lambda), \qquad \beta = \frac{1}{\lambda}(\mu + b), \qquad \delta = \frac{1}{\lambda^2\nu}f(\mu, \mu').$$

Prenons pour λ et μ les fonctions L et M définies par (28) on a

$$\delta = \frac{1}{\mathrm{L}^2\nu}(d - ab^2 - bb') \equiv \frac{\mathcal{C}}{\mathrm{L}^2\nu}.$$

Choisissant pour ν la fonction N définie par $\delta = 1$ on a

$$\nu(x) \equiv \mathrm{N} = \frac{\mathcal{C}}{\mathrm{L}^2},$$

et l'équation (31), par la substitution (9), est réduite à fa forme

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + 1 = 0.$$

Troisième cas : $\mathcal{A} \equiv 0$, $\mathcal{C} \equiv 0$. — Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont identiquement nuls, l'équation (25) s'écrit

$$(y + b)(y' + ay + ab + b') = 0$$

et est ramenée à une équation linéaire.

10. Cas de réduction de (1) à une équation à coefficients constants. Cas général. — Lorsque l'équation du premier ordre et du second degré en y et y' a ses coefficients constants, elle s'intègre par une quadrature.

Étant donnée l'équation (1) ou l'équation (25), cherchons les conditions pour qu'il y ait une substitution (2) la réduisant à une équation à coefficients constants.

Première méthode. — Supposons que l'équation (1) à coefficients variables soit réductible à une équation (3) à coefficients constants. On pourra alors calculer les invariants à partir de l'équation (3) à coefficients constants. Et l'équation (10) du cas général se présente sous la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + \varepsilon Y^2 + C_1 e^{\alpha X} \frac{dY}{dX} + C_0 e^{2\alpha X} = 0, \tag{34}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, c_1, c_0, α désignant des constantes.

On conclut de ce qui précède que la condition nécessaire pour que l'équation (1) soit réductible est que l'équation canonique (10) ait la forme (34).

Cette condition est suffisante car la substitution

$$v = K^{-1} e^{-\alpha X} Y, \qquad dX = \frac{1}{\alpha} du \tag{35}$$

donnera de (34) une équation (3) à coefficients constants.

La condition trouvée se traduit par les deux relations suivantes :

$$I = C_1 e^{\alpha X}, \qquad J = C_0 e^{2\alpha X}$$

et par suite par les deux relations

$$I' I^{-1} N^{-1} = \text{const.}, \qquad J . I^{-2} = \text{const.}, \qquad \text{où } I' = \frac{dI}{dx}.$$

Si nous posons $\frac{M' + bM + c}{N} = \mathcal{L}$ et si nous remarquons que

$$\begin{aligned} f(MM') &\equiv (M' + bM + c)^2 - (\mathcal{A} M^2 + 2\mathcal{B} M + \mathcal{C}) \\ &\equiv \mathcal{L}^2 N^2 - (\mathcal{A} M^2 + 2\mathcal{B} M + \mathcal{C}), \end{aligned}$$

les deux conditions trouvées peuvent aussi s'écrire

$$\frac{1}{N}\left[b + \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}\right] = \text{const.}, \qquad \frac{\mathcal{A} M^2 + 2\mathcal{B} M + \mathcal{C}}{\mathcal{L}^2 N^2} = \text{const.} \tag{36}$$

Formons maintenant les fonctions λ, μ, ν de la substitution (2) qui permet d'opérer la réduction de (1) quand cette réduction est possible.

Pour cela, supposons (1) réductible à une équation (3) à coefficients constants. La substitution

$$y = \mathrm{L}\,\mathrm{Y} + \mathrm{M}, \qquad d\mathrm{X} = \mathrm{N}\,dx$$

donne à l'équation (1) la forme (34). Remplaçons dans la substitution précédente Y et dX par leurs expressions (35) en fonction de u et v. Elle devient

$$y = \mathrm{K}\,e^{\alpha \mathrm{X}}\,\mathrm{L}\,v + \mathrm{M}, \qquad du = \alpha \mathrm{N}\,dx.$$

Or, d'après l'expression de l'invariant I, on a

$$\mathrm{I} = \mathrm{C}_1\,e^{\alpha \mathrm{X}} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathrm{L}}, \qquad \text{d'où} \qquad e^{\alpha \mathrm{X}}\,\mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{C}_1}\,\mathfrak{L}.$$

Par suite, la substitution permettant de passer directement de (1) supposée réductible à une équation (3) à coefficients constants est de la forme

$$(37) \qquad y = k\,\mathfrak{L}\,v + \mathrm{M}, \qquad du = \alpha \mathrm{N}\,dx.$$

D'après les expressions (7), (8) et l'expression de $\mathfrak{L}$, nous pouvons remarquer que, lorsque la réduction est possible, elle peut être obtenue *sans quadrature*.

Deuxième méthode. — L'équation (1) résolue par rapport à y' donne

$$(38) \qquad y' = -by - c \pm \sqrt{\mathcal{A}y^2 + 2\mathcal{B}y + \mathcal{C}}$$

avec

$$\mathcal{A} \equiv b^2 - a, \qquad \mathcal{B} \equiv bc - d, \qquad \mathcal{C} \equiv c^2 - e.$$

Supposons que l'équation (38) soit réductible par une substitution (2) (du Chapitre I) à une équation

$$(39) \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = -\mathrm{B}\,\mathrm{Y} - \mathrm{C} \pm \sqrt{\mathcal{A}_1 \mathrm{Y}^2 + 2\mathcal{B}_1 \mathrm{Y} + \mathcal{C}_1},$$

où B, C, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{C}_1$ sont des constantes [1].

Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer que l'on a $\mathcal{B}_1 = 0$ si l'on a $\mathcal{A}_1 \neq 0$. En effet, si C_0 étant une constante, on change Y en $\mathrm{Z} + \mathrm{C}_0$, on pourra choisir C_0 de façon que le terme en Z sous le radical, dans la nouvelle équation, soit nul.

Substituons dans (38) y et y' tirées de la substitution (2) du cha-

---

[1] Il est évident que, dans les calculs de cette deuxième méthode, X et Y ne représentent pas les variables canoniques introduites par la formation des invariants.

pitre I. On a

$$(40)\qquad \frac{dY}{dx} = -\left(b + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)Y - \frac{\mu' + b\mu + c}{\lambda}$$
$$\pm\sqrt{\mathcal{A}Y^2 + 2\,\frac{\mathcal{A}\mu + \mathcal{B}}{\lambda}\,Y + \frac{\mathcal{A}\mu^2 + 2\mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{\lambda^2}}.$$

D'autre part. l'équation (39) peut aussi s'écrire, puisque $dX = \nu\,dx$

$$(41)\qquad \frac{dY}{dx} = \left[-BY - C \pm \sqrt{\mathcal{A}_1 Y^2 + 2\mathcal{B}_1 Y + \mathcal{C}_1}\right]\nu.$$

Supposons $\mathcal{A} \neq 0$ et identifions les équations (40) et (41) en supposant $\mathcal{B}_1 = 0$. On a

$$(42)\qquad \begin{cases} b + \dfrac{\lambda'}{\lambda} = B\nu, & \dfrac{\mu' + b\mu + c}{\lambda} = C\nu, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1\nu^2, \\ \mathcal{A}\mu + \mathcal{B} = 0, & \dfrac{\mathcal{A}\mu^2 + 2\mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{\lambda^2} = \mathcal{C}_1\nu^2. \end{cases}$$

La quatrième, la troisième et la deuxième des équations (42) donnent successivement

$$(43)\qquad \mu = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}, \qquad \nu = \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda = \frac{1}{C}\,\frac{\mu' + b\mu + c}{\nu},$$

le signe de la constante arbitraire $\mathcal{A}_1$ étant choisi de façon que ν soit réel.

La première et la cinquième des équations (42) nous donnent les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a, b, c, d, e pour que (1) soit réductible.

Ces conditions s'écrivent, en posant, comme dans la première méthode

$$\frac{\mu' + b\mu + c}{\nu} = \mathcal{L}:$$

$$(44)\qquad \frac{1}{\nu}\left[b + \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}\right] = B_1, \qquad \frac{\mathcal{A}\mu^2 + 2\mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{\mathcal{L}^2} = C_1;$$

$\mathcal{A}_1$, B_1 et C_1 sont des constantes bien déterminées tandis que C est une constante arbitraire, mais différente de zéro.

Si ces deux conditions sont réalisées, la substitution (2) du Chapitre I définie par les formules (43) ramène (38) à une équation à coefficients constants

$$\frac{dY}{dX} = -BY - C \pm \sqrt{\mathcal{A}_1 Y^2 + \mathcal{C}_1}.$$

Exemple. — On vérifiera aisément que l'équation

$$y'^2 - \frac{5}{x^2}y^2 + \frac{1}{x}yy' - y' - \frac{2}{x}y - 2 = 0$$

est réductible à une équation à coefficients constants. Les conditions (36) sont bien satisfaites par les coefficients. On obtient

$$\lambda = x, \qquad \mu = x, \qquad \nu = \frac{1}{x}$$

et l'équation transformée s'écrit

$$\left(\frac{dv}{du} + v + 1\right)^2 - 5(v+1)^2$$
$$+ (v+1)\left(\frac{dv}{du} + v + 1\right) - \left(\frac{dv}{du} + v + 1\right) - 2(v+1) - 2 = 0,$$

ou encore, en posant $v + 1 = Z$

$$\left(\frac{dZ}{du}\right)^2 + (3Z - 1)\frac{dZ}{du} - (3Z^2 + 3Z + 2) = 0.$$

En résumé, pour que l'équation du premier ordre et du deuxième degré en y et y' soit réductible à une équation à coefficients constants par la substitution (2) *du Chapitre I, il faut et il suffit que ses coefficients satisfassent aux deux relations* (36) *qui, en général, sont distinctes. Lorsque la réduction est possible, l'équation à coefficients constants s'obtient sans quadrature.*

Dans les cas particuliers que nous allons examiner, il ne faudra plus qu'une seule condition pour que l'équation soit réductible et, dans certains de ces cas, on ne pourra obtenir l'équation à coefficients constants sans quadratures.

11. Cas de réduction de l'équation (1). **Cas particuliers.** — Nous avons montré dans le cas général comment les deux méthodes pouvaient être appliquées. Les deux méthodes donnant des substitutions analogues ainsi que les mêmes expressions de conditions, nous nous contenterons de faire l'étude de la réduction des cas particuliers de (1) au moyen de la méthode directe, qui présente l'avantage de calculs particulièrement simples.

Premier cas : $\mathcal{A} \equiv b^2 - a \equiv 0$; $\mathcal{B} \neq 0$. — L'équation (38) s'écrit

$$y' = -by - c \pm \sqrt{2\mathcal{B}y + \mathcal{C}}. \tag{45}$$

S'il existe une substitution (2) du Chapitre I ramenant (45) à l'équation

$$(46)\qquad \frac{dY}{dX} = -BY - C \pm \sqrt{2\mathcal{B}_1 Y + \mathcal{C}_1}$$

à coefficients constants ([1]), on peut toujours supposer $\mathcal{C}_1 = 0$, en remplaçant Y par $Z + C_0$. Si l'on substitue l'expression de y dans (45), on a

$$(47)\qquad \frac{dY}{dx} = -\left(b + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)Y - \frac{\mu' + b\mu + c}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{B}}{\lambda}Y + \frac{2\mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{\lambda^2}}.$$

D'après la relation $dX = \nu\, dx$ l'équation (46) s'écrit, en supposant $\mathcal{C}_1 = 0$,

$$(48)\qquad \frac{dY}{dx} = [-BY - C \pm \sqrt{2\mathcal{B}_1 Y}]\nu.$$

En identifiant ces deux dernières équations, on obtient le système

$$(49)\qquad b + \frac{\lambda'}{\lambda} = B\nu, \qquad \frac{\mu' + b\mu + c}{\lambda} = C\nu, \qquad \frac{\mathcal{B}}{\lambda} = \mathcal{B}_1\nu^2, \qquad 2\mathcal{B}\mu + \mathcal{C} = 0.$$

On a

$$(50)\qquad \mu = -\frac{\mathcal{C}}{2\mathcal{B}}, \qquad \nu = \frac{1}{\mathcal{B}_1}\,\frac{\mathcal{B}}{\mu' + b\mu + c}, \qquad \lambda = \frac{1}{C}\,\frac{\mu' + b\mu + c}{\nu} = \frac{1}{C}\mathcal{L},$$

en posant

$$\frac{\mu' + b\mu + c}{\nu} = \mathcal{L}.$$

La première des équations (49) donne l'unique condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (45) soit réductible. Cette condition s'écrit

$$(51)\qquad \frac{1}{\nu}\left[b + \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}\right] = B_1.$$

On a : $\mathcal{B}_1 \neq 0$. Une fois choisies les constantes arbitraires C et $\mathcal{B}_1$, la constante B_1 est bien déterminée.

Si la condition (51) est satisfaite, la substitution (2) du Chapitre I, définie par les formules (50), ramène l'équation (45) à une équation à coefficients constants

$$\frac{dY}{dX} = -BY - C \pm \sqrt{2\mathcal{B}_1 Y}.$$

([1]) *Voir* la note de la page 34

Deuxième cas particulier : $\mathcal{A} \equiv 0$, $\mathcal{B} \equiv 0$. — L'équation (45) s'écrit

$$y' = -by - c \pm \sqrt{\mathcal{C}}$$

et se décompose en deux équations linéaires qui s'intègrent par quadratures.

12. Cas de réduction de l'équation sans terme en y'^2. — Première méthode : Supposons que l'équation (25) soit réductible à une équation (26) à coefficients constants au moyen d'une substitution (2). En calculant les invariants à partir de l'équation (26) à coefficients constants, on trouvera aisément que l'équation (30) se présente sous la forme

$$Y \frac{dY}{dX} + Y + C_0 X = 0 \qquad (C_0 = \text{const.}). \tag{52}$$

La condition nécessaire pour que l'équation (25) soit réductible est donc que l'équation canonique (30) ait la forme (52).

Cette condition est suffisante, car la substitution

$$Y = C_0 X v, \qquad du = (C_0 X)^{-1}\, dX \tag{53}$$

transformera (52) en une équation (26) à coefficients constants.

Cette condition s'exprime par la relation

$$I = C_0 X \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dX} = C_0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{dI}{dx}\,\frac{1}{N} = C_0$$

ou enfin, en remarquant que $L' = -aL$, que $NL = \mathcal{A}$ et posant $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \mathcal{L}$

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}^2}\left[a + \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}}\right] = C_0. \tag{54}$$

Obtenons la substitution (2) qui réduit directement l'équation (25), supposée réductible, à une équation (26) à coefficients constants. La substitution

$$y = LY + M, \qquad dX = N\,dx, \tag{55}$$

où L, M, N sont donnés par les formules (28) donne à l'équation (25) la forme (52). Remplaçons dans (55), Y et dX par leurs expressions (53) en fonction de u et v. On a

$$y = C_0 L X v + M, \qquad du = (C_0 X)^{-1} N\,dx.$$

Mais, d'après l'expression de l'invariant I, on a

$$\mathrm{I} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathrm{L}^2\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathcal{L}}{\mathrm{L}} = \mathrm{C}_0\mathrm{X}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{C}_0\mathrm{L}\mathrm{X} = \mathcal{L}, \qquad (\mathrm{C}_0\mathrm{X})^{-1}\mathrm{N} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathcal{L}}.$$

On obtient donc la substitution

$$y = \mathcal{L}v + \mathrm{M}, \qquad du = \frac{\mathfrak{A}}{\mathcal{L}}\,dx. \tag{56}$$

Cas particulier : $\mathfrak{A} \equiv 0$. — L'étude faite au n° 9 montre qu'elle est toujours réductible à une équation à coefficients constants.

