

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

CH. BRUNOLD

Contribution à l'étude de quelques catégories d'ensembles totalement discontinus définis par des conditions géométriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1934

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1934__166__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Année 1933—1934.

No. 57

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. Ch. BRUNOLD

Agrégé des sciences physiques, Docteur ès-lettres

Ancien professeur au Lycée Saint-Louis

Ancien maître de conférences à l'École Normale Supérieure de Sèvres

Proviseur du Lycée de Toulouse.

1^{ÈRE} THÈSE. CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE QUELQUES CATÉGORIES
D'ENSEMBLES TOTALEMENT DISCONTINUS DÉFINIS PAR
DES CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES.

2^{ÈRE} THÈSE. PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

soutenues en mars 1934 devant la Commission d'examen.

MM. **BUHL** *Président*
BOULIGAND } *Examineurs*
DELTHEIL }
PALOQUE }

1934

„TIPOGRAFIA ROMANEASCA“ TIMIȘOARA.

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

FACULTÉ DES SCIENCES

ADMINISTRATION

MM. DELTHEIL, doyen.
DOP, assesseur.

HONORARIAT

MM. BAILLAUD, doyen honoraire, directeur honoraire de l'Observatoire de Paris.
LECLERC DU SABLON, doyen honoraire, professeur honoraire.
SABATIER, doyen honoraire, professeur honoraire.
JACOB, professeur honoraire.
LÉCAILLON, professeur honoraire.
GIRAN, professeur honoraire.

PROFESSEURS

MM. N. . . . , astronomie.
BOUASSE, physique.
CAMICHEL, électricité industrielle et mécanique des fluides.
BUHL, calcul différentiel et intégral.
LAMOTTE, physique.
ROY, mécanique rationnelle et appliquée.
JAMMES, zoologie appliquée et hydrobiologie.
DELTHEIL, mathématiques générales.
NICOLAS, botanique agricole.
DUFFOUR, minéralogie.
CLARENS, chimie agricole.
SOURISSEAU, mécanique agricole et génie rural.
DOP, botanique.
MENGAUD, géologie.
VANDEL, zoologie.
CATHALA, chimie.
MIGNONAC, chimie.
DESPAX, zoologie.
GAUSSEN, botanique.

SECRETARIAT

M. RENARD, secrétaire.

À M. GEORGES BOULIGAND

Maître de recherches

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Hommage de reconnaissance et d'affection.

A MA FEMME

A MES ENFANTS

A TOUS LES MIENS

PREMIÈRE THÈSE

—

CONTRIBUTION À L'ETUDE
DE QUELQUES CATÉGORIES D'ENSEMBLES
TOTALEMENT DISCONTINUS DÉFINIS PAR
DES CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES.

—————

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE QUELQUES CATÉGORIES D'ENSEMBLES TOTALEMENT DISCONTINUS DÉFINIS PAR DES CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES

Ce travail peut surprendre quand on saura que son auteur a consacré une partie de sa carrière à l'enseignement des sciences physiques. Rapidement orienté vers l'étude des principes et de la structure des théories physiques, j'ai voulu me préparer à une réflexion approfondie sur la philosophie des sciences. Mes premières recherches dans ce sens, qui se rapportent à l'histoire de la thermodynamique, m'ayant montré quel rôle considérable ont joué les mathématiques dans le développement historique des divers chapitres de la physique, l'étude des principes des mathématiques m'est apparue comme le point de départ inévitable de toute réflexion sur le contenu des théories physiques. Mais, pour aborder utilement l'étude des fondements des mathématiques, il faut être un peu mathématicien et avoir pratiqué, sur des problèmes particuliers, la recherche mathématique, avant de s'élever à des spéculations théoriques qui, en elles-mêmes et par rapport à la physique, présentent le plus haut intérêt.

Ce travail n'est donc pas un accident. Il se rattache à une évolution nécessaire de celui qui, parti de la physique, veut se consacrer à une étude philosophique de cette science et qui, convaincu que cette étude doit être conduite par la méthode historique, retrouve les mathématiques à l'origine, comme tout le long du développement des diverses branches de la physique.

Personne ne saurait contester que la route choisie pour atteindre le but que je me suis proposé ne soit la meilleure. Elle a l'inconvénient d'être longue, quand on envisage que le temps est très mesuré à celui qui a voulu la suivre. Je n'aurais pas osé m'y engager sans l'intérêt exceptionnellement bienveillant et amical et sans les encouragements et l'aide effective de celui à qui je dois d'avoir pu franchir cette étape, dans l'évolution que je me suis fixée. Au seuil de ce travail, entrepris sur les conseils de *M. G. Bouligand*, et qui se rattache étroitement à ses recherches personnelles, je suis heureux d'exprimer mon affectueuse reconnaissance à celui dont je suis fier d'avoir été l'élève.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à M. le Professeur *Buhl*, pour l'accueil si bienveillant qu'il a réservé à ce travail, à M. le Doyen *Deltheil*, qui m'a indiqué l'intéressant sujet de la thèse complémentaire et m'a prodigué, à cette occasion, ses conseils éclairés. Je remercie également *M. Paloque*, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, pour l'intérêt qu'il a témoigné à mes recherches.

J'exprime enfin ma vive gratitude à M. le Professeur *Vălcovici*, de l'Université de Bucarest, et à M. le Professeur *V. Alaci*, de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, pour l'empressement avec lequel ce travail a été accueilli

dans le „*Bulletin Scientifique*“ de cette école et pour le soin qui a été apporté à son impression.

* * *

Le présent travail a pour but d'appliquer à l'étude de quelques catégories d'ensembles discontinus les méthodes utilisées par la géométrie infinitésimale directe pour l'étude de certaines catégories d'ensembles continus.

Avant d'aborder les questions particulières qui ont fait l'objet de nos recherches, il nous paraît utile de nous arrêter un instant sur la distinction entre les ensembles discontinus et les ensembles continus, cette distinction étant fondamentale pour préciser le but et les tendances de notre travail.

Nous dirons, avec *Emile Borel*¹⁾, qu'un ensemble est donné lorsqu'on sait en déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois. Considérons, par exemple, l'ensemble des termes d'une série. Cet ensemble sera connu si nous pouvons écrire la valeur du premier, du second, du troisième terme, et ainsi de suite, c'est-à-dire si nous pouvons numéroter chaque terme ou encore le faire correspondre à un nombre entier positif n . Ainsi, l'ensemble des termes de la série se présente pour nous avec la même clarté que l'ensemble des nombres entiers positifs. Ces deux ensembles sont tels qu'à tout élément de l'un corresponde un élément et un seul de l'autre; on exprime cette correspondance *biunivoque* en disant que les deux ensembles ont même *puissance*. Les ensembles qui ont même puissance que l'ensemble des nombres entiers positifs sont dits *ensembles dénombrables*. Quand le nombre des éléments de l'ensemble est *fini*, il suffit, pour déterminer l'ensemble, de définir la valeur de chacun de ses éléments. Dans ce cas, la notion de puissance se ramène à celle de nombre.

Tous les ensembles ne sont pas dénombrables. Considérons, par exemple, l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1. On peut montrer qu'étant donné un ensemble dénombrable quelconque de nombres réels compris entre 0 et 1, il y a une infinité non dénombrable de valeurs comprises entre 0 et 1 qui n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable considéré. A chaque nombre réel compris entre 0 et 1, on peut faire correspondre un point d'un segment rectiligne dont la distance à l'origine est définie par le nombre considéré. L'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 a même puissance que l'ensemble des points du segment rectiligne. On exprime ce fait en disant que l'ensemble des nombres réels a *la puissance du continu*, la notion de *continu* étant, comme celle de *nombre*, une notion que nous considérons comme première. Du point de vue de la puissance, il n'y a pas de différence essentielle entre les ensembles continus à une dimension et les ensembles continus à deux, à trois, ou à un plus grand nombre de dimensions, entre les fonctions d'une variable et les fonctions de plusieurs variables. Nous renvoyons, pour plus de précisions sur ce point, à l'ouvrage de *M. E. Borel* auquel nous empruntons ces remarques.

¹⁾ Leçons sur la théorie des fonctions, 1928 — Chap. I, pages 3 et suivantes.

Ce qu'il importe de considérer, c'est qu'il existe pour le moins deux sortes d'ensembles, les uns, qui ont la puissance des ensembles dénombrables, les autres, qui ont la puissance du continu. Ces deux catégories d'ensembles sont associées, moyennant le recours à la notion de puissance, d'une part, à la suite des nombres entiers positifs, d'autre part, à la suite des nombres réels compris entre 0 et 1.

Il est clair que ces deux notions ne se présentent pas à notre esprit avec la même évidence. Quand nous parlons de l'ensemble des nombres entiers ou, ce qui revient au même, de la suite des points d'une demi-droite dont les abscisses sont représentées par la suite des nombres entiers, nous voyons nettement ce que signifie l'expression : se donner tous les éléments de l'ensemble. En parcourant ces points, dans l'ordre où ils sont placés sur la demi droite, nous sommes assurés de n'en oublier aucun et de n'en rencontrer aucun deux fois. Quand nous parlons, au contraire, de l'ensemble des nombres compris entre 0 et 1 ou, ce qui revient au même, de l'ensemble des points situés sur un certain segment rectiligne, nous pouvons bien penser qu'un moyen certain de rencontrer tous les points de ce segment est de le parcourir avec la pointe d'un crayon par exemple, mais il ne nous est pas possible de dire quel est l'élément de la suite qui *précède* ou qui *suit immédiatement* un élément donné.

