

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

DAVID BELORIZKY

**Recherches sur l'application pratique des solutions générales
du problème des trois corps**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1933

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1933__145__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :
2274
Série A.
N° de Série 1409.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. DAVID BELORIZKY

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR L'APPLICATION PRATIQUE DES SOLUTIONS GÉNÉRALES DU
PROBLÈME DES TROIS CORPS.

2^e THÈSE. — L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DE LA LONGITUDE MOYENNE DE LA LUNE.

Soutenues le

1933 devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*

CHAZY
LAMBERT } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1933

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen C. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.
Doyen honoraire M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires ... H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC,
 E. PICARD, R. PERRIER, LÉON BRILLOUIN, A. DEREIMS.

Professeurs GOURSAT..... Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
 JANET..... Electrotechnique générale.
 WALLERANT..... Minéralogie.
 PAINLEVE..... Mécanique analytique et Mécanique céleste.
 GABRIEL BERTRAND.. Chimie biologique.
 M^{me} P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.
 CAULLERY..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
 G. URBAIN..... Chimie générale.
 EMILE BOREL..... Calcul des probabilités et Physique mathématique.
 L. MARCHIS..... Aviation.
 JEAN PERRIN..... Chimie physique.
 ABRAHAM..... Physique.
 E. CARTAN..... Géométrie supérieure.
 M. MOLLIARD..... Physiologie végétale.
 LAPICQUE..... Physiologie générale.
 E. VESSIOT..... Théorie des fonctions, théorie des transformations.
 A. COTTON..... Physique.
 J. DRACH..... Application de l'Analyse à la Géométrie.
 CH. FABRY..... Physique.
 CH. PEREZ..... Zoologie.
 LÉON BERTRAND.... Géologie structurale et Géologie appliquée.
 P.-A. DANGEARD.... Botanique.
 R. LESPIEAU..... Théories chimiques.
 P. MONTEL..... Mécanique rationnelle.
 P. WINTREBERT.... Anatomie et histologie comparées.
 E. RABAUD..... Biologie expérimentale.
 O. DUBOSCQ..... Biologie maritime.
 P. PORTIER..... Physiologie comparée.
 E. BLAISE..... Chimie organique.
 G. JULIA..... Calcul différentiel et Calcul intégral.
 L. LUTAUD..... Géographie physique et Géologie dynamique.
 EUGÈNE BLOCH..... Physique théorique et Physique céleste.
 HENRI VILLAT..... Mécanique des fluides et applications.
 CH. JACOB..... Géologie.
 P. PASCAL..... Chimie minérale.
 V. AUGER..... Chimie appliquée.
 H. BÉNARD..... Mécanique expérimentale des fluides.
 E. ESCLANGON.... Astronomie.
 L. BLARINGHEM... Botanique.
 C. MAUGUIN..... Minéralogie.
 A. DENJOY..... Mathématiques générales.
 A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
 A. GUILLIERMOND.. Botanique (P. C. N.).
 H. BEGHIN..... Mécanique physique et expérimentale.
 DE BROGLIE..... Théories Physiques.
 G. RIBAUD..... Hautes températures.

E. PECHARD..... Chimie (Enseign^{nt} P.C.N.).
 A. GUILLET..... Physique.
 M. GUICHARD..... Chimie minérale.
 A. MICHEL-LEVY.. Pétrographie.
 G. BRUHAT..... Physique.
 E. DARMOIS..... Physique.
 A. DEBIERNE..... Radioactivité.
 L. DUNOYER..... Optique appliquée.
 M. JAVILLIER..... Chimie biologique.
 L. JOLEAU..... Paléontologie.
 H. MOUTON..... Chimie physique.
 F. PICARD..... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
 ROBERT-LÉVY.... Zoologie.
 M. FRÉCHET..... Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
 FOCH..... Mécanique exper^{te} des fluides.
 PAUTHENIER..... Physique (P.C.N.).

M^{me} RAMART-LUCAS. Chimie organique.
 CHRÉTIEN..... Optique appliquée.
 FREUNDLER..... Chimie (P.C.N.).
 P. JOB..... Chimie générale.
 LABROUSTE..... Physique du Globe.
 PRENANT..... Zoologie.
 VILLEY..... Mécanique physique et expérimentale.
 BOHN..... Zoologie (P.C.N.).
 COMBES..... Sciences naturelles (P.C.N.).
 GARNIER..... Mécanique rationnelle.
 PERES..... Mécanique des Fluides.
 HACKSPILL..... Chimie (P.C.N.).
 LAUGIER..... Physiologie générale.
 TOUSSAINT..... Technique Aéronautique.
 MAURICE CURIE... Physique (P. C. N.).

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.. D. TOMBECK.

A MA CHÈRE FEMME

JUDITH

Affectueusement dédié.

A MONSIEUR

JEAN BOSLER

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

Hommage très respectueux.

PREMIÈRE THÈSE

RECHERCHES

SUR

L'APPLICATION PRATIQUE

DES

SOLUTIONS GÉNÉRALES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS ⁽¹⁾

AVANT-PROPOS.

1. Depuis trois siècles on cherche la solution du problème des trois corps. Malgré les grands progrès accomplis dans l'étude du mouvement des planètes, progrès qui permettent de prévoir leurs mouvements pour plusieurs siècles avec toute l'exactitude désirable, la solution générale, valable pour tous les temps, avait échappé aux efforts des plus célèbres mathématiciens qui s'étaient occupés de la question, tels que Lagrange, Laplace et Poincaré.

Au commencement du xx^e siècle, M. Sundman, dans un travail célèbre, a enfin établi l'existence de l'intégrale générale du problème, *valable pour tous les temps*.

A notre connaissance, personne n'a étudié les possibilités d'utilisation pratique de ces résultats, par exemple, en ce qui concerne le mouvement des planètes. On ne trouve en général que des indications très vagues sur la méthode de M. Sundman. Nous citerons quelques exemples :

M. Carl Burrau, dans *Numerische Untersuchungen über eine Klasse einfach periodischer, retrograder Bahne* ⁽²⁾, dit :

« Sundman a démontré qu'on peut déterminer une transformation, grâce à laquelle les coordonnées et le temps peuvent être développés en séries, théoriquement toujours convergentes. Mais il n'a pas lui-même développé ces séries et n'a rien dit de leur convergence pratique.

» Les séries de Sundman sont convergentes mathématiquement; mais on ne sait rien actuellement sur la possibilité de leur utilisation. »

⁽¹⁾ Les principaux résultats de ces recherches ont paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* :

1^o *Sur la convergence des séries dans la solution du problème des trois corps donnée par M. Sundman* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 314-316);

2^o *Sur la solution du problème des trois corps donnée par M. Sundman* (*Ibid.*, t. 193, 1931, p. 766-768);

3^o *Sur l'application des méthodes de M. Sundman aux problèmes de Mécanique céleste* (*Ibid.*, t. 193, 1931, p. 1321-1323);

4^o *Sur la nature des chocs dans le problème des trois corps à trois degrés de liberté* (*Ibid.*, t. 194, 1932, p. 769-771);

5^o *Sur le rayon de convergence des séries dans le problème des deux corps, traité par la méthode de Levi-Civita* (*Ibid.*, t. 194, 1932, p. 1449-1452).

⁽²⁾ Carl BURRAU und Elis STRÖMGREN, *Astronomische Nachrichten*, Bd. 202, 1916, n^o 4836, p. 185-186.

M. H. von Zeipel, dans *L'Œuvre astronomique de Henri Poincaré* ⁽¹⁾ :

« M. Sundman a montré que les coordonnées des trois corps et le temps peuvent se développer suivant les puissances d'une variable auxiliaire. Ces séries sont valables pour toutes les valeurs du temps. Mais il reste à voir si les séries de M. Sundman convergent assez rapidement pour satisfaire aux besoins pratiques de l'Astronomie. »

Dans la première Partie de notre travail, nous montrerons donc comment on obtient les séries de M. Sundman d'après ses méthodes et nous chercherons l'intérêt qu'elles peuvent présenter en vue de leur emploi effectif.

2. La seconde Partie de notre travail aura pour objet les questions suivantes :

M. Bisconcini, dans son Mémoire *Sur le problème des trois corps* ⁽²⁾, donne les deux relations analytiques distinctes entre les données initiales qui permettent de décider si deux des corps (dans le cas général du problème des trois corps) peuvent se choquer. Mais en écrivant les trois premiers termes de ces conditions, il ajoute :

« Nous ne savons rien par rapport à la grandeur du rayon de convergence des séries, car nous avons démontré seulement qu'il n'est pas nul. »

M. Levi-Civita, dans son travail *Sur la régularisation du problème des trois corps* ⁽³⁾, est parvenu à régulariser le problème au voisinage d'un choc binaire, en conservant la forme canonique des équations, et estime que cette régularisation « prêterait à reprendre, par des calculs peut-être plus commodes et plus symétriques, la détermination effective des deux relations invariables caractéristiques d'un choc ».

M. Kiveliovitch, adoptant les idées et les méthodes de M. Levi-Civita, a établi dans deux Notes aux *Comptes rendus* ⁽⁴⁾ la forme générale des conditions du choc binaire, sans donner le rayon de convergence des séries obtenues.

Dans notre seconde Partie, nous avons alors étudié, en employant les mêmes méthodes, le mouvement d'un corps de masse négligeable, au voisinage d'un choc avec un corps de masse finie, dans le problème à trois degrés de liberté.

Cette étude nous permet de fixer une limite supérieure du temps pour lequel la prévision d'un choc est sûrement valable, au moins dans le cas particulier que nous envisageons, très intéressant d'ailleurs au point de vue de l'Astronomie.

Le présent travail nous conduira enfin à émettre quelques idées sur l'application aux problèmes concrets de l'Astronomie de la solution générale du problème des trois corps que permettent d'imaginer les conceptions de M. Levi-Civita.

Nous avons, par la même occasion, cherché à préciser l'influence de certains points critiques dont le rôle ne paraît pas avoir été jusqu'ici suffisamment étudié.

M. Jean Bosler, directeur de l'Observatoire de Marseille, m'a signalé l'intérêt que présentent les travaux modernes sur le problème des trois corps. Ceux-ci ont été le point de départ de mes recherches. Pendant l'exécution de ce travail, il m'a prodigué ses conseils et n'a épargné ni son temps, ni sa peine. Je lui en exprime ici ma plus vive gratitude.

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. 38, 1920, p. 310.

⁽²⁾ *Acta mathematica*, t. 30, 1906, p. 49-92.

⁽³⁾ *Acta mathematica*, t. 42, 1920, p. 99-144.

⁽⁴⁾ *Sur les conditions d'un choc binaire dans le problème des trois corps* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 116-118); *Le calcul des conditions du choc binaire dans le problème des trois corps* (*Ibid.*, t. 182, 1926, p. 263).

PREMIÈRE PARTIE.
MÉTHODE DE M. SUNDMAN.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE M. SUNDMAN.

1. Dans son travail ⁽¹⁾, M. Sundman a démontré que :

« Si les constantes des aires dans le mouvement des trois corps par rapport à leur centre commun de gravité ne sont pas toutes nulles, on peut trouver une variable θ telle que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de θ qui représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps, et cela quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps. »

La marche suivie par M. Sundman est celle-ci :

Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps, de masses m_0, m_1, m_2 et $r_0 = P_1P_2, r_1 = P_2P_0, r_2 = P_0P_1$ leurs distances mutuelles. Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du corps P_i par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre commun de gravité des trois corps et ayant des directions fixes dans l'espace. M. Sundman démontre, par l'application du théorème ⁽²⁾ de Cauchy-Picard sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles, que si, à l'instant \bar{t} , les distances r_0, r_1, r_2 sont toutes différentes de zéro et plus grandes que $\frac{1}{4} \kappa$, κ étant un nombre quelconque fini, alors les x_i, y_i, z_i , ainsi que leurs dérivées par rapport au temps, sont développables en séries procédant suivant les puissances de $t - \bar{t}$ et convergentes au moins tant que

$$(1) \quad |t - \bar{t}| \leq T = \frac{\kappa}{\sqrt{\frac{4}{21} \frac{M^2}{m \kappa} + M |K|}}$$

(les unités étant choisies de telle façon que la constante de Gauss $\sqrt{f} = k = 1$).

⁽¹⁾ K. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps* (*Acta mathematica*, t. 36, 1913, p. 105-179).

⁽²⁾ Rappelons ici l'énoncé de ce théorème : Soit le système d'équations différentielles

$$(A) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les f_i sont développables suivant les puissances de $y_i - y_i^0$ en séries qui convergent tant que

$$(1) \quad |y_i - y_i^0| < \alpha_i.$$

Supposons qu'il existe des quantités positives et finies M_i , telles qu'on ait $|f_i| < M_i$, si les inégalités (1) sont vérifiées. Alors il existe n fonctions de t, y_1, y_2, \dots, y_n satisfaisant au système (A), prenant respectivement pour $t = t_0$ les valeurs $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ et holomorphes dans un cercle de rayon h décrit autour du point t_0 ; h étant la plus petite des quantités $\frac{\alpha_i}{M_i}$. Par suite, à l'intérieur de ce cercle, les y_i sont développables en séries uniformément convergentes suivant les puissances de $t - t_0$.

M représente ici la somme $m_0 + m_1 + m_2$, m étant la plus petite de ces masses et $|K|$ la valeur absolue de la constante de forces vives.

2. Nous dirons que le mouvement est régulier dans un intervalle donné, si les coordonnées des trois corps sont des fonctions holomorphes du temps dans cet intervalle.

Lorsque le mouvement cesse d'être régulier à un instant fini t , ou bien les trois corps se choquent tous en un même point de l'espace, ou bien deux des trois corps se choquent tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite plus grande que zéro.

Dans un autre travail ⁽¹⁾, M. Sundman a démontré qu'une collision générale ne peut avoir lieu que si les constantes des aires sont toutes nulles. En supposant qu'une au moins de ces constantes n'est pas nulle, on est ainsi amené à considérer seulement les chocs binaires.

Supposons que les corps P_0 et P_1 se choquent à l'instant fini t_1 . En adoptant les variables de Jacobi, c'est-à-dire les coordonnées rectangulaires x, y, z du corps P_1 par rapport à P_0 et les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ de P_2 par rapport au centre de gravité des corps P_0 et P_1 , M. Sundman trouve qu'à l'instant d'un choc réel, r étant la distance P_0P_1 :

$$(2) \quad \lim \frac{x}{r} = \varphi, \quad \lim \frac{y}{r} = \gamma \quad \text{et} \quad \lim \frac{z}{r} = \psi,$$

où φ, γ, ψ sont des constantes (et $\varphi^2 + \gamma^2 + \psi^2 = 1$).

Il montre ensuite que

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \sqrt{r} \frac{dx}{dt} = -\varphi \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ \lim \sqrt{r} \frac{dy}{dt} = -\gamma \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ \lim \sqrt{r} \frac{dz}{dt} = -\psi \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, si r est infiniment petit du premier ordre, la vitesse relative des corps P_0 et P_1 est infiniment grande d'ordre $\frac{1}{2}$.

3. Si, à l'instant $t = \bar{t}_1$, $r < \frac{x_1}{2}$ (sans que $r = 0$) et $\rho > 14x_1$ ($\rho^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2$), x_1 étant une petite quantité qui sera déterminée plus loin, alors il est avantageux ⁽²⁾ de remplacer le temps t par une nouvelle variable u définie par la relation

$$dt = r du.$$

En transformant les équations différentielles du mouvement et en prenant comme fonctions inconnues de u

$$(4) \quad x, \quad y, \quad z, \quad \frac{dx}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{du}, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

M. Sundman montre que ces fonctions sont développables suivant les puissances de $u - \bar{u}_1$ (\bar{u}_1 correspondant à la valeur \bar{t}_1 de t , et est fini) ainsi que le temps t , et ces séries convergent tant que $|u - \bar{u}_1| < Q'$, Q' étant le nombre tiré du calcul des limites de Cauchy.

Les mêmes raisonnements s'appliquent pour l'instant t_1 du choc. Une fois effectuée, la transformation $dt = r du$, les équations différentielles restent holomorphes par rapport à u .

En effet, en posant

$$x' = \frac{dx}{du} = r \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{du} = r \frac{dy}{dt}, \quad \dots, \quad r' = \frac{dr}{du} = r \frac{dr}{dt},$$

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \quad \dots;$$

⁽¹⁾ Recherches sur le problème des trois corps (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. 34, n° 6, 1907).

⁽²⁾ Car on voit que si l'on conservait la variable t , le cercle de convergence pour x très petit, qui est de l'ordre $x^{\frac{3}{2}}$, deviendrait très petit.

on obtient les équations

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{du} &= \frac{r'}{r} x' - \frac{m_0 + m_1}{r} x + r^2 X, & \text{où } X &= -m_2 x \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 \xi \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right); \\ & \dots, & & \dots; \\ \frac{d\xi'}{du} &= r\Theta, & \text{où } \Theta &= -M\xi \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} \right) + \lambda\mu Mx \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ & \dots, & & \dots; \\ & & & \left(\lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \text{ et } \mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \right), \end{aligned}$$

qui restent holomorphes pour $x = y = z = 0$.

M. Sundman calcule les premiers termes des développements en séries des intégrales au voisinage du choc suivant les puissances de $u - u_1$:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = \frac{m_0 + m_1}{2} \varphi (u - u_1)^2 + \dots, & \xi = \xi_1 + \frac{m_0 + m_1}{6} \xi_1' (u - u_1)^3 + \dots, \\ \dots; & \dots; \\ r = \frac{m_0 + m_1}{2} (u - u_1)^2 + \dots, & \xi' = \xi_1' - \frac{M(m_0 + m_1)}{6\rho_1^3} \xi_1 (u - u_1)^3 + \dots, \\ t - t_1 = \frac{m_0 + m_1}{6} (u - u_1)^3 + \dots; & \rho_1 = (\rho_0)_1 = (\rho_1)_1 \text{ pour l'instant du choc,} \end{array} \right.$$

et ces séries sont convergentes, au moins tant que $|u - u_1| < Q'$. (u_1 correspond à l'instant du choc et reste fini).

4. Ainsi $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, \frac{dx}{du}, \dots$ sont développables en séries suivant les puissances de $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$. Par conséquent les fonctions u, x, y, z, \dots , considérées comme fonctions de t , admettent pour $t = t_1$ un point singulier algébrique (ou de branchement) autour duquel se permutent circulairement trois branches de chacune de ces fonctions. Pour définir la continuation réelle du mouvement après le choc, on n'a qu'à faire décrire à la variable u un demi-cercle de rayon infiniement petit autour du point réel u_1 ; l'argument de $t - t_1$ augmente ou diminue alors de 3π . De cette façon, le mouvement après le choc est toujours représenté par les séries (4) : avant le choc $u - u_1$ était < 0 et après le choc $u - u_1$ est > 0 .

Les orbites des corps P_0, P_1 présentent chacune un point de rebroussement au point où ces deux corps se choquent.

5. Après le choc, on reprend comme variable t et le mouvement ne cesse d'être régulier que lorsque survient un nouveau choc. Au voisinage de ce nouveau choc, une nouvelle introduction de la variable u régularise encore le mouvement, et ainsi de suite. Cette régularisation cesse d'être possible dans deux cas : 1° s'il y a collision générale, alors la quantité

$$R = \sqrt{\frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2}}$$

est égale à zéro; ou 2° si les valeurs $t_1, t_2, t_3 \dots$ définissant les instants où se produisent les chocs admettent un point limite fini t_v , de sorte qu'au voisinage de t_v , il y ait une infinité de chocs.

M. Sundman démontre ensuite que dans ce cas aussi on a

$$\lim R = 0.$$

Mais si la quantité

$$f = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}$$

(où c_i sont les constantes des aires dans le mouvement par rapport au centre commun de gravité des trois corps) est différente de zéro, R ne peut tendre vers zéro quand t tend vers une valeur finie \bar{t} .

Ainsi, quand les constantes des aires ne sont pas nulles toutes à la fois, on peut définir analytiquement le mouvement des trois corps pour des valeurs de t aussi grandes qu'on voudra. Il existe alors un nombre $L > 0$ tel que $R \geq L$.

M. Sundman donne ce nombre L pour deux cas différents :

Si $K \leq 0$,

$$L = \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt}\right)^2 + f^2};$$

Si $K > 0$, L est la plus petite des deux quantités

$$\left(\frac{fm}{8 + \frac{1}{32}f\sqrt{KM}}\right)^2 \frac{1}{M\sqrt{M}} \quad \text{et} \quad \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt}\right)^2 + 2KR_0^2 + f^2},$$

R_0 et $\frac{dR_0}{dt}$ étant les valeurs de R et $\frac{dR}{dt}$ pour $t = 0$ et la constante K étant donnée par l'équation des forces vives :

$$g \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] + h[\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2] = 2U - K,$$

avec

$$g = \frac{M}{m_2(m_0 + m_1)}, \quad h = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}, \quad U = \frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2}.$$

6. De l'existence du nombre L , tel que $R \geq L$, il résulte que pour $f > 0$, les deux plus grandes des distances mutuelles entre les trois corps restent constamment supérieures à la quantité

$$l = \frac{1}{3}\sqrt{mL};$$

dans le cas contraire, R serait plus petit que L .

M. Sundman fixe alors la valeur de la quantité x_1 , et il pose

$$x_1 = \frac{2}{29}l = \frac{2}{87}\sqrt{mL}.$$

Alors pour $r < \frac{x_1}{2}$, on aura $\rho > 14x_1$, car $\rho > r_0 - r$ et $r_0 > l$.

Dans ce cas, il est avantageux d'introduire la variable u dont nous avons parlé plus haut.

Pour que les relations $r_0, r_1, r_2 \geq 14x$ (où l'on emploie la variable t) et la relation $r < \frac{x_1}{2}$ (où l'on fait la transformation $dt = r du$) ne donnent lieu à aucune ambiguïté, M. Sundman fixe la valeur de x par l'égalité

$$x = \frac{x_1}{28} = \frac{L\sqrt{m}}{1218}.$$

Ainsi on saura toujours quelle variable il convient d'employer.

7. Quand pour l'instant t_1 la distance $r = r_2$, par exemple, est plus petite que $\frac{x_1}{2}$, le mouvement des trois corps est représenté, on l'a vu, par des développements suivant les puissances de $u - u_1$ qui convergent sûrement tant que $|u - u_1| < Q'$. Mais il se trouve que Q' contient en dénominateur

$$V = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2},$$

vitesse du corps P_2 (qui reste en dehors du choc) dans son mouvement par rapport au centre de gravité de P_0 et de P_1 . Si V pouvait prendre des valeurs de plus en plus grandes lorsque t croît ou décroît indéfiniment, le rayon de convergence Q' pourrait devenir infiniment petit.

M. Sundman démontre que la valeur de V reste toujours en dessous d'une limite finie quand $r < \frac{x_1}{2}$.

Il montre que

$$V \leq G = \frac{1}{14x_1} \sqrt{\frac{9}{2m^2}(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + \left(775 + \frac{3M}{m}\right) Mx_1 \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{x_1}{16} |K|\right)},$$

et il trouve qu'en prenant

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{x_1}{3M}}}{6 + \frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 x_1 + \frac{9}{2m} G \sqrt{Mx_1} + \frac{3}{4} |K| x_1},$$

quantité finie dépendant exclusivement des conditions initiales, on a

$$Q' < Q.$$

Par conséquent, les développements des inconnues suivant les puissances de $u - u_1$ convergent certainement si u vérifie l'inégalité

$$|u - u_1| \leq Q.$$

8. La définition de la variable u dépend de celle des distances r_0, r_1, r_2 qui est la plus petite. Pour n'avoir plus qu'une seule variable, M. Sundman introduit une nouvelle variable ω définie par la relation

$$dt = \Gamma d\omega \quad (t = 0 \text{ pour } \omega = 0) \quad \text{et} \quad \Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_0}{7}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_1}{7}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_2}{7}}\right),$$

e étant la base des logarithmes naturels.

On voit que $0 \leq \Gamma < 1$ pour les valeurs réelles du temps.

Si l'une des distances s'annule, par exemple r_2 , alors on a

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r_2}{\Gamma},$$

et le second membre reste fini quand r_2 tend vers zéro.

De cette façon, ω tend vers une valeur finie quand u tend vers u_1 et t vers t_1 , c'est-à-dire quand t est fini. De plus

$$|t| < |\omega|.$$

Il en résulte donc que

$$\lim_{(t=\pm\infty)} \omega = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{(\omega=\pm\infty)} t = \pm\infty.$$

9. Supposons que, pour $\omega = \bar{\omega}$, l'une des distances, par exemple r_2 , est inférieure à $\frac{x_1}{2}$. Soit t_1 la valeur de t pour $\omega = \bar{\omega}$

Si u_1 est la valeur correspondante de u , alors les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps seront développables suivant les puissances de $u - u_1$, au moins tant que $|u - u_1| < Q$.

En tenant compte de la relation

$$\left| \frac{du}{d\omega} \right| = \left| \frac{\Gamma}{r_2} \right|$$

et de l'inégalité

$$\left| \frac{\Gamma}{r_2} \right| < \frac{1}{3x_1},$$

valable tant que $|u - u_1| < Q$, on conclut, en appliquant le théorème de Cauchy, que $u - u_1$ est développable suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ tant que $|\omega - \bar{\omega}| < 3Qx_1$ et, si cette inégalité a lieu, $|u - u_1| < Q$.

Il en résulte que les coordonnées des trois corps, les distances et le temps sont développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$, du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| < 3Qx_1$.

Supposons maintenant que pour $\omega = \bar{\omega}$, toutes les distances r_0, r_1, r_2 sont $\geq \frac{x_1}{2}$ ou bien $\geq 14x_1$.

Soit \bar{t} la valeur que prend t pour $\omega = \bar{\omega}$. Les coordonnées et les distances sont développables suivant les puissances de $t - \bar{t}$ tant que $|t - \bar{t}| < T$ (1).

Si l'on prend pour variable ω on trouve que

$$\left| \frac{dt}{d\omega} \right| = |\Gamma| < 8 \quad \text{tant que } |t - \bar{t}| < T.$$

En vertu du théorème de Cauchy, les coordonnées, les distances et le temps sont développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$, du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| \leq \frac{1}{8} T$.

L'expression $\frac{1}{8} T$ est de la forme $\frac{P}{Q_1}$, $3 Q x_1$ de la forme $\frac{P}{Q_2}$, P , Q_1 , Q_2 étant des expressions algébriques dépendant des conditions initiales supposées connues.

En prenant l'expression $\Omega = \frac{P}{Q_1 + Q_2}$, plus petite que les deux expressions $3 Q x_1$ et $\frac{1}{8} T$, on trouve que les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps sont développables en séries suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ et que le rayon de convergence de ces séries reste toujours supérieur à la limite positive définie ci-dessus Ω , indépendante de la valeur $\bar{\omega}$.

On a d'ailleurs

$$\Omega = \frac{x_1 \sqrt{\frac{3x_1}{M}}}{\frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 x_1 + \frac{9}{2m} G \sqrt{M} x_1 + \frac{3}{4} |K| x_1 + 224 \sqrt{16 \frac{M}{m} + 3 |K| x_1}},$$

les quantités x_1 , G , K étant définies par les conditions initiales.

Ainsi les coordonnées, les distances et le temps sont des fonctions holomorphes de ω dans une bande de largeur 2Ω comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe, et cela *quels que soient les chocs qui peuvent se produire entre les trois corps*.

10. En faisant la transformation

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1},$$

θ étant une nouvelle variable, on effectue la représentation conforme de la bande en question sur le cercle de rayon 1.

Par conséquent, les coordonnées, les distances et le temps sont les fonctions de θ , holomorphes dans le cercle de rayon 1 et de ce fait développables en séries suivant les puissances de θ , tant que $|\theta| < 1$.

Les valeurs réelles de θ entre -1 et $+1$ correspondent ainsi univoquement aux valeurs réelles de t entre $-\infty$ et $+\infty$.

De cette façon il est démontré que *les coordonnées des trois corps et leurs distances mutuelles* sont développables en séries convergentes représentant le mouvement *pour tous les temps*.

