J. Pasquier

Recherches sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__140__263_0>

N° DE SÉRIE : 1355
N° D'ORDRE : 2220

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. J. PASQUIER

1ère THÈSE : RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q)$ INTÉGRABLES PAR LA MÉTHODE DE DARBOUX.

2ème THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DONT LA SOLUTION DÉPEND D'UNE FONCTION ARBITRAIRE D'UN ARGUMENT.

Soutenues le 1932 devant la Commission d'examen.

M. M. GOURSAT : *Président.*
CARTAN, GARNIER : *Examinateurs.*

CERNĂUȚI
IMPRIMÉRIE „GLASUL BUCOVINEI", STR. I. FLONDOR 33
1932

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

	MM.	
Doyen . . .	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyen honoraire	M. MOLLIARD.	
Professeurs honoraires	H. le CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	E. HÉROUARD.	
	Émile PICARD.	
	Rémy Perrier.	
Professeurs	E. GOURSAT . . .	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	P. JANET	Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT . .	Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ . . .	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	M. CAULLERY . . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	Émile BOREL . . .	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	H. ABRAHAM . . .	Physique.
	M. MOLLIARD . . .	Physiologie vegétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	Gabriel BERTRAND .	Chimie biologique.
	Jean PERRIN . . .	Chimie physique.
	L. LAPICQUE . . .	Physiologie générale.
	Mme P. CURIE . .	Physique générale et radioactivité.
	G. URBAIN	Chimie générale.
	L. MARCHIS	Aviation.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY . .	Physique.
	R. LESPIEAU . . .	Théories chimiques.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	Charles PÉREZ . .	Zoologie.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD. .	Botanique.
	Leon BERTRAND . .	Géologie structurale et géologie appliquée.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	G. JULIA	Calcul différentiel et calcul intégral.
	Paul MONTEL . . .	Mécanique rationnelle.
	V. AUGER	Chimie appliquée.
	P. WINTREBERT . .	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ . . .	Biologie maritime.
	Eugène BLOCH . .	Physique théorique et physique céleste.
	N...	Étude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Henri VILLAT . . .	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN . .	Théories physiques.
	E. ESCLANGON . . .	Astronomie.
	H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
	C. MAUGUIN . . .	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM . .	Botanique.
	A. GUILLIERMOND .	Botanique (P. C. N.).
	A. DENJOY	Mathématiques générales.
	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
	H. BEGHIN	Mécanique physique et expérimentale.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseig^t P.C.N.)
A. GUILLET	Physique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.
A. DEREIMS	Géologie.
H. MOUTON	Chimie physique.
L. DUNOYER	Optique appliquée.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. DEBIERNE	Radioactivité.
E. DARMOIS	Physique.
G. BRUHAT	Physique.
F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physiques mathém.
M^me RAMART-LUCAS	Chimie organique.
FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER	Physique (P. C. N.).
VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
De BROGLIE	Théories physiques.
LABROUSTE	Physique du globe.
FREUNDLER	Chimie (P. C. N.).
PRENANT	Zoologie.
P. JOB	Chimie générale.
CHRÉTIEN	Optique appliquée.
BOHN	Zoologie (P. C. N.).
N....	Chimie (P. C. N.).
COMBES	Sciences naturelles (P. C. N.).
GARNIER	Mécanique rationnelle.

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire ..... D. TOMBECK.

Recherches sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux.

Par **J. Pasquier.**

Introduction.

A) *La Méthode de Darboux.* — Une équation aux dérivées partielles du second ordre est intégrable par la méthode de Darboux lorsqu'il existe deux combinaisons intégrables pour l'un des systèmes différentiels de ses caractéristiques. Les intégrales premières qui correspondent à ces combinaisons se nomment invariants. Les invariants sont encore les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles simultanées du prémier ordre à n variables. La connaissance de deux invariants pour l'un des systèmes de caractéristiques permet de ramener la résolution du problème de Cauchy à l'intégration de deux systèmes successifs d'équations différentielles [1]; la connaissance de deux combinaisons intégrales pour chaque système de caractéristiques permet d'obtenir l'intégrale générale de l'équation du second ordre par l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales complètement intégrale [2]. La méthode de Darboux est la mise en oeuvre de ces deux théorèmes. Les équations de la première classe [3] et, en particulier, celles qui ont une intégrale générale explicite ont deux invariants pour chacun de leurs systèmes de caractéristiques. Par extension, nous appellerons équations de la première classe celles qui jouissent de cette dernière propriété.

B) *Les équations* $s = f(x, y, z, p, q)$. — La recherche des invariants se trouve simplifiée pour les équations de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ car elles admettent x pour invariant d'un de leurs système de caractéristiques et y pour invariant de l'autre système. C'est pourquoi on appelle l'un de ces systèmes le système X et l'autre le système Y.

---

[1] Goursat. Équations aux dérivées partielles du 2ème ordre. (Gauthier-Villars). Tome II, p. 139. Ce tome sera désigné, dans la suite, par l'abréviation E. II.

[2] Goursat E. II p. 123 et 198.

[3] Goursat E. II p. 217.

L'exposé qui suit se rapportera, à moins qu'il ne'n soit dit autrement, au système X de caractéristiques.

L'ordre d'un invariant est l'ordre supérieur des dérivées qui figurent dans son expression. Tout invariant d'ordre n est de la forme $\varphi\ (x, y, z, p_1, \dots p_n)$ et verifie

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\frac{df}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\dots+\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0.$$

Inversement, toute fonction φ qui satisfait identiquement à (1) est un invariant d'ordre n au plus [1]).

Nous désignerons le premier membre de cette équation par l'opérateur $\Delta_n^y\varphi$. Cette notation est, à l'exception de l'indice supérieur, empruntée à la thèse de M. Lainé [2]). L'indice inférieur précise l'ordre supérieur des dérivées qui peuvent figurer dans φ. Nous supprimerons les indices quand il n'y aura pas á craindre de confusion. Les autres notations employées dans ce travail sont celles de M. Gosse (Journal de Liouville, Tome VIII, Fasc. IV 1929, p. 301 et seq.).

C) *Involutions.* — On dit qu'une équation est en involution avec $s=f$ lorsqu'elle à en commun avec elle une intégrale dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Toute équation en involution est de la forme $\varphi\ (x, y, z, p_1, \dots p_n)=0$ où φ vérifie (1). On réserve d'ordinaire le nom d'involution aux équations $\varphi=0$ telles que φ verifie (1) mais seulement en tenant compte de $\varphi=0$. Si φ est d'ordre supérieur à 1 résolvons par rapport à p_n; soit $p_n+\psi\ (x,y,z,p_1,\dots p_{n-1})=0$. La condition nécessaire et suffisante d'involution s'écrit alors

$$(2) \qquad \Delta_n^y(p_n+\psi)=(p_n+\psi)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

L'importance des involutions dans le problème qui nous occupe tient à la structure des invariants. M. Goursat [3]) a montré que tout invariant d'ordre $n\geq 3$ était de la forme

$$(3) \qquad \frac{p_n+\psi\ (x, y, z, p_1, \dots p_{n-1})}{A\ (x, y, z, p_1 \dots p_m)},$$

où l'on a $m<n$ et où $p_n+\psi=0$ est une involution.

1) Goursat E. II p. 106.

2) Lainé. Thèse. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques. Tome VII, 1928, p. 88—148. Cracovie.

3) Goursat. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2-e série, T. I p. 461. M. Goursat a publié dans ce même numéro des Annales de Toulouse deux memoires fondamentaux qui ont ouvert la voie à tous les travaux ultérieurs. Nous désignerons ces mémoires par les abréviations M_1 et M_2.

M. Goursat et M. Gau [1]) ont précisé la forme de A. Si l'on a $m \geq 2$ on $A = p_m + \chi\,(x, y, z, p_1 \ldots p_{m-1})$ et $p_m + \chi = o$ est une involution.

Si $m = 1$, $A = 0$ est encore une involution, mais toutes les involutions du premier ordre ne peuvent pas servir à former un invariant; il faut encore et il suffit qu'elles vérifient identiquement

$$\Delta_1^y A = A\,\frac{\delta f}{\delta p}.$$

Enfin, toute fonction A (x, y, z), qui satisfait à

$$\Delta_0^y A = A\,\frac{\delta f}{\delta p},$$

peut avec une involution d'ordre $n \geq 3$ constituer un invariant. Nous dirons qu'une équation $s = f$ admet une involution d'ordre 1 ou d'ordre 0 s'il existe une fonction A satisfaisant à l'une des deux dernières conditions écrites. Cette manière de s'exprimer est incorrecte, mais elle est commode et ne prête pas à confusion. Nous appellerons, dans ce qui suit, *première* involution l'involution d'ordre minimum et *seconde* involution l'involution d'ordre minimum après la première.

D) *Les conditions nécessaires d'involution.* — A chaque nombre n crrespond une équation (2). Il semble donc qu'il faille une infinité d'opérations pour s'assurer qu'une équation n'a pas d'invariant. Si la première involution est d'ordre $m > 2$, M. Gau [2]) échappe à la difficulté en établissant deux conditions nécessaires, mais non suffisantes d'une première involution, qui ne font intervenir que des fonctions du 1^er^ ordre. Ce sont les conditions

$$(C)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \Delta_1^y\,\alpha + \alpha\,\dfrac{\delta f}{\delta p} + \dfrac{\delta^2 f}{\delta p^2} = o, \\[2ex] 2)\ \Delta_1^y\,\alpha + (m\text{-}1)\left[\alpha\,H(f) + H\left(\dfrac{\delta f}{\delta p}\right)\right] + F(f) = o. \end{array}\right.$$

On a posé ici avec M. Gosse [3])

$$H(\varphi) = \frac{\delta\varphi}{\delta x} + p\,\frac{\delta\varphi}{\delta z} + f\,\frac{\delta\varphi}{\delta q}, \qquad F(\varphi) = \frac{\delta\varphi}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta p}\,\frac{\delta\varphi}{\delta q}.$$

---

[1]) Gau. Thèse. Gauthiers-Villars 1911, p. 26—28. La Thèse de M. Gau a été publiée dans le Journal de Liouville T. VII, série 6, 1911; p. 123—240.

[2]) Gau. Thèse, p. 37—38.

[3]) Gosse. Journal de Liouville. Loc. cit. p. 302.

M. Gosse a fait faire un pas important à la théorie en généralisant de façon systématique le procédé de M. Gau : „Des conditions nécessaaires et suffisantes pour qu'il existe un invariant ou une involution on peut déduire des conditions seulement nécessaires qui ont l'avantage d'être très simples. On profite de leur simplicité pour restreindre la généralité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ et l'on essaye, par des transformations appropriées de ramener l'équation à une forme canonique avantageuse. On peut alors revenir aux conditions nécessaires et suffisantes et l'on se trouve, en général, devant des calculs plus abordables“ [1]).

