ANASTASE TSORTSIS

Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second et du troisième ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1933

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1933__149__1_0>

Série A, N° 1421
N° d'ordre :
2286

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Anastase TSORTSIS
Élève de l'École Normale Supérieure

1re THÈSE. — SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE DE *n* VARIABLES INDÉPENDANTES.

2e THÈSE — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le Juillet 1933, devant la Commission d'Examen

MM. E. VESSIOT . . *Président*
P. MONTEL . .
M. FRECHET . . } *Examinateurs*

PARIS
IMPRIMERIE LES PRESSES MODERNES
45, rue de Maubeuge

1933

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*,	Physique du globe.
Doyen honoraire	M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	Émile PICARD.	
	Rémy PERRIER.	
	Léon BRILLOUIN.	
	A. DEREIMS.	
Professeurs	E. GOURSAT	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie générale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	H. ABRAHAM	Physique.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie structurale et géologie appliquée.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	É. BLAISE	Chimie organique.
	G. JULIA	Calcul différentiel et calcul intégral.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	V. AUGER	Chimie appliquée.
	H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
	E. ESCLANGON	Astronomie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	G. MAUGUIN	Minéralogie.
	A. DENJOY	Mathématiques générales.
	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
	H. BÉGHIN	Mécanique physique et expérimentale.
	DE BROGLIE	Théories physiques.
	G. RIBAUD	Hautes températures.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseigt P. C. N.)	PAUTHENIER	Physique (P. C. N.).
A. GUILLET	Physique.	Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	CHRÉTIEN	Optique appliquée.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	FREUNDLER	Chimie (P. C. N.).
G. BRUHAT	Physique.	P. JOB	Chimie générale.
E. DARMOIS	Physique.	LABROUSTE	Physique du Globe.
A. DEBIERNE	Radioactivité.	PRENANT	Zoologie.
L. DUNOYER	Optique appliquée.	VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.		
L. JOLEAUD	Paléontologie.	BOHN	Zoologie (P. C. N.).
H. MOUTON	Chimie physique.	COMBES	Sciences naturelles (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	GARNIER	Mécanique rationnelle.
ROBERT-LÉVY	Zoologie.	PÉRÉS	Mécanique des fluides.
M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.	HACKSPILL	Chimie (P. C. N.).
		LAUGIER	Physiologie générale.
FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.	TOUSSAINT	Technique Aéronautique
		M. CURIE	Physique (P. C. N.).

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire .... D. TOMBECK.

A LA MÉMOIRE DE MON ONCLE

Georges PROSALENTIS

A MONSIEUR E. VESSIOT

ET

A MES MAITRES

DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PREMIERE THÈSE

SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE DE n VARIABLES INDÉPENDANTES

INTRODUCTION

On sait que l'un des problèmes les plus importants de la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles est la recherche des cas où l'intégration peut être ramenée à celle d'équations différentielles ordinaires.

La question paraît presque complètement résolue dans le cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes, par les résultats de Monge, Ampère, Laplace, Darboux, Sophus Lie, etc. ; la théorie de ces équations a atteint un rare degré de perfection, grâce aux travaux de M. Goursat. Il en est de même pour une équation du premier ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes.

Mais dans le cas des équations d'ordre supérieur, les progrès accomplis sont loin d'être aussi considérables. M. Cartan (1) en se servant de sa méthode des formes extérieures, pour le problème de Pfaff, a étudié une équation aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de six variables indépendantes d'une forme particulière et écrit notamment en concluant « ... *L'équation* (1) (c'est l'équation en question) *présente donc un intérêt tout à fait singulier au point de vue de la théorie générale d'intégration des équations aux dérivées partielles à n variables indépendantes. Sans vouloir entrer ici dans l'étude de cette importante question, on peut remarquer cependant qu'étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes, la formation d'un*

(1) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (3), 25, 1910, p. 109-192.

Tsortsis.

système auxiliaire à n — 1 variables indépendantes de la nature de celui dont il est question plus haut, n'est possible que si l'équation possède des caractéristiques linéaires ; ... ». Ultérieurement il a traité ([1]) une catégorie générale d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de 3 variables indépendantes à caractéristiques doubles, en généralisant les résultats classiques de M. GOURSAT concernant une équation du second ordre de 2 variables indépendantes à laquelle la méthode de DARBOUX est applicable.

La théorie de M. CARTAN sur le problème de PFAFF ouvre la voie pour l'étude du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier à une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes ; ce problème se ramenant toujours, comme l'on sait, à celui de l'intégration d'un certain système de PFAFF.

Mais il y a encore une autre théorie plus géométrique et également intéressante à utiliser pour ce problème ; c'est celle des faisceaux de transformations infinitésimales, qui est due à M. VESSIOT.

Dans deux Mémoires parus ces dernières années, M. VESSIOT ([2]) a prouvé que cette théorie est corrélative de celle de M. CARTAN et se développe suivant le même plan, en donnant, comme celle-ci, des notions et des méthodes qui ne dépendent pas du choix de variables.

L'intégration de l'équation est ramenée à celle d'un certain faisceau de transformations infinitésimales, et c'est de la nature des sous-faisceaux caractéristiques de l'équation que dépendent les particularités de l'intégration de cette équation. L'étude des équations du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes, faite à la fin du premier de ces Mémoires, montre que cette théorie se prête aux applications avec une grande facilité.

M. COISSARD ([3]) a obtenu, en se servant de cette méthode, des résultats nouveaux sur les équations du troisième ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes.

([1]) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 39, p. 370-381.

([2]) *a) Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52, 1924, p. 336-395 ; b) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* (3), 45, 1928, p. 189-253. Voir également : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 184, 1927, p. 143.

([3]) a) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 193, 1930, p. 709 ; b) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 61, 1933.

Récemment, M. Vessiot [1] a généralisé les résultats de MM. Goursat et Cartan mentionnés plus haut, en envisageant une équation du second ordre à n variables indépendantes. Il a donné la forme générale de ces équations admettant des caractéristiques au sens de Cauchy et Monge. Il peut y avoir alors deux systèmes de caractéristiques distincts, ou un seul système double. Le second cas présente cette particularité que le sous-faisceau caractéristique est involutif ; s'il est en outre complet, les caractéristiques ne dépendent que de constantes arbitraires et l'intégration s'achève par des formules explicites dès qu'on a obtenu les invariants du sous-faisceau caractéristique.

La théorie des faisceaux de transformations infinitésimales sert de fondement au travail suivant. Je n'y étudie que des équations qui admettent des caractéristiques au sens de Monge. Il est divisé en deux Parties. La première a pour objet l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue et à un nombre quelconque de variables indépendantes. Les équations *linéaires* du second ordre présentent des particularités intéressantes au point de vue des invariants et de l'intégration de ces équations. Dans le cas, par exemple, des caractéristiques doubles il existe un faisceau caractéristique du premier ordre qui admet au plus $n + 1$ invariants. Si ce nombre maximum est atteint, la connaissance de ces $n + 1$ invariants du premier ordre permet d'obtenir l'intégrale générale de l'équation. Ces équations font l'objet des paragraphes I et II. Le paragraphe III est consacré à l'étude des équations *non linéaires* du second ordre à caractéristiques doubles dans le cas où le sous-faisceau caractéristique n'atteint pas le nombre maximum d'invariants, le cas contraire ayant été examiné, comme nous l'avons déjà fait remarquer, par M. Vessiot. A cette occasion, je n'ai pas jugé inutile de rappeler d'abord ces résultats de M. Vessiot sous une forme un peu différente. Elle met en évidence une classe particulière d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui sont analogues à celles de Monge-Ampère de la théorie classique ; je conviens de les désigner par le nom d'*équations de Monge-Ampère généralisées*. Une remarque importante sur les équations du second ordre admettant des caracté-

[1] *Comptes rendus de l'Académie d'Athènes*, 5, 1930, p. 424.

ristiques achève ce paragraphe ; celles-ci sont caractérisées par deux suites des fonctions $\xi_2, \dots \xi_n$; $\eta_2, \dots \eta_n$, et les résultats précédents ne sont valables que si les ξ, η sont des fonctions indépendantes des dérivées secondes $p_{12}, \dots p_{nn}$. En supposant le contraire, on obtient divers types d'équations du second ordre. En particulier, pour les équations de MONGE-AMPÈRE généralisées, le nombre maximum d'invariants du premier ordre du sous-faisceau caractéristique est $n + 1$, le même pour tous les types de telles équations. Cette remarque doit être répétée pour les équations du troisième ordre qui font l'objet de la seconde Partie.

La seconde Partie est réservée à l'étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes. J'énonce d'abord, sans démonstration, certains résultats concernant la définition de l'intégrale complète d'une équation du troisième ordre ainsi que la loi de formation de telles équations possédant des caractéristiques, résultats que l'on peut obtenir en imitant le procédé suivi par M. VESSIOT pour les équations du second ordre.

La propriété établie par M. VESSIOT pour une équation du second ordre, d'après laquelle le sous-faisceau caractéristique double est toujours involutif, n'est plus valable pour les équations du troisième ordre à caractéristiques triples. On est ainsi obligé de considérer les dérivés successifs du sous-faisceau caractéristique S et d'étudier les formules de structure de ces faisceaux, car c'est de la nature de ces formules que dépendent le nombre et la nature des invariants de S, et par suite les particularités de l'intégration de l'équation. Pour ne pas surcharger ce travail, je n'y envisage que le cas, le plus intéressant, où le sous-faisceau caractéristique triple admet le nombre maximum d'invariants. Il est d'abord question des équations linéaires (§ IV), puis du cas général (§ V).

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 196, 1933, p. 159 et p. 990 (séances des 16 janvier, 3 avril).

Je suis heureux, en terminant, d'exprimer toute ma gratitude à M. VESSIOT, dont les conseils et les encouragements m'ont été si précieux.

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE DE *n* VARIABLES INDÉPENDANTES

I. — ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE A CARACTÉRISTIQUES DE MONGE DOUBLES

1. Transformations de base du sous-faisceau caractéristique double. — Soit une équation aux dérivées partielles du second ordre, à une fonction inconnue de n variables indépendantes, supposée résolue par rapport à la dérivée p_{11}, à savoir

$$\Phi = p_{11} + \Phi_1(x, x_1, \cdots x_n \,;\, p_1, \cdots p_n \,;\, p_{12}, \cdots p_{1n}) = 0 \tag{1}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial x}{\partial x_i}, \qquad p_{i\mathrm{K}} = \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_{\mathrm{K}}}.$$

Introduisons le faisceau F défini par les transformations de base

$$\mathrm{X}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + p_{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\,; \qquad p_{ik} f = \frac{\partial f}{\partial p_{ik}}\,; \qquad (\alpha,\, i,\, k = 1, 2, \cdots n),$$

α étant un indice de Sommation, et désignons par F_0 le sous-faisceau de F de degré $\mathrm{N} - 1$ $\left(\mathrm{N} = n + \frac{n(n+1)}{2}\right)$ qui laisse Φ invariant. L'intégration de l'équation (1) se ramène à celle du faisceau F_0 ; c'est pourquoi ce faisceau F_0 est dit, le *faisceau associé* de (1).

Vu le résultat de M. Vessiot (1) concernant les équations générales du second ordre qui admettent des caractéristiques, les équations *linéaires* du second ordre à caractéristiques doubles doivent être de la forme

$$(2)\quad \Phi = p_{11} + 2\xi_\alpha p_{1\alpha} + \xi_\alpha^2 p_{\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha\xi_\beta p_{[\alpha\beta]} + \psi = 0 \quad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n)$$

où ξ, ψ sont des fonctions de x, $x_1, \dots x_n$; $p_1, \dots p_n$; les indices en caractères grecs α, β,... étant des indices de Sommation et $[\alpha\ \beta]$ désignant que la Sommation s'étend à toutes les combinaisons de deux indices α, β.

Le sous-faisceau caractéristique S qui correspond à (2), aura alors pour base les transformations

$$\begin{aligned}
Kf &= X_1 f + \xi_\alpha X_\alpha f - (X_1\Phi - \xi_\alpha X_\alpha \Phi) P_{11} f - X_\alpha \Phi P_{1\alpha} f \\
K_{ii} f &= P_{ii} f - \xi_i P_{1i} f + \xi_i^2 P_{11} f \\
K_{ij} f &= P_{ij} f - \xi_j P_{1i} f - \xi_i P_{1j} f + 2\xi_i \xi_j P_{11} f \\
& \qquad (\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n ;\ i \neq j).
\end{aligned}$$

2. Formules de structure du sous-faisceau caractéristique S. — D'après la construction de S, Φ est un invariant commun à toutes les transformations de ce faisceau. D'autre part, les quantités

$$\rho_i = p_{1i} + \xi_\alpha p_{\alpha i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)$$

demeurent invariantes par les transformations K_{ii}, K_{ij} de S, puisqu'on a identiquement

$$K_{ii}\rho_h = K_{ij}\rho_h = 0 \qquad (i, j, h = 2, 3, \cdots n ;\ i \neq j).$$

Ceci nous conduit à effectuer un changement de variables en prenant Φ, $\rho_2, \dots \rho_n$ à la place de p_{11}, $p_{12}, \dots p_{1n}$ et en gardant toutes les autres variables. On a d'abord

$$(3)\qquad Xf = X_1 f + \xi_\alpha X_\alpha f = Nf + \rho_\alpha M_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)$$

(1) Sur les intégrales complètes et sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue et n variables indépendantes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'Athènes*, 5, 1930, p. 424 (voir notamment n° 10).

On garde dans cette *Première Partie*, autant que possible, toutes les notations de ce travail, que l'on convient de désigner désormais, pour abréger, par le symbole V.

avec

$$Nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \xi_\alpha p_\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} - \psi \frac{\partial f}{\partial p_1};$$

$$M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i \frac{\partial f}{\partial p_1}; \quad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

En outre, on obtient

$$(4) \qquad K\rho_i = - X_i \Phi + p_{i\alpha} X \xi_\alpha \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Or, on a

$$X_i f = N_i f + p_{i\alpha} M_\alpha f \quad (\alpha, i = 2. 3 \cdots n)$$

où l'on a posé

$$N_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial f}{\partial p_1};$$

il s'en suit

$$X_i \Phi = 2\rho_\alpha N_i \xi_\alpha + N_i \psi + p_{i\alpha}(2\rho_\beta M_\alpha \xi_\beta + M_\alpha \psi) \quad (\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n).$$

A cause de (3) on a encore

$$X \xi_i = N \xi_i + \rho_\alpha M_\alpha \xi_i \quad (\alpha, i = 2, 3. \cdots n).$$

Donc la formule (4) devient

$$K\rho_i = - (2\rho_\alpha N_i \xi_\alpha + N_i \psi) + p_{i\alpha}[N\xi_\alpha - M_\alpha \psi + \rho_\beta(M_\beta \xi_\alpha - 2M_\alpha \xi_\beta)]$$
$$(\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n).$$

Ainsi la transformation Kf peut s'écrire

$$(5) \quad Kf = Nf + \rho_\alpha M_\alpha f + \{ - (2\rho_\beta N_\alpha \xi_\beta + N_\alpha \psi)$$
$$+ p_{\alpha\beta}[N\xi_\beta - M_\beta \psi + \rho_\gamma(M_\gamma \xi_\beta - 2M_\beta \xi_\gamma)] \} R_\alpha f \quad (\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$R_i f = \frac{\partial f}{\partial \rho_i}.$$

Les autres transformations de S deviennent

$$(6) \qquad K_{ih} f = P_{ih} f \quad (i, h, = 2, 3, \cdots n).$$

Donc S se trouve avoir comme base les transformations (5), (6).

Les particularités de l'intégration de l'équation (2) dépendent de la nature du sous-faisceau caractéristique S. Il faut donc former la structure de S, ainsi que, éventuellement, celle des faisceaux dérivés de S.

Mais la base de S étant ramenée à la forme (5), (6), la structure de S s'obtient immédiatement

$$(7) \qquad (K_{ij}, K) = [N\xi_j - M_j\psi + \rho_\alpha(M_\alpha\xi_j - 2M_j\xi_\alpha)]R_if \quad ; (K_{ij}, K_{hk}) = 0$$
$$(\alpha, i, j, h, k = 2,3,\cdots n).$$

Deux cas sont à distinguer : suivant que les coefficients de R_if, qui figurent dans les seconds membres de (7), sont tous identiquement nuls, ou ne le sont pas tous.

3. Cas où le faisceau S admet le nombre maximum d'invariants. — On va d'abord examiner le premier cas ; il faut que l'on ait identiquement

$$N\xi_i - M_i\psi + \rho_\alpha(M_\alpha\xi_i - 2M_i\xi_\alpha) = 0 \qquad (\alpha, i = 2, 3,\cdots n).$$

Les quantités N, M, ξ, ψ ne dépendant pas des variables $\rho_2,\ldots \rho_n$, ces relations ne peuvent être identiquement vérifiées que si ξ, ψ satisfont aux équations

$$N\xi_i - M_i\psi = 0 ; M_j\xi_i - 2M_i\xi_j = 0 \qquad (i, j = 2, 3,\cdots n),$$

qui sont équivalentes aux $n(n - 1)$ équations

$$(8) \qquad N\xi_i - M_i\psi = 0 ; \quad (9)\ M_i\xi_j = 0 \qquad (i, j = 2, 3,\cdots n).$$

Si ces conditions sont vérifiées, le sous-faisceau caractéristique S est complet, et réciproquement. On peut trouver la forme générale des équations (2), pour lesquelles S admet le nombre maximum d'invariants. Pour cela il suffit d'intégrer de la façon la plus générale le système d'équations aux dérivées partielles (8), (9) où ξ, ψ sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x, $x_1,\ldots x_n$; $p_1,\ldots p_n$.

Tenons compte d'abord des équations (9) ; elles montrent que le faisceau

$$(10) \qquad M_if\ (i = 2, 3,\cdots n)$$

est un faisceau complet. Il admet donc $n + 2$ invariants indépendants. Ces invariants seront $x, x_1, \ldots x_n$ et une fonction $\xi_0(x, x_1, \ldots x_n ; p_1,\ldots p_n)$ qui dépendra nécessairement des p. De plus les $\xi_2, \ldots \xi_n$ sont aussi des invariants du faisceau (10), à cause des relations (9) ; donc ce sont des fonctions de $x, x_1, \ldots x_n, \xi_0$:

$$\xi_i = \theta_i(\xi_0 ; x, x_1, \cdots x_n) \qquad (i = 2, 3, \cdots n). \tag{11}$$

Mais alors la quantité $p_1 + \xi_\alpha p_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, \ldots n)$ est aussi un invariant de ce faisceau ; par conséquent elle ne dépendra, également, que de $x, x_1, \ldots x_n, \xi_0$. On a ainsi

$$p_1 + \theta_\alpha p_\alpha = \theta_0(\xi_0 ; x, x_1, \cdots x_n) \quad (\alpha = 2, 3 \cdots n). \tag{12}$$

Nous remarquerons que $\frac{\partial \xi_0}{\partial p_1}$ n'est pas nul, sans quoi les $\frac{\partial \xi_0}{\partial p_i}$ $(i = 2, 3, \ldots n)$ le seraient aussi, à moins que tous les $\xi_2, \ldots \xi_n$ soient nuls ; mais dans ce cas on peut prendre p_1 à la place de ξ_0.

Réciproquement, si l'on se donne la forme des θ, et si l'on définit ξ_0 par la relation (12), on aura

$$1 = \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_0} - p_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \xi_0}\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} ; \quad \theta_i = \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_0} - p_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \xi_0}\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial p_i} ; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n) ;$$

de sorte que si les $\theta_0, \theta_2, \ldots \theta_n$ satisfont à la condition [1]

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \xi_0} - p_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \xi_0} \neq 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

le faisceau (10), défini par les relations (11), admet bien ξ_0 comme invariant, et par conséquent satisfait à la question.

Les $\xi_2, \ldots \xi_n$ étant définis de manière à satisfaire aux équations (9), les conditions (8) expriment que l'on a

$$(\mathrm{N}, \mathrm{M}_i) = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n). \tag{13}$$

On en déduit

$$\mathrm{N M}_i \xi_0 - \mathrm{M}_i \mathrm{N} \xi_0 = 0, \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

et puisque ξ_0 est un invariant du faisceau (10), il s'ensuit

$$\mathrm{M}_i \mathrm{N} \xi_0 = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Or, ceci exprime que $\mathrm{N}\xi_0$ est aussi un invariant du faisceau (10), et par conséquent ce sera une fonction de $x, x_1, \ldots x_n, \xi_0$:

$$\mathrm{N}\xi_0 = \theta(\xi_0 ; x, x_1, \cdots x_n),$$

[1] Cette condition exprime que (12) définit ξ_0 dans les conditions de régularité classiques.

ou

$$A\xi_0 - \psi \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} = \theta(\xi_0 ; x, x_1, \cdots x_n) \quad [1]$$

avec

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \xi_\alpha p_\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (\alpha = 2\ 3, \cdots n),$$

ce qui définit ψ.

Si les $\xi_2, \ldots \xi_n$ sont nuls et si $\xi_0 = p_1$, on a $A\xi_0 = 0$ et $\psi = -\theta(p_1 ; x, x_1, \ldots x_n)$.

Et réciproquement : car, si cette condition est remplie, en prenant ξ_0 comme variable à la place de p_1, on aura

$$Nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \theta_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \theta_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta \frac{\partial f}{\partial \xi_0}; \qquad M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i}; \ (\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

et les coefficients de Nf ne dépendant que de ξ_0, les conditions (13) sont vérifiées.

