LUCIEN CHAMARD

Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1933

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1933__153__1_0>

A monsieur Élie Cartan

Reconnaissant et très respectueux hommage.

[signature]

A Monsieur Jules Richard,

Affectueux et reconnaissant Hommage

A la Mémoire de mon Grand-Père

A tous les Miens

Lucien CHAMARD

SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE A UN ENSEMBLE PONCTUEL

Thèses présentées à la Faculté des Sciences
de l'Université de Poitiers
pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques,
soutenues
en décembre 1933 devant la Commission d'examen

MM. GARNIER, Président.
BOULIGAND, GOT, PONCIN, Examinateurs.

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112
—
1933

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*.
3e série, tome XIX.

Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel.

INTRODUCTION

1. — Les recherches sur le problème isopérimétrique [1] ont montré l'importance des figures convexes : par *figure convexe*, on désigne un ensemble qui, avec deux points, contient le segment rectiligne qui les joint. Par tout point frontière d'une figure convexe à trois dimensions, passe au moins un plan d'appui de cette figure, c'est-à-dire un plan laissant la figure d'un même côté de lui. La frontière d'une figure convexe est une surface convexe dans l'espace à trois dimensions, une courbe convexe dans le plan.

2. — Soit E un ensemble ponctuel borné. En chaque point de E, centrons une sphère ouverte de rayon ρ; et réunissons les sphères ainsi obtenues; on obtient un ensemble ouvert E_ρ, qui est d'ailleurs formé des points distants de E de moins de ρ. L'opération qui permet de passer E à E_ρ est dite *construction de Cantor-Minkowski* ou, abréviativement, construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}$. La frontière E_ρ de l'ensemble E_ρ peut être assez complexe, mais inclut certaines portions de surfaces jouissant d'une propriété qui

(1) T. Bonnesen, *Les Problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes*. Paris, 1929, Gauthier-Villars. « Collection Émile Borel ». — J. Favard, Problèmes relatifs aux courbes convexes. (*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 46, n° 11, nov. 1929.)

les apparente aux surfaces convexes : par chacun de leurs points, passe non plus un plan d'appui, mais la surface d'une sphère ouverte, de rayon constant ρ n'incluant aucun point de la surface. On dit que les surfaces précédentes sont des *surfaces* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$, et, plus généralement, que la frontière F_ρ de E_ρ est un *ensemble* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$

3. — Par le présent travail, je me propose d'approfondir l'étude des ensembles $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$, au delà des importants résultats obtenus par M. Georges Bouligand [1] et M. Georges Durand [2], en commençant, au chapitre I, par préciser les relations entre les figures convexes et la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce sujet aux chapitres II et III. Rappelons les définitions et théorèmes les plus utiles à l'intelligence de cet exposé.

4. — Soit E l'ensemble donné, que nous pouvons toujours supposer fermé, quitte à lui adjoindre ses points d'accumulation (ce qui ne modifierait pas E_ρ).

Soit M un point exclu de l'ensemble fermé E. Chacun des segments MP, issus de M, aboutissant en un point P de E, et fournissant un minimum de la distance de M à E, s'appelle une *projetante* de M, tandis que son extrémité P prend le nom de *projection*. Un point M, n'ayant qu'une projection sur E, sera dit *ordinaire*. Un point de vue propre à M. Georges Bouligand consiste à étudier le

---

(1) G. Bouligand, Ensembles impropres et nombre dimensionnel (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. 52, 1928, p. 372). — Idem, Sur la Construction de Cantor-Minkowski (*Annales de la Soc. polon. de Math.*, t. 9, 1930, p. 25). — Idem, Une application du paratingent à un problème de mesure superficielle (*ibid.*, 20 mars 1931, pp. 187-189). — Idem, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1932 (chap. XII).

(2) Georges Durand, Sur une généralisation des surfaces convexes. (*Thèse*, Paris, 1931; *Journal de Villat*, t. X, fasc. IV, p. 335.)

champ scalaire dont la valeur en M est la distance de ce point à l'ensemble E; les ensembles de niveau de ce champ scalaire sont les ensembles *isodistants* de E. Le point de vue de M. Georges Durand revient à étudier l'un de ces derniers, c'est-à-dire la frontière F_ρ de E_ρ, qui est aussi, comme on l'a vu, la frontière du domaine réunion des sphères ouvertes de rayon ρ centrées sur E.

5. — En regardant la distance de M à l'ensemble E comme un champ scalaire, on est naturellement conduit à examiner les conditions sous lesquelles cette distance est croissante, ou décroissante, à partir d'un point donné. Elles découlent des énoncés suivants :

Théorème A. — *Si la demi-droite* $M\Delta$, *issue de* M, *fait avec une projetante de* M *un angle aigu, la distance à* E, *en tant que fonction d'un point de la demi-droite* $M\Delta$ *est décroissante en* M.

Théorème B. — *Si la demi-droite* $M\Delta$, *issue de* M, *fait avec toute projetante de* M *un angle obtus, la distance à* E, *en tant que fonction d'un point de la demi-droite* $M\Delta$, *est croissante en* M.

6. — M. Georges Bouligand, qui a donné ces propositions dans son ouvrage cité [1], a fait observer, plus récemment, que, de la première, presque évidente, découle la seconde par le jeu d'une propriété importante du système des projetantes (ou des projections) d'un point, la semi-continuité supérieure d'inclusion ou, en abrégé. la S.C.I. supérieure [2]. Cette propriété, dans le cas actuel, consiste en ce qu'une collection $\gamma(M)$ de droites, de demi-droites, ou de segments de droites étant attachée

---

(1) Chap. XII, nos 92 bis et 93, pp. 95 et 96.

(2) G. Bouligand, Sur la semi-continuité d'inclusion. (*L'Enseignement math.*, XXXIe année, 1932, p. 18.)

à un point M, l'ensemble $\gamma(M_0)$ attaché à un point d'accumulation M_0 d'un ensemble de points M, inclut, les éléments d'accumulation de γ (M) pour les points M situés dans un voisinage ~~assez~~ resserré de M_0. La dite propriété est réalisée si γ(M) est le paratingent ordinaire, ou l'un des paratingents d'ordres supérieurs, ou encore le biparatingent, ou enfin le système des projetantes d'un point. Pour ce dernier, elle s'apparente avec les propriétés établies par M. Georges Durand sous les noms de théorème des projections et de théorème inversé des projections (1).

7. — Revenons aux propriétés des points d'un ensemble F_ρ, qu'on regarde, ou comme la frontière de E_ρ, ou comme le lieu des points ρ-distants de E (situés à la distance ρ de E).

A la suite de la considération par M. Georges Bouligand des points de F_ρ, sommets d'un cône droit, à base circulaire, disjoint de E_ρ (2), points où il a justifié l'existence locale d'une représentation analytique explicite de F_ρ, M. Georges Durand a introduit la notion de *point* (α), un tel point de F_ρ étant caractérisé par la condition d'avoir ses projections sur une calotte moindre qu'un hémisphère ou, ce qui revient au même, d'avoir un faisceau de projetantes strictement convexe (3). Il a montré que cette condition et celle de l'existence du précédent cône sont équivalentes. Les points (α) appartiennent donc à la frontière extérieure de E_ρ. En outre, chaque droite intérieure au cône ci-dessus échappe au paratingent de F_ρ (4) ce qui rat-

(1) G. DURAND, *Thèse*, nos 17 à 25 inclusivement.

(2) C'est ce que M. G. BOULIGAND appelle, dans sa Note au *C. R.* du 28 avril 1930 et dans son Mémoire cité des *Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, l'hypothèse (H).

(3) G. DURAND, *Thèse*, no 33.

(4) G. BOULIGAND, Une application du paratingent à un problème de mesure superficielle. (*Bull. Acad. polon.*, 20 mars 1931, pp. 187-189.) — DURAND, *Thèse*, no 52. — G. BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, no 96.

tache l'existence d'une représentation analytique locale au lemme d'univocité de M. Georges Bouligand.

8. — La notion de point (α), liée dans sa forme originelle à l'idée du cône disjoint, prend une physionomie nouvelle lorsqu'on s'attache à l'étude du champ scalaire exprimant la distance du point M à l'ensemble E : un point (α) est l'origine d'une demi-droite au moins, et, en fait, de tout un pinceau de demi-droites, faisant chacune un angle obtus avec toute projetante, et par conséquent, sur chacune desquelles la distance à E est croissante en M. En vertu de la S.C.I., l'ensemble des points (α) est donc ouvert (1).

Dans les chapitres II et III de ce mémoire nous nous occupons des conditions à imposer, soit à l'ensemble E, soit à la distance ρ, pour être sûr de n'avoir que des points (α) à la distance ρ de E.

9. — Concuremment aux points (α), M. Georges Durand a introduit la notion de point (β) dont les projections, localisables sur un hémisphère, ne le sont pas sur une calotte moindre, un point (β) étant encore un point dont le faisceau des projetantes est convexe au sens large. De plus, considérant les points dont les projections ne se laissent pas inclure par un hémisphère, ou dont le faisceau des projetantes n'est pas convexe, points qu'il a appelés points (γ), il a montré que ces points sont isolés.

Les points (β) constituent la classe dont l'étude est la plus délicate; nous y consacrerons le chapitre IV du présent travail.

---

(1) G. Bouligand, La semi-continuité d'inclusion (*L'Enseignement math.*, XXXIe année, 1932, p. 18). On trouvera dans ce *Mémoire* la généralisation de la notion de point (α) pour certains champs scalaires, fonctions des distances d'un point à plusieurs ensembles.

10. — Voici maintenant les principaux résultats de ce Mémoire, dont nous venons d'indiquer les grandes lignes.

Je montre au chapitre I que tout point extérieur à une figure convexe E est ordinaire; que l'ensemble $E_\rho + F_\rho$ qu'on déduit d'une figure convexe E par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$, effectuée avec le rayon ρ, est lui-même une figure convexe; que si E est un ensemble fournissant, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée sur lui, avec un rayon ρ donné, une figure $E_\rho + F_\rho$ convexe, la frontière extérieure de E comprend celle de son enveloppante convexe. Le chapitre se termine par des applications à la construction de certaines surfaces simples.

On verra, au chapitre II, que tout point extérieur à l'envelóppante convexe de E est, relativement à E, un point (α) et que la connaissance d'un point (α) entraîne celle d'un domaine dont tous les points sont aussi de la classe α. Puis, il est établi que, si l'on effectue sur E la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon ρ dépassant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \text{ diam. E.}$$

n désignant le nombre des dimensions de l'espace linéaire minimum contenant les projections d'un point M quelconque ρ-distant de M, ce point M est un point (α). Enfin, pour $n = 3$ il suffit de prendre ρ supérieur à $\frac{\text{diam. E}}{\sqrt{3}}$ pour que la frontière extérieure de E_ρ soit exclusivement composée de points (α).

Le chapitre III, qui a pour but de définir des ensembles à l'extérieur desquels on ne trouve que des points (α) [1], contient des résultats relatifs aux points intérieurs des figures convexes quand on considère leur distance à l'extérieur de ces figures. D'abord, à certaines distances ρ d'une surface convexe fermée; il y a une surface parallèle extérieure à plan tangent continu et une surface quasi-parallèle intérieure, également convexe, mais pouvant présenter des sommets. D'autre part, l'ensemble des centres des sphères inscrites dans une figure convexe se réduit à une figure plane convexe, à un segment rectiligne ou à un point unique; ces points appartiennent aux classes β et γ, relativement à l'extérieur de la figure. Après avoir noté que tout point intérieur à une figure convexe E, mais ne coïncidant pas avec le centre d'une sphère inscrite, est un point (α), nous montrons que si E est une rondelle de surface convexe dont l'image sphérique se localise sur une calotte moindre qu'un hémisphère, tout point extérieur à E est un point (α). Cela nous permet de trouver d'autres ensembles ne donnant lieu qu'à des points (α) : ce sont ceux qu'on définit de la manière suivante : soit F une figure convexe et soit un nombre quelconque d'autres figures convexes disjointes, mais ayant des points intérieurs communs avec la figure F sans la partager et de telle manière que la partie de leur frontière qui pénètre dans F ait une représentation sphérique localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère; E est ce qui reste de F après l'ablation des autres figures convexes.

Avec le chapitre IV, nous trouvons un ordre d'idées tout différent. Laissant de côté l'étude systématique de

---

(1) M. Georges Bouligand a récemment donné d'autres critères pour l'obtention de points (α) : par exemple, tout point assez voisin d'une surface sans bord à paratingent partout incomplet, est un point (α). (G. BOULIGAND, Deux applications du paratingent. [*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, n° 4, 1933, p. 84.])

cas particuliers, nous avons en vue des résultats généraux concernant les points (β). A cet effet, nous adoptons délibérément le point de vue de M. Georges Bouligand lorsqu'il envisage la distance comme un champ scalaire et nous introduisons la notion de RAYON ATTACHÉ, puis celle de CYLINDRE ATTACHÉ qui en dérive. Cela nous permet d'identifier en partie le contingent de F_ρ en un point (β). Toute demi-tangente est un rayon attaché frontière, mais la réciproque n'est sûrement vraie que dans le cas des points (α). Je montre qu'un rayon attaché frontière appartient au contingent si le cylindre attaché correspondant est disjoint de E et je demande si, MV étant un rayon attaché frontière, il est exclu du contingent dès que toute section droite de son cylindre attaché contient des points de E non localisables sur un demi-cercle. D'autre part, le paratingent en un point (β) de la frontière extérieure de E_ρ est complet [1].