Deuxième méthode. — Écrivons (25) sous la forme

$$f(y, y') = (y+b)y' + ay^2 + cy + d = 0. \tag{57}$$

Si une transformation (2) du Chapitre I conduit à l'équation

$$(\mathrm{Y}+\mathrm{B})\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + \mathrm{A}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{C}\mathrm{Y} + \mathrm{D} = 0, \tag{58}$$

où A, B, C, D sont constants ([1]), on peut toujours supposer $\mathrm{B} = 0$, si l'on remplace Y par $\mathrm{Y} - \mathrm{B}$. Substituons dans (57) y et y' tirées des formules (21) du Chapitre I, on obtient

$$\left[\mathrm{Y} + \frac{\mu + b}{\lambda}\right]\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \left(a + \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\mathrm{Y}^2 + \frac{(\mu+b)\lambda' + (\mu' + 2a\mu + c)\lambda}{\lambda^2}\,\mathrm{Y} + \frac{f(\mu, \mu')}{\lambda^2} = 0. \tag{59}$$

D'autre part, l'équation (58) s'écrit, en faisant $\mathrm{B} = 0$

$$\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + [\mathrm{A}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{C}\mathrm{Y} + \mathrm{D}]\nu = 0. \tag{60}$$

Si l'on identifie ces deux dernières équations, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\mu + b = 0, \qquad a + \frac{\lambda'}{\lambda} = \mathrm{A}\nu, \qquad \frac{(\mu+b)\lambda' + (\mu' + 2a\mu + c)\lambda}{\lambda} = \mathrm{C}\nu, \\ &\frac{(\mu+b)\mu' + a\mu^2 + c\mu + d}{\lambda^2} = \mathrm{D}\nu. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

([1]) *Voir* la note de la page 34.

Les première, troisième et quatrième équations (61) donnent

$$(62)\qquad \mu = -b, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\lambda} = C\nu, \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2} = D\nu$$

avec : $\mathfrak{A} \equiv c - 2ab - b'$; $\mathfrak{B} \equiv ab^2 - bc + d$.

Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne sont pas identiquement nuls, on tire, des dernières équations,

$$(63)\qquad \lambda = \frac{C}{D}\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{C}{D}\mathfrak{L}, \qquad \nu = \frac{D}{C^2}\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}.$$

La deuxième équation (61) fournit la condition nécessaire et suffisante pour que (57) soit réductible. Cette condition s'écrit

$$(64)\qquad \frac{1}{\nu}\left[a + \frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}\right] = A.$$

Lorsque cette condition est satisfaite, la substitution (2) du Chapitre I, où $\lambda\mu\nu$ ont les valeurs (62) et (63), met l'équation (57) sous la forme

$$(65)\qquad Y\frac{dY}{dX} + AY^2 + CY + D = 0.$$

La constante A est donnée par (64), C et D sont deux constantes arbitraires. On remarquera que (64) ne diffère pas de (54) et que les expressions (62) et (63) se retrouvent dans (56).

Si $\mathfrak{A}$ est identiquement nul, l'équation (25) est toujours réductible. Le système (61) devient en effet

$$a + \frac{\lambda'}{\lambda} = A\nu, \qquad \mu = -b, \qquad \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^2} = D\nu,$$

A étant arbitraire, nous ferons $A = 0$ et pourvu que $\mathfrak{C}$ ne soit pas identiquement nul, nous aurons

$$\mu = -b, \qquad \nu = \frac{1}{D}\frac{\mathfrak{C}}{\lambda^2}, \qquad \lambda = e^{-\int a\,dx}$$

et la transformation (2) du Chapitre I transformera (31) en l'équation

$$Y\frac{dY}{dX} + D = 0,$$

D étant une constante arbitraire.

Enfin, *si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont identiquement nuls*, en prenant $\mu = -b$ et en choisissant λ et ν de façon à satisfaire à l'équation $a + \frac{\lambda'}{\lambda} = A\nu$,

A' étant une constante arbitraire, on ramènera l'équation à la forme

$$Y\frac{dY}{dX} + AY^2 = 0.$$

On pourrait aussi prendre $\lambda = e^{-\int a\,dx}$ donné par $A = 0$ et $\mu = -b$ la fonction γ étant arbitraire, par exemple $\nu = 1$; l'équation serait ramenée à $Y\frac{dY}{dX} = 0$ (¹).

13. Équations dont l'intégrale générale est une fonction rationnelle de la constante d'intégration. — On sait (²) que, pour qu'une équation différentielle algébrique $F(x, y, y') = 0$ admette pour intégrale générale une fonction rationnelle de la constante d'intégration

$$y = R(x, C) = \frac{P(x, C)}{Q(x, C)},$$

P et Q étant des polynomes en C dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x, il est nécessaire que l'équation soit de genre zéro en y et y', si l'on y regarde x comme un paramètre.

Considérons donc l'équation générale du premier ordre et du deuxième degré en y, y'. Nous allons utiliser lés résultats obtenus aux numéros 8 et 9 pour rechercher les cas où cette équation admet pour intégrale générale une fonction rationnelle de la constante d'intégration, et dans chacun des cas considérés, nous montrerons comment on peut former une expression de l'intégrale générale (³). Cette étude a des points d'analogie avec une étude faite par M. Cahen [*Thèse*, Gauthier-Villars, Paris, 1899].

Nous n'étudierons que les formes (10), (18) et (30), les autres formes étant particulièrement simples.

1° *Étude de l'équation* (10) :

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + \varepsilon Y^2 + I(X)\frac{dY}{dX} + J(X) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{66}$$

(¹) Nous laisserons de côté le cas de l'équation de Ricatti.

(²) *Voir* Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, Chapitre XXI, § II.

(³) L'étude faite dans ce paragraphe généralise un travail de M. Mitrinovitch [(*a*)] relatif à l'équation

$$y'^2 + ay^2 + byy' + c = 0.$$

Laissons de côté les cas où le trinome

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + I(X)\frac{dY}{dX} + J(X)$$

a une racine double et où l'équation se décompose en deux équations linéaires; l'intégrale générale est, dans ce cas, une fonction rationnelle de la constante d'intégration.

Écrivons l'équation (66) sous la forme

$$(67) \qquad \left[\frac{dY}{dX} + \frac{1}{2}I(X)\right]^2 + \varepsilon Y^2 = \frac{I^2(X) - 4J(X)}{4} = F(X) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Nous pouvons exprimer Y et $\frac{dY}{dX}$ rationnellement en fonction d'un paramètre u au moyen des formules

$$(68) \qquad \frac{dY}{dX} = -\frac{I}{2} + F^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \left(Y = F^{\frac{1}{2}}\frac{2u}{1+u^2}\right),$$

ou :

$$(69) \qquad \frac{dY}{dX} = -\frac{I}{2} + F^{\frac{1}{2}}\frac{1+u^2}{1-u^2} \qquad \left(Y = F^{\frac{1}{2}}\frac{2u}{1-u^2}\right),$$

suivant que l'on a $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. Des formules (68) ou (69) on tire

$$(70) \qquad u = \frac{Y}{\frac{dY}{dX} + \frac{I}{2} + F^{\frac{1}{2}}},$$

u est une fonction rationnelle de Y et de $\frac{dY}{dX}$. L'équation (66) est remplacée par l'une des équations

$$(71) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dX} &= \frac{1+u^2}{2} - \frac{1}{4}IF^{-\frac{1}{2}}\frac{(1+u^2)^2}{1-u^2} - \frac{1}{2}\frac{F'}{F}\frac{u(1+u^2)}{1-u^2}, \\ \frac{du}{dX} &= \frac{1-u^2}{2} - \frac{1}{4}IF^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-u^2)^2}{1+u^2} - \frac{1}{2}\frac{F'}{F}\frac{u(1-u^2)}{1+u^2}, \end{aligned}\right.$$

suivant que l'on a

$$\varepsilon = +1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = -1.$$

Si l'intégrale générale de l'équation (66) est $Y = R(X, C)$, l'intégrale générale des équations (71) est, d'après (70)

$$u = R_1[X;\ R(X, C);\ R'(X, C)],$$

c'est-à-dire une fonction rationnelle de la constante d'intégration C. Or, les seuls points singuliers mobiles de u sont des pôles puisque u est une fonction rationnelle de C. Il faut donc que les seuls points singuliers mobiles de (71) soient des pôles, ce qui exige, en vertu d'un théorème de Painlevé, que l'équation (71) soit une équation de Ricatti. Or, les équations (71) ne peuvent prendre la forme d'équations de Ricatti que si l'on a simultanément

$$I(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(X) = \text{const.},$$

conditions équivalentes à celles-ci :

$$I(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad J(X) = \text{const.}$$

L'équation (66) se réduit alors à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + \varepsilon Y^2 + \varepsilon' K^2 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1;\ \varepsilon' = \pm 1). \tag{72}$$

Les solutions réelles des équations (72) sont représentées par les formules :

$$Y = h \sin X + k \cos X \qquad \text{pour} \quad \varepsilon = \ \ 1 \text{ avec } h^2 + k^2 = K^2,$$
$$Y = h \operatorname{sh} X + k \operatorname{ch} X \qquad \text{pour} \quad \varepsilon = -1 \text{ avec } h^2 - k^2 = \varepsilon'.$$

On obtient ainsi finalement les formules :

$$Y = K\frac{1-c^2}{1+c^2}\sin X + K\frac{2c}{1+c^2}\cos X,$$
$$Y = K\frac{1+c^2}{1-c^2}\operatorname{sh} X + K\frac{2c}{1-c^2}\operatorname{ch} X.$$

2° ***Étude de l'équation*** (18) :

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y + I(X) = 0. \tag{73}$$

Si $I(X)$ n'est pas constant, tout point de $Y + I(X)$ est un point critique et, par conséquent, l'équation ayant des points critiques mobiles, son intégrale générale $Y = H(X, C)$ ne peut être une fonction rationnelle de C. Pour le montrer, on peut poser

$$u^2 = -[Y + I(X)], \tag{74}$$

d'où l'on tire

$$2u\frac{du}{dX} + I'(X) = u. \tag{75}$$

Si Y est une fonction rationnelle de C, d'après l'équation (74), u est aussi fonction rationnelle de C. D'après (75), ceci ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\frac{dI}{dX} = 0 \qquad [\text{c'est-à-dire } I(X) = \text{const.}].$$

L'équation (73) est alors réduite à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y + K = 0,$$

K étant une constante. L'intégration n'offre, dans ce cas, aucune difficulté, les équations (75) et (74) donnant successivement u et Y.

3° *Étude de l'équation* (30) :

$$Y\frac{dY}{dX} + Y + I(X) = 0.$$

On voit que cette équation, du premier degré en $\frac{dY}{dX}$, qui n'est pas une équation de Ricatti, admet des points critiques mobiles pour les valeurs initiales $Y = 0$; $X = X_0$, si $I(X)$ n'est pas identiquement nul. Pour que l'intégrale générale de l'équation précédente soit fonction rationnelle de la constante d'intégration, il faut et il suffit que l'on ait : $I(X) \equiv 0$. L'équation se réduit alors à

$$\frac{dY}{dX} + 1 = 0 \qquad [\text{c'est-à-dire à } Z = k \text{ en posant } Y + X = Z].$$

On peut résumer ce qui précède en disant : pour que l'équation $f(x, y, y') = 0$ du deuxième degré en y et y' admette une intégrale générale qui soit une fonction rationnelle de la constante d'intégration, il faut et il suffit qu'il existe une substitution (2) *du Chapitre I qui la ramène à l'une des trois équations suivantes :*

1° $\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 \pm Y^2 = \pm K^2$ [si l'on a l'équation (1) avec $\mathfrak{a} - b^2 - a \neq 0$].

2° $\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y + K = 0$ [si l'on a l'équation (1) avec $\mathfrak{a} - b^2 - a \equiv 0$].

3° $dY = 0$ [si l'on a l'équation (25) avec $c - 2ab - b^2 \neq 0$].

CHAPITRE V.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE ET DU TROISIÈME DEGRÉ EN y, y'.

Nous nous proposons de chercher des formes canoniques de l'équation $f(x, y, y') = 0$, f étant un polynome de degré 3 en y, y', dont les coefficients sont des fonctions de x; et de trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier ses coefficients pour que $f(x, y, y') = 0$ soit réductible à une équation à coefficients constants. Nous essaierons ensuite d'obtenir des résultats analogues pour l'équation $P(y)y' + Q(y) = 0$, P et Q étant des polynomes en y dont les coefficients sont des fonctions de x.

14. Formes canoniques de l'équation contenant un terme en y'^3. — Supposons que le coefficient du terme en y'^3 ne soit pas nul dans $f(x, y, y') = 0$. Cette équation s'écrit

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(yy') \equiv y'^3 + a y^3 + 3b y'^2 y + 3c y' y^2 + 3d y'^2 \\ + 3e y^2 + 6f y y' + 3g y' + 3h y + k = 0, \end{aligned}$$

où $a, b, \ldots, h, k$ sont des fonctions quelconques de x.

La substitution

$$(2)\qquad y = \lambda(x) v + \mu(x), \qquad du = \nu\, dx,$$

donne, en posant $dv = z\, dx$.

$$(3)\qquad z^3 + \alpha v^3 + 3\beta v z^2 + 3\gamma v^2 z + 3\delta z^2 + 3\varepsilon v^2 + 6\varphi v z + 3\zeta z + 3\eta v + \chi = 0.$$

Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \chi$ ont les expressions suivantes :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = \frac{f_3(\lambda\lambda')}{\lambda^3\nu^3}, \qquad \beta = \frac{\lambda' + b\lambda}{\lambda\nu}, \qquad \gamma = \frac{\lambda'^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda^2}{\lambda^2\nu^2}, \qquad \delta = \frac{\mu' + b\mu + d}{\lambda\nu}, \\ &\varepsilon = \frac{(\lambda'^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda^2)\mu' + (b\lambda'^2 + 2c\lambda\lambda' + a\lambda^2)\mu + d\lambda'^2 + 2f\lambda\lambda' + e\lambda^2}{\lambda^3\nu^3}, \\ &\varphi = \frac{(\lambda' + b\lambda)\mu^2 + (b\lambda' + c\lambda)\mu + d\lambda' + f\lambda}{\lambda^2\nu^2}, \qquad \zeta = \frac{\mu'^2 + 2b\mu\mu' + c\mu^2 + 2d\mu' + 2f\mu + g}{\lambda^2\nu^2}, \\ &\eta = \frac{[\mu'^2 + 2b\mu\mu' + c\mu^2 + 2d\mu' + 2f\mu + g]\lambda' + [b\mu'^2 + 2c\mu\mu' + d\mu^2 + 2f\mu' + 2e\mu + h]\lambda}{\lambda^3\nu^3}, \\ &\chi = \frac{f(\mu\mu')}{\lambda^3\nu^3}, \end{aligned} \right.$$

Particularisons λ, μ et ν de la façon suivante. Prenons d'abord pour λ la fonction L qui annule β, soit :

$$(5)\qquad L' + bL = 0, \qquad L = e^{-\int b\,dx}.$$

En posant

$$\mathfrak{A} \equiv a + 2b^3 - 3bc, \qquad \mathfrak{B} \equiv c - b^2, \qquad \mathfrak{C} \equiv e + b^2 d - 2bf,$$
$$\mathfrak{D} \equiv f - bd, \qquad \mathfrak{E} \equiv g - d^2, \qquad \mathfrak{F} \equiv h - bg,$$

les coefficients α, γ, ε, φ, ..., η, χ deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathfrak{A}}{\nu^3}, \quad \gamma = \dfrac{\mathfrak{B}}{\nu^2}, \quad \varepsilon = \dfrac{\mathfrak{B}\mu' + [\mathfrak{A} + b\mathfrak{B}]\mu + \mathfrak{C}}{L\nu^3}, \quad \varphi = \dfrac{\mathfrak{B}\mu + \mathfrak{D}}{L\nu^2}, \\[2ex] \zeta = \dfrac{(\mu' + b\mu + d)^2 + \mathfrak{B}\mu^2 + 2\mathfrak{D}\mu + \mathfrak{E}}{L^2\nu^2}, \\[2ex] \eta = \dfrac{2\mathfrak{B}\mu\mu' + [\mathfrak{A} + 2b\mathfrak{B}]\mu^2 + 2\mathfrak{D}\mu' + 2[\mathfrak{C} + b\mathfrak{D}]\mu + \mathfrak{F}}{L^2\nu^3}, \quad \chi = \dfrac{f(\mu\mu')}{L^3\nu^3}. \end{cases}$$

Premier cas : $\mathfrak{B} \equiv c - b^2 \neq 0$. Prenons ensuite pour μ et ν les fonctions M et N telles que l'on ait $\varphi = 0$; $\delta = 1$; ce qui donne

$$(7)\qquad M = -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}, \qquad N = \frac{M' + bM + d}{L}.$$

La substitution

$$(8)\qquad y = LY + M, \qquad dX = N\,dx$$

appliquée à (1) donne, en posant : $dY = Z\,dX$, l'équation

$$(9)\qquad Z^3 + AY^3 + 3CZY^2 + 3Z^2 + 3EY^2 + 3GZ + 3HY + K = 0,$$

A, C, E, G, H, K étant les expressions de α, γ, ε, ζ, η, χ pour $\lambda = L$; $\mu = M$; $\nu = N$.