(1) Voir page 3.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT EFFECTIF DES SÉRIES.

I. — Les coordonnées relatives.

1. Dans les développements en séries des intégrales du mouvement des trois corps, les nombres Ω et l jouent un rôle très important. Ces nombres sont des fonctions de $m_0, m_1, m_2, c_0, c_1, c_2, R_0, \frac{dR_0}{dt}$ et de K .

M. Sundman emploie dans son Mémoire soit les coordonnées absolues des trois corps, c'est-à-dire par rapport à leur centre commun de gravité, soit les coordonnées de Jacobi, c'est-à-dire les coordonnées rectangulaires d'un des corps par rapport à un des deux autres, et les coordonnées du troisième par rapport au centre de gravité de deux premiers.

Dans notre étude des méthodes de M. Sundman en vue de leur application aux problèmes pratiques de l'Astronomie, nous prendrons les coordonnées employées par Lagrange, lesquelles ne diffèrent pas sensiblement de celles généralement employées (où le mouvement de deux des corps est rapporté au troisième qui est le Soleil).

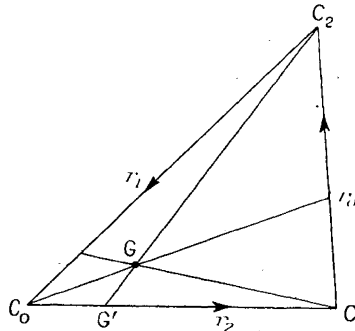


Fig. 1.

Soient trois corps C_0, C_1, C_2 , de masses m_0, m_1, m_2 ; G le centre de gravité commun et G' le centre de gravité de C_0 et C_1 (fig. 1).

1^o Soient x'', y'', z'' les coordonnées de C_1 par rapport à C_0 et ξ, η, ζ les coordonnées de C_2 par rapport au centre de gravité G' , les axes ayant des directions fixes;

2^o Soient encore x_i, y_i, z_i les coordonnées de C_i par rapport au centre de gravité G , les axes ayant les mêmes directions que les précédentes. On a

$$\begin{aligned} x'' &= x_1 - x_0, & y'' &= y_1 - y_0, & z'' &= z_1 - z_0; \\ \xi &= \frac{M}{m_0 + m_1} x_2, & \eta &= \frac{M}{m_0 + m_1} y_2, & \zeta &= \frac{M}{m_0 + m_1} z_2; \end{aligned}$$

3^o D'autre part, soient x', y', z' les coordonnées de C_0 par rapport à C_2 (x'', y'', z'' étant toujours les coordonnées de C_1 par rapport à C_0) et x, y, z les coordonnées de C_2 par rapport à C_1 , les coordonnées étant comptées parallèlement à trois axes rectangulaires fixes, de mêmes directions que les précédentes.

Ces coordonnées donnent le mouvement de C_1 et C_2 par rapport à C_0 , si l'on prend x'', y'', z'' et $-x', -y', -z'$. Si C_0 est le Soleil, si C_1 et C_2 sont des planètes, on a ainsi le mouvement de ces dernières par rapport au Soleil : c'est ce qu'on cherche dans l'Astronomie. Nous appellerons ces coordonnées *relatives*.

2. Il est facile de voir que les coordonnées relatives s'expriment linéairement en fonction des coordonnées absolues

ou des coordonnées de Jacobi et *vice versa*. En effet, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{m_2 x' - m_1 x''}{M}, \\ x_1 &= \frac{m_0 x'' - m_2 x}{M}, \\ x_2 &= \frac{m_1 x - m_0 x'}{M} \end{aligned} \right.$$

et de même pour y_i et z_i . Et inversement

$$\begin{aligned} x'' &= x_1 - x_0, & \dots, & \dots, \\ x' &= x_2 - x_1, & \dots, & \dots, \\ x &= x_0 - x_2, & \dots, & \dots \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x_0 &= -\lambda x'' - \frac{m_2}{M} \xi, & x_1 &= \mu x'' - \frac{m_2}{M} \xi, & x_2 &= \frac{m_0 + m_1}{M} \xi; \\ y_0 &= -\lambda y'' - \frac{m_2}{M} \eta, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots; \\ z_0 &= -\lambda z'' - \frac{m_2}{M} \zeta, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{aligned}$$

(avec $\lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$, $\mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1}$).

Les coordonnées des trois corps étant développables pour tous les temps par la méthode de M. Sundman dans les systèmes de coordonnées qu'il emploie (absolues ou de Jacobi), il en est de même pour le système des coordonnées relatives, résultant de combinaisons linéaires des coordonnées précédentes.

Les constantes c_i et K se déduisent du mouvement initial absolu des trois corps. On a

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] - 2 \frac{m_0 m_1 m_2}{M} U = - \frac{m_0 m_1 m_2}{M} K;$$

$$U = \frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2};$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=2} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) &= c_0, \\ \sum_{i=0}^{i=2} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{i=2} m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) &= c_2. \end{aligned} \right.$$

Mais on emploie en Astronomie les vitesses relatives et les coordonnées relatives (c'est-à-dire rapportées au Soleil). Il nous sera utile dès maintenant de pouvoir déterminer ces constantes en partant des vitesses et coordonnées relatives

On a, dans le mouvement relatif ⁽¹⁾, les intégrales des aires :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{m_0} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{m_1} \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) + \frac{1}{m_2} \left(x'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dx''}{dt} \right) &= a_0, \\ \frac{1}{m_0} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{m_1} \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) + \frac{1}{m_2} \left(y'' \frac{dz''}{dt} - z'' \frac{dy''}{dt} \right) &= a_1, \\ \frac{1}{m_0} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + \frac{1}{m_1} \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) + \frac{1}{m_2} \left(z'' \frac{dx''}{dt} - x'' \frac{dz''}{dt} \right) &= a_2, \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Voir TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 1, p. 129-130.

et l'intégrale des forces vives :

$$(5) \quad \frac{1}{m_0} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) + \frac{1}{m_1} \left(\frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} + \frac{dz'^2}{dt^2} \right) + \frac{1}{m_2} \left(\frac{dx''^2}{dt^2} + \frac{dy''^2}{dt^2} + \frac{dz''^2}{dt^2} \right) - 2U = H.$$

3. Nous allons exprimer c_i et K en fonction de a_i et H respectivement. Prenons les expressions (3) et remplaçons x_i, y_i, z_i par leurs valeurs (1). On trouve facilement pour la première équation

$$\sum_{i=0}^{i=2} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{m_0 m_1 m_2}{M} \sum_{i=0}^{i=2} \frac{1}{m_i} \left(x^{i1} \frac{dy^{i1}}{dt} - y^{i1} \frac{dx^{i1}}{dt} \right)$$

$$(x^{01} = x, x^{11} = x', x^{21} = x'', \dots).$$

Par conséquent,

$$(6) \quad c_i = \frac{m_0 m_1 m_2}{M} a_i.$$

Prenons maintenant l'équation des forces vives (2). On trouve sans peine

$$\frac{1}{m_0} \sum \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{m_1} \sum \frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{1}{m_2} \sum \frac{dx''^2}{dt^2} = 2U - K = 2U + H.$$

Par conséquent,

$$(7) \quad K = -H.$$

Ainsi, dès qu'on donne les positions initiales et les vitesses initiales des deux corps par rapport au troisième, on sait déterminer les constantes c_i et K .

Écrivons maintenant les équations du mouvement (avec la variable t), en conservant les coordonnées relatives (1) :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + M \frac{x}{r^3} - m_0 \left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3} \right) = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + M \frac{y}{r^3} - m_0 \left(\frac{y}{r^3} + \frac{y'}{r'^3} + \frac{y''}{r''^3} \right) = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + M \frac{z}{r^3} - m_0 \left(\frac{z}{r^3} + \frac{z'}{r'^3} + \frac{z''}{r''^3} \right) = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 x'}{dt^2} + M \frac{x'}{r'^3} - m_1 \left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^2 x''}{dt^2} + M \frac{x''}{r''^3} - m_2 \left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2;$$

$$x + x' + x'' = 0, \quad y + y' + y'' = 0, \quad z + z' + z'' = 0.$$

II. — Calcul des coefficients des développements suivant les puissances de θ .

4. Ω et l étant déterminées par les conditions initiales, nous avons vu qu'il faut prendre la variable ω liée avec la variable t par la relation

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \text{où } \Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r}{l}} \right) \left(1 - e^{-\frac{r'}{l}} \right) \left(1 - e^{-\frac{r''}{l}} \right)$$

(1) Nous avons pris ces équations en raison de leur parfaite symétrie.

et introduire encore une nouvelle variable θ liée à ω par la relation

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

De cette façon, on remplace t par une variable θ liée à t par la relation

$$dt = \frac{4\Omega}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{r'}{t}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r''}{t}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r'''}{t}}\right) \frac{1}{1-\theta^2} d\theta.$$

Ainsi, on doit transformer les équations (I) en prenant θ pour variable indépendante. En différenciant successivement ces équations on aura, pour l'instant $\theta = 0$,

$$\left(\frac{d^i x}{d\theta^i}\right)_0, \quad \left(\frac{d^i x}{d\theta^i}\right)_0, \quad \dots$$

De cette façon, on aura les développements

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_0 \theta + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2}\right)_0 \theta^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n x}{d\theta^n}\right)_0 \theta^n + \dots,$$

.....

Mais on peut procéder plus simplement. Pour cela nous allons démontrer une proposition générale sur le calcul des coefficients dans la transformation de Poincaré ci-dessus.

5. Supposons qu'on ait un système d'équations différentielles pour lequel on ait démontré l'existence d'intégrales holomorphes dans une bande de largeur 2Ω . Soient ω la variable indépendante et x_i les intégrales cherchées. Alors les développements

$$(\alpha) \quad x_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(\omega - \omega_0) + a_2^{(i)}(\omega - \omega_0)^2 + \dots + a_n^{(i)}(\omega - \omega_0)^n + \dots$$

sont convergents dans un cercle de rayon au moins égal à Ω quel que soit ω_0 , ω_0 étant une quantité réelle ainsi que les coefficients $a_n^{(i)}$, eux-mêmes fonctions de ω_0 .

On sait qu'en prenant une nouvelle variable θ définie par la relation

$$(a) \quad \theta = \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

on réalise la représentation conforme d'une bande de largeur 2Ω sur le cercle de rayon 1. Soient

$$(\beta) \quad x_i = \beta_0^{(i)} + \beta_1^{(i)}\theta + \beta_2^{(i)}\theta^2 + \dots + \beta_n^{(i)}\theta^n + \dots$$

ces développements. Nous allons montrer comment on peut déterminer les coefficients $\beta_n^{(i)}$.

Prenons les développements (α) qui correspondent à $\omega_0 = 0$. On aura les séries

$$(\alpha') \quad x_i = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\omega + \alpha_2^{(i)}\omega^2 + \dots + \alpha_n^{(i)}\omega^n + \dots$$

qui convergent sûrement dans un cercle de rayon Ω , contenu dans la bande 2Ω ci-dessus.

Effectuons la substitution de la série tirée de (a)

$$(a') \quad \omega = \frac{4\Omega}{\pi} \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right)$$

dans la série (α') . En ordonnant suivant les puissances de θ , on a de nouvelles séries

$$(\gamma) \quad x_i = \alpha_0^{(i)} + A_1^{(i)}\theta + A_2^{(i)}\theta^2 + \dots + A_n^{(i)}\theta^n + \dots$$

terme en $\theta^{2\mu+1}$ sera

$$\frac{\alpha_1(2P)}{2P+1} + \alpha_3(2P)^3 l_3 + \alpha_5(2P)^5 l_5 + \dots + \alpha_{2\mu+1}(2P)^{2\mu+1}$$

(l_i étant des constantes numériques), et le coefficient du terme en $\theta^{2\mu}$ sera

$$\alpha_2(2P)^2 l_2 + \alpha_4(2P)^4 l_4 + \alpha_6(2P)^6 l_6 + \dots + \alpha_{2\mu}(2P)^{2\mu}.$$

On peut écrire d'une façon plus générale

$$A_s = \alpha_s(2P)^s + \alpha_{s-2} p_s^{s-2} (2P)^{s-2} + \alpha_{s-4} p_s^{s-4} (2P)^{s-4} + \dots + \alpha_{s-2t} p_s^{s-2t} (2P)^{s-2t} + \dots,$$

où p_s^{s-2t} est le coefficient du terme θ^s dans le développement de

$$\left[\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]^{s-2t}$$

($p_s^s = 1$ et l'on arrête la suite de termes quand $s - 2t$ est égal à 1 ou à 2).

Ainsi dans l'expression des A_s , les coefficients p_s^{s-2t} sont purement numériques et par conséquent *indépendants des* α_i .

Il en résulte que si l'on prend une autre fonction y de ω , holomorphe dans la bande de largeur 2Ω et si l'on y fait la transformation (a) de Poincaré, on a pour les coefficients B_s dans les développements suivant les puissances de θ l'expression suivante :

$$B_s = \beta_s(2P)^s + \beta_{s-2} p_s^{s-2} (2P)^{s-2} + \dots + \beta_{s-2t} p_s^{s-2t} (2P)^{s-2t} + \dots,$$

où les β_s sont les coefficients du développement de y suivant les puissances de ω :

$$y = \beta_0 + \beta_1 \omega + \beta_2 \omega^2 + \dots + \beta_n \omega^n + \dots$$

Ainsi le coefficient B_s se déduit de A_s par le simple remplacement de α_i par β_i et *vice versa*.

7. Prenons pour y la fonction e^ω , sûrement holomorphe dans la bande de largeur 2Ω . En y faisant la transformation

$$\omega = P \log \frac{1+\theta}{1-\theta},$$

on aura

$$y = e^\omega = \left(\frac{1+\theta}{1-\theta} \right)^P = (1+\theta)^P (1-\theta)^{-P}.$$

Mais

$$(1+\theta)^P = 1 + P\theta + \frac{P(P-1)}{1 \cdot 2} \theta^2 + \frac{P(P-1)(P-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta^3 + \dots + \frac{P(P-1)(P-2)\dots(P-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \theta^n + \dots,$$

$$(1-\theta)^{-P} = 1 + P\theta + \frac{P(P+1)}{1 \cdot 2} \theta^2 + \frac{P(P+1)(P+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta^3 + \dots + \frac{P(P+1)(P+2)\dots(P+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \theta^n + \dots$$

En faisant le produit, on trouve que le coefficient du terme en θ^s , c'est-à-dire B_s ,

$$B_s = \frac{P(P+1)(P+2)\dots(P+s-1)}{s!} + \frac{P(P+1)(P+2)\dots(P+s-2)}{(s-1)!} \frac{P}{1} \\ + \frac{P(P+1)(P+2)\dots(P+s-3)}{(s-2)!} \frac{P(P-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{P(P-1)(P-2)\dots(P-s+1)}{s!}.$$

CHAPITRE III.

APPLICATION AU CAS DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE LAGRANGE.

I. — Généralités.

1. Prenons un cas du problème des trois corps où l'on connaisse la solution rigoureuse pour tous les temps. Alors en calculant les constantes l, Ω et en substituant au temps t la variable θ , on obtient *immédiatement* des séries procédant suivant les puissances de θ , qui se confondent avec celles de Sundman.

Nous avons le choix entre une des solutions rectilignes et une des solutions triangulaires du problème des trois corps.

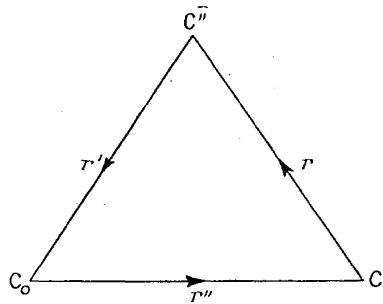


Fig. 2.

Nous prendrons le cas du triangle équilatéral et nous utiliserons le système des coordonnées « relatives », dont nous avons parlé au chapitre précédent.

En choisissant comme unité de distance l'unité astronomique, comme unité de masse la somme des masses Soleil-Terre-Lune, et en prenant la constante de Gauss $k = \sqrt{f} = 1$, on trouve que l'année sidérale est égale à 2π .

Prenons, pour simplifier,

$$m_2 = m_1 \quad \text{et} \quad m_0 + m_1 + m_2 = M = 1.$$

2. Soient, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{2}, & y_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, & z_0 &= 0; & x'_0 &= -\frac{1}{2}, & y'_0 &= +\frac{\sqrt{3}}{2}, & z'_0 &= 0; & x''_0 &= 1, & y''_0 &= 0, & z''_0 &= 0; \\ \frac{dx}{dt_0} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \frac{dy}{dt_0} &= -\frac{1}{2}, & \frac{dz}{dt_0} &= 0; & \frac{dx'}{dt_0} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \frac{dy'}{dt_0} &= -\frac{1}{2}, & \frac{dz'}{dt_0} &= 0; \\ \frac{dx''}{dt_0} &= 0, & \frac{dy''}{dt_0} &= 1, & \frac{dz''}{dt_0} &= 0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous supposons qu'à l'instant initial les trois corps forment un triangle équilatéral, et leurs vitesses initiales sont égales et normales à leurs distances mutuelles correspondantes, car on voit facilement que

$$V_0 = V'_0 = V''_0 = 1, \quad \text{où} \quad V^{(i)} = \sqrt{\left(\frac{dx^{(i)}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy^{(i)}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz^{(i)}}{dt}\right)^2},$$

et

$$x_0^{(i)} \frac{dx^{(i)}}{dt_0} + y_0^{(i)} \frac{dy^{(i)}}{dt_0} + z_0^{(i)} \frac{dz^{(i)}}{dt_0} = r_0^{(i)} \frac{dr^{(i)}}{dt_0} = 0.$$

On a

$$V^2 = \frac{2M}{r} = h,$$

où h est une constante.

On trouve

$$h = 1 \quad \text{pour } M = 1, r_0 = 1, V_0^2 = 1.$$

On sait ⁽¹⁾ que chaque corps décrit, par rapport à chacun des deux autres, une ellipse dont le demi-grand axe $a = \frac{M}{h}$ et l'excentricité e est donnée par la formule

$$a^2(1 - e^2) = \frac{\rho_0^2}{3h},$$

où ρ_0 est une constante déterminée par l'équation

$$V^2 r^2 - \left(r \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{3} \rho_0^2.$$

Nous avons dans notre cas

$$a = 1 \quad \text{et} \quad e = 0.$$

Par conséquent, le triangle reste invariable et chaque corps décrit par rapport à chacun des deux autres un cercle de rayon égal à 1 avec la vitesse 1 et une période de rotation égale à 2π , soit une année sidérale. Les équations du mouvement sont alors

$$\begin{aligned} r &= r' = r'' = 1, \\ x'' &= \cos t, & y'' &= \sin t, & z'' &= 0, \\ x' &= \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right), & y' &= \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right), & z' &= 0, \\ x &= \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right), & y &= \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right), & z &= 0. \end{aligned}$$

II. — Développement en séries.

3. Nous nous proposons maintenant de développer, par la méthode de Sundman, le temps t et les coordonnées x'' , y'' du corps C' en séries valables pour tous les temps et ordonnées suivant les puissances de θ . Dans le cas considéré,

$$\Gamma = \left(1 - e^{-1}\right)^3 \text{ est une constante.}$$

Par conséquent,

$$t = \Gamma \omega \quad \text{et} \quad t = \frac{2\Omega}{\pi} \Gamma \log \frac{1 + \theta}{1 - \theta} = A \log \frac{1 + \theta}{1 - \theta},$$

et les séries cherchées sont :

$$(I) \quad t = 2A \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right),$$

$$(II) \quad x'' = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots = 1 - 2A^2 \theta^2 - \left(\frac{4}{3} A^2 - \frac{2}{3} A^4 \right) \theta^4 - \left(\frac{46}{45} A^2 - \frac{8}{9} A^4 + \frac{4}{45} A^6 \right) \theta^6 - \dots,$$

$$(III) \quad y'' = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots = 2A \theta + \left(\frac{2}{3} A - \frac{4}{3} A^3 \right) \theta^3 + \left(\frac{2}{5} A - \frac{4}{3} A^3 + \frac{4}{15} A^5 \right) \theta^5 \\ + \left(\frac{2A}{7} - \frac{56}{45} A^3 + \frac{4}{9} A^5 - \frac{8}{315} A^7 \right) \theta^7 + \dots$$

4. Pour avoir les coefficients numériques de ces séries, il nous faut calculer la constante $A = \frac{2\Omega\Gamma}{\pi}$. Ainsi nous sommes ramené au calcul des constantes Γ , Ω .

Nous supposons, dans ce qui suit, que m_0 est la plus grande des trois masses. Par conséquent, les masses m_1 et m_2 sont au plus égales à $\frac{1}{3}$.

(1) Voir par exemple TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. 1, p. 128-158.

Dans notre cas,

$$R = R_0 = \sqrt{\frac{I}{m_0} + \frac{I}{m_1} + \frac{I}{m_2}} = \sqrt{\frac{2}{m_1} + \frac{I}{I - 2m_1}}.$$

R étant constant, on peut prendre ⁽¹⁾ L = R. Alors

$$l = \frac{I}{3} \sqrt{2 + \frac{m_1}{I - 2m_1}}.$$

On sait encore que

$$\frac{d^2 R^2}{dt^2} = 2(U - K).$$

Or, $\frac{d^2 R^2}{dt^2} = 0$; par conséquent,

$$K = U = \frac{I}{m_0} + \frac{I}{m_1} + \frac{I}{m_2} = R_0^2 > 0.$$

En écrivant l'intégrale des aires, on a enfin

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{I}{m_0} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + \frac{I}{m_1} \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) + \frac{I}{m_2} \left(x'' \frac{dy''}{dt} - y'' \frac{dx''}{dt} \right) = \frac{I}{m_0} + \frac{I}{m_1} + \frac{I}{m_2} = R_0^2, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons montré que $a_i = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} c_i$. Par conséquent,

$$c_0 = m_1 m_2 + m_0 m_2 + m_1 m_0 = m_1 (2 - 3m_1); \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

5. Ainsi nous avons K, c_0 et l en fonction de m_1 , valeur commune des deux plus petites masses. Cela étant, nous pouvons exprimer G et Ω en fonction de m_1 , G et Ω étant donnés par les formules

$$\begin{aligned} G &= \frac{I}{14x_1} \sqrt{\frac{9c_0^2}{2m_1^2} + \left(775 + \frac{3}{m_1}\right) x_1 \left(\frac{I}{29} + \frac{I}{4m_1} + \frac{x_1}{16} K\right)}, \\ \Omega &= \frac{x_1 \sqrt{3x_1}}{\frac{15}{8m_1} + \frac{3}{2m_1} G^2 x_1 + \frac{9}{2m_1} G \sqrt{x_1} + \frac{3}{4} K x_1 + 224 \sqrt{\frac{16}{m_1} + 3K x_1}}, \end{aligned}$$

où

$$x_1 = \frac{2}{87} \sqrt{m_1} L = \frac{2}{87} \sqrt{2 + \frac{m_1}{I - 2m_1}}.$$

Nous considérerons trois cas :

$$1^0 \quad m_1 = \frac{I}{200}; \quad 2^0 \quad m_1 = \frac{I}{10}; \quad 3^0 \quad m_1 = \frac{I}{3}.$$

En effectuant les calculs numériques pour ces trois cas, on trouve les valeurs correspondantes de G et Ω :

$$\begin{aligned} G_1 &> 98, & G_2 &> 18,8, & G_3 &> 9,5; \\ \Omega_1 &< 9 \times 10^{-8}, & \Omega_2 &< 4 \times 10^{-6}, & \Omega_3 &< 10^{-5} \quad (2), \end{aligned}$$

(1) Voir Chapitre I, page 6.

(2) Nous avons pris pour simplifier $L = R_0$, en tenant compte de ce que L est la limite inférieure de R. Pour nous, R reste constant, mais dans le cas général, on ne sait pas d'avance comment il varie. Il faut alors appliquer les formules du Chapitre I en se basant sur le signe de K.

Ici $K > 0$; il fallait prendre pour L la plus petite des deux quantités

$$\left(\frac{f m_1}{8 + \frac{I}{32} f \sqrt{K}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt} \right)^2 + 2KR_0^2 + f^2}.$$

Comme f est égal à $a_0 = R_0^2$ et $R_0 \frac{dR_0}{dt} = c$, la première expression a pour valeur $\frac{m_1^2 R_0^4}{\left(8 + \frac{I}{32} R_0^2\right)^2}$ et la seconde $\frac{R_0}{3}$. Le minimum

et l'on a définitivement les valeurs suivantes de $A = \frac{2\Omega\Gamma}{\pi}$:

$$A_1 < 4 \times 10^{-8}, \quad A_2 < 2 \times 10^{-6}, \quad A_3 < 4 \times 10^{-6}.$$

III. — Lenteur de convergence de la série (I).

6. Supposons qu'on veuille avoir le temps t et les coordonnées x'' , y'' de C' pour l'époque $t = 1$. (c'est-à-dire au bout de deux mois environ) avec une *seule décimale* exacte, en se servant des séries (I), (II) et (III) en θ . Le nombre de termes qu'il faudra calculer sera un criterium de la convergence des séries considérées.

Nous commençons par la série (I)

$$t = 2A \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right),$$

où nous verrons immédiatement l'influence fâcheuse de la transformation de Poincaré.

Nous avons, en faisant $t = 1$,

$$(I') \quad 1 = 2A \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right),$$

θ étant déterminé par la relation

$$\theta = \frac{e^{\frac{1}{2A}} - 1}{e^{\frac{1}{2A}} + 1} < 1.$$

Il nous faut prendre n assez grand pour que le reste de la série (I') soit plus petit que 0,1, c'est-à-dire que la somme

$$2A \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1} \right)$$

soit plus grande que 0,9. Par conséquent, la somme

$$S_3 = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots + \frac{\theta^{2n-1}}{2n-1}$$

doit être plus grande que $\frac{9}{20A}$.

Pour $A_1 < 4 \times 10^{-8}$,	on trouve.....	$S_{\theta_1} > 10^7$
» $A_2 < 2 \times 10^{-6}$,	»	$S_{\theta_2} > 2 \times 10^5$
» $A_3 < 4 \times 10^{-6}$,	»	$S_{\theta_3} > 10^5$

de $\frac{R_0}{3}$ est égal à 1 et la première expression est toujours plus petite que $8m_1^2$, par conséquent < 1 .

Ainsi il nous fallait prendre

$$L = \frac{m_1^2 R_0^4}{\left(8 + \frac{1}{32} R_0^2\right)^2},$$

et l'on aurait obtenu pour Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 les valeurs beaucoup plus petites que celles indiquées plus haut et résultant de l'hypothèse $L = R_0$. Remarquons encore qu'en prenant $L = R_0$ nous avons procédé comme si K était négatif, car l'expression

$$L = \frac{f^2 R_0}{\left(R_0 \frac{dR_0}{dt}\right)^2 + f^2}$$

prend la valeur R_0 si

$$R_0 \frac{dR_0}{dt} = 0.$$

7. Comparons la somme S_θ à la somme des n premiers termes de la série divergente

$$(\alpha) \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} + \dots,$$

θ étant plus petit que 1, on a

$$\frac{\theta^{2p-1}}{2p-1} < \frac{1}{2p-1}.$$

Par conséquent, S_θ est plus petit que la somme des n premiers termes de la série (α) .

Soient $\sum_1^p \frac{1}{2p-1}$ la somme des p premiers termes de la série (α) et T un nombre donné d'avance. Si $\sum_1^p \frac{1}{2p-1}$ doit être égal à T , il est facile de trouver deux limites (inférieure et supérieure) entre lesquelles se trouve le nombre p .