On a du reste, d'après ce qui précède,

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial p_1} = \frac{1}{\dfrac{\partial \theta_0}{\partial \xi_0} - p_\alpha \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial \xi_0}} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

On a ainsi la forme explicite des équations linéaires répondant à la question.

Tenant compte des relations (8), (9) la transformation (5) devient

$$(14) \quad Kf = Nf + \rho_\alpha M_\alpha f - (N_\alpha \psi + 2\rho_\beta N_\alpha \xi_\beta) R_\alpha f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n);$$

et le sous faisceau caractéristique S aura alors comme base les transformations (6), (14). Cette forme simple de S met en évidence le nombre et la nature des invariants de ce faisceau. Ce nombre est $3n - 1$ et tous ces invariants (indépendants) de S doivent être des invariants de la transformation (14), car les $p_{22}, p_{23}, \ldots p_{nn}$ ne figurent pas dans (14). D'autre part, ces invariants ne seront pas tous du second ordre. En effet, les invariants du faisceau

$$(15) \qquad Nf, M_i f \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

[1] Dans Af on remplace $\xi_2, \ldots \xi_n$; $p_1 + \xi_\alpha p_\alpha$ par leurs valeurs tirées des formules (11), (12).

sont encore des invariants de la transformation (14), et par suite, des invariants du sous-faisceau caractéristique S. Or, le faisceau qui vient d'être défini est un faisceau complet ; c'est ce qu'expriment précisément les relations (8), (9). Il admet donc le nombre maximum d'invariants, qui est $n + 1$. Ces invariants ne dépendant que de variables $x, x_1, \dots x_n$; $p_1, \dots p_n$ seront dès lors tous du premier ordre.

Réciproquement, les invariants du premier ordre de S sont les invariants (indépendants) du faisceau (15), et s'il y en a $n + 1$, ce faisceau est complet ; de sorte que les conditions (8), (9) sont vérifiées et que le sous faisceau caractéristique S est aussi un faisceau complet.

On arrive ainsi à la conclusion suivante :

Si le sous faisceau caractéristique S *admet le nombre maximum d'invariants, ce nombre sera* $3n - 1$ *et ces invariants indépendants de* S *seront les* $3n - 1$ *invariants principaux de la transformation* (14). *Au nombre de ces* $3n - 1$ *invariants de* S *il en figure* $n + 1$ *du premier ordre, qui constituent le système fondamental d'invariants du faisceau* (15).

Les trajectoires des transformations de ce dernier faisceau servent à engendrer les multiplicités intégrales, prolongées au premier ordre, de l'équation (2) ; c'est pourquoi ce faisceau sera dit désormais le *faisceau caractéristique du premier ordre de l'équation* (2) [1].

Nous verrons plus tard comment on pourrait utiliser les invariants de S pour former l'intégrale générale de l'équation proposée.

4. Cas où S **n'admet pas le nombre maximum d'invariants.** — Nous allons maintenant étudier le cas où les coefficients de $R_i f$, qui figurent dans les seconds membres de (7), ne s'annulent pas en même temps. Les crochets (7) introduisent alors les transformations nouvelles

$$R_i f = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (i = 2, 3, \cdots n),$$

et il s'ensuit que les invariants de S, s'il en existe, ne peuvent plus être que du premier ordre.

[1] Cf. E. Vessiot, *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration* : Bulletin de la Société Mathématique de France, 52, 1924, p. 394.

Le premier faisceau dérivé de S′ de S aura ainsi comme base les transformations

$$S' : Kf = Nf + \rho_\alpha M_\alpha f \; ; \quad R_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \; ; \quad K_{ij} f = P_{ij} f \; ; \quad (a, i, j = 2, 3, \cdots n) \; ;$$

il sera de degré $m + n - 1$; $m = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ étant le degré de S. Les seuls crochets non identiquement nuls de la structure de S′ sont

$$(R_i, K) = M_i f \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

On en déduit que S′ ne peut être un faisceau complet, et la structure de ce faisceau introduit donc les $n - 1$ transformations nouvelles $M_i f$. On est ainsi conduit à construire le second dérivé S″ de S ; il aura comme base les $m + 2(n - 1)$ transformations

$$S'' : \qquad Nf \; ; \quad M_i f \; ; R_i f \; ; \quad P_{ij} f \; ; \qquad (i, j = 2, 3, \cdots n).$$

On en conclut que les coefficients des transformations N, M_i ne renfermant pas les dérivées secondes, le système fondamental d'invariants de S″ sera identique à celui du faisceau F_s du premier ordre, qui a comme base les n transformations

$$F_s : \qquad Nf : \quad M_i f \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

S'il y a un invariant qui ne soit pas d'ordre zéro, le faisceau M_i est complet. Donc si le faisceau M_i n'est pas complet, il ne peut y avoir que des invariants d'ordre zéro [1]. Si J est un invariant du premier ordre ou d'ordre zéro, on a l'identité

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial J}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial J}{\partial x}\right) M_\alpha f - \frac{\partial J}{\partial p_1} Nf = [J, f] \quad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

et si un de J, soit J_1, est effectivement du premier ordre, le faisceau F_s peut ainsi se définir par

$$F_s : \qquad [J_1, f], \quad \frac{\partial(J_1, f)}{\partial(p_1, p_i)} \quad (i = 2, 3, \cdots n),$$

[1] Les invariants d'ordre zéro de F_s sont les invariants du faisceau : Af, $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ $(i = 1, 2, \dots n)$; en discutant ce dernier faisceau on trouve que le nombre maximum d'invariants d'ordre zéro de F_s, et par suite de S, est $n - 1$.

car on peut toujours supposer $\frac{\partial J_1}{\partial p_1} \neq 0$. Les invariants du premier ordre sont donc des fonctions de la forme

$$f = \omega(J_1 \,;\, x, x_1, \cdots x_n)$$

satisfaisant à l'équation

$$[J_1, f] = 0.$$

Supposons qu'il y en ait un, distinct de J_1, soit J_2. D'après l'identité (16), l'équation

$$[J_2, f] = 0$$

est une conséquence de

$$Nf = 0, \quad M_i f = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Elle sera donc vérifiée par tout autre invariant du premier ordre (Il n'est pas exclu ici que J_2 soit d'ordre zéro). Donc tout système fondamental d'invariants du premier ordre (ou d'ordre zéro) est formé de fonctions J_1, J_2, ... deux à deux en involution. S'il y a n de ces fonctions, il en existe une $(n + 1)$ — ième J_0, telle que l'on ait

$$[J_i, J_0] = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots n) \,;$$

et, d'après ce qui précède, c'est encore un invariant du premier ordre si l'on a

$$J_0 = \omega(J_1 \,;\, x, x_1, \cdots x_n).$$

Or, les $n + 1$ fonctions J étant deux à deux en involution, on peut trouver, et d'une seule manière, n fonctions I des variables $x, x_1, \ldots x_n \,;\, p_1, \ldots p_n$, telles que les formules

$$y_0 = J_0 \,; \quad y_i = J_i \,; \quad q_i = I_i \,; \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

définissent une transformation de contact [1]. Donc J_0 est fonction de $J_1, \ldots J_n, x, x_1, \ldots x_n$; et comme $J_2, \ldots J_n$ sont fonctions de J_1, $x, x_1, \ldots, x_n$, il en est de même de J_0.

Donc *s'il y a n invariants du premier ordre, il y en a n* $+ 1$.

[1] On désigne par ce nom la transformation qui laisse invariant le faisceau

$$Y_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} \,; \qquad P_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \,; \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

(voir E. Vessiot, *Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales dans le cas où le degré du faisceau étant n, celui du faisceau dérivé est n* $+ 1$. Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3), XLV, p. 218-227).

5. Détermination des invariants de S. Intégration de l'équation. — Plaçons-nous dans le cas, le plus intéressant, où le sous-faisceau caractéristique S admet le nombre maximum d'invariants ; et cherchons à déterminer d'abord, les invariants du premier ordre de S. D'après le résultat du n° 3, ces invariants seront ceux du faisceau

$$\mathrm{N}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \theta_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \theta_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta \frac{\partial f}{\partial \xi_0}\ ; \qquad \mathrm{M}_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\ ; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Or, la transformation $\mathrm{N}f$ ne renfermant pas les variables $p_2, \ldots p_n$, ces invariants seront des invariants fondamentaux de $\mathrm{N}f$. Ils seront donc de la forme

$$\mathrm{J}_k(\xi_0\ ; x, x_1, \cdots x_n) \qquad (k = 0, 1, \cdots n)\ (^1).$$

Au moyen des $n+1$ invariants du premier ordre, on peut former l'intégrale générale de l'équation en question. En effet, soit M′ une multiplicité quelconque à $n-1$ dimensions tracée sur une multiplicité intégrale quelconque M. Sur M′, n quelconques des invariants J deviennent fonctions de $n-1$ variables indépendantes ; etpar suite il existe sur M′ deux relations

$$(17) \qquad \mathrm{J}_0 = \varphi(\mathrm{J}_2, \cdots \mathrm{J}_n), \quad \mathrm{J}_1 = \pi(\mathrm{J}_2, \cdots \mathrm{J}_n)$$

qui sont identiquement vérifiées. Mais les J restant constants sur les caractéristiques issues des divers points de M′, qui engendrent M, ces relations sont aussi vérifiées sur M. *En éliminant* ξ_0 *entre les équations* (17), *on a donc l'équation de la surface intégrale de l'équation proposée.* De plus *les fonctions* φ *et* π *peuvent être choisies quelconques* ; car si $\mathrm{J}_0, \mathrm{J}_1, \ldots \mathrm{J}_n$ sont respectivement les invariants fondamentaux relatifs à $p_1, x, x_2 \ldots x_n$ (pour $x_1 = x_0$ valeur numérique arbitraire) les fonctions φ et π sont celles qui interviennent dans les données du problème de Cauchy

$$p_1 = \varphi(x_2, \cdots x_n), \qquad x = \pi(x_2, \cdots x_n) \qquad (\text{pour } x_1 = x_0).$$

Du fait que, sur toute multiplicité intégrale M, on a une relation entre n invariants du premier ordre, résulte aussi la formation, par différentiations, des invariants du second ordre ; car on a alors sur M,

$$\mathrm{X}_i\mathrm{J}_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{J}_\alpha}\mathrm{X}_i\mathrm{J}_\alpha \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

(1) On peut supposer que ξ_0 est l'un des invariants.

d'où on tire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial J_i} = \pm \frac{\Delta_i}{\Delta_0} \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

Δ_0 et les Δ_i étant les déterminants tirés du tableau

$$\| X_iJ_0, X_iJ_2, \cdots X_iJ_n \| \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Les $\frac{\partial\varphi}{\partial J_i}$ sont des constantes sur les caractéristiques tracées sur toute multiplicité intégrale, et par conséquent les $\frac{\Delta_i}{\Delta_0}$ sont des constantes sur toutes les caractéristiques tracées sur des multiplicités intégrales. Si l'on admet que ce sont toutes les caractéristiques possibles, on en conclut que ce sont les n — 1 invariants du second ordre [1]. Ce raisonnement prouve que s'il y a n invariants du premier ordre, il y a des invariants du second ordre et par conséquent (n^{os} 3, 4) le sous faisceau caractéristique S est complet ; et il y a $n + 1$ invariants du premier ordre. Donc, si le sous faisceau caractéristique n'est pas complet, il y a au plus $n - 1$ invariants du premier ordre ; ce qui est bien d'accord avec le résultat du n° 4. En ce qui concerne le calcul des Δ, comme les J sont des invariants du faisceau M_if, on a

$$X_iJ = N_iJ = Y_iJ + \rho_i P_1 J \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$Y_if = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial x}; \qquad P_if = \frac{\partial f}{\partial p_i};$$

et comme J ne dépend de p_1 que par l'intermédiaire de ξ_0, on a

$$P_1J = \frac{\partial J}{\partial \xi_0} P_1\xi_0.$$

On décomposera donc les Δ en somme de déterminants, en décom-

[1] En partant de la relation $J_1 = \pi\,(J_2,\dots J_n)$ on trouve $n - 1$ nouveaux invariants du second ordre, indépendants entre eux et indépendants des précédents. Il est facile de montrer que l'on n'obtient pas des invariants indépendants de ceux-ci, en prenant n autres invariants J. En effet, si l'on part de la relation $J_0 = \omega\,(J_1, J_2,\dots J_{h-1}, J_{h+1}\dots J_n)$ on aura les identités

$$\frac{\partial\varphi}{\partial J_h} = \frac{\partial\omega}{\partial J_1}\frac{\partial\pi}{\partial J_h}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial J_i} = \frac{\partial\omega}{\partial J_i} + \frac{\partial\omega}{\partial J_1}\frac{\partial\pi}{\partial J_i} \quad (i = 2, 3, \cdots h - 1, h + 1, \cdots n);$$

donc les invariants correspondant à ω se déduisent de ceux qui correspondent à φ et π.

posant chaque colonne, et il ne restera que ceux qui contiennent une colonne de ρ ou aucune. Les Δ sont donc des fonctions linéaires des ρ. Par exemple Δ_0 est la somme du déterminant

$$\delta_0 = | \ Y_i J_2 \cdots Y_i J_n \ | \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

et de ceux qu'on en déduit en remplaçant successivement chaque colonne par une colonne correspondante :

$$\rho_2 P_1 J_i, \cdots \rho_n P_1 J_i \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Quant à la formation des invariants, on remarquera que si $J_2, \ldots J_n$ sont les invariants fondamentaux (pour $x_1 = x_0$) relatifs à $x_2, \ldots x_n$; J_1 est celui qui est relatif à x, et J_0 celui qui est relatif à p_1 ; on a pour $x_1 = x_0$,

$$X_i J_1 = p_i ; \quad X_i J_i = 1 ; \quad X_i J_j = 0 ; X_i J_0 = p_{1i} ; \quad (i \neq j = 2, 3, \cdots n).$$

Donc δ_0 se réduit à 1, et les invariants construits avec J_1 sont les invariants fondamentaux relatifs aux p_i ; tandis que ceux construits avec J_0 sont les invariants fondamentaux relatifs aux p_{1i}.

On pourrait aussi écrire

$$N_i J = \frac{\partial J}{\partial \xi_0} N_i \xi_0 + \overline{Y}_i J \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

le surligne indiquant que ξ_0 est traité comme constante ; la colonne de $N_i \xi_0$ remplacerait, dans ce qui précède, la colonne des p_i.

On pourrait enfin supposer $\xi_0 = J_0$, par exemple, et une simplification se produirait du fait que les $\overline{Y}_i J_0$ seraient nuls ; chaque Δ_i se réduirait à un seul déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant des $\overline{Y}_j J_i$ $(i, j = 2, 3, \ldots n)$ la colonne de rang i par la colonne des

$$\frac{\partial J_i}{\partial \xi_0} N_\alpha \xi_0 (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

La vérification est simple ; on a

$$(K, N_i) = - N_i \xi_\alpha N_\alpha f + N_i (N_\alpha \psi + 2 {}_\beta N_\alpha \xi_\beta) R_\alpha f \qquad (\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n),$$

Kf étant la transformation (14). On en déduit

$$K N_i J = - N_i \xi_\alpha N_\alpha J \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)$$

puisque les J sont des invariants de Kf. Donc pour tout déterminant du type

$$\Delta = | N_2 J_i \cdots N_{r_i} J_i | \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

où $J_2, \ldots J_n$ sont $n - 1$ invariants quelconques, on a

$$K\Delta = - \Delta N_\alpha \xi_\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n);$$

d'où l'invariance du quotient de deux Δ par la transformation Kf.

Il est enfin à remarquer que la connaissance d'un seul invariant du premier ordre détermine l'équation. En effet, les équations

$$NJ = 0, M_i J = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

où J est un invariant du premier ordre, déterminent bien ξ, ψ, puisque l'on peut toujours s'arranger de manière que l'on ait $P_1 J \neq 0$.

6. Exemple. — Plaçons nous dans le cas où $n = 3$ et cherchons à intégrer l'équation linéaire du second ordre à caractéristiques doubles pour laquelle le faisceau caractéristique du premier ordre admet l'invariant

$$J_3 = x_3 + \frac{1}{p_3}(x_1 p_1 + x_2 p_2).$$

On doit avoir identiquement

$$(18) \quad M_2 J_3 = \frac{x_2}{p_3} - \xi_2 \frac{x_1}{p_3} = 0, \qquad M_3 J_3 = - \frac{1}{p_3^2}(x_1 p_1 + x_2 p_2) - \xi_3 \frac{x_1}{p_3} = 0$$

d'où

$$\xi_2 = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \xi_3 = - \frac{1}{x_1} \frac{1}{p_3}(x_1 p_1 + x_2 p_2).$$

En outre on doit avoir aussi identiquement

$$(19) \qquad NJ_3 = \frac{p_1}{p_3} + \xi_2 \frac{p_2}{p_3} + \xi_3 - \psi \frac{x_1}{p_3} = 0,$$

et puisque, à cause des valeurs déjà trouvées de ξ_2, ξ_3,

$$p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 = 0$$

on en déduit

$$\psi = 0.$$

L'équation à intégrer est donc

$$(20)\qquad p_{11}+2\frac{x_2}{x_1}p_{12}-2\frac{1}{x_1}\frac{1}{p_3}(x_1p_1+x_2p_2)p_{13}+\frac{x_2^2}{x_1^2}p_{22}$$
$$+\frac{1}{x_1^2}\frac{1}{p_3^2}(x_1p_1+x_2p_2)^2p_{33}-2\frac{x_2}{x_1^2}\frac{1}{p_3}(x_1p_1+x_2p_2)p_{23}=0$$

et le faisceau F_s devient ici

$$F_s:\qquad Nf=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{1}{x_1}\frac{1}{p_3}(x_1p_1+x_2p_2)\frac{\partial f}{\partial x_3},$$
$$M_2f=\frac{\partial f}{\partial p_2}-\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f}{\partial p_1},\qquad M_3f=\frac{\partial f}{\partial p_3}+\frac{1}{x_1}\frac{1}{p_3}(x_1p_1+x_2p_2)\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Ce faisceau est complet, puisqu'on a identiquement

$$M_2\xi_2=0,\quad M_2\xi_3=-\frac{x_2}{x_1}\frac{1}{p_3}+\frac{x_2}{x_1}\frac{1}{p_3}=0,\quad M_3\xi_2=0,$$
$$M_3\xi_3=-\frac{1}{x_1}\frac{1}{p_3^2}(x_1p_1+x_2p_2)+\frac{1}{x_1}\frac{1}{p_3^2}(x_1p_1+x_2p_2)=0,$$
$$N\xi_2=-\frac{x_2}{x_1^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=0,\quad N\xi_3=\frac{x_2}{x_1^2}\frac{p_2}{p_3}-\frac{x_2}{x_1^2}\frac{p_2}{p_3}=0.$$

En introduisant comme variable nouvelle J_3 à la place de p_1 et en tenant compte des relations (18), (19), le faisceau F_s se trouve avoir comme base

$$F_s: Nf=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{1}{x_1}(J_3-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3},\quad M_2f=\frac{\partial f}{\partial p_2},\quad M_3f=\frac{\partial f}{\partial p_3}.$$

Les 4 invariants de F_s seront les 4 invariants principaux de la transformation Nf,

$$J_0=x,\quad J_1=\frac{J_3-x_3}{x_1},\quad J_2=\frac{J_3-x_3}{x_2},\quad J_3=x_3+\frac{1}{p_3}(x_1p_1+x_2p_2)$$

et la surface intégrale de l'équation (20) s'obtiendra donc en éliminant J_3 entre les deux équations

$$x=\varphi\left(\frac{J_3-x_3}{x_2},J_3\right),\qquad \frac{J_3-x_3}{x_1}=\pi\left(\frac{J_3-x_3}{x_2},J_3\right)$$

φ, π désignant deux fonctions arbitraires.

II. — ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE A DEUX SYSTÈMES DE CARACTÉRISTIQUES

7. Transformations de base des sous-faisceaux caractéristiques. — Examinons maintenant le cas où il existe deux sous faisceaux caractéristiques distincts. On a alors affaire à une équation de la forme

$$(21)\quad \Phi = p_{11} + (\xi_\alpha + \eta_\alpha)p_{1\alpha} + \xi_\alpha\eta_\alpha p_{\alpha\alpha} + (\xi_\alpha\eta_\beta + \xi_\beta\eta_\alpha)p_{[\alpha\beta]} + \psi = 0$$
$$(\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n),$$

les ξ, η, ψ ne dépendant que de x, x_1, ... x_n ; p_1, ... p_n [1].

Les deux sous faisceaux caractéristiques S_1 et S_2 ont comme base

$$S_1 \left\{ \begin{aligned} &Kf = X_1 + \eta_\alpha X_\alpha - (X_1\Phi - \xi_\alpha X_\alpha\Phi)P_{11} - X_\alpha\Phi P_{1\alpha}\,; \\ &K_{ii}f = P_{ii} - \xi_i P_{1i} + \xi_i^2 P_{11}\,; \\ &K_{ij}f = P_{ij} - \xi_j P_{1i} - \xi_i P_{1j} + 2\xi_i\xi_j P_{11}\,; \end{aligned} \right.$$

$$S_2 \left\{ \begin{aligned} &\Lambda f = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha - (X_1\Phi - \eta_\alpha X_\alpha\Phi)P_{11} - X_\alpha\Phi P_{1\alpha}\,; \\ &\Lambda_{ii}f = P_{ii} - \eta_i P_{1i} + \eta_i^2 P_{11} \\ &\Lambda_{ij}f = P_{ij} - \eta_j P_{1i} - \eta_i P_{1j} + 2\eta_i\eta_j P_{11}\,; \end{aligned} \right.$$
$$(\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n\,;\ i \neq j).$$

X, P conservant la même signification que dans le n° 1.