Pour appliquer ce principe, M. Gosse a donné, dans sa thèse, une condition nécessaire à l'existence d'une seconde involution lorsqu'il en existe une première d'ordre 0 ou d'ordre 1. Il a obtenu ainsi les conditions

$$(\Gamma)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \Delta_1^y \lambda + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial p} = 0, \\ 2)\ \Delta_1^y \theta + \lambda X H(f) + F(f) = 0. \end{array}\right.$$

Enfin M. Lainé dans sa thèse, a comblé la lacune qui subsistait en établissant des conditions nécessaires à l'existence d'une seconde (X fonction arbitraire de x) involution, quand la première est d'ordre 2. Elles constituent deux groupes dans lesquels la première équation exprime précisément l'existence d'une involution du second ordre

$$(G)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \Delta_1^y \psi + H(f) - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} = 0, \\ 2)\ \Delta_1^y \alpha + \alpha \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0. \end{array}\right.$$

$$(L)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \Delta_1^y \psi + H(f) - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} = 0, \\ 2)\ \Delta_1^y \sigma + x \dfrac{\partial f}{\partial p} + F(f) = 0. \end{array}\right.$$

M. Gosse a démontré [2]) que l'ensemble des conditions (G), (L) est est nécessaire et suffisant pour assurer l'existence d'un invariant d'ordre 3 quand la première involution est d'ordre 2.

---

[1]) Gosse. Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule XII, p. 31.

[2]) C. R., 7 Mai 1928.

Cet invariant est

$$\frac{d}{dx} \log (p_2 + \psi) + \alpha (p_2 + \psi) + \frac{\delta \psi}{\gamma p} - \sigma - X \log (p_2 + \psi).$$

J'ai moi-même remarqué qu'étant donnée une première involution d'ordre n, pour qu'il y ait un invariant d'ordre $n + 1$ il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions α et σ vérifiant $(G)_2$ et $(L)_2$.

E) *Les équations de la première classe de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$.*

Il est naturel de chercher à déterminer tout d'abord les équations de la première classe. Lie a étudié les équations $s = f(z)$ [1]. CLAIRIN les équations $s = f(x, y, z)$ [2]. MOUTARD [3]) a obtenu les formes canoniques des équations dont l'intégrale générale peut prendre l'expression

$$z = F(x, y, X, X' \ldots X^{(m)}, Y, Y' \ldots Y^{(n)}).$$

M. GOURSAT [4]) a formé et intégré toutes es équations qui ont un invariant d'ordre 1 ou 2 pour chaque système de caractéristiques ; il les ramène à onze types canoniques. M. GAU [5]) a étudié dans sa thèse les équations linéaires en p et q en réservant pour un travail ultérieur [6]) celles d'entre elles qui ne contiennent pas l'une des dérivées p ou q.

C'est M. GOSSE qui, le premier, a entrepris la recherche des équations de la première classe dans les hypothèses les plus générales. Sa thèse [7]) et le mémoire [8]) qui l'a suivie sont des ouvrages fondamentaux par l'ampleur du sujet qu'ils traitent et par la puissance de calcul qui s'y déploie. Enfin M. LAINÉ [9]) a complété le catalogue des équations de la première classe qui ont un invariant d'ordre 1 ou 2 pour l'un de leurs systèmes de caractéristiques en découvrant plusieurs types d'équations qui avaient échappé à ses devanciers. Il a comblé une lacune de la théorie en établissant ses conditions (G) et (L) et

---

1) GOURSAT, E. II, p. 182.

2) CLAIRIN, Bulletin des Sciences Mathématiques, T. 29, 1905, p. 177.

3) GOURSAT, E. II, p. 228.

4) GOURSAT, *M* et *M*.

5) GAU, Thèse.

6) GAU, Annales de l'Université de Grenoble, T. XXV, n. 1, 1913, p. 95 & sq.

7) GOSSE, Thèse. Libraire Privat, Toulouse — et Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. XII, 1920, p. 107 et sq.

8) GOSSE, Annales de Toulouse, T. XVI, 1924, p. 173 et seq.

9) LAINÉ, Thèse.

il a fait une première application de ces conditions en recherchant les équations linéaires en p qui ont une première involution d'ordre 2 et un invariant d'ordre 3 pour chacun de leurs systèmes de caractéristiques.

F) La détermination des équations intégrables par la méthode de Darboux sans être de la première classe est un problème beaucoup plus difficile, puisqu'on ne peut appliquer à sa résolution que des conditions se rapportant à l'un des systèmes de caractéristiques. Il a pourtant été abordé par M. Gosse avec un grand succès, principalement dans une note aux C. R. du 18 mai 1931. Ce succès est dû à la maitrise avec laquelle M. Gosse manie les transformations de Bäcklung et à l'emploi systématique qu'il en fait.

Ceux qui ont étudié les problèmes dont il est question ici n'ont pas manqué d'être étonnés par la symétrie que présentent les calculs qu'il faut développer dans des hypothèses qui d'abord paraissent fort différentes [1]), et du rapprochement qui s'établit de lui-même entre les résultats qu'on obtient [2]). Il est tout-à-fait remarquable que M. Gosse ait réussi à ramener par des transformations de Bäcklund toutes les équations de la première classe connues à des équations linéaires ou à des équations de M. Goursat. C'est pourquoi on est souvent tenté de croire que les moyens analytiques dont on dispose ne sont pas adéquats à l'emploi qu'on en fait ; il semble bien que la clef du problème soit dans une connaissance plus complète des transformations de Bäcklund. Mais, pour s'en servir d'une manière sûre et facile, il faudrait, en particulier, savoir distinguer toutes les équations qui admettent de telles transformations et déterminer les transformations qui sont admises par l'une d'entre elles. Malheureusement, malgré les beaux travaux de Clairin et de M. Goursat, la recherche de transformations de Bäcklund ne peut guère se fare que par des tâtonnements hasardeux.

Voilà pourquoi, lorsque nous aurons appliqué à une équation une transformation de Bäcklund, nous continuerons l'étude de l'équation transformée à moins que cette transformée ne corresponde à l'ensemble des équations d'un type déjà étudié.

G) *Position et division du problème.* — Ce travail se présente d'abord comme une généralisation du dernier chapitre de la thèse de M. Lainé. Je me suis, en effet, proposé de rechercher toutes les

1) On en trouvera un exemple dans les calculs qui m'ont donné une méthode pour la première partie de ce travail.

2) Lainé, Thèse, p. 39.

équations qui ont une première involution d'ordre 2 et un invariant d'ordre 3 pour chaque système de caractéristiques. C'est un dessein limité, mais l'expérience prouve que les conclusions débordent souvent les limites de l'énoncé. J'ai déjà dit que M. GAU avait résolu ce problème pour les équations linéaires en p et q et M. LAINÉ pour les équations linéaires en p seulement et qui dépendent effectivement de p. Cependant le travail de M. GAU sur les équations $s = a\,(x, y, z)\,q + b\,(x, y, z)$[1]) a besoin d'être repris, du moins lorsque ces équations n'ont pas une intégrale intermédiaire du 1$^{\text{er}}$ ordre du système X.

J'ai dû ; pour le faire, établir des conditions d'involution particulières aux équations $s = f(x, y, z, q)$. Je me suis alors aperçu que ces conditions permettaient d'aborder et de résoudre, dans toute sa généralité, le problème de la recherche des équations de cette forme qui sont de la première classe. C'est pourpuoi ce travail se divise en deux parties dont voici l'objet et la conclusion.

Première partie. — Recherche des équations $s = f(x, y, z, p, q)$, non linéaires en p ni q, qui ont une première involution d'ordre 2 et un invariant d'ordre 3 pour chaque système de caractéristiques. La discussion présente plusieurs cas distincts. Un seul donne des équations de la première classe qui sont

$$s = \frac{2}{z-\theta}\left(pq + \sqrt{\theta'_y}\,pq^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\theta'_x}\,p^{\frac{1}{2}}q + \sqrt{\theta'_x\theta'_y}\,p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\theta''_{x,y}}{\sqrt{\theta'_x\theta'_y}}\,p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}.$$

θ est une fonction de x et y qui doit satisfaire a un système de deux équations aux dérivées partielles du 4$^{\text{e}}$ ordre qui admettent des solutions communes. Les conclusions négatives s'étendent souvent d'elles-mêmes au cas où la seconde involution serait d'ordre quelconque.

Seconde partie. — Recherche des équations $s = f(x, y, z, q)$ de la première classe.

Si l'équation est linéaire en q, on est ramené à des types déjà connus (équations linéaires, équations de M. GOURSAT).

Si f n'est pas linéaire en q, $s = f(x, y, z, q)$ n'est jamais de la première classe, à moins qu'elle ne se raméne par une transformation ponctuelle à l'équation de M. GOURSAT $s = e^z\sqrt{yq^2 + q}$.

Cette seconde partie se présente comme la généralisation des travaux de LIE et de CLAIRIN puisqu'elle ajoute aux équations de LIE $s = f(z)$, et aux équations de CLAIRIN $s = f(x, y, z)$ un nouveau type d'équations $s = f(x, y, z, q)$ entièrement étudié *dans toutes les hypothèses.*

[1]) GAU, Annales de Grenoble, T. XXV, n. 1, 1913, p. 95 et seq.

M. Goursat a bien voulu s'intéresser à ce travail. Cette faveur m'a sans doute été acquise par la bienveillance que M. Gosse n'a cessé de me témoigner. C'est peut-être à l'amitié de M. Lainé que je dois de n'avoir pas perdu confiance au milieu des difficultés de l'entreprise. Enfin, j'ai éprouvé plus d'une fois que l'obligeance de M. Bouligand ne le cédait en rien à son beau savoir. Je leur en fais mes respectueux remerciements. Les encouragements des Maitres sont le secours le plus précieux à ceux qui s'essayent à les suivre.

PREMIÈRE PARTIE.

Recherche des équations $s = f(x, y, z, p, q)$, non linéaires en p ou q, qui ont une première involution d'ordre 2 et un invariant d'ordre 3 pour chacun de leurs systèmes de caractéristiques.

Généralités.

1. La condition pour que $r + \psi$ soit une involution pour le système X peut s'écrire

(1)
$$\Delta^{y}{}_{1}\psi - \psi\frac{\delta f}{\delta p} + H(f) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un invariant d'ordre 3 s'obtient en ajoutant à (1)

(2)
$$\Delta^{y}{}_{1}\alpha + \alpha\frac{\delta f}{\delta p} + \frac{\delta^2 f}{\delta p^2} = 0,$$

(3)
$$\Delta^{y}{}_{1}\sigma - X\frac{\delta f}{\delta p} + F(f) = 0.$$

Posons $\alpha_1 = \dfrac{\delta \alpha}{\delta p} + \alpha\psi$, nous tirons de (1) et (2)

(4)
$$\Delta\alpha_1 + \alpha H(f) + H\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right) + F(f) = 0.$$

Or les conditions (2) et (4) ne sont autres que les conditions (1) et (1') du Ch III de la thèse de M. Gosse, dans lesquelles on aurait fait $m = 2$.

