SHIH-HSUN KAO

Étude des fonctions analytiques bornées à l'intérieur d'un domaine donné

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1936
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1936__182__1_0>

N° d'Ordre

THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE LYON

pour obtenir

Le titre de Docteur de l'Université de Lyon
(Mathématiques)

par

SHIH-HSUN KAO

Research Fellow of China Foundation for the Promotion of Education and Culture.

Première Thèse

ÉTUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES A L'INTÉRIEUR D'UN DOMAINE DONNÉ

Deuxième Thèse

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : SUR LA THÉORIE DE LA CORRÉLATION.

Soutenues le 7 Juillet 1936,
devant la Commission d'examen :

MM. J. SIRE, *Président.*
H. LONGCHAMBON } *Examinateurs.*
H. EYRAUD }

LYON
Imprimerie P. FERRÉOL
13, Rue de la Bombarde

1936

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. LONGCHAMBON, ✻, ♛, ❧.

Assesseur

M. VANEY, ✻, ❧ I., ✠.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, C. ✻, ❧ I.
RIGOLLOT, ✻, ❧ I.
COUTURIER, ✻, ❧ I., ✠.

Professeurs

MM. DULAC, ✻, ❧ I., *Calcul différentiel et intégral.*
BEAUVERIE, ✻, ❧ I., C. ✠, *Botanique.*
MEUNIER, O. ✻, ❧ I., *Chimie industrielle.*
SIRE, ❧ I., ✠, *Mécanique rationnelle et appliquée.*
VANEY, ✻, ❧ I., ✠, *Zoologie.*
CARDOT, ❧ I., *Physiologie générale.*
ROMAN, ✻, ❧ I., *Géologie.*
LOCQUIN, ✻, ❧ I., *Chimie générale.*
LONGCHAMBON, ✻, ♛, ❧, *Minéralogie.*
DOUIN, ✻, ♛, ❧ I., *Botanique.*
DÉJARDIN, ❧ I., *Physique générale.*
SOLLAUD, ❧ I., *Zoologie.*
THIBAUD, *Physique expérimentale.*
LEMARCHANDS, ❧ I., *Chimie appliquée.*
EYRAUD, ❧ I., *Mathématiques.*
FROMAGEOT, ❧, *Chimie biologique.*
AUMÉRAS, ❧, *Chimie physique.*

Maîtres de conférences adjoints

MM. BONNET, ✻, ❧ I., *Zoologie générale et agricole.*
DONCIEUX, ❧ I., *S. P. C. N.*

Chargés de cours complémentaires

MM. DŒUVRE, *Chimie.*
M^lle^ BACHRACH, ❧ I , *Physiologie.*
MM. DUFAY, *Astronomie et Physique supérieure.*
VIRET, *Etude des roches.*
RANSON, *Géométrie supérieure.*
MAYET, ✻, ❧ I., ✠, *Anthropologie.*
PELOSSE, ❧ I., *Sériciculture.*
DARESTE DE LA CHAVANNE, ❧ I., *Géographie physique.*
LEYEWETZ, *Matières colorantes artificielles.*
THOVERT, *Physique.*
PIERRON, *Chimie.*
MERMET, *Mécanique des fluides.*

Secrétaire

M. ROUX.

A Monsieur le Professeur A. DENJOY

A Monsieur le Professeur J. SIRE

A Monsieur le Professeur H. EYRAUD

A MA FEMME

ETUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES BORNEES A L'INTERIEUR D'UN DOMAINE DONNE.

PREFACE.

Etant données deux suites de nombres a_n et b_n de modules r_n et r'_n inférieurs à I, considérons les problèmes suivants :

I. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $f(z)$ holomorphe et bonée pour $|a_n| < I$, telle que $f(a_n) = b_n$.

2. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(z)$ soit uniquement déterminée.

3. Dans le cas d'indétermination, trouver l'expression générale des solutions f.

4. Quand elle peut représenter par l'intégration de Cauchy ?

Ces problèmes ont été étudiés par MM. Carathéodory, I. Schur, Pick, Walsh, Nevanlinna, Denjoy. Le présent travail est quelques extensions des résultats de M. Denjoy(I).

Nous définissons d'après MM. R.Nevanlinna, A.Denjoy une fonction $f(z)$ par l'équation.

$$\frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = \frac{r-z\ e^{i\alpha}}{I-r\ z\ e^{i\alpha}} \times \frac{\rho-f_1(z)e^{i\gamma}}{I-\rho f_1(z)e^{i\gamma}}$$

et étudions quelques propriétés de cette fonction, nous donnons ensuite une démonstration du théorème de M.A. Denjoy, sur la convergence des suites normales de fonctions analytiques. C'est l'objet de la première partie de ce travail. Dans la deuxième partie, nous démontrons que s'il existe une suite z_n tendant vers un nombre, $e^{-i\alpha}$, de façon que $f(z_n)$ tend vers $e^{-i\beta}$ et $\dfrac{I-|z_n|}{I-|f(z_n)|}$ vers λ positif fini, $e^{i(\beta-\alpha)} f(z)$ admet au point $e^{-i\alpha}$ la dérivée angulaire positi-

---

(I) Denjoy (A). Sur une classe de fonctions analytiques (C.R. Ac.Sc. t. 188,1929,1930).

ve $\frac{I}{\lambda}$. Considérons les points $\zeta = e^{-i\alpha}$ où $\varphi(\alpha) = e^{i(\beta-\alpha)} f'(e^{-i\alpha}) \leqslant I$, $\varphi(\alpha) = \frac{I}{\lambda}$ dérivée rectifiée, avec $f(e^{-i\alpha}) = e^{-i\beta} = \eta$,dans la troisième partie, nous trouvons que tous les points ζ sont situés sur une même demi-circonférence de C. Dans la quatrième partie, nous avons développé en fraction continue et en séries de puissances de notre fonction. Enfin, nous avons établi la propriété remarquable de l'ensemble des coefficients c_n du développement asymptotique d'une fonction de E au voisinage d'un point $e^{i\alpha}$ du cercle $|z| = I$.

PREMIERE PARTIE.
PROBLEME D'INTERPOLATION.

Considérons la classe E des fonctions f analytiques en z, holomorphes, et $|f(z)| < I$ pour $|z| < I$, Supposant que ses valeurs sont connues en une suite de points a, a_1 , a_2, a_3 ,.....a_n ,.....

Soit $b_n = f(a_n)$ avec

$$a_n = r_n e^{-i\alpha_n} \qquad |b_n| < I, r_n < I$$

Posons:

$$(I) \qquad \frac{r'-f\, e^{i\beta}}{I-r'f\, e^{i\beta}} = \frac{r - z\, e^{i\alpha}}{I - r\, z\, e^{i\alpha}} \times \frac{\rho - f_1\, e^{i\gamma}}{I - \rho\, f_1\, e^{i\gamma}} ,$$

par hypothèse pour $z = r\, e^{-i\alpha}$ $f = r' e^{-i\beta}$ $(r < I, r' < I)$ donc si

$$\frac{r'- f\, e^{i\beta}}{I-r'f\, e^{i\beta}} = \frac{r - z\, e^{i\alpha}}{I-r\, z\, e^{i\alpha}} \times \lambda(z)$$

la fonction $\lambda(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle unité et de module inférieur à I sur ce domaine.

En effet Max. $|\lambda(z)|$ pour $|z| < I$ est la limite d'une suite croissante des nombres $|\lambda(z)|$. $|\lambda(z_1)|$. $|\lambda(z_2)|$ .... $|\lambda(z_n)|$ $|z_n|$ tendant vers I le module du premier membre a sa limite au plus égale à I, le module de facteur de $\lambda(z)$ tend vers I. Donc lim $|\lambda(z)| \leqslant I$.

$\lambda(z)$ est dans la classe.

Si $\lambda(z)$ est dans E et $\lambda(z) = \frac{\rho - f_1 e^{i\gamma}}{I - \rho\, f_1\, e^{i\gamma}}$ $(\rho < I)$

f_1 est une fonction de classe E en même temps que $\lambda(z)$.

2. On déduit de (I) que

(2) $$f(z) = \frac{P_1(z) + R_1^1(z)\ f_1(z)}{R_1(z) + P_1^1(z)\ f_1(z)}$$

avec

(3) $$\begin{cases} P_1(z) = (r'-r\rho)-(rr'-\rho)\ z\ e^{i\alpha} \\ Q_1(z) = \{(r-r'\rho)-(I-rr'\rho)z\ e^{i\alpha}\}\ e^{i\gamma} \\ R_1(z) = \{(I-rr'\rho)-(r-r'\rho)z\ e^{i\alpha}\}\ e^{i\beta} \\ S_1(z) = \{(rr'-\rho)-(r'-r\rho)z\ e^{i\alpha}\}e^{i(\gamma-\beta)} \end{cases}$$

Telle est la forme générale de fonction f de (E), telle que

$$f(r\ e^{-i\alpha}) = r'\ e^{-i\beta}$$

f_1 étant une fonction quelconque de (E).

Dans (I) changeons f en I/f, z en I/z, f_1 en I/f_1, i en -i,

On a

$$\frac{r'f\ e^{i\beta}-I}{f\ e^{i\beta}-r'} = \frac{r\ z\ e^{i\alpha}-I}{z\ e^{i\alpha}-r} \times \frac{\rho\ f_1 e^{i\gamma}-I}{f_1 e^{i\gamma}-\rho},$$

en remplaçant chaque facteur par son inverse, on retrouve la relation (I). Celle-ci n'est donc pas changée par la transformation.

Etudions tout d'abord un polynome :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots\dots\dots + a_m z^m.$$

On a par définition

$$\overline{P}(z) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 z + \overline{a}_2 z^2 + \dots\dots\dots\dots + \overline{a}_m z^m.$$

$\overline{P}(z)$ est le polynome P(z) où le signe de i est changé dans tous les coefficients.

$$\overline{P}(I/z) = I/z^m(\overline{a}_0 z^m + \overline{a}_1 z^{m-1} + \dots\dots + \overline{a}_m).$$

Posons

(4) $P^1(z) = z^m \overline{P}(I/z)$.