En introduisant comme variable nouvelle Φ à la place de p_{11} et en gardant les autres variables, ces faisceaux deviennent

$$S_1 \left\{ \begin{aligned} &Kf = X_1 + \eta_\alpha X_\alpha - X_\alpha\Phi P_{1\alpha}\,; \\ &K_{ii}f = P_{ii} - \xi_i P_{1i}\,; \\ &K_{ij}f = P_{ij} - \xi_j P_{1i} - \xi_i P_{1j}\,; \end{aligned} \right. \qquad S_2 \left\{ \begin{aligned} &\Lambda f = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha - X_\alpha\Phi P_{1\alpha}\,; \\ &\Lambda_{ii}f = P_{ii} - \eta_i P_{1i}\,; \\ &\Lambda_{ij}f = P_{ij} - \eta_j P_{1i} - \eta_i P_{1j}\,; \end{aligned} \right.$$
$$(\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n\,;\ i \neq j).$$

Un calcul facile prouve que l'on a (mod F_0)

$$(K, \Lambda) \equiv 0,\quad (K, \Lambda_{ii}) \equiv 0,\quad (K, \Lambda_{ij}) \equiv 0,\quad (K_{ii}, \Lambda) \equiv 0,\quad (K_{ii}, \Lambda_{hh}) = 0,$$
$$(K_{ii}, \Lambda_{hk}) = 0,\quad (K_{ij}, \Lambda) \equiv 0,\quad (K_{ij}, \Lambda_{hh}) = 0,\quad (K_{ij}, \Lambda_{hk}) = 0,$$
$$(K_{ii}, K) \equiv \delta_i M_i f,\quad (K_{ij}, K) \equiv \delta_j M_i f + \delta_i M_j f,\quad (K_{pq}, K_{gh}) = 0,$$
$$(\Lambda, \Lambda_{ii}) \equiv \delta_i \mathcal{M}_i f,\quad (\Lambda, \Lambda_{ij}) \equiv \delta_j \mathcal{M}_i f + \delta_i \mathcal{M}_j f,\quad (\Lambda_{pq}, \Lambda_{gh}) = 0,$$
$$(i, j, h, k, p, q, g = 2, 3, \cdots n\ ;\quad i \neq j\ ;\quad h \neq k),$$

où l'on a posé

$$M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i \frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \mathcal{M}_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \eta_i \frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \delta_i = \eta_i - \xi_i,$$

[1] V. n° 10.

F_0 désignant le faisceau associé de l'équation (21).

On en tire les conclusions suivantes :

1° *Les deux sous faisceaux caractéristiques sont en involution réciproque.*

2° *Chacun d'eux ne peut être un faisceau complet que si les deux faisceaux sont confondus.*

8. Invariants de S_1 (ou de S_2). — Recherchons les invariants indépendants de chacun de deux faisceaux S_1 et S_2. Introduisons, à cet effet, comme variables

$$\rho_i = p_{1i} + \xi_\alpha p_{\alpha i} \qquad (\alpha,\, i = 2, 3, \cdots n),$$

à la place de $p_{12}, ..p_{1n}$ et gardons toutes les autres ; le faisceau S_1 se trouve avoir comme base

$$\begin{aligned} Kf = {} & Nf + \pi_\alpha M_\alpha f + \{ -[N_\alpha \psi + p_{\alpha\beta} M_\beta \psi + \rho_\gamma (N_\alpha \eta_\gamma + p_{\alpha\beta} M_\beta \eta_\gamma) \\ & + \pi_\gamma (N_\alpha \xi_\gamma + p_{\alpha\beta} M_\beta \xi_\gamma)] + p_{\alpha\gamma}(N\xi_\gamma + \pi_\beta M_\beta \xi_\gamma) \} R_\alpha f \\ K_{ih} f = {} & P_{ih} f \qquad\qquad (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, i,\, h = 2, 3, \cdots n) ; \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$Nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \eta_\alpha p_\alpha) \frac{\partial f}{\partial x} - \psi \frac{\partial f}{\partial p_1},$$

$$N_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad R_i f = \frac{\partial f}{\partial \rho_i}, \quad \pi_i = \rho_i + \delta_\alpha p_{i\alpha},$$
$$(\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Les crochets, non identiquement nuls, de la base de ce faisceau sont

$$\begin{aligned} (K_{ii}, K) &= \delta_i M_i f + K_{ii}(K\rho_\alpha) R_\alpha f \\ (K_{ij}, K) &= \delta_j M_i f + \delta_i M_j f + K_{ij}(K\rho_\alpha) R_\alpha f, \end{aligned}$$
$$(\alpha,\, i,\, j = 2, 3, \cdots n \;;\quad i \neq j).$$

avec

$$K_{ii}(K\rho_i) = A_i - \delta_i N_i \xi_i + (\rho_\alpha + \delta_\beta p_{\alpha\beta})(M_\alpha \xi_i - M_i \xi_\alpha),$$
$$(\alpha,\, \beta,\, i = 2, 3, \cdots n \;;\quad \alpha, \beta \neq i),$$

$$K_{jj}(K\rho_i) = -\delta_j [N_i \xi_j + p_{i\alpha}(M_\alpha \xi_j - M_j \xi_\alpha)],$$
$$(\alpha,\, i,\, j = 2, 3, \cdots n \;;\quad \alpha, i \neq j),$$

$$\begin{aligned} K_{ij}(K\rho_i) = {} & A_j - \delta_i N_i \xi_j - \delta_j [N_i \xi_i + p_{i\alpha}(M_\alpha \xi_i - M_i \xi_\alpha)] \\ & + [\rho_\beta + \delta_\alpha p_{\alpha\beta}](M_\beta \xi_j - M_j \xi_\beta), \end{aligned}$$
$$(\alpha,\, \beta,\, i,\, j = 2, 3, \cdots n \;;\quad \alpha \neq i,\ \beta \neq j,\ i \neq j),$$

$$K_{jh}(K\rho_i) = -\delta_j [N_i \xi_h + p_{i\beta}(M_\beta \xi_h - M_h \xi_\beta)] - \delta_h [N_i \xi_j + p_{i\alpha}(M_\alpha \xi_j - M_j \xi_\alpha)],$$
$$(\alpha,\, \beta,\, i,\, j,\, h = 2, 3, \cdots n \;;\quad \alpha \neq j \;;\quad \beta \neq h \;;\quad i \neq j \neq h).$$

où l'on a posé pour abréger

$$A_i = N\xi_i - M_i\psi - \rho_\alpha M_i\eta_\alpha, \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Soit $\delta_2 \not\equiv 0$, et posons $(K_{ij}, K) = T_{ij}f$; les transformations $T_{22}f, T_{23}f, \ldots T_{2n}f$ sont indépendantes entre elles et indépendantes des transformations de base du faisceau S_1. Considérons le faisceau

$$(\mathfrak{T}_2) \qquad T_{22}f, T_{23}f, \cdots T_{2n}f ;$$

on aura (mod $\mathfrak{T}_2$)

$$M_2f \equiv -\frac{1}{\delta_2}K_{22}(K\rho_\alpha)R_\alpha f \; ; \quad M_if \equiv \frac{1}{\delta_2^2}[\delta_iK_{22}(K\rho_\alpha) - \delta_2K_{2i}(K\rho_\alpha)]R_\alpha f \; ;$$
$$(\alpha = 2, 3, \cdots n \; ; \quad i = 3, 4, \cdots n).$$

D'où (mod $\mathfrak{T}_2$)

$$T_{ii}f \equiv \frac{1}{\delta_2^2}[\delta_i^2K_{22}K(\rho_\alpha) - \delta_2\delta_iK_{2i}(K\rho_\alpha) + \delta_2^2K_{ii}(K\rho_\alpha)]R_\alpha f$$
$$T_{ij}f \equiv \frac{1}{\delta_2^2}[2\delta_i\delta_jK_{22}(K\rho_\alpha) - \delta_2\delta_jK_{2i}(K\rho_\alpha) - \delta_2\delta_iK_{2j}(K\rho_\alpha) + \delta_2^2K_{ij}(K\rho_\alpha)]R_\alpha f$$
$$(\alpha = 2,3, \cdots n \; ; i \neq j = 3,4, \cdots n).$$

Pour que le dérivé S'_1 soit de degré $\frac{n(n+1)}{2}$, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait les égalités

$$\delta_i^2K_{22}(K\rho_h) - \delta_2\delta_iK_{2i}(K\rho_h) + \delta_2^2K_{ii}(K\rho_h) = 0$$
$$2\delta_i\delta_jK_{22}(K\rho_h) - \delta_2\delta_jK_{2i}(K\rho_h) - \delta_2\delta_iK_{2j}(K\rho_h) + \delta_2^2K_{ij}(K\rho_h) = 0$$
$$(h = 2, 3, \cdots n \; ; \quad i \neq j = 3, 4, \cdots n) \; ;$$

c'est à-dire que si l'on pose $K_{ij}(K\rho_h) = k_{ij/h}$ il sera nécessaire et suffisant que l'on ait pour tout système de valeurs des indices

$$\delta_i^2k_{jj/h} - \delta_i\delta_jk_{ij/h} + \delta_j^2k_{ii/h} = 0$$
$$2\delta_i\delta_jk_{kk/h} - \delta_j\delta_kk_{ik/h} - \delta_i\delta_kk_{jk/h} + \delta_k^2k_{ij/h} = 0 \; ;$$

ce qui entraîne les relations

$$M_i\xi_j - M_j\xi_i = 0 \, ; \; \delta_jM_i\eta_k - \delta_iM_j\eta_k = 0 \, ; \; \delta_j(N\xi_i - M_i\psi) - \delta_i(N\xi_j - M_j\psi) = 0$$
$$(i, j, k = 2, 3, \cdots n).$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes, que ξ, η, ψ doivent satisfaire, pour que le faisceau S'_1 soit de degré $\frac{n(n \quad 1)}{2}$. Cela, sous la seule hypothèse que les δ_i ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire que les deux systèmes de caractéristiques sont distincts.

Je dis qu'il ne peut pas y avoir plus de $2n - 1$ invariants. En effet, le faisceau S'_1 contient certainement, sous l'hypothèse $\delta_i \neq 0$ (pour une valeur particulière quelconque de i, par exemple $i = 2$), des transformations de la forme

$$K'f = Nf + \lambda_\alpha R_\alpha f, \qquad M_i'f = M_i f + \lambda_{i\alpha} R_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

donc le crochet (K', M'_i) sera de la forme

$$(K', M_i') = - \delta_i \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial p_1} + \tau_{i\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \psi_{i\alpha} R_\alpha f$$
$$(\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

ce qui, pour $\delta_i \neq 0$, ne peut pas appartenir au faisceau S'_1. Le second dérivé de S_1 est donc de degré $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ au moins. *Donc le faisceau* S_1 *admet au plus* $2n - 1$ *invariants.*

III. — ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DU SECOND ORDRE A CARACTÉRISTIQUES DOUBLES

9. Cas du nombre maximum d'invariants ; résultats de M. Vessiot. — L'objet de ce paragraphe est l'étude de certains types d'équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes à caractéristiques de MONGE doubles.

On commence par rappeler quelques résultats connus, dus à M. VESSIOT.

Les équations du second ordre à caractéristiques doubles proviennent de l'élimination de ξ entre les équations

$$\Phi = \Pi + \Omega(\xi_2, \cdots \xi_n\,;\, x, x_1, \cdots x_n\,;\, p_1, \cdots p_n) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n) \tag{23}$$

avec

$$\Pi = p_{11} + 2\xi_\alpha p_{1\alpha} + \xi_\alpha^2 p_{\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha \xi_\beta p_{[\alpha\beta]} \qquad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n)\ (^1)\,;$$

(1) V. n° 10.

et le sous-faisceau caractéristique S a pour base (¹)

$$\text{(24)} \qquad Kf = Xf + \frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta \Xi_\alpha f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n)$$

$$\text{(25)} \qquad K_{ij}f = \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \qquad (i, j = 2, 3, \cdots n)$$

où l'on a posé

$$Xf = X_1 f + \xi_\alpha X_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n) ; \qquad \Xi_i f = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} ;$$

$$H_i = X\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} - 2X_i\Omega ;$$

$$A_{i,j} = 2p_{ij} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_j} ; \qquad \Delta = |\, A_{i,2}\cdots A_{i,n}\,| \qquad (i = 2, 3, \cdots n) ;$$

$$\Delta_h^j = (-1)^{j+h+1}\begin{vmatrix} A_{2,2}\cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j+1}\cdots & A_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{h-1,2}\cdots & A_{h-1,j-1} & A_{h-1,j+1}\cdots & A_{h-1,n} \\ A_{h+1,2}\cdots & A_{h+1,j-1} & A_{h+1,j+1}\cdots & A_{h+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n,2}\cdots & A_{n,j-1} & A_{n,j+1}\cdots & A_{n,n} \end{vmatrix} ;$$

et l'on a $\Delta \not\equiv 0$, puisque la partie homogène de degré $n-1$ de Δ (par rapport aux p_{ij}) n'est pas nulle.

Les crochets non identiquement nuls de la structure de S sont

$$\text{(26)} \quad (K_{ii}, K) = \frac{1}{\Delta^2}\Delta^i_\alpha\Delta^i_\beta G_\beta\Xi_\alpha f ; \qquad (K_{ij}, K) = \frac{1}{\Delta^2}(\Delta^i_\alpha\Delta^j_\beta + \Delta^j_\alpha\Delta^i_\beta)\, G_\beta\Xi_\alpha f$$
$$(\alpha, \beta, i, j = 2, 3, \cdots n ; \qquad i \neq j)$$

avec

$$Y_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i\frac{\partial f}{\partial p_1}, \qquad c_{i_1\cdots i_k} = \frac{\partial^k\Omega}{\partial\xi_{i_1}\cdots\partial\xi_{i_k}},$$

$$\frac{1}{2}G_i = Y_1c_i + \xi_\alpha Y_\alpha c_i + \left(\frac{1}{2}\xi_\alpha c_\alpha - \Omega\right)\frac{\partial c_i}{\partial p_1} - \frac{1}{2}c_\alpha\frac{\partial c_i}{\partial p_\alpha} - 2\left(Y_i\Omega - \frac{1}{2}c_i\frac{\partial\Omega}{\partial p_1}\right)$$
$$+ c_{i\alpha}M_\alpha\Omega \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Et les quantités Δ^i_i, Δ^i_j ($\Delta^i_j = \Delta^j_i$) étant indépendantes entre

(¹) Ces formules se déduisent sans peine de la théorie de M. Vessiot ; elles s'obtiennent, en prenant comme variables nouvelles $\Phi, \xi_2, \ldots \xi_n$ à la place de $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{1n}$ (V. nº 12).

elles et indépendantes des G_i, S n'est un faisceau complet que si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(27) \qquad G_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Ce sont bien, aux notations près, les équations de M. VESSIOT [1].

10. Cas où S n'admet pas le nombre maximum d'invariants. — Gardons les notations du n° 9 et examinons le cas où une au moins de quantités G_i n'est pas nulle. Les crochets (26) introduisent alors les $n - 1$ transformations nouvelles $\Xi_i f$ et le premier dérivé de S aura donc pour base les $m + n - 1$ $\left(m = \frac{n(n-1)}{2} + 1\right.$ étant le degré de S) transformations

$$S' : Xf = Y_1 f + \xi_\alpha Y_\alpha f + \left(\frac{1}{2}\,\xi_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\alpha} - \Omega\right) P_1 f - \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\alpha} P_\alpha f\,;\ \Xi_i f = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\,;$$

$$K_{ij} f = \frac{\partial f}{\partial p_{ij}}\,; \qquad (\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n)\,;$$

avec

$$P_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

On en conclut que s'il y a des invariants, ils ne peuvent être que du premier ordre. En outre, comme les coefficients de Kf ne renferment pas les variables p_{ij}, tous les invariants de S' doivent être des invariants du faisceau F_s ayant pour base les n transformations $Kf \Xi_i f$. Donc on n'a plus affaire qu'au faisceau F_s. Les formules de structure de F_s sont

$$(\Xi_i, K) = Y_i f - \frac{1}{2}\, c_{i\alpha} M_\alpha f - \frac{1}{2}\, c_i P_1 f \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Désignons par $\Lambda_i f$ ces dernières transformations infinitésimales ; elles sont indépendantes entre elles.

Le premier dérivé de F_s a pour base les $2n - 1$ transformations

$$F_s' : \qquad Xf\,;\ \Lambda_i f\,;\ \Xi_i f\ (i = 2, 3, \cdots n).$$

Les crochets non identiquement nuls et non congrus à zéro (mod F'_s) de la structure de F'_s sont

$$(\Lambda_i, \Xi_j) = \frac{1}{2}\, c_{ij\alpha} M\alpha f\,;\ (\Lambda_i, \Lambda_j) = \frac{1}{2}\left[(\Lambda_j c_{i\alpha} - \Lambda_i c_{j\alpha}) M\alpha f + (\Lambda_j c_i - \Lambda_i c_j) P_1 f\right]$$

$$(X, \Lambda_i) = \frac{1}{2}\,(\Lambda_i c_\alpha - X c_{i\alpha}) M\alpha f + \left(\Lambda_i \Omega - \frac{1}{2}\, X c_i\right) P_1 f$$

$$(\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n).$$

[1] V. n° 12 (voir notamment les formules (59)).

Or, on a

$$\frac{1}{2}G_i = Xc_i - 2\Lambda_i\Omega \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

et en tenant compte de l'hypothèse faite, il en résulte que F'_s est au moins le degré $2n$. Soit $G_n \not\equiv 0$; le crochet (X, Λ_n) introduit alors la transformation nouvelle

$$H_n f = P_1 f + \frac{\Lambda_n c_\alpha - Xc_{n\alpha}}{2\Lambda_n \Omega - Xc_n} M_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)$$

et si l'on forme le crochet (X, H_n) on constate qu'il y figure un terme en $\frac{\partial f}{\partial x}$ dont le coefficient n'est jamais nul ; donc F''_s est au moins de degré $2n + 1$.

On en conclut que *si le sous faisceau caractéristique n'atteint pas le nombre maximum d'invariants, il en admet au plus $n - 1$, qui ne peuvent être que du premier ordre.*

11. Exemple. — Cherchons les invariants de F_s, pour l'équation donnée par

$$\Omega = p_1 + 2\xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 (n = 3).$$

F_s a comme base les 3 transformations

$$Xf = Y_1 f + \xi_2 Y_2 f + \xi_3 Y_3 f - (p_1 + \xi_2 p_2 + \frac{1}{2}\xi_3 p_3) P_1 f - p_2 P_2 f - \frac{1}{2} p_3 P_3 f,$$

$$\Xi_2 f = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \qquad \Xi_3 f = \frac{\partial f}{\partial \xi_3}.$$

Les crochets non identiquement nuls de la structure de F_s sont

$$(\Xi_2, K) = Y_2 f - p_2 P_1 f, \qquad (\Xi_3, K) = Y_3 f - \frac{1}{2} p_3 P_1 f;$$

désignons-les par $\Lambda_2 f$, $\Lambda_3 f$. Le premier dérivé de F_s est

$$F_s' : \Xi_2 f, \Xi_3 f, \Lambda_2 f, \Lambda_3 f, \qquad Xf = Y_1 f - p_1 P_1 f - p_2 P_2 f - \frac{1}{2} p_3 P_3 f.$$

Comme $Xf, \Lambda_2 f, \Lambda_3 f$ ne renferment pas ξ_2, ξ_3, tout revient à étudier le faisceau F_{s_1} ayant pour base ces trois transformations. Or, on a

$$(X, \Lambda_2) = 0, \qquad (X, \Lambda_3) = -\frac{1}{4} p_3 P_1 f;$$

donc F'_{s_1} a pour base

$$P_1 f,\ Y_2 f,\ Y_3 f, \qquad Xf = Y_1 f - p_2 P_2 f - \frac{1}{2} p_3 P_3 f.$$

La structure de F'_{s_1} introduit la transformation nouvelle $\frac{\partial f}{\partial x}$. Il s'ensuit que les invariants cherchés sont les deux invariants principaux de la transformation

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{1}{2} p_3 \frac{\partial f}{\partial p_3},$$

soit :

$$x_1 + \log p_2, \qquad x_1 + \log p_3^2.$$

12. Equations de Monge-Ampère généralisées. — Les équations du second ordre pour lesquelles Ω est de la forme

$$(28) \quad \Omega = E_{11} + 2\xi_\alpha E_{1\alpha} + \xi_\alpha^2 E_{\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha \xi_\beta E_{[\alpha\beta]} \quad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n; E_{ij} = E_{ji})$$

E étant des fonctions de $x, x_1, \dots x_n$; $p_1, \dots p_n$ se rattachent à celles de Monge Ampère de la théorie classique ; on conviendra de les appeler *les équations de Monge Ampère généralisées.* Les équations (23) deviennent ici

$$(29) \qquad p_{1i} + E_{1i} + \xi_\alpha (p_{i\alpha} + E_{i\alpha}) = 0 \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n) ;$$

moyennant lesquelles l'équation (22) équivaut à

$$p_{11} + E_{11} + \xi_\alpha (p_{1\alpha} + E_{1\alpha}) = 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n) ;$$

de sorte que l'équation de Monge Ampère généralisée est

$$| p_{1i} + E_{1i}, \cdots p_{ni} + E_{ni} | = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Les ξ_h définies par (29) sont des fonctions de p_{ij} indépendantes, puisqu'en différentiant les équations (29) par rapport à p_{1i}, on trouve comme déterminant des $\frac{\partial \xi_h}{\partial p_{1i}}$,

$$| p_{2i} + E_{2i}, \cdots p_{ni} + E_{ni} | \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

qui n'est jamais nul.