La notion que nous avons de la suite des nombres entiers est indiscutablement beaucoup plus claire que celle de la suite des nombres compris entre 0 et 1. Le *discontinu* est plus intelligible que le *continu*. Cependant, l'esprit rattache ces deux notions l'une à l'autre : "nous n'avons aucun moyen de passer du discontinu au continu", écrit *M. Carchian*¹⁾ mais l'esprit fait cependant le saut, car il ne se pose pas la question de savoir si une opération indéfiniment répétée peut être réalisable ; il suffit de se placer au moment où elle est effectivement réalisée.

Il semble donc naturel de commencer l'étude des ensembles par celle des ensembles discontinus et de chercher à étendre les résultats obtenus dans cette étude pour les appliquer aux ensembles continus. L'histoire du développement des mathématiques a montré que cet ordre, qui semble le plus logique, a été inversé. La raison en paraît assez naturelle. Tous les problèmes que pose la géométrie des ensembles font intervenir les continus spatiaux familiers qui servent de cadre à toutes nos études du discontinu. Les questions que pose la continuité ou la non-continuité d'un certain ensemble cèdent le pas à l'utilisation de tout un système préalable, car on s'est, en effet, d'ores et déjà donné un espace *euclidien*, dans lequel, *après-coup*, on étudie la manière d'être de certains ensembles. La distinction de deux points de l'espace euclidien, par exemple, nous apparaît comme une conséquence de l'ablation d'un continu par lequel étaient préalablement reliés ces deux points. La non-continuité se définit ainsi plus ou moins par rapport à la continuité et le discontinu que nous étudions est toujours plus ou moins *logé dans du continu*.

¹⁾ Cahiers de la nouvelle journée, No. 15, Paris 1929, page 36.)

Cependant des tentatives importantes ont été faites pour aller du discontinu au continu. C'est *Cantor* qui, le premier, a fait un pas décisif dans ce sens en établissant une théorie systématique des nombres transfinis, cardinaux ou ordinaux, et en traitant de l'ordre en général.¹⁾ Les travaux de *Cantor* et les prolongements qu'ils ont reçus représentent ce que nous possédons en matière de "méthode directe" pour l'étude du discontinu.

Le présent travail se rattache donc, par son orientation, à l'évolution traditionnelle de la géométrie des ensembles, puisqu'il se propose d'aborder l'étude des ensembles discontinus, plongés dans l'espace euclidien, en poursuivant la route indiquée par la géométrie infinitésimale directe, dans l'étude des ensembles continus.

* * *

On sait que le principal intérêt des méthodes de la géométrie infinitésimale directe réside dans ce fait qu'elles permettent l'étude de certaines variétés, indépendamment d'une donnée préalable de représentation analytique. Ces méthodes font appel à la considération de propriétés intrinsèques de ces variétés et principalement à celles de ces propriétés qui sont covariantes par rapport au groupe topologique restreint (γ).

Au premier rang des notions qu'introduit la géométrie infinitésimale directe se place celle de *point d'accumulation* d'un ensemble et celle de *contingent*.

Nous disons qu'un point O est un *point d'accumulation* d'un ensemble ponctuel lorsqu'une sphère infiniment petite de centre O contient au moins un point de l'ensemble distinct de O . On peut, dans cette définition, faire intervenir, au lieu d'une sphère de centre O , un entourage quelconque de ce point. La propriété du point d'accumulation est invariante pour toute transformation ponctuelle continue et biunivoque; autrement dit, elle présente le caractère topologique.

Un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel E peut appartenir ou ne pas appartenir à cet ensemble. L'ensemble E' de tous les points d'accumulation d'un ensemble E est l'ensemble *dérivé* de E .

Considérons un ensemble ponctuel E et un point d'accumulation O de cet ensemble. Soit un point quelconque M , assujéti à la seule condition d'être voisin de O . S'il existe une demi-droite OT issue de O et telle que l'angle des demi-droites OM et OT tende vers zéro en même temps que la distance des points O et M , l'ensemble E est *tangent* en O à la demi-droite OT ; celle-ci est une *demi-tangente* à l'ensemble E au point O .

Remarquons que nous avons supposé, pour définir la demi-tangente au point O , que ce point était un point d'accumulation de l'ensemble.

Lorsque la demi-tangente en un point d'accumulation O d'un ensemble ponctuel E n'est pas unique, l'ensemble de toutes les demi-tangentes au point O est appelé le *contingent* de l'ensemble E au point O .

¹⁾ Cf. *E. Borel* — Leçons sur la théorie des fonctions, pages 135 et suivantes. Voir aussi *W. Sierpinski* — Les nombres transfinis. Paris 1928).

Toute transformation ponctuelle du groupe topologique restreint (γ) effectuée sur tous les points d'un ensemble E permet d'obtenir un nouvel ensemble tel qu'en des points correspondants, les contingents se correspondent par la transformation linéaire tangente. Cette covariance du contingent, pour les transformations du groupe (γ), confère son intérêt à la notion de contingent.

La notion de contingent, comme les autres notions introduites par la géométrie infinitésimale directe, a un caractère universel : elle s'applique à tous les ensembles ponctuels. En vue des applications, on l'a surtout utilisée dans l'étude des ensembles continus. Mais on peut tout aussi bien s'en servir pour mettre en évidence certaines propriétés des ensembles discontinus.

Le théorème de *Denjoy-Durand* nous en donne un exemple remarquable :

un ensemble ponctuel est dénombrable si le contingent en chaque point de cet ensemble est contenu dans un demi-cône de révolution ayant ce point pour sommet.

Si l'on convient d'appeler *sommets* d'un ensemble E les points où il existe un demi-cône de révolution qui contient le contingent de E en ce point, le théorème de *Denjoy-Durand* peut s'exprimer de la manière suivante :

un ensemble ponctuel est dénombrable si chacun de ses points est sommet de l'ensemble.

La dénombrabilité de l'ensemble résulte du fait qu'il est possible d'associer à chacun de ses points un volume non nul tel que deux volumes correspondant à deux points quelconques n'empiètent jamais l'un sur l'autre.

L'intérêt du théorème de *Denjoy-Durand* réside dans ce fait qu'il emprunte à certaines propriétés géométriques *locales* d'un type permanent des renseignements relatifs à la structure *intégrale* d'un ensemble.

Comme l'a suggéré *M. G. Bouligand*, on peut être tenté de généraliser cette méthode et de rechercher certaines conditions géométriques qui permettent d'établir une classification des ensembles ponctuels, au point de vue de leur structure, et cela avec des nuances plus ou moins subtiles. On sait qu'un ensemble dont le contingent est vide en tout point n'a qu'un nombre *fini* de points. Un ensemble dont le contingent, en tout point, est contenu dans un demi-cône convexe est *dénombrable*. Ne pourrait-on trouver d'autres critères géométriques relatifs à un ensemble E, permettant d'affirmer que cet ensemble est *punctiforme, sans plus*. Ainsi serait établie une gradation entre les ensembles

finis, dénombrables, punctiformes.

Sans aborder le sujet dans toute son ampleur, on peut rechercher de tels critères dans une généralisation de celui qui est fourni par le théorème de *Denjoy-Durand* et, pour cela, en nous tenant à la géométrie plane, on peut substituer à la loi de raréfaction qui permet d'établir la dénombrabilité d'un ensemble, une loi plus complexe qui peut s'exprimer en disant que l'ensemble est "*encapuchonnable*" en chaque point et qui se définit de la manière suivante :

On suppose qu'en chaque point M de l'ensemble, on puisse trouver deux directions Mx et My et un secteur limité par la courbe :

$$y = \lambda x^{1+k} \quad 0 < k < 1$$

courbe rapportée aux deux axes Mx et My . Tous les points de l'ensemble assez voisins de M sont contenus à l'intérieur d'un secteur limité par cette courbe et par un segment rectiligne parallèle à l'axe $x'x$. Cette condition géométrique, que nous désignerons par A et que nous supposons satisfaite en tous les points de l'ensemble, revient à généraliser la notion de sommet que nous avons définie précédemment. L'angle de sommet O qui intervient pour les ensembles plans dans le théorème de Denjoy-Durand est ici remplacé par une figure jouant le rôle de capuchon : nous la prenons symétrique par

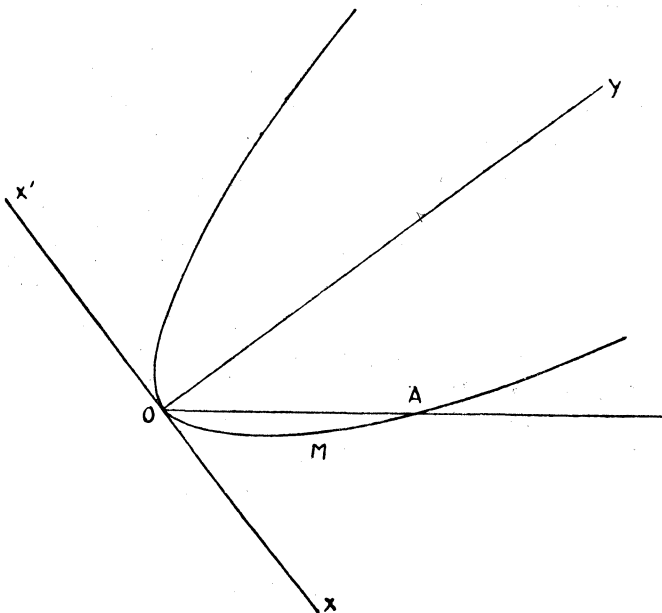


Fig. 1.

rapport à Oy et nous l'obtenons en substituant au côté OA l'arc de courbe OMA dont nous venons de donner l'équation. Dans cette équation, k est une constante positive, inférieure à l'unité. Cette dernière condition confère à la courbe choisie une courbure infinie au point O . En effet :

$$y' = \lambda (1+k) x^k$$

$$y'' = \lambda k (1+k) x^{k-1}$$

Le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

s'annule bien pour $x=0$.