Réciproquement: en changeant i en - i dans les coefficients, et z en I/z, on a

$$\overline{P^1}(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots\dots + a_m.$$

$$\overline{P^1}(I/z) = I/z^m(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots + a_m z^m)$$

$$\overline{P^1}(I/z) = I/z^m P(z).$$

Donc

(5) $$P(z) = z^m \overline{P^1}(I/z) = \left[P^1(z)\right]^1.$$

Dans la formule (2) on change f en I/f, z en I/z, f_1 en I/f_1 et i en -i dans les coefficients des polynomes.

$$(6)\quad \frac{I}{f(z)} = \frac{\overline{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)+\overline{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{f_1}}{\overline{R}_1\left(\frac{1}{z}\right)+\overline{S}_1\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{f_1}} = \frac{z\,\overline{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)+z\,\overline{Q}_1\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{f_1}}{z\,\overline{R}_1\left(\frac{1}{z}\right)+z\,\overline{S}_1\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{f_1}}$$

avec la notation (4), on trouve les relations suivantes:

$$z\overline{P}_1(I/z) = P_1^1(z),\quad z\,\overline{Q}_1(I/z) = Q_1^1(z),$$
$$z\overline{R}_1(I/z) = R_1^1(z),\quad z\overline{S}_1(I/z) = S_1^1(z)\ .$$

la formule (6) devient :

$$(7)\qquad f(z) = \frac{S_1^1(z)+R_1^1(z)f_1}{Q_1^1(z)+P_1^1(z)f_1}$$

Or, la transformation faite ne doit pas changer la relation entre f, f_1, et z. Donc, de (7) et (2), on obtient :

$$\frac{S_1^1(z)+R_1^1(z)f_1}{Q_1^1(z)+P_1^1(z)f_1} = \frac{P_1(z)+Q_1(z)f_1}{R_1(z)+S_1(z)f_1}$$

(quel que soit f dans Ė).

$$(8)\qquad \frac{S_1^1(z)}{P_1(z)} = \frac{R_1^1(z)}{Q_1(z)} = \frac{Q_1^1(z)}{R_1(z)} = \frac{P_1^1(z)}{S_1(z)} = \lambda\ .$$

Les relations précédentes donnent :

a, $S_1^1(z) = \lambda P_1(z)$, b, $P_1^1(z) = \lambda S_1(z)$.

De a on trouve:

$$\overline{S}_1^1(I/z) = \overline{\lambda}\,\overline{P}_1(I/z)$$
$$z\overline{S}_1^1(I/z) = z\,\overline{\lambda}\overline{P}_1(I/z) = \overline{\lambda}\,\overline{P}_1^1(z),$$

d'après (5) $\quad z\,\overline{S}_1^1(I/z) = \left[S_1^1(z)\right]^1 = S_1(z)$,

par conséquent $\quad S_1(z) = \overline{\lambda}P_1^1(z)$

d'ailleurs $\quad P_1^1(z) = \lambda S_1(z)$ d'après (b), donc

$$\lambda\overline{\lambda} = I,\qquad \lambda = e^{i\theta}\ .$$

Encore de (8) on a

$$Q_1(z) = \frac{I}{\lambda}\ R_1^1(z) = e^{-i\theta}\ R_1^1(z)$$
$$S_1(z) = \frac{I}{\lambda}\ P_1^1(z) = e^{-i\theta}\ P_1^1(z).$$

La formule (2) peut s'écrire comme ci-dessous

$$f(z) = \frac{P_1(z) + e^{-i\theta} R_1^1(z) f_1(z)}{R_1(z) + e^{-i\theta} P_1^1(z) f_1(z)} .$$

Enfin, on peut englober $e^{-i\theta}$ dans $f_1(z)$; $e^{-i\theta} f_1(z)$ remplacé par $f_1(z)$, qui est encore une fonction quelconque de E.

$$(9) \qquad f(z) = \frac{P_1(z) + R_1^1(z) f_1(z)}{R_1(z) + P_1^1(z) f_1(z)}$$

Cela montre que la relation entre f, f_1, z, ne change pas par le changement en I/f, I/f_1, I/z et alors de i en -i.

Ou encore la relation ne change pas si f, f_1, z, sont remplacés par $I/\bar{f}$, $I/\bar{f}_1$, $I/\bar{z}$ sans changer le signe de i dans les coefficients.

3. Pour le problème de la détermination de f connaissant $f(a_n)$, $(a_n \neq 0)$, nous partons de la relation

$$(9') \qquad f(z) = \frac{P_1(z) + R_1^1(z) f_1(z)}{R_1(z) + P_1^1(z) f_1(z)}$$

Posons maintenant $z = a_1$ et désignons b_1' la valeur de $f_1(z)$ pour $z = a_1$, d'après $f(a_1) = b_1$ on aura:

$$b_1 = \frac{P_1(a_1) + R_1^1(a_1) b_1'}{R_1(a_1) + P_1^1(a_1) b_1'}$$

Remplaçant dans la relation (3) r, α, r', ρ .... par $r_1, \alpha_1, r_1', \beta_1, \rho_1$ ....mettant :

$$P_1^*(z) = (r_1' - r_1 \rho_1) - (r_1 r_1' - \rho_1) z\, e^{i\alpha_1}$$

$$R_1^*(z) = \{(I - r_1 r_1' \rho_1) - (r_1 - r_1' \rho_1) z\, e^{i\alpha_1}\} e^{i\beta_1}$$

$$R_1^{1*}(z) = \{(r_1 - r_1' \rho_1) - (I - r_1 r_1' \rho_1) z\, e^{i\alpha_1}\} e^{i\gamma_1}$$

$$P_1^{1*}(z) = \{(r_1 r_1' - \rho_1) - (r_1' - r_1 \rho_1) z\, e^{i\alpha_1}\} e^{i\gamma_1 + i\beta_1}$$

on peut écrire alors:

$$(IO) \qquad f_1(z) = \frac{P_1^*(z) + R_1^{1*}(z) f_2(z)}{R_2^*(z) + P_2^{1*}(z) f_2(z)}$$

En substituant dans (9') f(z) par la relation(IO), on trouve :

(II) $$f(z) = \frac{P_2(z) + R_2^1(z)f_2(z)}{R_2(z) + P_2^1(z)f_2(z)}$$

d'où

(I2) $$\begin{cases} P_2^1(z) = R_1^*(z)P_1(z) + P_1^*(z)R_1^1(z) \\ R_2^1(z) = R_1^*(z)R_1(z) + P_1^*(z)P_1^1(z) \\ R_2^1(z) = R_1^{1*}(z)R_1^1(z) + P_1^{1*}(z)P_1(z) \\ P_2^1(z) = R_1^{1*}(z)P_1^1(z) + P_1^{1*}(z)R_1(z) \end{cases}$$

Désignons par b_2' la valeur de $f_2(z)$ pour $z = a_2$, on a :

$$b_2 = \frac{P_2(a_2) + R_2^1(a_2)b_2'}{R_2(a_2) + P_2^1(a_2)b_2'}$$

De même :

$$f_2(z) = \frac{P_2^*(z) + R_2^{1*}(z)f_3(z)}{R_2^*(z) + P_2^{1*}(z)f_3(z)}$$

d'où:

$$\begin{cases} P_2^*(z) = (r_2'-r_2\rho_2)-(r_2 r_2' - \rho_2)z\, e^{i\alpha_2} \\ R_2^*(z) = \{(I-r_2 r_2' \rho_2)-(r_2 - r_2' \rho_2)z\, e^{i\alpha_2}\}e^{i\beta_2} \\ R_2^{1*}(z) = \{(r_2 - r_2' \rho_2)-(I-r_2 r_2' \rho_2)z\, e^{i\alpha_2}\}e^{i\gamma_2} \\ P_2^{1*}(z) = \{(r_2 - r_2' - \rho_2)-(r_2'-r_2 \rho_2)z\, e^{i\alpha_2}\}e^{i\gamma_2+i\beta_2} \end{cases}$$

(I3) $$f(z) = \frac{P_3(z) + R_3^1(z)f_3(z)}{R_3(z) + P_3^1(z)f_3(z)}$$

avec :

(I4) $$\begin{cases} P_3(z) = R_2^*(z)P_2(z) + P_2^*(z)\, R_2^1(z) \\ R_3(z) = R_2^*(z)R_2(z) + P_2^*(z)\, P_2^1(z) \\ R_3^1(z) = R_2^{1*}(z)R_2^1(z) + P_2^{1*}(z)P_2(z) \\ P_3^1(z) = R_2^{1*}(z)P_2^1(z) + P_2^{1*}(z)R_2(z) \end{cases}$$

En continuant ainsi, on peut écrire alors la formule générale comme la suivante :

(I5) $$f(z) = \frac{P_n(z) + R_n^1(z)f_n(z)}{R_n(z) + P_n^1(z)f_n(z)}$$

pour $z = r_1 e^{-i\alpha_1}$, $z = r_2 e^{-i\alpha_2}$, ... $z = r_n e^{-i\alpha_n}$ $f(z)$ prend des valeurs données indépendantes de $f_n(z)$ qui est une fonction quelconque de E, en multipliant au besoin $f_n(z)$ par un facteur$(-e^{-i\theta_n})$, avec :

$$(16)\quad \begin{cases} P_n(z) = R^*_{n-1}(z)P_{n-1}(z) + P^*_{n-1}(z)R^1_{n-1}(z) \\ R_n(z) = R^*_{n-1}(z)R_{n-1}(z) + P^*_{n-1}(z)P^1_{n-1}(z) \\ R^1_n(z) = z^n\,\bar{R}_n(\frac{1}{z}) \\ P^1_n(z) = z^n\,\bar{P}_n(\frac{1}{z}) \end{cases}$$

où $P_n(z)$, $R_n(z)$, $R^1_n(z)$, $P^1_n(z)$, sont des fonctions rationnelles d'ordre n.