L'étude du paratingent de F_ρ en un point M de la frontière intérieure de E_ρ est réalisée grâce au « lemme des deux points » de M. Georges Durand; ce paratingent est situé dans un plan contenant les rayons attachés de M.

Si M et les points de F_ρ de son voisinage, ont leurs rayons attachés sur une droite, le paratingent de F_ρ en M se réduit à la droite des rayons attachés de ce point.

Pour terminer, j'applique les résultats de tout ce chapitre à l'étude des frontières F_ρ qui ne pénètrent pas

---

[1] Ce résultat a suggéré à M. G. BOULIGAND le théorème suivant : « Si au point M de la frontière extérieure d'un domaine Ω, le paratingent de la frontière totale est incomplet, le voisinage du point M sur cette dernière est formé par une rondelle de surface représentable sous la forme $z = f(x, y)$, dans un système d'axes appropriés, la fonction f étant à pentes bornées dans l'aire du plan des xy suivant laquelle se projette le voisinage en question ». (Deux applications du paratingent [*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, n° 4, 1933, p. 84].)

dans K (E), et je montre notamment que : lorsqu'une frontière F_ρ ne pénètre pas dans K (E), elle est homéomorphe à la surface d'une sphère.

Un appendice indique dans quelles conditions la S.C.I. s'applique aux R. A.

J'exprime ma profonde gratitude à M. le professeur Bouligand qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et ses affectueux encouragements, et toute ma reconnaissance à M. Georges Durand pour l'impulsion initiale qu'il m'a donnée en m'initiant à d'excellentes méthodes de recherches, et en me posant des questions précises qui ont exercé une influence décisive sur l'éclosion du présent mémoire.

J'ai recueilli le plus grand fruit de mes conversations avec M. Eugène Blanc qui a bien voulu lire ce travail. Je l'en remercie très vivement.

Que MM. Élie Cartan et Levi-Civita, qui ont bien voulu présenter mes notes à l'Académie des Sciences de Paris et à l'Académie dei Lincei, daignent agréer mes respectueux remerciements.

CHAPITRE I

La Construction C. M. et les figures convexes.

11. — Points extérieurs a une figure convexe. — Lorsqu'on effectue la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon ρ quelconque sur un segment rectiligne AB on obtient un solide constitué par un cylindre circulaire droit d'axe AB, ayant pour hauteur la longueur de AB et pour rayon ρ, et coiffé, à chaque extrémité, d'un hémisphère de rayon ρ. Ce solide est une figure convexe et à chaque point M de sa frontière correspond, sur AB, un seul point à la distance ρ

de M. Cette remarque est l'origine des considérations qui vont suivre.

12. — Théorème I. — *Tout point extérieur à une figure convexe est ordinaire relativement à cette figure.*

En effet, soit M un point extérieur à une figure convexe E. Si M avait sur E deux projections A et B, tout point du segment AB différent des extrémités serait à la fois sur E et à l'intérieur de la sphère d'appui S_M^{ρ} de E, ce qui est impossible.

Corollaire II. — *Tout point extérieur à un ensemble* E *formé par la réunion d'un nombre fini* k *de figures convexes a sur* E *un nombre fini* $\leq$ k *de projections.*

13. — La construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}$. conserve la convexité. — La remarque qui nous a conduit au théorème précédent suggère encore cette proposition :

Théorème III. — *Si, sur une figure convexe* E, *on effectue la construction* $\mathcal{C}.\mathcal{M}$. *avec un rayon* ρ *quelconque, l'ensemble* $E_\rho + F_\rho$ *ainsi obtenu est également une figure convexe.*

Soient M et N deux points de $E_\rho + F_\rho$. Je dis que le segment MN appartient tout entier à $E_\rho + F_\rho$. En vertu du théorème précédent, chacun des points M et N n'a sur E qu'une projection. Soient A et B des projections respectives de M et de N. Le segment AB appartient tout entier à E par hypothèse. Donc, le solide convexe qu'on en déduit par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}$ effectuée avec le rayon ρ appartient tout entier à $E_\rho + F_\rho$. Or, ce solide convexe inclut M et N; il contient par suite le segment MN qui, du même coup, est contenu dans $E_\rho+F_\rho$. C. Q. F. D.

14. — Par chaque point M de F_ρ il passe donc un plan d'appui Π de $E_\rho + F_\rho$ et, par M, il ne saurait passer plus d'une sphère de rayon ρ centrée sur E. On retrouve ainsi indirectement le théorème I. De plus, le plan d'appui Π est unique, car s'il en existait un autre passant par M, ce dernier couperait nécessairement la sphère de rayon ρ, contenue dans $E_\rho + F_\rho$ et qui passe aussi par M. D'autre part, on sait qu'en un point ordinaire M, F_ρ a un plan tangent perpendiculaire à la projetante unique de M [1]; ce plan coïncide donc avec le plan d'appui Π. Enfin, de la S. C. I. des projetantes, il résulte que le plan Π jouit de la continuité locale [2]. Ces considérations se résument dans l'énoncé suivant :

Théorème IV. — *La frontière F_ρ obtenue par la construction CM effectuée avec un rayon ρ quelconque sur une figure convexe E est une surface convexe à plan tangent continu.*

15. — Correspondance entre les points d'appui d'un ensemble E quelconque et ceux de l'ensemble $E_\rho + F_\rho$ donné par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée sur E avec le rayon ρ. — Nous nous servirons ici de la remarque d'après laquelle : si un ensemble $\mathcal{E}$ donne, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ, un ensemble $\mathcal{E}_\rho + \mathcal{F}_\rho$, chacun de ses sous-ensembles, E, par exemple, fournit, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le même rayon ρ, un ensemble $E_\rho + F_\rho$ inclus dans $\mathcal{E}_\rho + \mathcal{F}_\rho$.

Théorème V. — *Si, en un point frontière* P, *l'ensemble* E *admet un plan d'appui* Π, *au point* M *de la perpendiculaire en* P *à* Π, *tel que* $PM = \rho$ *et situé, par rapport*

---

(1) En d'autres termes, le contingent est le plan Π (G. Durand, *Thèse*, n° 63), et il en est de même du paratingent (G. Bouligand, *Introd. à la Géom. infinit. dir.*, n° 96).

(2) Grâce à la S. C. I. supérieure du paratingent ou, ce qui revient ici au même, à la S. C. I. supérieure de la projetante *unique*.

à Π *du côté opposé au demi-espace* $\mathcal{E}$ *contenant* **E**, *l'ensemble* $E_\rho + F_\rho$ *admet un plan d'appui* Π' *parallèle à* Π. (M *appartient alors à la frontière externe de* E_ρ; *en d'autres termes, c'est un point de* F_ρ *origine d'une demi-droite ouverte* (1) *disjointe de* $E_\rho + F_\rho$.)

En effet, la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée sur le demi-espace $\mathcal{E}$ avec le rayon ρ, fournit un nouveau demi-espace fermé $\mathcal{E}_\rho + \mathcal{F}_\rho$ contenant le premier et limité par le plan Π' parallèle à Π à la distance ρ de ce dernier, E étant inclus dans $\mathcal{E}$, en vertu de la remarque ci-dessus, $E_\rho + F_\rho$ est contenu dans le demi-espace $\mathcal{E}_\rho + \mathcal{F}_\rho$. De plus, le point M étant sur la sphère S^ρ_P, il est inclus dans $E_\rho + F_\rho$; comme il appartient à un plan d'appui Π' de cet ensemble, il est point d'accumulation de l'extérieur de $E_\rho + F_\rho$; à ce titre, il appartient à F_ρ.

16. — Réciproquement,

THÉORÈME VI. — *Si, par un point* M *situé à la distance* ρ *de* E, *il passe un plan d'appui* Π' *de* $E_\rho + F_\rho$, *par la projection* P *de* M (*unique comme on l'a vu au numéro précédent*), *il passe un plan d'appui* Π *de* E *parallèle à* Π'.

En effet, remarquons que toute sphère de rayon ρ centrée en un point non contenu dans $E_\rho + F_\rho$ ne saurait contenir à son intérieur des points de E. Soit $\mathcal{E}$ le demi-espace ouvert limité à Π' et ne contenant aucun point de $E_\rho + F_\rho$. Le demi-espace ouvert $\mathcal{E}_\rho$ qu'on en déduit par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ, ne peut pas non plus contenir des points de E. Or, ce demi-espace est

---

(1) J'appelle *demi-droite ouverte* l'ensemble des points de cette demi-droite dont on a retiré l'origine. La *frontière externe* d'un ensemble est formée des points de la frontière de cet ensemble qui appartiennent à la frontière du constituant de l'extérieur de l'ensemble qui s'étend à l'infini. (Voir GEORGES BOULIGAND, *Introd. à la Géom. infinit. directe*, chap. XII, § 89, p. 90.)

limité par le plan Π parallèle à Π' à la distance ρ de ce dernier. D'où le résultat annoncé.

Corollaire VII. — *Si un ensemble* E *fournit, par la construction* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ *effectuée avec le rayon* ρ *une figure convexe* $E_\rho + F_\rho$, *par tout point du front* φ_ρ (1) *de* E, *il passe au moins un plan d'appui de* E.

17. — Recherche des ensembles E, fournissant, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$, avec un rayon ρ donné, une figure convexe $E_\rho + F_\rho$ donnée. — Soit $E_\rho + F_\rho$ une figure convexe obtenue en effectuant la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ sur un certain ensemble E qu'il s'agit de trouver.

L'ensemble $E_\rho + F_\rho$ étant une figure convexe, par chacun de ses points frontière, il passe un plan d'appui Π'; unique, comme on l'a vu au numéro 15, et limitant un demi-espace ouvert $\mathcal{E}$ disjoint de $E_\rho + F_\rho$. Si l'on effectue sur $\mathcal{E}$ la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ, on obtient un nouveau demi-espace ouvert $\mathcal{E}_\rho$ disjoint de E et limité par un plan d'appui Π de E en vertu du théorème VI. La réunion des demi-espaces $\mathcal{E}$ constitue l'extérieur de $(E_\rho + F_\rho)$, puisque $E_\rho + F_\rho$ coïncide par hypothèse avec son enveloppante convexe. Quant à la réunion des demi-espaces $\mathcal{E}_\rho$, elle a pour complémentaire une figure convexe K qui, d'une part contient E, et, d'autre part, est formée de points qui sont à une distance de l'extérieur de $E_\rho + F_\rho$ supérieure ou égale à ρ. Soit $C(E_\rho + F_\rho)$ l'extérieur de $E_\rho + F_\rho$.

L'inclusion

$$K \supset E$$

(1) Selon la terminologie de M. Georges Bouligand, un point P d'un ensemble E appartient au front φ_ρ de cet ensemble, s'il existe pour E une sphère d'appui de rayon ρ passant par le point P, c'est-à-dire telle qu'il n'existe à l'intérieur de cette sphère aucun point de E. (*Introd. à la Géom. infinit. directe*, § 101, p. 104.)

entraîne la suivante :

$$\overline{K}_\rho \supset E_\rho + F_\rho. \tag{1}$$

D'autre part, du fait que tout point de K est à une distance de C ($E_\rho + F_\rho$) supérieure ou égale à ρ, il résulte :

$$\overline{K}_\rho \subset E_\rho + F_\rho. \tag{2}$$

La compatibilité des inclusions (1) et (2) exige que $\overline{K}_\rho$ coïncide avec $E_\rho + F_\rho$. Il en résulte qu'en posant $E = K$ on a un ensemble fournissant, par la construction $\mathcal{C}.\,\mathcal{M}$ avec le rayon ρ un ensemble coïncidant avec $E_\rho + F_\rho$.

18. — Mais d'autres ensembles que K peuvent donner naissance à l'ensemble $E_\rho + F_\rho$. Supposons qu'on effectue la construction $\mathcal{C}.\,\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ sur la frontière de K, on obtient ainsi un ensemble dont la frontière contient F_ρ, et peut même se réduire à F_ρ à la condition que tous les points de K appartiennent à E_ρ.

Donnons un exemple simple : Supposons que $E_\rho + F_\rho$ soit une sphère pleine de centre O et de rayon $R > \rho$. Deux cas au moins peuvent se présenter, par exemple : ou bien E est lui-même constitué par une sphère pleine de centre O et de rayon $r = R - \rho$, ou bien il se réduit à la surface de la sphère S_0^r. Ce dernier cas n'est possible que si ρ est plus grand que r, ou, ce qui revient au même, si ρ est supérieur à $\frac{R}{2}$.

19. — Revenons au cas général. Nous allons montrer que tout point Q de la frontière de K appartient à E. En effet, par Q passe un plan d'appui Π de K puisque K est une figure convexe. En vertu du théorème IV, si $\overline{QM}$ est un segment rectiligne de longueur ρ, perpendiculaire en Q à Π du côté de ce plan opposé à E, M appartient à F_ρ et le plan Π' mené par M parallèlement à Π est un plan d'appui (unique) de $E_\rho + F_\rho$. Mais alors M est un point ordinaire dont Q est l'unique projection.