En appliquant le raisonnement du numéro 2 du Chapitre I, on montre que les expressions A, C, E, ..., K sont des invariants. L'équation (9) est une équation canonique de (1) pour $\mathfrak{B} \neq 0$.

Deuxième cas : on a $\mathfrak{B} \equiv 0$, $\mathfrak{A} \neq 0$. — Prenons λ, μ et ν de façon que l'on ait $\varepsilon = 0$; $\beta = 0$; $\delta = 1$; ce qui donne

$$(10)\qquad L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}, \qquad N = \frac{M' + bM + d}{L},$$

et l'on obtient ainsi pour (1) la forme canonique suivante à l'aide de (8)

$$(11)\qquad Z^3 + AY^3 + 3Z^2 + 6FZY + 3GZ + 3HY + K = 0,$$

où A, F, G, H, K sont les valeurs de α, φ, ζ, η, χ, lorsque, λ, μ et ν ont les valeurs (10).

Troisième cas : on a $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{B} \equiv 0$; $\mathfrak{D} \not\equiv 0$. — Choisissons λ, μ et ν de façon que l'on ait $\beta = 0$; $\delta = 1$; $\zeta = 1$; ce qui donne

$$(12) \qquad L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M = -\frac{\mathfrak{E}}{2\mathfrak{D}}, \qquad N = \frac{M' + bM + d}{L};$$

on obtient pour (1), à l'aide de (8), la forme canonique

$$(13) \qquad Z^3 + 3Z^2 + 3EY^2 + 6FZY + 3Z + 3HY + K = 0,$$

où E, F, H, K sont les valeurs de ε, φ, η, χ lorsque λ, μ et ν ont les valeurs L, M, N des formules (12).

Quatrième cas : on a $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{B} \equiv 0$; $\mathfrak{D} \equiv 0$; $\mathfrak{C} \not\equiv 0$. Choisissons λ, μ et ν de façon que l'on ait $\beta = 0$; $\delta = 1$; $\eta = 0$. On obtient

$$(14) \qquad L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M = -\frac{\mathfrak{F}}{2\mathfrak{C}}, \qquad N = \frac{M' + bM + d}{L},$$

et, au moyen de la substitution (8), l'équation (1) se met sous la forme canonique

$$(15) \qquad Z^3 + 3Z^2 + 3EY^2 + 3GZ + K = 0,$$

où E, G, K sont les valeurs de ε, ζ et χ lorsque λ, μ et ν ont les valeurs (14).

Cinquième cas : $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *sont identiquement nuls et de plus* $\mathfrak{E} \not\equiv 0$. — Le coefficient K s'écrit, en supposant que l'on fasse $\lambda' = -b\lambda$.

$$K = \frac{(\mu' + b\mu + d)^3 + 3\mathfrak{E}\mu' + 3(\mathfrak{F} + b\mathfrak{E})\mu + 3\mathfrak{G}}{\lambda^3\nu^3},$$

et si l'on pose $3\mathfrak{G} \equiv k - d^3$. Choisissons pour λ, μ et ν les fonctions L, M, N telles que l'on ait $\beta = 0$; $\delta = 0$; $\zeta = \varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathfrak{E} > 0$. On a

$$(16) \qquad L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M' + bM + d = 0, \qquad N = \frac{(\varepsilon\mathfrak{E})^{\frac{1}{2}}}{L};$$

moyennant (8) et posant $dY = Z\,dX$, l'équation (1) prend la forme canonique

$$(17) \qquad Z^3 + 3\varepsilon Z + HY + K = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

H et K étant les valeurs de η et χ lorsque λ, μ, ν ont les valeurs (16).

Sixième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ *sont identiquement nuls, et l'on a* $\mathcal{F} \neq 0$. Prenons pour λ, μ et ν des fonctions L, M et N telles que $\beta = 0$; $\delta = 1$; $\chi = 1$. On obtient

$$(18) \qquad \mathrm{L} = e^{-\int b\,dx}, \qquad \mathrm{M} = -\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}' + b\mathrm{M} + d}{\mathrm{L}},$$

et l'équation (1) sera ramenée par (8) à la forme canonique

$$(19) \qquad \mathrm{Z}^3 + 3\mathrm{Z}^2 + 3\mathrm{Z} + 3\mathrm{H}\mathrm{N} + 1 = 0,$$

où H est la valeur de η lorsque λ, μ et ν ont les valeurs (18).

Septième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *sont identiquement nuls.* — L'équation (1) s'écrit

$$(y' + by + d)^3 + 3\mathcal{G} = 0.$$

Elle est ramenée à une équation linéaire. La substitution (8), avec

$$(20) \qquad \mathrm{L} = e^{-\int b\,dx}, \qquad \mathrm{M}' + b\mathrm{M} + d = 0, \qquad \mathrm{N} = \frac{(3\mathcal{G})^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{L}},$$

ramène (1) à la forme réduite

$$(21) \qquad \mathrm{Z}^3 + 1 = 0.$$

15. Formes canoniques de l'équation sans terme en y'^3. — Supposons que le coefficient du terme en y'^3 soit nul, et que celui du terme en $y'^2 y$, dans (1), ne soit pas identiquement nul. l'équation s'écrit

$$(22) \qquad f(yy') \equiv y'^2 y + a y^3 + 2b y' y^2 + c y'^2 + d y^2 + e y y' + f y' + g y + h = 0.$$

La substitution (2) donne, en posant, comme précédemment $dv = z\,dx$

$$(23) \qquad z^2 v + \alpha v^3 + 2\beta z v^2 + \gamma z^2 + \delta v^2 + \varepsilon z v + \varphi z + \zeta v + \eta = 0.$$

où les coefficients α, β, γ, δ, ..., η ont les expressions suivantes :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = \frac{\lambda'^2 + 2b\lambda\lambda' + a\lambda^2}{\lambda^2\nu^2}, \qquad \beta = \frac{\lambda' + b\lambda}{\lambda\nu}, \qquad \gamma = \frac{\mu + c}{\lambda}, \\ &\delta = \frac{2\lambda(\lambda' + b\lambda)\mu' + (\lambda'^2 + 2b\lambda\lambda' + a\lambda^2)\mu + c\lambda'^2 + e\lambda\lambda' + d\lambda^2}{\lambda^3\nu^2}, \\ &\varepsilon = \frac{2(\mu + c)\lambda' + (2\mu' + 4b\mu + e)\lambda}{\lambda^2\nu}, \qquad \varphi = \frac{2\mu\mu' + 2b\mu^2 + 2c\mu' + e\mu + f}{\lambda^2\nu}, \\ &\zeta = \frac{(2\mu\mu' + 2b\mu^2 + 2c\mu' + e\mu + f)\lambda' + (\mu'^2 + 4b\mu\mu' + 3a\mu^2 + e\mu' + 2d\mu + g)\lambda}{\lambda^3\nu^2}, \\ &\eta = \frac{f(\mu\mu')}{\lambda^2\nu^2}. \end{aligned} \right.$$

Prenons pour λ et μ les fonctions L et M qui annulent β et γ. On obtient

(25) $$L = e^{-\int b\,dx}, \qquad M = -c.$$

Substituons ces valeurs dans les autres coefficients et désignons, après simplifications, les numérateurs des fractions par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ respectivement. On aura

$$\mathfrak{A} \equiv a - b^2, \quad \mathfrak{D} \equiv 4b^2c - 3ac + d - be, \quad \mathfrak{E} \equiv e - 4bc - 2c',$$
$$\mathfrak{F} \equiv 2bc^2 - ce + f, \quad \mathfrak{G} \equiv \ldots\ldots$$

Les formules (24) s'écrivent

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}}{\nu^2}, \quad \delta = \frac{\mathfrak{D}}{L\nu^2}, \quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{E}}{L\nu}, \quad \varphi = \frac{\mathfrak{F}}{L^2\nu}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{G}}{L^2\nu^2}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{H}}{L^3\nu^2}.$$

Premier cas : on a $\mathfrak{A} \neq 0$. — Prenons pour ν la fonction N telle que l'on ait : $\alpha = \varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathfrak{A} > 0$; ce qui donne

(26) $$N = (\varepsilon A)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation (22), à l'aide de la substitution (8), donne, en posant $dY = Z\,dX$ l'équation canonique

(27) $$Z^2Y + \varepsilon Y^3 + DY^2 + EYZ + FZ + GY + H = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

où D, E, ..., G, H ont les valeurs de δ, ε, ..., ζ, η pour lesquelles $\lambda\mu\nu$ sont donnés par les formules (25) et (26).

Deuxième cas : on a $\mathfrak{A} \equiv 0$, $\mathfrak{D} \neq 0$. — Prenons $\delta = \varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathfrak{D} > 0$. On a pour ν la fonction

(28) $$N = \left(\frac{\varepsilon\mathfrak{D}}{L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation (22), par (8), prendra la forme canonique

(29) $$Z^2Y + Y^2 + EZY + FZ + GY + H = 0,$$

dans laquelle E, F, G, H ont les valeurs de ε, φ, ζ et η où $\lambda\mu\nu$ sont remplacés par les formules (25) et (28).

Troisième cas : $\mathfrak{A} \equiv 0$, $\mathfrak{D} \equiv 0$, $\mathfrak{E} \neq 0$. — On prendra

(30) $$N = \frac{\mathfrak{E}}{L},$$

et l'équation (22) sera ramenée à la forme canonique

$$Z^2Y + ZY + FZ + GY + H = 0. \tag{31}$$

Quatrième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ sont identiquement nuls et l'on a $\mathcal{F} \neq 0$. — On prendra

$$N = \frac{\mathcal{F}}{L^2}, \tag{32}$$

et l'équation (22) sera ramenée à la forme canonique

$$Z^2Y + Z + GY + H = 0. \tag{33}$$

Cinquième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, sont identiquement nuls et l'on a $\mathcal{G} \neq 0$. — On prendra pour γ la fonction N telle que l'on ait $\zeta = \varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathcal{G} > 0$, soit

$$N = \frac{(\varepsilon\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}}{L}, \tag{34}$$

et l'équation (22) est ramenée à la forme canonique

$$Z^2Y + \varepsilon Y + H = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{35}$$

Sixième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont identiquement nuls. — En prenant $N = \left(\frac{\varepsilon\mathcal{H}}{L^3}\right)^{\frac{1}{3}}$, nous ramenons, si $\mathcal{H}$ n'est pas nul, l'équation (22) à la forme réduite $Z^2Y = 0$, en changeant, si cela est utile Y en $Y + C$. Si $\mathcal{H}$ est nul, on obtient l'équation $Z^3 = 0$.

16. Formes canoniques de l'équation ne contenant y' qu'au premier degré. — Écrivons l'équation sous la forme

$$f(yy') \equiv y'y^2 + ay^3 + by^2 + 2cyy' + dy' + ey + f = 0. \tag{36}$$

Sa transformée par (2) s'écrit en faisant encore $dv = z\,dx$

$$zv^2 + \alpha v^3 + \beta v^2 + 2\gamma zv + \delta z + \varepsilon v + \varphi = 0, \tag{37}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \frac{\lambda' + a\lambda}{\lambda\nu}, \qquad \beta = \frac{2(\mu + c)\lambda' + (\mu' + 3a\mu + b)\lambda}{\lambda^2\nu},\\ &\gamma = \frac{\mu + c}{\lambda}, \qquad \delta = \frac{\mu^2 + 2c\mu + d}{\lambda^2},\\ &\varepsilon = \frac{(\mu^2 + 2c\mu + d)\lambda' + (2\mu\mu' + 3a\mu^2 + 2c\mu' + 2b\mu + e)\lambda}{\lambda^3\nu}, \qquad \varphi = \frac{f(\mu\mu')}{\lambda^3\nu}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Prenons pour λ et μ les fonctions L et M annulant α et γ, soit

$$(39)\qquad \mathrm{L} = e^{-\int a\,dx}, \qquad \mathrm{M} = -c,$$

et substituons ces valeurs dans les autres coefficients. En posant

$$\mathcal{B} \equiv b - 3ac - c', \qquad \mathcal{D} \equiv d - c^2,$$
$$\mathcal{E} \equiv 4ac^2 - 2bc - ad + e, \qquad \mathcal{F} \equiv (c^2 - d)c' - ac^3 + bc^2 - ce + f,$$

on a

$$\beta = \frac{\mathcal{B}}{\mathrm{L}\nu}, \qquad \delta = \frac{\mathcal{D}}{\mathrm{L}^2}, \qquad \varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{\mathrm{L}^2\nu}, \qquad \varphi = \frac{\mathcal{F}}{\mathrm{L}^3\nu}.$$

Premier cas : $\mathcal{B} \neq 0$. — Avec $\mathrm{N} = \frac{\mathcal{B}}{\mathrm{L}}$, on a la forme canonique suivante :

$$(40)\qquad \mathrm{ZY^2 + Y^2 + DZ + EY + F = 0}.$$

Deuxième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$, $\mathcal{E} \neq 0$. — Avec $\mathrm{N} = \mathcal{E}\mathrm{L}^{-2}$, on obtient la forme canonique

$$(41)\qquad \mathrm{ZY^2 + DZ + Y + F = 0}.$$

Troisième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$, $\mathcal{E} \equiv 0$, $\mathcal{F} \neq 0$. — Avec $\mathrm{N} = \mathcal{F}\mathrm{L}^{-3}$, on obtient la forme canonique

$$\mathrm{ZY^2 + DZ + 1 = 0}.$$

Quatrième cas : $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *sont identiquement nuls.* — L'équation (36) est réduite à la forme, $\mathrm{ZY^2} = 0$, en conservant x comme variable.