On déduit de (15) que :

$$(17)\quad f(z) - \frac{P_n(z)}{R_n(z)} = -\frac{P_nP^1_n - R_nR^1_n}{R^2_n(z)}\left[\frac{f_n}{1+f_n\frac{P^1_n}{R_n}}\right]$$

choisissons ρ dans (9') de façon que $P^1_1(0) = 0$, d'où $\rho = r\,r'$ et généralement $\rho_n = r_n r'_n$. Alors $P^1_n(0) = 0$, $f(z)$ est une fonction de classe E. En faisant $f_n = 0$ (qui est dans E), on a $\left|\frac{P_n(z)}{R_n(z)}\right| < 1$

dans et sur C, $|P_n(z)| = |P^1_n(z)|$, $|R_n(z)| = |R^1_n(z)|$ sur la circonférence, parce que $1/z = \bar{z}$, si $|z| = 1$.

Donc:

$$\bar{P}(1/z) = \overline{P(z)} \qquad \text{si } |z| = 1$$
$$|z\,\bar{P}(1/z)| = |P(z)| \qquad \text{si } |z| = 1.$$

Enfin, la condition de détermination de f pour $z = 0$, est:

$$\lim \frac{P_n(o)P^1_n(o) - R_n(o)R^1_n(o)}{R^2_n(0)} = 0.$$

On met d'abord

$$G_n(z) = \frac{P_n(z)P^1_n(z) - R_n(z)R^1_n(z)}{R^2_n(z)}$$

on trouve facilement

$$(18)\quad P_n(z).P^1_n(z) - R_n(z).R^1_n(z) = \prod_1^n\left\{(1-r^2_m r'^2_m)(1-r'^2_m)(r_m - z\,e^{i\alpha_m})(1-r_m z\,e^{i\alpha_m})\right\}$$

$$(19)\quad G_n(0) = \frac{\prod_1^n\left\{(1-r^2_m r'^2_m)(1-r'^2_m)r_m\right\}}{R^2_n(0)}$$

Donc:

$$(20)\quad G_n(0) = \prod_1^n \frac{(1-r'^2_m)r_m}{1-r^2_m r'^2_m}$$

Etudions maintenant le produit infini $G_n(0)$, en mettant son terme général sous la forme $1-\mu_n$; nous avons

$$I - \mu_n = \frac{r_n\,(I-r'^2_n\;)}{I-r^2_n\; r'^2_n}$$

$$\mu_n = \frac{I + r_n r'^2_n}{I + r_n r'_n} \times \frac{I-r_n}{I-r_n r'_n}$$

Le produit $G_n\,(0)$ tend vers une limite positive ou tend vers zéro, suivant que la série $\Sigma\,\mu_n$ est convergente ou divergente, c'est la divergence de

$$\Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r_n\; r'_n}$$

par hypothèse $r_n < I$, on trouve $r_n r'_n < r'_n$, $I - r_n\; r'_n > I - r'_n$

(2I) $$\frac{I-r_n}{I-r_n\; r'_n} < \frac{I-r_n}{I-r'_n}$$

Donc, si $\Sigma\frac{I-r_n}{I-r_n r'_n}$ est divergente, $\Sigma\frac{I-r_n}{I-r'_n}$ est également divergente, d'après (2I)

Réciproquement, si $\Sigma\frac{I-r_n}{I-r'_n}$ diverge, je dis que $\Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r_n r'_n}$ diverge aussi. En effet,

$$\frac{I-r_n}{I-r_n r'_n} = \frac{I-r_n}{I-r'_n} \times \frac{I}{I + \frac{I-r_n}{I-r'_n}\; r'_n}$$

I. Si $w_n = \frac{I-r_n}{I-r'_n}$ ne tend pas vers 0, w_n a une infinité de valeur $> a > o$.

Donc :

$W_n = \frac{I-r_n}{I-r'_n r_n}$ a une infinité de valeur $> \frac{a}{I+ar'_n}$ $> \frac{a}{I+a}$ et $\Sigma\,W_n = \Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r_n\; r'_n}$ diverge.

2. Si $w_n = \frac{I-r_n}{I-r'_n}$ tend vers 0 .

W_n/w_n tend vers I .

Donc,

$$\Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r_n r'_n} \text{ diverge comme } \Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r'_n}$$

D'autre part, si $\Sigma\,\frac{I-r_n}{I-r'_n}$ diverge, il en résulte que $f(z) - \frac{P_n\,(z)}{R_n\,(z)}$ tend vers 0. En effet, $\frac{P_n(0)}{R_n(0)}$ tend vers une limite, donc f(0)tend vers une limite indépendante de $f_n(z)$. Car, pour $z=0$, on a $P_n^1(0)/R_n(0)=0$. d'où (lemme de SCHWARZ)

$$\left|\frac{P_n^1(z)}{R_n(z)}\right| < |z| = r$$

$$\left|\frac{f_n(z)}{I+f_n(z)\frac{P_n^1(z)}{R_n(z)}}\right| < \frac{I}{I-r}$$

Encore, d'après $|P_n(z)| = |P_n^1(z)|$, $|R_n(z)| = |R_n^1(z)|$, pour $|z|=I$, on trouve

$$\left|\frac{P_n(z)P_n^1(z) - R_n(z)R_n^1(z)}{R_n^2(z)}\right| < 2.$$

Donc, on conclut:

$$(22)\qquad \left|f(z) - \frac{P_n(z)}{R_n(z)}\right| < \frac{|P_n(z)P_n^1(z) - R_n(z)R_n^1(z)|}{|R_n(z)|^2\ (I-r)} < \frac{2}{I-r}$$

Si ceci tend vers 0, à l'origine, dans tout cercle, $|z|<r$, il en est de même de

$$\frac{P_n(z)P_n^1(z) - R_n(z)R_n^1(z)}{R_n^2(z)}$$

$$\frac{P_n(z)P_n^1(z) - R_n(z)R_n^1(z)}{R_n^2(z)}$$

a pour zéros $a_1, a_2, \ldots a_n$, et $I/\bar{a}$, $I/\bar{a}_2 \ldots\ldots\ I/\bar{a}_n$ tous non nuls, si pour $z=0$, cette suite converge vers zéro. Il en est donc de même en tout point intérieur à C.

En effet, deux cas peuvent se présenter ou bien les a_n ont un point limite à l'intérieur du cercle $|z|<I$, alors

$$\frac{P_n(z)P_n^1(z) - R_n(z)R_n^1(z)}{R_n^2(z)} \longrightarrow 0,$$

ou bien il n'y a qu'un nombre fini de a_n, dans tout le cercle $|z|<r<I$.

Si $|a_n|$ tend vers I quand n croît, il y a un m tel que $|a_{m+p}| \geqslant r$, quelque soit $p \geqslant I$, $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ au plus sont dans $|z|=r$. Si $n>m$

$$\psi_n(z) = \frac{G_n(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}$$

n'a aucun zéro dans $|z| \leqslant r$, les $G_n(z)$ forment une famille normale, il en est de même de $\psi_n(z)$, or $\psi_n(z)$ n'a pas de zéro pour $|z| \leqslant r$ $\log\psi_n(z)$ est holomorphe, $\log|\psi_n(z)|$ forme une famille normale pour $|z|<r$. Or $\log|\psi_n(0)|$ tend

vers $-\infty$ .Donc, $\log|\psi_n(z)|$ tend vers $-\infty$ pour $|z|<r$.

Cela quel que soit r. Donc $\psi_n(z)$ tend vers 0 quel que soit z, dans $|z|<I$.

Voici donc le célèbre théorème de M.A.Denjoy:

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite $b_n = f(a_n)$ détermine f est que la série $\Sigma \frac{I-r_n}{I-r'_n}$ soit divergente.

DEUXIEME PARTIE
DERIVEE ANGULAIRE

Soit f (z) une fonction de (E) telle que

$f(r\,e^{-i\alpha}) = r'e^{-i\beta}$ (r < I, r' < I).

Définissons une fonction $f_1(z)$ par l'équation

$$(I)\qquad \frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = \frac{r-z\,e^{i\alpha}}{I-r\,z\,e^{i\alpha}} \times \frac{rr'-f_1(z)e^{i\gamma}}{I-rr'f_1(z)e^{i\gamma}}$$

$f_1(z)$ donnée par cette équation est une fonction de la classe E,($|f_1(z)|<I$, si $|z|<I$) mais $f_1(z)$ de z, de r, r', β, γ. $f_1(z) = f_1(z, r, r', \beta, \gamma)$

I. Faisons r = 0 alors, si $f(0) = r'e^{-i\beta}$ (I) devient:

$$(2)\qquad \frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = z\,e^{i(\alpha+\gamma)}f_1(z) \quad (|f_1(z)|<I)$$

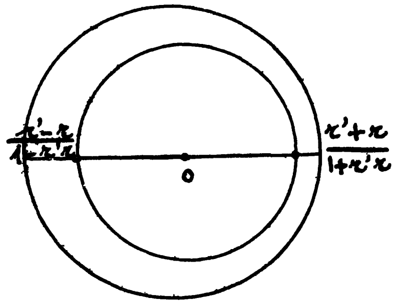
Si $z\,e^{i(\alpha+\gamma)}f_1(z) = u$, on a $|u|<r$ et

$$\frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = u$$

d'où

$$(3)\qquad f(z)e^{i\beta} = \frac{r'-u}{I-u\,r'} \qquad |u| \leqslant r.$$

Le lieu géométrique du point $\frac{r'-u}{I-u\,r'}$, si $|u|<r$, est un cercle ayant pour diamètre le segment des points correspondants à $u=-r$ et $u=+r$.



Lequel des deux nombres $\dfrac{r'-r}{1-r\,r'}$ et $\dfrac{r'+r}{1+r\,r'}$ est le plus grand en valeur absolue ?

$$\frac{r'+r}{1+rr'} - \frac{r'-r}{1-r\,r'} = \frac{2r(1-r'^2)}{1-r^2\,r'^2} > 0.$$

$$\frac{r'+r}{1+r\,r'} + \frac{r'-r}{1-r\,r'} = \frac{2\,r'(1-r^2)}{1-r^2\,r'^2} > 0.$$

Donc:

$$\frac{r'+r}{1+r\,r'} > \left|\frac{r'-r}{1-\,r\,r'}\right|$$

On a

$$(4) \qquad |f(z)| \leqslant \frac{|f(o)| + |z|}{1+|z|\cdot|f(o)|}$$

$$1-|f(z)| \geqslant 1-\frac{|f(o)|+|z|}{1+|z|\,|f(o)|} = \frac{1-|f(o)|}{1+|z|\,|f(o)|}\,(1-|z|)$$

d'où en remplaçant le dénominateur du dernier membre par $1+|f(0)|$ qui lui est supérieur, on obtient donc :

$$(5) \qquad \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} > \frac{1-|f(o)|}{1+|f(o)|} = M$$

C'est-à-dire

$$(6) \qquad \frac{1-|z|}{1-|f(z)|} < \frac{1}{M}$$

M ne dépendant que de $|f(0)|$

2. Si nous faisons $r = r' = 1$, les trois rapports

figurant dans la relation(I) deviennent égaux à I.