On obtiendrait de même pour le système y des conditions qui ne sont autres que les conditions (2) et (2') de M. Gosse, dans lesquelles on aurait fait $n = 2$.

Posons comme l'a fait M. Gosse,

$$\alpha = \frac{\delta^2 a}{\delta p^2} : \frac{\delta a}{\delta p} : \frac{a''}{a'}, \qquad \beta = \frac{\delta^2 b}{\delta q^2} : \frac{\delta b}{\delta q} = \frac{b''}{b'};$$

nous passons encore de (1′) et (2′) à (1″) et (2″).

Or le chapitre III de la thèse de M. Gosse est tout entier consacré à la discussion des conditions (1), (1″), (2), (2″). Ses conclusions s'appliquent dons au problème qui nous occupe dès quelles ne supposent pas $m \neq 2$ ou $n \neq 2$. Nous obtenons ainsi quelques résultats et une méthode. Nous avons d'ailleurs ici l'avantage de posséder un ensemble de conditions, non seulement nécessaire, mais encore suîflsant à l'existence d'un invariant d'ordre 3. savoir : les conditions (1), (2), (3),

2. On peut modifier cet ensemble comme il suit. M. Gôsse tire [1]) de (2) par une intégration

$$\Delta \log a' + \frac{\delta f}{\delta p} - B(x, y, z, q) = 0. \tag{5}$$

On peut alors remplacer (3) par

$$\Delta\mu - XB + F(f) = 0, \qquad \mu = \sigma + x \log a. \tag{6}$$

Appliquons à (5) l'opération H, nous avons

$$\Delta H(\log a') + \alpha H(f) + H\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right) - H(B) = 0. \tag{7}$$

Posons $\alpha_2 = \alpha_1 - H(\log a')$, nous tirons de (4) et (7)

$$\Delta\alpha_2 + H(B) + F(f) = 0. \tag{8}$$

Cettte rélation est la rélation (1″) p. 39 de la thèse de M. Gosse.

Soit encore $v = d_2 - \mu$, nous avons

$$\Delta v + XB + H(B) = 0. \tag{9}$$

Il est clair que l'ensemble (1), (2), (6) est un ensemble nécessaire et suffisant à l'existence d'une involution d'ordre 2 et d'un invariant d'ordre 3.

(1), (2), (9) est encore un tel ensemble. En effet, écrivons la condition d'involution $\Delta^{y}_{2} \log (r + \psi) = \frac{\delta f}{\delta p}$ et posons $\rho = \log [a'(r + \psi)]$.

La combinaison de la relation précédente avec (5) donne

---

1) Gosse, Thèse, p. 39.

$$\Delta^{y}{}_{2}\,\rho - B = 0,$$

et l'on voit que $\dfrac{d\rho}{dx} + X\rho + v$ est un invariant d'ordre 3.

3. *Division du problème.*

Soient

(1) $\Delta^{y}{}_{1}\,\psi - \psi\dfrac{\delta f}{\delta p} + H(f) = 0,$ (1′) $\Delta^{x}{}_{1}\,\varphi - \varphi\dfrac{\delta f}{\delta q} + H_1(f) = 0\,;$

(2) $\Delta^{y}{}_{1}\,\alpha + \alpha\dfrac{\delta f}{\delta p} + \dfrac{\delta^2 f}{\delta p^2} = 0,$ (2′) $\Delta^{x}{}_{1}\,\beta + \beta\dfrac{\delta f}{\delta q} + \dfrac{\delta^2 f}{\delta q^2} = 0\,;$

(6) $\Delta^{y}{}_{1}\,\mu - XB + F(f) = 0,$ (6′) $\Delta^{x}{}_{1}\,\lambda - \lambda A + F(f) = 0\,;$

où $H_1(f)$ et A ont des significations évidentes.

A cet ensemble de conditions nécessaires et suffisantes ajoutons la condition surabondante.

(8) $$\Delta^{y}{}_{1}\,w + H(B) + F(f) = 0$$

et la condition corrélative que nous appellerons (8′).

Posons, comme nous l'avons déjà fait, $\alpha = \dfrac{a''}{a'}$, nous tirons de (2) par deux intégrations successives

(10) $$\Delta a = aB + B_1(x, y, z, q).$$

et (2′) donne de même

(10′) $$\Delta b = bA + A_1.$$

Désignons par des accents les dérivées de a, A et A_1 par rapport à p, et celles de b, B, B_1 par rapport à q; les relations (10) et (10′) donnent deux expressions de $\dfrac{\delta^4 f}{\delta p^2\,\delta q^2}$ et, en les égalant, on a

(11) $$\left(\frac{a}{a'}\right)'' B'' + \left(\frac{1}{a'}\right)'' B''_1 = \left(\frac{b}{b'}\right)'' A'' + \left(\frac{1}{b'}\right)'' A''_1 \text{ [1]}.$$

La discussion de cette condition nous amène à envisager diverses hypothèses suivant que les quantités

$$\left(\frac{1}{a'}\right)'',\ \left(\frac{a}{a'}\right)'',\ \left(\frac{1}{b'}\right)'',\ \left(\frac{b}{b'}\right)''$$

ne sont pas nulles ou que certaines d'entre elles le sont.

[1]) Goese, Thèse, p. 40.

Remarque. Avant d'entreprendre cette discussion remarquons qu'on peut toujours changer a en $g(x, y, z)\, a + g_1(x, y, z)$ puisque cette fonction n'est définie que par l'équation différentielle du second ordre $\frac{a''}{a'} = \alpha$. Il s'ensuit que toute relation de la forme

$$h\,(x, y\, z) \left(\frac{a}{a'}\right)'' + h_1\,(x, y, z) \left(\frac{1}{a'}\right)'' = 0,$$

dans laquelle h n'est pas nul, est équivalente à $\left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0$. Remarquons encore que, dans l'hypothèse $a'' \neq 0$ qui est la nôtre, les deux quantités $\left(\frac{1}{a'}\right)$ et $\left(\frac{a}{a'}\right)''$ ne peuvent être nulles à la fois.

Nous avons donc à étudier *six cas distincts.*

$$\text{(I)} \quad \left(\frac{1}{a'}\right)''\left(\frac{a}{a'}\right)''\left(\frac{1}{b'}\right)''\left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0\,;$$

$$\text{(II)} \quad \left(\frac{1}{a'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{1}{b'}\right)'' = 0\,;$$

$$\text{(III)} \quad \left(\frac{1}{a'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0\,;$$

$$\text{(IV)} \quad \left(\frac{1}{a'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{1}{b'}\right)''\left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0\,;$$

$$\text{(V)} \quad \left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{1}{b'}\right)''\left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0\,;$$

$$\text{(VI)} \quad \left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0, \qquad \left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0.$$

Il suffit de reprendre les raisonements de M. Gosse au Ch. III de sa thèse pour vérifier qu'ils ne supposent pas $m \neq 2$ ni $n \neq 2$. Il s'ensuit qu'on peut étendre les conclusions de ce chapitre au problème qui nous occupe. *Les cas (I) et (II) ne contiennent donc d'équation de la première classe.*

Chapitre I. Etude des cas (III) et (IV).

Paragraphe I $\quad \left(\frac{1}{a'}\right)'' = \left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0.$

Compte tenu des remarques qui précèdent, nous pouvons prendre

$$a = \log\,(p + \alpha_0), \qquad \text{et soit } b = e^{\beta_1 q}, \text{ soit } b = (q + \beta_0)^{\beta_1}.$$

α_0, β_0 et β_1 sont des fonctions de x, y, z. On a d'ailleurs $\beta_1 \neq 0$ et, dans la seconde expression de b, $\beta_1 \neq 1$.

Nous avons ainsi à distinguer deux hypothèses.

4. *1ère Hypothèse :* $a = \log(p + \alpha_0)$, $b = e^{\beta_1 q}$.

La condition (11) s'écrit

$$\left(\frac{a}{a'}\right)'' B' = \left(\frac{1}{b'}\right)'' A''_1$$

et donne

$$B'' = \rho(x, y, z)\left(\frac{1}{b'}\right)'', \qquad B = \frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_2 q + \beta_3 ;$$

$$A''_1 = \rho\left(\frac{a}{a'}\right)'', \qquad A_1 = \rho(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \alpha_2 p + \alpha_3.$$

Reportons en (10) et (10'), nous avons successivement

$$\frac{\delta\alpha_0}{\delta y} + q\frac{\delta\alpha_0}{\delta z} + f = \left(\frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_2 q + \beta_3\right)(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + B_1(p + \alpha_0),$$

$$q\left(\frac{\delta\beta_1}{\delta x} + p\frac{\delta\beta_1}{\delta z}\right) + f\beta_1 = A + \Big[\rho(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \alpha_2 p + \alpha_3\Big] e^{-\beta_1 q},$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q} = (-\rho e^{-\beta_1 q} + \beta_2)\Big[\log(p + \alpha_0) + 1\Big] + \frac{\delta B_1}{\delta q},$$

$$\beta_1\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q} = -\beta_1 e^{-\beta_1 q}\Big[\rho\log(p + \alpha_0) + \rho + \alpha_2\Big] - \frac{\delta\beta_1}{\delta z}.$$

La comparaison des deux expressions de $\dfrac{\delta_2 f}{\delta p\,\delta q}$ donne

$$\beta_2 = 0, \quad B_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} - q\frac{\delta}{dz}\log\beta_1 + \omega(x, y, z).$$

On a donc

$$f = \left(\frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_3\right)(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} - q\frac{\delta}{\delta z}\log\beta_1 + \omega\right)(p + \alpha_0) -$$

$$- q\frac{\delta\alpha_0}{\delta z} - \frac{\delta\alpha_0}{\delta y}, \qquad B = \frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_3.$$

Utilisons maintenant la condition (8). Il se présente des termes en $e^{-2\beta_1 q}$ qui proviennent de $f\dfrac{\delta B}{\delta q}$ et de $\dfrac{\delta f}{\delta p}\dfrac{\delta f}{\delta q}$. Leur coefficient,

$$-\frac{1}{\beta_1}(p + \alpha_0)\Big[\rho\log(p + \alpha_0) + \alpha_2\Big]\Big[\rho\log(p + \alpha_0) + 2\rho + \alpha_2\Big],$$

doit être nul. Il faut donc prendre $\rho = \alpha_2 = 0$, et f est linéaire en q, ce qui est contraire à nos hypothèses.