Un autre critère géométrique répondant aux préoccupations que nous venons de préciser peut être recherché dans la condition suivante, que nous appellerons la condition B :

L'ensemble considéré est tel que le cercle passant par trois de ses points ait son rayon infiniment petit en même temps que le périmètre du triangle formé par ces trois points.

En réponse à ces deux questions, posées par *M. G. Bouligand* dans son Introduction à la Géométrie infinitésimale directe (page 221), notre travail est une contribution à l'étude que nous nous sommes proposée, en vue d'obtenir des critères de *non-continuité* permettant d'affirmer que les ensembles auxquels ils conviennent sont punctiformes, sans plus.

Abordant ce problème par une méthode de réduction à l'absurde, nous nous proposons de rechercher, en nous bornant à l'étude des ensembles ponctuels plans, si certains continus peuvent satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions A ou B.

* * *

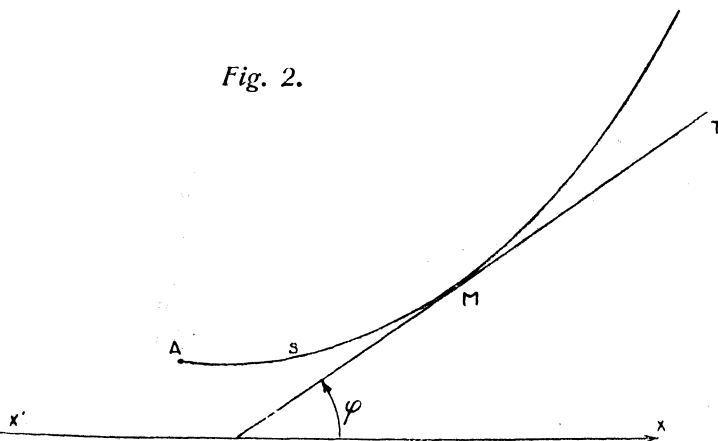
Nous étudierons d'abord quelques particularités présentées simultanément par les ensembles qui satisfont à la condition A et par ceux qui satisfont à la condition B. Ces deux conditions étant destinées, dans notre esprit, à servir indifféremment de critérium pour une même propriété structurale, nous nous efforcerons de les rapprocher dans toute la mesure du possible et de déterminer certaines propriétés communes des ensembles qui peuvent satisfaire à l'une ou à l'autre des deux conditions. En nous bornant toujours à des ensembles ponctuels plans, nous allons montrer que les deux classes d'ensembles jouissent d'une même propriété: *ils ne peuvent avoir qu'un nombre fini de points sur un arc borné de courbe à courbure bornée.*

Rappelons d'abord quelques notions qui vont nous être utiles. Considérons un ensemble ponctuel E. On dit qu'une droite D appartient au *paratingent* de cet ensemble au point M ou encore qu'elle est une *paratingente* de l'ensemble en M, s'il existe une suite de segments P Q non nuls, dont les extrémités sont des points de E, qui tendent vers M, tandis que les droites P Q tendent vers la droite D ou se confondent avec elle.

Le paratingent ainsi défini englobe toutes les droites qui font partie du contingent, mais il peut en contenir d'autres. Comme le contingent, le paratingent est covariant par rapport aux transformations du groupe topologique restreint (γ).

Soit une courbe C à tangente continue ou, plus précisément, à paratingente unique (fig. 2). Si l'on prend une courbe telle que celle représentée par l'équation $y^2 = x^3$, présentant un point de rebroussement, la tangente à cette courbe est cependant répartie d'une manière continue. On exclut,

Fig. 2.



la tangente à cette courbe est cependant répartie d'une manière continue. On exclut,

avec *M. G. Bouligand*, la possibilité de points de rebroussement, en supposent que la courbe admet une paratingente unique en chaque point. Rappelons à cette occasion cette conséquence explicitement énoncée par *M. G. Rabaté*¹⁾ du lemme d'univocité de *M. G. Bouligand*: un continu doué en chaque point d'une paratingente unique est une courbe admettant, autour de chaque point, une représentation explicite par une fonction continue douée d'une dérivée continue.

Désignons par φ l'angle que fait avec l'axe $x'x$ la tangente MT en un point M de la courbe et par s la longueur de l'arc AM , comptée à partir d'une origine A . Dire que la courbe C est à courbure bornée, c'est dire que le rapport $\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ reste borné.

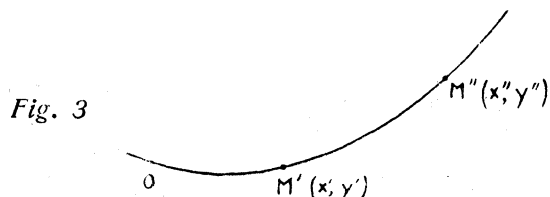
Nous allons établir la propriété qui est commune aux ensembles satisfaisant à la condition A et à ceux qui satisfont à la condition B en commençant par ces derniers. Nous démontrerons pour cela les deux lemmes suivants;

LEMME I. — *Quand deux points M' et M'' d'une courbe à courbure bornée tendent indépendamment vers un même point O , le rapport :*

$$\varrho = \frac{\text{corde } M' M''}{\text{arc } M' M''}$$

tend vers l'unité.

Nous savons déjà que ce rapport est inférieur à l'unité. Prenons pour axes Ox et Oy la tangente et la normale à la courbe au point O . On a :



$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi ,$$

ces relations étant vraies dès que la courbe possède une tangente continue :

$$\Delta x = x'' - x' \qquad \Delta s = s'' - s'$$

$$\Delta x < \text{corde } M' M''$$

et :

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} < \varrho < 1.$$

L'angle φ , qui est une fonction continue de s , s'annule pour $s = 0$. Il en résulte qu'à toute valeur positive, aussi petite qu'on voudra, d'un nombre

¹⁾ Thèse Toulouse, 1931. — No. 64.

ε , on peut faire correspondre une longueur h telle que l'inégalité :

$$|s| < h$$

entraîne sur la position de courbe correspondante :

$$|\varphi| < \varepsilon.$$

Sur cette portion de courbe nous aurons donc :

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} < \cos \varphi < 1$$

ou :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) ds < \cos \varphi ds < ds$$

En intégrant entre les limites s' et s'' de s , qui correspondent aux deux extrémités de la portion de courbe considérée, on a :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)(s'' - s') < \int_{s'}^{s''} \cos \varphi ds < s'' - s'$$

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} < \left| \frac{\Delta x}{\Delta s} \right| < \varrho < 1.$$

Comme on peut choisir ε aussi petit qu'on veut, on voit que ϱ tend vers l'unité.

LEMME II. — *L'inverse du diamètre d'un cercle passant par trois points d'une courbe à courbure bornée reste lui même borné.*

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait former une suite indéfinie de triangles $M' M'' M'''$ telle que la suite des diamètres des cercles circonscrits tende vers zéro. Nous allons montrer que cela est incompatible avec le fait que la courbure de la courbe est bornée.

En effet, la courbe étant à paratingente unique, les parallèles menées par l'origine aux trois côtés du triangle variable $M' M'' M'''$ tendent simultanément vers la direction de la paratingente Ox au point O . Le triangle $M' M'' M'''$ présentera donc un angle obtus qui tend vers π . Convenons que M'' est le sommet de l'angle obtus et admettons que l'inverse du diamètre du cercle circonscrit, qui est égal à

$$\frac{\sin \widehat{M' M'' M'''}}{\text{corde } M' M'''}$$

croisse indéfiniment. Il en est de même du rapport :

$$\frac{\sin \widehat{M' M'' M'''}}{\text{arc } M' M'''}$$

Ce rapport ne diffère, en effet, du précédent que par un facteur qui, en vertu du lemme I, tend vers l'unité.

Le théorème des accroissements finis est ici applicable grâce à la dérivabilité de la fonction donnant la représentation explicite. Il permet d'affirmer qu'il existe entre M' et M'' un point M_1 où la tangente est parallèle à $M' M''$ et que, de même, il existe entre M'' et M''' un point M_2 où la tangente est parallèle à $M'' M'''$. L'arc $M_1 M_2$ étant moindre que l'arc $M' M'''$, le rapport :

$$\frac{\sin \widehat{M' M'' M'''}}{\text{arc } M_1 M_2}$$

tend lui aussi vers l'infini. Il doit en être de même du rapport :

$$\frac{\widehat{M' M'' M'''}}{\text{arc } M_1 M_2}$$

qui ne diffère du précédent que par un facteur qui tend vers l'unité. Du fait que l'angle des tangentes en M_1 et M_2 est égal à $\widehat{M' M'' M'''}$, le rapport précédent est une valeur particulière du rapport $\left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$. Le résultat obtenu est en contradiction avec l'hypothèse.