Retranchons I des trois membres de (I) :

$$\frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = I-\frac{(I-r')\{I+f(z)e^{i\beta}\}}{I-r'f(z)e^{i\beta}}$$

$$\frac{r-z\ e^{i\alpha}}{I-r\ z\ e^{i\alpha}} = I-\frac{(I-r)\{I+z\ e^{i\alpha}\}}{I-r\ z\ e^{i\alpha}}$$

$$\frac{r\ r'-f_1(z)e^{i\gamma}}{I-rr'f_1(z)e^{i\gamma}} = I-\frac{(I-rr')\ \{I+f_1(z)e^{i\gamma}\}}{I-rr'f_1(z)\ e^{i\gamma}}$$

D'après $I-rr' = I-r' + (I-r)r'$ la relation (I) devient:

$$\frac{I+f(z)e^{i\beta}}{I-f(z)e^{i\beta}} = \frac{I-r}{I-r'}\ \frac{I+z\ e^{i\alpha}}{I-rze^{i\alpha}} + \left\{I+r'\ \frac{I-r}{I-r'}\right\} \frac{I+f_1(z)e^{i\gamma}}{I-rr'f_1(z)e^{i\gamma}}$$

(7)
$$-\frac{(I-r)(I-rr')}{I-r'} \cdot \frac{I+z\ e^{i\alpha}}{I-rze^{i\alpha}} \times \frac{I+f_1(z)e^{i\gamma}}{I-rr'f_1(z)e^{i\gamma}}.$$

Supposons que pour une certaine suite de points $r_n\ e^{-i\alpha_n}$ tendant vers $e^{-i\alpha}$, $r'_n\ e^{-i\beta_n}$ tend vers $e^{-i\beta}$ avec $\lim \dfrac{I-r_n}{I-r'_n} = \lambda$.

λ est fini, $\lambda \leq I/M$ puisque $\dfrac{I-r_n}{I-r'_n} < \dfrac{I}{M}$.

Alors, $f_1(z)e^{i\gamma}$ qui dépend de $r_n, r'_n, \alpha_n, \beta_n$ tend vers une limite qui est une fonction de classe E. En passant à la limite, on trouve :

(8)
$$\frac{I+f(z)e^{i\beta}}{I-f(z)e^{i\beta}} = \lambda\ \frac{I+z\ e^{i\alpha}}{I-\ z\ e^{i\alpha}} + (I+\lambda)\frac{I+f_1(z)e^{i\gamma}}{I-f_1(z)e^{i\gamma}}$$

d'où on peut déduire encore:

$$\frac{2}{I-f(z)e^{i\beta}} - I = \frac{2\ \lambda}{I-z\ e^{i\alpha}} - \lambda + \frac{2(I+\lambda)}{I-f_1(z)e^{i\gamma}} - (I+\lambda)$$

donc:

(9)
$$\frac{I}{I-f(z)e^{i\beta}} = \frac{\lambda}{I-z\ e^{i\alpha}} + \frac{I+\lambda}{I-f_1(z)e^{i\gamma}} - \lambda.$$

Pour simplifier, faisons $\gamma = 0$, ce qui ne change pas la propriété de f_1 qui nous intéresse seule jusqu'ici d'appartenir à (E). Nous écrivons:

(9')
$$\frac{I}{I-f(z)e^{i\beta}} = \frac{\lambda}{I-z\ e^{i\alpha}} + \frac{I+\lambda}{I-f_1(z)} - \lambda$$

Dans cette formule λ est la limite de $\frac{I-r_n}{I-r'_n}$ pour une suite $z_n = r_n e^{-i\alpha_n}$ tendant vers $e^{-i\alpha}$.

Supposons que quand z tend vers $e^{-i\alpha}$, $\frac{I-|z|}{I-|f(z)|}$ ne tende pas vers la limite unique 0. On peut écrire les mêmes formules (8) ou (9) avec toutes les limites possibles non nulles λ pour les diverses suites z_n remplissant ces conditions.

Considérons une suite donnant à λ la plus grande valeur possible $\lambda = \overline{\lim}\ \frac{I-|z|}{I-|f|}$ si z tend vers $e^{-i\alpha}$.

Faisons d'abord la transformation:

$$v = \frac{I+u\ e^{i\beta}}{I-u\ e^{i\beta}}$$

Elle change le cercle $|u| < I$ en le demi-plan $R(v) > 0$

$$u\ e^{i\beta} = \frac{v-I}{v+I}.$$

Donc

$$|u| < I \text{ équivaut à } \left|\frac{v-I}{v+I}\right| < I.$$

La distance du point v à I est < la distance de v à -I. v est du même côté que I de la perpendiculaire au milieu du segment (-I, I). Cette perpendiculaire est l'axe imaginaire. Donc, cercle $|u| < I$ correspond le demi-plan $R(v) > 0$.

Pour $|u| = I$, posons $u = e^{i(\gamma-\beta)}$

$$v = \frac{I+e^{i\gamma}}{I-e^{i\gamma}} = i \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

Donc, $R(v) = 0$, pour $|u| = I$.
Pour $u = 0$, $v = I$.
Donc, $|u| < I$ est changé en $R(v) > 0$.

Si
$$W = \frac{I}{I-u\ e^{i\beta}}$$
$$= \frac{I}{2}\left\{\frac{I+u\ e^{i\beta}}{I-u\ e^{i\beta}} + I\right\}$$

$|u| < I$ changé en $R(w) > I/2$.

a) Si $z = \rho e^{-i\alpha}$, ρ variant seul et tendant vers I alors (9') devient :

$$\frac{I}{I-f(z)e^{i\beta}} = \frac{\lambda}{I-\rho} + \frac{I+\lambda}{I-f_1(z)} - \lambda$$

d'où $\qquad R\left\{\frac{I}{I-f(z)e^{i\beta}}\right\}$ devient ∞.

Donc, $\qquad f(z)\longrightarrow e^{-i\beta}$

Soit une suite $z_n=r_n e^{-i\alpha_n}$ tendant vers $e^{-i\alpha}$ et telle que $f=r'_n e^{-i\beta_n}$ tende vers $e^{-i\beta'}$

Soit μ une limite de $\frac{I-r_n}{I-r'_n}$.

Si $\mu\neq 0$, nous pouvons écrire la formule (9') en y remplaçant β par β', λ par μ.

Nous en concluons que:

f tend vers $e^{-i\beta'}$ quand $z=\rho e^{-i\alpha}$, ρ tendant vers I. Donc, $\beta'=\beta$.

Donc, si pour une suite de points $z_n=r_n e^{-i\alpha_n}$ tendant vers $e^{-i\alpha}$, $f=r'_n e^{-i\beta_n}$ tend vers $e^{-i\beta'}$:

I. ou bien $\beta'=\beta$

2. ou bien $\frac{I-r_n}{I-r'_n}$ tend vers zéro.

b) En faisant $z=\rho e^{-i\alpha}$, la formule (9') devient:

$$(I0)\qquad \frac{I-\rho}{I-f(z)e^{i\beta}}=\lambda\rho+\frac{I+\lambda}{I-f_1(z)}(I-\rho)$$

D'après:

$$R\left\{\frac{I}{I-f_1(z)}\right\}>I/2$$

on a :

$$\frac{I-\rho}{|I-f(z)e^{i\beta}|}>R\left\{\frac{I-\rho}{I-f(z)e^{i\beta}}\right\}>\lambda\rho+\frac{I+\lambda}{2}(I-\rho)$$

d'où

$$\frac{I-\rho}{|I-f(z)e^{i\beta}|}>\lambda\rho$$

Donc,

$$\lim_{\rho\to I}\frac{I-\rho}{|I-f\{\rho e^{-i\alpha}\}e^{i\beta}|}\geqslant\lambda$$

Or,

$$\frac{I-\rho}{|I-f\{\rho e^{-i\alpha}\}e^{i\beta}|}<\frac{I-\rho}{I-|f(z)|}$$

la plus grande limite du second membre est au plus λ.

Donc $\frac{I-\rho}{|I-f\{\rho e^{-i\alpha}\}e^{i\beta}|}$ tend vers λ quand ρ tend vers I.

3. Ecrivons l'équation (9')

$$\frac{I-z\,e^{i\alpha}}{I-f(z)e^{i\beta}}=\lambda+\left(\frac{I+\lambda}{I-f_1(z)}-\lambda\right)(I-z\,e^{i\alpha})$$

Faisons tendre arbitrairement z vers $e^{-i\alpha}$:

a) ou bien f_1 n'admet pas la valeur limite I, alors le dernier terme du second membre tend vers 0 quelle que soit la façon dont z ($|z|<I$) tend vers $e^{-i\alpha}$,

$$\frac{I-z\,e^{i\alpha}}{I-f(z)e^{i\beta}}=\lambda+\varepsilon\,(z)$$

$\varepsilon\to 0$ pour $z\to e^{-i\alpha}$.

ou

(II) $$\frac{I-f\,e^{i\beta}}{I-z\,e^{i\alpha}}=\frac{I}{\lambda+\varepsilon(z)}$$

Nous avons supposé $\lambda>0$(en excluant $\lambda=0$). Il est évident que f(z) tend vers $e^{-i\beta}$ quand z tend vers $e^{-i\alpha}$. Si donc l'on pose $f(e^{-i\alpha})=e^{-i\beta}$ et si en chaque point $e^{i\theta}$ de C, on donne à $f(e^{-i\theta})$ conventionnellement une quelconque de valeurs limites de f(z) quand $z\to e^{i\theta}$,l'égalité (II) sera vérifiée dans C et sur C. Donc, toujours dans l'hypothèse où la fonction f_1 de E définie par (8) et (9) n'admet pas la valeur limite I, quand $z\to e^{-i\alpha}$. $\frac{I-f\,e^{i\beta}}{I-z\,e^{i\alpha}}$ tend vers I/λ quand z tend vers $e^{-i\alpha}$ et

$$e^{i(\beta-\alpha)}\,\frac{f(z)-e^{-i\beta}}{z-e^{-i\alpha}}\ \text{tend vers } I/\lambda.$$

f(z) admet la dérivée $I/\lambda\ e^{-i(\beta-\alpha)}$.