5. *2ème Hypothèse :* $a = \log(p + \alpha_0)$, $b = (q + \beta_0)^{\beta_1}$.
La condition (11) donne alors

$$A_1 = \rho(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \alpha_2(p + \alpha_0) + \alpha_3,$$

$$B = \frac{\rho}{\beta_1}(q + \beta_0)^{1-\beta_1} + \beta_2(q + \beta_0) + \beta_3.$$

Par le même procédé on tire de (10) et (10')

$$\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q} = \left[\rho\frac{1-\beta_1}{\beta_1}(q + \beta_0)^{-\beta_1} + \beta_2\right]\left[\log(p + \alpha_0) + 1\right] + \frac{\delta B_1}{\delta q},$$

$$\beta_1\frac{\delta f}{\delta p\,\delta q} = \frac{\delta A}{\delta p} + (1 - \beta_1)(q + \beta_0)^{-\beta_1}\left[\rho\log(p + \alpha_0) + \rho + \alpha_2\right] -$$
$$- \frac{\delta\beta_1}{\delta z}\left[\log(q + \beta_0) + 1\right],$$

et la comparaison des deux valeurs de $\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q}$ donne

$$\frac{\delta A}{\delta p} - \beta_1\beta_2\left[\log(p + \alpha_0) + 1\right] = \beta_1\frac{\delta B}{\delta q} + \frac{\delta\beta_1}{\delta z}\left[\log(q + \beta_0) + 1\right]$$
$$- \alpha_2(1 - \beta_1)(q + \beta_0)^{-\beta_1} = \beta_1\omega(x, y, z),$$

$$A = \beta_1\beta_2(p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \beta_1\omega(p + \alpha_0)\,\beta_1\alpha_4,$$

$$B_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_1}(q + \beta_0)^{1-\beta_1} - (q + \beta_0)\log(q + \beta_0)\frac{\delta\log\beta_1}{\delta z} + \omega(q + \beta_0) + \beta_4.$$

Reportons en (10) et (10') et identifions les deux valeurs de f, il vient

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0, \quad \alpha_4 = -\frac{\delta\alpha_0}{\delta z}, \quad \beta_4 = -\frac{\delta\beta_0}{\delta z}, \quad \alpha_0\frac{\delta\beta_1}{\delta z} = \frac{\delta\beta_1}{\delta x},$$

$$\frac{\delta\alpha_0}{\delta y} - \beta_0\frac{\delta\alpha_0}{\delta z} = \frac{\delta\beta_0}{\delta x} - \alpha_0\frac{\delta\beta_0}{\delta z}.$$

Cette dernière relation est la condition de compatibilité des deux équations

$$\frac{\delta Z}{\delta y} - \beta_0\frac{\delta Z}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta Z}{\delta x} - \alpha_0\frac{\delta Z}{\delta z} = 0.$$

Prenons Z pour nouvelle fonction inconnue, nous avons

$$P = \frac{\delta Z}{\delta x} + p\frac{\delta Z}{\delta z} = (p + \alpha_0)\frac{\delta Z}{\delta z}, \quad Q = (q + \beta_0)\frac{\delta Z}{\delta z}.$$

En revenant aux minuscules, ce changement de fonction nous permet de prendre $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ et, par conséquent, $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, $\frac{\delta\beta_1}{\delta x} = 0$;

$$f = (\beta_2 p \log p + \omega p)\, q + \frac{1}{\beta_1}(\rho p \log p + \alpha\, p)\, q^{1-\beta_1} - \frac{\delta \log \beta_1}{\delta z}\, pq \log q,$$

$$A = \beta_1 (\beta_2 p \log p + \omega p), \quad B = \frac{\rho}{\beta_1} q^{1-\beta_1} + \beta_2 q.$$

La condition (8) présente alors un terme en $(\log q)^2$ qui doit disparaître, ce qui donne $\frac{\delta \beta_1}{\delta z} = 0$. Elle contient des termes en $q^{1-2\beta_1}$, $q^{1-\beta_1}$, q, q^0. Si l'on n'a pas $1 - 2\beta_1 = 0$, aucun d'eux ne peut se réduire avec un autre. En particulier le coefficient de $q^{1-2\beta_1}$ qui est

$$\frac{1-\beta_1}{\beta_1^2}\, p\, (\rho \log p + \alpha_2)(\rho \log p + 2\rho + \alpha_2)$$

doit être nul, ce gui exige $\rho = \alpha_2 = 0$. Mais alors f serait linéaire en q.

Si l'on a $\beta_1 = \frac{1}{2}$, il vient

$$f = p \log p\, (\beta_2 q + 2 pq^{\frac{1}{2}}) + p\, (\omega q + 2\, \alpha_2 q^{\frac{1}{2}}),$$

$$A = \frac{1}{2}\, p\, (\beta_2 \log p + \omega), \quad B = \beta_2 q + 2\, pq^{\frac{1}{2}}.$$

La condition (8′) présente alors un terme en $(\log p)^2$. Son coefficient,

$$p\, (\beta_2 q + 2\, \rho q^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{3}{2}\beta_2 + \rho q^{-\frac{1}{2}}\right),$$

doit être nul, ce qui exige $\rho = \beta_2 = 0$. f serait alors linéaire en p.

Paragraphe II $\left(\frac{1}{a'}\right)'' = 0$, $\left(\frac{1}{b'}\right)'' \left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0$.

6. L'équation (11) s'écrit ici

$$\left(\frac{a}{a'}\right)'' B'' = \left(\frac{b}{b'}\right)'' A'' + \left(\frac{1}{b'}\right)'' A''_1.$$

Posons

$$\frac{A''}{\left(\frac{a}{a'}\right)''} = \rho_0, \quad \frac{A''_1}{\left(\frac{a}{a'}\right)''} = \rho_1,$$

nous avons

$$B'' = \rho_0 \left(\frac{b}{b'}\right)'' + \rho_1 \left(\frac{1}{b'}\right)''.$$

Il résulte de la remarque du n° 3 qu'on a nécessairement $\frac{\delta \rho_0}{\delta p} = \frac{\delta \rho_1}{\delta p} = 0$. Il en résulte également qu'en changeant b, s'il en est besoin, on peut toujours supposer $\rho_0 = 0$ ou $\rho_1 = 0$, c'est à dire $A'' = 0$ ou $A''_1 = 0$.

Soit d'abord $A'' = 0$. Alors $A''_1 = \rho_1 \left(\frac{a}{a'}\right)''$; et puisque $a = \log(p + \alpha_0)$, on obtient

$$A = \sigma_1 p + \sigma_2, \quad A_1 = \rho_1 (p + \alpha_0) \log(p + \alpha_0) + \sigma_3 p + \sigma_4, \quad \sigma_i = \sigma_i(x, y, z).$$

Reportons en (10'), nous avons

$$f = \frac{b}{b'}(\sigma_1 p + \sigma_2) + \frac{1}{b'}\left[\rho\ (p + \alpha_0)\log(p + \alpha_0) + \sigma_3 p + \sigma_4\right] - \frac{1}{b'}\left(\frac{\delta b}{\delta x} + p\frac{\delta b}{\delta z}\right).$$

L'équation (8') présente alors un terme en $\left[\log(p + \alpha_0)\right]^2$ qui ne peut se réduire avec aucun autre. Son coefficient

$$\frac{\rho^2}{b'}\left[1 + \left(\frac{1}{b'}\right)'\right](p + \alpha_0),$$

doit être nul, ce qui exige soit $\rho_1 = 0$, soit $\left(\frac{1}{b'}\right)'' = 0$. Ces deux conditions sont incompatibles avec nos hypothèses.

On verrait par des calculs analogues qu'on ne peut pas non plus supposer $A''_1 = 0$.

Les cas (III) et (IV) ne contiennent donc pas d'équation de la première classe.

Remarquons qu'on n'a fait appel jusqu'iei qu'aux conditions (2) et (8) et à celles qui en découlent, ainsi qu'à leurs corrélatives. *Il s'ensuit que les cas (I),, (II), (III), (IV) ne contiennet pas d'équation de la première classe, même si l'on n'exige pas que la seconde involution soit d'ordre 3.*

Chapitre II. Étude du Cas (V) $\left(\frac{a}{a'}\right)'' = 0, \quad \left(\frac{1}{b'}\right)''\left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0.$

7. On peut alors prendre soit $a = e^{\alpha_1 p}$, soit $a = (p + \alpha_0)^{\alpha_1}$. De l'équation (11) on tire en procédant comme au No. (6),

$$B''_1 = \rho_0 \left(\frac{b}{b'}\right)'' + \rho_1 \left(\frac{1}{b'}\right)''.$$

Il en résulté qu'on peut prendre soit $\rho_1 = 0$, $A''_1 = 0$; soit $\rho_0 = 0$, $A'' = 0$. Les deux coefficients ρ_0 et ρ_1 ne peuvent d'ailleurs pas être nuls à la fois sans quoi (10') définirait f comme linéaire en p.

On a donc à envisager

Soit $\rho_0 \neq 0$, $\quad \rho_1 = 0$, $\quad A'' = \rho_0 \left(\frac{1}{a'}\right)''$, $\quad A''_1 = 0$, $\quad B''_1 = \rho_0 \left(\frac{b}{b'}\right)''$;

Soit $\rho_0 = 0$, $\rho_1 \neq 0$, $A'' = 0$, $A'' = \rho_1 \left(\frac{1}{a'}\right)''$, $B''_1 = \rho_1 \left(\frac{1}{b'}\right)''$.

$1^{ère}$ *Hipothèse* $a = e^{\alpha_1 p}$.

Soit d'abord $\rho_0 \neq 0$, $\rho_1 = 0$, $A = \frac{\rho_0}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \sigma_0 p + \sigma_1$, $A_1 = \sigma_2 p + \sigma_3$.

L'équation (10') donne

$$f = \frac{b}{b'}\left(\frac{\rho_0}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \sigma_0 p + \sigma_1\right) + \frac{1}{b'}(\sigma_2 p + \sigma_3) - \frac{1}{b'}\left(\frac{\delta b}{\delta x} + \frac{\delta b}{\delta z}\right).$$

En reportant dans l'équation (8') il se présente un terme en $e^{-2\alpha_1 p}$. Son coefficient, $-\frac{\rho_0}{\alpha_1}\frac{b}{b'}\left[1 + \left(\frac{b}{b'}\right)'\right]$, doit être nul, ce qui est imposible.

Si l-on suppose $\rho_1 = 0$, $\rho_0 = 0$, on arrive de la même manière, à la même conclusion.

$2^{ème}$ *Hypothèse* $a = (p + \alpha_0)^{\alpha_1}$.

8: Définissons une nouvelle fonction inconnue Z par la relation $\frac{Z_x}{Z_z} = \alpha_0$, nous avons

$$P = Z_x + p Z_z = Z_z (p + \alpha_0).$$

Nous pouvons alors supposer $\alpha_0 = 0$ et prendre $a = p^{\alpha_1}$.