Donc K est l'enveloppante convexe de E et tous les ensembles E contiennent la frontière de K.

Nous reviendrons sur des considérations analogues au chapitre III, nous contentant de poser ici une question :

Soit E une figure convexe fournissant, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée avec le rayon ρ, une nouvelle figure convexe $E_\rho + F_\rho$. Quel est le plus petit des ensembles que l'on peut substituer à l'intérieur de E sans altérer $E_\rho + F_\rho$?

20. — Application a une classe de surfaces. — Les développements ci-dessus peuvent être prolongés de la manière suivante : Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz et soit, dans le plan xOy, une figure convexe E. Considérons un point m du même plan à l'extérieur de E et à la distance ρ de cette figure. En vertu du théorème I, il est ordinaire. De plus, il résulte du n° 14 que, pour $\rho = c^{te}$, m décrit une ligne convexe fermée à tangente continue Γ_ρ. De m, faisons partir une demi-droite équipollente à Oz et, sur cette demi-droite, considérons le point M à la distance ρ de m. Pour $\rho = c^{te}$ M décrit une ligne plane convexe fermée à tangente continue L_ρ parallèle à Γ_ρ. Si ρ varie de toutes les manières possibles en restant positif, A désignant la projection de m sur E, le lieu de M est une surface réglée Σ engendrée par la demi-droite AM (A non compris). En M la surface Σ a un plan tangent Π déterminé par AM et par la tangente en M à la ligne de niveau L_ρ qui passe par M. Le plan Π est d'ailleurs plan d'appui de Σ et est incliné à 45° sur xOy. La surface Σ est donc une surface réglée convexe à plan tangent continu. On en conclut qu'en tout point M, la distance $f(M) = \rho$ a une différentielle au sens classique, c'est-à-dire relative à l'approximation de $f(M') - f(M'')$ pour des points M' et M'' suffisamment voisins de M. En d'autres termes, la fonction $f(M) = \rho$ a un gradient continu et non nul.

21. — Considérons maintenant un point M extérieur à la réunion d'un nombre n de figures convexes $E_1, E_2, \ldots E_n$. Appelons $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, les distances de M respectivement à chacun des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. On peut se proposer d'étudier l'ensemble de niveau Σ d'une fonction $f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ sachant qu'elle possède, par rapport à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, des dérivées partielles continues et non toutes nulles. Relativement à M, la fonction a dès lors, un gradient continu. Au voisinage de M, si ce gradient n'est pas nul [1], Σ se réduit à une rondelle de surface à plan tangent continu, évidemment normal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. Exemple : Lieu des joints dont la somme ou la différence des distances à deux figures convexes est constante [2].

CHAPITRE II

La recherche des points (α) et des conditions qui en assurent l'existence exclusive.

22. — Domaine formé de points extérieurs a un ensemble E quelconque et dont tous les points sont des points (α) relativement a E. — Nous avons vu (n° 12) que tout point

(1) On est sûr qu'il en est bien ainsi lorsque, f étant croissante par rapport à chaque variable, il existe un même cône strictement convexe incluant les projetantes du point considéré sur nos diverses figures.

(2) G. Bouligand, Sur les ensembles de niveau d'une fonction des distances d'un point à plusieurs ensembles. (*C. R.*, t. 194 [1932], p. 1882), et G. Bouligand, Sur la semi-continuité d'inclusion et quelques sujets connexes (*L'Enseignement math.*, XXXI^e année, 1932, p. 18).

extérieur à une figure convexe est ordinaire. Cet énoncé se prolonge par le suivant :

Théorème VIII. — *Tout point* M *situé à l'extérieur de l'enveloppante convexe d'un ensemble quelconque* E *est, relativement à* E, *un point* (α).

En effet, soit K (E) l'enveloppante convexe de E. En vertu du théorème I, M a sur K(E) une projetante unique MP.

Des théorèmes IV et V il résulte que : le plan Π perpendiculaire en P à MP limite un demi-espace $\mathcal{E}$ — celui qui contient MP — dépourvu de points de K (E) et que le plan Π' perpendiculaire en M à MP limite un espace ouvert $\mathcal{E}'$ — celui qui ne contient pas MP — également dépourvu de points de K (E). De plus Π' ne peut contenir de points de K(E), car il est à la distance ρ de K(E) grâce au fait que M est extérieur à K (E). Il s'ensuit que les demi-droites issues de M et passant par les divers points de E font avec MP un angle aigu et que leur faisceau est strictement convexe. Cela implique la même propriété pour le faisceau des projetantes de M qui y est inclus. Le point M est donc bien un point (α) (1).

Remarque. — En revanche, dès qu'on atteint la frontière de K (E), des exemples simples (comme celui où E est la surface d'un hémisphère) montrent qu'on peut voir apparaître des points (β).

23. — Comment la connaissance d'un point (α) implique celle de tout un domaine de points (α). — Pour la recherche

(1) Si h désigne la distance de M à K (E) et ρ celle de M à E, on peut donner le maximum du demi-angle au sommet du demi-cône incluant les projetantes de M : il a même mesure que : arc cos $\frac{h}{\rho}$ (qui, on le voit, tend vers un droit à la seule condition que h tende vers zéro, car nous supposons ρ fini).

des régions extérieures à un ensemble qui ne sont formées que de points (α), on peut aussi se placer au point de vue local. Ainsi, M. Georges Bouligand a déduit de la S.C.I. des faisceaux de projetantes que l'ensemble des points (α) est ouvert. Je vais déterminer effectivement un domaine attaché à tout point (α), le portant sur sa frontière, ayant une étendue finie et étant exclusivement composé de points (α).

24. — Considérons un point M_0 appartenant à la classe α relativement à un certain ensemble E. L'ensemble $\varpi(M_0)$ des projections de M_0 est inclus dans une calotte à base circulaire de la sphère $S_{M_0}^{\rho_0}$ de centre M_0 et de rayon ρ_0; on désignera par Γ la plus petite des calottes à base circulaire qui portent $\varpi(M_0)$ et par $\mathcal{C}$ le cône circulaire droit de sommet M_0 et ayant même base que Γ. Soit M_0H_0 la hauteur et soit $\frac{\alpha}{2}$ le demi-angle au sommet de $\mathcal{C}$.

Théorème IX. — *Tout point intérieur au solide engendré par la révolution autour de M_0H_0 d'un segment circulaire de base M_0H_0 et de rayon $\frac{\rho_0}{2}$ appartient à la classe α.*

En effet, soit MA une génératrice de $\mathcal{C}$. Dans le plan AM_0H_0, du côté de M_0H_0 qui ne contient pas M_0A, menons une demi-droite M_0z faisant avec M_0H_0 un angle θ tel que $\frac{\alpha}{2}+\theta$ soit inférieur à un droit. Par A, menons le plan $\mathcal{F}$ perpendiculaire à M_0z. L'angle $AM_0z=\frac{\alpha}{2}+\theta$ étant plus petit qu'un droit, $\mathcal{F}$ rencontre M_0z en un point que nous désignerons par H_θ. Sur le segment rectiligne M_0H_θ, considérons un point M distinct des extrémités. La sphère S_M^{MA}, de centre M et de rayon MA, contient la calotte Γ, donc $\varpi(M_0)$. Puisque S_M^{MA} inclut des points de E, les projections de M sont sur une sphère S_M^{ρ} concentrique à S_M^{MA}, mais plus petite que cette dernière. Il en résulte que les projections de M sont dans la partie de S_M^{MA} qui est à l'extérieur de $S_{M_0}^{P_0}$, partie qu'on peut désigner par $(S_M^{MA} - S_{M_0}^{P_0})$. Or, le plan $\mathcal{S}$ est un plan d'appui de $(S_M^{MA} - S_{M_0}^{P_0})$ laissant M du côté qui ne contient pas cet ensemble. Le point M étant à l'extérieur d'une figure convexe contenant ses projections $\varpi(M)$ est, à fortiori, à l'extérieur de l'enveloppante convexe de $\varpi(M)$ et, de ce fait, est un point (α).

Remarquons maintenant que, dans le plan AM_0H_0, le point H_0 est situé sur la demi-circonférence de diamètre M_0A et passant par H_0. Sur cette demi-circonférence, quand θ varie de 0 à $\frac{\pi - \alpha}{2}$, H_0 décrit l'arc $\overparen{H_0M_0}$. Il résulte du raisonnement précédent que tout point intérieur au segment circulaire σ limité par l'arc $\overparen{H_0M_0}$ et sa corde est un point (α). Il suffit maintenant de remarquer que ce raisonnement peut être répété dans chaque plan passant par M_0H_0 pour conclure que tout point intérieur au solide engendré par la révolution de σ appartient à la classe α. C. Q. F. D.

25. — En particulier, si M est un point ordinaire, on voit que l'intérieur de la sphère décrite sur sa projetante MP comme diamètre est exclusivement formé de points (α). M. Georges Bouligand a d'ailleurs établi que, dans ces conditions, tout point de MP est ordinaire [1].

26. — Recherche des distances ρ a un ensemble donné E au dela desquelles ne se trouvent que des points (α). — Ayant appris à déduire d'un point (α) connu tout un domaine formé de points appartenant aussi à la classe α, nous allons revenir à l'ordre d'idées du début de ce chapitre.

---

(1) G. Bouligand, *Géom. Infin. dir.*, n° 91, proposition *a.* — Voir aussi *Ann. de la Société pol. de Math.*, 1930, *loc. cit.*

Nous avons montré que : un ensemble E quelconque étant donné, un point extérieur à son enveloppante convexe est de la classe α. Si l'on remarque, avec M. Georges Bouligand, que le diamètre d'un ensemble et le diamètre de son enveloppante convexe sont égaux (¹), il va de soi que, k désignant un coefficient positif assez grand, la relation $\rho > k$ diam. E interdit au point M, situé à la distance ρ de E de pénétrer dans K (E). Donc, à partir d'une certaine valeur de k, tous les points M soumis à l'inégalité $\rho > k$ diam. E seront des points (α). Nous allons nous proposer de chercher la plus petite valeur de k telle que l'inégalité envisagée élimine les points (β) et (γ) (²). Déjà, M. Georges Durand a montré que : si l'on effectue sur un ensemble E de diamètre d la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon $\rho > \frac{d}{\sqrt{2}}$, la frontière obtenue ne comprend que des points de la classe α, et il a noté que, pour $\rho = \frac{d}{\sqrt{3}}$, des points ($\beta$) peuvent se présenter comme le montre l'exemple d'un ensemble E formé par les trois sommets d'un triangle équilatéral. Nous donnerons ci-dessous des inégalités meilleures.

27. — Il est évident qu'ici, les distances mutuelles sur E devant intervenir (par l'entremise du diamètre), nous aurons à considérer, non plus les projetantes d'un point, mais ses projections. Aussi, convient-il de classer les points M extérieurs à E, suivant la distribution de leurs

---

(¹) G. Bouligand, *Géom. Infin. dir.*— Remarque finale du nº 102*bis*.

(²) M. Georges Durand a posé ce problème dans sa thèse (nº 59), sans y avoir été amené par la considération de K (E). D'ailleurs, il n'est pas certain, à priori que la recherche des valeurs minima de k entraînant pour un point la propriété d'être hors de K (E) et celle d'être simplement un point (α) se réduisent à un seul problème.

projections sur les diverses multiplicités linéaires qui passent par M. Nous appellerons :

Point (a) : tout point ayant au plus deux projections;

Point (b) : tout point ayant plus de deux projections toutes coplanaires;

Point (c) : tout autre point.

28. — Remarquons tout de suite que :

Théorème X. — *Étant donné un ensemble* E, *si l'on pose* $\rho > \frac{\text{diam. E}}{2}$, *tout point* (a) *situé à la distance* ρ *de* E *appartient à la classe* α.

En effet, si le point M considéré n'était pas un point (α), il aurait deux projections A et B diamétralement opposées et par conséquent distantes de 2ρ. Or, diam. E $\geq$ AB. On aurait donc diam. E $\geq 2\rho$ ou $\rho \leq \frac{\text{diam. E}}{2}$, contrairement à l'hypothèse.

29. — Passons maintenant à l'étude des points (b). Une proposition préliminaire nous sera nécessaire.

Lemme XI (du triangle). — *Étant donné, dans un cercle* C_M^ρ *de centre* M *et de rayon* ρ, *un triangle inscrit* ABC *dont l'aire contient* M, *le plus grand côté du triangle* ABC *est au moins égal au côté du triangle équilatéral inscrit dans* C_M^ρ, *c'est-à-dire à* $\rho\sqrt{3}$.

Pour le démontrer, supposons que le plus grand côté du triangle ABC aboutisse au sommet A. Si, contrairement à l'énoncé précédent, ce plus grand côté était inférieur à $\rho\sqrt{3}$, les points B et C seraient à l'intérieur du cercle $C_A^{\rho\sqrt{3}}$ de centre A et de rayon $\rho\sqrt{3}$. Soit $\overline{PQ}$ la corde commune à C_M^ρ et à $C_A^{\rho\sqrt{3}}$; cette corde a pour longueur $\rho\sqrt{3}$. Le segment $\overline{BC}$ est une corde de l'arc $\widehat{PAQ}$. Puisque, par hypothèse le triangle ABC contient M,

$\overline{BC}$ et A ne peuvent être situés sur un même demi-cercle et la corde $\overline{BC}$ est, par rapport à M, plus proche que $\overline{PQ}$. Il résulte que sa longueur surpasse $\overline{PQ} = \rho\sqrt{3}$ contrairement à notre supposition que le plus grand côté de ABC aboutit à A et est inférieur à $\rho\sqrt{3}$.