On sait que, si $\varphi(x)$ est une fonction positive à partir d'une certaine valeur a de x , allant constamment en décroissant et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment, les termes de la série

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \dots + \varphi(a+n) + \dots \quad (n \text{ étant entier})$$

satisfont à la relation

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(a+1) + \dots + \varphi(a+n-1) &> \int_a^{a+n} \varphi(x) dx, \\ \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \dots + \varphi(a+n) &< \int_a^{a+n} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Soit $\varphi(n) = \frac{1}{2n-1}$, alors il en résulte

$$\sum_1^n \frac{1}{2n-1} < 1 + \int_1^n \frac{1}{2x-1} dx = 1 + \frac{1}{2} \log(2n-1)$$

et

$$\sum_1^n \frac{1}{2n-1} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \log(2n+1).$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \log(2p+1) < \sum_1^p \frac{1}{2p-1} < 1 + \frac{1}{2} \log(2p-1).$$

Par conséquent, si l'on fait

$$\sum_1^p \frac{1}{2p-1} = T,$$

T étant un nombre donné d'avance, on trouve

$$(\text{I}) \quad \frac{e^{2T-2} + 1}{2} < p < \frac{e^{2T} - 1}{2}.$$

En faisant $T_1 = 10^7$, $T_2 = 2 \times 10^5$, $T_3 = 10^5$, on trouve respectivement

$$p_1 > 10^{8 \times 10^6}, \quad p_2 > 10^{17 \times 10^4}, \quad p_3 > 10^{8 \times 10^4}.$$

Nous avons désigné par n le nombre de termes qu'il faut prendre dans la série

$$\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots = \frac{1}{2A}$$

pour avoir $S_j > \frac{9}{20A}$. Ce nombre n est sûrement plus grand que le nombre p de termes qu'il faut prendre dans la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

pour avoir la même somme. D'autre part, nous avons pris les T_i plus petits que les $S_{0,i}$, par conséquent *a fortiori* $n > p$.

IV. Lenteur de convergence des séries (II) et (III).

8. Considérons maintenant les séries (II) et (III) :

$$(II) \quad x'' = 1 - 2A^2\theta^2 - \left(\frac{4}{3}A^2 - \frac{2}{3}A^4\right)\theta^4 - \dots = \cos\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right) = \cos t,$$

$$(III) \quad y'' = 2A\theta + \left(\frac{2}{3}A - \frac{4}{3}A^3\right)\theta^3 + \dots = \sin\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right) = \sin t.$$

Pour

$$t = A \log \frac{1+\theta}{1-\theta} = 1, \quad \cos t = 0,5403\dots, \quad \sin t = 0,8414\dots$$

Si l'on veut calculer la somme de la série (II) avec *une seule* décimale exacte pour $t = 1$, il faut prendre dans cette série un nombre de termes tel que leur somme soit plus grande que 0,4 et plus petite que 0,6; de même il faut prendre dans la série (III), pour avoir *une seule décimale* exacte, un nombre de termes tel que leur somme soit plus grande que 0,7 et plus petite que 0,9.

Nous allons déterminer les limites inférieures de ces nombres. Dans ce but, il nous faudra exposer quelques généralités.

9. Considérons la fonction $u = \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^{i\lambda}$ ($i = \sqrt{-1}$) :

$$u = e^{i\lambda \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} = \cos\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right) + i \sin\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right).$$

La fonction u est développable en série de puissances de θ à l'intérieur du cercle de rayon 1. En effet, les deux binômes $(1+\theta)^{i\lambda}$ et $(1+\theta)^{-i\lambda}$ sont développables en série de puissances à l'intérieur du cercle de rayon 1. Et à l'intérieur du cercle ces séries sont absolument convergentes, par conséquent leur produit sera aussi une série de puissances, absolument convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1.

En prenant pour argument de $\log \frac{1+\theta}{1-\theta}$ la détermination qui s'évanouit pour θ réel, on peut présenter le développement de u sous la forme suivante :

$$(2) \quad u = e^{i\lambda \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} = 1 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \dots + b_n\theta^n + \dots$$

Soient, d'autre part,

$$(3) \quad \cos\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right) = 1 + a_2\theta^2 + a_4\theta^4 + \dots + a_{2n}\theta^{2n} + \dots,$$

$$(4) \quad \sin\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right) = a_1\theta + a_3\theta^3 + \dots + a_{2n-1}\theta^{2n-1} + \dots,$$

les développements de $\sin\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$ et $\cos\left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$ à l'intérieur du cercle de rayon 1. Il est évident que les a_n sont réels. En comparant la série (2) avec les séries (3) et (4), on a

$$b_{2p} = a_{2p}, \quad b_{2p-1} = ia_{2p-1}.$$

La fonction $u = e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}}$ est une fonction bornée à l'intérieur du cercle de rayon 1. En effet, on peut considérer la fonction $e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}}$ comme transformée de la fonction $e^{\pm iu}$ par représentation conforme de la bande de largeur $\pi|A|$ sur le cercle de rayon 1. En posant $t = a + bi$, on voit que quand θ reste à l'intérieur du cercle de rayon 1, a varie entre $-\infty$ et $+\infty$ et b varie entre $-\frac{\pi|A|}{2}$ et $+\frac{\pi|A|}{2}$. Par conséquent,

$$\left| e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} \right| = |e^{i(a+bi)}| = e^{-b} < e^{\frac{\pi|A|}{2}}.$$

D'ailleurs, on voit directement, en posant $\log \frac{1+\theta}{1-\theta} = \log \rho + i\psi$ (voir fig. 3), que $\log \rho$ varie entre $-\infty$ et $+\infty$, et ψ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (si l'on prend la détermination de l'argument de \log qui s'annule pour θ réel).

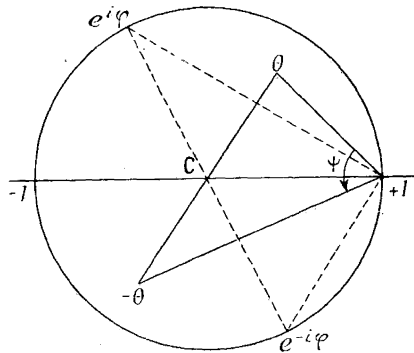


Fig. 3.

Par conséquent,

$$e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} = e^{iA \log \rho - A\psi}, \quad \text{d'où} \quad \left| e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} \right| = e^{-A\psi} < e^{|A| \frac{\pi}{2}}.$$

10. La fonction u étant bornée à l'intérieur du cercle de convergence de rayon 1, la série (2) converge ⁽¹⁾ en chaque point régulier sur le cercle, c'est-à-dire partout, sauf aux points ± 1 .

Il en résulte que les séries (3) et (4) convergent aussi sur le cercle de convergence, sauf aux points ± 1 .

En faisant $\theta = e^{i\varphi}$ on a, avec notre convention sur la détermination de l'argument de \log , pour $\pi > \varphi > 0$ (voir fig. 3),

$$\log \frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = \log \left(i \cot \frac{\varphi}{2} \right) = \log \cot \frac{\varphi}{2} + i \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$(5) \quad \sin \left(A \log \frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right) = \sin \left[A \log \cot \frac{\varphi}{2} + i \frac{A\pi}{2} \right] = \sin \left(A \log \cot \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} + i \cos \left(A \log \cot \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \quad (2);$$

$$(6) \quad \cos \left(A \log \frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right) = \cos \left[A \log \cot \frac{\varphi}{2} + i \frac{A\pi}{2} \right] = \cos \left(A \log \cot \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} - i \sin \left(A \log \cot \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2}.$$

D'autre part, les séries (3) et (4) deviennent, pour $\theta = e^{i\varphi}$:

$$(3') \quad \cos \left(A \log \frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right) = 1 + a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi + \dots + a_{2n} \cos 2n\varphi + \dots \\ + i(a_2 \sin 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + \dots + a_{2n} \sin 2n\varphi + \dots),$$

$$(4') \quad \sin \left(A \log \frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right) = a_1 \cos \varphi + a_3 \cos 3\varphi + \dots + a_{2n-1} \cos(2n-1)\varphi + \dots \\ + i(a_1 \sin \varphi + a_3 \sin 3\varphi + \dots + a_{2n-1} \sin(2n-1)\varphi + \dots).$$

(1) Voir P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (Acta mathematica, t. 30, 1906, p. 364-368).

(2) sh et ch signifient respectivement sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique.

En égalant les parties réelles et imaginaires dans les deux membres de (3') et (4'), on trouve

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} = a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 3\varphi + a_3 \cos 5\varphi + \dots, \\ \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} = a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 3\varphi + a_3 \sin 5\varphi + \dots, \\ \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} = 1 + a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi + a_6 \cos 6\varphi + \dots, \\ -\sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} = a_2 \sin 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + a_6 \sin 6\varphi + \dots \end{array} \right.$$

Ainsi, on a

$$(8) \quad \begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \cos(2n+1)\varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \sin(2n+1)\varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

et, pour $n > 0$,

$$(9) \quad \begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \cos 2n\varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \sin 2n\varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

D'autre part, en différentiant l'équation (2), on a

$$2iA e^{iA \log \frac{1+\theta}{1-\theta}} = (1-\theta^2) (b_1 + 2b_2\theta + \dots + nb_n\theta^{n-1} + \dots),$$

d'où

$$nb_n - (n-2)b_{n-2} = i2Ab_{n-1} \quad \text{avec } b_0 = 1.$$

En revenant aux coefficients a_n , on trouve les relations de récurrence

$$(10) \quad na_n - (n-2)a_{n-2} = (-1)^{n-1} \times 2Aa_{n-1}.$$

De cette façon, les coefficients a_n se calculent de proche en proche, et l'on voit immédiatement que les a_n sont des polynômes de degré n en A contenant les puissances de A de même parité que n .

En écrivant les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 2a_2 = -2Aa_1, & a_1 = 2A, \\ 4a_4 - 2a_2 = -2Aa_3, & 3a_3 - a_1 = 2Aa_2, \\ 6a_6 - 4a_4 = -2Aa_5, & 5a_5 - 3a_3 = 2Aa_4, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 2pa_{2p} - (2p-2)a_{2p-2} = -2Aa_{2p-1}, & (2p+1)a_{2p+1} - (2p-1)a_{2p-1} = 2Aa_{2p}. \end{array}$$

Et en ajoutant les parties gauches et droites de ces relations, on a

$$(11) \quad (2p+1)a_{2p+1} = 2A(1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2p}),$$

$$(12) \quad 2pa_{2p} = -2A(a_1 + a_3 + \dots + a_{2p-1}).$$

11. Les formules obtenues dans le numéro précédent nous serviront pour obtenir les limites supérieures des valeurs

absolues des coefficients a_n . En effet, les relations (8) et (9) nous donnent (1) :

$$(13) \quad a_2 + a_4 + \dots + a_{2p} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) [\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \dots + \sin 2p\varphi] d\varphi$$

$$= -\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin(p+1)\varphi \sin p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi,$$

$$(14) \quad a_1 + a_3 + \dots + a_{2p-1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) [\sin \varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin(2p-1)\varphi] d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \int_0^\pi \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

En remarquant que

$$\int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin(p+1)\varphi \sin p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \sin 2p\varphi d\varphi,$$

on a

$$\left| \int_0^\pi \sin\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin(p+1)\varphi \sin p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi \right| < \int_0^\pi \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

De même

$$\left| \int_0^\pi \cos\left(A \log \cot \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi \right| < \int_0^\pi \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I_p = \int_0^\pi \frac{\sin^2 p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

On a

$$I_p - I_{p-1} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 p\varphi - \sin^2(p-1)\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos 2(p-1)\varphi - \cos 2p\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \int_0^\pi \sin(2p-1)\varphi d\varphi = \left[-\frac{\cos(2p-1)\varphi}{2p-1} \right]_0^\pi = \frac{2}{2p-1}.$$

Par conséquent,

$$I_p = I_{p-1} + \frac{2}{2p-1},$$

$$I_{p-1} = I_{p-2} + \frac{2}{2p-3},$$

.....

$$I_2 = I_1 + \frac{2}{3},$$

$$I_1 = 2$$

$$\left(\text{en remarquant que } I_1 = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2 \right),$$

(1) En se rappelant que

$$\cos a + \cos(a+b) + \dots + \cos(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right) \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}},$$

$$\sin a + \sin(a+b) + \dots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right) \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}}.$$

d'où

$$(15) \quad I_{p-1} = 2 \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right].$$

Ainsi, nous avons pour $A > 0$

$$|a_1 + a_3 + \dots + a_{2p-1}| < \frac{4}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right]$$

et, en tenant compte de la relation (12), on a

$$|a_{2p}| < \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right)}{\pi p} < \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \log(2p-1) \right]}{\pi p}.$$

De même

$$|1 + a_2 + \dots + a_{2p}| < 1 + \frac{4}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left[\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{1}{2} \log(2p-1) \right]$$

et

$$|a_{2p+1}| < \frac{2A}{2p+1} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left[2 + \frac{1}{2} \log(2p-1) \right] \right\}.$$

12. Reprenons la série (II)

$$x = \cos \left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta} \right) = 1 + a_2 \theta^2 + \dots + a_{2n} \theta^{2n} + \dots$$

Nous avons vu qu'il faut prendre dans cette série un nombre de termes suffisant pour que la somme de ces termes soit comprise entre 0,4 et 0,6. Par conséquent, la valeur absolue de la somme

$$a_2 \theta^2 + a_4 \theta^4 + \dots + a_{2n} \theta^{2n}$$

doit être plus grande que $1 - 0,6 = 0,4$.

Comparons la somme $S_n = |a_2 \theta^2 + a_4 \theta^4 + \dots + a_{2n} \theta^{2n}|$ avec la somme \sum_n de n premiers termes de la série divergente (1)

$$(\beta) \quad |a_2| + |a_4| + |a_6| + \dots + |a_{2n}| + \dots$$

Il est évident que $S_n < \sum_n$.

Prenons dans la série (β) p termes où p sera déterminé de telle façon, que \sum_p soit plus grand que 0,4.

Nous avons obtenu que

$$|a_{2p}| < \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2}}{\pi p} \left[1 + \frac{1}{2} \log(2p-1) \right].$$

D'où

$$\sum_p = |a_2| + |a_4| + \dots + |a_{2p}| < \frac{4A}{\pi} \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} \left[\sum_1^p \frac{1}{p} + \sum_1^p \frac{\log(2p-1)}{2p} \right].$$

On a

$$\sum_1^p \frac{1}{p} < 1 + \int_1^p \frac{1}{x} dx = 1 + \log p,$$

$$\sum_1^p \frac{\log(2p-1)}{2p} < \sum_1^p \frac{\log(2p-1)}{2p-1} < \int_1^p \frac{\log(2x-1)}{2x-1} dx = \frac{1}{4} [\log(2p-1)]^2.$$

(1) Si cette série était convergente, la série (II) convergerait *partout* sur le cercle et les points ± 1 ne pourraient être des points singuliers de la fonction $\cos \left(A \log \frac{1+\theta}{1-\theta} \right)$.

Ainsi

$$0,4 < \sum_p < \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2}}{\pi} \left[1 + \log p + \frac{1}{4} \log^2 (2p - 1) \right]$$

$$< \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2}}{\pi} \left[1 + \log 2p + \frac{1}{4} \log^2 2p \right].$$

Si nous prenons p' tel que

$$(16) \quad \frac{4A \operatorname{sh} \frac{A\pi}{2}}{\pi} \left[1 + \log 2p' + \frac{1}{4} \log^2 2p' \right] = 0,4,$$

il est clair qu'il faudra dans \sum_p prendre un nombre de termes plus grand que p' et dans S_n il faudra prendre un nombre de termes plus grand que p et *a fortiori* plus grand que p' .

Nous avons

$$A_1 < 4 \times 10^{-8}, \quad A_2 < 2 \times 10^{-6}, \quad A_3 < 4 \times 10^{-6}.$$

Vu la petitesse de A , on peut prendre dans (16) $\operatorname{sh} \frac{A\pi}{2} = \frac{A\pi}{2}$.

Ainsi l'équation (16) devient

$$\left(\frac{\log^2 2p'}{4} + \log 2p' + 1 \right) 2A^2 = 0,4,$$

d'où

$$\log^2 2p' + 4 \log 2p' = \frac{0,8}{A^2} - 4.$$

Par conséquent,

$$\log 2p' = -2 + \frac{\sqrt{0,8}}{A}.$$

Pour $A_1 < 4 \times 10^{-8}$, on trouve.....	$\log p'_1 > 2 \times 10^7$ et $p'_1 > 10^{8 \times 10^6}$
» $A_2 < 2 \times 10^{-6}$, »	$\log p'_2 > 4 \times 10^3$ et $p'_2 > 10^{17 \times 10^3}$
» $A_3 < 4 \times 10^{-6}$, »	$\log p'_3 > 2 \times 10^3$ et $p'_3 > 10^{8 \times 10^3}$

Ainsi il faudra prendre dans la série (II) pour avoir une seule décimale exacte un nombre de termes qui est plus grand que les nombres p'_1, p'_2, p'_3 .

En procédant de la même façon avec la série (III), on trouve un résultat du même ordre de grandeur.

Nous avons ainsi calculé une limite inférieure du nombre de termes qu'il faut prendre dans les séries (I), (II) et (III) obtenues par la méthode de M. Sundman, pour avoir, dans notre cas particulier, le temps et les coordonnées de la planète C' pour l'époque $t = 1$ avec une seule décimale exacte.

V. — Une comparaison.

13. La *Connaissance des Temps* donne les coordonnées rectilignes du Soleil avec sept décimales. Si l'on veut calculer t, x'', y'' dans notre cas fictif particulier avec une seule décimale exacte par la méthode de M. Sundman, pour l'époque $t = 1$, il faut donc calculer un nombre de termes qui, pour

$$\frac{M}{m_1} = 200, \quad \frac{M}{m_1} = 10, \quad \frac{M}{m_1} = 3,$$

dépasse respectivement les valeurs

$$10^{8000000}, \quad 10^{170000}, \quad 10^{80000}.$$

On voit donc, tout au moins dans le cas particulier que nous avons envisagé, l'extrême lenteur de la convergence des séries en question.

Une image saisissante donnera une idée de cette lenteur. Prenons l'Univers d'Einstein, une hypersphère de rayon égal à 10^{11} années de lumière. Soit une sphère (à trois dimensions) de volume égal numériquement à celui de l'Univers considéré. Supposons qu'on la remplisse d'électrons se touchant mutuellement, de façon à former une masse compacte.

Si l'on prend alors dans la série (III), par exemple, dans le cas le plus favorable où $m_0 = m_1 = m_2$ (c'est-à-dire quand $A = A_3$), un nombre de termes égal à celui des électrons contenus dans la sphère, on n'a même pas une fraction égale à 0,001 de la somme de la série.

Ce résultat tient à l'extrême petitesse de 2Ω , dont la valeur a été calculée dans les trois cas envisagés par les formules de M. Sundman. Remarquons que de ce fait θ est très voisin de 1.

En effet, pour $t = 1$, on a dans nos différents cas :

$$1 > \theta_1 > 1 - \frac{2}{10^{6 \times 10^6}}, \quad 1 > \theta_2 > 1 - \frac{2}{10^{10^6}}, \quad 1 > \theta_3 > 1 - \frac{2}{10^{10^6}};$$

les valeurs de θ sont donc très voisines de 1 et pour $\theta = 1$ les séries sont divergentes.

14. Remarquons encore que de la relation

$$dt = \frac{2A}{1 - \theta^2} d\theta$$

on peut déduire approximativement le nombre de décimales qu'il faut prendre dans le calcul de θ pour avoir t à 0,1 près avec la série (I').

Soient $\Delta\theta$ l'erreur commise sur θ et Δt l'erreur commise sur t .

On a

$$\Delta\theta = \frac{1 - \theta^2}{2A} \Delta t; \quad \text{soient } \Delta t = 0,1, \quad t = 1.$$

En prenant le cas le plus favorable où $m_0 = m_1 = m_2$, on a

$$A_3 \sim 4 \times 10^{-6}, \quad 1 - \theta_3^2 = (1 - \theta_3)(1 + \theta_3) < \frac{4}{10^{10^6}};$$

par conséquent,

$$\Delta\theta \sim \frac{10^6}{10^{10^6}} = \frac{1}{10^{994}}.$$

Ainsi θ doit être calculé avec 10 000 décimales exactes.

VI. — Conditions d'application pratique de la méthode aux solutions de Lagrange.

15. On a vu que la convergence des séries (II) et (III) est ici étroitement liée à celle de la série (I) :

$$t = 2A \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \dots \right),$$

Les séries obtenues par la méthode de M. Sundman donnant le temps et les coordonnées des trois corps pour toutes les époques, cherchons la valeur de A , soit A_0 , qu'il faudrait introduire si l'on voulait calculer le temps avec sept décimales pour l'époque $t = 10^4$ (c'est-à-dire dans 1500 ans, à peu près) en ne prenant que 100 termes dans la série (I).

On a

$$\frac{\theta_0^{201}}{201} + \frac{\theta_0^{203}}{203} + \dots = \frac{10^{-7}}{2A_0}.$$

En posant

$$E = \frac{\theta_0^{201}}{201} + \frac{\theta_0^{203}}{203} + \dots,$$

il vient

$$\frac{\theta_0^{201}}{201} < E_0 < \frac{\theta_0^{201}}{201} \frac{1}{1 - \theta_0^2} \quad \text{et} \quad 2E_0 A_0 = 10^{-7}.$$

Cherchons les limites supérieure et inférieure de θ_0 et partant de A_0 .

Pour simplifier, remplaçons dans nos calculs 201 par 200, ce qui ne changera pas sensiblement les résultats.

16. Si nous prenons A_1 et par conséquent θ_1 tel que

$$\frac{\theta_1^{200}}{200} \frac{1}{1-\theta_1^2} = \frac{10^{-7}}{2A_1},$$

alors

$$E_1 < \frac{10^{-7}}{2A_1}, \quad \text{car } E_1 = \frac{\theta_1^{200}}{200} + \frac{\theta_1^{202}}{202} + \dots$$

et

$$2A_1 E_1 < 10^{-7} = 2A_0 E_0.$$

D'ailleurs

$$A = \frac{t}{\log \frac{1+\theta}{1-\theta}} = \frac{10^4}{\log \frac{1+\theta}{1-\theta}},$$

d'où

$$\frac{\theta_1^{200}}{200} \frac{1}{1-\theta_1^2} = \frac{10^{-11}}{2} \log \frac{1+\theta_1}{1-\theta_1}.$$

En résolvant cette équation par approximations successives, il vient

$$\theta_1 = 0,899 \quad \text{et} \quad A_1 = 3396; \quad 2A_1 E_1 < 10^{-7}.$$

De même, en prenant A_2 tel que

$$\frac{\theta_2^{200}}{200} = \frac{10^{-7}}{2A_2}$$

et en tenant compte que

$$E_2 = \frac{\theta_2^{200}}{200} + \frac{\theta_2^{202}}{202} + \dots > \frac{10^{-7}}{2A_2},$$

on a

$$2A_2 E_2 > 10^{-7} = 2A_0 E_0.$$

En résolvant l'équation

$$\frac{\theta_2^{200}}{200} = \frac{10^{-11}}{2 \log \frac{1+\theta_2}{1-\theta_2}},$$

il vient

$$\theta_2 = 0,906 \quad \text{et} \quad A_2 = 3323; \quad 2A_2 E_2 > 10^{-7}.$$

Il résulte de là que

$$0,899 < \theta_0 < 0,906 \quad \text{et} \quad 3320 < A_0 < 3400.$$

On voit donc, quand on se reporte à la page 20, pour quelles valeurs considérables de A les séries pourraient avoir un intérêt pratique.

Nous sommes bien loin de notre valeur de A qui, dans le cas le plus favorable envisagé par nous (où $\frac{M}{m_1} = 3$), était plus petite que 4×10^{-6} . Cette valeur de A ne présente donc aucune possibilité d'utilisation pratique.

VII. — Remarque générale.

17. Si l'on prend le cas le plus général du problème des trois corps, et si on le traite par la méthode de M. Sundman, on a un développement du temps t , fort analogue à celui que nous avons donné pour la solution périodique de Lagrange.

En effet, on a

$$dt = \Gamma d\omega, \quad \text{où } \Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_2}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_3}{l}}\right) \quad (0 \leq \Gamma < 1),$$

d'où

$$t = \int_0^\omega \Gamma d\omega = \Gamma_1 \omega, \quad \text{où } 0 < \Gamma_1 < 1.$$

Mais

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta};$$

par conséquent,

$$t = \frac{\Gamma_1 \cdot 2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta} = A \log \frac{1+\theta}{1-\theta}$$

(seulement ici A varie avec le temps).

En remarquant que

$$t < \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta} \quad \text{pour } t > 0,$$

on trouve

$$\theta > \frac{e^{\frac{\pi t}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2\Omega}} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{\pi t}{2\Omega}} + 1} \quad \text{et} \quad 1 - \theta < \frac{2}{e^{\frac{\pi t}{2\Omega}} + 1}.$$

Ainsi, pour la même époque t , θ est d'autant plus approché du point singulier 1, que Ω est plus petit. Mais la rapidité de la convergence des séries, donnant le temps et les coordonnées des trois corps, est étroitement liée à la valeur de θ , puisque toutes ces séries sont divergentes pour $\theta = \pm 1$. Plus Ω est grand ⁽¹⁾, plus θ est éloigné pour une même époque de la valeur singulière ± 1 et plus le nombre de termes, qu'il faut calculer pour avoir la même précision, est petit.

(1) Et nous verrons qu'il ne peut guère être que très petit.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DES SÉRIES DANS LE CAS GÉNÉRAL.

I. — Influence de la transformation de Poincaré sur la convergence.

1. Soient

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + \alpha_1^{(i)}\theta + \alpha_2^{(i)}\theta^2 + \dots + \alpha_n^{(i)}\theta^n + \dots, \\ t &= a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_n\theta^n + \dots \end{aligned}$$

les développements des coordonnées x_i et du temps suivant les puissances de θ dans le cas général.

Si 2Ω est la largeur de la bande, où les x_i , considérées comme des fonctions de ω , sont holomorphes, on a, comme nous l'avons vu,

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\theta}{1-\theta}, \quad \theta = \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1}.$$

Donnons (fig. 4) à ω les valeurs $\Omega, 2\Omega, \dots, n\Omega$. Alors

$$\theta_p = \frac{e^{\frac{\pi}{2}p} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}p} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}p} + 1} \quad (1) \quad (p = 1, 2, 3, \dots, n)$$

et les valeurs de θ_p sont indépendantes de celles de Ω . Remarquons que pour $\omega = \Omega$, $\theta \sim 0,655\dots$

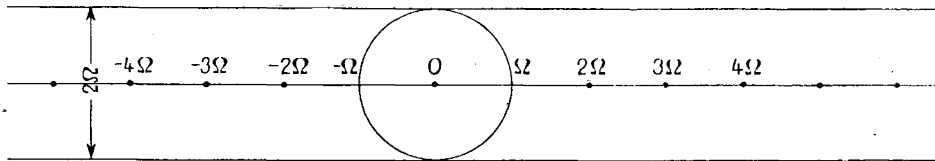


Fig. 4.

Nous savons que les coordonnées et le temps sont développables en séries suivant les puissances de ω et ces séries convergent sûrement dans le cercle de rayon Ω . Par conséquent, la partie utile de la figure, correspondant aux développements des coordonnées et du temps *réel* dans le domaine $(\Omega, +\infty)$, obtenus par la représentation conforme sur le cercle de rayon 1, n'est autre (fig. 5) que le segment AB, quelle que soit la valeur de Ω .

Prenons d'une façon plus générale

$$\omega_n = n\Omega + \beta\Omega \quad \text{où } 0 \leq \beta < 1 \text{ et } n \text{ un nombre entier.}$$

Soit θ_n la valeur correspondante de θ . On a

$$\theta_n = 1 - \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}(n+\beta)} + 1}, \quad \theta_0 = 1 - \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}\beta} + 1}$$

(1) Si nous appelons θ_{-p} la valeur de θ pour $\omega = -p\Omega$, on voit immédiatement que $\theta_{-p} = -\theta_p$. Dans ce chapitre, ce qui nous importe c'est la valeur absolue de θ , nous étudierons donc seulement les valeurs positives de θ .

et

$$\frac{1 - \theta_0}{1 - \theta_n} = \frac{e^{\frac{(n+\beta)\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{\beta\pi}{2}} + 1} = \frac{e^{\frac{n\pi}{2}} + e^{-\frac{\beta\pi}{2}}}{1 + e^{-\frac{\beta\pi}{2}}} > \frac{e^{\frac{n\pi}{2}}}{2} > \frac{(4,8)^n}{2}.$$

D'où

$$1 - \theta_n < \frac{(1 - \theta_0) \times 2}{(4,8)^n} < \frac{2}{(4,8)^n}.$$

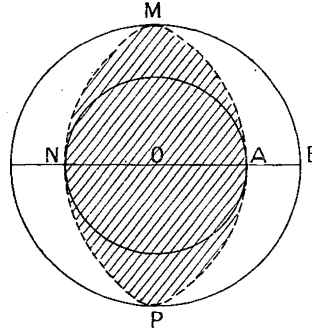


Fig. 5. — La courbe pointillée AMNP est la transformée du cercle de centre O et de rayon Ω de la figure 4,

$$OB = 1, \quad AB = 0,344\dots$$

Ainsi, quand ω se trouve sur le segment $[\overline{n\Omega}, \overline{(n+1)\Omega}]$ (et t étant toujours plus petit que ω), la distance au point singulier du point θ_n (qui correspond au point ω_n) est plus petite que $\frac{2}{(4,8)^n}$.