17. Réduction à une équation à coefficients constants. — I. ÉQUATION CONTENANT UN TERME EN y'^3. *Premier cas :* Supposons que (1) soit réductible à une équation (3) à coefficients constants par la substitution (2). Les expressions de L, M, N et les invariants A, ..., calculés à partir de l'équation (3) montrent que l'équation canonique (9) prendra la forme

$$(42)\qquad \mathrm{Z^3 + C_0X^{-3}Y^3 + 3C_1X^{-2}ZY^2 + 3Z^2 + 3C_2X^{-2}Y^2} \\ \mathrm{+ 3C_3Z + 3C_4X^{-1}Y + C_5 = 0},$$

où Z représente $\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}$ et où les C_i sont des constantes déterminées par l'équation (3). Si les coefficients de (1) sont des fonctions de x, on montrera, comme cela a été fait pour d'autres types d'équations, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1), où $\mathcal{B} \equiv c - b^2$ n'est pas nul, soit réductible, est que sa forme canonique (9) soit de la forme (42). Cette condition établit entre les coefficients de l'équation (1) les six relations distinctes :

$$K = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \qquad \frac{1}{N}\frac{H'}{H^2} = \text{const.},$$

$$\frac{E^2}{H} = \text{const.}, \qquad \frac{C^2}{H} = \text{const.}, \qquad \frac{A^2}{H} = \text{const.}$$

Cherchons la substitution (2) qui opère directement la réduction de (1) quand cette réduction est possible. La substitution (8) ramène (1) à la forme (42). Or, la substitution

$$(43) \qquad Y = k_0 X v, \qquad du = k_1 X^{-1}\, dX$$

transforme (42) en une équation (3) à coefficients constants, k_0, et k_1 désignant des constantes arbitraires. Remplaçons dans (8), Y et dX par leurs expressions en fonction de u et v tirées de (43), la substitution (8) devient

$$(44) \qquad y = k_0 L X v + M, \qquad du = k_1 X^{-1} N\, dx.$$

Or, d'après l'expression trouvée pour l'invariant A, on peut écrire

$$A = C_0 X^{-3} = \frac{\mathcal{A}}{N^3} = \frac{\mathcal{A} L^3}{(M' + bM + d)^3}.$$

On en tire

$$LN = M' + bM + d, \qquad LX = C^{\frac{1}{3}} \frac{M' + bM + d}{\mathcal{A}^{\frac{1}{3}}}, \qquad X^{-1}N = C_0^{-\frac{1}{3}} \mathcal{A}^{\frac{1}{3}}.$$

La substitution ramenant l'équation (1), supposée réductible, à une équation (3) à coefficients constants, s'écrit

$$(45) \qquad y = k_0 C_0^{\frac{1}{3}} \frac{M' + bM + d}{\mathcal{A}^{\frac{1}{3}}} v + M, \qquad du = k_1 C_0^{-\frac{1}{3}} \mathcal{A}^{\frac{1}{3}}\, dx,$$

on pourra faire $k_0 C_0^{\frac{1}{3}} = k_1 C_0^{-\frac{1}{3}} = 1$. L'expression (45) montre que, lorsqu'elle est possible, *la réduction pourra être effectuée sans quadratures.*

Deuxième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$, $\mathcal{A} \neq 0$. En procédant comme dans le cas général, on montrera que la forme canonique (11) de l'équation (1) réductible s'écrit

$$(46)\qquad Z^3 + C_0X^{-3}Y^3 + 3Z^2 + 6C_1X^{-1}ZY + 3C_2Z + 3C_3X^{-1}Y + C_4 = 0,$$

et que la substitution qui opère directement la réduction est donnée par (45)

Troisième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$, $\mathcal{A} \equiv 0$, $\mathcal{D} \neq 0$. — Pour que (1) soit réductible, il faut et il suffit que l'équation canonique (13) soit

$$(47)\qquad Z^3 + 3Z^2 + 3C_0X^{-2}Y^2 + 6C_1X^{-1}ZY + 3Z + 3C_2X^{-1}Y + C_3 = 0.$$

La substitution qui opère directement la réduction est

$$y = k_0C_1\frac{M' + bM + d}{\mathcal{D}}v + M, \qquad du = k_1C_1^{-1}\frac{\mathcal{D}}{M' + bM + d}dx.$$

Quatrième cas : $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ *sont nuls; on a* $\mathcal{C} \neq 0$. — L'équation canonique (15) devient

$$Z^3 + 3Z^2 + 3C_0X^{-2}Y^2 + 3C_1 + C_2 = 0.$$

La substitution qui opère directement la réduction s'écrit

$$y = k_0C_0^{\frac{1}{2}}\frac{(M' + bM + d)^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}}v + M, \qquad du = k_1C_0^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}}{(M' + bM + d)^{\frac{1}{2}}}dx.$$

Cinquième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *sont nuls et l'on a* $\mathcal{E} \neq 0$. — L'équation canonique (17) sera

$$Z^3 + 3\varepsilon Z + X^{-1}[C_0Y + C_1] + C_2 = 0,$$

mais, dans ce cinquième cas, la réduction à une équation à coefficients constants ne pourra être obtenue sans quadrature.

Sixième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ *sont nuls;* $\mathcal{F} \neq 0$. — L'équation canonique (19) sera

$$Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 3C_0X^{-1}Y + 1 = 0,$$

et la substitution opérant directement, la réduction s'écrira

$$y = k_0C_0\frac{(M' + bM + d)^3}{\mathcal{F}}v + M, \qquad du = k_1C_0^{-1}\frac{\mathcal{F}}{(M' + bM + d)^2}dx.$$

Septième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *sont identiquement nuls.* — On a vu [n° **14**, 7ᵉ cas] qu'on est toujours ramené à une équation à coefficients constants. Cette réduction exige alors deux quadratures [voir les formules (20)].

II. On retrouve ces résultats sans utiliser les invariants. Mais, ici, la méthode directe ne paraît pas donner des calculs aussi simples que pour l'équation du premier ordre et du deuxième degré en y et y'. En nous bornant au cas général, montrons brièvement comment on procéderait.

Si l'équation (3), transformée de (1) au moyen de (2) a ses coefficients α, 3β, ... χ constants, nous remarquons que si β est différent de zéro, on peut supposer $\delta = 0$, si l'on a $\gamma \neq 0$, on peut supposer $\varphi = 0$; si α est $\neq 0$, on peut supposer $\varepsilon = 0$, etc. On distinguerait ainsi différents cas.

Supposons donc $\beta \neq 0$ et faisons $\delta = 0$. Le système des neuf équations (4) où α, β, ..., η, χ sont des constantes supposées données nous permettra d'exprimer les trois inconnues λ, μ et ν et nous obtiendrons par conséquent six conditions nécessaires et suffisantes de réduction. De la deuxième et de la quatrième équations, nous tirons d'abord

$$\lambda' = \lambda(\beta\nu - b), \qquad \mu' = -(b\mu + d). \tag{48}$$

Substituons ces valeurs dans les autres équations; celles-ci n'auront plus de dérivées. La première, la troisième, la cinquième et la sixième s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha - \beta^3)\nu^3 - 3\beta\mathcal{B}\nu - \mathcal{A} &= 0, \\ (\gamma - \beta^2)\nu^2 - \mathcal{B} &= 0, \\ \varepsilon\lambda\nu^3 - [2\beta\mathcal{B}\nu + \mathcal{A}]\mu - 2\beta\mathcal{D}\nu - \mathcal{C} + d\mathcal{B} &= 0, \\ \varphi\lambda\nu^2 - \mathcal{B}\mu - \mathcal{D} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Ces quatre équations donneront λ, μ, ν et une des conditions de réduction. Des deux premières, on tire d'abord

$$\nu = \frac{\alpha + 2\beta^3 - 3\beta\gamma}{\gamma - \beta^2}\,\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} = C_1\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}.$$

Substituant cette valeur dans la première, on obtient la condition

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right)^3 \frac{1}{\mathcal{A}} = \frac{3\beta C_1 + 1}{(\alpha - \beta^3)C_1^3},$$

et, par conséquent, l'expression de ν peut s'écrire aussi

$$\nu = \left(\frac{3\beta C_1 + 1}{\alpha - \beta^3}\right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{A}^{\frac{1}{3}}. \tag{50}$$

La dernière des équations (49) peut s'écrire, puisque $\nu^2 = \dfrac{\mathcal{B}}{\gamma - \beta^2}$,

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta^2}{\varphi}(\mu - M) \qquad \text{avec} \quad M = -\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}},$$

comme dans (7). Tenant compte des conditions (48), on obtient successivement

$$(51)\qquad \mu = -\frac{1}{\beta}\,\frac{M'+bM+d}{\nu} + M, \qquad \lambda = -\frac{\gamma-\beta^2}{\beta\varphi}\,\frac{M'+bM+d}{\nu}.$$

Si l'équation (1) est réductible, la substitution donnant une équation à coefficients constants est

$$y = -\frac{\gamma-\beta^2}{\beta\varphi}\,\frac{M'+bM+d}{\nu}\,v - \frac{1}{\beta}\,\frac{M'+bM+d}{\nu} + M \qquad (du = \nu\,dx),$$

ou encore

$$(52)\qquad y = -\frac{1}{\beta}\,\frac{M'+bM+d}{\nu}\,v_1 + M \qquad (du_1 = \nu\,dx),$$

et l'on retrouve les formules de substitution obtenues par les invariants. On pourrait aussi expliciter les autres conditions de réduction. Pratiquement, ces conditions n'offrent qu'un intérêt relatif et il sera plus simple d'appliquer à une équation (1) la substitution indiquée par les formules (52) et voir si sa transformée a ses coefficients constants, plutôt que d'examiner si les coefficients de (1) satisfont aux six conditions de réductibilité. Les calculs des fonctions λ, μ et ν entrant dans (52) ne nécessitent aucune quadrature.

III. Cas de réduction de l'équation sans terme en y'^3. — 1° *Cas général :* $\mathfrak{A} \neq 0$. — Considérons l'équation (22). Supposons-la réductible par (2) à une équation (23) à coefficients constants. En calculant, au moyen des formules (25) et (26) les expressions de L, M, N à partir de cette équation (23), on pourra obtenir les expressions des invariants D, E, ..., de (27). On montrerait ainsi, suivant un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois, que la condition nécessaire et suffisante pour que (22) soit réductible est que l'équation canonique (27) soit de la forme

$$(53)\qquad Z^2Y + \varepsilon Y^3 + C_0e^XZ^2 + C_1e^XZY + C_2e^{2X}Z + C_3e^{2X}Y + C_4e^{3X} = 0,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et où les C_i sont des constantes. Cette condition se traduit par les cinq relations distinctes suivantes :

$$\frac{1}{N}\,\frac{D'}{D} = \text{const.}, \qquad \frac{E}{D} = \text{const.}, \qquad \frac{F^2}{D} = \text{const.},$$

$$\frac{G^2}{D} = \text{const.}, \qquad \frac{H^3}{D} = \text{const.}$$

On montrerait aussi que, si (22) est réductible, la substitution (2) qui opère directement la réduction est de la forme

$$y = k_0 C_0^{-1} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} v - c, \qquad du = k_1 (\varepsilon \mathfrak{A})^{\frac{1}{2}} dx,$$

k_0 et k_1 étant des constantes arbitraires, $\varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathfrak{A} > 0$.

2° $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{D} \not\equiv 0$. — L'équation canonique (29) doit être de la forme

$$(54) \qquad Z^2 Y + \varepsilon Y^2 + C_0 XZY + C_1 X^3 Z + C_2 X^2 Y + C_3 X^4 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

pour que (22) soit réductible. Quand la réduction est possible, elle est opérée directement par la substitution

$$y = k_0 C_0^{-2} \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} v - c, \qquad du = k_1 C_0 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}.$$

3° $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{D} \equiv 0$; $\mathfrak{C} \not\equiv 0$. — L'équation canonique (31) doit être de la forme

$$(55) \qquad Z^2 Y + ZY + C_0 XZ + C_1 Y + C_2 X = 0,$$

pour que (22) soit réductible. La substitution

$$y = k_0 C_0^{-1} \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}} v - c, \qquad du = k_1 C_0 \frac{\mathfrak{E}^2}{\mathfrak{F}} dx,$$

effectuera directement la réduction de (22) quand cette réduction sera possible.

4° $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{D} \equiv 0$; $\mathfrak{E} \equiv 0$; $\mathfrak{F} \not\equiv 0$. — L'équation canonique (33) doit être

$$(56) \qquad Z^2 Y + Z + C_0 X^{-1} Y + C_1 X^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

et la substitution effectuant directement la réduction sera

$$y = k_0 C_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathfrak{F}}{|\mathfrak{G}|^{\frac{1}{2}}} v - c, \qquad du = k_1 C_0^{-1} \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} dx \qquad (k_0 \text{ et } k_1 = \text{const.}).$$

5° $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ *sont nuls :* $\mathfrak{G} \not\equiv 0$. — L'équation (22) sera réductible si l'équation canonique (35) est de la forme

$$(57) \qquad Z^2 Y + Y + C_0 X = 0,$$

et la substitution opérant directement la réduction sera

$$y = k_0 C_0^{-1} \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{G}} v - c, \qquad du = k_1 C_0 \frac{|\mathfrak{G}|^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{H}}.$$

6° $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ *sont identiquement nuls.* — On a montré [n° 15, 6°] que, moyennant une quadrature, l'équation (22) est réductible.

Tous ces résultats peuvent être obtenus directement, en résolvant l'équation (22) par rapport à y' et en procédant comme pour l'équation du premier ordre et du second degré du chapitre précédent.

IV. Cas de réduction de l'équation ne contenant y' qu'au premier degré. — 1° *Cas général :* $\mathcal{B} \neq 0$. — La condition nécessaire et suffisante pour que (36) soit réductible est que l'équation canonique (40) soit de la forme

$$(58) \qquad ZY^2 + Y^2 + C_0 X^2 Z + C_1 XY + C_2 X^2 = 0.$$

Les coefficients de l'équation (36), pour que celle-ci soit réductible, doivent satisfaire aux trois relations distinctes

$$\frac{1}{N} E' = \text{const.}, \qquad \frac{D^2}{E} = \text{const.}, \qquad \frac{F^2}{E} = \text{const.},$$

D, E, F étant les invariants contenus dans (40), N ayant la valeur signalée au 1° du n° 16; quand la réduction est possible, elle est effectuée directement par

$$y = k_0 C_1^{-1} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} v - c, \qquad du = k_1 C_1 \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{E}^2} dx.$$

Deuxième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$; $\mathcal{E} \neq 0$. — Pour que (36) soit réductible, il faut et il suffit que l'équation canonique (41) s'écrive

$$(59) \qquad ZY^2 + C_0 XZ + Y + C_1 X^{\frac{1}{2}} = 0.$$

La substitution qui opère directement la réduction est

$$y = k_0 C_0^{-\frac{1}{2}} |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} v - c, \qquad du = k_1 C_0 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}.$$

Troisième cas : $\mathcal{B} \equiv 0$; $\mathcal{E} \equiv 0$; $\mathcal{F} \neq 0$. — L'équation canonique correspondante doit s'écrire sous la forme

$$(60) \qquad ZY^2 + C_0 X^{\frac{2}{3}} Z + 1 = 0.$$

La réduction est effectuée directement par

$$y = k_0 C_0^{-\frac{1}{2}} |\mathcal{D}|^{\frac{1}{2}} v - c, \qquad du = k_1 C^{\frac{3}{2}} \frac{\mathcal{F}}{|\mathcal{D}|^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Quatrième cas. — Enfin, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *sont identiquement nuls*, la réduction de l'équation (36) est toujours possible, mais exige une quadrature [*voir* n° 16, 4e cas].

En résumé, pour que l'équation $f(x, y, y') = 0$, où f est un polynome du troisième degré en y et y' dont les coefficients sont des fonctions de x, soit réductible par une substitution (2), il faut et il suffit que ses coefficients satisfassent à six conditions distinctes. Lorsque l'équation est réductible, sa transformée à coefficients constants peut être obtenue en général sans aucune quadrature. Dans quelques cas particuliers, la réduction exige une ou deux quadratures.