Théorème XII. — *Étant donné un ensemble* E, *si l'on pose* $\rho > \frac{\text{diam. } E}{\sqrt{3}}$, *tout point* (b), *situé à la distance* ρ *de* E *appartient à la classe* α.

En effet, soit M le point (*b*) envisagé. Deux cas peuvent se présenter : ou bien M a ses projections réparties sur un petit cercle de S_M^ρ et alors, c'est évidemment un point (α) ; ou bien M a ses projections sur un grand cercle C_M^ρ de S_M^ρ. Dans ce dernier cas, si les projections de M n'étaient pas localisables sur un arc inférieur à une demi-circonférence, elles comprendraient trois points formant un triangle inscrit contenant M et alors, en vertu du lemme du triangle on aurait :

$$\text{diam. } \varpi(M) \geq \rho\sqrt{3}$$

ou

$$\rho \leq \frac{\text{diam. } \varpi(M)}{\sqrt{3}},$$

ce qui entraînerait

$$\rho \leq \frac{\text{diam. } E}{\sqrt{3}},$$

contrairement à l'hypothèse.

30. — Nous allons, enfin, examiner le cas des points (*c*). Comme tout à l'heure, il nous faut un lemme :

Lemme XIII (du tétraèdre). — *Étant donné, dans une sphère* S_M^ρ, *du centre* M *et de rayon* ρ, *un tétraèdre inscrit* ABCD *dont le volume contient* M, *le plus grand* *côté du tétraèdre* ABCD *est au moins égal au côté du tétraèdre régulier inscrit, c'est-à-dire à* $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho$.

Pour le démontrer, supposons que le plus grand côté du tétraèdre ABCD aboutisse au sommet A. Si, contrairement à l'énoncé précédent, ce plus grand côté était inférieur $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho$, les points B, C et D seraient à l'intérieur de la sphère

$$S_A^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho}, \text{ de centre A et de rayon } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho.$$

Considérons le cercle commun à

$$S_M^\rho \text{ et à } S_A^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho}$$

et soit H son centre.

Un calcul simple montre que $\overline{MH} = \frac{\rho}{3}$ et que, par conséquent, le rayon du cercle précédent est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho$; aussi, désignerons-nous ce cercle par

$$C_H^{\frac{2\sqrt{2}}{3}\rho}.$$

Les points B, C et D ne pouvant être situés sur un hémisphère contenant A, sont répartis sur un petit cercle C_I^r de S_M^ρ tel que $MI \leq MH$ ou $MI \leq \frac{\rho}{3}$, ce qui entraîne $r \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho$. D'autre part, soit J le point où le prolongement de AM rencontre le plan de C_I^r; le fait que C_I^r est dans

$$S_A^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho}$$

exige que MJ soit inférieur ou égal à MH, c'est-à-dire inférieur ou égal à $\frac{\rho}{3}$. Considérons le plan $\mathcal{P}$ mené par MJ perpendiculairement au plan MIJ; $\mathcal{P}$ coupe le cercle C_I^r suivant une corde PQ dont la longueur est égale à $2\sqrt{(\rho^2 - MJ^2)}$, donc $\geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$.

Pour que le tétraèdre ABCD contienne M, il faut évidemment que les points B, C et D ne soient pas tous d'un même côté de $\mathcal{P}$. Donc, ou bien ils se répartissent sur un arc non supérieur à une demi-circonférence de C_I^r et dont la corde constituée par l'un des côtés de BCD, est plus grande que $\overline{PQ}$, ou bien ils ne sont pas localisables sur une même demi-circonférence de C_I^r. Dans le premier cas, puisque

$$\overline{PQ} \text{ est } \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho,$$

l'un des côtés du triangle BCD a une longueur supérieure ou égale à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$. Dans le second cas, en vertu du lemme du triangle, le plus grand côté du triangle BCD a une longueur supérieure ou égale à $r\sqrt{3}$. Or, on a vu que r est au moins égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3} \rho$. Donc, le triangle BCD a son plus grand côté au moins égal à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$.

On voit que, de toutes manières, si l'on part de la supposition que le plus grand côté du tétraèdre ABCD est inférieur à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$, on est conduit à une contradiction.

Théorème XIV. — *Étant donné un ensemble* E, *si l'on pose*

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E},$$

tout point (c) *ρ-distant de* E *appartient à la classe α.*

En effet, soit M un point (c) situé à la distance ρ de E. Par définition, il a au moins quatre projections A, B, C et D non coplanaires. Considérons deux quelconques d'entre elles, A et B par exemple; la condition

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E}$$

entraîne

$$\rho > \frac{\text{diam. E}}{2};$$

il résulte alors du théorème X que A et B ne sauraient être diamétralement opposés. Considérons maintenant les trois projections A, B et C par exemple. La condition

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E}$$

entraîne encore la suivante :

$$\rho > \frac{\text{diam. E}}{\sqrt{3}},$$

de sorte que, du théorème XII, on déduit que A, B, C sont répartis sur un petit cercle ou sur un arc de grand cercle inférieur à 180°.

Le point M ne pouvant avoir des projections sur un arc de grand cercle au moins égal à 180° ne peut appartenir à la classe β.

Enfin, il ne saurait appartenir à la classe γ, car alors, en vertu du lemme du tétraèdre, on aurait

$$\text{diam.}(A + B + C + D) \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$$

ou

$$\rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam.}(A + B + C + D),$$

ce qui entraînerait

$$\rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E}$$

contrairement à l'hypothèse.

31. — On peut grouper dans un même énoncé les résultats précédents.

Théorème XV. — *Pour qu'à la distance ρ d'un ensemble E, il n'existe que des points (α), il suffit que soit satisfaite la relation*

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E.}$$

En effet, grâce au théorème XIV, on sait que si

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E,}$$

tout point (c) ρ-distant de E est un point (α). D'autre part, la relation précédente entraîne la suivante :

$$\rho > \frac{\text{diam. E}}{\sqrt{3}}$$

et du théorème XII il résulte que tout point (b) situé à la distance ρ de E est un point (α). Enfin, la condition

$$\rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E}$$

implique l'inégalité

$$\rho > \frac{\text{diam. E}}{2}$$

et le théorème X nous apprend que tout point (a) situé à la distance ρ de E appartient aussi à la classe α.

32. — Pour terminer, remarquons que les inégalités

$$\rho > \frac{\text{diam. E}}{2}, \qquad \rho > \frac{\text{diam. E}}{\sqrt{3}}, \qquad \rho > \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ diam. E}$$

sont des cas particuliers de la suivante, obtenue par récurrence

$$\rho > \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \cdot \text{diam. E}$$

où n désigne le nombre des dimensions de l'espace linéaire minimum contenant les projections des points envisagés.

Nous allons maintenant revenir à l'espace à trois dimensions.

33. — Condition suffisante pour que tout point de la frontière extérieure de E_ρ soit un point (α). — M. Georges Durand a montré que, relativement à tout ensemble E, tout point (γ) situé à la distance ρ de E est isolé sur F_ρ et appartient de ce fait à la frontière intérieure de E_ρ. D'autre part, il a montré qu'en tout point (α) de F_ρ est réalisée l'hypothèse H de M. G. Bouligand : existence d'un cône droit à base circulaire disjoint de E_ρ ; tout point (α) est donc un point frontière extérieur. Mais un point frontière extérieur peut appartenir à la classe β, comme le montre l'exemple où E est la surface d'un hémisphère. Toutefois, on a cette proposition :

Théorème XVI. — *Étant donné un ensemble* E *quelconque, si l'on choisit une longueur* ρ *supérieure à* $\frac{\text{diam. E}}{\sqrt{3}}$, *tout point de la frontière extérieure de* E_ρ *est un point* (α).

En effet, soit M un point de la frontière extérieure de E_ρ qui n'est pas un point (α) ; il ne peut appartenir qu'à la classe β. Mais alors, ce point M a, sur au moins un grand cercle de S_M^ρ, des projections non localisables sur un arc inférieur à $180°$. Ou bien le système de ces projections contient les deux extrémités d'un diamètre et, par suite, il y a deux points de E distants de 2ρ, ce qui est incompatible avec l'hypothèse; ou bien il y a trois projections de M formant un triangle inscrit dans les conditions où le lemme du triangle s'applique; dans ce cas, le diamètre de E est au moins égal au plus grand côté de notre triangle inscrit qui est lui-même au moins égal à $\rho\sqrt{3}$, et cela contredit encore l'hypothèse.

CHAPITRE III

Propriétés des points intérieurs à l'enveloppante convexe K (E) d'un ensemble E déduites de la distance de tels points à l'extérieur de K (E).

34. — Nous avons vu (n° 22) que les points (α) sont les seuls possibles à l'extérieur de l'enveloppante convexe K(E), mais, sur la frontière de K(E), il peut y avoir des points (β), comme le montre l'exemple d'un ensemble E constitué par la surface d'un hémisphère; le centre de cet hémisphère est bien un point (β). Les points (β) situés sur la frontière peuvent même constituer des lignes. Considérons, en effet, la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire; elle est divisée en deux moitiés par un plan passant par l'axe. Prenons pour E l'une de ces deux parties. Chaque point de l'axe est un point (β) situé sur la frontière de K(E). A l'intérieur de K(E) peuvent exister des points (α), des points (β) et des points (γ). Par exemple, si E est constitué par les deux faces opposées d'un cube, le centre de ce cube est un point (β) à deux projetantes opposées, et si E est la surface d'une sphère, le centre de cette sphère est un point (γ).

35. — Propriétés des points intérieurs a une figure convexe F relativement a leur distance a l'extérieur de F. — Pour effectuer la recherche des points (α) intérieurs à K (E), nous commencerons par étudier la distance d'un point M, situé à l'intérieur d'une figure convexe F, à la région extérieure à cette figure ; cette distance est encore celle du point M au complémentaire C (F), ou, ce qui revient au même, à $\overline{C(F)}$.

Une telle étude fournira d'ailleurs, chemin faisant, des résultats intéressants en eux-mêmes, concernant l'ensemble des sphères inscrites dans une figure convexe.

36. — D'abord, remarquons que la distance à C(F) du point M situé à l'intérieur de F, est bornée comme inférieure au diamètre de F. En d'autres termes, si l'on effectue sur C(F) la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ, pour ρ assez grand, F est complètement recouverte par l'ensemble ouvert obtenu.

37. — Considérons le front φ_ρ de C(F). Par chaque point de φ_ρ, passe une sphère de rayon ρ incluse dans F. Il s'ensuit qu'en tel point, la frontière de F admet un plan d'appui unique tangent à la fois à cette sphère et à la surface qui limite F.

38. Dans ce qui suit, supposant que, par la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée sur C(F) avec le rayon ρ, F ne soit pas entièrement recouverte, nous désignerons par Q l'ensemble des points non atteints dans ce recouvrement partiel, c'est-à-dire situés à une distance de C(F) supérieure à ρ.

39. — Théorème XVII. — *Par tout point* M *de la frontière de* Q *il passe au moins un plan d'appui de cette figure.*

En effet, soit MA une projetante de M sur $\overline{C(F)}$. Comme la projection A appartient au front φ_ρ de C(F), donc à la frontière de F, il passe par M un plan d'appui Π de F, lequel est unique et perpendiculaire à MA. Soit Π' le plan mené par M parallèlement à Π. Supposons qu'il existe un point M' de Q entre Π' et Π. Le point M' appartenant à Q, la sphère $S^{\rho}_{M'}$ appartiendrait à F. Cette sphère serait d'ailleurs coupée par Π qui, dès lors, ne serait plus plan d'appui de F. Cette contradiction justifie le théorème.

40. — De plus,

Théorème XVIII. — *Q est une figure convexe.*

En effet, soient P et P' deux de ses points. Les sphères S^{ρ}_{P} et $S^{\rho}_{P'}$ appartiennent à F. L'enveloppante convexe de leur réunion est aussi incluse dans F. Si le segment rectiligne $\overline{PP'}$ portait un point P'' n'appartenant pas à Q, c'est-à-dire situé à une distance de $\overline{C(F)}$ inférieure à ρ, la sphère $S^{\rho}_{P''}$ évidemment contenue dans l'enveloppante convexe de $S^{\rho}_{P} + S^{\rho}_{P'}$, contiendrait des points de $C(F)$, ce qui serait contradictoire.

41. — Q peut avoir des points intérieurs. En effet, si, sur l'extérieur d'une sphère, on effectue la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon ρ inférieur au rayon de la sphère, l'ensemble des points non recouverts est une sphère concentrique à la sphère donnée. Dans le cas où Q a des points intérieurs, la frontière de Q est une surface isodistante de $\overline{C(F)}$. Mais, en revanche, il peut exister des points de la frontière commune à F et à $C(F)$ à une distance de Q supérieur à ρ; ce sont ceux qui n'appartiennent pas au front φ_{ρ} de $C(F)$.