Il devient facile d'établir, pour les ensembles qui satisfont à la condition B, la propriété que nous avons annoncée :

Théorème. — *Tout ensemble ponctuel tel que le cercle passant par trois de ses points ait son rayon infiniment petit en même temps que le périmètre du triangle de ces trois points ne peut avoir qu'un nombre fini de points sur un arc borné de courbe à courbure bornée.*

Si l'ensemble considéré n'a pas un nombre fini de points sur l'arc qui le porte, il existe sur cet arc un point d'accumulation de cet ensemble. Considérons trois points M' , M'' , M''' , de l'ensemble qui tendent indépendamment vers B. Le périmètre du triangle de ces trois points tend vers zéro. En vertu du lemme précédent, le diamètre du cercle circonscrit au triangle $M' M'' M'''$ garde une valeur bornée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. La propriété annoncée est donc démontrée.

Nous allons l'établir maintenant pour les ensembles qui satisfont à la condition A. Il nous suffira pour cela de démontrer le lemme suivant :

LEMME. — *L'inverse du diamètre d'un cercle tangent à un arc de courbe à courbure bornée et passant par un autre point de la courbe, voisin du point de tangence, reste lui-même borné.*

En effet, de ce que l'arc est à courbure bornée, il résulte que le cercle tangent en un point O de l'arc et passant par un autre point M de la courbe, voisin du point de tangence, ne peut avoir de position limite qu'à l'extérieur d'un certain cercle de rayon fini, placé d'un côté ou de l'autre de la tangente en O à l'arc considéré.

Théorème. — *Un ensemble tel qu'en chacun de ses points, les points*

voisins de l'ensemble soient tous situés dans une aire définie par les inégalités suivantes :

$$h > y > \lambda |x|^{1+k}$$

avec :

$$\lambda > 0 \quad \text{et} \quad 1 > k > 0$$

(la courbe C qui limite l'aire étant rapportée à deux axes passant par le point considéré) ne peut avoir un nombre infini de points sur un arc borné d'une courbe à courbure bornée.

Si l'ensemble a une infinité de points sur l'arc de la courbe I , il a au moins sur cet arc un point d'accumulation O. Du fait que l'arc est à courbure bornée, il résulte du lemme précédent que tous les points de l'ensemble considéré situés sur I au voisinage du point O sont situés à l'extérieur d'un cercle de rayon fini. Comme ils doivent être inclus dans la courbe C définie dans l'énoncé, celle-ci doit être tangente extérieurement au cercle, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque le rayon de courbure de C est nul au point O. Les ensembles satisfaisant à la condition A ne peuvent donc avoir un nombre infini de points sur un arc borné de courbe à courbure bornée.

* * *

L'impossibilité que nous venons de reconnaître à nos ensembles d'avoir une infinité de points sur un arc de courbe à courbure bornée (impossibilité qui est commune aux deux classes d'ensembles soumis aux conditions A et B), va nous permettre de chercher une réponse à la question que nous nous sommes posée : un continu peut-il satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions A ou B? Si un tel continu existe, il n'aura qu'un nombre fini de points sur une courbe à courbure bornée. La poursuite de nos recherches nous amène donc naturellement à étudier les propriétés des continus qui satisfont à cette dernière condition. Nous limitant à ce qui est nécessaire pour le but que nous poursuivons, nous allons établir quelques lemmes dus à *Marchaud*, en suivant étroitement la démonstration de cet auteur (*A. Marchaud*. Sur une propriété intuitive, caractéristique des lignes de *Jordan* sans point double. *Mathematica*. Cluj. Vol. IV, p. 139 et suivantes).

LEMME I. — *Un continu qui contient à la fois des points intérieurs et des points extérieurs à un domaine possède au moins un point sur la frontière du domaine.*

Soit un continu E ayant un point A intérieur et un point B extérieur à un domaine D. Relions A et B par un ligne polygonale dont chacun des côtés soit plus petit que $\frac{1}{2^p}$ et ayant ses sommets sur le continu. Considérons le point M de cette chaîne tel que tous ceux qui le précèdent, quand on parcourt la ligne de A en B, soient intérieurs au domaine D, le suivant lui étant extérieur. Désignons ce point par M_p , pour rappeler qu'il appartient à

la chaîne de côtés inférieurs à 2^{-p} . Lorsque p prend les valeurs successives 1, 2, ..., le point M , défini comme il vient d'être dit, prend les positions M_1, M_2, \dots qui admettent un point d'accumulation μ . Ce point, qui est aussi près qu'on le veut de points intérieurs à D , n'est pas extérieur au domaine. Montrons qu'il ne lui est pas intérieur. S'il en était ainsi on pourrait tracer de μ comme centre un cercle de rayon ρ assez petit pour que ce cercle soit intérieur à D . En choisissant p assez grand, on pourrait donner à chacun des côtés de la chaîne qui relie A et B une valeur assez petite pour que le point qui suit M_p dans la chaîne soit à une distance de M_p inférieure à ρ . Le point qui suit M_p serait alors à l'intérieur du cercle de rayon ρ et, par suite, à l'intérieur du domaine D , ce qui est contraire à l'hypothèse.

LEMME II. — *Un continu E qui a un point intérieur et un point extérieur à un domaine D et qui possède un nombre fini k de points sur la frontière du domaine est la somme d'un nombre fini de continus distincts, les uns non-intérieurs, les autres non-externes au domaine. Le nombre des continus de chaque catégorie est inférieur à k et chacun de ces continus a au moins un point et au plus k points sur la frontière du domaine.*

Le théorème précédent nous apprend qu'un point quelconque de E intérieur à D peut être inclus dans un ensemble μ_i de points bien enchaînés avec l'un des points que E possède sur la frontière de D . Soit un point d'accumulation M d'un ensemble μ_i . Il existe sur cet ensemble des points aussi voisins de M qu'on le veut. Comme le point M appartient à E , il appartient à la partie de E non extérieure à D . L'ensemble μ_i est donc fermé, à moins qu'il ne se réduise au seul point de la frontière, et deux points de l'ensemble μ_i , bien enchaînés avec le point de la frontière, sont bien enchaînés entre eux. Deux ensembles μ_i et μ_j qui ont un point commun coïncident. La partie de E non extérieure à D peut donc être décomposée en un nombre fini de continus. Puisque E contient un point intérieur à D , il y a au moins un continu μ_i qui ne se réduit pas au point de la frontière et il ne saurait y avoir plus de k continus, puisqu'il n'y a que k points sur la frontière.

Chaque continu μ_i , qui a au moins un point sur la frontière, ne peut évidemment en avoir plus de k .

On démontrerait le théorème de la même manière pour la partie de E non intérieure à D .

LEMME III. — *Si un continu E a chacun de ses points, intérieur à un domaine aussi petit qu'on veut, sur la frontière duquel il existe un nombre fini, mais pas nécessairement borné¹⁾ de points de E , on peut relier*

¹⁾ Cette condition est plus large que s'il s'agissait d'un nombre fini de points. La courbe

$$y = x^2 \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right)$$

est coupée par toute droite en un nombre fini de points, ce nombre pouvant être cependant rendu aussi grand qu'on veut (exemple emprunté à *M. G. Bouligand: Géométrie infinitésimale directe*, paragr. 108, p. 114).

deux points A et B du continu par un arc simple de Jordan dont tous les points appartiennent à E.

Tout point M de E étant intérieur à un domaine aussi petit qu'on veut, on peut toujours inclure un pareil domaine dans un cercle de centre M et de rayon donné ρ . Dans ce domaine, on peut toujours inclure à son tour un autre cercle D. En vertu du lemme de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir tout le continu E au moyen d'un nombre fini de cercles analogues à D. Tout point de E est donc intérieur à l'un de ces cercles. Chacun des domaines D_1, D_2, \dots, D_p , constitués par ces cercles décompose tout continu qui appartient à E en un nombre fini de continus distincts, les uns non-intérieurs, les autres non-extérieurs à D, le nombre des continus résultant de la décomposition pouvant être égal à un, si le continu primitif n'a aucun point intérieur ou aucun point extérieur à D.

Considérons la suite D_1, D_2, \dots, D_p . D_1 décompose E en un nombre fini de continus distincts; D_2 décompose chacun de ces continus en un nombre fini de nouveaux continus distincts et ainsi de suite. Quand on arrive au dernier domaine D_p , E a été décomposé en un nombre fini de continus distincts. Deux continus ne peuvent avoir en commun qu'un nombre fini de points, car ces points ne peuvent être situés que sur l'une ou l'autre des frontières des domaines D qui limitent les continus. Tous les points d'un même continu sont non-extérieurs à un certain domaine D_i , car ce continu a au moins un point intérieur à un domaine D_i et les points à l'extérieur de ce domaine appartiennent à un autre continu.

On peut donc relier deux points A et B du continu E par une chaîne constituée par les continus qu'on a obtenus précédemment.

Nous allons montrer qu'on peut toujours s'arranger :

1° — pour que deux continus non-consécutifs n'aient pas de point commun. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait de supprimer les éléments intermédiaires et les deux continus considérés deviendraient consécutifs.