Pour les équations de Monge Ampère généralisées, *si le sous-faisceau caractéristique* S *est complet, il y a $n+1$ invariants du premier ordre.* En effet, les relations (27), en tenant compte de la forme (28) de Ω, entraînent

$$(30) \qquad N_i E_{jh} - N_j E_{ih} = 0 \qquad (i, j, h = 1, 2, \cdots n),$$

ce qui exprime que le faisceau du premier ordre

$$N_i f = Y_i f - E_{i\alpha} P_\alpha f \qquad (\alpha, i = 1, 2, \cdots n)$$

est complet ; il admet donc $r + 1$ invariants. *Réciproquement*, les invariants du premier ordre de S sont des invariants du faisceau $N_i f$, et s'il y en a $n + 1$, ce faisceau est complet ; de sorte que les conditions (30) sont vérifiées et que S est aussi un faisceau complet.

Le faisceau $N_i f$ est un faisceau prolongé. Son intégrale générale est donc de la forme

$$x = \theta(x_1, \cdots x_n \; ; \; a_0, a_1, \cdots a_n), \qquad p_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

les a désignant des constantes arbitraires ; et les E_{ij} doivent être

$$E_{ij} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ce qui donne, par élimination des a, *la forme générale des* E_{ij}.

13. Intégration. — Supposons que le faisceau $N_i f$ soit complet et désignons par J_0, J_1, ... J_n ses $n + 1$ invariants fondamentaux. En répétant le raisonnement du n° 5, on trouve que parmi ces invariants il existe deux relations

$$(31) \qquad J_0 = \varphi(J_2, \cdots J_n) \qquad J_1 = \pi(J_2, \cdots J_n),$$

qui sont identiquement vérifiées sur toute surface intégrale de l'équation proposée ; et ceci quelles que soient les fonctions φ et π. Or, les fonctions J sont deux à deux en involution, puisqu'on a

$$[J_h, J_k] = \frac{\partial J_h}{\partial p_\alpha} N_\alpha J_k - \frac{\partial J_k}{\partial p_\alpha} N_\alpha J_h \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n \; ; \quad h, k = 0, 1, \cdots n) \; ;$$

donc les formules

$$J_0 = \varphi(a_2, \cdots a_n), \qquad J_1 = \pi(a_2, \cdots a_n), \qquad J_i = a_i \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

définissent une intégrale complète du système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (31).

En éliminant p_1, ... p_n entre ces $n + 1$ équations, on obtient une équation de la forme

$$\chi[x, x_1, \cdots x_n \; ; \; a_2, \cdots a_n, \varphi(a_2, \cdots a_n), \pi(a_2, \cdots a_n)] = 0 \; ;$$

elle représente une famille de surfaces qui satisfont au système (31) ainsi qu'à l'équation proposée. Mais il en est de même pour les surfaces définies par les formules

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial a_i} + \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \chi}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Ces n équations renfermant les deux fonctions arbitraires φ et π représentent donc l'intégrale générale de l'équation du second ordre en question [1].

La formation des invariants du second ordre par ceux du premier ordre s'effectue de la même manière que dans le n° 5 pour les équations linéaires.

14. — Une classe particulière remarquable d'équations de Monge-Ampère généralisées. — Soit

$$\Omega = E_1 + 2\xi_\alpha E_\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

les E ne dépendant que de $x, x_1, \dots x_n$; $p_1, \dots p_n$. Le faisceau du premier ordre est ici

$$(32) \quad N_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} - E_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} - E_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}; \quad N_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} - E_i \frac{\partial f}{\partial p_1}; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n);$$

et pour que ce faisceau soit complet il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(33) \qquad N_1 E_i - N_i E_1 = 0; \quad N_i E_j = 0; \quad (i, j = 2, 3, \cdots n).$$

Il est facile d'obtenir toutes les équations de Monge-Ampère du type considéré pour lesquelles le faisceau caractéristique du premier ordre admet le nombre maximum d'invariants. En effet, en introduisant dans le faisceau (32) comme variable nouvelle $y = x - p_\alpha x_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, \dots n)$ à la place de x, ce faisceau devient

$$N_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + (p_1 + x_\alpha \varepsilon_\alpha) \frac{\partial f}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} - \varepsilon_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}; \quad N_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial p_1}; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)$$

[1] Il s'ensuit que l'intégrale générale de l'équation du second ordre est l'enveloppe de l'intégrale complète du système (31), quand on laisse les $a_2, \dots a_n$ indépendants. On reconnaît l'analogie avec la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

où l'on suppose que l'on a remplacé les fonctions E par d'autres fonctions ε de variables $y, x_1, x_2, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; et les relations (33) se trouvent maintenant remplacées par les

$$N_1\varepsilon_i - N_i\varepsilon_1 = 0; \qquad N_i\varepsilon_j = 0; \qquad (i, j = 2, 3 \cdots n).$$

On est ainsi ramené, aux notations près, au cas traité dans le n° 3 ; donc *la forme explicite des équations cherchées sera*

$$\varepsilon_i = \theta_i(\varepsilon_0; y, x_1, p_2, \cdots p_n); \; p_1 + \theta_\alpha x_\alpha = \theta_0(\varepsilon_0; y, x_1, p_2, \cdots p_n);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_1} + \theta_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p_1} - \theta_\alpha \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p_\alpha} = \theta(\varepsilon_0; y, x_1, p_2, \cdots p_n); \; (\alpha, i = 2, 3, \cdots n);$$

ε_0 *désignant l'invariant fondamental du faisceau complet* $N_i f$.

Si l'on applique à l'équation en question la transformation d'Ampère [1],

$$(34) \quad y_1 = x_1; \quad y_i = -p_i; \quad y = x - p_\alpha x_\alpha; \quad q_1 = p_1; \quad q_i = x_i; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

le faisceau (32) devient

$$(35) \quad A_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \varepsilon_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} + (q_1 + q_\alpha \varepsilon_\alpha) \frac{\partial f}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}; \quad A_i f = \frac{\partial f}{\partial q_i} - \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial q_1}; \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

où l'on suppose que l'on a remplacé E par d'autres fonctions ε de nouvelles variables $y, y_1, \ldots y_n$; $q_1, \ldots q_n$.

Vu les résultats du n° 5, les $n + 1$ invariants du faisceau complet (35) seront de la forme

$$J_k(\varepsilon_0; y, y_1, \cdots y_n) \qquad (k = 0, 1, \cdots n),$$

ε_0 désignant l'invariant fondamental du faisceau comple $A_i f$; et *la surface intégrale de l'équation transformée* [par la transformation (34)] *s'obtiendra en éliminant* ε_0 *entre les deux équations*

$$J_0 = \psi(J_2, \cdots J_n), \qquad J_1 = \pi(J_2, \cdots J_n),$$

[1] Cette transformation est un cas particulier des transformations qui laissent invariant le faisceau $Y_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x}$; $P_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i}$; $(i = 1, 2, \cdots n)$ (voir n° 4, Note).

φ, π désignant deux fonctions arbitraires ; on en déduit la surface intégrale de l'équation proposée [1].

15. Famille de transformations caractéristiques du premier ordre et faisceau caractéristique du premier ordre. — Tout invariant du premier ordre du sous faisceau caractéristique (24), (25) doit être manifestement un invariant de la transformation infinitésimale Xf ; et les multiplicités caractéristiques qui engendreront une intégrale de l'équation proposée seront trajectoires d'une transformation de la forme

$$Uf = Xf + u_\alpha \Xi_\alpha f + u_{[\alpha\beta]}\ K_{[\alpha\beta]}f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n).$$

Cette dernière transformation infinitésimale est un prolongement de Xf. Il s'ensuit que les multiplicités intégrales, prolongées au premier ordre, de l'équation en question, pour lesquelles : ξ_2 est une même fonction de x, x_i, p_i ; ξ_3 est une même fonction de x, x_i, p_i ; etc. sont engendrées par des trajectoires de la transformation

$$Xf = Y_1 f + \xi_\alpha Y_\alpha f + \left(\frac{1}{2}\xi_\alpha \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha} - \Omega\right) P_1 f - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha} P_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

qui correspond à ce système particulier de valeurs de ξ_2, ... ξ_n. Si l'on considère dans la transformation Xf, les quantités ξ_i comme des fonctions arbitraires de x, x_i, p_i, on a une famille de transformations infinitésimales du premier ordre contenant la transformation Xf définie ci dessus. Cette famille de transformations ne peut être un faisceau que si les coefficients de $P_i f (i = 1, 2, \ldots n)$ dans Xf, sont des fonctions linéaires de $\xi_2, \ldots \xi_n$. Ceci exige que Ω soit une fonction entière et du second degré en $\xi_2, \ldots \xi_n$. Soit donc

$$\Omega = E_{11} + 2\xi_\alpha E_{1\alpha} + \xi^2_\alpha E_{\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha\xi_\beta E_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n\,;\ E_{ij} = E_{ji})$$

E étant des fonctions de x, x_1, ... x_n ; p_1, ... p_n. On aura

$$Xf = N_1 f + \xi_\alpha N_\alpha f$$

les N ayant la même signification que dans le n° 12. De là résulte, comme ξ_i sont indépendantes entre elles et indépendantes de x, x_i, p_i,

[1] Le cas considéré est un cas (voir n° 12) où les mineurs de degré > 2 du discriminant de Ω sont nuls, mais non tous ceux de degré 2.

que les invariants du premier ordre de Xf (et par suite du faisceau S) seront les invariants fondamentaux du faisceau $N_i f$, $N_1 f$ de degré n à $2n + 1$ variables. On en conclut que *dans le seul cas des équations de* Monge Ampère *généralisées, il y a un faisceau caractéristique du premier ordre dont les trajectoires (les trajectoires de ses transformations) servent à engendrer les multiplicités intégrales, prolongées au premier ordre, de l'équation proposée. En dehors de ce cas il n'existe qu'une famille de transformations infinitésimales caractéristiques du premier ordre dont les trajectoires jouissent encore de la même propriété.*

Ce résultat de rattache à celui obtenu par M. Vessiot [1] pour une équation du second ordre à deux variables indépendantes dans le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont distincts.

16. Une remarque importante. Divers types d'équations du second ordre admettant des caractéristiques. Divers types d'équations de Monge Ampère généralisées. — Les formules (22), (23) ainsi que celles qui correspondent aux équations à caractéristiques distinctes [2], ne subsistent que sous l'hypothèse que ξ, η sont des fonctions indépendantes de $p_{12}, p_{13}, \ldots p_{nn}$. On peut supposer, au contraire, que ξ, η dépendent d'un certain nombre d'autres fonctions indépendantes $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ $(s < 2n - 2)$ de variables $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $p_{12}, \ldots p_{nn}$.

Les équations du second ordre qui admettent deux sous faisceaux caractéristiques distincts s'obtiennent alors, en éliminant λ_i entre les $s + 1$ équations

$$\Phi = \Pi + \Omega(\lambda_1, \cdots \lambda_3 ; x, x_1, \cdots x_n ; p_1, \cdots p_n) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_\alpha}\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n ; i = 1, 2, \cdots s)$$

où l'on a posé

$$\Pi = p_{11} + (\xi_\alpha + \eta_\alpha)p_{1\alpha} + \xi_\alpha \eta_\alpha p_{\alpha\alpha} + (\xi_\alpha \eta_\beta + \xi_\beta \eta_\alpha)p_{[\alpha\beta]} \quad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n).$$

Et dans le cas d'un seul sous-faisceau caractéristique, il faut remplacer ces formules par les

$$\Phi = \Pi + \Omega(\lambda_1, \cdots \lambda_s ; \quad x, x_1, \cdots x_n ; \quad p_1, \cdots p_n) = 0. \tag{36}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (\alpha = 2, 3, \cdots n ; \quad i = 1, 2, \cdots s ; \quad s < n - 1). \tag{37}$$

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 55, 1924 (voir notamment, nº 29, p. 394).

[2] V. nº 10.

avec

$$\Pi = p_{11} + 2\xi_\alpha p_{1\alpha} + \xi^2_\alpha p_{\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha\xi_\beta p_{[\alpha\beta]} \qquad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n).$$

On obtient ainsi divers types d'équations du second ordre admettant des caractéristiques, suivant les différentes valeurs que l'on attribue à s.

En particulier, si les ξ sont des fonctions linéaires de λ_i et Ω est une fonction du second degré de λ_i on a affaire à divers types d'équations de MONGE AMPÈRE généralisées. Cherchons pour chacun d'eux le nombre maximum d'invariants du premier ordre du sous faisceau caractéristique S.

La forme analytique de ces équations est

$$\begin{vmatrix} B_0, B_1, \cdots B_s \\ B_1, B_{11}, \cdots B_{s1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_s, B_{1s}, \cdots B_{ss} \end{vmatrix} = 0$$

où l'on a posé

$$\xi_i = \theta_i + \theta_{i,\nu}\lambda_\nu; \qquad \Omega = E_0 + 2\lambda_\nu E_\nu + \lambda^2_\nu E_{\nu\nu} + 2\lambda_\nu\lambda_\pi E_{[\nu\pi]};$$
$$B_0 = E_0 + p_{11} + 2\theta_\alpha p_{1\alpha} + \theta_\alpha^2 p_{\alpha\alpha} + 2\theta_{[\alpha\beta]} p_{[\alpha\beta]};$$
$$B_i = E_i + \theta_{\alpha,i} p_{1\alpha} + \theta_\alpha\theta_{\alpha,i} p_{\alpha\alpha} + (\theta_\alpha\theta_{\beta,i} + \theta_\beta\theta_{\alpha,i}) p_{[\alpha\beta]};$$
$$B_{ii} = E_{ii} + \theta^2_{\alpha,i} p_{\alpha\alpha} + 2\theta_{\alpha,i}\theta_{\beta,i} p_{[\alpha\beta]};$$
$$B_{ij} = E_{ij} + \theta_{\alpha,i}\theta_{\alpha,j} p_{\alpha\alpha} + (\theta_{\alpha,i}\theta_{\beta,j} + \theta_{\beta,i}\theta_{\alpha,j}) p_{[\alpha\beta]};$$
$$(\nu \neq \pi = 1, 2, \cdots s; \quad \alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n; \quad E_{ij} = E_{ji});$$

les θ, E ne dépendant que de $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$. En effet, les équations (36), (37) peuvent être remplacées par les

$$\begin{aligned} &B_0 + B_\nu\lambda_\nu = 0 \\ (38) \qquad &B_i + B_{i\nu}\lambda_\nu = 0 \qquad (\nu, i = 1, 2, \cdots s), \end{aligned}$$

et la résolubilité de (38) par rapport à λ est certaine, puisque le déterminant fonctionnel des premiers membres de (38), pris par rapport à λ, soit

$$| B_{1i}, B_{2i}, \cdots B_{si} | \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

n'est pas nul.

Tout invariant du premier ordre de S est un invariant de la transformation

$$Xf = X_1 f + \xi_\alpha X_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

et réciproquement, tout invariant du premier ordre de Xf est un invariant de S. Or, l'équation (36) peut s'écrire

$$\Phi = p_{11} + \xi_\alpha p_{1\alpha} + \xi_\alpha \rho_\alpha + \Omega = 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$\rho_i = p_{1i} + \xi_\alpha p_{\alpha i} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n);$$

d'où

$$Xf = Nf + \rho_\alpha M_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$Nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \Omega \frac{\partial f}{\partial p_1};$$

$$M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i \frac{\partial f}{\partial p_1}; \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Les relations (38) entraînent

$$\rho_l = \frac{1}{\vartheta}\vartheta_l(-a_h) \qquad (l = m+1, \cdots n; \quad m = n - s)$$

où l'on a posé

$$\vartheta = |\, \theta_{m+1,i}, \cdots \theta_{n,i} \,| \; (i = 1, 2, \cdots s); \qquad a_h = \rho_\gamma \theta_{\gamma,h} + E_h + \lambda_\alpha E_{\alpha h}$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots s; \quad \gamma = 2, 3, \cdots m);$$

$\vartheta_j(W_h)$ désignant le déterminant qui se déduit de ϑ, en remplaçant les éléments de la $(j - m)$ ème colonne par $W_1, \ldots W_s$. Et puisqu'on a de plus

$$\vartheta_l(-a_h) = \rho_\gamma \vartheta_l(-\theta_{\gamma,h}) + \vartheta_l(-E_h) + \lambda_\alpha \vartheta_l(-E_{\alpha h})$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots s; \gamma = 2, 3, \cdots m),$$

la transformation Xf devient

$$Xf = Nf + \rho_\gamma[M_\gamma f + \frac{1}{\vartheta}\vartheta_\delta(-\theta_{\gamma,h})M_\delta f] + \frac{1}{\vartheta}[\vartheta_\delta(-E_h) + \lambda_\alpha \vartheta_\delta(-E_{\alpha h})]M_\delta f$$
$$(\alpha = 1, 2, \cdots s; \gamma = 2, 3, \cdots m; \delta = m+1, \cdots n).$$

C'est une fonction du second degré par rapport aux quantités indépendantes $\lambda_1, \ldots \lambda_s$; $\rho_2, \ldots \rho_m$. Mais quel que soit k, pourvu que i prenne une des valeurs 1,2...s, la quantité

$$\theta_{k,i}\vartheta + \theta_{\delta,i}\vartheta_\delta(-\theta_{k,h}), \qquad (\delta = m+1, \cdots n)$$

est identiquement nulle, puisqu'elle est égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} \theta_{k,i} & \theta_{m+1,i} & \cdots & \theta_{n,i} \\ \theta_{k,1} & \theta_{m+1,1} & \cdots & \theta_{n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{k,s} & \theta_{m+1,s} & \cdots & \theta_{n,s} \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit que les termes du second degré en λ, ρ dans Xf disparaissent et Xf devient, en fait, une fonction linéaire en λ,ρ. Or, si l'on prend, dans le faisceau S, comme variables nouvelles Φ ; $\lambda_1,\ldots \lambda_s$; $\rho_2,\ldots \rho_m$ à la place de $p_{11}, p_{12},\ldots p_{1n}$, tout invariant du premier ordre de S sera un invariant de Xf, et réciproquement tout invariant du premier ordre de Xf sera un invariant de S. Donc il existe un faisceau caractéristique du premier ordre F_s, ayant comme base les n transformations.

$$\mathfrak{N}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial x} + \theta_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha\frac{\partial f}{\partial x}\right) - E_0\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{\mathfrak{s}}\mathfrak{s}_\delta(E_h)\left(\frac{\partial f}{\partial p_\delta} - \theta_\delta\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)$$

$$\mathfrak{N}_i f = \theta_{\alpha,i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha\frac{\partial f}{\partial x}\right) - E_i\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{\mathfrak{s}}\mathfrak{s}_\delta(E_{ih})\left(\frac{\partial f}{\partial p_\delta} - \theta_\delta\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)$$

$$\mathfrak{M}_k f = \frac{\partial f}{\partial p_k} - \theta_k\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{1}{\mathfrak{s}}\mathfrak{s}_\delta(-\theta_{k,h})\left(\frac{\partial f}{\partial p_\delta} - \theta_\delta\frac{\partial f}{\partial p_1}\right),$$

$$(\alpha = 2, 3, \cdots n\ ;\quad i = 1, 2, \cdots s\ ;\quad k = 2, 3, \cdots m\ ;$$
$$\delta = m + 1, \cdots n\ ;\quad m = n - s).$$

En exprimant que le faisceau F_s est complet, on trouve un certain nombre des conditions de forme assez compliquée, que l'on omet ici pour raison de simplicité. Contentons nous seulement de remarquer que ces conditions sont compatibles, puisqu'elles sont vérifiées si l'on prend, en particulier, pour Ω une fonction ne dépendant que de $\lambda_1,\ldots \lambda_s$, c'est à dire si l'on suppose que θ, E se réduisent à des constantes absolues.

On en déduit que *le nombre maximum d'invariants du premier ordre de* S *est* $n + 1$, *le même pour tous les types d'équations de Monge-Ampère généralisées.*

SECONDE PARTIE

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE A UNE FONCTION INCONNUE DE N VARIABLES INDÉPENDANTES A CARACTÉRISTIQUES TRIPLES, DANS LE CAS OU LE SOUS-FAISCEAU CARACTÉRISTIQUE ADMET LE NOMBRE MAXIMUM D'INVARIANTS.