Considérons maintenant le rapport $\frac{1 - \theta_n}{1 - \theta_{n+1}}$. On trouve

$$\frac{1 - \theta_n}{1 - \theta_{n+1}} = \frac{e^{\frac{(n+1+\beta)\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{(n+\beta)\pi}{2}} + 1} = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{(n+\beta)\pi}{2}} + 1}.$$

On voit très facilement que

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{(n+\beta)\pi}{2}} + 1} < 0,656 \quad \text{si } n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{1 - \theta_n}{1 - \theta_{n+1}} > 4,15,$$

quel que soit β , l'entier n étant > 0 , c'est-à-dire pourvu que ω_n ne se trouve pas à l'intérieur du cercle $O\Omega$ de la figure 4.

[Par conséquent θ_n n'est pas à l'intérieur du segment OA de la figure 5. D'ailleurs

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \theta_n}{1 - \theta_{n+1}} = e^{\frac{\pi}{2}} \quad (n = \infty).]$$

Ainsi, quand ω croît en progression arithmétique de raison Ω , les distances de θ au point singulier $\theta = 1$ diminuent plus rapidement que les termes d'une progression géométrique de raison 4,15.

Il est clair que ω ne peut dépasser une certaine valeur $(n+1)\Omega$ si l'on veut utiliser pratiquement les séries en θ .

2. Considérons la série

$$(1) \quad M(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n + \dots) = M \frac{1}{1 - \theta}$$

(où M est un nombre quelconque) dont le rayon de convergence est égal à 1.

Supposons que pour $\theta = \theta_i$, il faille en calculer K_i termes pour que l'erreur relative ne dépasse pas une certaine limite donnée.

Le reste de la série étant égal à $\frac{M\theta_i^{K_i}}{1-\theta_i}$, cette erreur relative est égale à $\theta_i^{K_i}$.

Soit K_{n+1} le nombre de termes qu'il faut calculer dans la série (1) pour avoir la même précision pour $\theta = \theta_{n+1}$ et $\theta = \theta_n$ (θ_n ayant la même signification que dans le n° 1 du présent Chapitre).

On trouve

$$\theta_{n+1}^{K_{n+1}} = \theta_n^{K_n},$$

d'où

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{\log \theta_n}{\log \theta_{n+1}}.$$

Nous avons trouvé, pour $n > 0$, que $\frac{1-\theta_n}{1-\theta_{n+1}} > 4,15$, par conséquent

$$1 - \theta_{n+1} < \frac{1 - \theta_n}{4,15} \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} > 1 - \frac{1 - \theta_n}{4,15},$$

d'où

$$-\log \theta_{n+1} < \frac{1 - \theta_n}{4,15} + \frac{(1 - \theta_n)^2}{2(4,15)^2} + \dots$$

Or,

$$-\log \theta_n = -\log[1 - (1 - \theta_n)] = 1 - \theta_n + \frac{(1 - \theta_n)^2}{2} + \frac{(1 - \theta_n)^3}{3} + \dots$$

Par conséquent,

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} > 4,15 \times \frac{1 + \frac{1 - \theta_n}{2} + \frac{(1 - \theta_n)^2}{3} + \dots}{1 + \frac{1 - \theta_n}{2 \times 4,15} + \frac{(1 - \theta_n)^2}{3 \times (4,15)^2} + \dots}$$

$$K_{n+1} > 4,15 K_n \quad \text{et} \quad K_{n+1} > (4,15)^n K_1.$$

Ainsi, quand θ varie de θ_n à θ_{n+1} , si l'on veut conserver toujours la même précision, le nombre de termes à calculer augmente plus rapidement qu'une progression géométrique de raison 4,15.

En prenant la série

$$(2) \quad M(1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \theta^4 - \dots) = \frac{M}{1 + \theta},$$

dont le rayon de convergence est aussi égal à 1, mais qui reste bornée pour $\theta > 0$, on conclut que l'erreur absolue est $\pm \frac{\theta^n M}{1 + \theta}$, si l'on a pris les n premiers termes. Et l'erreur relative est égale à $\pm \theta^n$, la valeur absolue de celle-ci étant égale à θ^n . Supposons que pour $\theta = \theta_{n+1}$, on cherche la même précision que pour $\theta = \theta_n$. Alors on retrouve que $\theta_{n+1}^{K_{n+1}} = \theta_n^{K_n}$, et l'on a le même résultat que précédemment, c'est-à-dire

$$K_{n+1} > 4,15 K_n.$$

Celui-ci n'est donc lié qu'à la question de la convergence et non pas à la valeur infinie de la série.

3. Les développements en séries des coordonnées et du temps suivant les puissances de θ sont analogues aux développements (1) ou (2). Le temps, par exemple, augmente toujours avec θ et devient infini pour $\theta = 1$. Les coordonnées des trois corps peuvent être bornées pour un temps très long, comme c'est le cas pour le système solaire. Alors les développements, divergents pour $\theta = 1$, présenteront le caractère des séries (2).

Nous avons montré que le nombre des termes qu'il faut calculer pour conserver toujours la même précision augmente en progression géométrique quand ω augmente en progression arithmétique. C'est ce qui empêche de prendre θ_n trop près de l'unité, quand on veut utiliser les séries de Sundman pratiquement.

En remarquant que si l'on prend dans les séries (1) et (2), θ_1 correspondant à $\omega = \Omega$, on a déjà $\theta_1 = 0,65$, on trouve

$$K_6 > (4,15)^5 K_1 > 1230 K_1.$$

Ainsi, quand ω passe de la valeur $\omega = \Omega$ à $\omega = 6 \Omega$, pour avoir la même précision, si l'on utilise les séries en θ , il faudra calculer au moins 1230 fois plus de termes pour la valeur de $\theta = \theta_6$ que pour la valeur de $\theta = \theta_1 = 0,65\dots$. Or, K_1 est au moins égal à 2.

On ne peut donc pas songer à utiliser pratiquement les séries de M. Sundman si θ dépasse la valeur correspondant à la valeur de $\omega = 6 \Omega$.

D'ailleurs, sans tenir compte du nombre de termes qu'il faut calculer [et qui se déduisait de considérations sur les séries (1) et (2)], étant donné que, pour $\omega = 6 \Omega$,

$$\theta = 1 - \frac{2}{e^{3\pi} + 1} = 0,9998\dots$$

et les séries étant divergentes pour $\theta = 1$, on conçoit sans peine qu'on ne puisse songer à les utiliser pour de telles valeurs de θ .

Nous avons, comme nous l'avons dit, choisi les unités de telle façon que l'année sidérale fût égale à 2π .

On a

$$t = \Gamma_1 \omega < \omega \quad \text{et, si } \omega \leq 2 \pi \Omega, \quad \frac{t}{2 \pi} < \Omega.$$

Puisqu'on ne peut pas prendre $\omega > 6 \Omega$ et a fortiori $\omega \geq 2 \pi \Omega$, les séries de Sundman, du seul fait de la transformation de Poincaré, ne peuvent être utilisées que pour Ω années sidérales au plus [et la valeur de cette limite est encore trop élevée (1)].

II. — Influence de la valeur numérique de Ω .

4. Nous avons vu qu'on ne peut utiliser la méthode de M. Sundman au delà de Ω années sidérales. Il nous reste à montrer quel est l'ordre de grandeur de Ω dans le cas général.

Ω est donnée par la formule

$$\Omega = \frac{x_1 \sqrt{\frac{3x_1}{M}}}{\frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 x_1 + \frac{9}{2m} G \sqrt{M} x_1 + \frac{3}{4} |K| x_1 + 224 \sqrt{16 \frac{M}{m} + 3 |K| x_1}}$$

avec

$$G = \frac{1}{14x_1} \sqrt{\frac{9}{2m^2} (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + \left(775 + \frac{3M}{m}\right) M x_1 \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{x_1}{16} |K|\right)}.$$

Puisque $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 > 0$ et $\frac{M}{m} \geq 3$, on a toujours

$$G > \frac{1}{14x_1} \sqrt{784 \times M x_1 \left(\frac{1}{29} + \frac{3}{4}\right)} > \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{x_1}}, \quad \text{d'où} \quad G \sqrt{x_1} > \sqrt{3M}.$$

(1) Dans le chapitre précédent, nous avons, en effet, trouvé que pour $t = 10^4$, il fallait prendre $A \sim 3400$ et $\theta = 0,9$, si l'on voulait calculer le temps avec sept décimales en prenant 100 termes dans la série. Pour $\theta = 0,9$,

$$\omega = \frac{2,945 \times 2 \Omega}{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{t}{\Omega} < \frac{\omega}{\Omega} = \frac{2,945 \times 2}{\pi} < 2$$

(alors que dans le texte nous avons pris $\frac{t}{\Omega} = 2 \pi$).

Par conséquent, en remplaçant dans Ω , $G\sqrt{x_1}$, par $\sqrt{3M}$, on trouve

$$\begin{aligned} \Omega &< \frac{x_1 \sqrt{\frac{3x_1}{M}}}{\frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{9}{2} \frac{M}{m} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \frac{M}{m} + 224 \times 4 \sqrt{\frac{M}{m}}} \\ &< \frac{x_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{3}}{\sqrt{M} \left(\frac{45}{8} + \frac{27}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2} + 896\sqrt{3} \right)} = \frac{x_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{3}}{\sqrt{M} \times 1594,4} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$x_1 = \frac{2}{87} \sqrt{m} L,$$

où L est la limite inférieure de l'expression

$$R = \sqrt{\frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2}}.$$

Par conséquent,

$$x_1 < \frac{2}{87} \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2} < \frac{2\sqrt{3}}{87} r_m,$$

où r_m est la plus grande des distances mutuelles des trois corps. Ainsi

$$\Omega < \frac{2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{5}{4}} r_m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M} \times 1594,4 \times 87^{\frac{3}{2}}} < \frac{r_m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M} \times 115858}$$

et

$$\boxed{r_m > 2376 M^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}},$$

c'est-à-dire que si l'on veut utiliser les séries de M. Sundman pour Ω années sidérales, il faut que la plus grande des distances mutuelles des trois corps soit supérieure à $2376 M^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}$ unités astronomiques.

5. Pour le système solaire, $M = 1$ à peu près. Plaçons-nous dans les conditions les plus favorables et prenons pour la plus grande des distances mutuelles des trois corps le double de la distance du Pluton au Soleil, c'est-à-dire 80 unités astronomiques. Alors les séries obtenues par la méthode de M. Sundman seront utilisables pour un temps qui est sûrement plus petit que $\frac{80^{\frac{3}{2}}}{115858}$ années sidérales, c'est-à-dire qui n'atteint pas 2,3 jours.

Ainsi les séries ne donneraient même pas le mouvement de Pluton sur un arc de $30''$ de son orbite!

On peut donc affirmer que, pour le système solaire, ces séries sont inutilisables.

III. — Application aux systèmes stellaires.

6. Passons maintenant aux systèmes stellaires, par exemple au cas des étoiles triples. Supposons qu'on veuille prévoir les mouvements des trois étoiles par la méthode de M. Sundman au bout des Ω années sidérales.

Soient P_0, P_1, P_2 (*fig. 6*) les trois étoiles et $P_1P_2 = r_0, P_2P_0 = r_1, P_0P_1 = r_2$. Posons $r_0 > r_1 > r_2$.

Pour étudier le mouvement dans Ω années, il faut que r_0 soit plus grand que $2376 M^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}$ unités astronomiques. Remarquons que $r_1 > \frac{r_0}{2}$.

Prenons des axes de directions fixes. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du P_2 par rapport au centre de gravité G_1 de P_1 et de P_0 , et x, y, z les coordonnées du P_1 par rapport à P_0 .

On a alors les équations (1) du mouvement de P_2 :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu Mx\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)$$

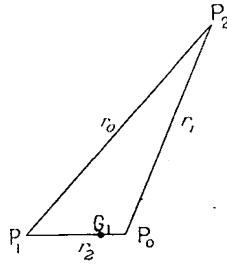


Fig. 6.

et de même pour η et ζ

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (\xi - \mu x)^2 + (\eta - \mu y)^2 + (\zeta - \mu z)^2, \\ r_1^2 &= (\xi + \lambda x)^2 + (\eta + \lambda y)^2 + (\zeta + \lambda z)^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\left(\mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1}\right).$$

On peut écrire

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -M\lambda \frac{\xi - \mu x}{r_0^3} - M\mu \frac{\xi + \lambda x}{r_1^3}, \quad \left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right| \leq M\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right),$$

d'où

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right| < M \frac{\lambda + 4\mu}{r_0^2} < \frac{4M}{r_0^2};$$

de même

$$\left|\frac{d^2\eta}{dt^2}\right| < \frac{4M}{r_0^2}, \quad \left|\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right| < \frac{4M}{r_0^2}.$$

Puisque r_0 doit être plus grand que $2376 M^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}$, on a

$$\left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right| < \frac{4M}{(2376)^2 M^{\frac{2}{3}} \Omega^{\frac{4}{3}}} < 7 \times 10^{-7} \frac{M^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{4}{3}}} = A.$$

On peut écrire

$$\left|\int_0^t \frac{d^2\xi}{dt^2} dt\right| \leq \int_0^t \left|\frac{d^2\xi}{dt^2}\right| dt < \int_0^t A dt = At.$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{d\xi}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0\right| < At$$

et de même pour $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$.

Posons

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = X_0, \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = Y_0, \quad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = Z_0.$$

On a

$$\left|\int_0^t \left(\frac{d\xi}{dt} - X_0\right) dt\right| \leq \int_0^t \left|\frac{d\xi}{dt} - X_0\right| dt < \int_0^t At = \frac{At^2}{2},$$

d'où

$$|\xi - \xi_0 - X_0 t| < \frac{At^2}{2};$$

de même

$$|\eta - \eta_0 - Y_0 t| < \frac{At^2}{2} \quad \text{et} \quad |\zeta - \zeta_0 - Z_0 t| < \frac{At^2}{2},$$

(1) Voir le Mémoire de M. Sundman (*Acta mathematica*, t. 36, 1913, p. 110).

X_0, Y_0, Z_0 étant les composantes de la vitesse du corps P_2 dans son mouvement par rapport au centre de gravité de P_0 et de P_1 , à l'instant initial $t = 0$.

7. Cherchons la signification géométrique des inégalités ci-dessus et pour cela construisons le vecteur dont les projections sont

$$\xi - \xi_0 - X_0 t, \quad \eta - \eta_0 - Y_0 t, \quad \zeta - \zeta_0 - Z_0 t.$$

Soient P_2, P_1 et P_0 (fig. 7) les trois étoiles à l'instant initial $t = 0$. Soient encore P'_2, P'_1, P'_0 leurs positions à l'instant t . Soient G_1 le centre de gravité de P_0 et P_1 à l'instant $t = 0$, et G'_1 sa position à l'instant t , G étant le centre commun de

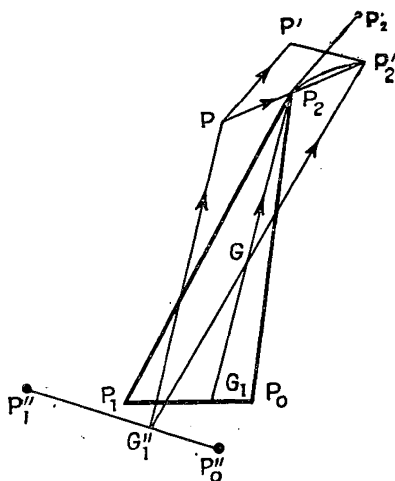


Fig. 7.

gravité des trois corps, supposé fixe. Soit enfin P'_2 la position qu'aurait P_2 à l'instant t , si à partir de l'instant $t = 0$ son mouvement avait été rectiligne et uniforme avec la vitesse ⁽¹⁾ qu'il possédait à l'origine.

Menons

$$\overline{G'_1 P} = \overline{G_1 P_2}, \quad \overline{PP'} = \overline{P_2 P'_2}.$$

Il est clair que P, P_2, P'_2 sont en ligne droite, car

$$\frac{P_2 G}{GG_1} = \frac{P'_2 G}{GG'_1}.$$

Le vecteur $\overline{PP'_2}$ a pour projections $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0$ et le vecteur $\overline{PP'}$ a pour projections $X_0 t, Y_0 t, Z_0 t$. Donc le vecteur $\overline{P'P'_2}$ aura pour projections

$$\xi - \xi_0 - X_0 t, \quad \eta - \eta_0 - Y_0 t, \quad \zeta - \zeta_0 - Z_0 t.$$

Le vecteur $\overline{P'P'_2}$, dont nous appellerons la valeur absolue D , est donc le vecteur déviation dans le mouvement du corps P_2 par rapport au centre de gravité G_1 .

Ainsi

$$D < \frac{At^2}{2} \sqrt{3}.$$

Comme nous voulons déterminer le mouvement dans Ω années, $t = 2 \pi \Omega$ et

$$D < \frac{\sqrt{3} \times 7 \times 10^{-7} \times 4 \pi^2 M^{\frac{4}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}}{2} < 12 \times 10^{-5} \Omega^{\frac{2}{3}} \text{ unités astronomiques.}$$

(1) La vitesse dans le mouvement par rapport au centre de gravité G_1 .

Mais l'unité astronomique est vue de la plus proche étoile sous un angle plus petit que 1" d'arc. Par conséquent, la déviation D sera vue de la Terre sous un angle plus petit que

$$\Omega^{\frac{2}{3}} \times 12 \times 10^{-3} \times 1'' \text{ si l'on prend } (1) \text{ } M < 100.$$

Même au bout de 1000 ans, cet angle ne dépassera pas 0",012.

Ainsi le mouvement de l'étoile P₂ nous apparaîtra comme rigoureusement uniforme et elle ne nous semblera pas différer des autres étoiles du ciel.

8. Étudions maintenant les perturbations que pourrait produire le corps P₂ sur le mouvement relatif de P₁ par rapport à P₀.

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m_0 + m_1}{r_2^3} = -m_2 x \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 \zeta \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) = X,$$

.....

.....

X, Y, Z étant les composantes de la force perturbatrice.

On a

$$|X| \leq m_2 \frac{|\zeta - \mu x|}{r_0^3} + m_2 \frac{|\xi + \lambda x|}{r_1^3} \leq m_2 \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} \right) < \frac{5M}{r_0^2}$$

ou

$$|X| < \frac{5M}{2376^2 M^{\frac{2}{3}} \Omega^{\frac{2}{3}}};$$

de même pour |Y| et |Z|.

En supposant qu'on cherche le mouvement des trois corps dans Ω années sidérales, on a, dès que Ω ≥ 1,

$$|X|, |Y|, |Z| < \frac{5M^{\frac{4}{3}}}{2376^2} < 5 \times 10^{-6},$$

la force agissant sur la Terre dans son mouvement par rapport au Soleil étant égale à 1.

Si l'on prend le mouvement de la Terre troublé par Saturne, on aura les équations du mouvement

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m_0 + m_1}{r^3} = m_2 \left[\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right] = X_s,$$

.....

.....

où x₁, y₁, z₁ sont les coordonnées de Saturne, r₁ sa distance au Soleil et Δ la distance entre la Terre et Saturne.

On peut écrire

$$X_s = \frac{1}{3500} \left[\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right] \text{ et } |X_s| < \frac{1}{3500} \left(\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{r_1^2} \right).$$

Puisque r₁ > 9, Δ > 8, on a

$$|X_s| < \frac{1}{3500} \left(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} \right) \sim 8 \times 10^{-6}.$$

Ainsi les perturbations qui pourraient produire le corps P₂ sur le mouvement relatif de P₀ et P₁ seront toujours plus petites que la limite supérieure des perturbations engendrées par Saturne sur le mouvement de la Terre.

Vu la distance de la Terre aux étoiles, ces perturbations seront donc imperceptibles. Si P₀ et P₁ sont suffisamment voisins, leur mouvement relatif se confondra pour nous avec celui d'un système binaire.

La méthode de M. Sundman n'est donc pas applicable non plus à l'étude des étoiles triples.

(1) On sait que la masse d'un système stellaire triple ne dépasse jamais 100 fois la masse solaire.

CHAPITRE V.

ORIGINE PREMIÈRE DE LA FAIBLESSE DE LA CONVERGENCE DE SÉRIES DE M. SUNDMAN.

1. La lenteur de la convergence des séries envisagées ici résulte de deux causes :

1^o La nature de la transformation (transformation de Poincaré) employée pour convertir les développements suivant la variable ω en séries convergeant pour tous les temps à l'intérieur d'un cercle de rayon \mathbf{r} .

Nous croyons avoir déjà éclairci ce point et n'y reviendrons pas.

2^o La largeur très petite de la bande où les développements suivant la variable ω sont holomorphes.

Nous allons maintenant chercher à élucider les raisons d'étroitesse de la bande d'holomorphie de ω .

I. — Chocs réels et chocs imaginaires.

2. Nous avons vu (Chap. I) que quand les trois distances sont plus grandes que $\mathbf{r} \times$ à l'instant $t = t_0$ les séries développées suivant les puissances de $t - t_0$ sont, comme M. Sundman le démontre, convergentes tant que le module de $t - t_0$ vérifie l'inégalité suivante :

$$|t - t_0| \leq T = \frac{x}{\sqrt{\frac{4M^2}{2Imx} + M|K|}}$$

Il est clair que le domaine de convergence est limité par la nécessité où l'on est d'être assuré qu'il n'y a pas dans la région de points singuliers (points où l'une des distances mutuelles peut s'annuler) *réels* ou *imaginaires*. Quand x devient très petit, le rayon de cercle de convergence devient aussi très petit et le développement en série devient alors illusoire. En introduisant la variable u , donnée par la relation $dt = r du$, on obtient de nouveau la régularisation pour les chocs binaires réels et aussi, comme l'a montré M. Chazy (1), pour les chocs binaires imaginaires.

Mais on ne connaît pas *a priori* les points singuliers. Le cercle de convergence au voisinage d'un choc binaire, où la distance r s'annule, est limité par le fait que la variable u (définie par $dt = r du$) ne régularise pas le choc dans le cas où ce seraient r_1 et r_2 qui s'annuleraient. Et dans la recherche du rayon de cercle de convergence qui nous intéresse, il faut être assuré qu'une semblable éventualité ne peut arriver ni dans le domaine réel, *ni dans le domaine imaginaire*.

3. Remarquons que dans le domaine imaginaire il y a lieu de redouter aussi l'existence de points où les trois distances s'annulent à la fois, sans que leurs projections sur les axes s'annulent. En effet, en mettant les équations différentielles du mouvement sous la forme de Jacobi, on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m_0 + m_1}{r^3} x = m_2 \left[\frac{\xi - \mu x}{r_0^3} - \frac{\xi + \lambda x}{r_1^3} \right],$$

.....;

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -M\lambda \frac{\xi - \mu x}{r_0^3} - M\mu \frac{\xi + \lambda x}{r_1^3},$$

.....;

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_0^2 = (\xi - \mu x)^2 + (\eta - \mu y)^2 + (\zeta - \mu z)^2, \quad r_1^2 = (\xi + \lambda x)^2 + (\eta + \lambda y)^2 + (\zeta + \lambda z)^2.$$

(1) Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps (C. R. Acad. Sc., t. 157, 1913, p. 1398).

En supposant que pour l'instant $t = t_0$, $r_0 = r_1 = r = 0$, sans que les $x, y, z, \xi - \mu x, \dots, \xi + \lambda x, \dots$ soient toutes nulles, on voit que si l'on écrit les séries

$$x = a_0 + a_1(t - t_0)^{\frac{1}{2}} + a_2(t - t_0) + \dots, \quad \dots, \quad \xi = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0)^{\frac{1}{2}} + \alpha_2(t - t_0) + \dots, \quad \dots$$

et

$$r_i = A_1^{(i)}(t - t_0)^{\frac{1}{2}} + A_2^{(i)}(t - t_0) + \dots,$$

les équations différentielles sont satisfaites.

Ainsi, même quand les constantes des aires ne sont pas toutes nulles, un choc triple — nécessairement imaginaire — est possible. D'ailleurs, si l'on se reporte au cas de Lagrange, où les trois masses forment un triangle équilatéral, alors l'existence de points dans le plan de la variable t , où les trois distances s'annulent à la fois, devient évidente, car on sait que dans le mouvement keplérien il existe des chocs imaginaires. Mais, dans le cas général, il faut voir si ces solutions dépendent de 12 constantes, c'est-à-dire si la solution *générale* peut comporter de telles solutions.

Telle est la raison qui fait que, si l'on veut être sûr d'éviter tous les points singuliers, les rayons des cercles de convergence deviennent si petits et avec eux la largeur de la bande où les coordonnées sont holomorphes.

M. Sundman introduit ensuite la fonction symétrique ω , donnée par la relation $dt = \Gamma d\omega$, qui régularise tous les chocs binaires possibles, mais il est facile de voir que cette fonction ne régularise pas les chocs triples. En effet, de la relation

$$dt = r du = \Gamma d\omega,$$

on tire $\frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Gamma}$. Si une seule des distances s'annule, $d\omega$ tend vers une limite finie, mais si toutes les distances s'annulent à la fois, $\frac{d\omega}{du}$ devient infini; par conséquent, ω cesse d'être holomorphe.

II. — Amélioration du nombre Ω .

4. On pourrait songer à la méthode suivante pour obtenir le maximum de la largeur de la bande de convergence de séries en ω , c'est-à-dire le maximum de Ω .

Supposons qu'on ait construit, par la méthode de M. Sundman, les séries

$$(I) \quad x_i = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}\theta + A_2^{(i)}\theta^2 + \dots + A_n^{(i)}\theta^n + \dots,$$

convergentes pour tous les temps.

Nous avons vu dans le Chapitre II que

$$A_n^{(i)} = \left(\frac{4\Omega}{\pi}\right)^n d_n^{(i)} + \left(\frac{4\Omega}{\pi}\right)^{n-2} d_{n-2}^{(i)} + \dots$$

où

$$d_s^{(i)} = \frac{p_s}{s!} \left(\frac{d^s x_i}{d\omega^s}\right)_0,$$

p_s étant des coefficients numériques.

Si l'on connaissait la loi de formation des $\left(\frac{d^n x_i}{d\omega^n}\right)_0$ en fonction de n , on pourrait considérer les expressions $\sqrt[n]{A_n^{(i)}}$, comme des fonctions connues de n . Nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n^{(i)}} = 1.$$

En faisant varier Ω , on reconnaîtra qu'il existe une valeur Ω_1 de cette variable telle que, pour $\Omega > \Omega_1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n^{(i)}} > 1$$

et, pour $\Omega < \Omega_1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n^{(i)}} = 1.$$

(Si $\Omega_1 = \infty$, le mouvement est régulier dans tout le plan de la variable ω . Cette valeur infinie de Ω_1 nous l'obtiendrions *a priori* dans le cas particulier que nous avons considéré au Chapitre III.)

Nous aurons ainsi la largeur maximum de notre bande et l'on saura par là qu'à la distance Ω_1 de l'axe réel dans le plan des ω , il existe un point singulier. Ainsi il y a une différence profonde entre, d'une part, l'intégrale générale en termes finis à laquelle on arrive dans le problème des deux corps et qui permet d'étudier le mouvement dans tout le plan par l'intermédiaire de la variable u ⁽¹⁾ et, d'autre part, l'intégrale obtenue, *grâce au théorème de Cauchy-Picard*, par la méthode de Sundman, qui ne permet l'étude du mouvement que dans une bande seulement.