2° — pour que deux continus consécutifs n'aient qu'un seul point commun. Ils en ont évidemment toujours un au moins et le nombre de leurs points communs est fini. Considérons trois continus successifs $C_{\lambda-1}, C_\lambda, C_{\lambda+1}$, le premier et le second n'ayant entre eux qu'un point commun $M_{\lambda-1}$, le second et le troisième ayant entre eux plusieurs points communs N_1, N_2, \dots . Le point N_1 , qui appartient au continu E_λ peut être inclus dans un petit domaine δ_{N_1} assez petit pour que $M_{\lambda-1}$ et les autres points N_2, N_3, \dots lui soient extérieurs. Le domaine δ_{N_1} décompose C_λ en un nombre fini de continus non-intérieurs ou non-extérieurs à lui. Un des continus non-intérieurs γ contient le point $M_{\lambda-1}$. Un des continus non extérieurs γ' contient N_1 .

Supposons que γ ne contienne aucun des points N_2, N_3, \dots . Les deux continus γ et γ' ont un point commun, puisque les points $M_{\lambda-1}$ et N_1 portés par chacun d'eux appartiennent à E et sont bien enchaînés. On peut remplacer C_λ par l'ensemble $\gamma + \gamma'$ qui n'a qu'un point commun avec $C_{\lambda+1}$.

Si maintenant γ contient un des points N_2, N_3, \dots on peut remplacer C_λ par γ qui a avec $C_{\lambda+1}$ un point commun de moins que C_λ . Après un nombre fini d'opérations analogues, on obtiendra un continu n'ayant qu'un point de commun avec $C_{\lambda+1}$.

Les deux points A et B peuvent donc être reliés par une chaîne de continus distincts qui appartiennent à E, chacun d'eux étant inclus dans une sphère de rayon inférieur ou égal à ϱ , deux continus consécutifs n'ayant qu'un point commun et deux continus non consécutifs n'en ayant aucun.

Si $AB > \varrho$, la chaîne de continus a au moins deux éléments. Nous pouvons former entre A et B une première chaîne de continus en prenant une valeur ϱ_1 plus petite que AB et que 2^{-1} . Sur chaque élément de la chaîne, nous pouvons de la même manière constituer une nouvelle chaîne de continus en prenant une valeur ϱ_2 inférieure à 2^{-2} et inférieure au plus petit des segments limités par les extrémités d'un même élément de la première chaîne. Re commençons l'opération sur les éléments de la deuxième chaîne et ainsi de suite. La chaîne de rang n que nous désignerons par I_n se déduit de I_{n-1} en prenant pour ϱ_n une valeur inférieure à 2^{-n} , un élément de I_{n-1} contenant au moins deux éléments de I_n .

Démontrons que deux éléments consécutifs d'une des chaînes successives ont un point commun et un seul, deux éléments non consécutifs n'en ayant aucun. La propriété est vérifiée pour la première chaîne. Montrons que si elle est vérifiée pour I_{n-1} , elle l'est aussi pour I_n .

Si les deux éléments consécutifs de I_n proviennent d'un même élément de I_{n-1} , ils n'ont qu'un seul point commun. S'ils proviennent de deux éléments consécutifs de I_{n-1} , ils ne peuvent avoir en commun que le seul point commun à ces deux éléments.

Si deux éléments non consécutifs de I_n proviennent d'un même élément de I_{n-1} , ils n'ont pas de point commun. Il en est de même s'ils proviennent de deux éléments non consécutifs. S'ils proviennent enfin de deux éléments consécutifs de I_{n-1} , ils ne peuvent avoir de point commun, car le seul point commun aux deux éléments consécutifs de I_{n-1} appartient à deux éléments consécutifs de I_n .

Nous allons montrer maintenant qu'on peut établir une correspondance *continue* et *biunivoque* entre les divers points M du continu E entre A et B et les divers points μ d'un segment de droite $\alpha\beta$ de longueur unité.

Partageons $\alpha\beta$ en autant de segments consécutifs égaux qu'il y a d'éléments dans la chaîne I_1 , chaque élément de $\alpha\beta$ correspondant à l'élément de même rang de la chaîne I_1 . Partageons ensuite chaque élément de $\alpha\beta$ en autant de parties égales qu'il y a d'éléments de I_2 provenant de l'élément de I_1 qui correspond à l'élément partagé de $\alpha\beta$. Quand on a fait cette opération n fois, chacun des éléments de $\alpha\beta$ a une longueur inférieure ou au plus égale à 2^{-n} et il existe une correspondance biunivoque entre les éléments des deux chaînes de rang n constituées d'une part, entre A et B, sur le continu E, d'autre part, sur le segment $\alpha\beta$.

Un point μ du segment $\alpha\beta$, s'il n'est jamais l'extrémité d'un des éléments d'une des chaînes formées sur $\alpha\beta$, peut être considéré comme la limite d'une suite d'éléments qui comprennent ce point, et qui appartiennent respectivement aux chaînes successives constituées sur $\alpha\beta$. A chacun des éléments de cette suite, on peut faire correspondre un élément de la chaîne I' , qui correspond, comme il a été dit précédemment, à la chaîne formée sur $\alpha\beta$. Si, dans chacun de ces éléments de I' , de plus en plus petits, on prend un point M, la suite des points M ainsi obtenus admet un point d'accumulation unique. C'est ce point qui correspond sur le continu E au point μ du segment $\alpha\beta$.

Si μ est à l'extrémité d'un segment de l'une des chaînes constituées sur $\alpha\beta$, ce point appartient à deux segments consécutifs d'une chaîne d'un certain rang. A ces deux segments correspondent, dans les chaînes successives, deux suites de segments. A ces deux suites correspondent, dans les chaînes I' , sur le continu E, deux suites de segments qui ont chacune pour limite un point unique. Les deux points limites ne peuvent être distincts parce que leur distance est moindre que $2 \cdot 2^{-n}$.

Dans tous les cas, il correspond à un point μ de $\alpha\beta$ un point unique M de E, α et β correspondant respectivement à A et B.

La correspondance ainsi établie entre μ et M est *continue*, car à deux points μ et μ' de $\alpha\beta$ appartenant à un même élément ou à deux éléments voisins de l'une des chaînes constituées sur $\alpha\beta$, correspondent sur E deux points M et M' d'un même élément ou de deux éléments voisins d'une chaîne formée sur E. Les distances $\mu\mu'$ et MM' tendent simultanément vers zéro.

La correspondance entre μ et M est *biunivoque*, car si deux points μ et μ' sont distincts, ils appartiennent respectivement à deux éléments distincts et non consécutifs d'une chaîne d'un certain rang sur $\alpha\beta$. Il leur correspondra donc sur l'une des chaînes formées sur E, deux éléments distincts et non consécutifs à partir d'une chaîne d'un certain rang et ces deux éléments auront deux points limites distincts M et M'.

Il résulte de la correspondance continue et biunivoque qu'on peut établir entre les divers points de E, compris entre A et B, et les divers points du segment rectiligne $\alpha\beta$, que les points A et B peuvent être reliés par un arc simple appartenant tout entier au continu E.

Afin de poursuivre nos recherches, nous emprunterons encore à *Marchaud* le lemme suivant¹⁾ :

LEMME. — *Tout arc qui n'est coupé par les parallèles aux axes de coordonnées qu'en un nombre fini de points comprend au moins un arc qui n'est coupé par les mêmes droites qu'en un nombre borné de points.*

¹⁾ *Marchaud*. Sur la quasirectifiabilité. *Fundamenta Math.* t. XX, année 1933, p. 105—106.

Considérons un arc simple (fig. 4) coupé en un nombre fini — mais pas nécessairement borné — de points par toute parallèle à l'un des axes.

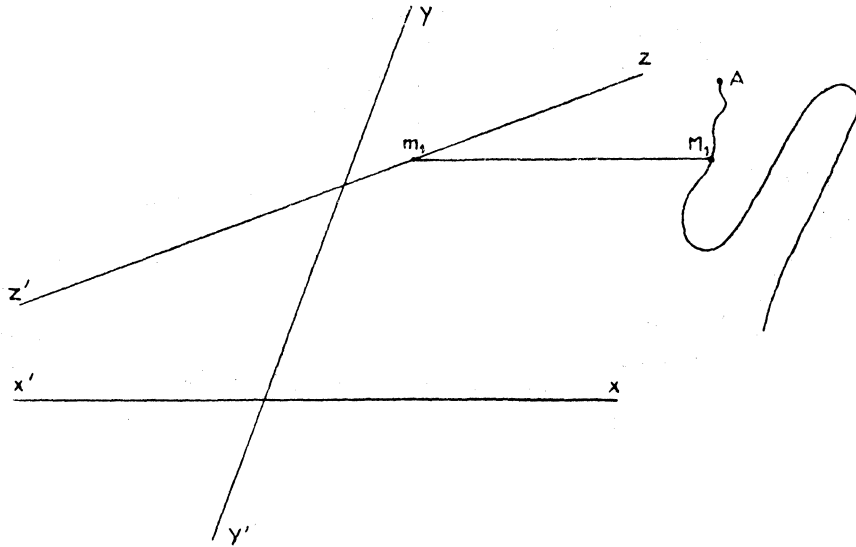


Fig. 4.