En voici un exemple : Soit un parallélipipède. Effectuons la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ sur la région qui lui est extérieure avec un rayon ρ tel que le parallélipipède ne soit pas entièrement recouvert. L'ensemble Q des points non recouverts est un nouveau parallélipipède intérieur au premier. Mais, si l'on effectue sur lui la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon ρ précédent, l'ensemble $\overline{Q_{\rho}}$ ainsi obtenu laisse notamment échapper les sommets du parallélipipède initial.

Pour rappeler cette absence de réciprocité, on dira que la frontière de Q est une surface *quasi parallèle* à celle qui limite F.

42. — Comme on l'a vu plus haut (¹), la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}$ effectuée sur une figure convexe avec un rayon quelconque donne une nouvelle figure convexe dont la frontière est à plan tangent continu. On peut donc dire que :

La construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ effectuée sur la frontière d'une figure convexe F donne lieu, en général, à deux familles de surfaces, l'une extérieure à F formée de surfaces convexes parallèles à la frontière de F et à plan tangent continu, l'autre intérieure à F, formée de surfaces convexes quasi parallèles à la frontière de F et n'ayant pas, en général, un plan tangent partout (²).

43. — L'ENSEMBLE DES CENTRES DES SPHÈRES INSCRITES DANS UNE FIGURE CONVEXE. — Reprenons la figure convexe Q envisagée plus haut. Tant qu'elle offre des points intérieurs, on peut faire croître au delà de ρ la distance à $\overline{C(F)}$. Quand ρ augmente, Q diminue en restant convexe. Il arrive un moment où, à partir de chacun de ses points, la distance à $\overline{C(F)}$ ne peut plus croître. La figure Q est alors dépourvue de points intérieurs et coïncide avec l'ensemble des centres des sphères inscrites (³) dans F. De la convexité de Q, il résulte que :

THÉORÈME XIX. — *L'ensemble des centres des sphères*

(¹) Nos 13 et 14.

(²) Dans le cas de deux dimensions et d'une courbe de départ ayant une tangente partout, la construction C. M. précédente a été appelée par Sophus Lie « dilatation ». Cette dilatation a été étudiée par MM. CHARLES JORDAN et RAYMOND FIEDLER, *Contribution à l'Étude de courbes convexes et de certaines courbes qui s'y rattachent.* Paris, Hermann, 1912, nº 16.

(³) Avec M. T. Bonnesen, nous entendons par sphère inscrite dans un ensemble, la plus grande sphère contenue dans cet ensemble.

inscrites dans une figure convexe est une figure plane convexe, un segment rectiligne, ou un point unique.

Cette proposition complète le n° 24 de l'ouvrage de M. T. Bonnesen sur le *Problème des Isopérimètres* et répond à la question que M. J. Favard a signalée au début de son premier mémoire des *Annales de l'École Normale* sur les « Problèmes d'extremums relatifs aux courbes convexes » [1].

44. — M. Georges Bouligand a bien voulu me faire remarquer qu'il est intéressant de rechercher directement l'ensemble des centres des sphères inscrites dans une figure convexe F. Considérons l'ensemble des sphères de rayon ρ contenues dans F. L'enveloppante convexe de cet ensemble est, elle aussi, contenue dans F et coïncide avec la réunion des sphères qu'elle enveloppe. On en déduit que les centres de ces sphères forment eux-mêmes une figure convexe Σ^{ρ}. L'inégalité $\rho' > \rho$ entraîne l'inclusion $\Sigma^{\rho'} \subset \Sigma^{\rho}$. Le plus petit Σ^{r} des ensembles Σ^{ρ}, qui est dépourvu de points intérieurs, est l'ensemble des centres des sphères inscrites dans F. C'est, comme nous l'avons déjà vu, une figure plane convexe, un segment rectiligne, ou un point unique. On peut, pour abréger, l'appeler *noyau* de F et le désigner par N. La réunion N*r* des sphères inscrites dans F a pour frontière une surface convexe à plan tangent continu elle-même « inscrite » dans F.

45. — LES POINTS INTÉRIEURS A UNE FIGURE CONVEXE F QUI APPARTIENNENT A LA CLASSE α PAR RAPPORT A L'EXTÉRIEUR DE CETTE FIGURE. — Sur la frontière de F, effectuons la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec le rayon *r* des sphères inscrites; on obtient un ensemble ouvert admettant pour frontière

(1) Tome 46, n° 11, novembre 1929, n° 1.

intérieure l'ensemble des centres des sphères inscrites. Il en résulte que :

THÉORÈME XX. — *Si un point intérieur à une figure convexe* F *est le centre d'une sphère inscrite, relativement à la construction* $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ *effectuée sur la frontière de* F, *ce point ne peut appartenir à la classe* α.

46. — On pourrait croire que si la figure convexe n'admet qu'une sphère inscrite, le centre de cette sphère est toujours un point (γ). L'exemple suivant montre qu'il peut être de la classe β :

Soit $\widehat{AB}$ un quart de cercle ayant pour centre M. Soit A′ le symétrique de A par rapport à la droite $\Delta'M\Delta$ telle que $M\Delta'$ porte MB. Dans le plan AMB, décrivons, de A′ comme centre, l'arc de cercle de rayon AA′ et situé dans l'angle droit ΔMA. On obtient ainsi un arc $\widehat{BAC}$ qui, par sa révolution autour de $\Delta'M\Delta$, engendre une surface convexe n'ayant qu'une sphère inscrite S_M^{MA}. Relativement à cette surface, M est manifestement un point (β).

47. — Si les centres des sphères inscrites dans une figure convexe appartiennent aux classes β et γ, par contre :

THÉORÈME XXI. — *Tout point* M *intérieur à une figure convexe* F *et qui n'est pas centre d'une sphère inscrite est, par rapport à la frontière de* F, *un point* (α).

En effet, par M passe une surface quasi parallèle à la frontière de F et cette surface est elle-même la frontière d'une figure convexe Q ayant des points intérieurs. M est donc le sommet d'un cône droit à base circulaire dont tous les points sont à une distance de la frontière de F supérieure à celle de M. Il en résulte que M est un point (α).

48. — Ensembles a l'extérieur desquels il n'y a que des points (α). — Ce qui précède peut s'exprimer ainsi : Soit Σ une surface fermée convexe. Relativement à cette surface, tout point M, pris à l'intérieur et à une distance ρ quelconque, peut avoir ses projections arbitrairement réparties sur la surface de la sphère S_M^ρ, mais, si M ne coïncide pas avec le centre d'une sphère inscrite, on est sûr qu'il appartient à la classe α.

D'autre part, rappelons qu'effectuer la *représentation sphérique* (1) de Σ sur S_M^ρ, c'est faire correspondre à tout point P de Σ un point P′ de la surface de S_M^ρ de telle sorte que le plan tangent en P′ à S_M^ρ soit parallèle à un plan d'appui de Σ passant en P et que Σ soit, relativement à ce dernier, du même côté que S_M^ρ par rapport à son plan tangent en P′.

On voit tout de suite que les projections de M sont des points invariants de la transformation, ce qui entraîne immédiatement la proposition suivante :

Théorème XXII. — *Pour qu'un sous-ensemble d'une surface convexe fermée Σ ne donne lieu, à l'intérieur de cette surface qu'à des points (α), il suffit qu'il soit formé par une rondelle de Σ d'image sphérique localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère.*

49. — Avant d'aller plus loin et pour faciliter le langage, il convient de rappeler quelques notions dues à M. Arnaud Denjoy (2). Considérant une courbe simple de

(1) G. Bouligand, *Géom. Infin. dir.*, n° 125.

(2) A. Denjoy, Sur les Courbes de M. Jordan (*C. R.*, t. 166, n° 6, 4 février 1918, p. 207). Dans cette Note, afin de donner une représentation analytique de l'intérieur et de l'extérieur d'une courbe plane simple, l'auteur montre qu'un point qui n'est pas sur la courbe appartient à un nombre fini de bornes convexes, ce nombre étant pair si le point est à l'extérieur, impair si le point est à l'intérieur de la courbe.

Jordan fermée L, l'éminent géomètre appelle son enveloppante convexe $Ko(L)$, *borne convexe d'ordre zéro,* les points de L situés sur la frontière de la borne convexe d'ordre zéro prenant le nom de *points périphériques d'ordre zéro.*

Soit P un point de L non périphérique d'ordre zéro, c'est-à-dire situé à l'intérieur de $Ko(L)$, et soit AB le plus grand des arcs contenant P et entièrement contenus dans Ko (L); un tel arc est un *arc primaire* de L. L'enveloppante convexe de l'arc AB, qu'on peut noter $K_1(AB)$, est une *borne convexe d'ordre un* de L et les points de AB situés sur la frontière de $K_1(AB)$ sont dits *points périphériques d'ordre un* de L. On définit de même les bornes convexes et les points périphériques d'ordre supérieur à un.

Remarquons qu'une courbe L qui n'a pas de borne convexe d'ordre supérieur à un peut s'obtenir de la manière suivante :

Soit F une figure plane convexe et soit un nombre quelconque de figures convexes disjointes entre elles, non contenues dans F, mais ayant des points intérieurs communs avec F sans la morceler. L'ensemble E fourni par l'ablation, à partir de F, des autres figures convexes a pour frontière une courbe L répondant à la question.

50. Les définitions précédentes valent encore si, au lieu de considérer une courbe plane L, on envisage une surface simple fermée, c'est-à-dire homéomorphe à la surface d'une sphère. Aussi, peut-on donner la proposition suivante :

Théorème XXIII. — *Soit* E *un domaine limité par une surface simple fermée ayant des bornes convexes d'ordre au plus égal à un et dont chaque calotte primaire a une* *image sphérique localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère. Tout point extérieur à* E *est un point* (α).

Si E n'a pas de borne convexe d'ordre un, c'est une figure convexe. On sait, grâce au théorème I, que tout point extérieur est ordinaire et à ce titre, appartient à la classe α.

Supposons maintenant que E ait des bornes convexes d'ordre un. Tout point M intérieur à K_0 (E) et extérieur à E appartient à l'une d'elles, K_1, par exemple, et se projette sur la calotte primaire correspondante. Il résulte alors du théorème XXII que le point M envisagé est un point (α).

Comme d'autre part on a vu (théorème VIII) que si le point M est situé à l'extérieur de K_0 (E), c'est aussi un point (α), notre énoncé est justifié.

51. Un problème se pose ici que nous n'avons pas résolu :

Soit E un domaine dont la frontière est une surface simple fermée dont les calottes de tous ordres ont chacune une représentation sphérique localisable sur une calotte moindre qu'un hémisphère. Tout point extérieur à E est-il un point (α)?

52. — Voici un autre cas où tout point extérieur à un ensemble E appartient à la classe α.

Théorème XXIV. — *Tout point extérieur à la réunion* E *de figures convexes est un point* (α), *pourvu qu'il existe des points appartenant à toutes ces figures.*

En effet, soit M un point extérieur à E et soit A l'une de ses projections. Le point A est sur la frontière de l'une au moins C_A des figures convexes qui composent E. Le plan Π_A perpendiculaire en A à MA est un point d'appui de C_A, en vertu des théorèmes III et VI.

Soit P un point commun à toutes les figures convexes qui composent E. Le plan Π_A coupe le plan MAP suivant une droite d_A qui coupe elle-même la demi-droite issue de M et passant par P entre M et P. Il en résulte que la demi-droite MP fait, avec toute projetante de M (non confondue en direction avec elle) un angle aigu et que son opposée MΔ fait avec toute projetante de M un angle obtus. Le faisceau Φ (M) des projetantes de M, lequel est fermé, est alors strictement convexe et M appartient à la classe α [1].

CHAPITRE IV

Étude des points (β) situés sur un ensemble F_ρ isodistant d'un ensemble E à l'aide de la notion de Rayon attaché et du Lemme des deux points.

53. — Les rayons attachés et le point de vue de M. G. Bouligand. — Soit M un point ρ-distant de E. On sait que M. Georges Durand a tiré les propriétés essentielles de chaque point M sur F_ρ de la convexité du faisceau Φ (M) de ses projetantes. Soit Π un plan d'appui de Φ (M). A la considération du plan Π, on peut substituer celle de la demi-droite MV perpendiculaire en M à Π, du côté de ce plan qui ne contient pas Φ (M); cette substitution s'opère à la faveur de la correspondance biunivoque qui règne entre Π et MV. Nous disons qu'une telle demi-droite MV est un Rayon attaché de M, ou, en abrégé, un R. A. de M. Un R. A. de M fait évidemment avec toute projetante de ce point un angle au moins droit. La borne

(1) Nous venons de voir que toute projetante de M fait avec la demi-droite M P un angle aigu et, avec la demi-droite opposée M Δ un angle obtus. Des théorèmes A et B de M. Georges Bouligand que nous avons rappelés plus haut (nº 5), il résulte que la demi-droite PΔ ne peut couper une frontière F_ρ déduite de E en plus d'un point. Une telle frontière est donc homéomorphe à la surface d'une sphère.

inférieure de l'angle d'un R. A. avec une projetante de M sera l'angle de cet R. A. avec le faisceau Φ (M); comme Φ (M) est fermé, cette borne inférieure est atteinte pour une projetante au moins. Si notre R. A., que nous avons appelé MV, fait avec Φ (M) un angle obtus, toute demi-droite d'origine M et suffisamment voisine de MV jouit de la même propriété; MV est donc un *R. A. intérieur.* Si MV fait avec Φ (M) un angle droit, il est limite de demi-droites qui ne sont pas de R. A.; c'est donc un *R. A. frontière.*

54. — Lorsque le système Φ (M) des projetantes de M a un plan d'appui unique les contenant toutes, on n'a que deux R. A. opposés, frontières et même isolés; ces deux R. A. sont perpendiculaires au plan d'appui unique de Φ (M) de part et d'autre. D'après ce qui précède, *comme nous le verrons,* le cas d'un plan d'appui contenant les projetantes est le seul où il existe des R. A. de chaque côté d'un plan d'appui des projetantes (ce plan d'appui pouvant être unique ou non).