III. — La transformation de Poincaré.

5. La seconde cause de la lenteur de convergence des séries finales tient à la représentation conforme de la bande ci-dessus sur un cercle, c'est-à-dire à la transformation de Poincaré. Nous en avons étudié les effets au chapitre précédent. Nous avons vu notamment que, si la largeur de la bande est 2Ω , on ne peut pas songer à utiliser pratiquement les séries au delà des valeurs de θ qui correspondent à $\pm 6\Omega$.

Nous ajouterons encore la remarque suivante :

Si l'on prend le problème des deux corps, où les points singuliers sont connus d'avance, on sait que les développements des coordonnées suivant les puissances de $t - t_0$, t_0 étant réel, sont limités par l'existence des chocs imaginaires.

Supposons que le mouvement se fasse suivant un ellipse d'excentricité e et de moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{T}$. Dans ce cas, si l'on développe les coordonnées x, y suivant les puissances de $t - t_0$, le rayon de convergence des séries est égal ⁽²⁾ à

$$R_{t_0} = \sqrt{(t_0 - t_\pi)^2 + \frac{h^2}{n^2}},$$

t_π étant l'époque du passage au périhélie, et

$$|h| = \left| \sqrt{1 - e^2} + \log \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right|.$$

Il résulte de là que les coordonnées sont des fonctions holomorphes de t dans une bande de largeur $\frac{2|h|}{n}$.

Soit T la période de révolution en années sidérales, alors la représentation conforme de la bande sur le cercle de rayon π donnera des séries qui permettent de représenter pratiquement le mouvement dans $T \times h$ années sidérales au plus (2π étant approximativement égal à 6).

Si l'on regarde le mouvement de la Terre comme elliptique ($e = 0,0167$), la méthode de représentation conforme qui, théoriquement, donne des séries convergeant pour tous les temps, donnera en fait des séries qui ne peuvent servir *pratiquement* à étudier le mouvement que pendant *quatre ans au plus* à partir de l'instant initial, alors que les formules habituelles de l'Astronomie en fonction de l'anomalie moyenne sont valables pour tous les temps.

⁽¹⁾ Car l'introduction de cette variable suffit à elle seule à assurer la régularisation, la variable u étant proportionnelle à l'anomalie excentrique dans le problème des deux corps et l'on sait qu'avec cette dernière variable les intégrales en sont régulières.

⁽²⁾ Voir par exemple CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, t. II, 1907, p. 276.

SECONDE PARTIE.
MÉTHODE DE M. LEVI-CIVITA,

INTRODUCTION.

QUELQUES MOTS SUR LA MÉTHODE GÉNÉRALE DE M. LEVI-CIVITA.

M. Levi-Civita régularise les chocs binaires dans le cas général du problème des trois corps par la transformation de M. Sundman $dt = r du$, suivie d'une « transformation de contact », indiquée par lui dans son travail *Sur la régularisation du problème des trois corps* (1). Cette transformation conserve la forme canonique des équations du mouvement et il la définit de la façon suivante :

Soient m_0, m, m' les masses des trois corps P_0, P, P' . En prenant pour variables les coordonnées x, y, z de P et x', y', z' de P' par rapport à P_0 , pris pour origine (les axes de coordonnées ayant des directions fixes). On sait, d'après Poincaré, que si l'on prend comme variables conjuguées p_1, p_2, p_3 et p'_1, p'_2, p'_3 , composantes des quantités du mouvement absolu de P et P' respectivement, les équations du mouvement ont la forme canonique suivante :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x'_i}, \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_i} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, 3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z),$$

où

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m'} \right) (p'_1{}^2 + p'_2{}^2 + p'_3{}^2) + \frac{1}{m_0} (p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3) - f \left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta} \right) = E = \text{const.},$$

r étant la distance PP_0 , $r' = P'P_0$ et $\Delta = PP'$.

Ce système est régulier tant qu'il n'y a pas de choc.

Supposons que P et P_0 se choquent, r tend alors vers zéro et les seconds membres du système (I) cessent d'être holomorphes.

En faisant la transformation $dt = r du$, on a un nouveau système

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, \quad \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \end{array} \right. \quad \text{avec } H' = r(H - E)$$

et $H' = 0$ pour chaque solution de ce système.

(1) *Acta mathematica*, t. 48, 1920.

Mais à l'instant d'un choc, quand $u = u_0$, les p_i deviennent infinis ; le système n'est donc plus régulier. M. Levi-Civita effectue la transformation

$$p_i = \frac{\omega_i}{\omega^2}, \quad x_i = \omega^2 \zeta_i - 2 \omega_i \sum_{i=1}^{i=3} \omega_i \zeta_i, \quad \text{où } \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2;$$

on voit immédiatement que

$$\sum p_i dx_i - \sum \omega_i d\zeta_i = d \left(-2 \sum_{i=1}^{i=3} \omega_i \zeta_i \right).$$

La transformation ci-dessus conserve alors la forme canonique des équations et l'on a le système transformé

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial \zeta_i}, & \frac{d\zeta_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial \omega_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}. \end{cases}$$

En remarquant que

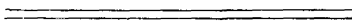
$$r = \omega^2 \xi, \quad r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi, \quad rp_i = \xi \omega_i, \quad \text{où } \xi = +\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

on obtient immédiatement l'expression de H' en fonction des nouvelles variables.

Si l'on développe les équations du système (II), on voit que le système reste holomorphe au voisinage du choc.

On peut adopter aussi les variables canoniques de Jacobi.

Nous allons appliquer ces considérations à l'étude du choc dans un cas particulier.



CHAPITRE I.

CAS D'UN MÉTÉORITE TOMBANT SUR UNE PLANÈTE.

1. Les différents travaux publiés traitent la question des chocs, soit dans le cas général du problème des trois corps, soit dans le problème restreint (2 degrés de liberté). Nous étudierons le cas où deux des corps décrivent des orbites circulaires et où le troisième, de masse négligeable, sans que son mouvement soit nécessairement plan, va se choquer avec l'un des deux autres. Ce cas présente un intérêt particulier, car c'est celui des météorites et des comètes qui peuvent tomber sur la Terre ou sur d'autres planètes, étant donné que l'on peut toujours considérer au voisinage d'un choc le mouvement de la planète comme circulaire.

Pour résoudre ce problème, nous appliquerons la transformation de contact indiquée par Levi-Civita, car dans ce cas les équations du mouvement peuvent être présentées sous la forme canonique de Poincaré.

Soient m_0 et m les masses des deux corps P_0 et P . Nous supposerons $m_0 \geq m$. Choisissons les unités de façon que la somme des masses, la constante de gravitation f et la distance $P_0 P$ soient toutes égales à 1. Alors la vitesse angulaire n sera aussi égale à 1.

Supposons les axes animés d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire $n = 1$. Soit P le corps sur lequel va tomber le météorite M .

Si l'origine des axes est au centre de gravité des deux corps P et P_0 et si l'axe des x est dirigé suivant la direction $\overline{P_0 P}$, l'axe des y dans le plan du mouvement des deux corps P_0, P et de telle façon que le sens de rotation $x \rightarrow y$ coïncide avec le sens de rotation des deux corps, et si l'axe des z est perpendiculaire au plan des deux autres, alors, en appelant x', y', z' les coordonnées de M par rapport à ces axes et p'_x, p'_y, p'_z les composantes de sa vitesse *absolute* suivant ces axes tournants on a :

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p'_x}, & \frac{dp'_x}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x'}, \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p'_y}, & \frac{dp'_y}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y'}, \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p'_z}, & \frac{dp'_z}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial z'} \end{aligned}$$

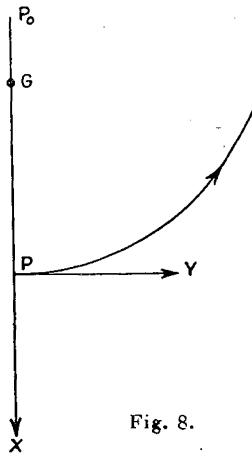


Fig. 8.

et

$$F = \frac{1}{2} (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z) - (x' p'_y - y' p'_x) - U, \quad U = \frac{m_0}{r_0} + \frac{m}{r}; \quad r_0 = MP_0, \quad r = MP.$$

On a l'intégrale $F = C$, où C est la constante de Jacobi.

Transportons l'origine des coordonnées en P . Appelons les nouvelles coordonnées x, y, z et les composantes de la vitesse absolue p_x, p_y, p_z . On a

$$x' = x + m_0, \quad y' = y, \quad z' = z;$$

et nous avons les équations canoniques

$$(A) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

.....,

avec

$$F = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - m_0 p_y - U = C,$$

$$r_0^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Effectuons maintenant les transformations

$$dt = r du, \quad x_i = \omega^2 \xi_i - 2\omega_i \sum \omega_i \xi_i, \quad p_i = \frac{\omega_i}{\omega^2} \quad (i = 1, 2, 3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z).$$

Alors, comme nous l'avons vu précédemment, on a, avec la nouvelle fonction de forces $F' = r(F - C)$, un nouveau système canonique

$$(I) \quad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial F'}{\partial \omega_i}, \quad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial F'}{\partial \xi_i},$$

$$F' = \frac{r}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - m_0 r p_y - (xp_y - yp_x)r - rC - m_0 \frac{r}{r_0} - m.$$

Mais

$$r(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \xi, \quad xp_y - yp_x = \xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1, \quad r = \omega^2 \xi,$$

$$r_0 = \sqrt{1 + r^2 + 2x} = \sqrt{1 + \omega^4 \xi^2 + 2(\omega^2 \xi_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \xi_i)}.$$

Par conséquent,

$$(I) \quad F' = -m + \frac{1}{2}\xi - m_0 \omega_2 \xi - \omega^2 \xi \left[(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) + \frac{m_0}{r_0} + C \right]$$

et, pour chaque solution du système (I), $F' = 0$.

2. Dans ce qui suit, nous allons suivre la méthode donnée par M. Levi-Civita, appliquée ensuite par Bisconcini ⁽¹⁾ à l'étude des conditions du choc binaire dans le problème général des trois corps, méthode reprise par M. Kiveliovitch ⁽²⁾ dans ces dernières années, pour l'étude du même problème avec les variables canoniques ω_i, ξ_i de M. Levi-Civita.

Supposons que le choc ait lieu pour $u = 0$. Alors on peut écrire au voisinage du choc :

$$\omega_i = \Omega_i(u, \xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

par conséquent,

$$\frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial F'}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial u} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial F'}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial F'}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \Omega_i}{\partial \xi_3} \frac{\partial F'}{\partial \omega_3}.$$

Pour l'instant du choc ⁽³⁾, $\omega_i = 0, \xi_i = (\xi_i)_0$. Les $(\xi_i)_0$ ne sont pas tous nuls, car, comme il est facile de le voir, $(\xi)_0 = 2m$.

Supposons que

$$(2) \quad \omega_i = \alpha_1^{(i)} u + \alpha_2^{(i)} u^2 + \dots + \alpha_n^{(i)} u^n + \dots,$$

où les $\alpha_n^{(i)}$ sont des fonctions des ξ_i . On aura pour déterminer les coefficients $\alpha_n^{(i)}$ les équations suivantes :

$$(3) \quad -\frac{\partial F'}{\partial \xi_i} = \alpha_1^{(i)} + 2\alpha_2^{(i)} u + 3\alpha_3^{(i)} u^2 + \dots + n\alpha_n^{(i)} u^{n-1} + \dots$$

$$+ u \sum \frac{\partial \alpha_1^{(i)}}{\partial \xi_i} \frac{\partial F'}{\partial \omega_i} + u^2 \sum \frac{\partial \alpha_2^{(i)}}{\partial \xi_i} \frac{\partial F'}{\partial \omega_i} + \dots + u^n \sum \frac{\partial \alpha_n^{(i)}}{\partial \xi_i} \frac{\partial F'}{\partial \omega_i} + \dots$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, page 2.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, page 3.

⁽³⁾ Il est bien entendu que dans le présent chapitre le choc est réel.

En développant $\frac{\partial F'}{\partial \xi_i}$ suivant les puissances de ω_i , en remplaçant ω_i par leurs expressions (2) et en égalant dans les deux membres de l'équation (3) les coefficients des mêmes puissances de u , on trouvera successivement $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}, \dots$

Écrivons F' sous la forme suivante :

$$F' = -m + \frac{I}{2} \xi - m_0 \omega_2 \xi - \omega^2 \xi [(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) + C] - \frac{m_0 \omega^2 \xi}{\sqrt{I + r^2 + 2x}}$$

Au voisinage du choc, r et x sont très petits; on peut donc développer l'expression $\frac{I}{\sqrt{I + r^2 + 2x}}$. On a ainsi

$$(4) \quad \frac{I}{\sqrt{I + r^2 + 2x}} = I - \frac{I}{2}(r^2 + 2x) + \frac{3}{8}(r^2 + 2x)^2 - \frac{5}{16}(r^2 + 2x)^3 + \dots$$

Puisque $r = \omega^2 \xi$ et $x = \omega^2 \xi_1 - 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i$, on voit que si ω est infiniment petit du premier ordre par rapport à u r et x seront infiniment petits du second ordre. En ordonnant les termes du développement (4) suivant leur ordre de petitesse et en appelant S l'ensemble de termes infiniment petits, on a, en se bornant aux termes du sixième ordre,

$$\frac{I}{\sqrt{I + r^2 + 2x}} = I + S, \quad S = -x - \frac{I}{2} r^2 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3xr^2}{2} - \frac{5}{2} x^3 + \dots,$$

ou, en remplaçant x et r par leurs expressions,

$$(5) \quad S = -\omega^2 \xi_1 + 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i - \frac{I}{2} \omega^4 \xi^2 + \frac{3}{2} \left(\omega^2 \xi_1 - 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i \right)^2 + \frac{3}{2} \omega^4 \xi^2 \left(\omega^2 \xi_1 - 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i \right) - \frac{5}{2} \left(\omega^2 \xi_1 - 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i \right)^3 + \dots$$

Ainsi on peut écrire au voisinage du choc :

$$(6) \quad F' = -m + \frac{I}{2} \xi - m_0 \omega_2 \xi - \omega^2 \xi [(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) + c'] - m_0 \omega^2 \xi S,$$

où l'on a posé

$$c' = C + m_c.$$

3. Avant d'aller plus loin, nous établirons quelques développements qui nous seront bientôt utiles.

Soient

$$\omega_1 = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \dots + \alpha_n u^n + \dots,$$

$$\omega_2 = \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \dots,$$

$$\omega_3 = \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \dots$$

Alors, en posant

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \dots + A_n u^n + \dots,$$

on a

$$(7) \quad A_2 = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \alpha_1^2, \quad A_3 = \sum 2 \alpha_1 \alpha_2, \quad A_4 = \sum (\alpha_2^2 + 2 \alpha_1 \alpha_3), \quad A_5 = \sum 2 (\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3), \quad \dots$$

En posant

$$\omega_1 \sum \omega_i \xi_i = B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + B_5 u^5 + B_6 u^6 + \dots,$$

on trouve

$$(8) \quad B_2 = \alpha_1 \sum \alpha_1 \xi_1, \quad B_3 = \alpha_1 \sum \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2 \sum \alpha_1 \xi_1, \quad B_4 = \alpha_1 \sum \alpha_3 \xi_1 + \alpha_2 \sum \alpha_2 \xi_1 + \alpha_3 \sum \alpha_1 \xi_1,$$

où

$$\sum \alpha_n \xi_1 = \alpha_n \xi_1 + \beta_n \xi_2 + \gamma_n \xi_3.$$

En posant

$$x = B'_2 u^2 + B'_3 u^3 + B'_4 u^4 + \dots,$$

on trouve

$$(9) \quad B'_2 = A_2 \xi_1 - 2B_2, \quad B'_3 = A_3 \xi_1 - 2B_3, \quad \dots, \quad B'_n = A_n \xi_1 - 2B_n.$$

Par conséquent, en posant

$$S = L_2 u^2 + L_3 u^3 + L_4 u^4 + \dots,$$

on trouve

$$(10) \quad L_2 = -B'_2, \quad L_3 = -B'_3, \quad L_4 = -B'_4 - \frac{1}{2}A_2^2 \zeta^2 + \frac{3}{2}B_2'^2, \quad \dots$$

Développons maintenant les équations (I) du mouvement :

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{du} &= -\frac{\partial F'}{\partial \zeta_1} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_1}{\zeta} + m_0 \omega_2 \frac{\zeta_1}{\zeta} + \omega^2 \frac{\zeta_1}{\zeta} [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] + \omega^2 \zeta \omega_2 + m_0 \omega^2 \frac{\zeta_1}{\zeta} S + m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta_1}, \\ \frac{d\omega_2}{du} &= -\frac{\partial F'}{\partial \zeta_2} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_2}{\zeta} + m_0 \omega_2 \frac{\zeta_2}{\zeta} + \omega^2 \frac{\zeta_2}{\zeta} [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] - \omega^2 \zeta \omega_1 + m_0 \omega^2 \frac{\zeta_2}{\zeta} S + m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta_2}, \\ \frac{d\omega_3}{du} &= -\frac{\partial F'}{\partial \zeta_3} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_3}{\zeta} + m_0 \omega_2 \frac{\zeta_3}{\zeta} + \omega^2 \frac{\zeta_3}{\zeta} [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] + m_0 \omega^2 \frac{\zeta_3}{\zeta} S + m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta_3}; \\ \frac{d\zeta_1}{du} &= \frac{\partial F'}{\partial \omega_1} = -2\omega_1 \zeta [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] + \omega^2 \zeta \zeta_2 - 2m_0 \omega_1 \zeta S - m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \omega_1}, \\ \frac{d\zeta_2}{du} &= \frac{\partial F'}{\partial \omega_2} = -m_0 \zeta - 2\omega_2 \zeta [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] - \omega^2 \zeta \zeta_1 - 2m_0 \omega_2 \zeta S - m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \omega_2}, \\ \frac{d\zeta_3}{du} &= \frac{\partial F'}{\partial \omega_3} = -2\omega_3 \zeta [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] - 2m_0 \omega_3 \zeta S - m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \omega_3} \end{aligned} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \omega_1} &= 2 \sum \omega_i \zeta_i - 2\zeta^2 \omega_1 \omega^2 - 6 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) \sum \omega_i \zeta_i + 5 \quad (1), \\ \frac{\partial S}{\partial \omega_2} &= -2(\omega_2 \zeta_1 - \omega_1 \zeta_2) - 2\omega^2 \omega_2 \zeta^2 + 6 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) (\omega_2 \zeta_1 - \omega_1 \zeta_2) + 5, \\ \frac{\partial S}{\partial \omega_3} &= -2(\omega_3 \zeta_1 - \omega_1 \zeta_3) - 2\omega^2 \omega_3 \zeta^2 + 6 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) (\omega_3 \zeta_1 - \omega_1 \zeta_3) + 5; \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta_1} &= -(\omega^2 - 2\omega_1^2) - \omega^4 \zeta_1 + 3 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) (\omega^2 - 2\omega_1^2) + 6, \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta_2} &= 2\omega_1 \omega_2 - \omega^4 \zeta_2 - 6 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) \omega_1 \omega_2 + 6, \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta_3} &= 2\omega_1 \omega_3 - \omega^4 \zeta_3 - 6 \left(\omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i \right) \omega_1 \omega_3 + 6. \end{aligned}$$

4. En reprenant l'une des équations (3), on peut écrire

$$(II) \quad \frac{d\omega_1}{du} = -\frac{\partial F'}{\partial \zeta_1} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_1}{\zeta} + m_0 \omega_2 \frac{\zeta_1}{\zeta} + \omega^2 \frac{\zeta_1}{\zeta} [\zeta_1 \omega_2 - \zeta_2 \omega_1 + c'] + \omega^2 \zeta \omega_2 + m_0 \omega^2 \frac{\zeta_1}{\zeta} S + m_0 \omega^2 \zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta_1} \\ = \alpha_1 + u \left[2\alpha_2 + \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial \zeta_i} \frac{d\zeta_i}{du} \right] + u^2 \left[3\alpha_3 + \sum \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_i} \frac{d\zeta_i}{du} \right] + \dots + u^{n-1} \left[n\alpha_n + \sum \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \zeta_i} \frac{d\zeta_i}{du} \right] + \dots$$

Et de même pour les autres équations.

En substituant, comme nous l'avons dit, dans les deux membres de cette relation, les développements de

$$\omega_1 = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_n u^n + \dots, \quad \omega_2 = \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \dots, \quad \omega_3 = \dots$$

et en égalant les termes contenant les mêmes puissances de u dans les deux membres, on a ainsi de proche en proche les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

En développant le membre gauche $\left(-\frac{\partial F'}{\partial \zeta_i} \right)$ jusqu'aux termes en u^5 , nous pourrions calculer les α_i , jusqu'à α_7 inclus.

Nous aurons aussi besoin du développement de $\frac{d\zeta_i}{du} = \frac{\partial F'}{\partial \omega_i}$; mais, comme on le voit jusqu'au terme en u^5 seulement, si l'on se borne au calcul de $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$.

En effectuant les substitutions et en ordonnant suivant les puissances de u , on trouve en définitive :

(1) Le chiffre 5 signifie que les termes non écrits sont du 5^e ordre par rapport à u .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F'}{\partial \xi_1} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_1}{\xi} + u \left(m_0 \beta_1 \frac{\xi_1}{\xi} \right) + u^2 \left(m_0 \beta_2 \frac{\xi_1}{\xi} + c' A_2 \frac{\xi_1}{\xi} \right) + u^3 \left(m_0 \frac{\xi_1}{\xi} \beta_3 + \frac{\xi_1}{\xi} c' A_3 + \frac{\xi_1^2}{\xi} A_2 \beta_1 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi} A_2 \alpha_1 + \xi A_2 \beta_1 \right) \\
 &+ u^4 \left[m_0 \frac{\xi_1}{\xi} \beta_4 + \frac{\xi_1}{\xi} c' A_4 + \frac{\xi_1^2}{\xi} (A_2 \beta_2 + A_3 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_1) + \xi (A_2 \beta_2 + A_3 \beta_1) + m_0 \frac{\xi_1}{\xi} A_2 L_2 + m_0 \xi A_2 (-A_2 + 2\alpha_1^2) \right] \\
 &+ u^5 \left[m_0 \frac{\xi_1}{\xi} \beta_5 + \frac{\xi_1}{\xi} c' A_5 + \frac{\xi_1^2}{\xi} (A_2 \beta_3 + A_3 \beta_2 + A_4 \beta_1) - \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_3 + A_3 \alpha_2 + A_4 \alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. + \xi (A_2 \beta_3 + A_3 \beta_2 + A_4 \beta_1) + m_0 \frac{\xi_1}{\xi} (A_2 L_3 + A_3 L_2) + m_0 \xi \{ A_2 (-A_3 + 4\alpha_1 \alpha_2) + A_3 (-A_2 + 2\alpha_1^2) \} \right] \\
 &+ u^6 \left[m_0 \frac{\xi_1}{\xi} \beta_6 + \frac{\xi_1}{\xi} c' A_6 + \frac{\xi_1^2}{\xi} (A_2 \beta_4 + A_3 \beta_3 + A_4 \beta_2 + A_5 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_4 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_2 + A_5 \alpha_1) + \xi (A_2 \beta_4 + A_3 \beta_3 + A_4 \beta_2 + A_5 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \frac{\xi_1}{\xi} (A_2 L_4 + A_3 L_3 + A_4 L_2) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \xi \{ A_2 [-A_4 + 2(\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3) - \xi_1 A_2^2 + 3B_2' (A_2 - 2\alpha_1^2)] \right. \\
 &\quad \left. + A_3 (-A_3 + 4\alpha_1 \alpha_2) + A_4 (-A_2 + 2\alpha_1^2) \} \right] + 7; \\
 \\
 \frac{\partial F'}{\partial \xi_2} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_2}{\xi} + u \left(m_0 \beta_1 \frac{\xi_2}{\xi} \right) + u^2 \left(m_0 \beta_2 \frac{\xi_2}{\xi} + c' A_2 \frac{\xi_2}{\xi} \right) + u^3 \left(m_0 \frac{\xi_2}{\xi} \beta_3 + c' \frac{\xi_2}{\xi} A_3 + \frac{\xi_2 \xi_1}{\xi} A_2 \beta_1 - \frac{\xi_2 \xi_2}{\xi} A_2 \alpha_1 - \xi A_2 \alpha_1 \right) \\
 &+ u^4 \left[m_0 \frac{\xi_2}{\xi} \beta_4 + \frac{\xi_2}{\xi} c' A_4 + \frac{\xi_2 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_2 + A_3 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi_2 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_1) - \xi (A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_1) + m_0 \frac{\xi_2}{\xi} A_2 L_2 + 2m_0 \xi A_2 \alpha_1 \beta_1 \right] \\
 &+ u^5 \left[m_0 \frac{\xi_2}{\xi} \beta_5 + \frac{\xi_2}{\xi} c' A_5 + \frac{\xi_2 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_3 + A_3 \beta_2 + A_4 \beta_1) - \frac{\xi_2 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_3 + A_3 \alpha_2 + A_4 \alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. - \xi (A_2 \alpha_3 + A_3 \alpha_2 + A_4 \alpha_1) + m_0 \frac{\xi_2}{\xi} (A_2 L_3 + A_3 L_2) + 2m_0 \xi \{ A_2 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + A_3 \alpha_1 \beta_1 \} \right] \\
 &+ u^6 \left[m_0 \frac{\xi_2}{\xi} \beta_6 + \frac{\xi_2}{\xi} c' A_6 + \frac{\xi_2 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_4 + A_3 \beta_3 + A_4 \beta_2 + A_5 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi_2 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_4 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_2 + A_5 \alpha_1) - \xi (A_2 \alpha_4 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_2 + A_5 \alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \frac{\xi_2}{\xi} (A_2 L_4 + A_3 L_3 + A_4 L_2) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \xi \{ A_2 (2\alpha_1 \beta_3 + 2\alpha_2 \beta_2 + 2\alpha_3 \beta_1 - \xi_2 A_2^2 - 6B_2' \alpha_1 \beta_1) + 2A_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + 2A_4 \alpha_1 \beta_1 \} \right] + 7; \\
 \\
 \frac{\partial F'}{\partial \xi_3} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_3}{\xi} + u \left(\beta_1 m_0 \frac{\xi_3}{\xi} \right) + u^2 \left(m_0 \beta_2 \frac{\xi_3}{\xi} + c' A_2 \frac{\xi_3}{\xi} \right) + u^3 \left(m_0 \frac{\xi_3}{\xi} \beta_3 + c' A_3 \frac{\xi_3}{\xi} + \frac{\xi_3 \xi_1}{\xi} A_2 \beta_1 - \frac{\xi_3 \xi_2}{\xi} A_2 \alpha_1 \right) \\
 &+ u^4 \left[m_0 \beta_4 \frac{\xi_3}{\xi} + c' A_4 \frac{\xi_3}{\xi} + \frac{\xi_3 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_2 + A_3 \beta_1) - \frac{\xi_3 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_1) + m_0 \frac{\xi_3}{\xi} A_2 L_2 + 2m_0 \xi A_2 \alpha_1 \gamma_1 \right] \\
 &+ u^5 \left[m_0 \frac{\xi_3}{\xi} \beta_5 + \frac{\xi_3}{\xi} c' A_5 + \frac{\xi_3 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_3 + A_3 \beta_2 + A_4 \beta_1) - \frac{\xi_3 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_3 + A_3 \alpha_2 + A_4 \alpha_1) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \frac{\xi_3}{\xi} (A_2 L_3 + A_3 L_2) + 2m_0 \xi \{ A_2 (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) + A_3 \alpha_1 \gamma_1 \} \right] \\
 &+ u^6 \left[m_0 \frac{\xi_3}{\xi} \beta_6 + \frac{\xi_3}{\xi} c' A_6 + \frac{\xi_3 \xi_1}{\xi} (A_2 \beta_4 + A_3 \beta_3 + A_4 \beta_2 + A_5 \beta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\xi_3 \xi_2}{\xi} (A_2 \alpha_4 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_2 + A_5 \alpha_1) + m_0 \frac{\xi_3}{\xi} (A_2 L_4 + A_3 L_3 + A_4 L_2) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 \xi \{ A_2 (2\alpha_1 \gamma_3 + 2\alpha_2 \gamma_2 + 2\alpha_3 \gamma_1 - \xi_3 A_2^2 - 6B_2' \alpha_1 \gamma_1) + 2A_3 (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1) + 2A_4 \alpha_1 \gamma_1 \} \right] + 7 \quad (1).
 \end{aligned}$$

(1) Nous désignons toujours par un chiffre gras l'ordre des termes non écrits.