Nous disons que I/λ est la dérivée rectifiée de f au point $e^{-i\alpha}$.

b) Ou bien f_1 admet la valeur limite I, mais alors $\frac{I-|z|}{I-|f_1|}$ tend vers 0, quand $z\to e^{-i\alpha}$, sinon, si $\frac{I-|z|}{I-|f_1|}$ avait une plus grande limite positive λ_1 , on appliquerait la formule (9') à f_1 (z)

$$\frac{I}{I-f_1(z)}=\frac{\lambda_1}{I-z\,e^{i\alpha}}+\frac{I+\lambda_1}{I-f_1'(z)}-\lambda_1$$

d'où

$$\frac{I}{I-f} = \frac{\lambda+\lambda_1(I+\lambda)}{I - z\, e^{i\alpha}} + \frac{(I+\lambda)(I+\lambda_1)}{I - f_1'(z)} - \lambda_1(I+\lambda) - \lambda$$

L'ensemble des derniers termes a une partie réelle bornée inférieurement, on aurait pour $z = \rho e^{-i\alpha}$

$$\lim \frac{I-\rho}{I-f(z)e^{i\beta}} = \lambda+\lambda_1(I+\lambda) > \lambda$$

λ pourrait être remplacé par $\lambda+\lambda_1(I+\lambda)$. Or λ ne peut pas être augmenté par hypothèse.

Donc, <u>même si dans (9') f_1 admet la valeur limite I,</u>

$$\frac{I-|z|}{I-|f_1(z)|} \text{ tend vers } 0.$$

<u>quand z tend vers $e^{-i\alpha}$.</u>

En tous cas, supposons que $z \to e^{-i\alpha}$ de façon à rester <u>dans un angle</u> bissecté par le rayon $z = \rho\, e^{-i\alpha}$ et d'ouverture $\omega < \frac{\pi}{2}$

$$I - z\, e^{i\alpha} = u\, e^{i\omega}$$

$$|I - z\, e^{i\alpha}| = u$$

$$|z| = \sqrt{(I-u\, e^{i\omega})(I-u\, e^{-i\omega})}$$

$$= \sqrt{I-2\,u\cos\omega + u^2}$$

d'où:

$$\frac{|I-z\, e^{i\alpha}|}{I-|z|} = \frac{u}{I-\sqrt{I-2\,u\cos\omega+u^2}}$$

or

$$-2\,u\cos\omega+u^2 < -u\cos\omega+\frac{I}{4}u^2\cos^2\omega$$

on a:

$$\frac{|I-z\, e^{i\alpha}|}{I-|z|} < \frac{u}{I-(I-\frac{I}{2}u\cos\omega)} = \frac{2}{\cos\omega} = A$$

$$\frac{|I-z\, e^{i\alpha}|}{|I-f_1(z)\, e^{i\gamma}|} < A\,\frac{I-|z|}{I-|f_1(z)|}$$

Donc, d'après 3, b)

$$\frac{|I-z\, e^{i\alpha}|}{|I-f_1(z)e^{i\gamma}|} \text{ tend vers } 0$$

quand $z \to e^{-i\alpha}$. Alors d'après (9')

$$\frac{I-z\,e^{i\alpha}}{I-f(z)e^{i\beta}} \longrightarrow \lambda$$

<u>la dérivée est angulaire.</u>

Autres conséquences: La dérivée normale $\frac{I}{\lambda}$ de $f(z)e^{i(\beta-\alpha)}$ est une fonction semi-continue inférieurement du point $e^{-i\alpha}$.(En remplaçant $\frac{I}{\lambda}$ par ∞ aux points de C où $|f|$ne tend pas radialement vers I.)

Si l'on a une suite de points $e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \ldots$ $\ldots\ e^{-i\theta_n}$ tendant vers $e^{-i\alpha}$, si

$$\lambda(e^{-i\theta_K}) = \lambda_K$$

$\lambda = \lambda(e^{-i\alpha})$ est au moins égal à la plus grande limite des nombres λ_K . Car par définition :

$$\lambda = \overline{\lim}\ \frac{I-|z|}{I-|f(z)|} \qquad z \to e^{-i\alpha}$$

$$\lambda_K = \overline{\lim}\ \frac{I-|z|}{I-|f(z)|} \qquad z \to e^{-i\theta_K}$$

Soit $\varepsilon_K > 0$ tendant vers O. Il y a un point z_K tel que

$$\left|e^{-i\theta_K} - z_K\right| < \varepsilon_K$$

et

$$\frac{I-|z_K|}{I-|f(z_K)|} > \lambda_K - \varepsilon_K$$

si $K \to \infty$, $z \to e^{-i\alpha}$

et

$$\overline{\lim}\ \frac{I-|z_K|}{I-|f(z_K)|} \geqslant \overline{\lim}\ \lambda_K$$

d'où

$$\overline{\lim}\ \lambda_K \leqslant \lambda$$

λ est une fonction semi-continue supérieurement.

$\frac{1}{\lambda}$ est une fonction semi-continue inférieurement.

TROISIEME PARTIE
REPRESENTATION CONFORME ENTRE LES DEUX FRONTIERES.

Considérons les points $\zeta = e^{-i\alpha}$ où

$$\varphi(\alpha) = e^{i(\beta-\alpha)} f'(e^{-i\alpha}) \leq I.$$

(φ $(\alpha) = I/\lambda$ dérivée rectifiée), avec

$$f(e^{-i\alpha}) = e^{-i\beta} = \eta.$$

Soit u un nombre de module inférieur à I.
Nous désignons par C' le cercle $|u| = I$.

Je dis que l'équation:

(I) $$z - u\, f(z) = 0$$

a une racine v et une seule intérieure à C.

En effet, si z est dans C, $|u\, f(z)| < |u|$.
Donc, si $|u| < r < I$, dans le cercle $|z| = r$, les deux équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad z - u\, f(z) = 0$$

ont le même nombre de racines, parce que sur ce cercle $|z| = r$, on a $|u\, f(z)| < |z|$. Donc, il y a une racine v et une seule dans le cercle $|z| = r$ quel que soit $r > |u|$, (et $r < I$).

Donc, l'équation(I) a une racine et une seule dans C ($|z| = I$), quel que soit u, si $|u| < I$.

D'ailleurs v est une fonction de u,

$$|v| = |u|\, |f(v)| < |u| .$$

Donc, v est en u une fonction de E.

Quand u décrit l'intérieur de C', v décrit l'intérieur d'un domaine connexe Δ . Les points u et v se correspondent chacun à chacun continûment.

Si $$u \longrightarrow e^{i(\beta-\alpha)}$$

l'équation (I) montre que

$$\frac{v}{f(v)} \text{ tend vers } e^{i(\beta-\alpha)}$$

On peut voir que v a une positive limite unique a.

En effet, I. si a est une position limite de v, et si a est intérieur à C, on a

$$\frac{a}{f(a)} = e^{i(\beta-\alpha)}$$

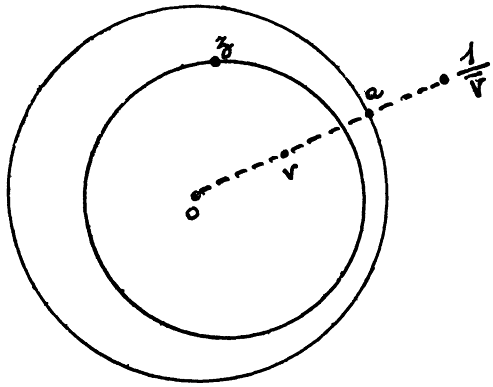
L'équation (I) aurait quel que soit u intérieur à C' suffisamment voisin de $e^{i(\beta-\alpha)}$

une racine v voisine de a et par conséquent intérieure à C. Comme v est unique, a serait le seul point limite possible de v, quand $u \longrightarrow e^{i(\beta-\alpha)}$

2. Si a est sur c, il est unique.

Car, la fonction u f(z) de z est égale à v au point z = v. Donc,

$$\left| \frac{u\, f(z) - v}{I - u\, f(z)\bar{v}} : : \frac{z - v}{I - z\,\bar{v}} \right| < I,$$



Le point u f(z) est intérieur au cercle du faisceau défini par les points limites v, $I/\bar{v}$ et passant par z.

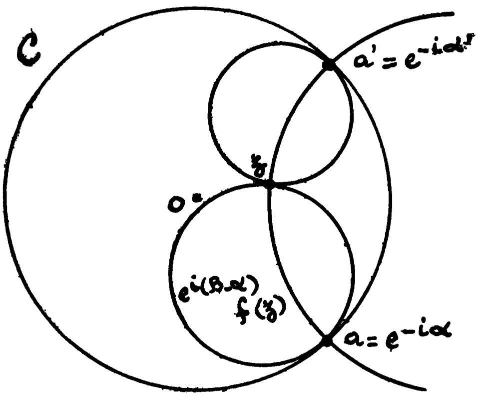
Quand $u \longrightarrow e^{i(\beta-\alpha)}$, si v tend vers a, le point $e^{i(\beta-\alpha)} f(z)$ tend à être dans ou sur le cercle tangent en a à C et passant par le point z.

Ceci montre que a est unique, car s'il y avait un second point limite a' distinct de a, $f(z).e^{i(\beta-\alpha)}$ devrait être dans les deux cercles passant par z et tangents à C en a et à respectivement.

Mais, si z est sur le cercle orthogonal à C joignant a et a', ces deux cercles sont tangents au point z. $f(z)\, e^{i(\beta-\alpha)}$. devait être dans les deux cercles, on aurait donc $z = e^{i(\beta-\alpha)} f(z)$, en tout point de l'arc a a' orthogonal à C.