IV. — ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TROISIÈME ORDRE A CARACTÉRISTIQUES TRIPLES

17. Extension de certains résultats de M. Vessiot [1] **à une équation générale du troisième ordre.** — Envisageons le faisceau F de base

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + p_{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} + p_{i[\alpha\beta]} \frac{\partial f}{\partial p_{[\alpha\beta]}}; \quad P_{ikh} f = \frac{\partial f}{\partial p_{ikh}},$$
$$(\alpha, \beta, i, k, h, = 1, 2, \cdots n);$$

et une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes supposée, pour plus de simplicité, de la forme

$$\Phi = p_{111} + \Phi_1(x, x_1, \cdots x_n; p_1, \cdots p_n; p_{11}, p_{12}, \cdots p_{nn}; p_{112}, p_{113}, \cdots p_{nnn}) = 0;$$

On pose, une fois pour toutes,

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \frac{\partial^r x}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}, \qquad P_{i_1 \cdots i_r} f = \frac{\partial f}{\partial p_{i_1 \cdots i_r}},$$

les indices en caractères grecs α, β,... étant des indices de Sommation :

[1] V. nos 1-12.

et le symbole $[\alpha\beta\ldots]$ désignant que la Sommation est étendue à toutes les combinaisons des indices α, β,...

Le sous-faisceau F_0 de F qui laisse Φ invariant sera de degré $N - 1$ le degré de F étant $N = n + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$; c'est *le faisceau associé* de l'équation proposée (c'est à dire que l'intégration de l'équation $\Phi = 0$ équivaut à celle du faisceau F_0).

Toute intégrale complète de l'équation en question est l'intégrale générale à n dimensions (intégrale complète à n dimensions) d'un sous faisceau complet de F_0 de degré n, qui n'a aucune transformation commune avec le faisceau de $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ transformations infinitésimales $P_{ikh}f$ $(i, k, h = 1, 2, .. n)$. Toute involution de F_0, et par suite tout sous faisecau complet de F_0, contient une transformation caractéristique (s'il en existe), et toute intégrale complète sera donc engendrée par des multiplicités intégrales à une dimension faisant partie des trajectoires de la transformation caractéristique ; c'est pourquoi ces trajectoires sont dites les multiplicités caractéristiques de l'équation en question (caractéristiques de Monge.

Les équations du troisième ordre qui possèdent trois systèmes de caractéristiques de Monge sont divisées en trois classes différentes : **a.** les équations $\Phi = 0$ pour lesquelles il existe *trois sous faisceaux caractéristiques distincts* ; b. les $\Phi = 0$ qui possèdent *un sous faisceau caractéristique simple et un sous faisceau caractéristique double* ; et c. les $\Phi = 0$ qui ne possèdent qu'*un seul sous faisceau caractéristique triple.* Les équations a., ou bien sont des équations *linéaires* de la forme

$$\Phi = \Pi + \psi = 0 \tag{39}$$

avec

$$\begin{aligned}\Pi = p_{111} &+ (\xi_\alpha + \eta_\alpha + \zeta_\alpha)p_{11\alpha} + (\xi_\alpha\eta_\alpha + \xi_\alpha\zeta_\alpha + \eta_\alpha\zeta_\alpha)p_{1\alpha\alpha} + \xi_\alpha\eta_\alpha\zeta_\alpha p_{\alpha\alpha\alpha}\\ &+ (\xi_\alpha\eta_\beta + \xi_\alpha\zeta_\beta + \eta_\alpha\xi_\beta + \eta_\alpha\zeta_\beta + \zeta_\alpha\xi_\beta + \zeta_\alpha\eta_\beta)p_{1[\alpha\beta]}\\ &+ (\xi_\alpha\eta_\alpha\zeta_\beta + \xi_\alpha\zeta_\alpha\eta_\beta + \eta_\alpha\zeta_\alpha\xi_\beta)p_{[\alpha\alpha\beta]} + (\xi_\alpha\eta_\beta\zeta_\gamma + \xi_\alpha\zeta_\beta\eta_\gamma + \eta_\alpha\xi_\beta\zeta_\gamma + \eta_\alpha\zeta_\beta\xi_\gamma\\ &+ \zeta_\alpha\eta_\beta\xi_\gamma + \zeta_\alpha\xi_\beta\eta_\gamma)p_{[\alpha\beta\gamma]}\\ &\qquad\qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 2, 3, \cdots n),\end{aligned}$$

les ξ, η, ζ, ψ, ne dépendant que de x, x_1,... x_n ; p_1, ... p_n ; p_{11}, p_{12},... p_{nn} ;

ou bien elles proviennent de l'élimination des paramètres ξ, η, ζ entre les équations

$$(40)\quad \begin{cases} \Phi = \Pi + \Omega(\xi_2, \cdots \xi_n\,;\, \eta_2, \cdots \eta_n\,;\, \zeta_2, \cdots \zeta_n\,;\, x, x_1, \cdots x_n\,; \\ \qquad p_1, \cdots p_n\,;\, p_{11}, p_{12}, \cdots p_{nn}) = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial\xi_i} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = 0\,;\quad \dfrac{\partial\Pi}{\partial\eta_i} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta_i} = 0 \cdot \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial\zeta_i} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta_i} = 0\,;\quad (i = 2, 3, \cdots n). \end{cases}$$

En faisant dans les formules (39), (40) ; d'abord $\eta_i = \zeta_i \neq \xi_i$; puis $\xi_i = \eta_i = \zeta_i$; on obtient respectivement les équations *b.*, *c.*

Donc les équations du troisième ordre qui possèdent un seul sous-faisceau caractéristique triple : ou bien sont des équations *linéaires* de la forme

$$(41)\qquad \Phi = \Pi + \psi = 0$$

avec

$$\Pi = p_{111} + 3\xi_\alpha p_{11\alpha} + 3\xi_\alpha^2 p_{1\alpha\alpha} + \xi_\alpha^3 p_{\alpha\alpha\alpha} + 6\xi_\alpha\xi_\beta p_{1[\alpha\beta]}$$
$$+ 3\xi_\alpha^2\xi_\beta p_{[\alpha\alpha\beta]} + 6\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma p_{[\alpha\beta\gamma]}$$
$$(\alpha \neq \beta \neq \gamma = 2, 3, \cdots n)\,;$$

les ξ, ψ étant des fonctions de $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{nn}$; ou bien elles proviennent de l'élimination de ξ entre les équations

$$(42)\quad \Phi = \Pi + \Omega(\xi_2, \cdots \xi_n\,;\, x, x_1, \cdots x_n\,;\, p_1, \cdots p_n\,;\, p_{11}, p_{12}, \cdots p_{nn}) = 0$$

$$(43)\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial\xi_i} + \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Lorsqu'on a affaire à une équation du second ordre à caractéristiques doubles on sait, d'après la théorie de M. Vessiot [1], que le sous faisceau caractéristique correspondant est toujours involutif. Il n'en est pas ainsi pour une équation du troisième ordre à caractéristiques triples, c'est à dire que *le sous faisceau caractéristique triple n'est jamais un faisceau involutif* [2].

[1] V. n° 11.

[2] Ce fait a été indiqué par M. Coissard pour $n = 2$ (*Comptes rendus*, t. CXC, 1930, p. 709 et *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 61, 1933, n° 2),

Le sous-faisceau caractéristique triple a pour base les $m = \frac{n(n-1)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3} + 1$ transformations

$$(44) \qquad Kf = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha - (\overline{X}_1\Omega - 2\xi_\alpha \overline{X}_\alpha \Omega)P_{111} - \overline{X}_\alpha \Omega P_{11\alpha}$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{1ii}f = P_{1ii} - 2\xi_i P_{11i} + 3\xi_i^2 P_{111} \\ K_{iii}f = P_{iii} - \xi_i^2 P_{11i} + 2\xi_i^3 P_{111} \\ K_{1ij}f = P_{1ij} - 2\xi_j P_{11i} - 2\xi_i P_{11j} + 6\xi_i\xi_j P_{111} \\ K_{iij}f = P_{iij} - 2\xi_i\xi_j P_{11i} - \xi_i^2 P_{11j} + 6\xi_i^2\xi_j P_{111} \\ K_{ijh}f = P_{ijh} - 2\xi_j\xi_h P_{11i} - 2\xi_i\xi_h P_{11j} - 2\xi_i\xi_j P_{11h} + 12\xi_i\xi_j\xi_h P_{111} \\ \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n\ ; \quad i \neq j \neq h = 2, 3, \cdots n)\ ; \end{array} \right.$$

le trait qui surligne X désignant que l'on a effectué cette opération en traitant les ξ comme des constantes.

Ces résultats s'obtiennent sans peine en imitant le procédé de M. Vessiot relatif à une équation du second ordre ; c'est pourquoi on peut les énoncer ici sans démonstration.

Les pages qui suivent sont réservées à l'étude des équations *linéaires* (41).

18. Structure du sous faisceau caractéristique triple. — Le sous-faisceau caractéristique S qui correspond à l'équation (41) a pour base les $m = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} + 1$ transformations (45), (46) :

$$(46) \quad Kf = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha - (X_1\Phi - 2\xi_\alpha X_\alpha \Phi)P_{111} - X_\alpha \Phi P_{11\alpha} \quad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Effectuons un changement de variables en prenant Φ à la place de p_{111} et en gardant toutes les autres variables ; la base de S peut alors s'écrire

$$(47) \qquad Kf = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha - X_\alpha \Phi P_{11\alpha}$$

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{1ii}f = P_{1ii} - 2\xi_i P_{11i} \\ K_{iii}f = P_{iii} - \xi_i^2 P_{11i} \\ K_{1ij}f = P_{1ij} - 2\xi_j P_{11i} - 2\xi_i P_{11j} \\ K_{iij}f = P_{iij} - 2\xi_i\xi_j P_{11i} - \xi_i^2 P_{11j} \\ K_{ijh}f = P_{ijh} - 2\xi_j\xi_h P_{11i} - 2\xi_i\xi_h P_{11j} - 2\xi_i\xi_j P_{11h} \\ \qquad (\alpha, i, j, h = 2, 3. \cdots n\,; \quad i \neq j \neq h) \end{array} \right.$$

où l'on suppose que l'on a remplacé p_{111} par sa valeur tirée de l'équation (41).

Les crochets formés par les transformations (48) sont nuls, car les quantités ξ ne renferment pas les variables $p_{112}, p_{113} \cdots p_{nnn}$. Pour la même raison on obtient ensuite

$$(49) \qquad (K, K_{1ii}) = (X_1, K_{1ii}) + \xi_\alpha (X_\alpha, K_{1ii}) + K_{1ii} X_\alpha \Phi P_{11\alpha}$$
$$(\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Or, on a

$$(X_1, K_{1ii}) = -3\xi_i^2 P_{11} + 2\xi_i P_{1i} - P_{ii} - 2X_1\xi_i P_{11i};$$
$$(X_i, K_{1ii}) = -K_{1i} - 2X_i\xi_i P_{11i}; \qquad (X_j, K_{1ii}) = -2X_j\xi_i P_{11i}$$
$$(i \neq j = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$K_{1i}f = P_{1i}f - 2\xi_i P_{11}f;$$

d'où les identités

$$X_i K_{1ii}\Phi - K_{1ii} X_i \Phi = -K_{1i}\Phi - 2X_i\xi_i P_{11i}\Phi;$$
$$X_j K_{1ii}\Phi - K_{1ii} X_j \Phi = -2X_j\xi_i P_{11i}\Phi \quad (i \neq j = 2, 3, \cdots n).$$

En tenant compte des relations évidentes

$$P_{11i}\Phi = 3\xi_i; \qquad K_{1ii}\Phi = -3\xi_i^2; \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

les identités ci-dessus se réduisent aux

$$K_{1ii} X_i \Phi = K_{1i}\Phi; \qquad K_{1ii} X_j \Phi = 0; \qquad (i \neq j = 2, 3, \cdots n).$$

Donc les formules (49) deviennent

$$(50) \quad (K, K_{1ii}) = -R_{ii} + (K_{1i}\Phi - 2X\xi_i) P_{11i} \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$$

où l'on a posé

$$R_{ii}f = P_{ii} - \xi_i P_{1i} + \xi_i^2 P_{11}; \qquad Xf = X_1 + \xi_\alpha X_\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Un calcul semblable fournit ensuite pour les autres crochets non identiquement nuls de la structure de S,

$$(51) \quad (K, K_{iii}) = -\xi_i R_{ii} + (K_{ii}\Phi - 2\xi_i X\xi_i) P_{11i}$$
$$(52) \quad (K, K_{1ij}) = -R_{ij} + (K_{1j}\Phi - 2X\xi_j) P_{11i} + (K_{1i}\Phi - 2X\xi_i) P_{11j}$$
$$(53) \quad (K, K_{iij}) = -\xi_j R_{ii} - \xi_i R_{ij} + (K_{ij}\Phi - 2\xi_i X\xi_j - 2\xi_j X\xi_i) P_{11i}$$
$$+ (K_{ii}\Phi - 2\xi_i X\xi_i) P_{11j}$$
$$(54) \quad (K, K_{ijh}) = -\xi_h R_{ij} - \xi_j R_{ih} - \xi_i R_{jh} + (K_{jh}\Phi - 2\xi_j X\xi_h - 2\xi_h X\xi_j) P_{11i}$$
$$+ (K_{ih}\Phi - 2\xi_i X\xi_h - 2\xi_h X\xi_i) P_{11j}$$
$$+ (K_{ij}\Phi - 2\xi_i X\xi_j - 2\xi_j X\xi_i) P_{11h}$$
$$(i \neq j \neq h = 2, 3, \cdots n).$$

avec

$$K_{ii}f = P_{ii} - \xi_i^2 P_{11}\,; \qquad K_{ij}f = P_{ij} - 2\xi_i\xi_j P_{11}\,;$$
$$R_{ij}f = P_{ij} - \xi_j P_{1i} - \xi_i P_{1j} + 2\xi_i\xi_j P_{11}\,; \qquad (i \neq j.)$$

On en conclut que *le sous faisceau caractéristique triple, même dans le cas des équations linéaires n'est jamais un faisceau involutif.*

19. Nombre maximum d'invariants du faisceau S. Les transformations infinitisésimales Rii, Rij étant indépendantes, le faisceau S ne peut atteindre le nombre maximum d'invariants que si les crochets (51), (53), (54) sont des combiniasons linéaires de (50), (52). Pour cela, il est manifestement nécessaire que l'on ait les identités

$$K_{ii}\Phi = \xi_i K_{1i}\Phi\,; \qquad K_{ij}\Phi = \xi_j K_{1i}\Phi + \xi_i K_{1j}\Phi\,; \qquad (i \neq j = 2, 3, \ldots n).$$

Ces identités, à cause des relations évidentes

$$R_{ii}f = K_{ii}f - \xi_i K_{1i}f\,; \qquad R_{ij}f = K_{ij}f - \xi_j K_{1i}f - \xi_i K_{1j}f \qquad (i \neq j),$$

s'écrivent

$$R_{hk}\Phi = 0 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots n),$$

lesquelles à leur tour, après calculs, deviennent

$$R_{hk}\psi + 3r_\alpha R_{hk}\xi_\alpha = 0 \qquad (\alpha, h, k = 2, 3, \cdots n)$$

où l'on a posé

$$r_i = p_{11i} + 2\xi_\alpha p_{1\alpha i} + \xi^2_\alpha p_{\alpha\alpha i} + 2\xi_\alpha\xi_\beta p_{[\alpha\beta]i} = \frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i} \qquad (\alpha \neq \beta = 2, 3, \cdots n).$$

Ces dernières relations, renfermant les r_i qui sont indépendantes entre eux et indépendants de

$$x, x_1, \cdots x_n\,;\ p_1, \cdots p_n\,;\ p_{11}, p_{12}, \cdots p_{nn},$$

ne peuvent être identiquement vérifiées que si ξ, ψ satisfont aux équations

$$R_{hk}\xi_i = R_{hk}\psi = 0 \qquad (i, h, k = 2, 3, \cdots n). \tag{55}$$

Sous ces conditions le premier dérivé S' de S aura pour base les $m + \frac{n(n-1)}{2}$ transformations (47), (48), (56) :

$$(56) \qquad \begin{cases} H_{ii}f = R_{ii} + (2X\xi_i - K_{1i}\Phi)P_{11i} \\ H_{ij}f = R_{ij} + (2X\xi_j - K_{1j}\Phi)P_{11i} + (2X\xi_i - K_{1i}\Phi)P_{11j} \end{cases}$$
$$(i \neq j = 2, 3, \cdots n),$$

et le nombre maximum d'invariants de S sera celui de S'.

Nous sommes ainsi conduit à examiner si ce faisceau S' peut être un faisceau complet.

Introduisons, à cet effet, comme variables $r_2, r_3, \ldots r_n$ à la place de $p_{112}, p_{113}, \ldots p_{11n}$ et conservons toutes les autres. Le faisceau S' se trouve avoir, plus simplement, comme base les transformations

$$(57) \qquad Kf = \Lambda f + r_\alpha K_{1\alpha}f + \rho_{[\alpha\beta]}R_{[\alpha\beta]}f + A_\alpha \mathfrak{F}_\alpha f$$

$$(58) \qquad K_{ghk}f = P_{ghk}f$$

$$(59) \qquad \begin{cases} H_{ii}f = R_{ii}f + \sigma_i\mathfrak{F}_i f \\ H_{ij}f = R_{ij}f + \sigma_j\mathfrak{F}_i f + \sigma_i\mathfrak{F}_j f \end{cases}$$

$(\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n\,; \quad g = 1, 2, \cdots n\,; \quad i, j, h, k = 2, 3, \cdots n\,; \quad i \neq j)$

où l'on a posé

$$Y_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + p_{i\gamma}\frac{\partial f}{\partial p_\gamma}\,; \qquad \Lambda f = Y_1 + \xi_\alpha Y_\alpha - \psi P_{11}\,; \qquad \mathfrak{F}_i f = \frac{\partial f}{\partial r_i}$$

$$N_i f = Y_i + r_i P_{11}\,; \quad \rho_{ih} = p_{1ih} + \xi_\alpha p_{\alpha ih}\,; \quad \sigma_i = 2\Lambda\xi_i - K_{1i}\psi$$
$$+ r_\alpha(2K_{1\alpha}\xi_i - 3K_{1i}\xi_\alpha)\,; \quad A_i = \rho_{i\alpha}\sigma_\alpha - 3\,r_\alpha N_i\xi_\alpha - N_i\psi$$
$$(\gamma = 1, 2, \cdots n\,; \quad \alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Les crochets non identiquement nuls et non congrus à zéro de la structure de S' sont

$$(K, H_{ii}) = -(\Lambda\xi_i + r_\alpha K_{1\alpha}\xi_i + \sigma_i)K_{1i}f + (K\sigma_i - H_{ii}A_i)\mathfrak{F}_i f - H_{ii}A_\gamma\mathfrak{F}_\gamma f$$
$$(K, H_{ij}) = -(\Lambda\xi_j + r_\alpha K_{1\alpha}\xi_j + \sigma_j)K_{1i}f - (\Lambda\xi_i + r_\alpha K_{1\alpha}\xi_i + \sigma_i)K_{1j}f$$
$$+ (K\sigma_j - H_{ij}A_i)\mathfrak{F}_i f + (K\sigma_i - H_{ij}A_i)\mathfrak{F}_j f - H_{ij}A_\delta\mathfrak{F}_\delta f$$
$$(H_{ii}, H_{jj}) = H_{ii}\sigma_j\mathfrak{F}_j f - H_{jj}\sigma_i\mathfrak{F}_i f\,; \qquad (H_{ii}, H_{ij}) = (H_{ii}\sigma_j - H_{ij}\sigma_i)\mathfrak{F}_i f + H_{ii}\sigma_i\mathfrak{F}_j f\,;$$
$$(H_{ii}, H_{hk}) = H_{ii}\sigma_k\mathfrak{F}_h f + H_{ii}\sigma_h\mathfrak{F}_k f - H_{hk}\sigma_i\mathfrak{F}_i f\,;$$
$$(H_{ij}, H_{ih}) = (H_{ij}\sigma_h - H_{ih}\sigma_j)\mathfrak{F}_i f + H_{ij}\sigma_i\mathfrak{F}_h f - H_{ih}\sigma_i\mathfrak{F}_j f\,;$$
$$(H_{ij}, H_{hk}) = H_{ij}\sigma_k\mathfrak{F}_h f + H_{ij}\sigma_h\mathfrak{F}_k f - H_{hk}\sigma_j\mathfrak{F}_i f - H_{hk}\sigma_i\mathfrak{F}_j f$$
$$(\alpha, \gamma, \delta, i, j, h, k = 2, 3, \cdots n\,;\; i \neq j \neq h \neq k\,;\; \gamma \neq i\,;\; \delta \neq i \neq j).$$

On en déduit que S' ne peut être un faisceau complet que si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées

(60) $\Lambda\xi_i + r_\alpha K_{1\alpha}\xi_i + \sigma_i = 0$; (61) $K\sigma_i = H_{ii}A_i = H_{ij}A_j$;

(62) $H_{ii}A_j = H_{ij}A_h = H_{pg}\sigma_i = 0$; $(\alpha, i, j, h, p, g = 2, 3, \cdots n\,;\ i \neq j \neq h)$.

En tenant compte de la valeur de σ_i, les équations (60) entraînent

(63) $3\Lambda\xi_i - K_{1i}\psi = 0,\ K_{1j}\xi_i - K_{1i}\xi_j = 0$; $(i \neq j = 2, 3, \cdots n)$.