Supposons maintenant que, de M, soient issus deux R. A. non opposés, par exemple MV et MV'. Les projetantes de M sont situés dans le dièdre formé par la partie commune aux demi-espaces limités aux plans perpendiculaires en M respectivement à MV et à MV' et ne contenant pas ces rayons. Soit alors MW une demi-droite coplanaire à MV et MV' et contenue dans l'angle inférieur à deux droits (ou *géométrique*) $\widehat{VMV'}$. Le plan qui lui est perpendiculaire en M passe par l'arête du dièdre précédent et ne le traverse pas. MW est donc aussi un R. A. En résumé : Avec deux éléments non opposés, le faisceau des R. A. de M contient toute demi-droite intérieure à l'angle géométrique que forment entre eux les deux éléments envisagés. Donc :

Le faisceau des R. A. *d'un point est un demi-cône solide* *convexe, véritable ou dégénéré, à moins qu'il se réduise à deux demi-droites opposées* (comme nous l'avions envisagé ci-dessus) *ou enfin soit vide.*

55. — De ces remarques découlerait une classification des points extérieurs à un ensemble d'après la structure du faisceau de leurs R. A. Nous nous bornerons à noter que l'on caractérise par ce procédé les classes α, β et γ de M. Georges Durand au moyen des critères suivants, immédiats, mais importants pour la suite de nos déductions :

Un point (α) est un point ayant des R. A. intérieurs;

Un point (β) est un point n'ayant que des R. A. frontières;

Enfin, un point (γ) est un point dépourvu de R. A.

On voit que les trois cas s'excluent mutuellement et on comprend déjà l'avantage de l'introduction des R. A.

56. — D'autre part, la notion de R. A. rapproche du point de vue de M. Georges Durand lorsqu'il considère F_ρ comme un ensemble frontière, le point de vue de M. Georges Bouligand consistant à regarder F_ρ comme ensemble de niveau d'un champ scalaire : la distance de M à l'ensemble E. En effet, M étant un point extérieur à E, grâce aux définitions précédentes, les deux propositions de M. Georges Bouligand rappelées dans l'Introduction (n° 5) peuvent, en remarquant qu'une demi-droite issue de M, qui n'est pas un R. A., fait un angle aigu avec Φ (M), s'exprimer sous la forme suivante :

Théorème A'. — *Sur toute demi-droite* MΔ *qui n'est pas un* R. A, *de* M, *la distance à* E, *en tant que fonction d'un point de* MΔ, *est décroissante en* M.

Théorème en B'. — *Sur un* R. A. *intérieur* MΔ, *la distance à* E, *en tant que fonction d'un point de* MΔ, *est croissante en* M.

57. — **Dans les mêmes conditions, sur un R. A. frontière, la distance peut croître ou décroître en M selon les divers cas particuliers qui peuvent se présenter.**

Par exemple, si E se réduit à deux points A et B, le milieu M du segment AB est un point (β) n'ayant que deux projetantes opposées MA et MB. Toute demi-droite issue de M dans le plan médiateur de AB est un R. A. frontière sur lequel la distance à E est croissante en M et même en tout point.

Par contre, soit un axe $\Delta' M \Delta$ et soit MA un segment rectiligne de longueur ρ, issu de M, et perpendiculaire à $\Delta' M \Delta$. Dans le plan ($M\Delta$, MA), du point A comme centre avec le rayon 2ρ décrivons une circonférence. De cette circonférence, nous ne considérons que l'arc BC dont les extrémités sont sur $\Delta' M \Delta$ et qui est situé dans le demi-plan limité à $\Delta' M \Delta$ qui ne contient pas MA. L'ensemble E est constitué par la surface de révolution qui a pour axe $\Delta' M \beta$ et pour méridienne l'axe BC précédent.

Relativement à E, M est un point (β) n'ayant que deux R. A. (frontière) opposés : les deux demi-droites $M\Delta$ et $M\Delta'$. Sur ces deux demi-droites, en M, la distance à E est décroissante.

58. — Tout ce que l'on peut dire en général, c'est que, *sur chaque* R. A. *de* M, *la distance au système* ϖ(M) *des projections de ce point, est croissante en tout point.* En effet, soient MV un R. A. quelconque de M et, sur cet R. A., un point N quelconque. Ce point N est évidemment extérieur à l'enveloppante convexe de ϖ (M), de sorte que M est, relativement à ϖ (M), un point (α); de plus, la demi-droite NV est un R. A. intérieur de N. On a vu que, sur une telle demi-droite, la distance à N est croissante.

59. — Application de la notion de R. A. et de celle de cylindre attaché, qui en dérive, a la recherche du contingent de F_ρ en un point (β). — Dans tout ce qui suit, nous considérons la frontière F_ρ de l'ensemble ouvert E_ρ obtenu en effectuant la construction $\mathcal{C}.\mathfrak{M}$ avec le rayon ρ sur un ensemble E quelconque, c'est-à-dire l'ensemble F_ρ des points ρ-distants de E. Nous nous proposons d'abord d'étudier le contingent (ou ctg) de F_ρ, notamment aux points (β).

60. — Tout d'abord, on trouve l'énoncé général suivant :

Théorème XXV. — *Toute demi-tangente en un point quelconque de* M *de* F_ρ est un R. A. *frontière de* M.

En effet, soit MT une demi-tangente de F_ρ en M. Si cette demi-droite n'était pas un R. A., l'ensemble E_ρ étant ouvert, en vertu du théorème A′, elle porterait l'axe d'un cône droit à base circulaire, de sommet M, et ouvert entièrement contenu dans E_ρ ; de ce fait, MT ne pourrait être une demi-tangente de F_ρ en M, contrairement à l'hypothèse.

Si, d'autre part, MT était un R. A. intérieur de M, cette demi-droite porterait l'axe d'un cône droit à base circulaire, de sommet M, ouvert et disjoint de E_ρ ; dans ce cas encore, MT ne saurait donc être une demi-tangente de F_ρ en M. Cette seconde contradiction achève de justifier le théorème.

61. — Remarquons ici que la précédente proposition fait mieux comprendre le lemme de la sphère tangente de M. Georges Durand [1]. C'est parce qu'une demi-tangente est un R. A. frontière qu'elle est tangente à une sphère de rayon ρ centrée sur E; un R. A. frontière est, en effet,

(1) *Thèse*, n° 40.

perpendiculaire à un plan d'appui effectif du système des projetantes, c'est-à-dire à un plan d'appui contenant au moins une projetante.

62. — Du théorème XXV, il résulte que le ctg en un point (γ) est vide, ce que l'on savait déjà, M. Georges Durand ayant montré qu'un tel point est isolé sur F_ρ et ce qui subsiste dans l'espace, d'après un raisonnement de M. Georges Bouligand [1],

63. — Dans le cas des points (α) a lieu le fait réciproque qu'un R. A. frontière de M est une demi-tangente MT de F_ρ; cet énoncé se ramène immédiatement à un résultat de M. Georges Durand, qui a signalé, en outre, qu'en général, le ctg en un point (β) n'est pas entièrement déterminé par les projections de ce point. Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter au second exemple du n° 57.

64. — M. Georges Durand a posé cette question : « Sous quelles conditions supplémentaires le ctg en un point M de la classe β ne dépend-il, comme celui d'un point (α), que des seules projetantes de M? » Nous allons examiner ce problème au bénéfice d'une notion nouvelle, suggérée par les exemples du n° 57.

65. — Sera dit CYLINDRE ATTACHÉ à M (en abrégé C. A.), tout cylindre circulaire droit ouvert de rayon ρ, de base fixe passant par M, dont l'axe est un R. A. de M et dont la hauteur est arbitrairement petite; il est entendu que ce cylindre est situé, par rapport au plan de la base fixe, du même côté que le R. A. constituant son demi-axe.

66. — En tablant sur la S. C. I. des projetantes, nous voyons que le voisinage d'un point M d'une F_ρ, s'il ne

---

(1) Introd. à la *Géom. Inf. Directe*, § 93, p. 96.

dépend pas exclusivement du système $\varpi(M)$ des projections de M, est affecté en outre par les points de E voisins de $\varpi(M)$. Cela nous amène aux deux propositions qui vont suivre.

THÉORÈME XXVI. — *Si un* R.A. *frontière d'un point* M *de* F_ρ *porte l'axe d'un* C.A. *n'incluant aucun point de* E, *cet* R.A. *appartient au ctg de* F_ρ *en* M.

En effet, soit MV un R.A. frontière de M. Par définition, il fait avec le faisceau $\Phi(M)$ des projetantes de M un angle droit; donc, il existe une sphère ouverte S_A^ρ incluse dans E_ρ et dont la surface est tangente en M à MV. Tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe porté par MV contient donc des points de E_ρ.

D'autre part, considérons un point N de MV. Nous allons montrer que, si N est assez voisin de M, il est extérieur à E_ρ, dans les conditions de l'énoncé précédent. A cet effet, appelons $\mathcal{H}_N$ l'hémisphère de la sphère S_N^ρ opposé à NV et $\mathcal{H}'_N$ l'autre hémisphère de la même sphère. $\mathcal{H}_N$ est entièrement contenu dans la réunion de S_M^ρ et du cylindre circulaire droit $C_{\overline{NM}}^\rho$ de hauteur MN et de rayon ρ. Si N est assez voisin de M, en vertu de notre hypothèse, $\mathcal{H}_N$ ne peut porter de points de E. Occupons-nous maintenant de l'hémisphère $\mathcal{H}'_N$. Quand N tend vers M, il tend vers l'hémisphère de S_M^ρ qui est traversé en son pôle par MV. Si $\mathcal{H}'_N$ portait des points de E, l'ensemble E étant fermé, l'hémisphère de S_M^ρ auquel nous venons de faire allusion en porterait aussi et MV ne pourrait plus être un R.A. de M. Dans tous les cas, N est extérieur à E_ρ s'il est assez voisin de M.

En résumé, tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe porté par MV contient, et des points de E_ρ et des points extérieurs à E_ρ; il inclut donc des points de F_ρ. Il s'ensuit que MV est une demi-tangente. C. Q. F. D.

67. — De la proposition précédente, résulte immédiatement la suivante :

Corollaire XXVII. — *Pour que tout* R. A. *frontière d'un point* M *de* F_ρ *soit une demi-tangente, il suffit que les* C. A. *correspondants ne contiennent aucun point de* E.

Ces circonstances sont réalisées pour les points (α) et pour certains points (β). Aussi, le corollaire précédent, est-il une réponse à la question de M. Georges Durand rappelée plus haut (n° 64). On peut dire que : *Une condition suffisante pour que le ctg en un point* (β) *ne dépende que des projections du point est que ses divers* C. A. *ne contiennent pas de points de* E.

68. — Il peut arriver qu'un cylindre attaché à M contienne des points de E sans que son axe cesse de porter une demi-tangente en ce point. A l'appui de cette affirmation, voici un exemple qui m'a été signalé par M. G. Bouligand.

Soit $\mathcal{H}$ un hémisphère de rayon ρ et de centre M. La demi-droite Mz est perpendiculaire à sa base et non située, par rapport à cette base, du même côté que lui. Sur Mz considérons les points O_n tels que $\overline{MO_n} = \frac{\rho}{n}$ [1], et effectuons sur la suite $\{ O_n \}$ la construction C. M. avec le rayon ρ. On obtient un domaine ouvert $\{ O_n \}_\rho$.

Appelons Γ le cylindre circulaire droit solide qui a pour axe le segment MO_1.

Enfin, supposons que E soit composé de $\mathcal{H}$ et de certains points intérieurs à la différence $\Gamma - \{ O_n \}_\rho$. On voit aisément que M est à la fois limite de points de E_ρ (intérieurs à quelque sphère centrée en un point de E lui-même intérieur à $\Gamma - \{ O_n \}_\rho$) et de points extérieurs à E_ρ. (Les points de $\{ On \}$ par exemple). Donc sur Mz,

---

[1] où $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$

en M, la distance à E n'est pas décroissante même si le cylindre attaché correspondant contient des points de E à son intérieur.

Il en résulte que cette même hypothèse n'entraîne pas la propriété pour Mz d'être exclue du ctg.