18. Équation $q(y)y' + p(y) = 0$. — I. *Forme canonique.* — L'équation (36) du numéro **17**, où y' ne figure qu'au premier degré, est de la forme

$$(61) \qquad q(y)y' + p(y) = 0,$$

$q(y)$ et $p(y)$ étant des polynomes en y dont les coefficients sont des fonctions de x, et dont les degrés en y sont respectivement 2 et 3. Plus généralement, nous allons considérer l'équation (61) où $q(y)$ et $p(y)$ seront de degrés respectifs $n - 1$ et n en y. Cette équation s'écrit

$$(62) \qquad y'\sum[b_i y^i] + a_n y^n + \sum[a_i y^i] = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

La substitution (2), appliquée à (62), donne l'équation

$$(63) \qquad \frac{dv}{du}\sum[\beta_i v^i] + \alpha_n v^n + \sum[\alpha_i y^i] = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

En développant $p(\lambda v + \mu)$ et $q(\lambda v + \mu)$ par la formule de Taylor, on a

$$\frac{i!\,\alpha_i}{\lambda^{i-1}} = \lambda p^{(i)}(\mu) + i\lambda' q^{(i-1)}(\mu) + \lambda\mu' q^{(i)}(\mu),$$
$$(i-1)!\,\beta_i = \nu q^{(i-1)}(\mu),$$

avec

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dx}, \qquad \mu' = \frac{d\mu}{dx}, \qquad p^r(\mu) = \frac{\partial^r p(\mu)}{\partial\mu^r}, \qquad q^r(\mu) = \frac{\partial^r q(\mu)}{\partial\mu^r}.$$

On a en particulier

$$\alpha_n = \lambda^{n-1}[a_n\lambda + b_{n-1}\lambda'], \qquad \beta_{n-1} = \lambda^n \nu b_{n-1},$$
$$\beta_{n-2} = \lambda^{n-1}\nu[(n-1)b_{n-1}\mu + b_{n-2}].$$

Prenons respectivement pour λ, μ et ν les fonctions L, M et N telles que l'on ait

$$\alpha_n = 0, \qquad \beta_{n-2} = 0, \qquad \beta_{n-1} = 1.$$

On obtient

$$(64) \qquad \mathrm{L} = e^{-\int \frac{a_n}{b_{n-1}}dx}, \qquad \mathrm{M} = -\frac{b_{n-2}}{(n-1)b_{n-1}}, \qquad \mathrm{N} = \frac{1}{b_{n-1}\mathrm{L}^n}.$$

La substitution (8) appliquée à (62) donne l'équation

$$(65)\qquad \frac{dY}{dX}[Y^{n-1}+\sum J_s Y^s]+\sum I_i Y^i=0 \qquad (s=0,1,2,\ldots,n-3;\ i=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Désignons par $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ les expressions, fonctions de u obtenues en remplaçant dans les formules (64) respectivement L, M, N, a_n, b_{n-1}, b_{n-2} par $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, α_n, β_{n-1}. β_{n-2}. Les raisonnements faits au Chapitre I pour la démonstration de l'existence des invariants montrent que si l'on choisit convenablement la constante arbitraire dont dépendent $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ [la constante dont L et N dépendent étant déjà choisie], la substitution

$$(66)\qquad v = \mathcal{L}Y + \mathcal{M}, \qquad dX = \mathcal{N}\,du,$$

donne l'équation (65). Il en résulte que (65) est une équation de forme canonique de (62). Les J_s et I_i sont des invariants. On a les relations

$$(67)\qquad \lambda\mathcal{L} = L, \qquad \lambda\mathcal{M} = M - \mu, \qquad \nu\mathcal{N} = N.$$

II. *Cas de réduction à une équation à coefficients constants :*

Première méthode. — Supposons que l'équation (62) soit réduite à une équation à coefficients constants (63) par la substitution (2). On peut toujours supposer, en remplaçant v par $v+c$, que dans (63) on a : $\beta_{n-2}=0$. Dans ces conditions, les formules (64), appliquées à la réduction de (63) à une forme canonique, donnent, en désignant par a et c des constantes

$$\mathcal{L} = e^{-au}, \qquad \mathcal{M} = 0, \qquad \mathcal{N} = nCe^{nau}.$$

Les formules (66) deviennent

$$(68)\qquad v = Ye^{-au}, \qquad dX = nCe^{nau}\,du, \qquad X = Ce^{nau}.$$

On peut toujours faire en sorte que, en changeant λ en $-\lambda$ et ν en $-\nu$, ce qui revient à changer v en $-v$ et u en $-u$, les constantes qui sont en facteur dans les expressions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ soient positives et que la constante qui est en facteur dans $\mathcal{L}$ devienne égale à *un*, en remplaçant u par $u+k$. On obtient immédiatement

$$\left(\frac{X}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{au}, \qquad v = Y\left(\frac{C}{X}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{dX}{X} = na\,du,$$

et l'équation canonique (65) se présente sous la forme

$$(69)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dY}{dX}\left[Y^{n-1}+\sum B_s X^{\frac{n-s-1}{n}} Y^s\right]+\sum A_i X^{-\frac{i}{n}} Y^i=0 \\ (s=0,1,2,\ldots,n-3;\ i=0,1,2,\ldots,n-1), \end{array}\right.$$

B_s et A_i étant des constantes.

On voit donc que, pour que (62) soit réductible, il est nécessaire que son équation canonique (65) ait la forme (69).

Réciproquement, si l'équation canonique de (62) a la forme (69), on ramène (69) à l'équation (63) à coefficients constants par la substitution

$$(70) \qquad Y = ve^{au}; \qquad X = Ce^{nau}.$$

On ramène donc directement l'équation réductible de (62) à une équation (63) à coefficients constants par la substitution (2) qui est la résultante des substitutions (8) et (70). Cherchons cette résultante. Transportons dans (8) les expressions de Y et dX tirées de (68), on a

$$y = L\left(\frac{X}{C}\right)^{\frac{1}{n}} v + M; \qquad du = \frac{1}{nC} Ne^{-nau} dx = \frac{1}{n}\frac{N}{X} dx.$$

Mais, d'après les expressions des invariants des équations (65) et (69) on peut écrire

$$I_{n-1} = A_{n-1} X^{-\frac{n-1}{n}} = L^{n-1}\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}}{b_{n-1} N^{\frac{n-1}{n}}},$$

en posant

$$\mathfrak{A} \equiv b_{n-1} M' + na_n M + a_{n-1}.$$

On en déduit

$$L(X)^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{A_{n-1}}{\mathfrak{A}}\right]^{\frac{1}{n-1}}; \qquad \frac{N}{X} = \frac{1}{b_{n-1}}\left[\frac{\mathfrak{A}}{A_{n-1}}\right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

La substitution résultante peut donc s'écrire sous la forme

$$y = \frac{A_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{C^{\frac{1}{n}}} \mathfrak{A}^{-\frac{1}{n-1}} v + M; \qquad du = \frac{1}{n A_{n-1}^{\frac{n}{n-1}}} \frac{\mathfrak{A}^{\frac{n}{n-1}}}{b_{n-1}} dx,$$

on voit ainsi que, lorsqu'elle est possible, la réduction s'effectuera *sans quadrature*. Les $2n - 2$ conditions nécessaires et suffisantes pour que la réduction soit possible s'obtiennent en exprimant que les coefficients de (65) sont identiques aux coefficients de (69).

Deuxième méthode. — Soit l'équation (61); soit m le degré de $p(y)$ et soit n le degré de $q(y)$. On peut toujours supposer que le coefficient du terme en y^n de $q(y)$ est l'unité. Cherchons le cas où une substitution (2) (Chap. I) ramène (61) à une équation à coefficients constants

$$(71) \qquad Q(Y)\,dY + P(Y)\,dX = 0,$$

où P est de degré r et Q de degré s. On peut, en remplaçant Y par $Y + c$

et divisant (71) par une constante, toujours supposer que l'on a

$$(72)\quad \begin{cases} P(Y) = \sum A_j Y^j & (j = 1, 2, \ldots, r); \\ Q(Y) = Y^s + \sum B_j Y^j & (j = 0, 1, 2, \ldots, s-2). \end{cases}$$

L'identification de (71) et (72) donne

$$(73)\qquad \frac{(\lambda' Y + \mu') q(\lambda Y + \mu) + p(\lambda Y + \mu)}{\lambda \nu q(\lambda Y + \mu)} = \frac{P(Y)}{Q(Y)}.$$

On suppose que P et Q n'ont pas de diviseur commun et que p et q n'ont pas de diviseur commun dépendant de y. On aura donc

$$(74)\qquad Q(Y) \equiv \lambda^{-n} q(\lambda Y + \mu).$$

D'après les hypothèses faites sur les termes de plus haut degré de Q et de q, on aura $s = n$ et si l'on pose

$$q(y) \equiv y^n + \Sigma b_i y^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$Q(Y) = \left(Y + \frac{\mu}{\lambda}\right)^n + \frac{b_{n-1}}{\lambda}\left(Y + \frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1} + \ldots.$$

L'identification des termes en Y^{n-1} donne

$$(75)\qquad n\mu + b_{n-1} = 0.$$

Si l'on pose

$$q^{(i)}(\mu) = \frac{\partial^i q(\mu)}{\partial \mu^i},$$

on a, en tenant compte de (75),

$$(76)\quad \lambda^{-n} q(\lambda Y + \mu) = Y^n + \sum \frac{q^{(i)}(\mu)}{i!\,\lambda^{n-i}} Y^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2).$$

L'identification des deux membres de (74) donne

$$(77)\qquad \frac{q^{(i)}(\mu)}{i!\,\lambda^{n-i}} = B_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2).$$

On a ensuite l'identité

$$(78)\qquad P(Y) \equiv \frac{(\lambda' Y + \mu') q(\lambda Y + \mu) + p(\lambda Y + \mu)}{\lambda^{n+1} \nu}.$$

Si l'on a $m \neq n+1$ le degré de $P(Y)$ est le plus grand des deux nombres m et $n+1$. Si l'on a $m = n+1$, le degré de P est au plus égal à m. On détermine ainsi r, degré de P, ou degré maximum de P.

$$P = \sum A_j Y^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r).$$

L'identification des deux membres de (78) donne $r+1$ équations qui, jointes aux $n-1$ équations (77), permettent de déterminer sans quadrature λ et ν. Chacune de ces deux fonctions n'est déterminée qu'à un facteur arbitraire près. Il reste $n+r-2$ conditions à vérifier pour que (61) soit réductible. Certaines des constantes A_j et en particulier A_r peuvent être nulles, mais elles ne peuvent être toutes nulles si $q(y)$ et $p(y)$ n'ont pas de diviseur commun.

III. Recherche des cas où l'équation (62) admet un facteur intégrant qui ne dépend que de x. — L'équation (62) admet un facteur intégrant $h(x)$, si l'expression

$$h[a_n y^n + \sum a_i y^i]\,dx + [h\sum b_i y^i]\,dy \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

est de la forme $P\,dx + Q\,dy$. On doit avoir $P'_x \equiv Q'_y$. Cette identité nous donne

$$\begin{gathered}(na_n - b'_{n-1})h = b_{n-1}h',\\ [(n-1)a_{n-1} - b'_{n-2}]h = b_{n-2}h',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (2a_2 - b'_1)h = b_1 h',\\ (a_1 - b'_0)h = b_0 h'.\end{gathered}$$

L'élimination de h et h' conduit immédiatement aux conditions cherchées. Elles s'écrivent

$$\frac{h'}{h} = \frac{na_n - b'_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{(n-1)a_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}} = \ldots = \frac{a_1 - b'_0}{b_0}.$$

On peut vérifier que la condition

$$\frac{na_n - b'_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{(n-1)a_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}}$$

est identique à la condition $I_{n-1} = 0$ et que les autres conditions sont équivalentes à

$$\frac{dJ_i}{dX} = (i+1)I_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-3).$$

conditions que l'on obtiendrait en utilisant l'équation de forme canonique (65).

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE DEUXIÈME ORDRE ET DU DEUXIÈME DEGRÉ EN y, y', y''.

Nous nous proposons d'établir les formes canoniques de cette équation et de rechercher les cas où cette équation est réductible à une équation à coefficients constants.

19. Formes canoniques de l'équation ayant un terme en y''^2. — L'équation ayant un terme en y''^2 peut être écrite sous la forme

$$(1)\qquad h(yy'y'') \equiv y''^2 + ay'^2 + by^2 + 2cy''y' + 2dy''y + 2ey'y + 2fy'' + 2gy' + 2py + q = 0.$$

$a, b, \ldots, p, q$ désignant des fonctions quelconques de x.

Le changement simultané de variable et de fonction

$$(2)\qquad y = \lambda v + \mu; \qquad du = \nu\, dx$$

appliqué à (1) donne l'équation

$$(3)\qquad \mathrm{H}_1(vv'v'') \equiv v''^2 + \mathrm{A}_1 v'^2 + \mathrm{B}_1 v^2 + 2\mathrm{C}_1 v''v' + \ldots + 2\mathrm{P}_1 v + \mathrm{Q}_1 = 0,$$

v', v'' désignent les dérivées $\frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}$. On a en désignant par $h_2(yy'y'')$ l'ensemble des termes du deuxième degré de (1)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= \frac{(2\lambda'\nu + \lambda\nu')^2 + 2c\lambda\nu(2\lambda'\nu + \lambda\nu') + a\lambda^2\nu^2}{\lambda^2\nu^4}, \qquad \mathrm{B}_1 = \frac{h_2(\lambda\lambda'\lambda'')}{\lambda^2\nu_4},\\
\mathrm{C}_1 &= \frac{2\lambda'\nu + \lambda\nu' + c\lambda\nu}{\lambda\nu^2}, \qquad \mathrm{D}_1 = \frac{\lambda'' + c\lambda' + d\lambda}{\lambda\nu^2},\\
\mathrm{E}_1 &= \frac{(\lambda'' + c\lambda' + d\lambda)(2\lambda'\nu + \lambda\nu') + \lambda\nu(c\lambda'' + a\lambda' + e\lambda)}{\lambda^2\nu^4}, \qquad \mathrm{F}_1 = \frac{\mu'' + c\mu' + d\mu + f}{\lambda\nu^2},\\
\mathrm{G}_1 &= \frac{(\mu'' + c\mu' + d\mu + f)(2\lambda'\nu + \lambda\nu') + \lambda\nu(c\mu'' + a\mu' + e\mu + g)}{\lambda^2\nu^4},\\
\mathrm{P}_1 &= \frac{(\lambda'' + c\lambda' + d\lambda)\mu'' + (c\lambda'' + a\lambda' + e\lambda)\mu' + (d\lambda'' + e\lambda' + b\lambda)\mu + f\lambda'' + g\lambda' + p\lambda}{\lambda^2\nu^4},\\
\mathrm{Q}_1 &= \frac{h(\mu\mu'\mu'')}{\lambda^2\mu^4}.
\end{aligned}\right.$$

Considérons les fonctions $\lambda = L$, $\nu = N$, telles que l'on ait $C_1 = 0$. On obtient

$$(5) \qquad 2\frac{L'}{L} + \frac{N'}{N} = -c, \quad \text{soit} \quad L^2 N = e^{-\int c\,dx}.$$

Les coefficients A_1, E_1, G_1 deviennent, en posant

$$\mathcal{A} = a - c^2; \qquad \mathcal{B} = e - cd; \qquad \mathcal{C} = g - cf:$$

$$(6) \qquad A_1 = \frac{\mathcal{A}}{N^2}, \qquad E_1 = \frac{\mathcal{A}L' + \mathcal{B}L}{LN^3}, \qquad G_1 = \frac{\mathcal{A}\mu' + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{LN^3}.$$

Premier cas : On a $\mathcal{A} \neq 0$. — Choisissons N de façon que $A_1 = \varepsilon = \pm 1$ avec $\varepsilon\mathcal{A} > 0$

$$(7) \qquad N = (\varepsilon\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}.$$

D'après (5), on a

$$(8) \qquad L = e^{-\frac{1}{2}\int c\,dx} N^{-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, prenons $\mu = M$, tel que l'on ait $G_1 = \nu$. On a

$$(9) \qquad \mathcal{A}M' + \mathcal{B}M + \mathcal{C} = \nu.$$

La substitution

$$(10) \qquad y = LY + M; \qquad aX = N\,dx,$$

où L, M, N ont les valeurs données par (7), (8) et (9) ramène (1) à l'équation

$$(11) \qquad Y''^2 + Y'^2 + BY^2 + 2DY''Y + 2EY'Y + 2FY'' + 2PY + Q = 0,$$

où les coefficients B, D, E, ..., P, Q sont reliés aux fonctions LMN par

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{L''^2 + aL'^2 + bL^2 + 2cL''L' + 2dL''L + 2eL'L}{L^2N^4}, \qquad D = \frac{L'' + cL' + dL}{LN^2}, \\ E &= \frac{\mathcal{A}L' + \mathcal{B}L}{LN^3}, \qquad F = \frac{M'' + cM' + dM + f}{LN^2}, \\ P &= \frac{(L'' + cL' + dL)M'' + (cL'' + aL' + eL)M' + (dL'' + eL' + bL)M + fL'' + gL' + pL}{L^2N^4}, \\ Q &= \frac{f(MM'M'')}{L^2N^4}. \end{aligned} \right.$$

On montre, par le calcul, que L et N sont des invariants relatifs, et que X, ainsi que les coefficients A, B, ..., Q sont des invariants absolus. L'équation (11) représente donc une équation de forme canonique de (1).