L'équation (10) donne

$$f = \frac{1}{\alpha_1}(B p + B_1 p^{1-\alpha_1}).$$

On a d'ailleurs

$$A = \frac{\rho_0}{\alpha_1} p^{1-\alpha_1} + \sigma_0 p + \sigma_1.$$

Reportons dans la condition (8'), nous obtenons des termes en $q^{1-2\alpha_1}$, $q^{1-\alpha_1}$, q et q^0. Si l'on n'a pas $1-2\alpha_1 = 0$, aucun d'eux ne peut se réduire avec un autre. Or, le coefficient de $q^{1-2\alpha_1}$ est $\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1^2} B_1 (B'_1 + \rho_0)$; il ne peut être nul. Il faut donc prendre $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

Nous ne ferons pas ici d'hypothèse particulière sur ρ_0 et sur ρ_1 et nous aurons

$$A = 2\rho_0 p^{\frac{1}{2}} + \sigma_0 p + \sigma_1, \qquad A_1 = 2\rho_1 p^{\frac{1}{2}} + \sigma_2 p + \sigma_3,$$

$$B_1 = \rho_0 \frac{b}{b'} + \rho_1 \frac{1}{b'} + \theta_0 q + \theta_1.$$

Reportons en (10) et (10′) nous obtenons deux expressions de f

$$f = 2\,pB + 2\,p^{\frac{1}{2}}\,B_1 = 2\,pB + 2\,p^{\frac{1}{2}}\left(\rho_0\frac{b}{b'} + \rho_1\frac{1}{b'} + \theta_0\,q + \theta_1\right);$$

$$f = \frac{b}{b'}A + \frac{1}{b'}\left(A_1 - \frac{\partial b}{\partial x} - p\frac{\partial b}{\partial z}\right) = \frac{b}{b'}(2\,\rho_0 p^{\frac{1}{2}} + \sigma_0 p + \sigma_1) +$$
$$+ \frac{1}{b'}\left[2\,\rho_1 p^{\frac{1}{2}} + \left(\sigma_2 - \frac{\partial b}{\partial z}\right)p + \sigma_3 - \frac{\partial b}{\partial x}\right].$$

La comparaison des deux expressions f donne

$$\theta_0 = \theta_1 = 0, \qquad 2\,B = \sigma_0\frac{b}{b'} + \left(\sigma_2 - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\frac{1}{b'}, \qquad \sigma_1\,b + \sigma_3 - \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

En changeant b en $b_1 + \mu$ on peut toujours déterminer μ de façon que cette dernière condition devienne $\frac{\partial b_1}{\partial x} - \sigma_1\,b_1 = 0$. Son intégrable générale est alors $b_1 = \sigma\,(x, y, z)\;\varphi\,(x, y, q)$.

Si nous passons de b à φ par la transformation $b = \sigma\,\varphi + \mu$ et si, ensuite, nous revenons à la notation b, en remplaçant φ par b. nous avons

$$(12)\qquad \begin{cases} 2\,B = \sigma_0\,\dfrac{b}{b'} + \left(\sigma_1 - \dfrac{\partial b}{\partial z}\right)\dfrac{1}{b'}, \\ B_1 = \rho_0\,\dfrac{b}{b'} + \rho_1\,\dfrac{1}{b'}, \end{cases} \qquad \text{avec } \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

La forme $f = 2\,pB + p^{\frac{1}{2}}\,B_1$ rend compatibles les équations (10) et (10′).

9. Considérons maintenant les conditions (6) et (6′)

$$\Delta_1^y\,\mu - XB + F(f) = 0, \qquad \Delta_1^x\,\lambda - YA + F(f) = 0.$$

Elles donnent par comparaison

$$\Delta_1^y\,\mu - XB = \Delta_1^x\,\lambda - YA.$$

Dérivons une fois par rapport à p et une seconde fois par rapport à q, nous avons

$$(13)\qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial z\,\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial z\,\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial\lambda}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}.$$

Dérivons encore une fois sur p

$$(14)\qquad \frac{\partial^3\mu}{\partial z\partial p^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial p^2\,\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial p} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\,\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2} + \frac{\partial f}{\partial q}\,\frac{\partial^3\mu}{\partial p^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial p^2\partial q}\,\frac{\partial\lambda}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}.$$

Or $f = 2pB + 2p^{\frac{1}{2}}B_1$, $\frac{\delta f}{\delta p} = 2B + \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}B_1$, $\frac{\delta f}{\delta q} = 2B'p + 2B'_1 p^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q} = 2B' + B'_1 p^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\delta^2 f}{\delta p^2} = -\frac{1}{2}p^{-\frac{3}{2}}B_1$, $\frac{\delta^3 f}{\delta p^2 \delta q} = -\frac{1}{2}p^{-\frac{3}{2}}B'_1$.

Reportons en (14) nous obtenons

$$p^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\delta^3 \mu}{\delta z \delta p^2} - \frac{1}{2}B'_1 \frac{\delta \mu}{\delta p} p^{-\frac{3}{2}} + (4B' + 2B'_1 p^{-\frac{1}{2}})\frac{\delta^2 \mu}{\delta p^2} + \right.$$
$$\left. + (2B'p + 2B'_1 p^{\frac{1}{2}})\frac{\delta^3 \mu}{\delta p^3}\right] = \chi(x, y, z, q).$$

Dérivons encore une fois sur p et faisons $\frac{\delta^2 \mu}{\delta p^2} = v$, nous avons enfin

$$(15) \quad \left[2p^2 \frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 9p\frac{\delta v}{\delta p} + \sigma v\right] p^{\frac{1}{2}} B' + \left[2p^2 \frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 6p\frac{\delta v}{\delta p} + \frac{3}{2}v\right] B'_1 +$$
$$+ p^{\frac{3}{2}}\frac{\delta^2 v}{\delta z \delta p} + \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}\frac{\delta v}{\delta z} = 0.$$

Considérons encore les conditions (8) et (8')

$$\Delta_1^y w + H(B) + F(f) = 0, \qquad \Delta_1^x w' + H_1(A) + F(f) = 0.$$

On en tire

$$\Delta_1^y w - H_1(A) = \Delta_1^x w' - H(B).$$

Or, puisque B ne dépend pas de p, on peut écrire $H(B) = \Delta_1^x B$. On a de même $H_1(A) = \Delta_1^y A$.

Posons $w - A = \mu_1$, $w' - B = \lambda_1$, nous avons

$$\Delta_1^y \mu_1 = \Delta_1^x \lambda_1.$$

Deux dérivations, l'une par rapport à p_1 l'autre par rapport à q donnent

$$(16) \quad \frac{\delta^2 \mu_1}{\delta p \delta z} + \frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q}\frac{\delta \mu_1}{\delta p} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta^2 \mu_1}{\delta p^2} = \frac{\delta^2 \lambda_1}{\delta q \delta z} + \frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q}\frac{\delta \lambda_1}{\delta q} + \frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta^2 \lambda_1}{\delta q^2}.$$

Cette relation est du même type que (13). On peut, par conséquent, en posant $\frac{\delta^2 \mu_1}{\delta p^2} = v_1$, en tirer une relation telle que (15).

Pour faire l'étude de (15) remarquons que B'_1 dépend nécessairement de q, sans quoi on pourrait prendre $\left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0$. Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux cas, suivant qu'il existe ou non, entre B' et B'_1 une relation de la forme

$$B' = \pi_1 B'_1 + \pi_2, \qquad \pi_i = \pi_i(x, y, z).$$

Paragraphe I. *Il n'existe pas de relation telle que* $B' = \pi_1 B'_1 + \pi_2$.

10. On tire alors de (15)

$$2p^2 \frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 9p \frac{\delta v}{\delta p} + 6v = 0, \tag{17}$$

$$2p^2 \frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 6p \frac{\delta v}{\delta p} + \frac{3}{2} v = 0, \tag{18}$$

$$2p \frac{\delta^2 v}{\delta p \delta z} + 3 \frac{\delta v}{\delta p} = 0. \tag{19}$$

Par combinaison de (17) et (18) on obtient

$$2p \frac{\delta v}{\delta p} + 3v = 0,$$

et toutes les intégrales de cette équation satisfont à l'ensemble des précédentes. Nous avons ainsi $v = \alpha p^{-\frac{3}{2}}$ et, puisque $v = \frac{\delta^2 \mu}{\delta p^2}$ on a, en changeant les notations

$$\mu = \alpha p + \alpha_1 p^{\frac{1}{2}} + \alpha_2. \qquad \alpha_i = \alpha_i (x, y, z). \tag{20}$$

Par le même procédé on obtient

$$\mu_1 = \beta p + \beta_1 p^{\frac{1}{2}} + \beta_2.$$

Or $\mu_1 = w - A$, c'est-à-dire, en changeant les notations,

$$w = \beta p + \beta_1 p^{\frac{1}{2}} + \beta_2.$$

D'ailleurs, par définition, $w = \frac{\delta \psi}{\delta p} + \alpha \psi - H(\log a')$. (N[os] 2 et 3). Nous avons donc ici

$$\frac{\delta \psi}{\delta p} + \frac{a''}{a'} \psi = \beta p + \beta_1 p^{\frac{1}{2}} + \beta,$$

C'est-à-dire. en changeant au besoin les notations,

$$\frac{\delta}{\delta p}(a'\psi) = \beta p^{\frac{1}{2}} + \beta_1 + \beta_2 p^{-\frac{1}{2}},$$

$$\psi = \beta p^2 + \beta_1 p^{\frac{3}{2}} + \beta_2 p + \beta_3, \tag{2}$$

Reportons ces formes de μ et de ψ dans (6) et dans (1). Nous avons en (6)

$$\left(\frac{\delta\alpha}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)p+\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}\right)p^{\frac{1}{2}}+\frac{\delta\alpha_2}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha_2}{\delta z}+$$
$$+(2\,Bp+2\,B_1\,p^{\frac{1}{2}})\,(\alpha+\frac{1}{2}\alpha_1\,p^{-\frac{1}{2}})-XB+2\frac{\delta B}{\delta z}p+2\frac{\delta B_1}{\delta z}p^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(2\,B+B_1\,p^{-\frac{1}{2}})\,(2\,B'\,p+2\,B'_1\,p^{\frac{1}{2}})=0,$$

ce qui entraine

$$(C)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{\delta\alpha}{\delta y}+q\dfrac{\delta\alpha}{\delta z}+2\,\alpha B+2\dfrac{\delta B}{\delta z}+4\,B\,B'=0,\\ 2)\ \dfrac{\delta\alpha_1}{\delta y}+q\dfrac{\delta\alpha_1}{\delta z}+\alpha_1\,B+2\,\alpha\,B_1+2\dfrac{\delta B_1}{\delta z}+2B_1\,B'+4BB'_1=0,\\ 3)\ \dfrac{\delta\alpha_2}{\delta y}+q\dfrac{\delta\alpha_2}{\delta z}+\alpha_1\,B_1-XB+2\,B_1\,B'_1=0. \end{array}\right.$$

La condition (1) après qu'on y a reporté ψ, donne de même

$$(\Gamma)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{\delta\beta}{\delta y}+y\dfrac{\delta\beta}{\delta z}+2\,\beta\,B+2\dfrac{\delta B}{\delta z}+4\,B\,B'=0,\\ 2)\ \dfrac{\delta B_1}{\delta y}+q\dfrac{\delta\beta_1}{\delta z}+\beta_1\,B+3\,\beta\,B_1+2\dfrac{\delta B_1}{\delta z}+4B_1B'+4\mathrm{B}\,\mathrm{B}'_1=0,\\ 3)\ \dfrac{\delta\beta_2}{\delta y}+q\dfrac{\delta\beta_2}{\delta z}+2\,\beta_1\,B_1+2\dfrac{\delta B}{\delta x}+4\,B_1\,B'_1=0,\\ 4)\ \dfrac{\delta\beta_3}{\delta y}+q\dfrac{\delta\beta_3}{\delta z}-\beta_3\,B+\beta_2\,B_1+2\dfrac{\delta B_1}{\delta x}=0. \end{array}\right.$$

Paragraphe II. $B'=\pi_1\,B'_1+\pi_2$.