Soient :

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

les équations donnant la représentation paramétrique de cet arc,

$$\alpha \leq t \leq \beta.$$

Considérons une droite $z'z$ qui n'est parallèle à aucun des axes; soit m_1 la projection de M_1 sur $z'z$ parallèlement à $x'x$. Etudions, à titre préliminaire, l'ensemble e_p des points de $z'z$ dont chacun est la projection de p points de notre arc. Nous supposons p assez grand pour que e_p ne contienne la projection d'aucune des extrémités A ou B de cet arc. La parallèle à $x'x$ issue d'un point s de e_p rencontre l'arc AB en p' points ($p' \geq p$). Soient S_1, S_2, \dots, S_p ces points, dans l'ordre où ils se présentent sur l'arc parcouru de A en B. Chaque arc $AS_1, \dots, S_i S_{i+1}, \dots, S_{p'} B$ a tous ses points d'un même côté de la parallèle à $x'x$ menée par S.

De chaque arc partiel (fermé) $S_i S_{i+1}$, enlevons un arc partiel intérieur (ouvert); il reste après cette ablation un ensemble composé de deux arcs fermés, soit au total $2p'$ arcs résiduels n'ayant de points communs deux à deux que sur la parallèle à $x'x$ menée par s . De ces arcs, p' au moins sont d'un même côté de cette parallèle. On peut donc trouver sur $z'z$ un point s' tel que tous les points du segment ss' appartiennent à e_p .

Tout point de e_p appartient donc à un segment qui fait lui-même partie de e_p , une exception pouvant être faite pour chacune de ses extrémités qui

se trouverait distincte du point en question. Il s'ensuit que e_p est la somme d'une suite, finie ou infinie, de segments, pouvant contenir deux, une ou zéro extrémités.

Considérons la bande parallèle à l'axe des x , interceptant sur $z'z$ un segment de e_p . D'après l'hypothèse faite sur p , A et B sont extérieurs à la tranche ou sur les bords. Soit M_1 la borne, du côté de A, des points de l'arc AB intérieurs à la bande; M_1 est sur l'un des bords et ne peut se confondre avec A. Parcourons l'arc de M_1 vers B. Comme chaque parallèle à l'axe des x intérieure à la bande coupe l'arc AB en un nombre fini de points, il y aura un premier point où l'arc sort de la bande, soit M_2 , un deuxième point d'entrée, soit M_3 , un deuxième point de sortie, etc. On aura donc une suite d'arcs $M_1 M_2, M_3 M_4, \dots, M_{2p-1} M_{2p}$ extérieurs les uns aux autres qui portent les seuls points de l'arc AB appartenant à la bande. M_1 peut être confondu avec A et M_2 peut l'être avec B. Il est d'ailleurs sous-entendu qu'en chacun des points M_i , distinct de A ou de B, l'arc traverse effectivement le bord de la bande.

Prenons successivement toutes les bandes correspondant aux divers segments de e_p ; nous aurons une suite d'arcs partiels de AB non empiétant, car deux bandes n'empiètent pas. Soit E_p l'ensemble des arcs ainsi obtenus et ε_p son image sur le segment (α, β) de l'axe des t .

En retranchant E_p de AB, il reste un ensemble d'arcs qu'une parallèle à l'axe $x'x$ coupe en $p - 1$ points au plus.

Nous venons d'établir que sur l'arc initial il nous est possible d'en prélever certains autres (et il nous suffit ici de dire: au moins un autre) qui soient coupés par une parallèle à l'axe des x en p points au plus (p désignant un nombre entier choisi comme il a été dit au début de cette démonstration).

Prélevons l'un de ces arcs. Sur lui, nous pourrions prélever, d'après le même processus, un nouvel arc qui soit coupé par une parallèle à l'axe en $p + q$ points au plus.

Finalement, nous obtenons, après ces prélèvements, un nouvel arc coupé par chaque parallèle à l'un des arcs en un nombre borné de points.

Or, *M. Marchaud* a montré qu'un tel arc est *rectifiable*.

* * *

Ces résultats étant acquis, nous pouvons entrevoir par quelles démarches il nous sera possible d'aborder la question que nous nous posons depuis le début de cette étude: *un continu peut-il satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions A ou B?*

Nous savons que les ensembles satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces conditions ne peuvent avoir qu'un nombre fini de points sur un arc borné de courbe à courbure bornée. Supposons qu'il existe un continu satisfaisant à l'une ou à l'autre des mêmes conditions. Un tel continu ne peut être coupé par une droite ou par une circonférence quelconques qu'en un nombre fini

de points. Le dernier des théorèmes que nous venons de démontrer nous apprend en outre que le continu envisagé se décompose en une suite d'arcs simples dont chacun satisfait à la condition A ou à la condition B. Sur l'un de ces arcs, il existe même, entre deux points, des arcs partiels rectifiables dont chacun satisfait à l'une ou à l'autre des mêmes conditions et nous savons qu'en un point d'un tel arc¹⁾, il existe une seule demi-tangente postérieure et un seul cercle osculateur correspondant à cette demi-tangente (grâce au fait de ne couper une droite ou un cercle arbitraire qu'en un nombre fini de points).

Pour répondre à la question que nous nous sommes posée, il faudrait établir le théorème suivant :

Tout arc simple rectifiable qui n'est coupé qu'en un nombre fini de points par une droite ou par un cercle possède cependant la propriété d'être coupé par certaines courbes à courbure bornée en une infinité de points.

Si l'arc en question est un arc à courbure bornée, il suffit de constater que l'arc est coupé par lui-même en une infinité de points pour montrer l'évidence du théorème.

Quand il s'agit d'un arc quelconque, la démonstration apparaît plus difficile.

Admettons cependant que le théorème précédent soit établi dans toute sa généralité. Si un continu satisfait à l'une ou à l'autre des conditions A ou B, on peut y prélever, d'après ce qui précède, un arc rectifiable qui peut être coupé en une infinité de points par certaines courbes à courbure bornée. Or, nous avons démontré, pour des ensembles ponctuels plans satisfaisant à l'une ou à l'autre des conditions A ou B, qu'ils ne sauraient avoir qu'un nombre fini de points sur une courbe quelconque à courbure bornée. De cette contradiction fondamentale, il résulte que les prémisses que nous avons adoptées sont erronées et qu'il ne saurait exister aucun continu satisfaisant à l'une des conditions A ou B.

La démonstration du théorème précédent, si elle était possible, nous permettrait donc d'atteindre le but principal de cette étude et l'une ou l'autre des conditions A ou B pourrait alors servir de critérium de discontinuité dans la recherche des propriétés structurales des ensembles.

Faute d'avoir obtenu cette démonstration, constatons toutefois qu'un résultat important est acquis : *s'il existe vraiment des continus satisfaisant à l'une ou à l'autre des conditions étudiées, on pourra prélever sur ces continus des arcs simples rectifiables, tels qu'aucune portion de ces arcs ne soit à courbure bornée.*

Adoptant maintenant une autre méthode de recherche, nous allons étudier séparément les ensembles qui satisfont à la condition A et ceux qui satisfont à la condition B.

Nous rappellerons au préalable une notion que nous utiliserons dans les développements qui vont suivre, celle de *paratingent second*.

¹⁾ Géométrie infinitésimale directe. Chap. XIII, par. 111.

On dit qu'une droite D appartient au paratingent second d'un ensemble en un point M s'il existe une suite de divisions rectilignes formées chacune par 3 points de l'ensemble, tendant simultanément vers M , de telle manière que les droites qui supportent ces divisions tendent vers D (si elles ne coïncident déjà avec D).

Le paratingent second en un point donné M de l'ensemble est fermé. En effet, la droite D , qui appartient au paratingent, peut être considérée comme la limite d'une suite de divisions rectilignes dont chacune est formée par 3 points de l'ensemble qui tendent vers le point M et dont les droites qui supportent ces points tendent vers la droite D . Cette propriété appartient, non seulement aux paratingentes au point M , mais encore à celles qui correspondent aux points voisins de l'ensemble qui tendent vers M . Le paratingent second d'un ensemble E jouit de la semi-continuité supérieure d'inclusion.

Soit un ensemble E dont le paratingent second est vide en un point M de cet ensemble. Cette propriété appartient aussi aux points assez voisins de M , en raison de la semi-continuité supérieure d'inclusion que nous venons de rappeler. Le point M , limite d'un ensemble de points appartenant à E , est un point d'accumulation de E ; il appartient lui-même à E . Si l'on considère une sphère de centre M et de rayon ρ suffisamment petit, il existe, à l'intérieur de la sphère, sur chaque droite issue de M , un point, au plus, de E distinct de M et cela, du fait que le paratingent second est vide au point M . Pour la même raison, il existe au plus deux points de E sur toute portion de droite intérieure à la sphère.

Avant d'appliquer ces résultats à établir une propriété importante des continus dont le paratingent second est vide en chaque point, nous allons étudier la structure d'un continu plan passant par l'origine O des coordonnées et ayant un point au plus sur chaque corde parallèle à l'axe Oy d'un cercle C de centre O .¹⁾

Il s'agit de montrer que ce continu est, au voisinage du point O , un arc simple dont l'équation est $y = f(x)$.