Deuxième cas : $\mathcal{A} \equiv 0$, $\mathcal{B} \not\equiv 0$. — Les coefficients A_1, E_1 et G_1 deviennent, d'après (6)

$$A_1 = 0, \qquad E_1 = \frac{\mathcal{B}}{N^3}, \qquad G_1 = \frac{\mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{LN^3}.$$

On est conduit à choisir N et $\mu = M$ tels que $E_1 = 1$; $G_1 = 0$. On obtient

$$(13) \qquad N = \mathcal{B}^{\frac{1}{3}}, \qquad L = e^{-\frac{1}{2}\int c\,dx} N^{-\frac{1}{2}}, \qquad M = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{B}}.$$

La substitution (10) ramène (1) à l'équation canonique

$$(14) \qquad Y''^2 + BY^2 + 2DY''Y + 2Y'Y + 2FY'' + 2PY + Q = 0.$$

Les invariants B, D, ..., Q ont les expressions indiquées par les formules (12) où L, M, N doivent être remplacés par les valeurs (13).

Troisième cas : $\mathcal{A} \equiv 0$; $\mathcal{B} \equiv 0$; $\mathcal{C} \not\equiv 0$. — Les coefficients A_1 ; E_1 ; G_1 s'écrivent

$$A_1 = 0, \qquad E_1 = 0, \qquad G_1 = \frac{\mathcal{C}}{LN^3};$$

choisissons L et N tels que

$$(15) \qquad N = e^{\frac{1}{5}\int c\,dx} \mathcal{C}^{\frac{2}{5}}, \qquad L = e^{-\frac{3}{5}\int c\,dx} \mathcal{C}^{-\frac{1}{5}}.$$

Les formules (4) ne permettent pas de trouver une valeur M de μ annulant un des coefficients restants de l'équation transformée. Nous supposerons $\mu = 0$. La substitution (10) ramène (1) à l'équation canonique

$$(16) \qquad Y''^2 + BY^2 + 2DY''Y + 2FY'' + 2Y' + 2PY + Q = 0,$$

dans laquelle les invariants ont les expressions suivantes :

$$B = \frac{(L'' + cL')^2 + 2dL(L'' + cL') + bL^2}{L^2N^4}, \qquad D = \frac{L'' + cL' + dL}{LN^2},$$

$$F = \frac{f}{LN^2}, \qquad P = \frac{fL'' + gL' + pL}{L^2N^4}, \qquad Q = \frac{q}{L^2N^4}.$$

Quatrième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *sont identiquement nuls.* — L'équation (1) peut s'écrire

$$(17) \qquad (y'' + cy' + dy + f)^2 + (b - d^2)y^2 + (p - df)y + q - f^2 = 0.$$

Nous poserons

$$\mathcal{D} \equiv b - d_2, \qquad \mathcal{E} \equiv p - df, \qquad \mathcal{F} \equiv q - f^2$$

La substitution (2) transforme (17) en l'équation

(18) $$(v'' + C_1 v' + D_1 v + F_1)^2 + \ldots = 0.$$

D'après les relations : $a = c^2$; $e = cd$; $g = cf$, les formules (4) donnent

$$B_1 = \frac{(\lambda'' + c\lambda' + d\lambda)^2 + \mathcal{D}\lambda^2}{\lambda^2 \nu^4}, \quad C_1 = \frac{2\lambda'\nu + \lambda\nu' + c\lambda\nu}{\lambda\nu^2}, \quad D_1 = \frac{\lambda'' + c\lambda' + d\lambda}{\lambda\nu^2},$$

$$F_1 = \frac{\mu'' + c\mu' + d\mu + f}{\lambda\nu^2}, \quad P_1 = \frac{(\lambda'' + c\lambda' + d\lambda)(\mu'' + c\mu' + d\mu + f) + (\mathcal{D}\mu + \mathcal{E})\lambda}{\lambda^2\nu^4},$$

$$Q_1 = \frac{(\mu'' + c\mu' + d\mu + f)^2 + \mathcal{D}\mu^2 + \mathcal{E}\mu + \mathcal{F}}{\lambda^2\nu^4}.$$

Prenons LMN tels que : $D_1 = 1$; $F_1 = 1$; $P_1 = 1$. On a, en supposant $\mathcal{D} \neq 0$

(19) $$M = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}, \qquad LN^2 = M'' + cM' + dM + f, \qquad L'' + cL' + dL = LN^2.$$

L'équation (17) sera ramenée par (10) à l'équation canonique

(20) $$(Y'' + CY')^2 + 2Y(Y'' + CY') + BY^2 + 2(Y'' + CY') + 2Y + Q = 0.$$

Les invariants ont pour expressions

$$B = 1 + \frac{\mathcal{D}}{N^4}, \qquad C = \frac{2L'N + LN' + cLN}{LN^2}, \qquad Q = 1 + \frac{\mathcal{D}M^2 + \mathcal{E}M + \mathcal{F}}{L^2N^4}.$$

Cinquième cas : $\mathcal{A} \equiv 0$; $\mathcal{B} \equiv 0$; $\mathcal{C} \equiv 0$; $\mathcal{D} \equiv 0$; $\mathcal{E} \neq 0$. — En prenant LMN de façon que $D_1 = 1$; $F_1 = 1$; $Q_1 = 1$, on a

(21) $$M = -\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}}, \qquad LN^2 = M'' + cM' + dM + f, \qquad L'' + cL' + dL = LN^2,$$

et l'équation (1) est réduite à l'équation de forme canonique

(22) $$(Y'' + CY')^2 + 2Y(Y'' + CY') + Y^2 + 2(Y'' + CY') + 2PY + 1 = 0,$$

avec

$$C = \frac{2L'N + LN' + cLN}{LN^2}, \qquad P = 1 + \frac{\mathcal{E}}{LN^4},$$

Sixième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ *sont identiquement nuls.* — L'équation (1) s'écrit

$$(y'' + cy' + dy)^2 + 2f(y' + cy' + dy) + q = 0$$

et peut être décomposée en deux équations linéaires du second ordre.

20. Formes canoniques de l'équation ne contenant y'' qu'au premier degré. — L'équation peut être écrite sous la forme

(23) $$h \equiv y''y' + ay'^2 + by^2 + cy''y + dy'y + ey'' + fy' + gy + p = 0.$$

La transformation (2) donne

$$v''v' + A_1 v'^2 + \ldots + G_1 v + P_1 = 0.$$

On a

$$A_1 = \frac{2\lambda'\nu + \lambda\nu' + a\lambda\nu}{\lambda\nu^2}, \qquad B_1 = \frac{\lambda''(\lambda' + c\lambda) + a\lambda'^2 + d\lambda\lambda' + b\lambda^2}{\lambda^2\nu^3}, \qquad C_1 = \frac{\lambda' + c\lambda}{\lambda\nu},$$

$$D_1 = \frac{(2\lambda'\nu + \lambda\nu')(\lambda' + c\lambda) + \lambda\nu(\lambda'' + 2a\lambda' + d\lambda)}{\lambda^2\nu^3}, \qquad E_1 = \frac{\mu' + c\mu + e}{\lambda\nu},$$

$$F_1 = \frac{(\mu'' + 2a\mu' + d\mu + f)\lambda\nu + (2\lambda'\nu + \lambda\nu')(\mu' + c\mu + e)}{\lambda^2\nu^3},$$

$$G_1 = \frac{(\lambda' + c\lambda)\mu'' + (\lambda'' + 2a\lambda' + d\lambda)\mu' + (c\lambda'' + d\lambda' + b\lambda)\mu + e\lambda'' + f\lambda' + g\lambda}{\lambda^2\nu^3},$$

$$P^1 = \frac{h(\mu\mu'\mu'')}{\lambda^2\nu^3}.$$

Prenons

$$\lambda = L, \qquad \mu = M,$$

tels que l'on ait

$$C_1 = 0, \qquad E_1 = 0.$$

On a

(24) $$L = e^{-\int c\,dx}, \qquad M' + cM + e = 0.$$

En posant

$$\mathcal{B} \equiv ac^2 + b - cd, \qquad \mathcal{D} \equiv c^2 - 2ac + d - c', \qquad \mathcal{G}_2 \equiv d - 2ae$$
$$\mathcal{G}_1 \equiv 2b - cd, \qquad \mathcal{G}_0 \equiv g - cf,$$

les coefficients B_1; D_1; F_1; G_1; P_1 deviennent

$$B_1 = \frac{\mathcal{B}}{\nu^3}, \qquad D_1 = \frac{\mathcal{D}}{\nu^2}, \qquad F_1 = \frac{M'' + 2aM' + dM + f}{L\nu^2},$$
$$G_1 = \frac{\mathcal{G}_2 M' + \mathcal{G}_1 M + \mathcal{G}_0}{L\nu^3}, \qquad P_1 = \frac{h(MM'M'')}{L^2\nu^3}.$$

Si l'on a $\mathcal{B} \neq 0$, en supposant $D_1 = 1$ on a : $N = \mathcal{B}^{\frac{1}{3}}$ et l'équation (23) est ramenée à la forme canonique

(25) $$Y''Y' + AY'^2 + Y^2 + DY'Y + FY' + GY + P = 0.$$

Laissons de côté les cas particuliers qui se présentent pour $\mathcal{B} \equiv 0$. On les étudierait en modifiant la manière de déterminer N. On a vu des exemples de cette façon d'opérer dans les chapitres précédents.

21. Cas de réduction à une équation à coefficients constants. — I. ÉQUATION AVEC UN TERME EN y''^2. — *Premier cas.* — Supposons qu'une substitution (2) transforme l'équation (1) où $\mathfrak{A} \neq 0$ en une équation (3) à coefficients constants. Un raisonnement analogue à celui que nous avons tenu pour d'autres équations montre que la condition de réduction de (1) est que l'équation canonique (11) ait la forme

$$(26) \quad Y''^2 + Y'^2 + C_0 Y^2 + 2C_1 Y'' Y + 2C_2 Y' Y + 2C_3 e^X Y' + 2C_4 e^X Y + C_5 e^{2X} = 0,$$

où les C_i sont des constantes.

Cette condition peut être exprimée par les six relations distinctes suivantes :

$$B = \text{const.}, \qquad D = \text{const.}, \qquad E = \text{const.},$$

$$\frac{1}{N}\frac{F'}{F} = \text{const.}, \qquad \frac{P}{F} = \text{const.}, \qquad \frac{Q^2}{F} = \text{const.}$$

Lorsqu'une équation (1) est réductible, on peut encore former la substitution permettant d'opérer directement la réduction. Si (1) est réductible, la substitution (10), dans laquelle L, M, N sont donnés par les formules (7), (8) et (9), la ramène à l'équation (26). Or, la substitution

$$(27) \qquad Y = h_0 e^X v; \qquad du = h_1 dX,$$

transforme (26) en une équation (3) à coefficients constants. La résultante des substitutions (10) et (27) donnera directement l'équation réduite à coefficients constants. Tenant compte de (27) et de la forme de l'invariant F, cette substitution résultante peut s'écrire sous la forme

$$(28) \qquad y = h_0 C_1^{-1} \frac{M'' + cM' + dM + f}{n^2} v + M, \qquad du = h_1 N\, dx,$$

h_0 et h_1 désignant des constantes arbitraires. Elle exige une quadrature, celle indiquée par (9) pour le calcul de M.

Deuxième cas : $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{B} \neq 0$. — La condition pour que (1) soit réductible est que l'équation (14) ait la forme

$$(29) \qquad Y''^2 + C_0 Y^2 + C_1 Y'' Y + 2Y' Y + C_2 e^X Y'' + C_3 e^X Y + C_4 e^{2X} = 0.$$

La substitution opérant directement la réduction est donnée par les formules (28) où l'on remplace M et N par les expressions (13).

Troisième cas : $\mathfrak{A} \equiv 0$; $\mathfrak{B} \equiv 0$; $\mathfrak{C} \neq 0$. — L'équation canonique (16) prend la forme

$$(30) \quad Y''^2 + C_0 X^{-4} Y^2 + C_1 X^{-2} Y'' Y + C_2 X Y'' + 2Y' + C_3 X^{-1} Y + C_4 X^2 = 0$$

et la substitution qui opère la réduction s'écrit

$$y = f^3 \mathcal{C}^{-2} v, \qquad du = \mathcal{C} f^{-1}\, dx.$$

Quatrième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont identiquement nuls; $\mathcal{D} \neq 0$. — On a la forme canonique et

$$(31)\quad (Y'' + C_0 Y')^2 + 2Y(Y'' + C_0 Y') + C_1 Y^2 + 2(Y'' + C_0 Y') + 2Y + C_2 = 0.$$

Cette forme canonique est une équation à coefficients constants. La réduction nécessite dans ce cas une seule quadrature.

Cinquième cas : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont identiquement nuls; $\mathcal{E} \neq 0$. — La forme prise par (22) sera aussi elle-même à coefficients constants.

II. *Équation sans terme en y''^2.* — Procédant comme nous venons de le faire pour l'équation complète, on montre que, pour que l'équation (23) soit réductible, il faut et il suffit que l'équation canonique (25) ait la forme

$$(32)\qquad Y''Y' + C_0 Y'^2 + Y^2 + C_1 Y'Y + C_2 e^X Y' + C_3 e^X Y + C_4 e^{2X} = 0.$$

La substitution transformant (1) directement a la forme

$$(33)\qquad y = \frac{M'' + 2aM' + dM + f}{N^2} v + M, \qquad du = N\, dx.$$

III. Montrons maintenant brièvement comment on pourrait, sans le concours des invariants, obtenir les divers cas de réduction.