D'après ces relations, les (62) se réduisent à des identités et les (61) deviennent

(64) $-K\sigma_i = M_i\psi + 3r_\alpha M_i\xi_\alpha + \sigma_i(P_{11}\psi + 3r_\alpha P_{11}\xi_\alpha)$ $(\alpha, i = 2, 3, \cdots n)$

avec

$$M_h f = \frac{\partial f}{\partial p_h} - \xi_h \frac{\partial f}{\partial p_1}\ .$$

Donc *le faisceau S', et par suite le sous faisceau caractéristique* S, *admet au plus* 4 *n* — 1 *invariants et ce nombre maximum n'est effectivement atteint que si* ξ, ψ *satisfont à la fois aux équations* (55), (63), (64).

20. Détermination des invariants de S'. — Plaçons nous dans le cas où les conditions (55), (63), (64) sont réalisées et introduisons comme variables $q_1, \ldots q_n$; $\sigma_2, \ldots \sigma_n$ à la place de $p_{11}, \ldots p_{1n}$; $r_2 \ldots r_n$ avec

$$q_h = p_{1h} + \xi_\alpha p_{\alpha h} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

en supposant

(65) $\mathfrak{D} = |\ K_{12}\xi_i \cdots K_{1n}\xi_i\ | \neq 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots n)$.

Un calcul facile montre que les transformations (58) ne changent pas et que les transformations (57), (59) se réduisent à

(66) $$Kf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \xi_\alpha p_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + q_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$
$$- (\psi + \sigma_\alpha q_\alpha)\frac{\partial f}{\partial q_1} + (r_\alpha - p_{\alpha\beta}\sigma_\beta)\mathfrak{M}_\alpha f + \rho_{[\alpha\beta]}P_{[\alpha\beta]}f - B_\alpha S_\alpha f.$$

(67) $H_{pg}f = P_{pg}f \qquad (\alpha, \beta, p, g = 2, 3, \cdots n)$,

où l'on a posé

$$\mathcal{M}_h{}' = \frac{\partial f}{\partial q_h} - \xi_h \frac{\partial f}{\partial q_1} \; ; \; \mathrm{S}_h f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_h} \; ; \qquad \mathrm{B}_h = \mathrm{M}_h\psi + 3r_\alpha \mathrm{M}_h \xi_\alpha$$
$$+ \sigma_h(\mathrm{P}_{11}\psi + 3r_\alpha \mathrm{P}_{11}\xi_\alpha) \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Il reste à calculer les coefficients de la transformation (66) en fonction des nouvelles variables Pour cela, remplaçons les fonctions ψ, $\xi_2, \dots \xi_n$ par d'autres fonctions Ω, $\eta_2, \dots \eta_n$ de $3n + 1$ variables x, $x_1, \dots x_n$; $p_1, \dots p_n$; $q_1, \dots q_n$ [1]. On vérifie sans peine que

$$(68) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = \dfrac{1}{\Delta} \Delta_i\left(-\dfrac{\partial \eta_s}{\partial u}\right) ; & \mathrm{P}_{11}\xi_i = \dfrac{1}{\Delta} \Delta_i\left(-\dfrac{\partial \eta_s}{\partial q_1}\right) ; \\ \mathrm{M}_i \xi_j = \dfrac{1}{\Delta} \Delta_j(-\mathrm{M}_i\eta_s) ; & \mathrm{K}_{1i}\xi_j = \dfrac{1}{\Delta} \Delta_j(-\mathcal{M}_i\eta_s) ; \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} + \dfrac{1}{\Delta} \Delta_\alpha\left(-\dfrac{\partial \eta_s}{\partial u}\right)\mathcal{L}_\alpha \Omega ; & \mathrm{P}_{11}\psi = \dfrac{\partial \Omega}{\partial q_1} + \dfrac{1}{\Delta} \Delta_\alpha\left(-\dfrac{\partial \eta_s}{\partial q_1}\right)\mathcal{L}_\alpha \Omega ; \\ \mathrm{M}_i\psi = \mathrm{M}_i\Omega + \dfrac{1}{\Delta} \Delta_\alpha(-\mathrm{M}_i\eta_s)\mathcal{L}_\alpha\Omega ; & \mathrm{K}_{1i}\psi = \mathcal{M}_i\Omega + \dfrac{1}{\Delta}\Delta_\alpha(-\mathcal{M}_i\eta_s)\mathcal{L}_\alpha\Omega ; \end{array} \right.$$

$$(\alpha,\, i,\, j = 2, 3, \cdots n \; ; \; u = x, x_1, \cdots x_n \; ; \; p_1, \cdots p_n),$$

avec

$$\mathcal{L}_h f = q_h \frac{\partial f}{\partial q_1} + p_{h\alpha} \mathfrak{M}_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_2\eta_2 - 1, & \mathcal{L}_3\eta_2 \cdots & \mathcal{L}_n\eta_2 \\ \mathcal{L}_2\eta_3, & \mathcal{L}_3\eta_3 - 1 \cdots & \mathcal{L}_n\eta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{L}_2\eta_n & \mathcal{L}_3\eta_n \cdots & \mathcal{L}_n\eta_n - 1 \end{vmatrix} ;$$

$\Delta_j(\mathrm{W}_s)$ désignant le déterminant qui se déduit de Δ, en remplaçant les éléments de la $(j-1)$-ème colonne par $\mathrm{W}_2, \dots \mathrm{W}_n$. On suppose que dans les $\mathrm{M}_i f$, $\mathcal{M}_i f$ qui figurent dans les seconds membres de (68) l'on met η à la place de ξ et que l'on ait $\Delta \neq 0$.

Le déterminant $\mathfrak{D}$ devient alors

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\Delta^{n-1}}\, \Theta$$

[1] Ce qui est possible, à cause des relations (55).

avec

$$\Theta = |\ \Delta_i(\mathcal{M}_2\eta_s) \cdots \Delta_i(-\mathcal{M}_n\eta_s)\ | \qquad (i, = 2, 3 \cdots n).$$

En tenant compte des conditions (63), les équations (60) peuvent s'écrire

$$\sigma_i + r_\alpha K_{1\alpha}\xi_i + \frac{1}{3} K_{1i}\psi = 0 \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n) ;$$

d'où, d'après l'hypothèse (65) et les relations (68),

$$r_i = \frac{1}{\Theta}\, \Theta_i\left(\overline{-\,\overline{\Delta\sigma_h} + \frac{1}{3}\mathcal{M}_h\Omega + \frac{1}{3}\Delta_\alpha(-\mathcal{M}_h\eta_s)\mathcal{L}_\alpha\Omega}\right) \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n) ;$$

$\Theta_j(W_h)$ étant le déterminant que l'on déduit de Θ, en remplaçant les éléments de la $(j-1)$ ème colonne par $W_2, \ldots W_n$.

Les quantités B_i s'écrivent à leur tour

$$B_i = M_i\Omega + \sigma_i \frac{\partial\Omega}{\partial q_1} + \frac{1}{\Delta}\frac{1}{\Theta}\left[\Delta_\alpha(-M_i\eta_s) + \sigma_i\Delta_\alpha\left(-\frac{\partial\eta_s}{\partial q_1}\right)\right]$$

$$\left[\Theta\mathcal{L}_\alpha\Omega + 3\Theta_\alpha\left(\overline{-\,\overline{\Delta\sigma_h} + \frac{1}{3}\mathcal{M}_h\Omega + \frac{1}{3}\Delta_\alpha(-\mathcal{M}_h\eta_s)\mathcal{L}_\alpha\Omega}\right)\right]$$

$$(\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Donc la transformation (66) devient

$$\text{(69)}\quad Kf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \eta_\alpha p_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + q_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$-\,(\Omega + q_\alpha\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial q_1} + \left[\frac{1}{\Theta}\,\Theta_\alpha(-\mathcal{A}_h) - p_{\alpha\beta}\sigma_\beta\right]\mathcal{M}_\alpha f$$

$$-\left\{M_\alpha\Omega + \sigma_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} + \frac{1}{\Delta}\frac{1}{\Theta}\left[\Delta_\beta(-M_\alpha\eta_s) + \sigma_\alpha\Delta_\beta\left(-\frac{\partial\eta_s}{\sigma q_1}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left[\Theta\mathcal{L}_\beta\Omega + 3\Theta_\beta(-\mathcal{A}_h)\right]\right\} S_\alpha f + \rho_{[\alpha\beta]}P_{[\alpha\beta]}f \quad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$\mathcal{A}_h = \overline{\Delta\sigma_h} + \frac{1}{3}\mathcal{M}_h\Omega + \frac{1}{3}\Delta_\alpha(-\mathcal{M}_h\eta_s)\mathcal{L}\alpha\Omega \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n) ;$$

dans laquelle ne figurent plus que les nouvelles variables $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $p_{22}, \ldots p_{nn}$; $\sigma_2, \ldots \sigma_n$; $p_{122}, \ldots p_{nnn}$. Et le faisceau S' se trouve avoir comme base les transformations (58), (67), (69).

Or, en exprimant que ce faisceau est complet nous trouvons les relations

$$(70)\qquad \sigma_h - \frac{\partial}{\partial p_{iq}}\left[\frac{1}{\theta}\,\Theta_i(-\mathcal{A}_h)\right] = 0\ ;\qquad \frac{\partial}{\partial p_{jq}}\left[\frac{1}{\theta}\,\Theta_i(-\mathcal{A}_h)\right] = 0$$

$$(71)\qquad \frac{\partial}{\partial p_{jq}}\left\{\frac{1}{\Delta}\,\frac{1}{\theta}\left[\Delta_\alpha(-\mathrm{M}_{\mathrm{K}}\eta_s) + \sigma_{\mathrm{K}}\Delta_\alpha\left(-\frac{\partial\eta_s}{\partial q_1}\right)\right]\left[\theta\mathcal{L}_\alpha\Omega + 3\,\vartheta_\alpha(-\mathcal{A}_h)\right]\right\} = 0$$

$$(\alpha,\ i,\ j,\ q,\ k = 2.\ 3,\cdots n\ ;\ j,\ q \neq i).$$

Tenons compte d'abord des relations (70). Les quantités $\Theta_i(-A_h)$ se simplifient, puisque

$$(72)\qquad \Delta_j(-\mathcal{M}_i\eta_s) = \Delta_i(-\mathcal{M}_j\eta_s),$$

à cause du second groupe (63) et des relations déjà établies

$$\mathrm{K}_{1i}\xi_j = \frac{1}{\Delta}\,\Delta_j(-\mathcal{M}_i\eta_s)\qquad (i,\ j = 2,\ 3,\cdots n)\ ;$$

donc nous avons

$$(73)\qquad \Theta_j(-\mathcal{A}_h) = \Theta_j\left(\overline{-\Delta\sigma_h + \overline{\frac{1}{3}\,\mathcal{M}_h\Omega} + \frac{1}{3}\,\Delta_h(-\mathcal{M}_j\eta_s)\mathcal{L}_j\Omega}\right).$$

Les relations (70) entraînent alors

$$(74)\qquad \frac{1}{\theta}\,\Theta_i(-\mathcal{A}_h) = \frac{1}{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}_i(-a_h) + \sigma_\alpha p_{i\alpha}\qquad (\alpha,\ i = 2,\ 3,\cdots n),$$

où l'on a posé

$$\delta = \begin{vmatrix} q_2\dfrac{\partial\eta_2}{\partial q_1} - 1 & q_3\dfrac{\partial\eta_2}{\partial q_1} & \cdots q_n\dfrac{\partial\eta_2}{\partial q_1} \\ q_2\dfrac{\partial\eta_3}{\partial q_1} & q_3\dfrac{\partial\eta_3}{\partial q_1} - 1 & \cdots q_n\dfrac{\partial\eta_3}{\partial q_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_2\dfrac{\partial\eta_n}{\partial q_1} & q_3\dfrac{\partial\eta_n}{\partial q_1} & \cdots q_n\dfrac{\partial\eta_n}{\partial q_1} - 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{S} = |\delta_i(-\mathcal{M}_2\eta_s)\cdots\delta_i(-\mathcal{M}_n\eta_s)|\ (i = 2,\ 3,\cdots n)\ ;$$

$$a_h = \overline{\delta\sigma_h + \frac{1}{3}\,\mathcal{M}_h\Omega} + \frac{1}{3}\,q_\alpha\,\frac{\partial\Omega}{\partial q_1}\,\delta_\alpha(-\mathcal{M}_h\eta_s)\ (\alpha = 2,\ 3,\cdots n)\ ;$$

$\delta_j(\mathrm{W}_s)$, $\mathfrak{S}_j(\mathrm{W}_s)$ désignant respectivement ce qui deviennent

δ, $\mathfrak{s}$ en remplaçant les éléments de la $(j-1)$-ème colonne par $W_2, \ldots W_n$.
Et les relations (72), (73) entraînent aussi

$$(75) \qquad \delta_j(-\mathcal{M}_i\eta_s) = \delta_i(-\mathcal{M}_j\eta_s)$$
$$\mathfrak{s}_j(-a_h) = \mathfrak{s}_i\left(-\overline{\delta\sigma_h + \frac{1}{3}\mathcal{M}_h\Omega + \frac{1}{3}q_j\frac{\partial\Omega}{\partial q_1}\delta_h(-\mathcal{M}_j\eta_s)}\right).$$

Tenant compte de la formule (74), les relations (71) entraînent à leur tour

$$(76) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{1}{\Theta}\left[\Delta_\alpha(-M_i\eta_s) + \sigma_i\Delta_\alpha\left(-\frac{\partial\eta_s}{\partial q_1}\right)\right]\left[\Theta\mathcal{L}_\alpha\Omega + 3\Theta_\alpha(-\mathcal{A}_h)\right]$$
$$= \frac{1}{\delta}\frac{1}{\mathfrak{s}}\left[\delta_\alpha(-M_i\eta_s) + \sigma_i\delta_\alpha\left(-\frac{\partial\eta_s}{\partial q_1}\right)\right]\left[\mathfrak{s}q_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} + 3\mathfrak{s}_\alpha(-a_h)\right] \quad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

En vertu des formules (74), (76), le faisceau S′ aura comme base les transformations (58), (67) et

$$Zf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \eta_\alpha p_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + q_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + q_\alpha\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - (\Omega + q_\alpha\sigma_\alpha)\frac{\partial f}{\partial q_1}$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{s}}\mathfrak{s}_\alpha(-a_h)\mathcal{M}_\alpha f - \Big\{M_\alpha\Omega + \sigma_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} + \frac{1}{\delta}\frac{1}{\mathfrak{s}}\Big[\delta_\beta(-M_\alpha\eta_s)$$
$$+ \sigma_\alpha\delta_\beta\left(-\frac{\partial\eta_s}{\partial q_1}\right)\Big]\left[\mathfrak{s}q_\beta\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} + 3\mathfrak{s}_\beta(-a_h)\right]\Big\}S_\alpha f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n).$$

Cette dernière transformation ne renfermant pas les variables $p_{22}, p_{23}, \ldots p_{nn}$; $p_{122}, p_{123}, \ldots p_{nnn}$, *les invariants fondamentaux du sous-faisceau caractéristique* S, *seront les* $4n-1$ *invariants principaux de* Zf.

21. Conditions nécessaires et suffisantes pour que S′ admette effectivement 4n — 1 invariants. — On a vu plus haut que le faisceau S a comme base les transformations (58), (77) :

$$(77) \qquad Kf = Zf + \rho_{[\alpha\beta]}P_{[\alpha\beta]}f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n),$$

et que la base de S′ est constituée par les (58), (67), (77). Les transformations $X_i f$ deviennent, d'autre part,

$$X_i f = \Xi_i f + p_{i\alpha}M_\alpha f + (r_i + q_\alpha X_i\xi_\alpha)Qf + (\rho_{i\alpha} + p_{\alpha\beta}X_i\xi_\beta)\mathcal{M}_\alpha f$$
$$+ p_{i[\alpha\beta]}P_{[\alpha\beta]}f + X_i\sigma_\alpha S_\alpha f \qquad (\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$\Xi_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + q_i \frac{\partial f}{\partial p_1}; \qquad Qf = \frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

Or, on a

$$X_i \xi_h = Y_i \xi_h + r_i P_{11} \xi_h + \rho_{i\alpha} K_{1\alpha} \xi_h \qquad (\alpha, i, h = 2, 3, \cdots n)$$

et en tenant compte des relations (68) et des identités

$$\Delta_h(-\Xi_i \eta_s) = \Delta_h\left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial x_i}\right) + p_i \Delta_h\left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial x}\right) + q_i \Delta_h\left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial p_1}\right) \quad (i, h = 2, 3, \cdots n)$$

on obtient

$$X_i \xi_h = \frac{1}{\Delta} \left[\Delta_h(-\Xi_i \eta_s) + r_i \Delta_h\left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial q_1}\right) + p_{i\alpha} \Delta_h(-M_\alpha \eta_s) + \rho_{i\alpha} \Delta_h(-\mathcal{M}_\alpha \eta_s)\right]$$
$$(\alpha, i, h = 2, 3, \cdots n).$$

En vertu de ces dernières relations et de la formule (74) il vient

$$X_i f = \mathcal{X}_i f + p_{i[\alpha\beta]} P_{[\alpha\beta]} f + X_i \sigma_\alpha S_\alpha f \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

où l'on a posé

$$\mathcal{X}_i f = \Xi_i f + p_{i\alpha} M_\alpha f + \frac{1}{\Delta} \Big\{ \left[\frac{1}{\mathfrak{s}} \mathfrak{s}_i(-a_h) + \sigma_\alpha p_{i\alpha}\right] \left[\Delta + q_\beta \Delta_\beta \left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial q_1}\right)\right]$$
$$+ q_\alpha[\Delta_\alpha(-\Xi_i \eta_s) + p_{i\beta} \Delta_\alpha(-M_\beta \eta_s) + \rho_{i\beta} \Delta_\alpha(-\mathcal{M}_\beta \eta_s)] \Big\} Qf$$
$$+ \Big| \rho_{i\alpha} + \frac{1}{\Delta} p_{\alpha\beta} \Big\{ \Delta_\beta(-\Xi_i \eta_s) + p_{i\gamma} \Delta_\beta(-M_\gamma \eta_s) + \left[\frac{1}{\mathfrak{s}} \mathfrak{s}_i(-a_h)\right.$$
$$\left. + \sigma_\gamma p_{i\gamma}\right] \Delta_\beta\left(-\frac{\partial \eta_s}{\partial q_1}\right) + \rho_{i\gamma} \Delta_\beta(-\mathcal{M}_\gamma \eta_s) \Big\} \Big| \mathcal{M}_\alpha f$$
$$(\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, \cdots n).$$

En outre, les transformations $P_{11i} f$ sont remplacées par les $S_i f$. Donc le faisceau F_0, qui laisse Φ invariant, se trouve avoir, plus simplement, comme base les transformations (58), (77), $\mathcal{X}_i f$, $S_i f$.

Mais si l'on envisage des multiplicités intégrales prolongées des éléments $p_1, \dots p_n$; $q_1, \dots q_n$; $\sigma_2, \dots \sigma_n$, le faisceau F_0 donne naissance au faisceau $\overline{F}_0$ qui a pour base les $4n - 3$ transformations

$$\overline{F}_0 : \qquad Zf, \; Z_i f = \Xi_i f + \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{\mathfrak{s}} \mathfrak{s}_i(-a_h) + q_\alpha \Xi_i \eta_\alpha\right] Qf ;$$

$$G_i f = M_i f + \frac{1}{\delta}(\sigma_i + q_\alpha M_i \eta_\alpha) Qf ; \quad Q_i f = \mathcal{M}_i f + \frac{1}{\delta} q_\alpha \mathcal{M}_i \eta_\alpha Qf ; \quad S_i f$$
$$(\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

D'après le résultat du numéro précédent Zf sera une transformation distinguée du faisceau $\overline{F}_0$.