Considérons l'ensemble E des points du continu intérieurs au cercle C . Sur le diamètre de ce cercle porté par Oy , il n'existe qu'un point du continu: c'est le point O lui-même, les autres étant extérieurs à E . Il en résulte que tous les points de ce diamètre, à l'exception de O , peuvent être le centre d'un cercle qui ne contient aucun point de E . En réunissant tous ces cercles ouverts, on forme un ensemble ouvert Ω qui a deux constituants séparés par l'axe $x'Ox$.

Pour montrer que E est un arc simple, il suffit de montrer que la projection e de E sur $x'Ox$ est un segment qui contient le point O . S'il n'en était pas ainsi, il existerait sur la portion de $x'Ox$ intérieure au cercle C une infinité de segments ouverts qui appartiendraient à l'ensemble complé-

¹⁾ Cf. G. Bouligand. Géométrie infinitésimale directe par 59.

mentaire de ϵ . Deux parallèles à Oy passant par les extrémités d'un tel segment découperaient sur le cercle C une bande à l'intérieur de laquelle il n'existerait aucun point de E . Toutes les bandes formées de cette manière peuvent être réunies à l'ensemble des cercles ouverts définis tout à l'heure, chacune des bandes étant limitée en outre, au-dessus et au-dessous de $x'Ox$, par des arcs appartenant à l'un ou à l'autre des cercles ouverts qui forment Ω . L'ensemble E , inclus dans l'ensemble que nous venons de définir, est formé par la réunion de régions disjointes. Il ne saurait donc être un continu. Tout continu plan satisfaisant aux conditions indiquées, autour d'un point O , est donc bien, au voisinage de ce point, un arc simple d'équation $y = f(x)$.

Nous pouvons maintenant étudier la structure d'un continu plan dont le paratingent est vide en chaque point.¹⁾

Décrivons autour d'un point O de ce continu un cercle C de rayon suffisamment petit pour que le continu soit coupé par toute corde de ce cercle en deux points au plus. Considérons un point A du continu, différent de O , et situé lui aussi à l'intérieur du cercle C . Il résulte de ce que nous venons de dire qu'au voisinage de O , comme au voisinage de A , le continu est un arc simple. Toutes les cordes parallèles à OA et qui en sont assez rapprochées coupent le continu en deux points au plus. Si l'on prend comme axe Oy la demi-droite OA , les deux arcs qui forment le continu au voisinage de O et de A sont respectivement représentés par des équations de la forme :

$$y = f_1(x) \qquad y = f_2(x)$$

Si le paratingent second est vide en chaque point du continu, les conclusions précédentes s'appliquent à tous les points de ce continu. On peut, à chaque point tel que O , faire correspondre un autre point tel que A . Il en résulte que le continu est formé par la réunion d'arcs simples qui peuvent être représentés, à l'aide d'axes convenablement choisis, par des équations analogues aux précédentes, chacun de ces arcs n'étant coupé par une droite quelconque qu'en deux points au plus.

Soit un arc AB découpé sur le continu; démontrons que la région formée par cet arc et par la corde AB est convexe, c'est-à-dire que la frontière de cette région est coupée par une droite quelconque en deux points au plus. En effet, toute droite qui rencontre la frontière en des points appartenant à l'arc ne peut avoir plus de deux points de rencontre. Il suffit donc d'établir la propriété pour une droite qui rencontre la frontière à la fois sur la corde AB et sur l'arc. Du fait que la corde AB n'a que ses deux extrémités en commun avec l'arc, celui-ci est tout entier situé d'un même côté du segment AB . Toute corde qui joint deux points M et N de l'arc AB n'a pas de point commun avec le segment AB , puisque les deux points M et N sont d'un même côté de AB . Une droite qui joint un point du segment AB

¹⁾ Géométrie infinitésimale directe, parag. 120.

à un point de l'arc AB ne peut donc avoir avec cet arc d'autre point commun.

Nous voyons qu'on peut inclure chacun des points du continu dans un petit arc convexe qui ne saurait avoir de portion rectiligne et qui, pour cette raison, est dit *absolument convexe*. Le lemme de *Borel-Lebesgue* permet d'affirmer que le continu considéré est formé par un nombre fini d'arcs simples. On peut choisir deux de ces arcs successifs de manière qu'ils aient une partie commune. Du fait que chacun d'eux a le même sens de convexité que la partie commune, ce sens est le même sur les deux arcs. Comme le même raisonnement peut être répété de proche en proche, on voit que *ce sens est le même tout le long de l'arc considéré*. La permanence du sens de la convexité est une propriété des arcs (on sait qu'il suffit de dire des continus) dont le paratingent second est vide en chaque point. Cette propriété importante nous permettra bientôt d'obtenir l'un des principaux résultats de cette étude.

* * *

Recherchons maintenant quelles peuvent être les propriétés d'un continu répondant à la condition A.

Remarquons tout de suite qu'on ne peut affirmer ici, comme nous le ferons tout à l'heure pour les continus répondant à la condition B, que le paratingent second est vide en chaque point. Du fait qu'au voisinage d'un point O, l'ensemble considéré se laisse ramasser dans le petit segment mixtiligne que nous avons défini, on ne saurait en déduire qu'il n'existe pas une suite de divisions rectilignes formées chacune par 3 points de l'ensemble et qui tendent simultanément vers O (fig. 5).

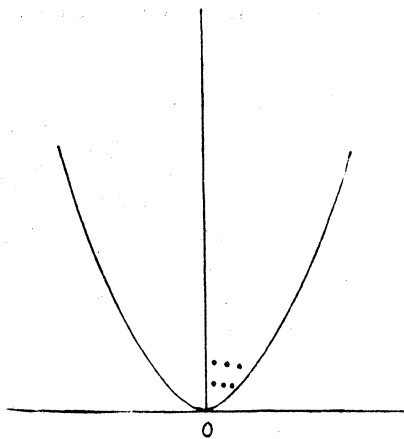


Fig. 5.

Devant cette difficulté, on peut chercher à aborder la question par une autre voie. Si le continu étudié se laisse inclure dans le segment que nous avons défini au moyen de la condition A, il pourra être inclus, à fortiori, dans un demi-cercle disposé comme l'indique la figure 6. Cette remarque permet au moins de limiter la classe des continus, qui pourraient convenir, en prélevant ceux-ci dans la classe des continus pour lesquels le voisinage en chaque point se laisse inclure dans un demi-cercle qui est un nouveau capuchon: nous le distinguerons par l'appellation de *péri-couvercle* (condition C).

L'utilisation du critérium que fournit la condition C présente malheureusement certaines difficultés. Considérons par exemple le continu représenté par la figure 7 qui suggère des cas de figures plus complexes. Ce continu répond

bien à la condition C, car en chaque point M, le voisinage du continu se laisse inclure dans un demi-cercle. Si le point M s'approche de a ou de b ,

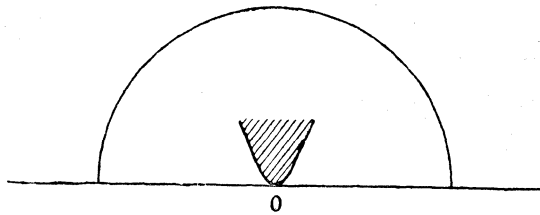


Fig. 6.

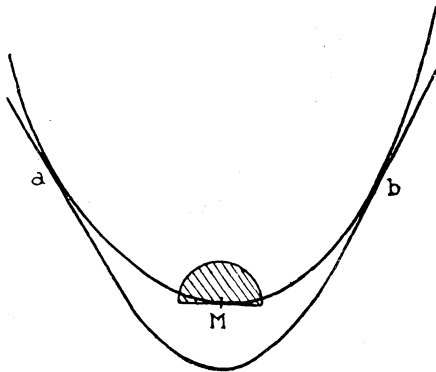


Fig. 7.

le demi-cercle de centre M doit, pour contenir tous les points voisins, avoir un rayon de plus en plus petit. Ce rayon tend vers zéro quand M tend vers a ou b , mais, arrivé en l'un de ces points, il existe un demi-cercle de rayon fini porté par la tangente en a ou en b qui contient tous les points voisins du continu.

Cette difficulté peut être surmontée quand on a établi, comme nous l'avons fait, que les continus répondant à la condition A peuvent être décom-

posés en une suite d'arcs simples rectifiables, tels qu'aucune portion de ces arcs ne soit à courbure bornée. Ainsi, nous sommes amenés à raisonner sur la classe de ces arcs simples.

Une autre difficulté se présente dans l'utilisation de la condition C. Considérons, par exemple, la courbe $y^2 = x^3$ (fig. 8). Au voisinage de chacun de ses points, même à l'origine qui est un point de rebroussement de la courbe, celle-ci peut être recouverte, comme l'indique la figure, par un demi-cercle. La même remarque peut être répétée pour toute réunion d'arcs convexes en nombre fini.