L'équation (1) peut être écrite sous la forme

$$(34)\quad y'' = -(cy' + dy + f) \pm \sqrt{-\mathcal{A}y'^2 - 2\mathcal{B}y'y - 2\mathcal{C}y' - \mathcal{D}y^2 - 2\mathcal{E}y - \mathcal{F}},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\ldots$, $\mathcal{F}$ ayant les significations données au numéro 19. S'il existe une substitution

$$(35)\qquad y = \lambda Y + \mu, \qquad dX = \nu\, dx \quad (^1),$$

ramenant l'équation (34) à une équation à coefficients constants

$$(36)\quad \frac{d^2Y}{dX^2} = -\left(C\frac{dY}{dX} + DY + F\right) \pm \sqrt{-\mathcal{A}_1\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 - 2\mathcal{B}_1\frac{dY}{dX}Y - 2\mathcal{C}_1\frac{dY}{dX} - \mathcal{D}_1 Y^2 - 2\mathcal{E}_1 Y - \mathcal{F}_1},$$

(1) Les nouvelles variables X et Y ne doivent pas être confondues avec les variables canoniques utilisées dans les invariants.

on peut toujours supposer $\mathcal{C}_1 = 0$, en remplaçant Y par $Y + kX$ et déterminant la constante k. Substituons dans (34) y, y', y'' tirées de (35). L'équation (54) s'écrit

$$(37)\quad \frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{c\lambda + 2\lambda'}{\lambda}\frac{dY}{dx} - \frac{\lambda'' + c\lambda' + d\lambda}{\lambda}Y - \frac{\mu'' + c\mu' + d\mu + f}{\lambda}$$

$$\pm\sqrt{\begin{array}{l} -\mathcal{A}\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2 - 2\dfrac{\mathcal{A}\lambda' + \mathcal{B}\lambda}{\lambda}Y\dfrac{dY}{dx} - 2\dfrac{\mathcal{A}\mu' + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C}}{\lambda}\dfrac{dY}{dx} \\ -\dfrac{\mathcal{A}\lambda'^2 + 2\mathcal{B}\lambda\lambda' + \mathcal{D}\lambda^2}{\lambda^2}Y^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -2\dfrac{(\mathcal{A}\mu' + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C})\lambda' + (\mathcal{B}\mu' + \mathcal{D}\mu + \mathcal{E})\lambda}{\lambda^2}Y \\ -\dfrac{\mathcal{A}\mu'^2 + 2\mathcal{B}\mu\mu' + 2\mathcal{C}\mu' + \mathcal{D}\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu + \mathcal{F}}{\lambda^2}. \end{array}}$$

D'après les relations

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\nu}\frac{dY}{dx}, \qquad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{\nu^2}\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{\nu'}{\nu^3}\frac{dY}{dx},$$

l'équation (36) peut aussi s'écrire, en faisant $\mathcal{C}_1 = 0$,

$$(38)\quad \frac{d^2Y}{dx^2} = -\left[C\nu - \frac{\nu'}{\nu}\right]\frac{dY}{dx} - D\nu^2 Y - F\nu^2$$
$$\pm\sqrt{-\mathcal{A}_1\nu^2\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 - 2\mathcal{B}_1\nu^3 Y\frac{dY}{dx} - \mathcal{D}_1\nu^4Y^2 - 2\mathcal{E}_1\nu^4Y - \nu^4\mathcal{F}_1}.$$

Identifions (37) et (38). On a

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{c\lambda + 2\lambda'}{\lambda} = C\nu - \dfrac{\nu'}{\nu}, \quad \dfrac{\lambda'' + c\lambda' + d\lambda}{\lambda} = D\nu^2, \quad \dfrac{\mu'' + c\mu' + d\mu + f}{\lambda} = F\nu^2, \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_1\nu^2, \quad \dfrac{\mathcal{A}\lambda' + \mathcal{B}\lambda}{\lambda} = \mathcal{B}_1\nu_3, \quad \mathcal{A}\mu' + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C} = 0, \\ \dfrac{\mathcal{A}\lambda'^2 + 2\mathcal{B}\lambda\lambda' + \mathcal{D}\lambda^2}{\lambda^2} = \mathcal{D}_1\nu^4, \quad \dfrac{\mathcal{B}\mu' + \mathcal{D}\mu + \mathcal{E}}{\lambda} = \mathcal{E}_1\nu^4, \\ \dfrac{\mathcal{A}\mu'^2 + 2\mathcal{B}\mu\mu' + 2\mathcal{C}\mu' + \mathcal{D}\mu^2 + 2\mathcal{E}\mu + \mathcal{F}}{\lambda^2} = \mathcal{F}_1\nu_4. \end{array}\right.$$

La quatrième équation donne

$$(40)\quad \nu = \left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons la constante arbitraire $\mathcal{A}_1$ de même signe que $\mathcal{A}$ pour que ν soit réel.

La sixième équation définit μ par

$$(41)\quad \mathcal{A}\mu' + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C} = 0.$$

Enfin, la troisième équation donne

$$(42) \qquad \lambda = \frac{\mathfrak{A}_1}{F} \, \frac{\mu'' + c\mu' + d\mu + f}{\mathfrak{A}}.$$

La substitution ainsi obtenue est bien celle obtenue avec les invariants.

Les autres équations non encore utilisées donnent les six conditions nécessaires et suffisantes de réduction et l'on montrerait qu'elles sont équivalentes à celles déjà trouvées. On étudierait aussi facilement, par cette voie, la réductibilité des cas particuliers ainsi que celle de l'équation sans terme en y''^2.

CHAPITRE VII.

SUR LA RÉDUCTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES ET HOMOGÈNES AUX ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Une équation linéaire et homogène à coefficients variables

$$(1) \qquad f(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

est transformée en équation de même forme par la substitution

$$(2) \qquad y = \lambda(x) z, \qquad dt = u(x)\,dx.$$

Les invariants de (1) relatifs à cette substitution ont été étudiés par Halphen [b] qui a exprimé, à l'aide des invariants, les conditions nécessaires et suffisantes de la réduction de (1) à une équation à coefficients constants. M. Tadya Peyovitch [b] a étudié les invariants relatifs au cas d'une substitution (2) où l'on a $\lambda = 1$ (substitution de variable seule) et en a déduit les conditions nécessaires et suffisantes de la réduction de (1) à une équation à coefficients constants.

Je me propose d'étudier directement les cas où l'équation (1) est réductible par une substitution (2), à une équation à coefficients constants. Pour abréger, nous dirons que dans ce cas, l'équation (1) est réductible. Pour qu'une équation (1) soit réductible, il faut et il suffit qu'elle vérifie une identité que nous allons établir en faisant la remarque suivante :

Remarque. — Soit l'équation

$$(3) \qquad \varphi(z) \equiv \frac{d^n z}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dz}{dt} + A_n z = 0,$$

où les A_i sont constants.

1° Il est évident que, puisque $\varphi(z) = 0$ est à coefficients constants, on a

$$(4) \qquad \varphi\left(\frac{dz}{dt}\right) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(z).$$

2° Cette identité caractérise les équations linéaires et homogènes à coefficients constants. En effet, si une équation de la forme (3) dans laquelle les A_i sont supposés fonctions de x satisfait à l'identité (4), nous aurons, en désignant par A'_i la dérivée du coefficient A_i par rapport à t

$$\sum A'_i \frac{d^{n-i} z}{dt^{n-i}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Cette dernière égalité ayant lieu pour n'importe quelle fonction z, on en tire

$$A'_i = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad A_i = \text{const.}$$

22. Identité remarquable. — Si la substitution (2) transforme l'équation (1) en une équation (3) à coefficients constants $\varphi(z) = 0$, on a

$$\varphi(z) \equiv \frac{1}{\lambda u^n} f(\lambda z), \qquad \varphi\left(\frac{dz}{dt}\right) \equiv \frac{1}{\lambda u^n} f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right). \tag{5}$$

Or, d'après la remarque faite précédemment, on a l'identité (4).

Remplaçons, dans (4), $\varphi(z)$ et $\varphi\left(\frac{dz}{dt}\right)$ par les expressions (5), il vient

$$\frac{1}{\lambda u^n} f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\lambda u^n} f(\lambda z)\right]. \tag{6}$$

D'après les formules (2), on a

$$dt = u\,dx, \qquad \lambda z = y, \qquad \lambda \frac{dz}{dt} = \frac{y'}{u} - \frac{\lambda' y}{\lambda u}. \tag{7}$$

En éliminant z, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ et dt entre (6) et (7), on a

$$\frac{1}{\lambda u^{n-1}} f\left(\frac{1}{u} y' - \frac{\lambda'}{\lambda u} y\right) \equiv \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\lambda u^n} f(y)\right], \tag{8}$$

identité qui est de la forme

$$\boxed{G f(\mu y' + \nu y) \equiv \frac{d}{dx}[g f(y)].} \tag{9}$$

Lorsqu'une équation linéaire et homogène est réductible à une équation à coefficients constants par un changement simultané (2) *de variable et de fonction, il existe quatre fonctions* G; μ; ν; g *telles que l'identité* (9) *soit satisfaite.*

Réciproquement, si une équation linéaire et homogène (1) est telle que l'identité (9) soit satisfaite, je dis qu'elle est réductible à une équation (3) par un changement (2).

1° Si les fonctions G; μ; ν; g ont les formes particulières indiquées dans l'identité (8), l'équation $f(y) = 0$ sera réduite à une équation à coefficients constants par la transformation (2). En effet, si l'on remplace dans (8), y', y, dx par leurs expressions tirées de (7), on retrouve (6). En remplaçant dans (6) $f(\lambda z$ et $f\left(\lambda \frac{dz}{dt}\right)$ par les expressions (5), on obtient l'identité (4) qui caractérise une équation à coefficients constants : $\varphi(z) = 0$.

2° Il suffit donc de montrer que, s'il existe des fonctions G, g, μ et ν telles que l'identité (9) soit vérifiée, ces fonctions donnent à (9) la forme (8). Identifions dans (9), que l'on peut écrire

$$Gf(\mu y') + Gf\nu y \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)],$$

les termes en $y^{(n+1)}$ et $y^{(n)}$. On obtient

$$\mu G = g, \tag{10}$$

$$G(n\mu' + a_1\mu + \nu) = g' + ga_1. \tag{11}$$

En éliminant G, on a

$$(n\mu' + \nu)g = \mu g', \tag{12}$$

qui détermine g si μ et ν sont connus. Quelles que soient ces fonctions à déterminer μ et ν, on peut toujours les représenter par les formules

$$\mu = \frac{1}{u}, \qquad \nu = -\frac{\lambda'}{\lambda u}, \tag{13}$$

u et λ étant deux fonctions inconnues auxiliaires à déterminer.

L'équation (12) devient

$$\frac{g'}{g} + n\frac{u'}{u} + \frac{\lambda'}{\lambda} = 0, \qquad \text{d'où} \quad g\lambda u^n = k \qquad (k = \text{const.}).$$

On aura donc

$$g = \frac{k}{\lambda u^n}, \qquad G = \frac{k}{\lambda u^{n-1}}. \tag{14}$$

Si l'on remplace dans (9), g, G, μ et ν par ces expressions (13) et (14) en supprimant k, qui se met en facteur dans les deux nombres on obtient l'identité (8).

Les fonctions λ et u qui figurent dans (13) sont, comme on l'a vu dans 1°, les fonctions qui définissent la substitution (2) qui réduit (1) à une équation à coefficients constants.

Pour qu'une équation (1) *soit réductible à une équation à coefficients constants par une transformation* (2), *il faut et il suffit qu'il existe quatre fonctions* G, g, μ, ν *telles que l'identité* (9) *soit satisfaite.*

23. *Remarque.* — L'identification des deux membres de (9) donne $n+2$ équations. Deux d'entre elles nous ont donné G et g. Il reste n équations pour déterminer λ, u, ou si l'on préfère μ et ν. Il y a donc $n-2$ conditions, en général distinctes, pour que l'équation (1) soit réductible.

On se servira des n conditions que doivent vérifier μ et ν pour déterminer le plus simplement possible ces fonctions. Si l'on a $n > 2$, ces fonctions se détermineront en général sans quadrature, puisqu'il y a plus d'équations que de fonctions inconnues.

Écrivons ces n équations obtenues par l'identification dans (9) des termes en $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, $\ldots$, y', y. On a

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&G\left[\frac{n(n-1)}{2}\mu''+(n-1)a_1\mu'+a_2\mu+n\nu'+a_1\nu\right]=ga_2+(ga_1)',\\
&G\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mu'''+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_1\mu''+(n-2)a_2\mu'+a_3\mu\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}\nu''+(n-1)a_1\nu'+a_2\nu\right]\\
&\quad=ga_3+(ga_2)',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&G[\mu^{(n)}+a_1\mu^{(n-1)}+a_2\mu^{(n-2)}+\ldots+a_n\mu+n\nu^{(n-1)}+(n-1)a_1\nu^{(n-2)}\\
&\qquad\qquad+(n-2)a_2\nu^{(n-3)}+\ldots+a_{n-1}\nu]\\
&\quad=ga_n+(ga_{n-1})',\\
&G[\nu^{(n)}+a_1\nu^{(n-1)}+a_2\nu^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\nu'+a_n\nu]=(ga_n)'.
\end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que, si l'on tient compte des résultats (10) et (12), la première équation (15) peut s'écrire

$$\frac{n(n-1)}{2}\mu''-(a_1\mu'+a_1'\mu)+n\nu'=0.$$

Elle donne la relation suivante entre μ et ν

$$(16)\qquad \frac{n(n-1)}{2}\mu'-a_1\mu+n\nu=K \qquad (\text{K const.}).$$

L'élimination de ν entre (16) et la deuxième équation (15), conduit, en posant

(17) $$p(x) \equiv a_2 - \frac{n-1}{2} a'_1 - \frac{n-1}{2n} a_1^2,$$

à l'équation

(18) $$\frac{n(n^2-1)}{12} \mu''' + 2p(x)\mu' + p'(x)\mu = 0.$$

Cela va nous permettre de retrouver très rapidement, et par une autre voie, un résultat déjà obtenu par Halphen ([*b*], p. 143) relativement à l'équation

(19) $$y^{(n)} + a_n y = 0,$$

où a_n désigne une fonction quelconque de x.

Demandons-nous quelle doit être la forme de a_n pour que (19) soit réductible à une équation à coefficients constants par une substitution (2). D'après (18), on a

(20) $$\mu(x) = C_0 x_2 + C_1 x + C_2 \qquad (C_0, C_1, C_2 \text{ constantes}).$$

On a : $\mu^{(n)}(x) = 0$ et, d'après (16), on a : $\nu^{(n-1)}(x) = 0$. Toutes les équations (15), à partir de la troisième jusqu'à l'avant-dernière, inclusivement, constituent des conditions satisfaites d'elles-mêmes puisque d'après (19) on a : $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$. La dernière équation (15) nous donne, dans ce cas particulier d'équation (19) la condition

$$\mu a'n + n a_n \mu' = 0.$$

Elle donne la forme de a_n. Ainsi, l'équation (1)

$$y^{(n)} + \frac{K}{(C_0 x_2 + C_1 x + C_2)^n} y = 0$$

est réductible à une équation à coefficients constants. La substitution donnant la réduction est

$$dt = \frac{1}{C_0 x^2 + C_1 x + C_2} dx, \qquad y = (C_0 x^2 + C_1 x + C_2)^{\frac{n-1}{2}} z.$$

24 Intégrale générale de $f(\mu y' + \nu y) = 0$ lorsque $f(y) = 0$ est réductible. — 1° Si l'équation (1) est réductible, l'identité (9) montre

(1) Pour $n = 2$, M. Besge a énoncé un résultat analogue (Voir *Journal de Liouville*, 1re série, t. IX). Consulter également : Halphen : *Comptes rendus*, t. XCII.

que toute solution de (1) est solution de

$$(21) \qquad f(\mu y' + \nu y) = 0.$$

Réciproquement, si toutes les solutions de (1) sont solutions de (21) l'équation (1) est réductible.