69. — Pour qu'un R. A. de M soit exclu du ctg en ce point, suffit-il de postuler l'existence de points de E dans toute section droite du C. A. correspondant? La réponse est négative et, pour le voir, il suffit de considérer l'exemple très simple où E est formé par la réunion d'un point A et de la surface de la sphère $S_A^{2\rho}$ de centre A et de rayon 2ρ. Le milieu de chaque rayon de cette sphère est un point (β) n'ayant que deux projetantes opposées, où le ctg existe et coïncide avec le plan médiateur du rayon envisagé.

Remarquons que ce plan coupe $S_A^{2\rho}$ suivant un petit cercle de rayon $\rho\sqrt{3}$ et que les points de E situés dans un C. A. de M sont situés d'un même côté de ce plan.

70. — On est ainsi amené à demander : *pour qu'un* R. A. *frontière de* M *soit exclu du ctg suffit-il que, dans toute section droite du* C. A. *correspondant, se trouvent des points de* E *non localisables sur un secteur d'angle inférieur ou égal à deux droits ?*

Tout ce que j'ai pu montrer, c'est que, dans les conditions de l'énonce, le centre de toute section droite du C. A. envisagé appartient à E_ρ, et par suite (E_ρ étant ouvert) n'est limite que de points de E_ρ dans cette section.

Soit en effet $C_{M_1}^\rho$ une section droite quelconque du C. A. de M et correspondant au R. A. désigné par MV.

Considérons un point P_1 de E situé à l'intérieur de $C_{M_1}^\rho$. La sphère $S_{P_1}^{P_1M_1}$ est intérieure à la sphère $S_{P_1}^\rho$, donc à E_ρ. Considérons la distance ρ_1 du point M_1 aux points de E situés dans la section droite ci-dessus. Comme il existe des points de E intérieurement (au sens étroit) à $C^{\rho}_{M_1}$, M_1 appartient lui-même à E_{ρ}.

D'autre part, soit Q_1 le point de $M_1 P_1$ tel que $M_1 Q_1 = \rho_1$. La sphère $S^{\rho_1}_{Q_1}$ est intérieure au sens large à $S^{P_1 M_1}_{P_1}$, donc intérieure au sens étroit à E_{ρ} et il en est de même de toutes les sphères analogues. Relativement à l'ensemble des points Q_1, le point M_1 est un point (γ) dans le plan de $C^{\rho}_{M_1}$, puisque, d'après l'énoncé, les segments $M_1 Q_1$ ne sont pas localisables dans un secteur d'angle égal à deux droits. Il en résulte que, dans $C^{\rho}_{M_1}$, le point M_1 n'est limite que de points intérieurs aux sphères $S^{\rho_1}_{Q_1}$, donc de points de E_{ρ}. Ces circonstances se reproduisent dans chaque section droite du C. A.

71. — On peut aussi se demander si la condition de l'énoncé du n° 70 est nécessaire. Sans répondre à cette question, nous donnerons certaines indications.

Reprenons les notations de la démonstration précédente et supposons, contrairement à l'hypothèse de l'énoncé, que les points de E se trouvant dans $C^{\rho}_{M_1}$ soient localisables sur un secteur d'angle égal à deux droits. Relativement à l'ensemble des points Q_1, le point M_1 ne peut être un point (γ). Dans le plan de $C^{\rho}_{M_1}$, M_1 possède au moins un R.A. sur lequel, en M_1, la distance a l'ensemble des points Q_1 est croissante en vertu de la proposition du n° 58. Remarquons d'ailleurs que la distance $M_1 Q_1$ diffère de ρ d'une quantité infiniment petite.

De ce qui précède, il résulte donc que, dans $C^{\rho}_{M_1}$, au voisinage de M_1, il existe des points de la frontière obtenue en effectuant la construction $\mathcal{C}.\mathfrak{M}.$ avec le rayon ρ sur l'ensemble des points Q_1. D'autre part, en tant que point ρ_1 distant de l'ensemble des points Q_1, le point M_1 a un rectangle attaché (dégénérescence plane d'un C. A.)

et un tel rectangle n'a, à son intérieur, aucun point de E. Il s'ensuit que, sur le R.A. correspondant, la distance à l'intersection de E par le plan de $C^{\varepsilon}_{M_1}$ est croissante (Théorème XXVI). Donc, si au voisinage de M_1 dans $C^{\varepsilon}_{M_1}$, il n'existe aucun point de E_ρ, cela ne peut être dû qu'à l'intervention des points de E situés dans les sections droites de $C^{\varepsilon}_{M_1}$ voisines.

72. — Application de la notion de R.A. et du lemme des deux points de M. Georges Durand a la recherche du paratingent de F_ρ en un point (β). — La structure du faisceau des R.A. d'un point M de F_ρ influence, dans une certaine mesure, celle du paratingent (ou ptg) de F_ρ en M. Puisque notre attention se porte sur les points (β), il convient de noter que *le système des* R.A. *d'un point* M *de la classe* β, *exclusivement composé d'éléments frontières, comme nous l'avons vu plus haut, est situé dans au moins un plan.* En effet, si M possédait trois R.A. non coplanaires, MV, MV′, MV″, le système total de ses R.A., qui serait un demi-cône solide convexe, comprendrait toute demi-droite issue de M et appartenant au trièdre MV, MV′, MV″. Mais alors M, ayant des R.A. intérieurs, serait un point (α), contrairement à l'hypothèse.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder l'étude du ptg de F_ρ en un point M de la classe β. A cet effet, distinguons les deux cas où M appartient soit à la frontière extérieure, soit à la frontière intérieure de E_ρ.

73. — Théorème XXVIII. — *En tout point* M *de la classe* β *situé sur la frontière extérieure de* E_ρ, *le ptg de* F_ρ *est complet.*

En effet, d'après ce que nous venons de voir, M étant un point (β), on peut trouver un plan $\mathcal{S}$ contenant tous ses R.A. Soit $\Delta'M\Delta$ une droite menée par M hors de $\mathcal{S}$.

Chacune des demi-droites $M\Delta$ et $M\Delta'$ est évidemment distincte d'un R.A. et par suite, en vertu du théorème A' rappelé plus haut (n° 56), sur MV et sur MV' la distance à E est décroissante en M. On peut donc trouver sur $\Delta' M \Delta$, de part et d'autre de M, deux points P et P' arbitrairement voisins de M et inclus dans E_ρ. L'ensemble E_ρ étant ouvert, on peut trouver deux sphères ouvertes S_P^ε et $S_{P'}^\varepsilon$, de rayons assez petits, mais non nuls, pour que ces deux sphères appartiennent, elles aussi, à E_ρ.

D'autre part, puisque, par hypothèse, M est un point frontière extérieur de E_ρ, soit $\{N_i\}$ une suite de points extérieurs à E_ρ tendant vers M. Pour i assez grand, le point N_i est situé entre les deux sphères S_P^ε et $S_{P'}^\varepsilon$; plus précisément, il pénètre à l'intérieur de l'enveloppante convexe de la réunion des deux sphères. Par N_i menons une parallèle $\Delta_i' M_i \Delta_i$ à $\Delta' M \Delta$. Cette droite coupe nos deux sphères de telle manière que sur $N_i \Delta_i'$, il doit y avoir un point M_i' de F_ρ arbitrairement voisin de M et que sur $N_i \Delta_i$, il existe un point M_i de F_ρ également arbitrairement voisin de M. A toute droite $\Delta' M \Delta$ menée par M hors du plan $\mathcal{S}$ des R.A. de M, on peut donc attacher une suite $\{M_i M_i'\}$ de cordes de F_ρ parallèles à $\Delta' M \Delta$ et dont les extrémités tendent vers M. Il en résulte qu'une telle droite $\Delta' M \Delta$ est une paratingente de F_ρ en M. Comme le ptg. est fermé, il en est de même de toute droite menée par M dans $\mathcal{S}$. Donc, le ptg de F_ρ en M est bien complet.

74. — Le ptg de F_ρ en un point de la frontière extérieure de E_ρ est dès lors entièrement déterminé. Une telle frontière ne contient, en effet, que des points (α) et (β) de F_ρ. Pour les premiers, on sait que le paratingent est formé par l'ensemble des droites, qui ne traversent pas le cône des R. A.; pour les seconds, le ptg est complet en vertu du théorème précédent.

75. — **L'étude du ptg de F_ρ en un point M non isolé de la frontière intérieure de E_ρ est plus délicate. Vu que la frontière extérieure de E_ρ est un ensemble fermé et inclut tous les points** (α), **vu que tout point** (γ) **est un point isolé de F_ρ, M appartient nécessairement à la classe β et ne peut être point d'accumulation que de points des classes β et γ. Voici l'exemple d'un point (β) limite d'une suite unique de points (γ) :**

Sur un axe $x'x$, soit $\{M_i\}$ une suite de points tendant vers un point M de telle sorte, pour fixer les idées que : distance $MM_n = \frac{1}{n}$, n pouvant prendre les valeurs de tous les entiers successifs. Effectuons sur $\{M_n\} + M$ la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon ρ supérieur au demi défaut d'enchaînement [1] de $\{M_n\} + M$, c'est-à-dire supérieur à $\frac{1}{2}$, on obtient ainsi une frontière que nous prendrons pour E. Les points M_n forment ici une suite de points (γ) admettant pour point limite M qui, lui, appartient à la classe β. L'ensemble $\{M_n\} + M$ appartient d'ailleurs à la frontière intérieure de E_ρ.

76. — **Pour étudier le ptg de F_ρ en un point de la frontière intérieure de E_ρ, nous partirons de la remarque suivante :**

M'M'' étant une corde de F_ρ, sa direction est biunivoquement déterminée par celle de son plan médiateur. Il est alors indiqué de se servir du lemme des deux points de M. Georges Durand [2], lemme qui s'énonce ainsi :

M' *et* M'' *étant deux points quelconques de* F_ρ, *relative-*

---

(1) Pour la notion de défaut d'enchaînement, voir, par exemple, G. BOULIGAND, *Introd. à la Géom. Infinit. Directe*, § 43, p. 37, ou GASTON RABATÉ, *Sur les Notions originelles de la Géom. Infinit. Dir.*, Thèse, Toulouse, 1931.

(2) *Thèse*, n° 16.

***ment au plan médiateur* Π *du segment* $M'M''$, *le faisceau* $\Phi(M')$ *des projetantes de* M' *est situé du côté de* M' *et le faisceau* $\Phi(M'')$ *des projetantes de* M'' *est situé du côté de* M''.**

77. — Cette proposition se complète par la remarque suivante :

Lemme XXIX. — *Si l'on a un ensemble de cordes telles que* $M'M''$, *relativement à toute position limite du plan médiateur* Π, *l'accumulatif de* $\Phi(M')$ *reste du même côté que* M' *et l'accumulatif de* $\Phi(M'')$ *du même côté que* M''.

78. — De plus,

Lemme XXX. — *Si* $\{M_i\}$ *est une suite de points de* F_ρ *tendant vers* M *donné,* Π *étant une position limite quelconque du plan médiateur* Π_i *du segment* MM_i, *l'accumulatif des projetantes des points* M_i *est situé dans* Π, *lequel est un plan d'appui effectif de* $\Phi(M)$ [1].

En effet, en vertu du lemme XXIX, l'accumulatif des faisceaux $\Phi(M_i)$ est situé du côté de Π où se trouve M_i. D'autre part, en vertu de la S. C. I., supérieure des projetantes, cet accumulatif de $\Phi(M_i)$ appartient à $\Phi(M)$, donc se trouve du côté de Π qui contient M. Devant être à la fois des deux côtés de Π, il est donc situé dans ce plan. D'ailleurs le plan Π est un plan d'appui de $\Phi(M)$, comme il contient l'accumulatif de $\Phi(M_i)$ qui, lui-même, appartient à $\Phi(M)$ en vertu de la S. C. I. des projetantes, c'est un plan d'appui effectif de $\Phi(M)$.

---

(1) A l'aide de cette proposition, on retrouve le Théorème XXV précédent d'après lequel : *M étant un point non isolé de F_ρ, le ctg de F_ρ en M est formé de R. A. frontières de ce point.*

En effet, soit $\{M_i\}$ une suite quelconque de points de F_ρ tendant vers M et soit Π_i le plan médiateur de MM_i. D'après la proposition précédente, toute position limite Π de Π_i est un plan d'appui effectif de $\Phi(M)$. La demi-droite issue de M et qui porte MM_i tend donc vers une demi-droite faisant avec $\Phi(M)$ un angle droit; elle tend, par conséquent, vers un R. A. frontière de M.

79. — D'autre part,

LEMME XXXI. — ***Tout élément d'accumulation Φ d'un ensemble de faisceaux Φ', non strictement convexes, est lui-même non strictement convexe.***

En effet, s'il n'était pas ainsi, chacune des demi-droites qui composent Φ ferait, avec une demi-droite fixe MΔ, un angle aigu. Soit M' le sommet de Φ'. Du point M' faisons partir une demi-droite M'Δ' équipollente à MΔ. En vertu de notre supposition, toute demi-droite de Φ' devrait finir par faire un angle aigu avec M'Δ' et, par suite, serait strictement convexe, contrairement à l'hypothèse.

Nous voilà maintenant en mesure de reprendre l'étude qui est l'objet de ce paragraphe.