11, (22) $\qquad B=\pi_1\,B_1+\pi_2\,q+\pi_3.$

On en tire $\qquad \dfrac{\delta B}{\delta x}=\dfrac{\delta\pi_1}{\delta x}B_1+\pi_1\dfrac{\delta B_1}{\delta x}+\dfrac{\delta\pi_2}{\delta x}q+\dfrac{\delta\pi_3}{\delta x},$

qu'on peut écrire, en utilisant les expressions (12) de B et B_1

$$\pi_4\frac{b}{b'}+\pi_5\frac{1}{b'}=\frac{\delta\pi_2}{\delta x}q+\frac{\delta\pi_3}{\delta x}.$$

Deux dérivations sur q donneraient

$$\pi_4\left(\frac{b}{b'}\right)''+\pi_5\left(\frac{1}{b'}\right)''=0.$$

Il faut donc supposer $\pi_4=\pi_5=0$ et par suite, $\dfrac{\delta\pi_2}{\delta x}=\dfrac{\delta\pi_3}{\delta x}=0.$

D'ailleurs, en vertu de (22) nous avos

$$s = f = (2\,p_1\,\pi_1 + 2\,p^{\frac{1}{2}})\,B_1 + 2\,\pi_2\,pq + 2\,\pi_3\,p.$$

Posons $Z = Z(y, z)$. Nous pouvons détermiuer Z de manière à faire disparaître le terme en pq et nous avons, en modifiant les notations

$$s = f = 2\,(\pi_1\,p + p^{\frac{1}{2}})\,B_1 + 2\,\tau\,p. \qquad \tau = \tau\,(y, z).$$

Il faut alors en (22) prendre $\pi_2 = 0$.

Faisons en (15) $B' = \pi_1\,B'_1$, nous obtenons les deux équations

$$(23)\quad \pi_1\,p^{\frac{1}{2}}\left(2\,p^2\frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 9\,p\frac{\delta v}{\delta p} + 6\,v\right) + 2\,p^2\frac{\delta^2 v}{\delta p^2} + 6p\frac{\delta v}{\delta p} + \frac{3}{2}\,v = 0,$$

$$(24)\qquad p\,\frac{\delta^2 v}{\delta z\,\delta p} + \frac{3}{2}\,\frac{\delta v}{\delta z} = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière est

$$v = \alpha\,(x, y, z)\,p^{-\frac{3}{2}} + \varphi\,(x, y, p).$$

Reportons en (23), nous obtenons encore l'équation (23) au remplacement près de v par φ. Posons $\varphi = \varphi_1\,p^{-\frac{3}{2}}$ (23) devient, en écrivant φ'_1 pour $\frac{\delta\varphi_1}{\delta p}$,

$$(25)\qquad \pi_1\,(2\,p\varphi''_1 + 3\,\varphi'_1) + 2\,p^{\frac{1}{2}}\varphi''_1 = 0.$$

Il faut *encore ici faire deux hypothèses sur* π_1.

12. A°) $\qquad \pi_1 = 0.$

Dans cette hypothèse $\quad s = 2\,\tau\,p + 2\,B_1\,p^{\frac{1}{2}} \qquad$ (B = τ).

On tire de (25)

$$\varphi_1 = \pi_2\,p + \pi_3, \qquad \pi_i = \pi_i\,(x, y).$$

et, en modifiant au besoin les notations on a

$$v = \frac{\delta^2\mu}{\delta p^2} = \pi_2\,p^{-1} + \alpha p^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mu = \pi_2\,p^{\frac{3}{2}} + \alpha\,p + \alpha_1\,p^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 \qquad \alpha_i = \alpha_i\,(x, y, z).$$

Reporions dans la condition (6), nous obtenons

$$\frac{\delta\pi_2}{\delta y}\,p^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\delta\alpha}{\delta y} + q\,\frac{\delta\alpha}{\delta z}\right)p + \ldots + (2\,\tau p + 2\,B_1\,p^{\frac{1}{2}})\left(\frac{3}{2}\,\pi_2\,p^{\frac{1}{2}} + \alpha +\right.$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_1 p^{-\frac{1}{2}}\Big)+\ldots+2\frac{\delta\tau}{\delta z}p+\ldots=0,$$

ce qui entraîne, par annulation des termes de degré 1 en p

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha}{\delta z}+2\tau\alpha+3\pi_2 B_1+2\frac{\delta\tau}{\delta z}=0.$$

Il faut prendre $\pi_2=0$, sans quoi cette relation définirait B_1 comme linéaire en q. Mais alors μ est encore de la forme (20) et *on retrouve les conditions (C).*

En procédant comme au N° 10 on aurait successivement

$$w=\pi_3 p^{\frac{3}{2}}+\beta p+\beta_1 p^{\frac{1}{2}}+\beta_2,$$

$$\psi=\pi_3 p^{\frac{5}{2}}+\beta p^2+\beta_1 p^{\frac{3}{2}}+\beta_2 p+\beta_3 p^{\frac{1}{2}},$$

Si nous reportons ψ dans la condition (1), nous obtenons, en particulier, par annulation des termes en p^2

$$\frac{\delta\beta}{\delta y}+q\frac{\delta\beta}{\delta z}+2\beta\tau+4\pi_3 B_1+2\frac{\delta\tau}{\delta z}=0.$$

ce qui définit B_1 comme linéaire en q, à moins qu'on ne prenne $\pi_3=0$. Mais, si l'on suppose $\pi_3=0$. ψ est de la forme (21) et on retrouve les conditions (Γ).

On tire alors de $(C)_1$ et de $(\Gamma)_1$

$$\frac{\delta}{\delta y}(\beta-\alpha)+q\frac{\delta}{\delta z}(\beta-\alpha)+2(\beta-\alpha)\tau=0.$$

On a donc d'abord $\frac{\delta}{\delta z}(\beta-\alpha)=0$

puis

$$(\beta-\alpha)\frac{\delta\tau}{\delta z}=0.$$

Supposons d'abord $\frac{\delta\tau}{\delta z}\neq 0$. Il faut prendre $\beta-\alpha=0$.

On tire de même de $(C)_2$ et $(\Gamma)_2$

$$\frac{\delta}{\delta y}(\beta_1-\alpha_1)+q\frac{\delta}{\delta z}(\beta_2-\alpha_2)+(\beta_1-\alpha_1)\tau+(3\beta-2\alpha)B_1=0,$$

ce qui exige qu'on ait $3\beta-2\alpha=0$, sans quoi B_1 serait linéaire en q.

Il faut donc prendre $\beta=\alpha=0$. Mais alors $(C)_1$ donne $\frac{\delta\tau}{\delta z}=0$ et l'équation étudiée s'écrit

$$s=Yp+2B_1 p^{\frac{1}{2}}. \qquad Y=Y(y).$$

En posant $Z = Y_1 z$, on peut déterminer Y_1 de manière à avoir, à des changements de notations près,

$$s = 2 B_1 p^{\frac{1}{2}}.$$

Une telle équation admet l'involution du premier ordre $p^{\frac{1}{2}}$, ce qui est contraire à nos hypothèses.

13. **Remarque.** De $(C)_1$ et $(\Gamma)_1$ on tire

$$\frac{\delta}{\delta y}(\beta - \alpha) + q \frac{\delta}{\delta z}(\beta - \alpha) + 2(\beta - \alpha) B = 0.$$

Si l'on suppose $\beta - \alpha \neq 0$, cette équation es du type (22) où l'on aurait $\pi_1 = 0$. $(C)_1$ et $(\Gamma)_1$ ne sont donc compatibles que si l'on prend $\beta = \alpha$.

14. B°) $\qquad \pi_1 \neq 0.$

L'étude de (25) nous amène à distinguer encore plusieurs hypothèses, suivant que φ'_1 n'est pas nul dans l'une au moins des expressions de v qui servent à déterminer μ et μ_1, ou bien suivant qu'il l'est dans les deux.

1°. Soit $\quad \dfrac{\delta^2 \mu_1}{\delta p^2} = \alpha p^{-\frac{3}{2}} + \varphi_1 p^{-\frac{3}{2}}$, avec $\varphi'_1 \neq 0$.

(25) donne alors

$$\varphi'_1 = \frac{\pi_1^3 \pi_2}{(\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1)^3},$$

$$\varphi_1 = -\pi_1 \pi_2 \frac{2 \pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1}{(\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1)^2} + \pi_3,$$

$$\frac{\delta^2 \mu_1}{\delta p^2} = \alpha p^{-\frac{3}{2}} - \pi_1 \pi_2 \frac{2 \pi_1 + p^{-\frac{1}{2}}}{(\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}})^2}.$$

Une primitive de $-\pi_1 \dfrac{2 \pi_1 + p^{-\frac{1}{2}}}{(\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}})^2}$ est $\dfrac{2 \pi_1}{\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}}} = 2 \dfrac{\pi_1 p^{-\frac{1}{2}}}{\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1}$, s bien qu'en changeant les notations suivant les besoins on a

$$\mu_1 = \pi_2 \log(\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1) + \alpha p + \alpha_1 p^{\frac{1}{2}} + \alpha_2.$$

$$\left[\pi_1 \pi_2 \neq 0, \ \alpha_i = \alpha_i(x, y, z), \ \pi_j = \pi_j(x, y)\right].$$

En procédant comme au n° 10 on tire de là

$$a'\psi = \pi_2 (\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1) \log (\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1) + \beta p^{\frac{3}{2}} + \beta_1 p + \beta_2 p^{\frac{1}{2}} + \beta_3,$$

$$\psi = \pi_2 (\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}}) \log (\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1) + \beta p^2 + \beta_1 p^{\frac{3}{2}} + \beta_2 p + \beta_3 p^{\frac{1}{2}}.$$

Reportons cette expression de ψ en (1) et annulons le coefficient du logarithme nous avons

$$\frac{\delta}{\delta y} (\pi_1 \pi_2)\, p + \frac{\delta \pi_2}{\delta y} p^{\frac{1}{2}} + (2\, Bp + 2\, B_1 p^{\frac{1}{2}}) (\pi_1 \pi_2 + \frac{1}{2}\, \pi_2\, p^{-\frac{1}{2}}) -$$

$$- (2\, B + B_1 p^{-\frac{1}{2}}) (\pi_1 \pi_2\, p + \pi_2\, p^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

On en tire

$$\frac{\delta}{\delta y} (\pi_1 \pi_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta \pi_2}{\delta y} = \pi_2 (B - \pi_1 B_1).$$

Or $B - \pi_1 B_1 = \tau (y, z)$. La dernière équation donne donc

$$\frac{\delta}{\delta y} \log \pi_2 = \tau (y, z) = Y,$$

et l'on a

$$s = 2 (\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}}) B_1 + 2\, Yp.$$

On peut alors faire disparaître le terme $2\, Yp$ en prenant pour nouvelle fonction $Z = Y_1 z$ où Y_1 est une fonction convenablement choisie, et l'on a

$$s = 2 (\pi_1 p + p^{\frac{1}{2}}) B_1, \quad \tau = 0, \quad \frac{\delta \pi_2}{\delta y} = 0$$

$$\text{et } \frac{\delta}{\delta y} (\pi_1 \pi_2) \text{ donne } \frac{\delta \pi_1}{\delta y} = 0, \; \pi_1 = X(\mathrm{x}).$$

Mais $s = 2 (Xp + p^{\frac{1}{2}}) B_1$ admet l'involution du premier ordre $Xp + p^{\frac{1}{2}}$, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Il faut donc prendre ici $\varphi'_1 = 0$, et *l'on obtient encore les conditions* (Γ).