Donc Vf étant une transformation quelconque de $\overline{F}_0$:

$$Vf = \zeta Zf + \zeta_\alpha Z_\alpha f + u_\alpha G_\alpha f + v_\alpha Q_\alpha f + w_\alpha S_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(78) \qquad (Z, V) \equiv 0 \qquad (\text{mod } \overline{F}_0).$$

Or, on a (mod $\overline{F}_0$),

$$(Z, Z_i) \equiv \left\{ Zz_i + Z_i z_1 - \eta_\alpha Z_i z_\alpha - q_\alpha Z_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) Z_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] \right\} Qf$$

$$(Z, G_i) \equiv \left\{ Zg_i + G_i z_1 - \eta_\alpha G_i z_\alpha - q_\alpha G_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) G_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] \right\} Qf$$
$$- (Z\eta_i + g_i - q_\alpha G_i \eta_\alpha) P_1 f$$

$$(Z, Q_i) \equiv \left\{ Z[\lambda_i - \eta_i] + Q_i z_1 - \eta_\alpha Q_i z_\alpha - q_\alpha Q_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) Q_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] \right\} Qf$$

$$(Z, S_i) \equiv 0$$

$$(\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

où l'on a posé

$$z_1 = \Omega + q_\alpha \sigma_\alpha + \eta_\alpha z_\alpha + q_\alpha g_\alpha + \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) \lambda_\alpha ;$$

$$z_i = \frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_i(-a_h) + q_\alpha \Xi_i \eta_\alpha \right]; \quad g_i = \frac{1}{\delta}(\sigma_i + q_\alpha M_i \eta_\alpha) ;$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\delta} q_\alpha \mathfrak{M}_i \eta_\alpha ; \qquad P_K f = \frac{\partial f}{\partial p_K} ; \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Par la suite la relation (78) entraîne les suivantes

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} Z\eta_i + g_i - q_\alpha G_i \eta_\alpha = 0 ; \\ Zz_i + Z_i z_1 - \eta_\alpha Z_i z_\alpha - q_\alpha Z_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) Z_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] = 0 \\ Zg_i + G_i z_1 - \eta_\alpha G_i z_\alpha - q_\alpha G_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) G_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] = 0 \\ Z[\lambda_i - \eta_i] + Q_i z_1 - \eta_\alpha Q_i z_\alpha - q_\alpha Q_i g_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_\alpha(-a_h) Q_i[\lambda_\alpha - \eta_\alpha] = 0 \end{array} \right.$$
$$(\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

identités par rapport aux $4n$ variables $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $\sigma_2, \ldots \sigma_n$. Le déterminant $\mathfrak{I}_j(-\delta\sigma_h)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{I}_j(-\delta\sigma_h) = 0_{j\alpha}\sigma_\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

où θ_{jt} ne dépendent pas de variables $\sigma_2, \dots \sigma_n$; donc Zf s'écrit

$$Zf = Jf + \frac{1}{\theta}\theta_{\beta\alpha}Q_\beta f\sigma_\alpha - B_\alpha S_\alpha f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$Jf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \eta_\alpha p_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + q_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + q_\alpha\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \Omega Qf$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_\alpha(-b_h)\mathcal{M}_\alpha f; \qquad b_h = \frac{1}{3}\delta\mathcal{M}_h\Omega + q_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial q_1}\delta_\alpha(-\mathcal{M}_h\eta_s);$$
$$(\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

Vu cette formule et les relations (75), les relations (63) se trouvent remplacées par les

$$(80) \qquad J\eta_i = 0, \quad Q_i\eta_j - Q_j\eta_i = 0 \qquad (i, j = 2, 3, \cdots n)$$

et les relations (79) entraînent maintenant les (81) qui remplacent les (64) ;

$$(81)\begin{cases} J\left[\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_i(-b_h)\right] + J_i\Omega + 3\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_\alpha(-b_h)J_i\eta_\alpha \\ \qquad - \frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_{i\alpha}[H_\alpha\Omega + 3\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_\beta(-b_h)H_\alpha\eta_\beta] = 0; \\ J\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_{iK}\right) + \frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_{\alpha K}\left\{3J_i\eta_\alpha - 3\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_{i\beta}H_\beta\eta_\alpha + Q_\alpha\left[\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_i(-b_h)\right]\right\} = 0; \\ Q_p\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_{iK}\right) = 0 \end{cases}$$
$$(\alpha, \beta, i, k, p = 2, 3, \cdots n).$$

avec

$$J_if = \Xi_if + \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}_i(-bp) + q_\alpha\Xi_i\eta_\alpha\right]Qf; \; H_if = M_if + \frac{1}{\delta}q_\alpha M_i\eta_\alpha Qf.$$

D'autre part, les relations (55) se réduisent à des identités, puisque les quantités $q_1, \dots q_n$ demeurent invariantes par les transformations $R_{hk}f$.

Donc, *pour que le sous-faisceau caractéristique* S *admette effectivement* $4n - 1$ *invariants, il est nécessaire et suffisant que les fonctions* η, Ω *satisfassent à la fois aux équations* (80), (81).

Remarquons qu'*il existe ici un faisceau caractéristique du second ordre* F_s qui a comme base les n transformations

$$F_s: \qquad Jf, Q_if \qquad (i = 2, 3, \cdots n);$$

la structure de F_s étant

$$(Q_i, Q_j) = 0, \quad (Q_i, J) \equiv H_i f + Q_i \eta_\alpha J_\alpha f \pmod{F_s}\,; \; (i, j = 2, 3, \cdots n),$$

ce faisceau n'est pas complet et admet au plus $n + 2$ invariants

22. Intégration de l'équation. — Soit M une intégrale à n dimensions de l'équation proposée. En la prolongeant jusqu'aux éléments du troisième ordre E : $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $\sigma_2, \ldots \sigma_n$, on obtient une intégrale à n dimensions du faisceau $\overline{F}_0$. Réciproquement, toute intégrale à n dimensions de $\overline{F}_0$ est une multiplicité M, prolongée au troisième ordre. Désignons par $\bar{x}, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$; $\bar{p}_1, \ldots \bar{p}_n$; $\bar{q}_2, \ldots \bar{q}_n$; $\bar{\sigma}_2, \ldots \bar{\sigma}_n$, les $4n - 1$ invariants principaux de la transformation Zf, qui se réduisent respectivement à $x, x_2, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $\bar{\sigma}_2, \ldots \bar{\sigma}_n$ pour une valeur numérique arbitraire x_0 de x_1. Et introduisons les comme variables nouvelles en conservant seulement l'ancienne variable x_1. La transformation Zf se réduit à $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et tout revient à intégrer le faisceau

$$Z_i f, \; G_i f, \; Q_i f, \; S_i f \qquad (i = 2, 3, \cdots n),$$

dans lequel x_1 joue le rôle d'une constante arbitraire.

Donc l'intégrale générale à n-1 dimensions de $\overline{F}_0$ sera donnée par les formules

$$\bar{x} = F_1(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,; \; \bar{p}_1 = F_2(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,; \; \bar{p}_i = \overset{1}{H}_i(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,;$$
$$\bar{q}_1 = F_3(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n) + \bar{\eta}_\alpha \overset{2}{H}_\alpha(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,; \; \bar{q}_i = \overset{2}{H}_i + \bar{\eta}_\alpha \overset{1}{H}_{i\alpha}\,;$$
$$\overset{3}{H}_i + 2\bar{\eta}_\alpha \overset{2}{H}_{i\alpha} + \bar{\eta}^2_\alpha \overset{1}{H}_{i\alpha\alpha} + 2\bar{\eta}_\alpha \bar{\eta}_\beta \overset{1}{H}_{i[\alpha\beta]} = \frac{1}{\mathfrak{S}} \bar{\mathfrak{S}}_i(-a_h) + \bar{\sigma}_\alpha \overset{1}{H}_{i\alpha}$$
$$(\alpha, \beta, i = 2, 2, \cdots n\,; \; \alpha \neq \beta),$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial F_h}{\partial \bar{x}_{i_1} \cdots \partial \bar{x}_{i_r}} = H^h_{i_1 \ldots i_r}(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n),$$

F_1, F_2, F_3 étant trois fonctions arbitraires ; et $\overline{W}$ désignant ce que devient W en remplaçant x_1 par x_0 et les autres variables par les invariants correspondants. C'est l'intégrale générale à n dimensions, prolongée au troisième ordre, de l'équation proposée.

V. — ÉTUDE DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DU TROISIÈME ORDRE A CARACTÉRISTIQUES TRIPLES DANS LE CAS OU LE SOUS-FAISCEAU CARACTÉRISTIQUE ADMET LE NOMBRE MAXIMUM D'INVARIANTS.

23. Structure du sous faisceau caractéristique S. — On a vu dans le n° 17 que les équations non linéaires du troisième ordre qui possèdent un seul sous-faisceau caractéristique proviennent de l'élimination des paramètres ξ entre les équations (42), (43) et que le sous-faisceau caractéristique a alors pour base les transformations (44), (45). Les quantités ξ demeurent invariantes par les transformations (45). En effet, les relations (43) developpées s'écrivent

$$p_{i11} + 2\xi_\alpha p_{i1\alpha} + \xi_\alpha^2 p_{i\alpha\alpha} + 2\xi_\alpha\xi_\beta p_{i[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = 0 \tag{82}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ i = 2, 3, \cdots n\ ; \qquad \alpha \neq \beta)\ ;$$

elles définissent ξ en fonction de x, x_1, ... x_n ; p_1, ... p_n ; p_{11}, ... p_{nn} ; p_{112}, p_{113}, ... p_{nnn}.

En dérivant les équations (82) par rapport à ces dernières variables, il vient les relations

$$\frac{\partial\xi_j}{\partial u} = -\frac{1}{\Delta}\left| A_{i,2}A_{i,3}\cdots A_{i,j-1}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial u}A_{i,j+1}\cdots A_{i,n}\right| \quad (i=2, 3\cdots n); \tag{83}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}} = 3\frac{1}{\Delta}\Delta_{hj}\ ; \qquad \frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}} = \frac{\partial\xi_h}{\partial p_{11j}}\ ; \qquad \frac{\partial\xi_j}{\partial p_{1hh}} = 2\xi_h\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}}\ ;\\
&\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{1hk}} = 2\left(\xi_k\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}} + \xi_h\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11k}}\right)\ ; \qquad \frac{\partial\xi_j}{\partial p_{hhh}} = \xi_h^2\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}}\ ;\\
&\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{hhk}} = \xi_h\left(2\xi_k\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}} + \xi_h\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11k}}\right)\ ;\\
&\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{hkr}} = 2\left(\xi_k\xi_r\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11h}} + \xi_h\xi_r\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11k}} + \xi_h\xi_k\frac{\partial\xi_j}{\partial p_{11r}}\right)
\end{aligned}\right. \tag{84}$$

$(u = x, x_1, \cdots x_n\ ; p_1, \cdots p_n\ ; p_{11}, p_{12}, \cdots p_{nn}\ ;$
$j, h, k, r = 2, 3, \cdots n\ ; h \neq k \neq r)$,

où l'on a posé

$$A_{ij} = 6(p_{1ij} + \xi_\alpha p_{\alpha ij}) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\,; \quad \Delta = |\,A_{i,2}A_{i,3},\cdots A_{i,n}\,| \quad (i=2, 3,\cdots n);$$

$$\Delta_h{}^j = (-1)^{j+h+1} \begin{vmatrix} A_{2,2} \cdots & A_{2,j-1} & A_{2,j+1} \cdots & A_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{h-1,2} \cdots & A_{h-1,j-1} & A_{h-1,j+1} \cdots & A_{h-1,n} \\ A_{h+1,2} \cdots & A_{h+1,j-1} & A_{h+1,j+1} \cdots & A_{h+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n,2} \cdots & A_{n,j-1} & A_{n,j+1} \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

et l'on a $\Delta \not\equiv 0$, puisque la partie homogène de degré n 1 de Δ, par rapport aux p_{ijh}, n'est pas nulle. Tenant compte des formules (84), on vérifie aisément que ξ sont bien des invariants des transformations (45) ; on a par exemple

$$K_{1ij}\xi_h = P_{1ij}\xi_h - 2\xi_j P_{11i}\xi_h - 2\xi_i P_{11j}\xi_h = 2\left(\xi_j \frac{\partial\xi_h}{\partial p_{11i}} + \xi_i \frac{\partial\xi_h}{\partial p_{11j}}\right)$$
$$- 2\xi_j \frac{\partial\xi_h}{\partial p_{11i}} - 2\xi_i \frac{\partial\xi_h}{\partial p_{11j}} = 0 \qquad (i \neq j),$$

et de même pour les autres transformations (45).

Effectuons maintenant un changement de variables en remplçant $p_{111}, p_{112}, \dots p_{11n}$ par Φ, ξ_2, .. ξ_n et en conservant toutes les autres variables. Les transformations (45) se réduisent alors aux

$$(85) \qquad K_{pgk}f = P_{pgk}f \quad (p = 1, 2, \cdots n\,;\; g, k = 2, 3, \cdots n),$$

et la transformation (44) devient

$$(86) \qquad \overset{\bullet}{K}f = Xf + (X\xi_\alpha - X_\beta\Omega P_{11\beta}\xi_\alpha)\Xi_\alpha f \quad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n)$$

avec

$$Xf = X_1 f + \xi_\alpha X_\alpha f\,; \quad \Xi_i f = \frac{\partial f}{\partial\xi_i}\,; \quad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

On suppose bien entendu que l'on a remplacé, dans la formule (86), les $p_{111}, p_{112}, \dots p_{11n}$ par leurs valeurs tirées de relations (42), (43), soit

$$(87) \quad \begin{cases} p_{111} = 3\xi_\alpha{}^2 p_{1\alpha\alpha} + 6\xi_\alpha\xi_\beta p_{1[\alpha\beta]} + 2\xi_\alpha{}^3 p_{\alpha\alpha\alpha} + 6\xi_\alpha{}^2\xi_\beta p_{[\alpha\alpha\beta]} \\ \qquad + 12\xi_\alpha\xi_\beta\xi_\gamma p_{[\alpha\beta\gamma]} + \xi_\alpha \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha} - \Omega \\ p_{11i} = -\left(2\xi_\alpha p_{1\alpha i} + \xi_\alpha{}^2 p_{\alpha\alpha i} + 2\xi_\alpha\xi_\beta p_{[\alpha\beta]i} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right) \end{cases}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, i = 2, 3, \cdots n\,; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

Or, en tenant compte des relations (83), (84), on obtient les identités

$$\Delta X_p \xi_q = \Delta_q{}^\alpha X_p \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\alpha} \qquad (p = 1, 2, \cdots n \,;\, \alpha, q = 2, 3, \cdots n).$$

Vu ces identités et les relations (84), la transformation (86) peut s'écrire

$$(88) \qquad \mathrm{K}f = \mathrm{X}f + \frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha{}^\beta \mathrm{H}_\beta \Xi_\alpha f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, \cdots n)$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H}_i = \mathrm{X} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} - 3\mathrm{X}_i \Omega.$$

Le faisceau S a donc, plus simplement, comme base les transformations (85), (88) et on reconnaît l'analogie avec les formules indiquées dans le n° 9, pour les équations du second ordre.

Les crochets non identiquement nuls de la sturcture de S sont

$$(89) \begin{cases} (\mathrm{K}_{1ii}, \mathrm{K}) = \mathrm{R}_{ii} + \mathrm{P}_{1ii}\Big(\frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha^\beta \mathrm{H}_\beta\Big)\Xi_\alpha \,;\, (\mathrm{K}_{1ij}, \mathrm{K}) = \mathrm{R}_{ij} \\ \qquad + \mathrm{P}_{1ij}\Big(\frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha^\beta \mathrm{H}_\beta\Big)\Xi_\alpha \,;\, (\mathrm{K}_{iii}, \mathrm{K}) = \xi_i \mathrm{R}_{ii} + \mathrm{P}_{iii}\Big(\frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha^\beta \mathrm{H}_\beta\Big)\Xi_\alpha \,; \\ (\mathrm{K}_{iij}, \mathrm{K}) = \xi_j \mathrm{R}_{ii} + \xi_i \mathrm{R}_{ij} + \mathrm{P}_{iij}\Big(\frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha^\beta \mathrm{H}_\beta\Big)\Xi_\alpha \,;\, (\mathrm{K}_{ijh}, \mathrm{K}) = \xi_h \mathrm{R}_{ij} + \xi_j \mathrm{R}_{ih} \\ \qquad + \xi_i \mathrm{R}_{jh} + \mathrm{P}_{ijh}\Big(\frac{1}{\Delta} \Delta_\alpha^\beta \mathrm{H}_\beta\Big)\Xi_\alpha \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta, i, j, h = 2, 3, \cdots n \,;\, i \neq j \neq h) \,;$$

$\mathrm{R}_{ij}f$, $\mathrm{R}_{ii}f$ conservant la même signification que dans le n° 18. Donc le *sous-faiscrau caractéristique triple ne peut jamais être **un** faisceau involutif, et* a fortiori *un faisceau complet.*

24. Conditions nécessaires pour que S admette le nombre maximum d'invariants. — Les $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations infiniténinales R_{ij}, R_{ii} étant indépendantes, S ne peut atteindre le nombre maximum d'invariants que si l'on a identiquement

$$(\mathrm{K}_{iii}, \mathrm{K}) = \xi_i(\mathrm{K}_{1ii}, \mathrm{K}) \,;\, (\mathrm{K}_{iij}, \mathrm{K}) = \xi_j(\mathrm{K}_{1ii}, \mathrm{K}) + \xi_i(\mathrm{K}_{1ij}, \mathrm{K}) \,;\, (\mathrm{K}_{ijh}, \mathrm{K}) \\ = \xi_h(\mathrm{K}_{1ij}, \mathrm{K}) + \xi_j(\mathrm{K}_{1ih}, \mathrm{K}) + \xi_i(\mathrm{K}_{1jh}, \mathrm{K}) \,;$$

$$(i \neq j \neq h = 2, 3, \cdots n) \,;$$

ce qui entraîne les relations

$$P_{iii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right) = \xi_i P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right)\ ;\ P_{iij}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right) = \xi_j P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right)$$

$$+ \xi_i P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right)\ ;\ P_{ijh}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right) = \xi_h P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right)$$

$$+ \xi_j P_{1ih}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right) + \xi_i P_{1jh}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\beta H_\beta\right)$$

$$(\alpha,\ \beta,\ i,\ j,\ h,\ k = 2,\ 3,\cdots n\ ;\ i \neq j \neq h).$$

Or, on vérifie aisément les identités

$$P_{iii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) = \xi_i P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right)\ ;\ P_{iij}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) = \xi_j P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) + \xi_i P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_K^\tau\right)\ ;$$

$$P_{ijh}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) = \xi_h P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) + \xi_j P_{1ih}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_K^\tau\right) + \xi_i P_{1jh}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_K^\tau\right)\ ;$$

$$(i,\ j,\ h,\ k,\ \tau = 2,\ 3,\cdots n\ ;\ i \neq j \neq h)\ ;$$

donc les relations ci dessus deviennent

$$\Delta_K^\beta\,(P_{iii}H_\beta - \xi_i P_{1ii}H_\beta) = 0\ ;\ \Delta_K^\beta\,(P_{iij}H_\beta - \xi_j P_{1ii}H_\beta - \xi_i P_{1ij}H_\beta) = 0\ ;$$

$$\Delta_K^\beta\,(P_{ijh}H_\beta - \xi_h P_{1ij}H_\beta - \xi_j P_{1ih}H_\beta - \xi_i P_{1jh}H_\beta) = 0$$

$$(\beta,\ i,\ j,\ h = 2,\ 3,\cdots n\ ;\ i \neq j \neq h),$$

ce qui entraîne les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

(90) $$R_{ij}\Omega = 0 \qquad (i,\ j = 2,\ 3,\cdots n).$$

Ce sont les conditions nécessaires auxquelles Ω *doit être assujetti, pour que* S *puisse atteindre le nombre maximum d'invariants.*

Sous ces conditions les crochets (89) n'introduisent que les $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations nouvelles

(91) $$\theta_{gk}f = R_{gk}f + P_{1gk}\left(\frac{1}{\Delta}\,\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\Xi_\alpha f \quad (\alpha,\ \beta,\ g,\ k = 2,\ 3,\cdots n),$$

et le premier dérivé S′ de S a alors comme base les $m + \frac{n(n-1)}{2}$ transformation (85), (88), (91) ($m = 1 + \frac{n(n-1)(n+4)}{6}$ étant le degré de S).

25. Structure du faisceau S'. — C'est de la nature du faisceau S' que dépendent le nombre et la nature des invariants de S. Formons donc les crochets des transformations de base de S'. Pour les crochets (K,Θ_{ii}) il vient

$$(92)\quad (K,\Theta_{ii}) = (X,R_{ii}) + \frac{1}{\Delta}\Delta_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}(\Xi_{\alpha},R_{ii}) + P_{1ii}\Big(\frac{1}{\Delta}\Delta_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}\Big)(X,\Xi_{\alpha})$$
$$+ \Big[KP_{1ii}\Big(\frac{1}{\Delta}\Delta_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}\Big) - \Theta_{ii}\Big(\frac{1}{\Delta}\Delta_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}\Big)\Big]\Xi_{\alpha}$$
$$(\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n).$$

Calculons d'abord les crochets

$$(X,R_{ii}) = (X_1,R_{ii}) + \xi_{\alpha}(X_{\alpha},R_{ii}) \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)\ ;$$

on obtient les relations

$$(X_1,R_{ii}) = \xi_i M_i f - \xi_{\alpha}\Big(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_{\alpha}}\Big)P_{11}f + \frac{1}{3}\Big(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_{\alpha}}\Big)P_{1\alpha}f\ ;$$
$$(X_i,R_{ii}) = - M_i f + \frac{1}{3}\Big(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\Big)P_{11}f\ ; \quad (X_j,R_{ii}) + \frac{1}{3}\Big(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j}\Big)P_{11}f\ ;$$
$$(\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n\ ; \qquad i \neq j)$$

avec

$$M_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i\frac{\partial f}{\partial p_1}\ ;$$

d'où

$$(93)\qquad (X, R_{ii}) = \frac{1}{3}\Big(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_{\alpha}}\Big) K_{1\alpha}f \qquad (\alpha, i = 2, 2, \cdots n),$$

les $K_{hk}f$ conservant la même signification que dans le n° 18.