THÉORÈME XXXII. — *Le ptg de F_ρ en un point non isolé de la frontière intérieure de E_ρ est situé dans un certain plan contenant les R. A. de ce point.*

En effet, soit $\{M_iM_j\}$ une suite quelconque de cordes de F_ρ tendant vers M. Comme on l'a vu plus haut, M est de la classe β tandis que les points M_i et M_j appartiennent aux classes β et γ; en tous cas les faisceaux de projetantes $\Phi(M)$, $\Phi(M_i)$, $\Phi(M_j)$ sont non strictement convexes. En vertu du lemme XXXI précédent, il en est de même de leurs accumulatifs.

Le lemme XXX nous apprend que l'accumulatif de $\Phi(M_i)$ est situé dans un plan d'appui effectif Π de $\Phi(M)$.

Considérons le plan médiateur Π_{ij} de M_iM_j et soit Π' l'une de ses positions limites. Le plan Π' passe évidemment par M.

Distinguons deux cas :

1° Π' coïncide avec Π. Alors, la droite portant M_iM_j tend vers la perpendiculaire en M à Π. Ce plan étant un plan d'appui effectif de $\Phi(M)$, sa perpendiculaire en M porte un R. A. frontière.

2° Π' diffère de Π et coupe Π suivant une droite Δ. Alors, l'accumulatif de $\Phi(M_i)$ devant être dans Π (lemme XXX), d'un seul côté de Π' (lemme XXIX) et étant de plus non strictement convexe (lemme XXXI), contient deux éléments opposés MA et MA′ situés sur Δ. Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en M à MA et à MA′ contient les R. A. de M. D'autre part, la droite sustentatrice de M_iM_j tend vers une perpendiculaire en M à Π', donc à Δ; par suite elle est située dans le plan $\mathcal{P}$ des R. A. de M. Il est ainsi démontré que, si l'on a deux R. A. déterminant parfaitement le plan $\mathcal{P}$, le ptg est contenu dans ce plan.

Il ne reste donc que le cas où les R. A. sont sur une droite, le faisceau Φ (M) des projetantes de M n'a alors qu'un seul plan d'appui perpendiculaire aux R. A. : le plan Π précédent, qui est la position limite commune des plans médiateurs Π_i et Π_j des cordes MM_i et MM_j. Nous sommes encore sous l'hypothèse que la position limite Π' du plan médiateur Π_{ij} de la corde M_iM_j, diffère de Π, c'est-à-dire coupe Π suivant une droite Δ. Je dis que l'intersection Δ est unique. En effet, imaginons un autre choix de la suite $\{M_j\}$ conduisant à une nouvelle position limite Π'_1 du plan médiateur Π_{ij} de M_iM_j. Si le plan Π'_1 ne passait pas par Δ, il couperait Π suivant une droite Δ_1. Mais alors, le faisceau $\Phi(M_i)$ des projetantes de M_i serait dans la partie commune à trois demi-espaces limités respectivement par les plans Π, Π' et Π'_1 qui concourent au seul point M; il en est de même de son accumulatif (Lemme XXIX) qui, d'ailleurs, est dans Π (Lemme XXX); L'accumulatif de Φ (M_i) serait donc strictement convexe, contrairement au Lemme XXXI. Par suite Δ_1 coïncide avec Δ.

Il en est de même pour un autre choix de la suite $\{M_i\}$.

En résumé, les positions limites des plans médiateurs des cordes M_iM_j passent par Δ. Il s'ensuit que les paratingentes de F_ρ en M sont toutes dans le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en M à Δ, plan qui contient la droite des A. R.

80. — Plus particulièrement, il se dégage de la démonstration précédente le résultat suivant :

Théorème XXXIII. — *Si* M *est un point non isolé de la frontière intérieure de* E_ρ *dont les* R. A. *sont sur une droite et qui n'est limite que point de* F_ρ *jouissant de la même propriété, le ptg de* F_ρ *en* M *se réduit à la droite des* R. A. *de ce point.*

81. — Application de certains résultats précédents a l'étude des frontières F_ρ qui ne pénètrent pas dans K(E). Nous avons vu au chapitre II (théorème VIII) que tout point extérieur à K (E) est un point (α). Mais une frontière F_ρ seulement assujettie à ne pas pénétrer dans K (E) peut présenter des points (β). De tels points doivent évidemment se trouver sur K (E), en fait dans un *plan concluant* (1) de K (E), c'est-à-dire dans un plan d'appui de E contenant des points de la frontière de K (E) qui n'appartiennent pas au front - ∞ de E. Soit M un point (β) d'une F_ρ ne pénétrant pas dans K (E) et soit Π le plan concluant qui porte M. La demi-droite MV perpendiculaire en M à Π et située du côté de ce plan qui ne contient pas E est un R. A. de M, R. A. frontière d'ailleurs, puisqu'un point (β) ne peut avoir d'R. A. intérieurs. Dans Π, M a un faisceau de projetantes (périphériques) (2) non strictement convexe. A MV correspond un C. A. qui, étant situé dans un demi-espace du point de E ne peut contenir de

(1) M. G. Bouligand a introduit la notion de plan concluant au n° 102*bis* de son ouvrage cité.

(2) C'est-à-dire situées dans les plans d'appui du faisceau total.

points de E. Il résulte du théorème XXVI que MV est une demi-tangente. Par suite : *le* ctg *en un point* (β) *d'une* F_ρ *qui ne pénètre pas dans* K (E) *ne peut être vide* (1).

82. — Si un point (β) d'une F_ρ qui ne pénètre pas dans K(E) a un seul R.A., le ctg se réduit, lui aussi, à un seul rayon confondu avec le R. A. Remarquons que, dans ce cas, le ctg est déterminé par les projections. Si K (E) a des points intérieurs, en tout point (β) d'une F_ρ ne pénétrant pas dans K (E), qui est muni seulement de deux R. A. opposés, le ctg de F_ρ se réduit à une demi-droite qui coïncide avec celui des R. A. qui ne pénètre pas lui-même dans K (E). Ici, le ctg ne dépend plus exclusivement des projections; l'intervention des points voisins de ϖ (M) a lieu sous le couvert de la non-pénétration de F_ρ dans K (E).

D'ailleurs, en vertu du théorème XXVIII, en tout point (β) d'une F_ρ qui ne pénètre pas dans K (E), le ptg est complet.

83. — Dans un autre ordre d'idées.

Théorème XXXIV. — *Sur une frontière* F_ρ *ne pénétrant pas dans* K (E), *les points* (β) *dont les* R. A. *sont sur une droite forment un ensemble au plus dénombrable.*

Chacun de ces points est en effet dans un plan concluant de la frontière de K (E) et, relativement aux points de E situés dans le plan concluant qui les contient, ils appartiennent à la classe γ; à ce titre, ce sont des points isolés de l'ensemble des points de F_ρ situés sur K (E); et leur ensemble est, de ce fait, au plus dénombrable.

---

(1) On déduirait encore cette proposition du fait qu'une F_ρ qui ne pénètre pas dans K (E) est une frontière purement extérieure, ce qui empêche la présence de points frontières isolés.

84. — **Enfin, terminons par l'étude, au point de vue** topologique, d'une F_ρ ne pénétrant pas dans **K** (E).

Théorème XXXV. — *Si une frontière* F_ρ *ne pénètre pas dans* K (E), *elle est homéomorphe à la surface d'une sphère,*

En effet, soient Π un plan d'appui de E et P un point de la frontière de K (E) situé dans Π. La demi-droite PΔ issue de P, perpendiculaire à Π et située du côté de Π qui ne contient pas E, demi-droite que nous appellerons *normale externe* à la frontière de K (E), perce nécessairement F_ρ, puisque $E_\rho + F_\rho$ est, comme E, borné.

Nous allons montrer que PΔ ne saurait percer E en plus d'un point. Soit M un point de F_ρ situé sur PΔ. Si M est distinct de P, comme il est extérieur à K (E), il appartient à la classe α (théorème VIII); de plus, MΔ est un R. A. intérieur, sur lequel en vertu du théorème B' (n° 56), la distance à E est croissante en M. D'autre part, la demi-droite MΔ', opposée à MΔ, fait un angle aigu avec toute projetante de M; elle n'est donc pas un R. A. de ce point et, grâce au théorème A' (n° 56), sur MΔ', en M, on voit la distance à E décroître. Donc, PΔ ne peut percer F_ρ en plus d'un point.

Les normales externes à la frontière de K (E) réalisent une correspondance biunivoque et continue entre cette frontière et F_ρ.

Or, la frontière d'une figure convexe est homéomorphe à la surface d'une sphère. Il en est donc de même de F_ρ.

APPENDICE

Les R. A. et la S. C. I.

Vu l'importance des R. A., nous nous occuperons ici d'un problème que nous a posé M. Georges Bouligand : N'est-il pas possible de déduire de la S. C. I. supérieure des projetantes, la S. C. I. inférieure des R. A. (1) c'est-à-dire le fait qu'en un point, le système des R. A. est contenu dans son accumulatif (2) ?

Sans hypothèses supplémentaires, la réponse est négative comme on le voit sur les exemples suivants :

Exemple I. — Sur un axe $x'x$, soit $\{M_i\}$ une suite de points tendant vers un point M. Effectuons sur $\{M_i\} + M$ la construction $\mathcal{C}.\mathcal{M}.$ avec un rayon ρ supérieur au demi défaut d'enchaînement de $\{M_i\} + M$. On obtient ainsi une frontière F_ρ relativement à laquelle M est un point (β), limite d'une seule suite $\{M_i\}$ de point (γ).

M a pour unique R. A. la demi-droite Mx'. Quant à l'accumulatif des R. A. relatifs aux M_i, il est vide et ne saurait par conséquent contenir Mx'.

Exemple II. — Considérons encore sur un axe $x'x$ une suite $\{M_i\}$ de points tendant, à gauche, par exemple, vers un point M. Dans le plan perpendiculaire en M_i à $x'x$

---

(1) C'est M. Eugène Blanc qui, le premier, a fait connaître un exemple où se manifeste la S. C. I. inférieure, définie sous la forme précédente : « Sur une propriété différentielle des continus de Jordan » (*C. R.*, 27 février 1933). Ce genre de semi-continuité inférieure est celui qui se présente ici en un point de la frontière extérieure, comme nous l'apprend le théorème XXXVI. Il ne faut pas le confondre avec la semi-continuité inférieure définie par M. Kuratowski (*Fundam. Math.*, t. XVII) : pour plus de précisions sur cette distinction, voir la Note de M. Blanc, *C. R.*, 12 juin 1933.

(2) Accumulatif : ensemble de tous les éléments d'accumulation (des R. A. issus de M′ lorsque M′ tend vers le point M où l'on cherche l'accumulatif).

traçons avec M_i comme centre deux arcs diamétralement opposés A_iB_i, C_iD_i et tels que leurs longueurs communes tendent vers zéro avec la distance (M, M_i). On suppose en outre que les axes des arcs précédents sont tous dans un même plan passant par $x'x$. Les M_i sont des points dont les R. A. sont sur $x'x$, tandis que les R. A. de M remplissent un plan passant par $x'x$.

Les exemples précédents pourraient laisser croire que, comme les projetantes, les R. A. jouissent de la S. C. I. supérieure. Le suivant suffira à montrer qu'il n'en est rien.

Exemple III. — Considérons la frontière $\mathcal{C}.\mathfrak{M}.$ obtenue avec le rayon ρ à partir de l'ensemble formé par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté $\rho\sqrt{3}$. Le centre M du triangle n'a que deux R. A. opposés perpendiculaires à son plan, mais n'est limite que de points ordinaires dont les R. A. remplissent un demi-espace.

L'exemple III suggère l'énoncé suivant :

Théorème XXXVI. — *Sur la frontière extérieure de* E_ρ, *les* R. A. *jouissent de la* S. C. I. *inférieure.*

En effet, M. Georges Bouligand a montré que tout point M de la frontière extérieure de E_ρ est limite de points ordinaires de cette frontière [1]. Soit donc $\{M_i\}$ une suite de points ordinaires de F_ρ tendant vers M. Il y correspond une suite de projetantes $\{M_iA_i\}$ qui, en vertu de la S. C. I. supérieure des projetantes, admet pour élément limite une projetante MA de M, cette projetante MA étant d'ailleurs une projetante périphérique (contenue dans un plan d'appui du faisceau Φ (M) des projetantes de M). L'accumulatif des R. A. de M_i est donc constitué

---

[1] Voir, par exemple : *Introd. à la Géom. Infinit. Directe*, § 94, p. 97. Ce résultat a été établi pour la première fois par M. G. Bouligand dans son Mémoire déjà cité des *Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, t. IX, 1930, p. 23.

par toutes les demi-droites issues de M qui composent le demi-espace limité au plan perpendiculaire en M à MA et ne contenant pas cette demi-droite. Or, ce demi-espace contient les R. A. de M, puisque par définition, ceux-ci font avec toute projetante de M, MA, par exemple, un angle au moins droit.

Il en résulte que les R. A. de M sont inclus dans l'accumulatif des R. A. de toute suite de points ordinaires de la frontière extérieure de F_ρ tendant vers M. A fortiori, ils appartiennent à l'accumulatif des R. A. de tous les points frontières extérieurs de E_ρ du voisinage de M.