2°. Soit $\quad \dfrac{\delta^2 \mu}{\delta p^2} = \alpha p^{-\frac{3}{2}} + \varphi_1 p^{-\frac{3}{2}}, \quad$ avec $\varphi'_1 \neq 0$.

De la même façon qu'on vient d'obtenir μ_1, on obtient

$$\mu = \pi_2 \log (\pi_1 p^{\frac{1}{2}} + 1) + \alpha p + \alpha_1 p^{\frac{1}{2}} + \alpha_2.$$

En reportant dans (6) on en tire les conditions (C) et deux autres dont l'une est

$$B = \pi_1 B_1 - \frac{\delta}{\delta y} \log \pi_2$$

On tire de cette dernière

$$\frac{\delta}{\delta y} \log \pi_1(x, y) = -\tau(y, z) = \frac{Y'}{Y},$$

ce qui donne $$\pi_1 = XY,$$

puis $$1 = 2(XYp + p^{\frac{1}{2}}) B_1 - 2\frac{Y'}{Y} p.$$

Posons $Z = Y^2 z$, nous avons $P = Y^2 p$,

$$S = Y^2 s + 2YY'p = 2Y^2(XYp + p^{\frac{1}{2}}) B_1 = 2YB_1(XP + P^{\frac{1}{2}}).$$

Cette équation admet encore une involution du premier ordre.

3°. Il faut donc prendre à la fois

$$\frac{\delta^2 \mu}{\delta p^2} = \alpha(x, y, z) p^{-\frac{3}{2}} \text{ et } \frac{\delta^2 \mu_1}{\delta p^2} = \alpha_1(x, y, z) p^{-\frac{3}{2}}. \quad (\varphi'_1 = 0).$$

On *obtient encore les conditions* (C) *et* (Γ). Il nous reste à en faire l'étude.

Paragraphe III. Etude des conditions (C) et (Γ).

15. Posons $\alpha = \beta = \mu$, $\beta_1 = \mu_1$, $\beta_2 = 2\mu_2$, $\beta_3 = \mu_3$, $\beta_1 - \alpha_1 = \mu_4$, $\beta_2 - 2\alpha_2 = 2\mu_5$.

Les conditions à étudier s'écrivent

$$(G)\left\{\begin{array}{l}
1)\ \dfrac{\delta\mu}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu}{\delta z} + 2\mu B + 2\dfrac{\delta B}{\delta z} + 4BB' = 0,\\[2mm]
2)\ \dfrac{\delta\mu_1}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu_1}{\delta z} + \mu_1 B + 3\mu B_1 + 2\dfrac{\delta B_1}{\delta z} + 4(B_1 B' + BB'_1) = 0,\\[2mm]
3)\ \dfrac{\delta\mu_2}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu_2}{\delta z} + \mu_1 B_1 + \dfrac{\delta B}{\delta x} + 2B_1 B'_1 = 0,\\[2mm]
4)\ \dfrac{\delta\mu_3}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu_3}{\delta z} - \mu_3 B + 2\mu_2 B_1 + 2\dfrac{\delta B_1}{\delta x} = 0,\\[2mm]
5)\ \dfrac{\delta\mu_4}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu_4}{\delta z} + \mu_4 B + \mu B_1 + 2B_1 B' = 0,\\[2mm]
6)\ \dfrac{\delta\mu_5}{\delta y} + q\dfrac{\delta\mu_5}{\delta z} + \mu_4 B + XB + \dfrac{\delta B}{\delta z} = 0.
\end{array}\right.$$

Rappelons d'ailleurs qu'on a

$$2B = \sigma_0\frac{b}{b'} + \frac{1}{b'}\left(\sigma_1 - \frac{\delta b}{\delta z}\right), \quad \text{avec } b = b(y, z, q), \left(\frac{1}{b'}\right)''\left(\frac{b}{b'}\right)'' \neq 0,$$

$$B_1 = \rho_0 \frac{b}{b'} + \rho_1 \frac{1}{b'}, \qquad \sigma_i = \sigma_i(x, y, z), \ \rho_i = \rho_i(x, y, z).$$

Supposons d'abord $\mu_3 \neq 0$; nous pouvons écrire $(G)_4$

$$\Delta_0^y \log \mu_3 - B + 2 \frac{\mu_2}{\mu_3} B_1 + \frac{2}{\mu_3} \frac{\delta B_1}{\delta x} = 0,$$

et nous en tirons par une dérivation

$$\Delta \frac{\delta}{\delta x} \log \mu_3 - \frac{\delta B}{\delta x} + 2 B_1 \frac{\delta}{\delta x} \frac{\mu_2}{\mu_3} + 2\left(\frac{\mu_2}{\mu_3} + \frac{\delta}{\delta x}\frac{1}{\mu_3}\right) \frac{\delta B_1}{\delta x} + \frac{2}{\mu_3} \frac{\delta^2 B_1}{\delta x^2} = 0.$$

C'est-à-dire une relation de la forme

$$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \mu_3 + q \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \mu_3 + \alpha(x, y, z) \frac{b}{b'} + \beta(x, y, z) \frac{1}{b'} = 0,$$

qui doit avoir tous ses termes nuls. Il faut donc prendre, en particulier

$$\frac{\delta}{\delta x} \log \mu_3 = \frac{X'_1}{X_1},$$
$$\mu_3 = X_1 \tau(y, z).$$

$(G)_4$ donne alors, en modifiant les notations

$$B = \Delta \log \tau_1 + \alpha(x, y, z) B_1 + p(x, y, z) \frac{\delta B_1}{\delta x},$$

et l'on a

$$s = 2 pq \frac{\delta}{\delta z} \log \tau_1 + 2 p \left(\frac{\delta}{\delta y} \log \tau_1 + \alpha B_1 + \beta \frac{\delta B_1}{\delta x}\right) + 2 p^{\frac{1}{2}} B_1.$$

En posant $Z = Z(y, z)$, on peut déterminer Z de façon à faire disparaître le terme en pq, ce qui revient à prendre $\frac{\delta}{\delta z} \log \mu_3 = 0$, c'est-à-dire $\mu_3 = X_1 Y_1$. $(G)_4$ s'écrit alors

$$X_1 Y'_1 - X_1 Y_1 B + 2 \mu_2 B_1 + 2 \frac{\delta B_1}{\delta x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(26) \qquad 2 Y'_1 \frac{\delta b}{\delta q} + Y_1 \frac{\delta b}{\delta z} + \tau_1(y, z)\, b + \tau_2(y, z) = 0.$$

L'intégrale générale en est

$$b = \tau_3(y, z)\, \varphi(Y_1 q - 2 Y'_1 z, y) + \tau_4(y, z),$$

où φ est une fonction arbitraire. En posant $Z = Y_2 z$ on peut déterminer Y_2 de manière que $Y_1 q - 2 Y'_1 z$ s'exprime au moyen de y et Q seulement et l'on a, en reprenant les minuscules

$$b = \tau_3 \psi(y, q) + \tau_4.$$

Ce qui permet de prendre

$$b = \psi(y, q),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta b}{\delta z} = 0.$$

Supposons maintenant $\mu_3 = 0$ et $X \neq 0$. Nous pouvons reprendre sur $(G)_6$, à des différences de calculs près, les raisonnements qui viennent d'être faits sur $(G)_4$.

On a d'abord

$$\mu_5 = X + X\tau_1(y, z);$$

On peut ensuite, par un changement de fonction prendre $\frac{\delta \mu_5}{\delta z} = 0$,

$$\mu_5 = X_2 - X \log Y_1$$

et $(G)_6$ s'écrit

$$- X \frac{Y'_1}{Y_1} + XB + \mu_4 B_1 + \frac{\delta B}{\delta x} = 0,$$

ce qui est une équation telle que (26)

On en tire encore $\frac{\delta b}{\delta z} = 0.$

16. Supposons enfin $X = \mu_3 = 0$. $(G)_6$ devient

$$\frac{\delta \mu_5}{\delta y} + q \frac{\delta \mu_5}{\delta z} + \mu_4 B_1 + \frac{\delta B}{\delta x} = 0,$$

et, puisqu'il ne peut exister de relation du premier degré entre $\frac{1}{b'}, \frac{b}{b'}$ et q, il faut prendre, en particulier,

$$\mu_4 B_1 + \frac{\delta B}{\delta x} = 0.$$

Le système des équations (G) prend alors la forme

$$(G')\quad \begin{cases} 1)\ \Delta\mu + 2\mu B + 2\dfrac{\delta B}{\delta z} + 4BB' = 0, \\ 2)\ \Delta\mu_1 + \mu_1 B + 3\mu B_1 + 2\dfrac{\delta B_1}{\delta z} + 4(B_1 B' + BB'_1) = 0, \\ 3)\ \Delta\mu_2 + (\mu_1 - \mu_4) B_1 + 2 B_1 B'_1 = 0, \\ 4)\ \Delta\mu_4 + \mu_4 B + \mu B_1 + 2 B_1 B' = 0, \\ 5)\ \mu_2 B_1 + \dfrac{\delta B_1}{\delta x} = 0. \\ 6)\ \mu_4 B_1 + \dfrac{\delta B}{\delta x} = 0. \end{cases}$$

Dérivons $(G')_4$ par rapport à x, nous avons, en tenant compte de $(G')_5$ et de $(G')_6$,

$$\Delta \frac{\delta \mu_4}{\delta x} + \frac{\delta \mu_4}{\delta x} B + \left(\frac{\delta \mu}{\delta x} - \mu \mu_2 - \mu^2_4\right) B_1 - 2\,(\mu_2 B_1 B' + \mu_4 B_1 B'_1) = o.$$

Multiplions $(G')_3$ par μ_4 et $(G')_4$ par μ_2, puis ajoutons à la relation précédente, nous avons

$$\Delta \left(\frac{\delta \mu_4}{\delta x} + \mu_2 \mu_4\right) + \left(\frac{\delta \mu_4}{\delta x} + \mu_2 \mu_4\right) B + \left(\frac{\delta \mu_4}{\delta x} + \mu_1 \mu_4 - 2\,\mu^2_4\right) B_1 = o.$$