La voie nouvelle que nous avons choisie ne semble pas devoir nous conduire au delà des résultats que nous avons déjà obtenus, dans l'étude simultanée des ensembles satisfaisant à l'une ou à l'autre des conditions A ou B. La condition A, examinée isolément, n'en a pas moins cet avantage de

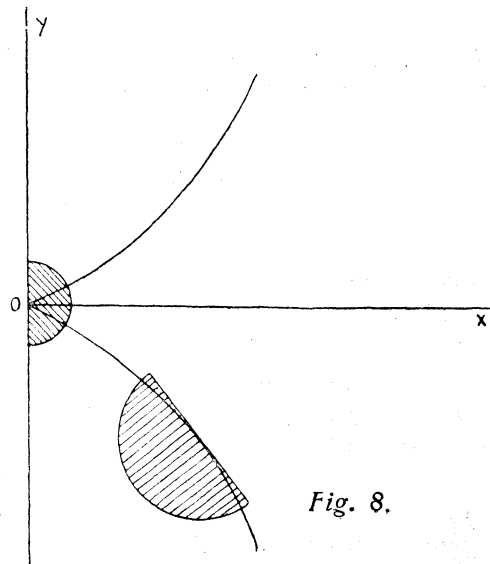


Fig. 8.

s'apparenter à la condition qui a permis de servir de critère de dénombrabilité pour les ensembles (théorème de *Denjoy*). La condition C, qui peut servir de moyen de choix pour les ensembles devant satisfaire à la condition A, présente l'intérêt de s'apparenter, par sa forme, un peu plus que cette dernière, à la condition B.

* * *

L'étude des ensembles qui satisfont à la condition B nous conduira plus rapidement au résultat que nous avons escompté. Nous allons établir qu'un continu qui satisfait à cette condition est un arc de courbe absolument convexe. Nous démontrerons ensuite que cet arc se réduit à un point.

Théorème. — *Si un continu satisfait à la condition B, le paratingent second est vide en chacun de ses points.*

Considérons un point quelconque M de ce continu. Il ne saurait être la limite d'un système de trois points alignés Q, R, S, empruntés au continu et tendant simultanément vers M, car le rayon de courbure du cercle passant par ces trois points ne s'annulerait pas en même temps que la distance de ces points. Autrement dit, le paratingent second est vide en chacun des points du continu. Il résulte des recherches de *M. Bouligand*, rappelées tout à l'heure, que le continu satisfaisant à la condition B ne peut être qu'un arc de courbe à sens de convexité permanent, ne possédant aucun segment de droite, c'est-à-dire un arc de courbe *absolument convexe*.

Théorème. — *Aucun continu ne saurait satisfaire à la condition B.*

Nous venons d'établir que si un continu satisfait à la condition B, il ne peut être qu'un courbe à sens de convexité permanent. Nous allons montrer maintenant que ce „continu“ se réduit à un point.

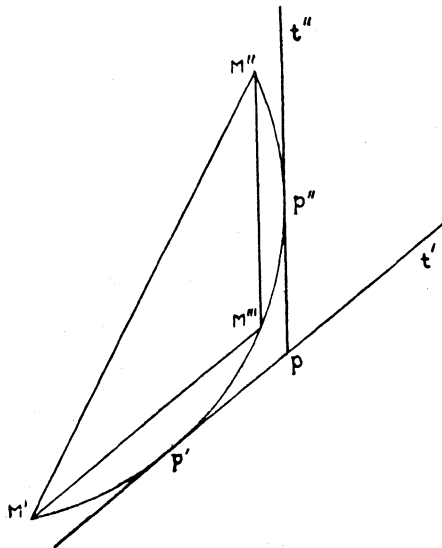


Fig. 9.

Considérons un arc de courbe absolument convexe et trois points voisins qui se succèdent sur cet arc dans l'ordre M' , M'' , M''' . Menons les tangentes à l'arc respectivement parallèles à $M' M''$ et $M'' M'''$; soient p' et p'' les points de tangence et p le point de rencontre des tangentes. De même que les trois points M' , M'' , M''' suffisent à déterminer sur l'arc les points p' et p'' , inversement, on peut toujours de ces deux derniers points, en choisissant M''' entre p' et p'' , déterminer le triangle $M' M'' M'''$. Choisissons un sens sur l'arc, par exemple celui de M' vers M'' ; $p' p$ est la tangente postérieure en p' , $p'' p$ est la

tangente antérieure en p'' .

Soit ρ le rayon du cercle circonscrit au triangle $M' M'' M'''$. On a :

$$\rho = \frac{M' M''}{2 \sin \widehat{M' M''' M''}} > \frac{p' p''}{2 \sin \widehat{p' p p''}}$$

L'arc considéré devant satisfaire à la condition B, la quantité ρ tend vers zéro en même temps que M'' et M''' tendent vers M' ; il en est donc de même du second membre de l'inégalité précédente :

$$\frac{p' p''}{2 \sin \widehat{p' p p''}} \rightarrow 0$$

Or, dans un arc convexe, le rapport de l'arc à la corde tend vers l'unité, pourvu que les deux extrémités de l'arc tendent d'un même côté vers un point de la courbe.

$$\frac{\text{arc } p' p''}{p' p''} \rightarrow 1$$

Le rapport :

$$\frac{\text{arc } p' p''}{2 \sin \widehat{p' p p''}} = \frac{\text{arc } p' p''}{p' p''} \times \frac{p' p''}{2 \sin \widehat{p' p p''}},$$

produit de deux rapports qui tendent respectivement vers 1 et vers 0, tend lui-même vers 0.

Si nous désignons par $p' t'$ et $p'' t''$ les deux tangentes postérieures en p' et p'' et par $(p' t', p'' t'')$ l'angle qu'elles forment, on a :

$$\sin \widehat{p' p p''} = \sin (p' t', p'' t'')$$

Le rapport :

$$\frac{\text{arc } p' p''}{(p' t', p'' t'')} = \frac{\text{arc } p' p''}{\sin (p' t', p'' t'')} \times \frac{\sin (p' t', p'' t'')}{(p' t', p'' t'')}$$

produit de deux rapports qui tendent respectivement vers 0 et vers 1, tend lui-même vers 0.

Ce rapport est un nombre dérivé de la fonction :

$$s = f(\theta)$$

qui définit la longueur s de l'arc $O p'$ compté sur la courbe à partir d'une origine O , quand on connaît l'angle θ que fait avec un axe donné la tangente $p' t'$ à la courbe au point considéré p' .

En vertu d'un théorème de *Lebesgue*, si l'un des quatre nombres dérivés d'une fonction est nul dans un intervalle, cette fonction est constante dans cet intervalle. A l'origine O , la fonction s a une valeur nulle; elle garde donc cette valeur „pour tous les points de l'arc considéré“; autrement dit, cet „arc“ se réduit à un point.

Il est donc bien établi qu'aucun continu ne saurait satisfaire à la condition B. En ce qui concerne cette condition, nous avons atteint le but que nous nous étions proposé.

* * *

Nous allons étudier maintenant quelques catégories spéciales d'ensembles satisfaisant à la condition B.

Théorème. — *Tout ensemble tel que le rayon ρ du cercle circonscrit au triangle formé par trois quelconques de ses points M, P, Q , satisfasse aux inégalités :*

$$\rho < \lambda . P Q \qquad \rho < \lambda . Q M \qquad \rho < \lambda . M P$$

est un ensemble fini.

Remarquons qu'un tel ensemble satisfait à la condition B.

Nous allons montrer que dans une région bornée du plan, par exemple dans un carré, un tel ensemble ne peut avoir qu'un nombre fini de points. En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble aurait au moins un point d'accumulation O . De ce point serait issue au moins une droite jouant le rôle de demi-tangente à l'ensemble. Considérons une suite de points de l'ensemble tendant vers O dans la direction OT ; les points M_i et M_j , ayant été choisis d'une manière quelconque dans cette suite, on peut toujours trouver un point M_n de rang assez élevé pour que les deux rapports :

$$\frac{O M_n}{O M_i} \quad \text{et} \quad \frac{O M_n}{O M_j}$$

tendent vers zéro.

Des relations connues entre les côtés, les angles d'un triangle et le rayon du cercle circonscrit :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \rho$$

il résulte que dans le triangle $M_n M_i M_j$, le sinus de l'un des angles tend vers zéro, comme l'inverse de ρ , ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque c'est ρ qui doit tendre vers zéro.

On peut élargir le théorème précédent de la manière suivante :

Théorème. — *Tout ensemble tel que le rayon ρ du cercle circonscrit au triangle formé par trois quelconques de ses points M, P, Q , satisfasse à l'inégalité :*

$$\rho < \lambda (P Q + Q M + M P)$$

est un ensemble fini.

Si $P Q$, par exemple, est le plus grand côté du triangle $M P Q$, on a :

$$\rho < 3 \lambda \overline{P Q}$$

d'où :

$$\frac{1}{\sin \widehat{P M Q}} < 6 \lambda.$$

Nous pouvons, comme tout à l'heure, affirmer que si l'ensemble n'était pas fini, il aurait au moins un point d'accumulation O et de ce point serait issue au moins une droite O T jouant le rôle de demi-tangente à l'ensemble. Considérons trois points M, P, Q, tendant vers O dans la direction de la demi-tangente O T et tels que O Q soit infiniment petit par rapport à O P, et que O P soit lui-même un infiniment petit par rapport à O M. On montrerait, comme pour le théorème précédent, que le triangle M P Q, qui se déforme en obéissant aux conditions prescrites, jouit de certaines propriétés qui contredisent notre hypothèse.

Chacun des théorèmes précédents nous apporte une condition qui peut être utilisée comme un critère pour caractériser des ensembles *finis*. En particulierisant la condition B, nous sommes amenés à particulariser la nature des ensembles qui satisfont à cette condition.