Donc, f(z) serait constamment égal à $z\, e^{-i(\beta-\alpha)}$ quel que soit z dans C.

Donc, a est unique.



Donc, quand $u \longrightarrow e^{i(\beta-\alpha)}$(u était dans C'), v tend vers une limite unique a , soit un point intérieur à C (et où $|z| = |f(z)|$), soit situé sur C. Nous le désignons dans ce second cas par $e^{-i\alpha}$.

Alors, $f(z)$ tend vers $e^{-i\beta}$ quand $z \longrightarrow e^{-i\alpha}$ et de façon que $e^{i(\beta-\alpha)}f(z)$ est non extérieur au cercle passant en z et tangent à C au point $e^{-i\alpha}$.

La transformation de u en v, change le cercle C' en la région $|v| < |f(v)|$, soit Δ ,qui contient l'origine. Quand u variant dans l'intérieur de C' tend vers un point de C', v tend vers un point unique où

$$\lim \frac{|f(v)|}{|v|} = I$$

et ce point est sur la frontière F de Δ

Le sens de rotation sur les deux frontières C et F est direct à la fois.

Puisque le point $f(z). e^{i\beta}$ est intérieur au cercle passant par le point $z. e^{i\alpha}$ et tangent au point I au cercle $|z| = I$.

Posons:

$$\frac{I + f e^{i\beta}}{I - f e^{i\beta}} = \frac{I + z e^{i\alpha}}{I - z e^{i\alpha}} + p + i q$$

$p \geqslant 0$ (voir une Note de M.A. Denjoy, C.R. P. 256, Ier Sem. I926).

Réciproquement, si $p \geqslant 0$, quel que soit z, si donc λ est la dérivée rectifiée normale,

$\lambda \geqslant$ I, et

$$(2) \qquad \frac{I + f(z)\, e^{i\beta}}{I - f(z)\, e^{i\beta}} = \lambda \frac{I + z\, e^{i\alpha}}{I - z\, e^{i\alpha}} = \frac{I - f_1(z)}{I + f_1(z)}(I+\lambda)$$

Si z tend vers $e^{-i\alpha'}$ et $f(z) \longrightarrow e^{-i\beta'}$, f_1 (z) tend vers une limite.

Les parties réelles du premier membre et du premier terme du second tendent vers 0, la partie réelle du dernier terme tend vers 0. Donc, $f_1(z)$ tend vers $e^{-i\gamma'}$.

Comme f(z) a une dérivée rectifiée I/λ_1 au point $e^{-i\alpha'}$, $f_1(z)$ aura une dérivée rectifiée I/μ au même point $e^{-i\alpha'}$.

On a d'abord :

$$\frac{I + e^{-i(\beta'-\beta)}}{I - e^{-i(\beta'-\beta)}} = \lambda \frac{I + e^{-i(\alpha'-\alpha)}}{I - e^{-i(\alpha'-\alpha)}} + \frac{I + e^{-i\gamma'}}{I - e^{-i\gamma'}} (I+\lambda)$$

d'où

$$\cot g \frac{\beta'-\beta}{2} = \lambda \cot g \frac{\alpha'-\alpha}{2} + (I+\lambda) \cot g \frac{\gamma'}{2}$$

et la dérivée normale de (2) donne :

$$\frac{e^{i\beta}}{\{I - f(z) e^{i\beta}\}^2} f'(z) = \lambda \frac{e^{i\alpha}}{\{I - z\, e^{i\alpha}\}^2} + \frac{(I+\lambda)}{\{I - f_1(z)\}^2} f_1'(z)$$

Comme

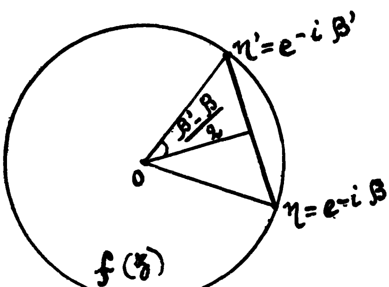
$$f'(\alpha') = \frac{I}{\lambda_1} e^{-i(\beta'-\alpha')}, \quad f_1'(\alpha') = \frac{I}{\mu} e^{-i(\gamma'-\alpha')}$$

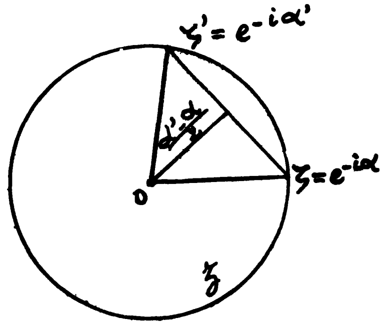
on trouve alors :

$$\frac{I}{\lambda_1} \frac{I}{\sin^2 \frac{\beta'-\beta}{2}} = \frac{\lambda}{\sin^2 \frac{\alpha'-\alpha}{2}} + \frac{(I+\lambda)}{\mu} \frac{I}{\sin^2 \frac{\gamma'}{2}}$$

d'où:

$$\sin^2 \frac{\alpha'-\alpha}{2} > \lambda\, \lambda_1 \sin^2 \frac{\beta'-\beta}{2}$$





$\sin \frac{\beta'-\beta}{2}$ est I/2 de la corde $e^{-i\beta'}$, $e^{-i\beta}$

$$|\eta' - \eta| = 2 \left|\sin \frac{\beta'-\beta}{2}\right|$$

de même

$$|\zeta' - \zeta| = 2 \left|\sin \frac{\alpha'-\alpha}{2}\right|$$

d'où

$$|\zeta' - \zeta| > \sqrt{\lambda\lambda_1}\, |\eta' - \eta|$$

avec

$$\zeta' = e^{-i\alpha'} \qquad f(e^{-i\alpha'}) = e^{-i\beta'} = \eta'$$

Si ζ , ζ' sont sur la frontière de Δ , alors $\lambda \geqslant$ I, $\lambda' \geqslant$ I.

Donc,

$$|\zeta' - \zeta| > |\eta' - \eta|$$

On en conclut en particulier que tous les points ζ sont situés sur une même demi-circonférence de C.

QUATRIEME PARTIE
QUELQUE DEVELOPPEMENT EN FRAÇTION CONTINUE et EN SERIES DE PUISSANCES.

Soit E l'ensemble des fonctions f(z) holomorphes à l'intérieur du cercle $|z| =$ I. et y vérifiant $|f(z)| \leqslant$ I.

Posons

$$(I) \qquad \frac{r'-f(z)e^{i\beta}}{I-r'f(z)e^{i\beta}} = \frac{r-z\, e^{i\alpha}}{I-rze^{i\alpha}} \times \frac{rr' - f_1(z)e^{i\gamma}}{I-rr'f(z)e^{i\gamma}}$$

Supposons maintenant que $z \longrightarrow e^{-i\alpha}$ radialement, $f(z) \longrightarrow e^{-i\beta}$ avec dérivée angulaire I/λ_1 .

$f_1(z)$ étant dans E, on a

$$(2) \qquad \frac{I+f(z)e^{i\beta}}{I-f(z)e^{i\beta}} = \lambda\, \frac{I+z\, e^{i\alpha}}{I-z\, e^{i\alpha}} + \frac{I+f_1(z)e^{i\gamma}}{I-f_1(z)e^{i\gamma}}\, (1+\lambda)$$

Et, si $z \longrightarrow e^{-i\alpha}$, $\dfrac{I-z\, e^{i\alpha}}{I-f_1(z)e^{i\gamma}}$ tend vers 0, même si $f_1(z)$ admet la valeur limite $e^{-i\gamma}$

Mettons :

$$\frac{I-f(z)e^{i\beta}}{I+f(z)e^{i\beta}} = u, \quad \frac{I-z\ e^{i\alpha}}{I+z\ e^{i\alpha}} = \zeta, \quad \frac{I+f_1(z)e^{i\gamma}}{I+f_1(z)e^{i\gamma}}(1+\lambda) = u_1$$

u et u_1 sont des fonctions à partie réelle positive, de même que ζ décrit le demi-plan $R(\zeta) > 0$. u tend vers 0 quand ζ tend radialement vers 0, ($\zeta = \rho e^{i\theta}$ $-\pi/2 + \varepsilon < \theta < \pi/2 - \varepsilon$, ε positif quelconque invariable, quand $\rho \longrightarrow 0$) et admet à l'origine ($\zeta = 0$) la dérivée angulaire I/λ_1, la relation (2) devient

$$(3) \qquad \frac{I}{u} = \frac{\lambda_1}{\zeta} + u_1 .$$

Quant à u_1, ζu tend radialement vers 0, même si u_1 n'est pas borné quand $\zeta \longrightarrow 0$(radialement).

Supposons que pour $z \longrightarrow e^{-i\alpha}$, $f_1(z) \longrightarrow e^{-i\delta}$ ($\delta \neq \gamma$).

$$u_1 = \frac{I+f_1(z)\ e^{i\gamma}}{I-f_1(z)\ e^{i\gamma}}(1+\lambda) \text{ tend vers}$$

$$(1+\lambda)\frac{I+e^{i(-\delta+\gamma)}}{I-e^{i(-\delta+\gamma)}} = i(1+\lambda)\cot g\frac{\delta-\gamma}{2} = i\ h_1$$

de là

$$u_1 = ih_1 + u'_1 \quad R(u'_1) > 0 \text{ et } u'_1 \longrightarrow 0, \text{si } \zeta \longrightarrow 0.$$

La relation(3) peut s'écrire :

$$(4) \qquad \frac{I}{u} = \frac{\lambda_1}{\zeta} + ih_1 + u'_1$$

u'_1 est dans les mêmes conditions que u, quand ζ tend vers 0.