Passons ensuite aux crochets

$$(X, \Xi_i) = (X_1, \Xi_i) + \xi_{\alpha}(X_{\alpha}, \Xi_i) - X_i \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)\ ;$$

on a

$$(X_1,\Xi_i) = \Big(2\rho_{i\alpha} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_{\alpha}}\Big)P_{1\alpha} - \xi_{\alpha}\Big(6\rho_{i\alpha} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_{\alpha}}\Big)P_{11}\ ;$$
$$(X_i,\Xi_h) = \Big(2\rho_{ih} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_h}\Big)P_{11}\ ; \qquad (\alpha, i, h = 2, 3, \cdots n)\ ;$$

avec

$$\rho_{ih} = p_{1ih} + \xi_{\alpha}p_{\alpha ih} \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n)\ ;$$

il suit

$$(94)\qquad (X, \Xi_i) = \Big(2\rho_{i\alpha} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_i\partial\xi_{\alpha}}\Big) K_{1\alpha}f - X_i f.$$

Quant aux crochets (Ξ_h, R_{ii}) on obtient les formules

(95) $(\Xi_i, R_{ii}) = -K_{1i}f\,; \quad (\Xi_j, R_{ii}) = 0\,; \quad (i \neq j = 2, 3, \cdots n).$

Tenant compte des formules (93), (94), (95), les crochets (92) peuvent s'écrire

(96)
$$(K,\theta_{ii}) = \left[\frac{1}{3}\left(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha}\right) + \left(2\rho_{\alpha\gamma} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\gamma}\right)P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\gamma^\beta H_\beta\right)\right]K_{1\alpha}f -$$
$$-\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta K_{1i}f - P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)X_\alpha f + \left[KP_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right) -\right.$$
$$\left.-\theta_{ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right]\Xi_\alpha f \qquad (\alpha, \beta, \gamma, i = 2, 3, \cdots n).$$

Un calcul semblable fournit ensuite pour les autres crochets, non identiquement nuls et non congrus à zéro, de la structure de S' les expressions

(97)
$$(K,\theta_{ij}) = \left[\frac{1}{3}\left(R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha}\right) + \left(2\rho_{\alpha\gamma} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\gamma}\right)P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\gamma^\beta H_\beta\right)\right]K_{1\alpha}f$$
$$-\frac{1}{\Delta}\Delta_j^\beta H_\beta K_{1i}f - \frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta K_{1j}f - P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)X_\alpha f$$
$$+\left[KP_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right) - \theta_{ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right]\Xi_\alpha f\,;$$

(98)
$$\left\{\begin{aligned}
(\theta_{ii}, \theta_{jj}) &= P_{1jj}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta\right)K_{1i}f - P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_j^\beta H_\beta\right)K_{1j}f\\
&\quad + \left[\theta_{ii}P_{1jj}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right) - \theta_{jj}P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right]\Xi_\alpha f\,;\\
(\theta_{ii},\theta_{hk}) &= P_{1hk}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta\right)K_{1i}f - P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_k^\beta H_\beta\right)K_{1h}f\\
&\quad - P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right)K_{1k}f + \left[\theta_{ii}P_{1hk}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right.\\
&\quad \left.- \theta_{hk}P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right]\Xi_\alpha f\,;\\
(\theta_{ij},\theta_{hk}) &= P_{1hk}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta\right)K_{1j}f + P_{1hk}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_j^\beta H_\beta\right)K_{1i}f\\
&\quad - P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right)K_{1k}f - P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_k^\beta H_\beta\right)K_{1h}f\\
&\quad + \left[\theta_{ij}P_{1hk}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right) - \theta_{hk}P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\right]\Xi_\alpha f\,;\\
(K_{pgk}, \theta_{qr}) &= P_{pgk}P_{1qr}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_\alpha^\beta H_\beta\right)\Xi_\alpha f\\
(p = 1, 2, &\cdots n\,;\ \alpha, \beta, \gamma, i, j, h, k, g, q, r = 2, 3, \cdots n\,;\ i \neq j\,;\ h \neq k).
\end{aligned}\right.$$

26. Conditions nécessaires et suffisantes pour que S′ soit un faisceau complet. — Nous allons maintenant examiner, si le faisceau S′ peut être un faisceau complet. Les formules (96), (97), (98) montrent que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

(99) $\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta = \frac{1}{3}\left(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right);$ (100) $\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta = \frac{1}{3}\left(R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j}\right);$

(101) $R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j} = 0;$ (102) $R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\tau} = 0;$

(103) $P_{1ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right) = 0;$ (104) $P_{1ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right) = 0;$

(105) $$R_{ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right) = R_{ij}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_h^\beta H_\beta\right) = 0;$$
$$(\beta,\ i,\ j,\ h,\ \tau = 2, 3, \cdots n;\ i \neq j \neq \tau).$$

Mais ces conditions se simplifient beaucoup. Les relations (105) sont des conséquences de (99), (100), (101), (102). En effet, les (99) entraînent

(106) $$R_{ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta\right) = \frac{1}{3}R_{ii}R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}.$$

Or, en comparant les relations (99), (100), il vient

(107) $$R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j} \qquad (i \neq j);$$

on en déduit

$$R_{ii}R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = R_{ii}R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j},$$

et comme par ailleurs

$$R_{ii}R_{ij}f = R_{ij}R_{ii}f,$$

on obtient

$$R_{ii}R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j} = R_{ij}R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j}.$$

Le second membre de cette dernière relation est nul, à cause de (101) ; donc les (106) se réduisent à

$$R_{ii}\left(\frac{1}{\Delta}\Delta_i^\beta H_\beta\right) = 0 \qquad (\beta,\ i = 2, 3, \cdots n).$$

Ce sont bien les relations (105) pour $h = i$; de même pour les autres.

Donc les conditions ci-dessus se réduisent aux (99), (101), (102), (107), puisque les relations (103), (104) sont manifestement des conséquences de (99) et que les (100) peuvent être remplacées par les (107).

Mais on peut préciser davantage ces conditions. Les relations (99), à cause des identités évidentes

$$\Delta + A_{i,\,\beta}\Delta_i{}^{\beta} = 0 \qquad (\beta, i = 2, 3, \cdots n),$$

s'écrivent

$$\Delta_i{}^{\beta}\left[3H_{\beta} + A_{i,\,\beta}\left(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)\right] = 0. \tag{108}$$

Or, un calcul facile montre que

$$H_i = (R_{\alpha i}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} - 3K_{1\alpha}\Omega)\rho_{\alpha i} + \left(R_{[\gamma\delta]}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right)\rho_{[\gamma\delta]} + \Gamma_i$$
$$(\alpha, \gamma, \delta, i = 2, 3, \cdots n\,; \quad \gamma \neq i\,; \quad \delta \neq i),$$

où l'on a posé

$$\Gamma_h = Y_1\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h} + \xi_\alpha\left(Y_\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h}\right) - \Omega\left(P_{11}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha}\left(K_{1\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h}\right)$$
$$- 3(Y_h\Omega - \frac{1}{3}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h}P_{11}\Omega)\,;$$
$$Y_h f = \frac{\partial f}{\partial x_h} + p_h\frac{\partial f}{\partial x} + p_{h\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\,;$$
$$(\alpha = 2, 3, \cdots n)\,;$$

ce qui peut s'écrire, en vertu des relations (101), (102), (107),

$$H_i = B_\alpha\rho_{\alpha i} + \Gamma_i \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

avec

$$B_h = R_{hh}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_h} - 3K_{1h}\Omega.$$

Comme de plus, en tenant compte de (90), il vient

$$B_i + 2\left(R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}\right) = 3\Xi_i R_{ii}\Omega = 0, \tag{109}$$

les relations (108) deviennent

$$\Delta_i^{\beta}(B_\gamma A_{\gamma,\beta} + 6\Gamma_\beta - B_\alpha C_{\alpha\beta}) = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma, i = 2, 3, \cdots n\,;\ \gamma \neq i).$$

avec

$$C_{hk} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\xi_h \partial\xi_k}.$$

Ces dernières relations se simplifient encore, car on a identiquement

$$A_{j,\beta}\Delta_i^{\beta} = 0 \qquad (\beta, i, j = 2, 3, \cdots n\,;\ i \neq j)\,;$$

elles deviennent donc

$$\Delta_i^{\beta}(6\Gamma_\beta - B_\alpha C_{\alpha\beta}) = 0 \qquad (\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n).$$

Vu la forme des dèterminants $\Delta^h{}_k$ et la relation évidente

$$B_i + 2K_{1i}\Omega = 0,$$

on conclut que ces relations ne peuvent être identiquement vérifiées que si Ω satisfait à la fois aux $n - 1$ équations

$$(110) \qquad 3\Gamma_i + C_{\alpha i}K_{1\alpha}\Omega = 0 \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n).$$

Comme enfin on peut obtenir les identités

$$R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j} = \Xi_j R_{ii}\Omega\,; \quad R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_r} = \xi_r R_{ij}\Omega\,; \quad R_{ii}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} - K_{1i}\Omega = \Xi_i R_{ii}\Omega\,;$$
$$R_{ij}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_j} - K_{1i}\Omega = \Xi_j R_{ij}\Omega,$$

il s'ensuit que (101), (102), (107) sont des conséquences de (90) et on arrive ainsi à la conclusion suivante :

Le faisceau S′ *ne peut être un faisceau complet, et par suite* S *ne peut admettre le nombre maximum d'invariants, que si* Ω *satisfait à la fois aux équations* (90), (110) ; Ω *étant assujettie à ces conditions, le nombre des invariants de* S *sera* $4n - 1$.

27. **Réduction des conditions (90), (110).** — Le faisceau S se trouve, d'après ce qui précède, avoir comme base les transformations (85), (111) :

$$(111) \qquad Kf = Xf + \frac{1}{3}K_{1\alpha}\Omega\Xi_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n),$$

tandis que le faisceau S′ s'obtient en adjoignant à ces transformations les

$$\Theta_{gK}f = R_{gK}f \qquad (g, K = 2, 3 \cdots n). \tag{112}$$

Remplaçons la fonction Ω par une autre fonction ψ de $4n$ variables $x, x_1, \ldots x_n$; $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $\xi_2, \ldots \xi_n$; avec

$$q_K = p_{1K} + \xi_\alpha p_{\alpha K} \qquad (K = 2, 3 \cdots n) \text{ (1)};$$

on aura alors

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i} = J_i\psi + p_{i\alpha}\mathcal{M}_\alpha\psi\ ; \qquad K_{1i}\Omega = \mathcal{M}_i\psi\ ; \qquad (\alpha = 2, 3 \cdots n) \tag{113}$$

avec

$$J_i f = \frac{\partial f}{\partial\xi_i} + q_i\frac{\partial f}{\partial q_1}\ ; \qquad \mathcal{M}_i f = \frac{\partial f}{\partial q_i} - \xi_i\frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

Introduisons maintenant comme variables $q_1, \ldots q_n$ à la place de $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{1n}$ et gardons toutes les autres. Les transformations (85) demeurent telles quelles, tandis que la transformation (111), à cause des formules (113), devient

$$Kf = Zf + \rho_{[\alpha\beta]}P_{[\alpha\beta]}f \qquad (\alpha, \beta = 2, 3 \cdots n) \tag{114}$$

avec

$$Zf = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + (p_1 + \xi_\alpha p_\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + q_\gamma\frac{\partial f}{\partial p_\gamma} - \psi\frac{\partial f}{\partial q_1}$$
$$+ \frac{1}{3}\mathcal{M}_\alpha\psi J_\alpha f - \frac{1}{3}J_\alpha\psi\mathcal{M}_\alpha f \qquad (\gamma = 1, 2, \cdots n\ ;\ \alpha = 2, 3, \cdots n)\ ;$$

et que les transformations (112) se réduisent à

$$\Theta_{gK}f = P_{gK}f \qquad (g, K = 2, 3, \cdots n). \tag{115}$$

Le faisceau S a donc pour base les transformations (85), (114) et le faisceau S′ les transformations (85), (115), Zf. Dans la transformation infiniténisale Zf ne figurent pas les variables $p_{22}, p_{23}, \ldots p_{nn}$; $p_{122}, p_{123}, \ldots p_{nnn}$; ce qui indique que les $4n - 1$ invariants fondamentaux de S′ (et par suite de S) ne sont autres que les $4n - 1$ invariants principaux de cette transformation.

Ceci posé, completons la base de S en lui adjoignant les trans-

(1) Ce qui est possible, à cause des relations (90).

formations auxquelles se ramènent les $\Xi_2 f, \ldots \Xi_n f$; $X_2 f, \ldots X_n f$, par le changement de variables ci dessus, de manière à obtenir la base du faisceau associé F_0. Les $\Xi_i f$ deviennent

$$(116) \qquad \Xi_i f = J_i f + p_{i\alpha} \mathcal{M}_\alpha f \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n),$$

et les $X_i f$ peuvent être remplacées par

$$(117) \qquad \mathcal{X}_i f = Z_i f + p_{i\alpha} G_\alpha f + \rho_{i\alpha} \mathcal{M}_\alpha f \qquad (\alpha, i = 2, 3, \cdots n)$$

où l'on a posé

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial x} + q_i \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{3} J_i \psi \frac{\partial f}{\partial q_1} ; \qquad G_i f = \frac{\partial f}{\partial p_i} - \xi_i \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{3} \mathcal{M}_i \psi \frac{\partial f}{\partial q_1} .$$

Le faisceau F_0 a donc pour base les transformations (85), (114), (116), (117).

On pourrait même prendre les variables $\rho_{22}, \rho_{23}, \ldots \rho_{nn}$ à la place de $p_{122}, p_{123}, \ldots p_{1nn}$, ce qui remplacerait les transformations $K_{1gk} f = P_{1gk} f$ par les $K_{1gk} f = \frac{\partial f}{\partial \rho_{gk}} = \mathfrak{C}_{gk} f$, tandis que toutes le autres transformations de base de F_0 demeuraient inaltérées.

Il est maintenant bien clair que toute intégrale complète de l'équation du troisième ordre prolongée des éléments E : $p_1, \ldots p_n$; $q_1, \ldots q_n$; $\xi_2, \ldots \xi_n$, constitue une intégrale générale à n dimensions (intégrale complète à n dimensions) du faisceau $\overline{F}_0$ qui a pour base les $4n - 3$ transformations Zf ; $Z_2 f, \ldots Z_n f$; $G_2 f, \ldots G_n f$; $M_2 f, \ldots M_n f$; $J_2 f, \ldots J_n f$.

Réciproquement toute intégrale générale à n dimensions de $\overline{F}_0$ sera une intégrale complète, prolongée des éléments E, de l'équation en question.

La transformation infinitésinale Zf doit être, d'après ce qui précède, une transformation distinguée de $\overline{F}_0$, c'est à dire qu'elle doit être en involution avec toutes les transformations de $\overline{F}_0$. Exprimons ceci pour une transformation quelconque de $\overline{F}_0$,

$$Vf = \zeta Zf + \zeta_\alpha Z_\alpha f + g_\alpha G_\alpha f + m_\alpha \mathcal{M}_\alpha f + j_\alpha J_\alpha f \qquad (\alpha = 2, 3, \cdots n).$$

On a les formules (mod $\overline{F}_0$),

$$(Z, Z_i) \equiv (Z_i\psi - \frac{1}{3} ZJ_i\psi) \frac{\partial f}{\partial q_1}; \quad (Z, G_i) \equiv (G_i\psi - \frac{1}{3} Z\mathcal{M}_i\psi) \frac{\partial f}{\partial q_1};$$

$$(Z, \mathcal{M}_i) \equiv 0; \quad (Z, J_i) \equiv 0;$$

$$(i = 2, 3, \cdots n);$$

donc on ne peut avoir

$$(Z, V) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \overline{F}_0)$$

que si ψ satisfait à la fois aux $2(n-1)$ équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(118) \quad 3Z_i\psi - ZJ_i\psi = 0; \quad 3G_i\psi - Z\mathcal{M}_i\psi = 0; \quad (i = 2, 3, \cdots n).$$

Ces équations sont vérifiées si l'on prend, en particulier, pour ψ une fonction arbitraire de $\xi_2, \ldots \xi_n$. Les équations (118) remplacent les conditions (90), (110) du numéro précédent et on pourrait les établir directement, en utilisant les formules de changement de la fonction Ω en ψ. On constate ainsi que les relations (90) se réduisent à des identités et que les (118) ne sont autres que les relations (110).

28. **Utilisation des invariants de S pour l'intégration de l'équation.** — D'après les résultats du numéro précédent on n'a qu'à intégrer le faisceau $\overline{F}_0$ pour que l'on puisse obtenir une multiplicité intégrale à n dimensions, prolongée des éléments E, de l'équation du troisième ordre en question. Il suffit pour cela d'introduire comme variables nouvelles les $4n-1$ invariants principaux de la transformation Zf et de garder une seule des anciennes variables. La base de $\overline{F}_0$ prend ainsi une forme très simple et l'intégration se fait alors immédiatement. Mais nous préférons ici procéder un peu différemment. Le faisceau F_0 ayant comme base les transformations (114), (116), (117) et

$$K_{1ik}f = \mathcal{C}_{ik}f; \quad K_{ihk}f = P_{ikh}f; \quad (i, k, h = 2, 3, \cdots n),$$

tout sous faisceau complet de F_0 définissant une intégrale complète sera de la forme

$$U_1f = Kf + u_{[\varepsilon\alpha\beta]}K_{[\varepsilon\alpha\beta]}f; \quad U_if = \mathcal{X}_if + v_{i\alpha}\Xi_\alpha f + w_{i[\varepsilon\alpha\beta]}K_{[\varepsilon\alpha\beta]}f;$$

$$(\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n); \quad \varepsilon = 1, 2, \cdots n).$$

Désignons par $\bar{x}, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n ; \bar{p}_1, \ldots \bar{p}_n ; \bar{q}_1, \ldots \bar{q}_n ; \bar{\xi}_2 \ldots \bar{\xi}_n$ les $4n - 1$ invariants principaux de Zf, satisfaisant aux équations

$$\bar{x} = x, \ \bar{x}_i = x_i, \ \bar{p}_r = p_r, \ \bar{q}_r = q_r, \ \bar{\xi}_i = \xi_i \quad \text{pour } x_1 = x_0$$
$$(r = 1, 2, \cdots n \, ; \, i = 2, 3, \cdots n),$$

x_0 étant une valeur numérique arbitraire ; ce sont des invariants de la transformation U_1f. Désignons encore par $\bar{p}_{ik}, \bar{\rho}_{ik}, \bar{p}_{ikh}$, les autres invariants principaux de U_1f tels que

$$\bar{p}_{ik} = p_{ik}, \ \bar{\rho}_{ik} = \rho_{ik}, \ \bar{p}_{ikh} = p_{ikh} \quad \text{pour} \quad x_1 = x_0 \ (i, k, h = 2, 3, \cdots n).$$

Effectuons maintenant un changement de variables en prenant pour variables nouvelles tous les invariants principaux de U_1f et on conservant seulement l'ancienne variable x_1. Comme les relations qui expriment que le faisceau U_1f, U_if est complet, peuvent s'écrire sous la forme

$$(U_i, U_1) = \omega_{i\alpha} U_\alpha \, ; \quad (U_i, U_j) = 0 \, ; \quad (\alpha, i, j = 2, 3, \cdots n \, ; \, i \neq j),$$

un calcul facile prouve que ce faisceau se trouve avoir, plus simplemen', comme base

$$V_1f = \frac{\partial f}{\partial x_1} ; \qquad V_if = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} + \bar{p}_i \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \bar{q}_i \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi}_i} + \bar{q}_i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{q}_1}\right) \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_1}$$
$$+ \bar{p}_{i\alpha}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{p}_\alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{q}_\alpha} - \bar{\xi}_\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{q}_1}\right) \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_1}\right] + \bar{\rho}_{i\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_\alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)$$
$$+ \bar{\rho}_{i\alpha}\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}_\alpha} + \bar{q}_\alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_1} + \bar{p}_{\beta\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_\alpha} - \bar{\xi}_\beta \frac{\partial f}{\partial \bar{q}_1}\right)\right] + \bar{w}_{i1[\alpha\beta]} \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}_{[\alpha\beta]}}$$
$$+ \bar{w}_{i[\alpha\beta\gamma]} \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_{[\alpha\beta\gamma]}}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, i = 2, 3, \cdots n),$$

$\bar{\pi}$ désignant ce qui devient π en remplaçant x_1 par x_0 et les autres variables par les invariants correspondants. Or, l'intégration du faisceau V_1f, V_if supposé complet, s'effectue immédiatemei t et on en déduit que les multiplicités à n dimensions les plus générales, prolongées au troisième ordre, satisfaisant à l'équation en question sont définies par les relations

$$\bar{x} = F_1(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n), \quad \bar{p}_1 = F_2(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,; \qquad \bar{p}_i = H^1{}_i(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,;$$
$$\bar{q}_1 = F_3(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n) + \bar{\xi}_\alpha H^2{}_\alpha(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\,; \qquad \bar{q}_i = H^2{}_i + \bar{\xi}_\alpha H^1{}_{i\alpha}\,;$$
$$H^3{}_i + 2\bar{\xi}_\alpha H^2{}_{i\alpha} + \bar{\xi}_\alpha{}^2 H^1{}_{i\alpha} + 2\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta H^1{}_{i[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}(\bar{\xi}_2, \cdots \bar{\xi}_n\,; \quad x_0, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n\,;$$
$$F_1, F_2, F_3\,; \qquad H_2{}^1 \cdots H_n{}^1\,; \qquad H_2{}^2 \cdots H_n{}^2\,; \qquad H^1{}_{22}, H^1{}_{23} \cdots H^1{}_{nn}) = 0\,;$$
$$(\alpha, \beta, i = 2, 3, \cdots n\,; \qquad \alpha \neq \beta)$$

avec

$$\frac{\partial F_h}{\partial \bar{x}_{i_1} \cdots \partial \bar{x}_{i_r}} = H^h_{i_1 \cdots i_r}(\bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n),$$

les F_1, F_2, F_3 désigant trois fonctions arbitraires.

La solution du problème de CAUCHY se trouve ainsi mise en évidence.