Les solutions communes à (1) et à (21) vérifient aussi l'équation

$$Gf(\mu y' + \nu y) - \frac{d}{dx}[gf(y)] \equiv H(y) = 0,$$

quelles que soient les fonctions $G(x)$ et $g(x)$. On a vu [n° **22**, 2°] que, quels que soient μ et ν, on peut déterminer deux fonctions G et g telle que $H(y)$ ne contienne ni terme en $y^{(n+1)}$, ni terme en $y^{(n)}$. L'équation $H(y) = 0$, d'ordre $n - 1$ au plus, étant vérifiée par toutes les solutions de (1) d'ordre n, est identiquement nul, on a l'identité (9); l'équation (1) est donc réductible.

THÉORÈME. — *Pour que l'équation* (1) *soit réductible, il faut et il suffit qu'il existe des fonctions* $\mu(x)$ *et* $\nu(x)$ *telles que toute solution de* (1) *soit solution de* (21).

2° *Intégration de* (21) *lorsque* (1) *est réductible.* — Nous supposons que, dans (21), μ et ν soient des fonctions telles que l'on ait l'identité (9). On vient de voir que, si la substitution (2) transforme (1) en une équation à coefficients constants (3), toute solution de (1) est solution de (21), où μ et ν ont les expressions (13). Toute solution de (1) est donc solution de l'équation (21) qui, en remplaçant μ et ν par les expressions (13) s'écrit

$$(22) \qquad f\left(\frac{1}{u}y' - \frac{\lambda'}{\lambda u}y\right) = 0.$$

L'équation (1) étant réductible à l'équation (3) à coefficients constants par la substitution (2), nous savons intégrer l'équation (1). Chacune des solutions $z = z_i(t)$ d'un système de n solutions distinctes de l'équation à cofficients constants $\varphi(z) < 0$, donnera, pour (1), une solution $y = \lambda(x)\, z_i(t)$, en remplaçant t par son expression en fonction de x. Pour que l'équation (22) soit intégrée, il suffit de trouver une solution de (22). Il est évident que l'équation (22) admet la solution $y = \lambda$. La solution $y = \lambda z$ montre que $y = \lambda$ n'est solution de (1) que si $\varphi(z) = 0$ admet $z = 1$ pour solution. Par conséquent, dans le cas général, où dans $\varphi(z)$, on a $A_n \neq 0$, la solution de (22) est

$$(23) \qquad y = C\lambda(x) + \sum C_i \lambda(x)\, z_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que, dans $\varphi(z)$ on ait

$$A_j = 0 \qquad \text{pour } j = n,\ n-1,\ \ldots,\ n-q+1,$$

le coefficient A_{n-q} n'étant pas nul. L'équation $\varphi(z) = 0$ admet les solutions $1, t, t^2, \ldots, t^{q-1}$, mais n'admet pas la solution t^q. On voit, en remplaçant t en fonction de x, que l'équation (1) admet les solutions

$$\lambda_t,\quad \lambda t,\quad \lambda t^2,\quad \ldots,\quad \lambda t^{q-1},$$

mais n'admet pas la solution $y = \lambda t^q$.

Il est facile de voir que $y = \lambda t^q$ est solution de (22).

En effet, à la solution $y = \lambda t^{q-1}$ de $f(y) = 0$, correspond une infinité de solutions de (22) définies par

$$\frac{y'}{u} - \frac{\lambda' y}{\lambda u} = q\lambda t^{q-1}.$$

En prenant de nouveau t pour variable, cette équation s'écrit

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}\cdot\frac{y}{\lambda} = q\lambda t^{q-1}.$$

La solution générale de cette équation est

$$y = K\lambda + \lambda t^q.$$

On a donc, en particulier, la solution $y = \lambda t^q$. En remplaçant t en fonction de x, la solution générale de (22) sera donnée par

$$y = \lambda(x)\left[\sum K_j t^j + \sum C_i z_i(t)\right] \tag{24}$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, q;\ i = 1, 2, \ldots, n-q).$$

Dans le cas où l'équation (1) est réductible à une équation $\varphi(z) = 0$ à coefficients constants, en ne changeant que la fonction, on a $t = x$.

L'identité (9) prend la forme

$$\boxed{Gf(\mu y' + ky) \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)],}$$

avec $k = \text{const.}$

La solution générale de (22) est

$$y = \lambda\left[\sum K_j x^j + \sum C_i z_i(x)\right]$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, q;\ i = 1, 2, \ldots, n-q).$$

Dans le cas où l'équation (1) est réductible à une équation $\varphi(z) = 0$

à coefficients constants, par un changement de variable seule : $dt = u(x)\,dx$, on a $\lambda = 1$, l'identité (9) prend la forme

$$\boxed{Gf\left(\frac{1}{u}y'\right) \equiv \frac{d}{dx}[gf(y)].}$$

La solution générale de $f\left(\frac{1}{u}y'\right) = 0$ s'obtient, en faisant dans (24) : $\lambda = 1$ et $z_i(t) = y_i(x)$, en désignant par $y_i(x)$ les solutions de (1) qui ne sont ni une constante, ni une puissance de $t(x)$.

Remarque : Dans le cas général où le coefficient a_n dans (1) n'est pas nul, l'équation (1) n'admet pas la solution $y = 1$. L'équation à coefficients constants $\varphi(y) = 0$ n'admet pas non plus la solution $y = 0$. On a : $A_n \neq 0$. La solution générale de $f\left(\frac{y'}{u}\right) = 0$ est

$$y = C + \sum C_i y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$y = \Sigma C_i y_i$ est la solution générale de l'équation (1). Il en résulte la propriété suivante :

Si une équation (1) *est réductible à une équation à coefficients constants par un changement de la variable $dt = u(x)\,dx$ et si le coefficient a_n n'est pas identiquement nul dans* (1), *les courbes intégrales de $f\left(\frac{y'}{u}\right) = 0$ se déduisent des courbes intégrales de* (1) *par une translation parallèle à Oy* [1].

Réciproquement, considérons une équation linéaire et homogène $f(y) = 0$ dans laquelle a_n n'est pas nul et supposons que toute courbe intégrale de l'équation $f\left(\frac{y'}{u}\right) = 0$ s'obtienne en imprimant à une courbe intégrale de $f(y) = 0$ une translation parallèle à Oy. Les solutions de l'équation $f\left(\frac{y'}{u}\right) = 0$ satisfont à l'équation

$$f(y + C) = 0 \qquad \text{c'est-à-dire à} \quad f(y)a_n^{-1} = 0 \qquad (C = \text{const.}),$$

et par suite à l'équation linéaire et homogène d'ordre $n + 1$,

$$\frac{d}{dx}[f(y)a_n^{-1}] = 0.$$

[1] *Voir* aussi Fayet [*b*]; Rey Pastor [*a*].

On a donc l'identité

$$G f\left(\frac{y'}{u}\right) \equiv \frac{d}{dx}[g f(y)],$$

et l'équation $f(y)=0$ est réductible à une équation à coefficients constants par un changement de variable seule $dt = u(x)\,dx$.

25. Exemples. — 1° Nous avons vu au n° 23 que, pour qu'une équation (1) d'ordre n soit réductible, ses coefficients doivent vérifier, en général, $n-2$ conditions distinctes. L'équation linéaire et homogène du deuxième ordre,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

est donc, théoriquement, toujours réductible à une équation à coefficients constants. Mais, si l'on écrit les quatre équations (15) relatives à $n=2$, on obtient

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} G\mu &= g,\\ G[2\mu' + a_1\mu + \nu] &= g a_1 + g',\\ G[\mu'' + a_1\mu' + a_2\mu + 2\nu' + a_1\nu] &= g a_2 + (g a_1)',\\ G[\nu'' + a_1\nu' + a_2\nu] &= (g a_2)'. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations lient, comme on l'a vu au n° 22 [formules (10) et (11)] G et g aux fonctions μ et ν.

Les deux dernières équations s'écrivent, après élimination de G et g,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu' - a_1\mu + 2\nu = K\\ &\nu'' + a_1\nu' - 2a_2\mu' - a_2'\mu = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\text{K constante}).$$

On retrouverait aussi ces équations à l'aide de (16) et (18). L'examen des équations (26) montre que, pratiquement, on ne pourra pas, en général, exprimer les fonctions μ et ν. Voici quelques exemples d'équations du second ordre où cette détermination est possible.

Soit l'équation

$$(27)\qquad f(y) \equiv y'' + \frac{\varphi'}{\varphi}y' - \frac{1}{\varphi^2}y = 0,$$

où φ désigne une fonction quelconque de x. On a ici

$$a_1 = \frac{\varphi'}{\varphi};\qquad a_2 = -\frac{1}{\varphi^2};\qquad a_2' = \frac{2\varphi'}{\varphi^3}.$$

Les équations (26) deviennent

$$(28)\qquad \begin{cases} \mu' - \dfrac{\varphi'}{\varphi}\mu + 2\nu = K, \\ \nu'' + \dfrac{\varphi'}{\varphi}\nu' + 2\dfrac{1}{\varphi^2}\mu' - 2\dfrac{\varphi'}{\varphi^3}\mu = 0. \end{cases}$$

On aperçoit une solution de ce système. C'est $\mu = \varphi$; $\nu = c_0$ [constante]. On en tire

$$(29)\qquad u = \frac{1}{\varphi}; \qquad \lambda = c_1 e^{c_0\int\frac{dx}{\varphi}}.$$

On vérifiera aisément que la transformation définie par

$$y = c_1 e^{c_0\int\frac{dx}{\varphi}} z, \qquad dt = \frac{1}{\varphi}dx,$$

ramène (27) à l'équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2c_0\frac{dz}{dt} + c_0^2 z = 0$$

et que la substitution de variable seule [$c_0 = 0$; $c_1 = 1$]

$$dt = \frac{1}{\varphi}dx$$

ramène l'équation (27) à l'équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0.$$

L'équation $f\left(\frac{y'}{u}\right) = 0$ déduite de (27) s'écrit

$$(30)\qquad y''' + 3\frac{\varphi'}{\varphi}y'' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^2}\right)y' = 0.$$

La solution générale de (27) peut s'écrire

$$y = k_0 e^{\int\frac{dx}{\varphi}} + k_1 e^{-\int\frac{dx}{\varphi}} \qquad [k_0,\ k_1 \text{ constantes}].$$

Celle de l'équation (30) peut s'écrire

$$y = k_2 + k'_0 e^{\int\frac{dx}{\varphi}} + k'_1 e^{-\int\frac{dx}{\varphi}} \qquad [k'_0,\ k'_1,\ k_2 \text{ constantes}].$$

On vérifie ainsi que les courbes intégrales de (30) se déduisent des courbes intégrales de (27) au moyen d'une translation parallèle à Oy.

Soit encore l'équation

(31) $$y'' + \frac{\varphi' + 2k}{\varphi} y' + \frac{k^2 - 1}{\varphi^2} y = 0,$$

où k désigne une constante, et φ une fonction quelconque de x. Les équations (26) sont satisfaites pour $\mu = \varphi$; $c = c_0$ [constante]. On obtient des résultats analogues à ceux de l'exemple précédent.

Soit l'équation

(32) $$y'' + 2\varphi y' + (\varphi' + \varphi^2 - 1) y = 0,$$

dans laquelle φ désigne une fonction quelconque de x. Les équations (26) s'écrivent

$$\mu' - 2\varphi\mu + 2\nu = k,$$
$$\nu'' + 2\varphi\nu' - 2(\varphi' + \varphi^2 - 1)\mu' - (\varphi'' + 2\varphi\varphi')\mu = 0.$$

On a la solution

$$\mu = c_0; \qquad \nu = c_0\varphi + c_1 \qquad (c_0 \text{ et } c_1 \text{ constantes}).$$

La substitution de fonction seule

$$y = c_2 e^{-\int(\varphi + c)dx} z,$$

transforme l'équation (32) en une équation à coefficients constants

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - z = 0$$

pour $c_2 = 1$; $c = 0$. L'équation $f(y + \varphi y') = 0$ déduite de (32) s'écrit

(33) $$y''' + 3\varphi y'' + (3\varphi' + 3\varphi^2 - 1) y' + (\varphi'' + 3\varphi\varphi' + \varphi^3 - \varphi) y = 0.$$

La solution générale de (32) peut s'écrire

$$y = e^{-\int \varphi dx} [h_0 e^x + h_1 e^{-x}] \qquad (h_0, h_1 \text{ constantes}).$$

La solution générale de (33) peut s'écrire

$$y = e^{-\int \varphi dx} [h'_0 e^x + h'_1 e^{-x} + h_2] \qquad (h'_0, h'_1, h_2 \text{ constantes}).$$

On vérifie ainsi que toutes les solutions de l'équation (32) sont en même temps solutions de l'équation (33).

Soit encore l'équation

$$(34) \qquad y'' + \frac{\alpha' + 2\beta}{\alpha} y' + \frac{\alpha\beta' + \beta^2 - 1}{\alpha^2} y = 0,$$

dans laquelle α et β désignent des fonctions quelconques de x. Les équations (26) s'écrivent

$$\mu' - \frac{\alpha' + 2\beta}{\alpha}\mu + 2\nu = k,$$

$$\gamma'' + \frac{\alpha' + 2\beta}{\alpha}\gamma' - 2\frac{\alpha\beta' + \beta^2 - 1}{\alpha^2}\mu' - \frac{\alpha^2\beta'' - \alpha\alpha'\beta' + 2\alpha\beta\beta' - 2\alpha'\beta^2 + 2\alpha'}{\alpha^3}\mu = 0.$$

On a la solution

$$\mu = \alpha, \qquad \nu = \beta + C_0 \qquad (C_0 \text{ constante}).$$

On fera la substitution

$$y = e^{-\int \frac{\beta}{\alpha} dx} z, \qquad dt = \frac{1}{\alpha} dx.$$

L'équation (34) sera transformée en une équation à coefficients constants. On pourra aussi vérifier que des solutions de l'équation (34) sont des solutions de l'équation obtenue en remplaçant dans (34) y par $\alpha y + \beta y'$.

2° Considérons l'équation d'Euler

$$(35) \quad y^{(n)} + A_1 x^{-1} y^{(n-1)} + A_2 x^{-2} y^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} x^{-(n-1)} y' + A_n x^{-n} y = 0,$$

où les A_i sont des constantes.

Il est facile de voir qu'en prenant

$$\mu = x, \qquad \nu = 0,$$

les équations (16) et (18) sont satisfaites et que les $n-2$ conditions données par les équations (15) sont vérifiées. On retrouve ainsi le résultat bien connu : la transformation $x = e^t$, de variable seule, transforme l'équation d'Euler en une équation à coefficients constants.

La solution générale de l'équation (35) est, comme on sait

$$(36) \qquad y = x^{r_1} P_{\mu_1 - 1}(\operatorname{Log} x) + \ldots + x^{r_k} P_{\mu_k - 1}(\operatorname{Log} x),$$

$r_1, r_2, \ldots, r_k$ désignant les k racines distinctes de l'équation caractéristique, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ étant les ordres de multiplicité de ces racines; et $P_{\mu_i - 1}(\operatorname{Log} x)$ étant un polynome en $\operatorname{Log} x$ de degré $\mu_i - 1$ dont les coefficients sont arbitraires.

D'après ce que nous avons démontré au numéro **24**, la solution générale de l'équation

$$y^{(n+1)} + (n + A_1)\,y^{(n)} + [(n-1)A_1 + A_2]\,x^{-1}\,y^{(n-1)} + \dots \\ + [A_{n-1} + A_n]\,x^{-(n-1)}\,y' = 0,$$

que l'on déduit de (35) en substituant xy' à la place de y sera

$$y = C + x^{r_1}P_{\mu_1-1}(\operatorname{Log}x) + \ldots + x^{r_k}P_{\mu_k-1}(\operatorname{Log}x).$$

Vu et approuvé :
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
LONGCHAMBON.

Vu et permis d'imprimer :
Lyon, le 18 janvier 1937.
LE RECTEUR,
PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ,
A. LIRONDELLE.