5. Ainsi nous avons développé la partie gauche des équations (II). Il nous reste à développer dans les membres de droite les coefficients des diverses puissances de u . Dans chaque coefficient, il y a les $\frac{d\zeta_i}{du} = \frac{\partial F'}{\partial \omega_i}$. En effectuant les développements, on trouve

$$(I3) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{du} &= u(-2\zeta_1' \alpha_1) + u^2(-2\zeta_1' \alpha_2 - 2\zeta_1 \zeta_1' \alpha_1 \beta_1 + 2\zeta_2 \zeta_1' \alpha_1^2 + \zeta_2 \alpha_2) \\ &+ u^3[-2\zeta_1' \alpha_3 - 2\zeta_1 \zeta_1' (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + 4\zeta_2 \zeta_1' \alpha_1 \alpha_2 + \zeta_2 \alpha_3 - 2m_0 \zeta_1 \alpha_1 L_2 - 2m_0 \zeta_2 \alpha_2 \Sigma \alpha_1 \zeta_1] \\ &+ u^4[-2\zeta_1' \alpha_4 - 2\zeta_1 \zeta_1' (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_1) + 2\zeta_2 \zeta_1' (\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3) \\ &\quad + \zeta_2 \alpha_4 - 2m_0 \zeta_1 (\alpha_1 L_3 + \alpha_2 L_2) - m_0 \zeta_2 (2\alpha_2 \Sigma \alpha_2 \zeta_1 + 2\alpha_3 \Sigma \alpha_1 \zeta_1)] \\ &+ u^5[-2\zeta_1' \alpha_5 - 2\zeta_1 \zeta_1' (\alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1) + 4\zeta_2 \zeta_1' (\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3) + \zeta_2 \alpha_5 - 2m_0 \zeta_1 (\alpha_1 L_4 + \alpha_2 L_3 + \alpha_3 L_2) \\ &\quad - m_0 \zeta_2 \{ A_2 (2 \Sigma \alpha_3 \zeta_1 - 2 \zeta_2^2 A_2 \alpha_1 - 6B_2' \Sigma \alpha_1 \zeta_1) + 2A_3 \Sigma \alpha_2 \zeta_1 + 2A_4 \Sigma \alpha_1 \zeta_1 \}] + 6; \\ \frac{d\zeta_2}{du} &= -m_0 \zeta_1 + u(-2\zeta_2' \beta_1) + u^2(-2\zeta_2' \beta_2 - 2\zeta_1 \zeta_2' \beta_1^2 + 2\zeta_2 \zeta_2' \alpha_1 \beta_1 - \zeta_2 \alpha_2) \\ &+ u^3[-2\zeta_2' \beta_3 - 4\zeta_1 \zeta_2' \beta_1 \beta_2 + 2\zeta_2 \zeta_2' (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - \zeta_2 \alpha_3 - 2m_0 \zeta_1 \beta_1 L_2 + 2m_0 \zeta_2 A_2 (\zeta_1 \beta_1 - \zeta_2 \alpha_1)] \\ &+ u^4[-2\zeta_2' \beta_4 - 2\zeta_1 \zeta_2' (\beta_2^2 + 2\beta_1 \beta_3) + 2\zeta_2 \zeta_2' (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_1) \\ &\quad - \zeta_2 \alpha_4 - 2m_0 \zeta_1 (\beta_1 L_3 + \beta_2 L_2) + 2m_0 \zeta_2 \{ A_2 (\zeta_1 \beta_2 - \zeta_2 \alpha_2) + A_3 (\zeta_1 \beta_1 - \zeta_2 \alpha_1) \}] \\ &+ u^5[-2\zeta_2' \beta_5 - 4\zeta_1 \zeta_2' (\beta_1 \beta_4 + \beta_2 \beta_3) + 2\zeta_2 \zeta_2' (\alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1) \\ &\quad - \zeta_2 \alpha_5 - 2m_0 \zeta_1 (\beta_1 L_4 + \beta_2 L_3 + \beta_3 L_2) \\ &\quad + 2m_0 \zeta_2 \{ A_2 [(\zeta_1 \beta_3 - \zeta_2 \alpha_3) + \zeta_2^2 A_2 \beta_1 - 3B_2' (\beta_1 \zeta_1 - \alpha_1 \zeta_2)] + A_3 (\zeta_1 \beta_2 - \zeta_2 \alpha_2) + A_4 (\zeta_1 \beta_1 - \zeta_2 \alpha_1) \}] + 6; \\ \frac{d\zeta_3}{du} &= u(-2\zeta_3' \gamma_1) + u^2(-2\zeta_3' \gamma_2 - 2\zeta_1 \zeta_3' \gamma_1 \beta_1 + 2\zeta_2 \zeta_3' \gamma_1 \alpha_1) \\ &+ u^3[-2\zeta_3' \gamma_3 - 2\zeta_1 \zeta_3' (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) + 2\zeta_2 \zeta_3' (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) - 2m_0 \zeta_1 \gamma_1 L_2 + 2m_0 \zeta_2 A_2 (\zeta_1 \gamma_1 - \zeta_3 \alpha_1)] \\ &+ u^4[-2\zeta_3' \gamma_4 - 2\zeta_1 \zeta_3' (\gamma_1 \beta_3 + \gamma_2 \beta_2 + \gamma_3 \beta_1) + 2\zeta_2 \zeta_3' (\gamma_1 \alpha_3 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_1) \\ &\quad - 2m_0 \zeta_1 (\gamma_1 L_3 + \gamma_2 L_2) + 2m_0 \zeta_2 \{ A_2 (\zeta_1 \gamma_2 - \zeta_3 \alpha_2) + A_3 (\zeta_1 \gamma_1 - \zeta_3 \alpha_1) \}] \\ &+ u^5[-2\zeta_3' \gamma_5 - 2\zeta_1 \zeta_3' (\gamma_1 \beta_4 + \gamma_2 \beta_3 + \gamma_3 \beta_2 + \gamma_4 \beta_1) + 2\zeta_2 \zeta_3' (\gamma_1 \alpha_4 + \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \alpha_2 + \gamma_4 \alpha_1) \\ &\quad - 2m_0 \zeta_1 (\gamma_1 L_4 + \gamma_2 L_3 + \gamma_3 L_2) \\ &\quad + 2m_0 \zeta_2 \{ A_2 [\zeta_1 \gamma_3 - \zeta_3 \alpha_3 + \zeta_2^2 A_2 \gamma_1 - 3B_2' (\gamma_1 \zeta_1 - \alpha_1 \zeta_3)] + A_3 (\zeta_1 \gamma_2 - \zeta_3 \alpha_2) + A_4 (\zeta_1 \gamma_1 - \zeta_3 \alpha_1) \}] + 6. \end{aligned} \right.$$

Écrivons, pour abrégier, les expressions (I2) sous la forme

$$(I2') \quad - \frac{\partial F'}{\partial \zeta_i} = \frac{d\omega_i}{du} = M_0^{(i)} + M_1^{(i)} u + M_2^{(i)} u^2 + M_3^{(i)} u^3 + M_4^{(i)} u^4 + \dots$$

et les expressions (I3) sous la forme

$$(I3') \quad \frac{d\zeta_i}{du} = \mathcal{O}_0^{(i)} + \mathcal{O}_1^{(i)} u + \mathcal{O}_2^{(i)} u^2 + \mathcal{O}_3^{(i)} u^3 + \mathcal{O}_4^{(i)} u^4 + \dots \quad (\mathcal{O}_0^{(1)} = \mathcal{O}_0^{(3)} = 0, \mathcal{O}_0^{(2)} = -m_0 \zeta_1).$$

On peut écrire les équations (II) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} + M_1^{(1)} u + M_2^{(1)} u^2 + M_3^{(1)} u^3 + \dots &= \alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + \dots + n\alpha_n u^{n-1} + \dots \\ &+ \frac{d\zeta_1}{du} \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_1} u + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_1} u^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_1} u^3 + \dots \right] \\ &+ \frac{d\zeta_2}{du} \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} u + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_2} u^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_2} u^3 + \dots \right] \\ &+ \frac{d\zeta_3}{du} \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_3} u + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_3} u^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_3} u^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{d\zeta_i}{du}$ par leurs expressions (I3') et en ordonnant suivant les puissances de u , il vient

$$\begin{aligned} & M_0^{(1)} + M_1^{(1)}u + M_2^{(1)}u^2 + M_3^{(1)}u^3 + M_4^{(1)}u^4 + M_5^{(1)}u^5 + M_6^{(1)}u^6 \\ &= \alpha_1 + u \left(2\alpha_2 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} \right) + u^2 \left(3\alpha_3 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_2} + \sum_{i=1}^{i=3} \omega_1^{(i)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_i} \right) + u^3 \left[4\alpha_4 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_2} + \sum_{i=1}^{i=3} \left(\omega_1^{(i)} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_i} + \omega_2^{(i)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_i} \right) \right] \\ &+ u^4 \left[5\alpha_5 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_4}{\partial \zeta_2} + \sum_{i=1}^{i=3} \left(\omega_1^{(i)} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_i} + \omega_2^{(i)} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_i} + \omega_3^{(i)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_i} \right) \right] \\ &+ u^5 \left[6\alpha_6 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_5}{\partial \zeta_2} + \sum_{i=1}^{i=3} \left(\omega_1^{(i)} \frac{\partial \alpha_4}{\partial \zeta_i} + \omega_2^{(i)} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \zeta_i} + \omega_3^{(i)} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_i} + \omega_4^{(i)} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_i} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de u , on a

$$(I4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1 = M_0^{(1)}, & \beta_1 = M_0^{(2)}, & \gamma_1 = M_0^{(3)}, \\ 2\alpha_2 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} = M_1^{(1)}, & 2\beta_2 - m_0 \zeta \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_2} = M_1^{(2)}, & 2\gamma_2 - m_0 \zeta \frac{\partial \gamma_1}{\partial \zeta_2} = M_1^{(3)}, \\ 3\alpha_3 - m_0 \zeta \frac{\partial \alpha_2}{\partial \zeta_2} + \sum \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_i} \omega_1^{(i)} = M_2^{(1)}, & 3\beta_3 - m_0 \zeta \frac{\partial \beta_2}{\partial \zeta_2} + \sum \frac{\partial \beta_1}{\partial \zeta_i} \omega_1^{(i)} = M_2^{(2)}, & \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

6. On a

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_1}{c'}, \\ \beta_1 = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_2}{c'}, \\ \gamma_1 = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_3}{c'}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 = -\frac{m_0}{4}, \\ \gamma_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4}; & \omega_1^{(1)} &= \zeta_1 c', \\ & & \omega_1^{(2)} &= \zeta_2 c', \\ & & \omega_1^{(3)} &= \zeta_3 c'. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{c' - m_0^2}{12} \frac{\zeta_1}{c'}, \\ \beta_3 = \frac{c' - m_0^2}{12} \frac{\zeta_2}{c'}, \\ \gamma_3 = \frac{c' - m_0^2}{12} \frac{\zeta_3}{c'}. \end{cases}$$

$$A_3 = \frac{m_0}{4} \frac{\zeta_2}{c'};$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(1)} &= \frac{1}{4} \zeta_2 \zeta_2, \\ \omega_2^{(2)} &= \frac{c' m_0}{2} \zeta_1 - \frac{\zeta_2 \zeta_1}{4}, \\ \omega_2^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0, \\ \beta_4 = \frac{4m_0 c' - m_0^3}{48}, \\ \gamma_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{7m_0^3 - 4c'}{48}, \\ L_2 &= \frac{\zeta_1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3^{(1)} &= K \zeta_1 + m_0 \frac{\zeta_2^2}{4} + \frac{1}{4} m_0 \zeta_2^2, \\ \omega_3^{(2)} &= K \zeta_2 - \frac{m_0}{4} \zeta_1 \zeta_2, \\ \omega_3^{(3)} &= K \zeta_3 \\ & \left(\text{avec } K = -c' \frac{c' - m_0^2}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = \frac{-4c'^2 + 11c'm_0^2 - m_0^4}{240} \zeta_1^2, \\ \beta_3 = \frac{-4c'^2 + 11c'm_0^2 - m_0^4}{240} \zeta_1^2, \\ \gamma_3 = \frac{-4c'^2 + 11c'm_0^2 - m_0^4}{240} \zeta_1^2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{m_0(2c' - m_0^2)}{16} \zeta_2^2, & \omega_4^1 &= \frac{25m_0^2 - 4c'}{48} \zeta_2^2, \\ L_3 &= 0; & \omega_4^2 &= -\frac{c'm_0(4c' - m_0^2)}{24} \zeta_2 - \frac{(13m_0^2 - 4c')}{48} \zeta_2^2, \\ & & \omega_4^3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_6 = 0, \\ \beta_6 = \frac{(15c'm_0 - 34c'^2 + 11c'm_0^2 - m_0^4)m_0}{1440}, \\ \gamma_6 = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que A_6 est un polynome de quatrième degré en m_0 , indépendant de ζ_i et que A_7 est une expression de la forme $P_7 \zeta_2^2$, où P_7 est un polynome de cinquième degré en m_0 .

7. On voit qu'on peut écrire

$$(15) \quad \begin{cases} \omega_1 = (a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) + 7, \\ \omega_2 = (a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) + a_4 u^2 + a_5 u^3 + a_6 u^4 + 7, \\ \omega_3 = (a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3) + 7; \end{cases}$$

$$(16) \quad r = \omega^2 \zeta = \zeta_2 (P_3 u^3 + P_3 u^5 + P_7 u^7) + \zeta_1 (P_2 u^2 + P_4 u^4 + P_6 u^6) + 8,$$

où les a_i et P_i sont des coefficients numériques ou dépendant de m_0 et c' .

Nous avons arrêté les développements de ω_i aux sixièmes puissances de u , car, comme nous allons le démontrer, pour les ordres supérieurs, les coefficients ne présentent plus la même symétrie. Notre démonstration nous servira du reste pour la vérification des coefficients déjà obtenus.

Remarquons que $\zeta_3 \omega_1 - \zeta_1 \omega_3$ est du septième ordre en u et que

$$\zeta_3 \omega_1 - \zeta_1 \omega_3 = z p_x - x p_z.$$

Par conséquent, au voisinage du choc, le moment de la vitesse absolue par rapport à l'axe des y est du septième ordre en u , tandis que les autres moments sont du second ordre.

En se reportant aux équations (A) de la page 46,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_x}, & \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ & \dots, & & \dots \end{aligned}$$

on trouve facilement

$$\frac{d}{dt} (z p_x - x p_z) = z p_y - y p_z - \frac{m_0 z}{r_0^3}.$$

En effectuant successivement les transformations de Sundman et de Levi-Civita, on a immédiatement

$$\frac{d}{du} (\zeta_3 \omega_1 - \zeta_1 \omega_3) = \zeta \omega^2 \left[\zeta_3 \omega_2 - \zeta_2 \omega_3 - \frac{m_0}{r_0^3} \left(\omega^2 \zeta_3 - 2 \omega_3 \sum \omega_i \zeta_i \right) \right]$$

ou

$$(17) \quad \frac{d}{du} (\zeta_3 \omega_1 - \zeta_1 \omega_3) = \zeta \omega^2 \left\{ \zeta_3 \omega_2 - \zeta_2 \omega_3 - m_0 z \left(1 - 3x - \frac{3}{2} r^2 + \frac{15}{2} x^2 + \dots \right) \right\}.$$

Puisque $\xi \omega^2$ est du second ordre par rapport à u , l'expression entre les grandes parenthèses doit être de l'ordre $n - 3$ si $\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3$ et de l'ordre n .

On a

$$(18) \quad \xi_3 \omega_2 - \xi_2 \omega_3 = (a_2 u^2 + a_4 u^4 + a_6 u^6) \xi_3 + 7,$$

$$(19) \quad z = \omega^2 \xi_3 - 2 \omega_3 \sum \omega_i \xi_i = \xi_3 [(P_2 - 2a_1^2) u^2 + (P_4 - 4a_1 a_3) u^4 + (P_6 - 2a_3^2 - 4a_1 a_5) u^6] + 8.$$

De même $x = \omega^2 \xi_1 - 2 \omega_1 \sum \omega_i \xi_i$ s'obtient en remplaçant dans (19) ξ_3 par ξ_1 et l'on a

$$(20) \quad x = \xi_1 [(P_2 - 2a_1^2) u^2 + (P_4 - 4a_1 a_3) u^4 + (P_6 - 2a_3^2 - 4a_1 a_5) u^6] + 8.$$

Maintenant introduisons les développements obtenus dans l'expression entre les grandes parenthèses du (17):

$$\begin{aligned} & \xi_3 \omega_2 - \xi_2 \omega_3 - m_0 z \left(1 - 3x - \frac{3}{2} r^2 + \frac{15}{2} x^2 + \dots \right) \\ & = \xi_3 \left\{ [a_2 - (P_2 - 2a_1^2) m_0] u^2 + [a_4 - m_0 (P_4 - 4a_1 a_3) + 3m_0 (P_2 - 2a_1^2)^2 \xi_1] u^4 \right\} + 6. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}, & a_2 &= -\frac{m_0}{4}, & a_3 &= \frac{c' - m_0^2}{12}, & a_4 &= \frac{m_0 (4c' - m_0^2)}{48}, \\ P_2 &= \frac{1}{4}, & P_4 &= \frac{7m_0^2 - 4c'}{48}. \end{aligned}$$

Ainsi l'expression entre les parenthèses du (17) a pour valeur

$$\frac{3}{16} m_0 \xi_1 \xi_3 u^4 + 6.$$

Par conséquent,

$$(21) \quad \frac{d}{du} (\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3) = \omega^2 \xi \left(\frac{3}{16} m_0 \xi_1 \xi_3 u^4 + 6 \right) = \frac{3}{64} m_0 \xi \xi_1 \xi_3 u^6 + \frac{3}{16} m_0^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 u^7 + 8.$$

Ainsi $\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3$ doit être du septième ordre par rapport à u et les coefficients à partir d'indice 7 ne présentent pas la même symétrie.

Remarquons que pour démontrer ce résultat nous avons utilisé les coefficients jusqu'à a_4 seulement.

8. Cherchons maintenant la dérivée du moment de la vitesse absolue par rapport à l'axe PX.

On a

$$\frac{d}{dt} (y p_z - z p_y) = \frac{dy}{dt} p_z + \frac{dp_z}{dt} y - \frac{dz}{dt} p_y - \frac{dp_y}{dt} z,$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p_y} = p_y - (x + m_0), & \frac{dz}{dt} &= p_z, \\ \frac{dp_z}{dt} &= -z \left(\frac{m_0}{r_0^3} + \frac{m}{r^3} \right), & \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y} = -p_x - y \left(\frac{m_0}{r_0^3} + \frac{m}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(22) \quad \frac{d}{dt} (y p_z - z p_y) = z p_x - (x + m_0) p_z.$$

$x + m_0$ est l'abscisse du météorite M par rapport à des axes parallèles aux axes employés et dont l'origine se trouve au centre de gravité; le moment par rapport à l'axe des x ne change pas si l'on transporte l'origine au centre de gravité. Ainsi nous avons ce théorème :

En choisissant des axes entraînés, dont l'origine se trouve au centre de gravité des corps P_0 et P, le moment de la vitesse absolue de M par rapport à l'axe OY est égal à la dérivée par rapport au temps du moment de cette vitesse absolue par rapport à l'axe OX.

En supposant qu'à l'instant $t = 0$, il y ait un choc et en intégrant (22) entre $t = 0$ et $t = t$, on a

$$y p_z - z p_y = \int_0^t (z p_x - x p_z) dt - m_0 z$$

ou

$$y p_z - z p_y = \int_0^u (\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3) r du - m_0 z.$$

Mais, au voisinage du choc, $\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3$ est du septième ordre par rapport à u , $r = \omega^2 \xi$ est du second ordre par rapport à u ; par conséquent $\int_0^u (\xi_3 \omega_1 - \xi_1 \omega_3) r du$ est du dixième ordre par rapport à u .

Ainsi

$$y p_z - z p_y + m_0 z = \mathbf{10}.$$

Mais

$$p_z = \frac{dz}{dt}, \quad p_y = (x + m_0) + \frac{dy}{dt};$$

par conséquent, la relation précédente peut s'écrire

$$(23) \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} - zx = 0 + \mathbf{10}.$$

Si l'on peut négliger les dixièmes puissances de u , on a alors la proposition suivante :

Au voisinage du choc, le moment par rapport à l'axe des x de la vitesse relative est égal au produit des coordonnées z et x .

9. En prenant la relation

$$y = \omega^2 \xi_2 - 2\omega_2 \sum \omega_i \xi_i$$

et en y substituant les développements (15) et (16), on trouve

$$y = \xi_2 \left[(P_2 - 2a_1^2) u^2 + \{ P_4 - 2(2a_1 a_3 + a_2^2) \} u^4 + \{ P_6 - 2(a_3^2 + 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4) \} u^6 \right] - 2\xi \left[a_1 a_2 u^3 + (a_1 a_4 + a_2 a_2) u^5 + (a_1 a_6 + a_3 a_4 + a_5 a_2) u^7 \right] + \mathbf{8}.$$

Mais

$$P_2 = a_1^2, \quad P_3 = 2a_1 a_2, \quad P_4 = a_3^2 + 2a_1 a_3, \quad P_5 = 2(a_1 a_4 + a_2 a_2), \\ P_6 = a_3^2 + 2(a_1 a_5 + a_2 a_4), \quad P_7 = 2(a_1 a_6 + a_2 a_5 + a_3 a_4).$$

Par conséquent,

$$(24) \quad y = -\xi_2 (P_2 u^2 + P_4 u^4 + P_6 u^6) - \xi (P_3 u^3 + P_5 u^5 + P_7 u^7) + \mathbf{8}.$$

Nous avons calculé ainsi x , y , z , r en fonction des ξ_i et de u au voisinage du choc.

10. Nous allons maintenant, pour avoir une idée de la trajectoire, calculer les développements de x , y , z en séries suivant les puissances du seul paramètre u au voisinage du choc.

Pour cela, nous développerons les ξ_i suivant les puissances de u . Nous avons calculé déjà dans les développements

$$\frac{d\xi_i}{du} = \omega_0^{(i)} + \omega_1^{(i)} u + \omega_2^{(i)} u^2 + \omega_3^{(i)} u^3 + \dots$$

les différents $\mathcal{D}_n^{(i)}$. Ainsi on a

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{du} = c' \xi_1 u + \frac{1}{4} \xi_2^2 u^2 + \left[K \xi_1 + \frac{m_0}{4} (\xi_2^2 + \xi_3^2) \right] u^3 + R \xi_2 \xi_3 u^4 + 5, \\ \frac{d\xi_2}{du} = -m_0 \xi_2 + c' \xi_2 u + \left(c' \frac{m_0}{2} \xi_2 - \frac{\xi_2^2}{4} \right) u^2 + \left(K \xi_2 - \frac{m_0}{4} \xi_1 \xi_2 \right) u^3 - (M \xi_2 + N \xi_2 \xi_1) u^4 + 5, \\ \frac{d\xi_3}{du} = c' \xi_3 u + K \xi_3 u^2 + 5, \end{cases}$$

où K, R, M, N sont des quantités dépendant de C et m_0 seulement (voir page 52).

Soient :

$$(26) \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_1^0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \dots, \\ \xi_2 = \xi_2^0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \dots, \\ \xi_3 = \xi_3^0 + \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 + \dots, \end{cases}$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ étant des constantes.

On a immédiatement (en se rappelant que

$$\begin{aligned} \xi_0^0 &= \sqrt{(\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 + (\xi_3^0)^2} = 2m, \\ \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \frac{c' \xi_1^0}{2}, \\ \beta_1 &= -2mm_0, & \beta_2 &= \frac{c' + m_0^2}{2} \xi_2^0, \\ \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= \frac{c' \xi_3^0}{2}. \end{aligned}$$

Soit

$$(27) \quad \xi = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4 + \dots$$

En substituant, dans les développements (25), aux ξ_i leurs expressions (26) et (27) et en ordonnant suivant les puissances de u , il vient

$$\begin{aligned} 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4 + \dots &= u^2 \left(c' \alpha_1 + \frac{B_0 \beta_0}{4} \right) + u^3 \left[c' \alpha_2 + \frac{1}{4} (B_0 \beta_1 + B_1 \beta_0) + K \alpha_0 + \frac{m_0}{4} (\beta_0^2 + B_0^2) \right] \\ &+ u^4 \left[c' \alpha_3 + \frac{1}{4} (B_0 \beta_2 + B_1 \beta_1 + B_2 \beta_0) + \frac{m_0}{2} (\beta_0 \beta_1 + B_0 B_1) + R B_0 \beta_0 \right] + \dots; \\ 3\beta_3 u^2 + 4\beta_4 u^3 + 5\beta_5 u^4 + \dots &= u^2 \left(-m_0 B_2 + c' \beta_1 + c' \frac{m_0}{2} B_0 - \frac{1}{4} B_0 \alpha_0 \right) \\ &+ u^3 \left[-m_0 B_3 + c' \beta_2 + c' \frac{m_0}{2} B_1 - \frac{1}{4} (B_0 \alpha_1 + B_1 \alpha_0) + K \beta_0 - \frac{m_0}{4} \alpha_0 \beta_0 \right] \\ &+ u^4 \left[-m_0 B_4 + c' \beta_3 + c' \frac{m_0}{2} B_2 - \frac{1}{4} (B_0 \alpha_2 + B_1 \alpha_1 + B_2 \alpha_0) + K \beta_1 - \frac{m_0}{4} (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) - B_0 (M + N \alpha_0) \right] + \dots; \\ 3\gamma_3 u^2 + 4\gamma_4 u^3 + 5\gamma_5 u^4 + \dots &= (c' \gamma_2 + K \gamma_0) u^2 + 5 \quad (\alpha_0 = \xi_1^0, \beta_0 = \xi_2^0, \gamma_0 = \xi_3^0). \end{aligned}$$

Ces équations permettent de déterminer les α_i, β_i et γ_i de proche en proche.