Si u'_1 (ou u_1) a une dérivée angulaire I/λ_2 au point $\zeta = e^{-i\alpha}$, on a

$$(5) \qquad \frac{I}{u'_1} = \frac{\lambda_2}{\zeta} + u_2 \qquad R(u_2) > 0,$$

de (4) on obtient

$$(6) \qquad \frac{I}{u} = \frac{\lambda_1}{\zeta} + ih_1 + \cfrac{I}{\cfrac{\lambda_2}{\zeta} + u_2}$$

si $u_2 \longrightarrow ih_2$ quand ζ tend radialement vers 0, soit $u_2 = ih_2 + u'_2$, $u'_2 \longrightarrow 0$ avec ζ . Si en même temps $u'_2/\zeta \longrightarrow I/\lambda_3$ (radialement), alors

(7) $$\frac{I}{u'_2} = \frac{\lambda_3}{\zeta} + u_3$$

Donc, d'après (6)

(8) $$\frac{I}{u} = \frac{\lambda_1}{\zeta} + ih_1 + \cfrac{I}{\frac{\lambda_2}{\zeta} + ih_2 + \cfrac{I}{\frac{\lambda_3}{\zeta} + u_3}}$$

et ainsi de suite, jusqu'à

(9) $$\frac{I}{u'_{q-1}} = \frac{\lambda_q}{\zeta} + u_q$$

$$R(u_q) > 0, \qquad \lim_{\zeta = 0} \zeta u_q = 0$$

Si on est arrêté, c'est que:

I. Ou bien u_q ne tend pas radialement vers une valeur déterminée finie de partie réelle nulle.
2. Ou bien u_q tend radialement vers une valeur finie de partie réelle nulle, soit $i\,k_q$
Mais si :

$$u_q = ik_q + u'_q \qquad u'_q/\zeta \longrightarrow \infty$$

On trouve:

(IO) $$u = \cfrac{\zeta}{\lambda_1 + ih_1\zeta + \cfrac{\zeta^2}{\lambda_2 + ih_2\zeta + \cdots + \cfrac{\zeta^2}{\lambda_q + \zeta\, u_q}}}$$

Il peut se faire que l'on ne soit jamais arrêté, si grand que soit q. La suite des coefficients λ_k, h_k, définit un développement asymptotique de u. Mais a priori, rien ne prouve que ce développement caractérise u.

Posons :

$$I - z\, e^{i\alpha} = \zeta$$

on peut mettre le développement de f(z) sous la forme asymptotique :

(II) $$f(z)e^{i\beta} = I + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots c_n\zeta^n + c'_{n+1}\zeta^{n+1}$$

c'_{n+1} tendant vers une limite c_n quand ζ tend vers O. Un développement de cette sorte peut selon les cas n'exister que pour n borné, ou au contraire être indéfini. Mais encore une fois, dans ce second cas, il n'est pas certain que ce développement caractérise f. Nous verrons (d'après M. Nevanlinna) qu'il peut au contraire convenir à une infinité de fonctions f de classe E. Nous allons établir la propriété remarquable de l'ensemble des coefficients c_n figurant dans la formule (II) du développement asymptotique d'une fonction de E, au voisinage d'un point $e^{i\alpha}$ du cercle $|z| = I$.

Si c_1 , c_2 ,...... c_n sont connus, le coefficient c_{n+1} se place nécessairement et indifféremment sur une demi-droite déterminée parallèle à l'axe réel négatif si n est pair, sur une droite indéfinie déterminée parallèle à l'axe imaginaire si n est impair.

Calculons tout d'abord les deux premiers termes du développement de

$$I - f(z)e^{i\beta} = \eta$$

suivant les puissances de ξ . Ces termes seront les mêmes que si u était donné par

(I2) $$u = \frac{\zeta}{\lambda_1 + ih_1\zeta}$$

Car d'après, $I - f(z)e^{i\beta} = \eta$; $I - z\,e^{i\alpha} = \xi$, on a :

$$u = \frac{I-fe^{i\beta}}{I+fe^{i\beta}} = \frac{\eta}{2-\eta} \; ; \; \zeta = \frac{I-ze^{i\alpha}}{I+ze^{i\alpha}} = \frac{\xi}{2-\xi}$$

(I2) devient

$$\frac{\eta}{2} - \frac{\xi}{2\lambda_1 + (ih_1 - \lambda_1 + I)\xi} = \frac{\xi}{2\lambda_1}\left[I + \frac{ih_1 - \lambda_1 + I}{2\lambda_1}\xi\right]^{-1}$$

Donc, on a :

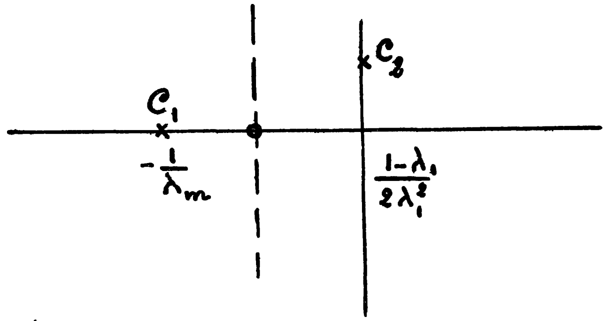
(I3) $$\eta = \frac{I}{\lambda_1}\xi - \frac{ih - \lambda_1 + I}{2\lambda_1^2}\xi^2 + \cdots\cdots$$

par conséquent:

(I4) $$f(z)e^{i\beta} = I = \eta = I + c_1\xi \;\; c_2\xi^2 + \cdots\cdots$$

donc $$c_1 = -\frac{I}{\lambda_1}$$

$$c_2 = \frac{ih - \lambda_1 + I}{2\lambda_1^2} = \frac{I-\lambda_1}{2\lambda_1^2} + i\frac{h_1}{2\lambda_1^2} = \frac{I-\lambda_1}{2\lambda_1^2} + it.$$



$c_1 = -I/\lambda_1$ est sur une demi-droite, savoir le I/2 axe réel négatif t, comme h_1 est réel quelconque, c_2 est sur une droite indéfinie parallèle à l'axe imaginaire.

La fraction continue

$$u = \cfrac{\zeta}{\lambda_1 + ih_1\zeta + \cfrac{\zeta^2}{\lambda_2 + ih_2\zeta + \ddots + \cfrac{\zeta^2}{\lambda_q + u_q\zeta}}}$$

donne naissance au système de réduites $\frac{A_p}{B_p}$ $(p \leq q)$ dont les numérateurs et les dénominateurs sont déterminées par les équations récurrentes.

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{\zeta}{\lambda_1 + ih_1\zeta}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\zeta(\lambda_2 + ih_2\zeta)}{(\lambda_1 + ih_1\zeta)(\lambda_2 + ih_2\zeta) + \zeta^2}$$

$$\frac{A_p}{B_p} = \frac{(\lambda_p + ih_p\zeta)A_{p-1} + \zeta^2 A_{p-2}}{(\lambda_p + ih_p\zeta)B_{p-1} + \zeta^2 B_{p-2}}$$

$(p < q)$, pour $p = q$, on doit dans la formule

remplacer ih_p par u_q .
D'où

$$\begin{cases} A_1 = \zeta \\ B_1 = \lambda_1 + ih_1\zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \zeta\,(\lambda_2+ih_2\zeta) \\ B_2 = (\lambda_1+ih_1\zeta)\,(\lambda_2+ih_2\zeta)+\zeta^2 \end{cases}$$

$$(I5) \qquad \begin{cases} A_p = (\lambda_p+ih_p\zeta)A_{p-1}+\zeta^2 A_{p-2} \\ B_p = (\lambda_p+ih_p\zeta)B_{p-1}+\zeta^2\, B_{p-2} \end{cases}$$

Cette dernière formule(I5) est vraie, même pour $p = 2$, en faisant

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{0}{I}$$

On voit que A et B s'expriment linéairement par les mêmes formules au moyen des coefficients de même nom, mais d'indices inférieurs d'une et deux unités. La même propriété appartient donc à toute combinaison linéaire $aA_p + bB_p$ à coefficients a, b constants.

Par hypothèse :

$$u = \frac{I-fe^{i\beta}}{I+fe^{i\beta}} = \frac{\eta}{2-\eta} \sim \frac{A_p}{B_p}$$

on a

$$\eta = \frac{2\,A_p}{A_p+B_p} \sim \frac{C_p}{D_p}$$

avec

$$C_0 = 0, \qquad D_0 = I$$

$$\begin{cases} C_1 = 2A_1 = 2\zeta \\ D_1 = A_1 + B_1 = (I+ih_1)\zeta+\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 2A_2 = 2\zeta\,(\lambda_2+ih_2\zeta) \\ D_2 = A_2+B_2 = (\lambda_2+ih_2\zeta)\,[(\lambda_1+ih_1\zeta)+\zeta]+\zeta^2 \end{cases}$$

en général

$$(15') \qquad \begin{cases} C_p = (\lambda_p+ih_p\zeta)\;C_{p-1}+\zeta^2 C_{p-2} \\ D_p = (\lambda_p+ih_p\zeta)\;D_{p-1}+\zeta^2 D_{p-2} \end{cases}$$

pour $p = q$, ih_p est remplacé par u_q .

D'autre part on a $\quad C_0/D_0 = 0/I$

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{2\zeta}{\lambda_1 + (I + ih_1)\zeta} = \frac{I}{\lambda_1}\zeta - \frac{I-\lambda_1+ih_1}{2\lambda_1^2}\zeta^2 + \dots\dots ,$$

comme nous l'avons vu plus haut.

Posons :

$$(I6) \quad \frac{C_p}{D_p} = \frac{1}{\lambda_1}\zeta + \gamma_2^p\zeta^2 + \gamma_3^p\zeta^3 + \dots + \gamma_{2p-1}^p\zeta^{2p-1} + \gamma_{2p}^p\zeta^{2p} + \gamma_{2p+1}^p\zeta^{2p+1} + \gamma_{2p+2}^p\zeta^{2p+2} + \dots$$

la relation(I5') donne pour $p \geqslant 2$

$$C_p\, D_{p-1} - D_p\, C_{p-1} = -\zeta^2\{C_{p-1}D_{p-2} - D_{p-1}\,C_{p-2}\}$$

d'ailleurs $\quad C_1 D_0 - D_1 C_0 = 2\zeta \quad$. Donc, on trouve la relation fondamentale

$$(I7) \qquad C_p\, D_{p-1} - D_p C_{p-1} = (-I)^{p-1}\, 2\zeta^{2p-1}$$

d'où l'expression de la différence de deux réduites successives

$$(I8) \qquad \frac{C_p}{D_p} - \frac{D_{p-1}}{D_{p-1}} = (-I)^{p-1}\frac{2\zeta^{2p-1}}{D_p\, D_{p-1}}$$

Il en résulte que les coefficients de $\frac{C_p}{D_p}$ jusqu'à ζ^{2p+2} inclus sont les mêmes que pour $\frac{C_{p-1}}{D_{p-1}}$

Donc, γ_{2K-1}^p , γ_{2K}^p sont invariables, dès que $p \geqslant k$; on aura donc

$$c_{2K-1} = \gamma_{2K-1}^p$$
$$c_{2K} = \gamma_{2K}^p$$

dès que $p \geqslant k$.

Ainsi $c_0 = 0$, c_1 , c_2 , appartiennent à C_p/D_p pour $p \geqslant I$.

$c_0 = 0$, c_1 , c_2 ,........... c_{2s} appartiennent à tous les C_p/D_p pour $p \geqslant s$.

Pour trouver comment les coefficients de ζ^{2p-1} et ζ^{2p} sont modifiés dans le passage de

C_{p-1}/D_{p-1} à $\dfrac{C_p}{D_p}$. Il suffit d'avoir les deux premiers termes de D_{p-1} D_p développés suivant les puissances de ξ.

Car

$$\frac{C_p}{D_p} - \frac{C_{p-1}}{D_{p-1}} = (-1)^{p-1}\frac{2\,\zeta^{2p-1}}{D_{p-1}\,D_p}$$

on a:

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{2\,\zeta}{\lambda_1+(I+ih_1)\zeta} = \frac{\xi}{2\lambda_1+\frac{I-\lambda_1+ih_1}{2}\xi}$$

d'où

(I9) $$D_1 = \lambda_1 + \frac{I-\lambda_1+ih_1}{2}\,\xi$$

Soit maintenant

(20) $$D_p = \alpha_{p,0} + \alpha_{p,1}\,\xi + \cdots\cdots$$

on voit immédiatement que

$$\alpha_{1,0} = \lambda_1$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{1-\lambda_1+ih_1}{2}$$

de la formule (I5') on a

$$\begin{aligned} D_p &= (\lambda_p - ih_p\zeta)D_{p-1} + \zeta^2 D_{p-2} \\ &= (\lambda_p + ih_p\zeta)\{\alpha_{p-1,0}+\alpha_{p-1,1}\xi+\cdots\cdots\}+\cdots \end{aligned}$$

Mais, en plus haut nous avons considéré que :

$$\zeta = \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{4} + \cdots\cdots\cdots$$

en sorte que:

$$D_p = (\lambda_p + \frac{ih_p}{2}\xi + \cdots\cdots)\left\{\alpha_{p-1,0}+\alpha_{p-1,1}\xi+\cdots\cdots\right\}+\cdots\cdots$$

par conséquent d'après (20)

$$\alpha_{p,0}+\alpha_{p,1}\,\xi+\cdots\cdots = \lambda_p\alpha_{p-1,0} + (\lambda_p\alpha_{p-1,1}+\frac{ih_p}{2}\alpha_{p-1,0})\xi+\cdots$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{p,0} = \lambda_p\,\alpha_{p-1,0}\,, \qquad \alpha_{p,1} = \lambda_p\alpha_{p-1,1} + \frac{ih_p}{2}\alpha_{p-1,0}$$

On trouve facilement :

$\alpha_{p,0} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_p$ réel positif, $\alpha_{p,1} = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p\,\beta_{p,1}$

avec

$$\beta_{p,1} = \frac{I-\lambda_1}{2\,\lambda_1} + \frac{i}{2}\sum_{1}^{p}\frac{h_m}{\lambda_m}$$

d'où l'on conclut

$$(2I)\qquad D_p = P_p + P_p\left\{\frac{I-\lambda_1}{2\,\lambda_1} + \frac{i}{2}\sum_{1}^{p}\frac{h_m}{\lambda_m}\right\}\zeta + \ldots\ldots$$

avec

$$P_p = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_p \qquad (p = I, 2, \ldots\ldots)$$

De même

$$(22)\qquad D_{p-1} = P_{p-1} + P_{p-1}\left(\frac{I-\lambda_1}{2\,\lambda_1} + \frac{i}{2}\sum_{1}^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right)\zeta +$$

finalement de (2I) et (22) nous pouvons conclure les deux premiers termes de D_{p-1} D_p comme suivante

$$(23)\qquad D_{p-1}D_p = P_{p-1}\,P_p\left[I + \left(\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{ih_p}{2\lambda_p} + i\sum_{1}^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right)\zeta + \ldots\right] + \ldots$$

D'où

$$(24)\qquad \frac{I}{D_{p-1}\,D_p} = \frac{I}{P_{p-1}\,P_p}\left[I - \left(\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} + i\frac{h_p}{2\lambda_p} + i\sum_{1}^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right)\zeta + \ldots\right]$$

D'autre part, d'après(I8) on a alors:

$$\frac{C_p}{D_p} - \frac{C_{p-1}}{D_{p-1}} = 2(-I)^{p-1}\frac{I}{D_{p-1}\,D_p}\zeta^{2p-1} = 2(-I)^{p-1}\frac{I}{D_{p-1}\,D_p}\left[\frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{4} + \right]^{2p-1}$$

$$= (-1)^{p-1}\frac{\zeta^{2p-1}}{2^{2p-2}}\cdot\frac{1}{P_{p-1}P_p}\left[1 - \left(\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1} + i\frac{h_p}{2\lambda_p} + i\sum_{1}^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right)\zeta + \ldots\ldots\right]\left[1 + \frac{2p-1}{2}\zeta + \ldots\right]$$

$$= (-1)^{p-1}\frac{\zeta^{2p-1}}{2^{2p-2}P_{p-1}P_p}\left[1 + \left\{\frac{2p-1}{2} - \frac{1-\lambda_1}{2} - \left(i\frac{h_p}{2\lambda_p} + i\sum_{1}^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right)\right\}\zeta + \ldots\right]$$

Enfin, on peut écrire

$$(25)\quad \frac{C_p}{D_p}-\frac{C_{p-1}}{D_{p-1}}=(-I)^{p-1}\frac{2\zeta^{2p-1}}{D_{p-1}\,D_p}$$

$$=(-1)^p\frac{\zeta^{2p-1}}{2^{2p-2}P_{p-1}P_p}+\frac{(-1)^p}{2^{2p-2}P_{p-1}P_p}\left\{\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1+2p}{2}\right)+i\frac{h_p}{2\lambda_p}+\sum_1^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right\}\zeta^{2p}+\ldots$$

d'où

$$P_{p-1}\;P_p=\lambda_1^2\,\lambda_2^2\ldots\ldots\lambda_{p-1}^2\,\lambda_p$$

On obtient donc :

$$(26)\quad \frac{C_p}{D_p}=C_1\zeta+C_2\zeta^2+\ldots+C_{2p-2}\zeta^{2p-2}+\gamma_{2p-2}^{p-1}\zeta^{2p-1}+\gamma_{2p}^{p-1}\zeta^{2p}+\ldots.$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p-2}\lambda_1^2\lambda_2^2\ldots\lambda_{p-1}^2\lambda_p}\zeta^{2p-1}+\frac{(-1)^p}{2^{2p-2}\lambda_1^2\ldots\lambda_p}\left\{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1+2p}{2}+i\frac{h_p}{2\lambda_p}+\sum_1^{p-1}\frac{h_m}{\lambda_m}\right\}\zeta^{2p}+\ldots.$$

D'où

$$(27)\quad\begin{cases} c_{2p-1}=\gamma_{2p-1}^{p-1}+\dfrac{(-I)^{p-1}}{2^{2p-2}\lambda_1^2\,\lambda_2^2\ldots\lambda_{p-1}^2\lambda_p} \\[2ex] c_{2p}=\gamma_{2p}^{p-1}+\dfrac{(-I)^p}{2^{2p-2}\lambda_1^2\,\lambda_2^2\ldots\lambda_{p-1}^2\lambda_p}\left(\dfrac{I}{\lambda_1}-\dfrac{I+2p}{2}+i\dfrac{h_p}{2\lambda_p}+\displaystyle\sum_1^{p-1}\dfrac{h_m}{\lambda_m}\right)\end{cases}$$

λ_p positif quelconque c_{2p-1} est sur la demi-droite parallèle à l'axe réel négatif issue du point γ_{2p-1}^{p-1}, c_{2p} est sur la droite indéfinie parallèle à l'axe imaginaire (h_p réel quelconque) issue du point γ_{2p}^{p-1}.

BIBLIOGRAPHIE.

I C.Carathéodory,(a) Über den zusammenhang der Extremen von Harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und Uber den Picard-Landau'schen Satz.(Rendicontidel Cirecolo matematico di Palermo. t.32, I9II, P. 2I8).
(b) Uber die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen (Sitz.ber. der preuss. Akad. , B. 32, I929).

2 A.Denjoy. Sur une classe de fonctions analytiques (Comptes Rendus Acad. Sc., paris.t.I88, I929, p. I40 et I084; t. I90, I930, p.960.

3. P. Montel, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications (Gauthier-Villars -I927).

4. R. Nevanlinna,(a) Uber beschränkte Funtionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen (Ann. Acad. Scient.Fenn., B. I5,I9I9)
(b) Commentationes in Honorem Ernesti Leonardi Lindelof (Helsinki, I929,Suomalainen Tiedeakatemia). p. I- 72

5. G.Pick, Uber die Beschrankungen anatytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funtions werte bewirkt werden (Math. Annalen, B.77, I9I6, p. 7 -23).

6. J.Schur,Uner Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreiss beschränkt sind (Journal für Math., B, I47, I9I7, p.205-232; B.I48,I9I8, p. I22-I45.

7. G. Vitali, Sopra le serie di funzioni analitiche (Rend. del R.Ist.Lombardo, T.36,I903, p.772, et Annali di Matematica,t.,IC,I904, p.73).

8. J.L. Walsh, Interpolation and funtions analytic interior to the unit cercle (Transactions of the American mathematical society, Vol. 34, I932, p.523 -556).

TABLE DES MATIERES