On a

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{m \xi_3^0}{6}, & \alpha_4 &= \frac{2c' + m_0^2}{24} c' \xi_1^0, & \alpha_5 &= \frac{m_0^2 + 12c'}{120} m \xi_2^0, \\ \beta_3 &= -\frac{(2c' + m_0^2)}{3} m_0 m - \frac{1}{6} m \xi_1^0, & \beta_4 &= \frac{(m_0^2 + 2c')(m_0^2 + c')}{24} \xi_2^0, & \dots; \\ \gamma_3 &= 0, & \gamma_4 &= \frac{2c' + m_0^2}{24} c' \xi_3^0, & \gamma_5 &= 0, \quad \dots; \\ B_0 &= 2m, & B_1 &= -m_0 \xi_2^0, & B_2 &= (m_0^2 + c') m, & B_3 &= -m_0 \frac{(2c' + m_0^2)}{6} \xi_2^0, \quad \dots \end{aligned}$$

Et l'on a les développements cherchés :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_1^0 + \frac{c' \xi_1^0}{2} u^2 + \frac{m \xi_2^0}{6} u^3 + \frac{(2c' + m_0^2) c'}{24} \xi_1^0 u^4 + \frac{(m_0^2 + 12c')}{120} m \xi_2^0 u^5 + 6, \\ \xi_2 = \xi_2^0 - 2mm_0 u + \frac{c' + m_0^2}{2} \xi_2^0 u^2 - \frac{m}{3} \left[m_0(2c' + m_0^2) + \frac{1}{2} \xi_1^0 \right] u^3 + \frac{(m_0^2 + 2c')(m_0^2 + c')}{24} \xi_2^0 u^4 + 5, \\ \xi_3 = \xi_3^0 + \frac{c' \xi_3^0}{2} u^2 + \frac{c'(2c' + m_0^2)}{24} \xi_3^0 u^3 + 6; \\ \xi = 2m - m_0 \xi_2^0 u + m(m_0^2 + c') u^2 - \frac{m_0(2c' + m_0^2)}{6} \xi_2^0 u^3 + \dots \end{array} \right.$$

11. En écrivant explicitement les coefficients des développements (20), (19), (24) de x, y, z , on a

$$\begin{aligned} x &= \left(-\frac{1}{4} u^2 + \frac{4c' - m_0^2}{48} u^3 + X_6 u^6 \right) \xi_1 + 8, \\ y &= -\left(\frac{1}{4} u^2 + \frac{7m_0^2 - 4c'}{48} u^3 + P_6 u^6 \right) \xi_2 - \left[\frac{m_0}{4} u^3 - \frac{m_0(2c' - m_0^2)}{16} u^5 + P_7 u^7 \right] \xi_3 + 8, \\ z &= \left(-\frac{1}{4} u^2 + \frac{4c' - m_0^2}{48} u^3 + Z_6 u^6 \right) \xi_3 + 8. \end{aligned}$$

et

$$r = \left(\frac{1}{4} u^2 + \frac{7m_0^2 - 4c'}{48} u^3 + P_6 u^6 \right) \xi_1 + \left[\frac{m_0}{4} u^3 - \frac{m_0(2c' - m_0^2)}{16} u^5 + P_7 u^7 \right] \xi_2 + 8,$$

où

$$X_6 = Z_6 = P_6 - 2(a_3^2 + 2a_1 a_5) = 4a_2 a_4 - P_6.$$

En substituant aux ξ_i les séries (27) et en ordonnant suivant les puissances de u , on a

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} \xi_1^0 u^2 - \xi_1^0 \frac{2c' + m_0^2}{48} u^3 - \frac{1}{24} m \xi_2^0 u^5 + T \xi_1^0 u^6 + 7, \\ y = -\frac{1}{4} \xi_2^0 u^2 - \xi_2^0 \frac{2c' + m_0^2}{48} u^3 + \frac{1}{24} m \xi_1^0 u^5 + T \xi_2^0 u^6 + 7, \\ z = -\frac{1}{4} \xi_3^0 u^2 - \xi_3^0 \frac{2c' + m_0^2}{48} u^3 + T \xi_3^0 u^6 + 7 \end{array} \right.$$

(T est au polynôme du quatrième degré en m_0 et ne dépend que de m_0 et c').

$$r = \frac{mu^2}{2} + m \frac{(m_0^2 + 2c')}{24} u^3 + 6,$$

d'où

$$(29) \quad t = \int_0^u r du = \frac{mu^3}{6} + \frac{m(m_0^2 + 2c')}{120} u^4 + 7.$$

On voit immédiatement que

$$(\xi_1^0 x + \xi_2^0 y) \xi_3^0 = [(\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2] z + 7.$$

Ainsi, au voisinage du choc, si l'on néglige les puissances de u supérieures à la sixième, le mouvement est plan.

En se rappelant les relations ⁽¹⁾ (21) et (23) :

$$\begin{aligned} L = \mathcal{M}'_x &= y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = zx + 10, \\ \frac{d}{du} (z p_x - x p_z) &= \frac{3}{64} m_0 \xi_1^0 \xi_2^0 \xi_3^0 u^6 + 7 = \frac{3}{32} mm_0 \xi_1^0 \xi_2^0 u^6 + 7. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir pages 53 et 54.

On trouve

$$z p_x - x p_z = \frac{3}{32 \times 7} m m_0 \xi_1^0 \xi_3^0 u^7 + \mathbf{8}.$$

Mais

$$p_x = \frac{dx}{dt} - y, \quad p_z = \frac{dz}{dt};$$

par conséquent,

$$M = \mathfrak{M}_1 = z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = zy + \frac{3}{224} m_0 m \xi_1^0 \xi_3^0 u^7 + \mathbf{8}.$$

On voit que

$$\xi_1^0 M - \xi_2^0 L = (\xi_1^0 y - \xi_2^0 x) z + \frac{3}{224} m_0 m (\xi_1^0)^2 \xi_3^0 u^7 + \mathbf{8} = \frac{m}{32} \xi_3^0 \left[-\frac{1}{3} \{ (\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 \} + \frac{3}{7} m_0 (\xi_1^0)^2 \right] u^7 + \mathbf{8}.$$

Cette expression ne peut être nulle, dans le cas général, que si l'on néglige les septièmes puissances en u . Cela montre que si l'on tient compte des septièmes puissances le mouvement *ne sera pas plan*.

12. Nous pouvons donc résumer de la façon suivante les propriétés du mouvement théorique d'un météorite tombant sur une planète :

1° Si l'on néglige les dixièmes puissances de u , le moment de la vitesse relative par rapport à l'axe des x , c'est-à-dire par rapport au rayon vecteur de la planète, est égal au produit des coordonnées z et x .

2° Si l'on néglige les septièmes puissances de u , la vitesse absolue du météorite rencontre l'axe des y ou, ce qui revient au même, la vitesse absolue du météorite et celle de la planète sont dans un même plan.

Le mouvement est plan. L'équation de la courbe décrite par le météorite est

$$Ax + By + Cz = 0, \\ z = D_2 (\xi_3^0 x - \xi_1^0 z)^{\frac{2}{5}} + D_4 (\xi_3^0 x - \xi_1^0 z)^{\frac{4}{5}} + D_6 (\xi_3^0 x - \xi_1^0 z)^{\frac{6}{5}}$$

(A, B, C, D_2, D_4, D_6 sont des constantes). C'est l'intersection d'un plan avec une surface cylindrique de huitième degré.

3° Si l'on néglige les sixièmes puissances de u , on trouve que la trajectoire est l'intersection du plan $Ax + By + Cz = 0$ avec une surface cylindrique du cinquième degré.

4° Si l'on néglige les cinquièmes puissances de u , la trajectoire devient une droite qui se confond avec la tangente à la trajectoire à l'instant du choc.

Remarquons que dans les chocs binaires des trois corps, au cas où toutes les masses sont finies, la trajectoire la plus générale est toujours une courbe gauche, sauf si l'on néglige les puissances supérieures à la deuxième, hypothèse où la trajectoire se confond comme ici avec sa tangente.

Remarquons encore que, dans le cas du choc proprement dit, il faut prendre dans nos équations (28) $u < 0$ et dans le cas opposé d'une éjection (comme s'il s'agissait d'une pierre lancée par un volcan) il faut prendre $u > 0$.

CHAPITRE II.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES EXPRIMANT LES CONDITIONS DE CHOC.

I. — Domaine d'existence des intégrales réelles.

1. Nous allons traiter maintenant de la convergence des séries que nous avons obtenues dans le chapitre précédent, ce qui nous permettra de fixer les limites à l'intérieur desquelles les relations analytiques de prévision des chocs binaires sont valables.

Commençons par établir l'intervalle dans lequel l'existence des intégrales est assurée *pour le domaine réel*. Nous rappellerons le théorème d'existence classique.

Soit

$$(I) \quad \frac{dy_i}{du} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système d'équations différentielles, les f_i étant des fonctions continues et réelles des variables réelles y_1, y_2, \dots, y_n , dans le voisinage de valeurs $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$, tant que les inégalités

$$(I) \quad |y_i - y_i^0| < a_i \quad (a_i > 0)$$

sont satisfaites; soit u_0 la valeur de u qui correspond aux valeurs initiales y_i^0 des y_i .

Supposons que les fonctions f_i admettent des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ continues, tant que les inégalités (I) sont vérifiées. Soit M_i la valeur maximum de la fonction f_i dans l'intervalle (I). Alors il existe n fonctions continues de u, y_1, y_2, \dots, y_n , intégrales des équations (I), pourvu que $|u - u_0|$ soit plus petit qu'un nombre h , h étant la plus petite des quantités $\frac{a_i}{M_i}$, et de plus, dans cet intervalle les inégalités (I) sont vérifiées.

Nous appliquerons ce théorème aux équations canoniques du mouvement d'un météorite au voisinage du choc.

Reprenons les équations différentielles établies à la page 48 du chapitre précédent et écrivons leurs seconds membres sous forme finie. On a

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega_1}{du} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_1}{r_0^2} + m_0 \omega_2 \frac{\xi_1}{r_0^2} + \frac{\xi_1}{r_0^2} \omega^2 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) + \xi \omega^2 \left[\omega_2 - \frac{m_0}{r_0^3} (\omega^4 \xi_1 + \omega^2 - 2\omega_1^2) \right], \\ \frac{d\omega_2}{du} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_2}{r_0^2} + m_0 \omega_1 \frac{\xi_2}{r_0^2} + \frac{\xi_2}{r_0^2} \omega^2 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) - \xi \omega^2 \frac{m_0}{r_0^3} (\omega^4 \xi_2 - 2\omega_1 \omega_2), \\ \frac{d\omega_3}{du} &= -\frac{1}{2} \frac{\xi_3}{r_0^2} + m_0 \omega_1 \frac{\xi_3}{r_0^2} + \frac{\xi_3}{r_0^2} \omega^2 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) - \xi \omega^2 \frac{m_0}{r_0^3} (\omega^4 \xi_3 - 2\omega_1 \omega_3); \\ \frac{d\xi_1}{du} &= -2\xi \omega_1 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) + \xi \omega^2 \left[\xi_2 + \frac{2m_0}{r_0^3} (\omega^2 \omega_1 \xi_2 - \sum \omega_i \xi_i) \right], \\ \frac{d\xi_2}{du} &= -m_0 \xi - 2\xi \omega_2 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) - \xi \omega^2 \left[\xi_1 - \frac{2m_0}{r_0^3} (\omega^2 \omega_2 \xi_2 + \omega_2 \xi_1 - \omega_1 \xi_2) \right], \\ \frac{d\xi_3}{du} &= -2\xi \omega_3 \left(\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 + \frac{m_0}{r_0} + C \right) + 2\xi \omega^2 \frac{m_0}{r_0^3} (\omega^2 \omega_3 \xi_2 + \omega_3 \xi_1 - \omega_1 \xi_3). \end{aligned} \right.$$

2. Les seconds membres de ce système sont finis, continus et admettent des dérivées partielles finies, tant que $r_0 > 0$ et $\xi_0 > 0$.

Il est évident que, tant que $r < 1$, $r_0 > 0$ ($r_0^2 = 1 + r^2 + 2x$). Dans ces conditions $|x|, |y|, |z| < 1$.

Pour $u = 0$, $\xi = 2m > 0$. Tant que ξ reste > 0 , on est assuré, d'après le théorème général, de l'existence des intégrales (1). On a

$$\xi^2 = \xi_0^2 + 2\alpha\xi_1^0 + 2\beta\xi_2^0 + 2\gamma\xi_3^0 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

où l'on a posé

$$\alpha = \xi_1 - \xi_1^0, \quad \beta = \xi_2 - \xi_2^0, \quad \gamma = \xi_3 - \xi_3^0,$$

Pour que ξ^2 soit positif, il suffit qu'on ait l'une ou l'autre des équations écrites :

$$\begin{aligned} 2\alpha\xi_1^0 + 2\beta\xi_2^0 + 2\gamma\xi_3^0 &> -\xi_0^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ |2\alpha\xi_1^0 + 2\beta\xi_2^0 + 2\gamma\xi_3^0| &< \xi_0^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

Soit ε la plus grande des trois quantités $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$. En remarquant que $|\xi_i^0| \leq \xi_0$, on voit immédiatement que si l'on prend

$$6\varepsilon\xi_0 < \xi_0^2 + 3\varepsilon^2,$$

ξ^2 sera sûrement > 0 .

En résolvant cette inégalité, on trouve

$$\varepsilon \leq \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \xi_0 \sim 0,18\xi_0.$$

Ainsi, tant que $|\xi_i - \xi_i^0| < 0,18\xi_0$, on est sûr que $\xi > 0$.

On trouve encore que

$$|\xi_i| \leq 1,18\xi_0 \quad \text{et} \quad \xi^2 < 12\varepsilon\xi_0 \sim 2,16\xi_0^2.$$

D'autre part, nous avons $\omega^2\xi = r < 1$. Si l'on fait $\omega^2 < \frac{1}{\sqrt{2,16}\xi_0}$, la relation précédente est vérifiée.

Ainsi, en définitive, $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0$ étant les valeurs initiales des variables ω_i, ξ_i , tant que

$$|\xi_i - \xi_i^0| < 0,18\xi_0 \quad \text{et} \quad |\omega_i| < \frac{1}{\sqrt{2,16}\sqrt{\xi_0}},$$

nous sommes assurés que les seconds membres des équations différentielles (A) restent continus. Ceci est possible tant que $|r_0| < 2$.

3. Cherchons maintenant les nombres M_i .

Prenons la première équation du système (A). On a

$$\left| \frac{d\omega_1}{du} \right| < \frac{1}{2} + m_0\omega + 2,36\omega^3\xi_0 + |C|\omega^2 + \frac{m_0\omega^2}{r_0} + \omega + \frac{m_0}{r_0^3}(\omega^4 \times 1,18\xi_0 + 3\omega^2).$$

Remarquons que, dans le cas Soleil-Jupiter-Comète,

$$m_0 = 1 - m, \quad m = \frac{1}{1047} \quad \text{et} \quad \xi_0 = \frac{2}{1047};$$

pour simplifier, nous prendrons $m_0 = 1$, ce qui ne modifiera pas sensiblement M_i . Nous négligerons le terme contenant C;

(1) Remarquons que si $\xi = 0$, $r \neq 0$ (car si $r = 0$, $\xi = 2m$), ainsi $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 0$ et ω devient infini. Nous avons

$$F = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \left(\frac{m}{r} + \frac{m_0}{r_0} \right) = C.$$

Si $C > 0$, ξ ne peut jamais être nul dans le domaine réel; si $C = 0$, ξ devient nul pour $r = r_0 = \infty$. Ainsi on n'a pas à craindre, dans le cas où $C \geq 0$, que la vitesse puisse s'annuler dans le domaine réel. Mais dans les problèmes concrets d'Astronomie $C < 0$, et la surface $\frac{m}{r} + \frac{m_0}{r_0} = -C$ est la surface où la vitesse s'annule.

cela diminuera M_i et, par conséquent, augmentera $\frac{a_i}{M_i}$. Ainsi en posant

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2,16}} \sim 0,82,$$

on a

$$\frac{a_1}{M_1} = \frac{\delta}{\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0} + 2\delta + 2,36\delta^2 + \frac{\delta^2}{\sqrt{\xi_0}r_0^3}(1,18\delta^2 + 3) + \frac{\delta^2}{\sqrt{\xi_0}r_0}}$$

En négligeant $\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0}$ devant d'autres termes, on peut écrire

$$\frac{a_1}{M_1} \sim \frac{1}{3,6 + \frac{3,1}{\sqrt{\xi_0}r_0^3} + \frac{0,7}{\sqrt{\xi_0}r_0}}$$

Il est clair que $\frac{a_i}{M_i}$ diminue avec r_0 . Nous prendrons la valeur maximum permise pour r_0 , c'est-à-dire $r_0 = 2$. Ainsi nous prendrons

$$\frac{a_1}{M_1} = \frac{1}{3,6 + \frac{0,7}{\sqrt{\xi_0}}}$$

Passons maintenant à l'équation en $\frac{d\xi_1}{du}$.

On trouve

$$\left| \frac{d\xi_1}{du} \right| < 2\xi\omega \left(2\xi\omega + |C| + \frac{m_0}{r_0} \right) + \xi + \frac{8\xi\omega m_0}{r_0^3}$$

En faisant les simplifications comme précédemment, c'est-à-dire en prenant $m_0 = 1$, $C = 0$, on peut prendre pour M_4 l'expression

$$M_4 = 4\xi + \frac{2\xi\omega}{r_0} + \xi + \frac{8\xi\omega m_0}{r_0^3},$$

en tenant compte de la relation $\omega^2\xi < 1$. Avec $r_0 = 2$, et nous souvenant que $\xi < \frac{\delta}{\delta^2}$, $\omega < \frac{\delta}{\sqrt{\xi_0}}$, nous prendrons

$$M_4 = \frac{\xi_0}{\delta^2} \left(5 + \frac{\delta}{\sqrt{\xi_0}} \right).$$

De cette façon,

$$\frac{a_4}{M_4} = \frac{0,18\delta^2}{5 + \frac{2\delta}{\sqrt{\xi_0}}} = \frac{0,12}{5 + \frac{1,6}{\sqrt{\xi_0}}}$$

En comparant les valeurs de $\frac{a_1}{M_1}$ et $\frac{a_4}{M_4}$, on voit que $\frac{a_4}{M_4} < \frac{a_1}{M_1}$.

Ainsi on peut dire que l'existence des intégrales continues dans le domaine réel de la variable u est démontré seulement pour les valeurs absolues de $u - u_0$ plus petites que $\frac{0,12}{5 + \frac{1,6}{\sqrt{\xi_0}}}$.

4. Prenons le cas de Jupiter et de la Terre. Pour Jupiter $\xi_0 = \frac{2}{1047}$ et pour la Terre $\xi_0 = \frac{2}{330\,000}$ et l'on trouve que $|u - u_0|$ doit être plus petit que 0,003 pour le cas de Jupiter, et que 0,002 pour le cas de la Terre. Dans ce domaine d'existence, on a

$$dt < du \quad \text{et} \quad |t - t_0| < |u - u_0|.$$

Avec nos unités, la valeur de t correspond à $\frac{Tt}{2\pi}$ jours, T étant la période de révolution exprimée en jours. Ainsi, pour

Jupiter, nous aurons

$$t - t_0 < \frac{4332,6}{2\pi} \times 0,003 < 2,1 \text{ jours}$$

et pour la Terre

$$t - t_0 < \frac{365,2 \times 0,0002}{2\pi} \text{ jours} < 18 \text{ minutes.}$$

Ainsi l'existence des intégrales ci-dessus n'est pas assurée durant plus de 18 minutes en cas de choc de la Terre avec une comète!

II. — Domaine de convergence des séries de puissances représentant les intégrales.

5. Mais la preuve de l'existence des intégrales réelles dans un certain domaine ne permet pas leurs développements en séries de puissances de la variable indépendante. Pour le calcul effectif des intégrales, qui représentent le mouvement au voisinage du choc, on a recours à des séries de cette nature. Ainsi nous sommes amenés à considérer les seconds membres des équations différentielles (A) comme des fonctions analytiques des variables ω_i, ζ_i , pour en déduire le rayon de convergence de séries en $u - u_0$, en appliquant le théorème de Cauchy-Picard (1).

Les seconds membres de nos équations différentielles sont développables suivant les puissances de $\zeta_i - \zeta_i^0$ et ω_i , tant que $\frac{I}{r_0}$ et $\frac{I}{\zeta}$ le sont.

On a

$$r_0^2 = 1 + r^2 + 2x, \quad x = \omega^2 \zeta_1 - 2\omega_1 \sum \omega_i \zeta_i, \quad r = \omega^2 \zeta;$$

r et x sont donc des polynômes de troisième degré en ω et ζ . Pour que $\frac{I}{r_0}$ soit développable suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0^0$ et ω_i , il faut et il suffit que la relation

$$(\alpha) \quad |r_0^2 + 2x| < 1$$

soit vérifiée.

Puisque $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, si l'on fait $|x|, |y|, |z| < \varepsilon$, on a $|r|^2 < 3\varepsilon^2$ et si l'on prend $3\varepsilon^2 + 2\varepsilon < 1$, ou $\varepsilon < \frac{1}{3}$, la relation (α) est vérifiée et $|r_0| < \sqrt{2}$, $|r| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Maintenant passons à $\frac{I}{\zeta}$:

$$\frac{I}{\zeta} = \frac{I}{\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}} = \frac{I}{\sqrt{\zeta_0^2 + 2\alpha\zeta_1^0 + 2\beta\zeta_2^0 + 2\gamma\zeta_3^0 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

α, β, γ ayant les mêmes significations qu'au n° 2 du paragraphe précédent.

$\frac{I}{\zeta}$ sera développable suivant les puissances de α, β, γ si l'on a la relation suivante :

$$(\beta) \quad |2\alpha\zeta_1^0 + 2\beta\zeta_2^0 + 2\gamma\zeta_3^0 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2| < \zeta_0^2.$$

Soit A un nombre positif tel que $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq A$; $\zeta_1^0, \zeta_2^0, \zeta_3^0$ étant réels, on a $|\zeta_i^0| < \zeta_0^0$. Si l'on prend $6A\zeta_0^0 + 3A^2 < \zeta_0^2$, l'inégalité (β) sera vérifiée. D'où

$$A < \frac{-3 + \sqrt{12}}{3} \zeta_0^0 \sim 0,15 \zeta_0^0,$$

et dans ces conditions

$$|\zeta^2| < 2\zeta_0^2, \quad |\zeta_i - \zeta_i^0| < 0,15\zeta_0^0, \quad |\zeta_i| < 1,15\zeta_0^0.$$

(1) Voir Chapitre I, page 3.

De la relation $|r| = |\omega^2 \xi| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ on tire $|\omega^2| < \frac{1}{\sqrt{3}|\xi|}$; si donc on fait $|\omega^2| < \frac{1}{\sqrt{6}\xi_0}$, on est assuré que $|r| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Posons $|\omega_i| < \theta$, on a toujours $|\omega^2| \leq 3\theta^2$. Par conséquent, en posant $3\theta^2 = \frac{1}{\sqrt{6}\xi_0}$, on trouve

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}\sqrt{\xi_0}} \sim \frac{0,37}{\sqrt{\xi_0}}.$$

En résumé, tant que

$$|\xi_i - \xi_i^0| < 0,15\xi_0 \quad \text{et} \quad |\omega_i| < \frac{0,37}{\sqrt{\xi_0}},$$

les seconds membres de nos équations différentielles sont développables suivant les puissances de $\xi_i - \xi_i^0$ et ω_i .

6. Cherchons maintenant les nombres M_i , en prenant $m_0 = 1$, $C = 0$. On a

$$\left| \frac{d\omega_i}{du} \right| < \frac{1,15\xi_0}{|\xi|} \left(0,5 + \frac{0,72}{\sqrt{\xi_0}} + \frac{0,41}{\xi_0|r_0|} \right) + \frac{0,22}{\sqrt{\xi_0}} + \frac{0,35}{\xi_0|r_0|^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{a_i}{M_i} = \frac{0,37}{\frac{\sqrt{\xi_0}}{|\xi|} \left(0,5\xi_0 + 0,72\sqrt{\xi_0} + \frac{0,41}{|r_0|} \right) + 0,22 + \frac{0,35}{\sqrt{\xi_0}|r_0|^2}}.$$

On voit immédiatement que $\frac{a_i}{M_i}$ diminue avec $|\xi|$ et $|r_0|$.

Nous prendrons les valeurs maximum de $|\xi|$ et de $|r_0|$, c'est-à-dire

$$|\xi| = \sqrt{2}\xi_0, \quad |r_0| = \sqrt{2}.$$

Alors il vient

$$\frac{a_i}{M_i} = \frac{0,37\sqrt{\xi_0}}{\frac{0,41}{2} + \frac{0,35}{4}} \sim 1,3\sqrt{\xi_0}.$$

Avec les mêmes hypothèses, nous prendrons

$$\frac{a_i}{M_i} = \frac{0,15}{1,50 + \frac{2,96}{\sqrt{\xi_0}}}.$$

On voit que

$$\frac{a_i}{M_i} < \frac{a_i}{M_i}.$$

Ainsi nous sommes certains que les développements des séries au voisinage du choc sont valables à l'intérieur d'un cercle du rayon plus petit que $\frac{0,15}{1,50 + \frac{2,96}{\sqrt{\xi_0}}}$. Pour Jupiter, les séries donc convergent tant que $|u - u_0| < 0,0023$ et pour

la Terre tant que $|u - u_0| < 0,00013$.

Puisque $t - t_0 = \int_0^u r du$, on a (r étant $< \frac{1}{\sqrt{3}}$) $|t - t_0| < 0,58|u - u_0|$.

Ainsi la convergence des séries n'est pas assurée durant plus de 22 heures, en cas du choc avec Jupiter, et de 8 minutes en cas du choc avec la Terre.

Nous avons vu au chapitre précédent que (en posant $u_0 = 0$)

$$t = \frac{mu^3}{6} + \frac{m(m_0^2 + 2c')}{120} u^5 + \dots,$$

$$r = \frac{mu^2}{2} + \frac{m(m_0^2 + 2c')}{24} u^4 + \dots$$

On voit que, si l'on néglige les huitièmes puissances de u , les développements ne peuvent pas donner le mouvement avant le choc pour un temps supérieur dans le cas de Jupiter à 2×10^{-4} seconde et pour le cas de la Terre à 6×10^{-11} seconde. De même on trouve que r , dans le cas de Jupiter et si l'on néglige les huitièmes puissances de u est plus petit que 3×10^{-8} unité astronomique et pour la Terre $r < 10^{-13}$ unité astronomique.

On aurait pu cependant s'attendre à trouver des résultats approchant, au moins comme *ordre* de grandeur, ceux que définissent ci-dessus les domaines d'existence des intégrales holomorphes ($t < 22$ heures pour Jupiter, 8 minutes pour la Terre, $r < \frac{1}{\sqrt{3}} 5,2$ unités astronomiques pour Jupiter et $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ unités astronomiques pour la Terre).

Il n'y a dans cette anomalie qu'une nouvelle conséquence de ce fait que *le changement de variable* $dt = r du$ *rend bien pour* $r = 0$ *le mouvement régulier, mais les séries qu'il fournit n'en sont pas moins très lentement convergentes.*

III. — Prévion théorique des chocs.

7. Supposons qu'on ait trouvé des développements en séries représentant le mouvement au voisinage d'un choc :

$$(B) \quad \begin{cases} \omega_i = a_1^{(i)} u + a_2^{(i)} u^2 + \dots + a_n^{(i)} u^n + \dots, \\ \xi_i = \xi_i^0 + b_1^{(i)} u + b_2^{(i)} u^2 + \dots + b_n^{(i)} u^n + \dots, \end{cases}$$

les $a_j^{(i)}$ et $b_j^{(i)}$ étant des fonctions régulières de ξ_j^0 . Ces équations peuvent servir, comme on sait (1), à déterminer les deux conditions du choc.

Remarquons que, dans le cas de notre problème particulier, $a_1^{(i)} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_i^0}{\xi^0}$; par conséquent au moins l'un des $a_1^{(i)} \neq 0$; $b_1^1 = 0$, $b_1^2 = -2 m_0 m$; $b_1^3 = 0$. Soit ω_j tel que $a_1^{(j)} \neq 0$ et écrivons les quatre équations suivantes :

$$(C) \quad \begin{cases} -\xi_1 + \xi_1^0 + (b_1^{(1)} u + b_2^{(1)} u^2 + \dots + b_n^{(1)} u^n + \dots) = X_1 = 0, \\ -\xi_2 + \xi_2^0 + (b_1^{(2)} u + b_2^{(2)} u^2 + \dots + b_n^{(2)} u^n + \dots) = X_2 = 0, \\ -\xi_3 + \xi_3^0 + (b_1^{(3)} u + b_2^{(3)} u^2 + \dots + b_n^{(3)} u^n + \dots) = X_3 = 0, \\ -\omega_j + (a_1^{(j)} u + a_2^{(j)} u^2 + \dots + a_n^{(j)} u^n + \dots) = X = 0. \end{cases}$$

Les fonctions X_i, X sont identiquement nulles pour $u = 0$ et au voisinage de $u = 0$ sont développables en séries entières.

Il est clair que nous pouvons écrire les équations (C) dans le domaine de convergence des séries en u , dont nous avons trouvé les limites supérieures.

Prenons le déterminant fonctionnel $\frac{D(X_1, X_2, X_3, X)}{D(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, u)}$, il est égal pour $u = 0$ à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2mm_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\xi_j^0}{\xi^0} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{\xi_j^0}{\xi^0} \neq 0.$$

Dans les formules (B), les coefficients dépendent des conditions « initiales », lesquelles sont relatives à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire à l'instant du choc. Ces conditions « initiales », nous allons les éliminer.

Nous venons de voir qu'on peut exprimer $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, u$ en fonction de ξ_1, ξ_2, ξ_3 et l'un des trois ω_j . En remplaçant dans les développements des deux autres $\omega_i, \xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, u$ par leurs expressions ci-dessus, on trouve

$$(D) \quad \begin{cases} \omega_i = \Phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega_j), \\ \omega_{i'} = \Phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega_j). \end{cases}$$

(1) Voir BISONCINI, *loc. cit.*, p. 3; KIVELIOVITCH, *loc. cit.*, p. 3.

Ainsi on obtient deux conditions qui seront développables au voisinage du choc suivant les puissances de ξ_1, ξ_2, ξ_3 et de ω_i .

8. M. Bisconcini a donné le développement de ces conditions (1) suivant les puissances de \sqrt{r} , r étant la distance des deux corps qui se choquent. Il est facile de retrouver ce résultat dans notre cas. Prenons le développement

$$r = \omega^2 \xi = \frac{\xi^0}{4} u^2 + a_1 u^3 + a_2 u^4 + \dots + a_n u^n + \dots$$

On peut tirer de là

$$u = \alpha_1 \sqrt{r} + \alpha_2 r + \alpha_3 \sqrt{r^3} + \dots$$

On aura ainsi u , développé suivant les puissances entières de $\rho = \sqrt{r}$. En remplaçant dans les développements de ξ_1, ξ_2, ξ_3 , la variable u par son développement en ρ , on a le système

$$(C') \quad -\xi_i + \xi_i^0 + (B_1^i \rho + B_2^i \rho^2 + \dots + B_n^i \rho^n + \dots) = F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = 1$ pour $\rho = 0$. Par conséquent $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ sont développables suivant les puissances de ξ_1, ξ_2, ξ_3 et ρ , au voisinage du choc. En prenant les développements de deux quelconques des ω_i , en remplaçant dans ces développements u par son développement en ρ et ensuite les ξ_i^0 par leurs développements en fonction de ξ_i et de ρ ; enfin en ordonnant suivant les puissances de ρ , on met les conditions de choc sous la forme

$$(\omega') \quad \begin{cases} \omega_i = \Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \rho), \\ \omega_i' = \Psi'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \rho). \end{cases}$$

En remplaçant ω_i et ξ_i par leurs expressions en fonction de x, y, z, p_x, p_y, p_z , on obtient des séries en ρ ne différant pas au fond des conditions du choc établies par Bisconcini (2).

9. Mais toutes nos opérations de substitution et d'explicitation de fonctions implicites *ne peuvent en général que diminuer les rayons de convergence des séries*. En tout cas, on ne possède pas de criterium *a priori* permettant de savoir s'ils sont ou non augmentés. Ainsi nous pouvons être seulement sûrs que les conditions de choc trouvées sont valables dans un domaine de convergence intérieur à celui des séries d'où nous sommes parti. Et nous avons trouvé que le cercle de convergence de ces séries est excessivement petit.

Supposons, par exemple, que nous cherchions à prévoir le choc d'une comète et de Jupiter. Les conditions (ω) ci-dessus nous donneront la possibilité de décider si le choc aura lieu ou non seulement pour un intervalle de temps inférieur à 22 heures. S'il s'agissait de la Terre, cet intervalle serait plus petit que 8 minutes. Encore faudrait-il que nous ayons obtenu le développement général de nos séries. Si l'on se borne aux premiers termes de celles-ci, la prévision sera toujours de l'ordre d'une très petite fraction de seconde. Ainsi nous pouvons conclure que, au moins dans le problème à trois degrés de liberté, les prévisions de choc par la méthode générale, donnée par Levi-Civita et Bisconcini ne peuvent avoir aucune utilisation pratique.

On peut étendre les raisonnements qui précèdent au cas général du problème des trois corps, en utilisant les rayons de convergence des séries, trouvés par M. Sundman, au voisinage d'un choc. On peut aussi traiter le même problème par les procédés employés dans notre présent travail, en utilisant la transformation de Levi-Civita. On trouve toujours que les prévisions ne sont valables que pour un temps extrêmement petit.

10. Les travaux des différents auteurs, sur le choc binaire dans le problème des trois corps, se partagent en deux groupes :

1° Les travaux qui étudient le choc *en régularisant* les équations différentielles au voisinage du choc. Ce sont les travaux de Sundman qui régularisent avec la variable $u = \int \frac{dt}{r}$ de Levi-Civita avec sa transformation de contact, etc.

(1) Dans le cas général du choc binaire dans le problème des trois corps.

(2) Les conditions de M. BISCONCINI sont en coordonnées polaires.

2° Les travaux qui traitent la question du choc, en étudiant les caractéristiques des équations différentielles au voisinage des points d'une multiplicité singulière.

Dans cet ordre d'idées, il faut mentionner les recherches de M. Chazy, qui a poussé très loin l'étude des caractéristiques singulières dans le mouvement des trois corps.

M. Chazy transforme les équations différentielles de telle façon que la recherche de singularités du mouvement des trois corps se ramène à l'étude des caractéristiques singulières, traitées par Poincaré dans le cas des systèmes différentiels du premier et du second ordre dans son mémorable travail sur les courbes définies par les équations différentielles (1).

Il faut remarquer que tous les travaux qui traitent le mouvement au voisinage du choc ou la question des conditions de choc, soit par régularisation des équations différentielles, soit par l'étude directe des caractéristiques singulières, permettent d'obtenir les développements en séries, dont le domaine de convergence est très limité, ou du moins les procédés d'investigation dont dispose l'analyse et qui permettent de s'assurer de la convergence des séries considérées, leur assignent les limites très faibles. Nous citerons les paroles de Poincaré (2) :

« L'étude des intégrales des équations différentielles dans le *voisinage d'un point donné*, quelle que soit son utilité au point de vue de calcul numérique, ne saurait être regardée que comme un premier pas. Ces développements, qui ne sont valables que dans un domaine très limité..., ne peuvent être considérés comme une véritable intégration. »

Ainsi, si l'on envisage le côté pratique de la question (on donne les positions et les vitesses des trois corps, décider s'il aurait le choc ou non), les conditions des chocs données par les différents auteurs ne permettent de répondre à cette question que pour un temps très limité (abstraction faite des calculs des coefficients très longs et pénibles, et de l'incertitude sur l'erreur commise en utilisant un nombre limité de termes des développements). Ainsi tous les travaux sur les conditions de chocs ne peuvent servir pour étudier les questions concrètes de système solaire.

11. Mais on peut se placer à un autre point de vue, tout différent, en étudiant *qualitativement* les caractéristiques singulières dans le problème des trois corps pour obtenir quelques renseignements généraux sur l'allure du mouvement dans les cas singuliers.

M. Chazy, dans son travail *Sur le problème rectiligne des trois corps* (3) obtient de cette façon des résultats nouveaux. En éliminant le temps entre les équations différentielles et l'intégrale de forces vives, il ramène l'étude des chocs à l'étude des caractéristiques d'un système différentiel du premier ordre au voisinage d'un nœud pour le choc binaire et au voisinage d'un col pour le choc triple quand la constante h des forces vives est égale à 0, et à l'étude des caractéristiques du système différentiel de second ordre au voisinage des lignes de nœuds pour les chocs binaires et au voisinage d'un col pour le choc triple, dans le cas où $h \geq 0$. Il forme aussi la surface de Poincaré, lieu des caractéristiques holomorphes, aboutissant au choc binaire ou triple, et pour $h < 0$ il forme aussi la surface lieu des caractéristiques aboutissant au point de vitesse nulle.

Ainsi M. Chazy forme les conditions des chocs binaires et triples en partant directement des équations différentielles, en se passant des variables régularisantes, utilisées par les différents auteurs pour former les conditions du choc. De cette façon, il obtient tous les résultats connus directement.

Nous indiquerons les résultats nouveaux obtenus par M. Chazy : Si un mouvement (dans le problème rectiligne des trois corps) présente deux instants de vitesse nulle, ou un instant de vitesse nulle et un choc symétrique de deux corps, ou deux chocs symétriques de deux corps, ce mouvement est périodique.

Ce résultat il l'obtient grâce à l'étude de l'allure du mouvement au voisinage du choc et de l'instant de vitesse nulle, sans calculer des coefficients des développements et en utilisant la forme générale des équations des caractéristiques singulières au voisinage des points singuliers.

Dernièrement M. Kiveliovitch (4) a étendu ces résultats au cas général du problème des trois corps. Appelons

(1) Voir *Œuvres de Henri Poincaré*, t. I, 1928.

(2) *Loc. cit.*, page VI.

(3) *Bulletin de la Société mathématique*, t. LV, 1927, p. 222-268.

(4) *Sur les points singuliers du problème des trois corps* (*Bull. astron.*, t. VII, 1927, p. 89); *Sur les vitesses nulles dans le problème des trois corps* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932).

« événement singulier » dans le mouvement général le choc binaire ou la vitesse absolue nulle. M. Kiveliovitch montre que le mouvement général des trois corps ne peut présenter qu'un *seul* événement singulier. M. Kiveliovitch obtient ce résultat en régularisant le mouvement au voisinage du choc suivant les méthodes de M. Levi-Civita et en étudiant la forme générale des coefficients dans les développements des conditions du choc ou de vitesse nulle. Les calculs sont assez longs et les résultats ne se présentent pas d'une façon immédiate comme les conclusions de M. Chazy basées sur l'étude des caractéristiques singulières.

12. Dans un travail récent, *Sur les multiplicités singulières du problème des trois corps* ⁽¹⁾ M. Chazy applique au cas général la méthode employée par lui dans le problème rectiligne. Il généralise le théorème d'existence des solutions des équations différentielles du domaine réel au voisinage des nœuds, cols et foyers dans le cas des équations du premier ordre, et au voisinage des lignes de nœuds, de cols et de foyers dans le cas des équations du deuxième ordre.

En éliminant le temps et en prenant comme variables les rapports des coordonnées et les rapports des vitesses, il obtient un système différentiel d'ordre 10. Il montre ensuite que l'étude du mouvement au voisinage du choc se ramène à l'étude des caractéristiques holomorphes passant par les points de multiplicité singulière. De même, l'extension du calcul par lequel on forme en un col d'un système différentiel du second ordre la surface, lieu de caractéristiques, mise en évidence par Poincaré, permet à M. Chazy de former directement les deux conditions de choc binaire.

Si l'on voulait construire effectivement les développements de ces conditions par la méthode de M. Chazy, on serait amené à des calculs bien longs et bien pénibles, car les équations différentielles deviennent très compliquées quand on élimine le temps. D'ailleurs, la formation de ces développements ne saurait présenter l'intérêt pratique, car on ne serait toujours assuré de la convergence des séries obtenues qu'au voisinage de l'instant initial. Mais sans nul doute on pourrait obtenir d'une façon directe et plus évidente les résultats de M. Kiveliovitch, en étudiant les caractéristiques qualitativement, comme M. Chazy l'a fait dans le cas rectiligne du problème.

(¹) *Bull. des Sciences mathém.*, t. LVI, 1932, p. 79-104.

CHAPITRE III.

POINTS SINGULIERS OÙ LA VITESSE S'ANNULE.

I. — Généralités.

1. Reprenons la transformation de Levi-Civita pour la régularisation du choc binaire en utilisant les variable canoniques de Jacobi.

Soient x_i les coordonnées de P par rapport à P_0 et x'_i les coordonnées de P' par rapport au centre de gravité de P et P_0 . On a alors le système canonique

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

avec

$$H = \frac{1}{2} \mu (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2} \mu' (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) - f \left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta} \right) = C,$$

$$\mu = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}, \quad \mu' = \frac{M}{m' (m_0 + m)},$$

f étant la constante de gravitation.

Remarquons que les p_i sont proportionnels aux composantes de la vitesse relative du corps P dans son mouvement par rapport à P_0 , et que les p'_i sont proportionnels aux composantes de la vitesse de P' dans son mouvement rapporté au centre de gravité de P et P_0 .

Nous supposons que la distance

$$PP_0 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

s'annule. En faisant la transformation indiquée par M. Levi-Civita,

$$dt = r du \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\omega_i}{\omega^2}, \quad x_i = \omega^2 \xi_i - 2 \omega_i \sum \omega_i \xi_i,$$

on a le système canonique transformé

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial \xi_i}, & \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, \\ \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial \omega_i}, & \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3),$$

avec

$$H' = r(H - C) = 0.$$

On a

$$H' = \frac{1}{2} \mu \xi^2 + \omega^2 \zeta \left[\frac{1}{2} \mu' (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) - f \frac{m_0 m'}{r_1} + \frac{m m'}{\Delta} - C \right] - f m_0 m.$$

Pour $r = 0$,

$$\zeta = 2f \frac{m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}}.$$

En se bornant aux premiers termes des seconds membres du système (I), on a

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i}{du} &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi}} - \omega^2 \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi}} [\dots] + \dots, \\ \frac{d\xi_i}{du} &= 2\omega_i \xi [\dots] + \dots \end{aligned}$$

Étant donné que pour $r = 0$, $\omega^2 = 0$ (car $r = \omega^2 \xi$ et $\xi \neq 0$), les seconds membres restent holomorphes même au voisinage d'un choc binaire imaginaire où les x_i ne sont pas tous nuls ⁽¹⁾.

Mais la transformation ci-dessus fait apparaître de nouvelles singularités qui n'existaient pas dans le système (I), à savoir *les points où ξ s'annule*, que ce soit dans le domaine réel ou dans le domaine imaginaire. En effet, si $\xi = 0$, ω devient ∞ , car $\omega^2 \xi$ est différent de zéro (puisque, si $\omega^2 \xi = 0$, $\xi = 2f \frac{m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}} \neq 0$).

En se souvenant que $\xi = r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$, on voit que si $\xi = 0$, la vitesse relative des deux corps P_0 et P s'annule.

Quand on développe en séries, par la méthode de Levi-Civita, les intégrales du système (I), suivant les puissances de $u - u_0$, au voisinage d'un choc, les points où la vitesse s'annule dans le domaine réel ou imaginaire interviennent et limitent le rayon du cercle de convergence. *C'est ce qui explique qu'il soit si petit quand on l'évalue par le théorème classique de Cauchy-Picard.*

II. — Retour au problème des deux corps.

2. Pour illustrer ceci, prenons le problème des deux corps. Écrivons les équations du mouvement sous la forme canonique

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

avec

$$F = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) - f \frac{m_0 + m}{r} = h.$$

En appliquant les transformations de Sundman et Levi-Civita, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i}{du} &= -\frac{\partial F'}{\partial \xi_i}, \\ \frac{d\xi_i}{du} &= \frac{\partial F'}{\partial \omega_i}, \\ (i = 1, 2), \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Remarque.* — On a alors pour l'instant du choc

$$x_i^0 = -2\omega_i^0 \sum \omega_l^0 \xi_l^0;$$

les ω_i^0 ne sont donc pas nuls tous à la fois.

En écrivant les intégrales dans ce cas, on a

$$\omega_i = \omega_i^0 - \frac{1}{2} \mu \frac{\xi_i^0}{\xi_0^0} u + A_2^{(i)} u^2 + \dots;$$

par conséquent,

$$\omega^2 = -\frac{\mu}{\xi_0^0} \sum \omega_l^0 \xi_l^0 u + A_2 u^2 + \dots, \quad \omega^2 \xi = -\mu \sum \omega_l^0 \xi_l^0 u + B_2 u^2 + \dots,$$

d'où

$$t - t_0 = -\frac{\mu}{2} \sum \omega_l^0 \xi_l^0 u^2 + \frac{B_2}{3} u^3 + \dots$$

Ainsi, au voisinage d'un choc binaire imaginaire, quand les x_i^0 ne sont pas nuls tous à la fois, les coordonnées sont représentées par des séries en $\sqrt{t - t_0}$.

On retrouve de cette façon une proposition énoncée par M. Chazy (Voir *C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 1398).

où

$$F' = r(F - h) = \frac{1}{2} r(p^2 + q^2) - rh - f(m_0 + m) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - h\omega^2 \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - f(m_0 + m) = 0.$$

En développant, on a le système

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\zeta}_i}{\zeta} (\mathbf{I} - 2h\omega^2), \\ \frac{d\dot{\zeta}_i}{du} = -2h\omega_i \dot{\zeta} \\ (i = \mathbf{I}, 2). \end{cases}$$

En ce qui concerne le problème des deux corps, si l'on considère le système (II), les seules singularités sont des chocs dans le domaine imaginaire. Les transformations successives de Sundman et de Levi-Civita régularisent les chocs, mais les seconds membres du système (2) cessent d'être holomorphes pour les valeurs $\zeta = 0$, ou $rV^2 = 0$. Par conséquent, les développements des intégrales en séries procédant suivant les puissances de $u - u_0$ (u_0 étant la valeur initiale réelle ou imaginaire) ne seront convergents qu'à l'intérieur d'un cercle décrit autour de u_0 et passant par le premier point singulier u_s pour lequel $V^2 = p^2 + q^2 = 0$.

Montrons que ces points u_s existent.

Écrivons le théorème des forces vives sous la forme

$$\begin{aligned} \xi = V^2 r &= f\mu \left(2 - \frac{r}{a}\right) && \text{pour le mouvement elliptique,} \\ \xi &= 2\dot{f}\mu && \text{pour le mouvement parabolique,} \\ \xi &= f\mu \left(2 + \frac{r}{a}\right) && \text{pour le mouvement hyperbolique} \\ &(\mu = m_0 + m). \end{aligned}$$

3. Considérons le mouvement elliptique.

Si $V = 0$, on a

$$r = 2a = a(\mathbf{I} - \varepsilon \cos U),$$

ε étant l'excentricité ($\varepsilon < \mathbf{I}$) et U l'anomalie excentrique.

On tire

$$\cos U = -\frac{\mathbf{I}}{\varepsilon}.$$

En posant $U = \alpha + \beta i$, on trouve

$$\begin{aligned} \sin \alpha \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} &= 0, \\ \cos \alpha \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} &= -\frac{\mathbf{I}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm (2k + \mathbf{I})\pi, \\ \beta &= \arg \operatorname{ch} \frac{\mathbf{I}}{\varepsilon} = \pm \log \frac{\mathbf{I} + \sqrt{\mathbf{I} - \varepsilon^2}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ainsi, en appelant U_s les affixes des points singuliers dans le plan de la variable U , où les vitesses s'annulent, on a

$$U_s = \pm (2k + \mathbf{I})\pi \pm i \log \frac{\mathbf{I} + \sqrt{\mathbf{I} - \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

En remarquant que $\frac{dU}{du} = na$, on en tire, si pour $U = 0$, $u = 0$, $na u = U$, n étant le moyen mouvement.

Ainsi ε étant donné, le rayon de convergence des séries en $u - u_0$, u_0 étant une valeur quelconque réelle de u , est

$$R = \frac{1}{na} \sqrt{[\pm (2k + 1)\pi - nau_0]^2 + \log^2 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)},$$

$\pm (2k + 1)\pi$ correspondant à la partie réelle du point critique le plus proche de U_0 (1).

Dans le cas général où u_0 ne serait pas réel,

$$R' = |u_s - u_0| = \frac{1}{na} |U_s - U_0|,$$

U_s étant toujours l'affixe du point le plus proche, où la vitesse s'annule (fig. 9)

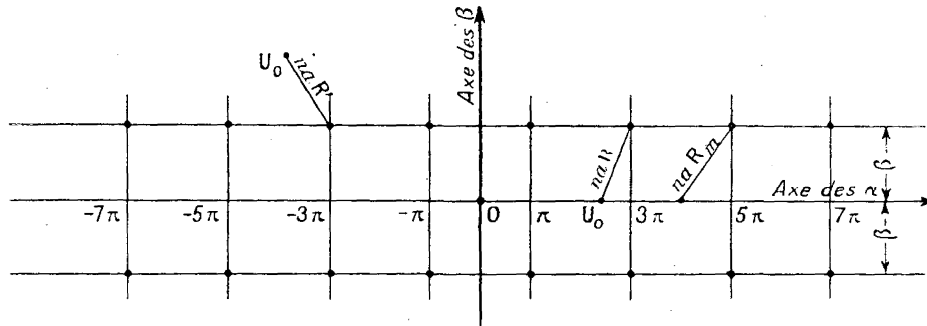


Fig. 9. — ● désigne les affixes de U_s ; $\beta = \log \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$.

Si u_0 est réel, la valeur maxima que peut atteindre le rayon du cercle de convergence est

$$R_m = \frac{1}{na} \sqrt{\pi^2 + \log^2 \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}}.$$

Soit U_c la valeur de U , pour laquelle il y a un choc imaginaire, alors $\cos U_c = \frac{1}{\varepsilon}$.

Nous avons trouvé que pour $V = 0$, $\cos U_s = -\frac{1}{\varepsilon}$. Par conséquent le point singulier le plus proche de U_c sera à la distance π . Soit u_c la valeur de la variable u qui correspond à la valeur U_c de la variable U . Il résulte que si l'on développe les ω_i et les ξ_i suivant les puissances de $u - u_c$, les séries en $u - u_c$ convergent seulement à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{\pi}{an}$.

On voit aussi que les séries sont valables pour une valeur du module du temps

$$|U_s - U_c - \varepsilon(\sin U_s - \sin U_c)| \frac{1}{n} = |t_s - t_c|,$$

t_c étant l'instant du choc et t_s l'instant où la vitesse s'annule.

(1) Il est d'ailleurs facile de voir que, dans le cas du mouvement elliptique, les intégrales sont

$$\begin{aligned} \xi_1 &= n^2 a^3 (\cos U + \varepsilon), & \xi_2 &= n^2 a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin U; \\ \omega_1 &= \frac{-\sin U}{an(1 + \varepsilon \cos U)}, & \omega_2 &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos U}{an(1 + \varepsilon \cos U)} \end{aligned}$$

et

$$\xi = n^2 a^3 (1 + \varepsilon \cos U), \quad \omega^2 = \frac{1 - \varepsilon \cos U}{n^2 a^2 (1 + \varepsilon \cos U)}.$$

On voit alors directement que pour $\cos U = -\frac{1}{\varepsilon}$, $\xi = 0$ et $\omega_1 = \omega_2 = \infty$.

On a d'ailleurs

$$|t_s - t_r| = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4(1 - \varepsilon^2)}}{n} < \sqrt{2} \frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} T,$$

T étant la période de révolution.

4. Dans le mouvement parabolique il n'y a pas de points singuliers où la vitesse s'annule à distance finie, par conséquent les intégrales du système (2) sont holomorphes dans tout le plan.

En effet, dans ce cas, on a

$$\xi_1 = \xi_2 = \text{const.}, \quad \omega_1 = a_1 u + b_1, \quad \omega_2 = a_2 u + b_2;$$

a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes.

Si l'on considère le mouvement hyperbolique, on trouve

$$U_s = i \left[\pm \arccos \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \pm 2k\pi \right], \quad \text{en prenant } \left| \arccos \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \right| < \pi.$$

Les points pour lesquels $V = 0$ sont imaginaires *purs* et le rayon de convergence des séries dans le domaine réel est égal à

$$R = \frac{1}{na} \sqrt{n^2 a^2 u_0^2 + \arccos^2 \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

On voit, en raisonnant comme précédemment, que si l'on développe les séries au voisinage d'un choc, ces séries auront un rayon de convergence égal à

$$\frac{\pi - 2 \arccos \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{na}$$

(en prenant $\arccos \frac{1}{\varepsilon}$ dans le premier quadrant).

III. — Influence des points singuliers envisagés ci-dessus.

5. Nous venons de voir que la transformation de Levi-Civita régularise bien les chocs binaires, *mais qu'elle crée de nouvelles singularités*, qui limitent la convergence des séries.

Étant donnée cette particularité de la transformation employée, si l'on cherche à étudier le mouvement pour toutes les valeurs du temps, même en se bornant au temps réel, on ne peut pas employer toujours *les mêmes variables*. Ainsi au voisinage d'un choc, les variables qui le régularisent sont ω_i, ξ_i et x'_i, p'_i , par exemple. En dehors du choc, quand les distances mutuelles ne descendent pas au-dessous d'une certaine limite, on doit prendre pour variables x_i, p_i, x'_i, p'_i .

C'est pour cette raison que M. Levi-Civita, sans plus d'explications, préconise la possibilité de choisir « les paramètres canoniques y_h, g_h ($h = 1, 2, \dots, 6$) définissant l'état du mouvement des trois corps » de façon que y_h, g_h coïncident avec x_i, x'_i, p_i, p'_i dans le domaine où il n'y a pas de choc à craindre, et avec les variables canoniques régularisantes dans le domaine où l'une des distances peut s'annuler.

Mais comme, au moins dans une partie du domaine d'existence des intégrales (celle correspondant aux chocs possibles), la convergence des séries qu'on peut obtenir est très faible, on ne peut pas songer à utiliser ces méthodes pour les besoins pratiques d'Astronomie, et cela même si l'on trouvait explicitement les paramètres y_h, g_h à employer. On ne possède pas, en effet, d'autres moyens pratiques de recherche des intégrales des équations que les développements en séries des puissances, méthode à laquelle on est d'ailleurs conduit par la définition même des équations différentielles.



CONCLUSIONS.

Nous croyons avoir établi que ni la méthode de M. Sundman, ni la méthode de M. Levi-Civita ne peuvent être utilisées pour les problèmes concrets d'Astronomie. Si la méthode de M. Sundman permet d'obtenir *effectivement*, abstraction faite des difficultés des calculs, les intégrales pour tous les temps, pratiquement, ces intégrales sont utilisables pour un intervalle du temps excessivement réduit.

Les conceptions de M. Levi-Civita ne permettent pas non plus d'utiliser pratiquement les intégrales qu'on pourrait obtenir suivant ses idées.

Dans les deux méthodes, la régularisation du mouvement au voisinage des points singuliers ne les élimine pas en fait dans tout le plan de la variable indépendante, comme cela a lieu pour le problème des deux corps, quand on introduit la variable u (qui n'est autre, à un facteur près, que l'anomalie excentrique).

Peut-être trouvera-t-on un jour des variables ou des transformations permettant de régulariser tous les points singuliers possibles dans le problème des trois corps, à la fois dans le domaine réel et dans le domaine imaginaire, sans introduction de nouvelles singularités, comme il arrive malheureusement avec le procédé de M. Levi-Civita. L'intégrale générale serait alors représentée par des séries entières, convergeant dans tout le plan de la variable indépendante.

Étant donné que, comme nous l'avons vu, le calcul des coefficients des développements des intégrales, obtenues par les méthodes générales, devient vite inextricable, on ne peut guère songer à utiliser ces développements que si l'on peut se contenter d'un nombre très limité de termes.

Ce serait seulement si les séries étaient convergentes dans tout le plan de la variable indépendante, et de ce fait rapidement convergentes, que l'on pourrait songer à les appliquer aux calculs effectifs de la Mécanique céleste.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 mai 1933.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 2 mai 1933.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS.....	Pages. I
-------------------	-------------

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE DE M. SUNDMAN.

CHAPITRE I. — Exposé de la méthode de M. Sundman.....	3
CHAPITRE II. — Développement effectif des séries.....	9
CHAPITRE III. — Application au cas des solutions périodiques de Lagrange.....	17
CHAPITRE IV. — Étude de la convergence des séries dans le cas général.....	31
CHAPITRE V. — Origine première de la faiblesse de la convergence de séries de M. Sundman.....	39

SECONDE PARTIE.

MÉTHODE DE M. LEVI-CIVITA.

INTRODUCTION. — Quelques mots sur la méthode générale de M. Levi-Civita.....	43
CHAPITRE I. — Cas d'un météorite tombant sur une planète.....	45
CHAPITRE II. — Sur la convergence des séries exprimant les conditions des chocs binaires.....	58
CHAPITRE III. — Points singuliers où la vitesse s'annule.....	67
CONCLUSIONS.....	72