On en tire comme précédemment $\frac{\delta b}{\delta z} = o$, à moins qu'on ne prenne

$$\frac{\delta \mu_4}{\delta x} + \mu_2 \mu_4 = o, \tag{27}$$

$$\frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu_1 \mu_4 - 2\,\mu^2_4 = o. \tag{28}$$

Dérivons de même $(G')_3$ par rapport à x, nous avons

$$\Delta \frac{\delta \mu_2}{\delta x} + \left[\frac{\delta}{\delta x}(\mu_1 - \mu_4) - \mu_2(\mu_1 - \mu_4)\right] B_1 - 4\,\mu_2 B_1 B'_1 = o,$$

qui, combiné avec $(G')_3$ donne

$$\Delta \left(\frac{\delta \mu_2}{\delta x} + \mu^2_2\right) + \left[\frac{\delta}{\delta x}(\mu_1 - \mu_4) + \mu_2(\mu_1 - \mu_4)\right] B_1 = o,$$

ce qui exige, en particulier que le coefficient de B_1 soit nul, c'est-à-dire, en tenant compte de (27) qu'on ait

$$\frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_2 \mu_1 = o. \tag{29}$$

Opérons de la même façon sur $(G')_2$, nous avons

$$\Delta \frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \frac{\delta \mu_1}{\delta x} B + \left(3\frac{\delta \mu}{\delta x} - \mu_1 \mu_4 - 3\,\mu \mu_2 - 2\frac{\delta \mu_2}{\delta z}\right) B_1 - 2\,\mu_2 \frac{\delta B_1}{\delta z} -$$
$$- 4\,\mu_2 (B_1 B' + B B'_1) - 8\,\mu_4 B_1 B'_1 = o,$$

qui, par combinaison avec $(G')_2$ et $(G')_3$, donne

$$\Delta \frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_2 \Delta \mu_1 + 4\,\mu_4 \Delta \mu_2 + \left(\frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_1 \mu_2\right) B + \alpha(x, y, z) B_1 = o.$$

Or on a $\frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_1 \mu_2 = o$. Il faut donc prendre, en particulier

$$\Delta \frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_2 \Delta \mu_1 + 4\,\mu_4 \Delta \mu_2 = o.$$

Mais on tire de (29)

$$\Delta \frac{\delta \mu_1}{\delta x} + \mu_1 \Delta \mu_1 + \mu_1 \Delta \mu_2 = 0.$$

Il vient par suite

$$(\mu_1 - 4 \mu_4) \Delta \mu_2 = 0.$$

Or, si l'on prend $\Delta \mu_2 = 0$, $(G')_3$ définit B_1 en fonction linéaire de q, ce qui est impossible. Il faut donc prendre

$$\mu_1 = 4 \mu_4, \tag{30}$$

et (28) donne alors

$$\frac{\delta \mu}{\delta x} + 2 \mu^2_4 = 0. \tag{31}$$

Enfin, dérivons $(G')_1$ par rapport à x et combinons avec $(G')_2$ nous avons

$$\Delta \frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu_4 \Delta \mu_1 + \left(\mu_1 \mu_4 + 2 \frac{\delta \mu}{\delta x}\right) + \left(\mu \mu_4 - 2 \frac{\delta \mu_4}{\delta z}\right) B_1 = 0.$$

Or

$$2 \frac{\delta \mu}{\delta x} + \mu_1 \mu_4 = 2 \left(\frac{\delta \mu}{\delta x} + 2 \mu^2_4\right) = 0.$$

Il faut donc prendre

$$2 \frac{\delta \mu_4}{\delta z} - \mu \mu_4 = 0. \tag{32}$$

Je dis que, dans ces conditions, $s = 2 B p + 2 B_1 p^{\frac{1}{2}}$ satisfait à la condition d'involution du premier ordre

$$\Delta_1^x \lambda - \lambda \frac{\delta f}{\delta p} = 0.$$

Cette condition est, en effet, équivalente aux trois suivantes

$$\frac{\delta \lambda}{\delta x} = 0, \qquad B_1 \frac{\delta \lambda}{\delta q} - B'_1 \lambda = 0, \qquad \frac{\delta \lambda}{\delta z} + 2 B \frac{\delta \lambda}{\delta q} - 2 B'_1 \lambda = 0.$$

On satisfait à la seconde en prenant $\lambda = \varphi(x, y, z) B_1$. Les deux autres s'écrivent alors

$$B_1 \frac{\delta}{\delta x} \log \varphi + \frac{\delta B_1}{\delta x} = 0, \tag{33}$$

$$B_1 \frac{\delta}{\delta z} \log \varphi + \frac{\delta B_1}{\delta z} + 2 (B B'_1 - B_1 B') = 0. \tag{34}$$

Multiplions $(G')_4$ par -4 et ajoutons à $(G')_2$; en tenant compte de (30) et (32), nous obtenons

$$- B_1 \frac{\delta}{\delta z} \log \mu_4 + \frac{\delta B_1}{\delta z} + 2 (B B'_1 - B_1 B') = 0.$$

Cette équation n'est autre que (34) dès qu'on prend $\varphi = \frac{1}{\mu_4}\cdot$

De même $(G')_5$ n'est autre que (33) dès qu'on tient compte de (27).

Il résulte de ce qui précède qu'il faut nécessairement prendre $\frac{\delta b}{\delta z} = 0$.

P á r a g r a p h e IV. *Hypothèse* $\frac{\delta b}{\delta x} = \frac{\delta b}{\delta z} = 0$.

17. Nous venons de démontrer qu'on peut mettre l'équation étudiée sous la forme

$$s = f(x, y, z, p, q) = \frac{b}{b'} A + \frac{1}{b'} A_1,$$

avec $A = \frac{a\varphi + \varphi_2}{a'} = 2(\varphi p + \varphi_2 p^{\frac{1}{2}}),\quad A_1 = \frac{a\varphi_1 + \varphi_3}{a'} = 2(\varphi_1 p + \varphi_3 p^{\frac{1}{2}})$;

et l'on a $\quad B = \frac{b\varphi + \varphi_1}{b'},\quad B_1 = \frac{b\varphi_2 + \varphi_3}{b'},\quad \varphi_i = \varphi_i(x, y, z)$.

La forme de f est précisément celle qui est discutée par M. Gosse dans sa thèse (p. 46 et seq.), mais dans l'hypothèse $\left(\frac{a}{a'}\right)'' \neq 0$ qui est contraire à celle dans laquelle nous nous trouvons. Nous allons pourtant employer, avec ses notations, l'essentiel de sa méthode.

Posons $\frac{1}{b'} = Q$ et reportons dans la condition (8), nous obtenons

$$\begin{gathered}\frac{\delta w}{\delta y} + q\frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta p}(A_1 + A\, b)\, Q + \left[\frac{\delta \varphi_2}{\delta x} + p\frac{\delta \varphi_2}{\delta z} + b\left(\frac{\delta \varphi}{\delta p} + p\frac{\delta \varphi}{\delta z}\right)\right] Q + \\ + (A_1 + A\, b)\,[\varphi + (\varphi_2 + b\varphi)\, Q']\, Q + \left(\frac{\delta A_1}{\delta z} + \frac{\delta A}{\delta z} b\right) Q + \\ + (A'_1 + A' b)\,[A + (A_1 + A\, b)\, Q']\, Q = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\delta w}{\delta y} + q\frac{\delta w}{\delta z} + \left(A_1\frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta \varphi_1}{\delta x} + p\frac{\delta \varphi_1}{\delta z} + A_1\varphi + \frac{\delta A_1}{\delta z} + A\, A'_1\right) Q + \\ + \left(A\frac{\delta w}{\delta z} + \frac{\delta \varphi}{\delta x} + p\frac{\delta \varphi}{\delta z} + A\,\varphi + \frac{\delta A}{\delta z} + A\, A'\right) b\, Q + [A\,\varphi_1 + A_1 A'_1 + \\ + (A\,\varphi_1 + A_1\varphi + A\, A'_1 + A_1 A')\, b + (A\,\varphi + A\, A')\, b^2]\, Q\, Q' = 0,\end{gathered}$$

qu'on peut écrire, avec des notations évidentes,

$$\frac{\delta w}{\delta y} + q\frac{\delta w}{\delta z} + (\alpha + \alpha_1 b)\, Q + (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2)\, Q\, Q' = 0.$$

Des dérivations successives par rapport à q donnent

$$\frac{\delta w}{\delta z} + \alpha_1 + [\alpha + \alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_4) b] Q' + (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2)(Q Q')' = 0,$$

$$\alpha + 2\alpha_3 + (\alpha_1 + 4\alpha_4) b + (\alpha_1 + 2\alpha_4) \frac{Q'}{Q Q''} + (\alpha_3 + 2\alpha_4 b) \frac{Q'^2}{Q Q''} +$$
$$+ (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2) \frac{(Q Q')''}{Q''} = 0,$$

$$(\alpha_1 + 4\alpha_4) \frac{1}{Q} + (\alpha_1 + 2\alpha_4) \left(\frac{Q'}{Q Q''}\right)' + 2\alpha_4 \frac{Q'^2}{Q^2 Q''} + (\alpha_3 + 2\alpha_4 b) \left(\frac{Q'^2}{Q Q''}\right)' +$$
$$+ (\alpha_3 + 2\alpha_4 b) \frac{(Q Q')''}{Q Q''} + (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2) \left(\frac{(Q Q')''}{Q''}\right)' = 0,$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_4) \left[\frac{1}{Q} + \left(\frac{Q'}{Q Q''}\right)'\right] + 2\alpha_4 \left[\frac{1}{Q} + \frac{Q'^2}{Q^2 Q''}\right] + (\alpha_3 + 2\alpha_4 b) \left[\left(\frac{Q'^2}{Q Q''}\right)' +\right.$$
$$\left. + \frac{(Q Q')''}{Q Q''}\right] + (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2) \left(\frac{(Q Q')''}{Q''}\right)' = 0.$$

Or, on ne peut pas avoir $\frac{1}{Q} + \left(\frac{Q'}{Q Q''}\right)' = 0$, car de cette relation on tire

$$b + \frac{Q'}{Q Q''} = Y.$$

En changeant b on peut prendre $Y = 0$, puis

$$b Q'' + \frac{Q'}{Q} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0.$$

Ce qui est contraire à nos hypothèses. Nous pouvons donc écrire, avec des notations évidentes,

$$\alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\alpha_4 Q_2 + (\alpha_3 + 2\alpha_4 b) Q_3 + (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2) Q_4 = 0.$$

Une nouvelle dérivation prise par rapport à q donne

$$(35) \qquad 2\alpha_4 \left(Q'_2 + \frac{Q_3}{Q}\right) + (\alpha_3 + 2\alpha_4 b)\left(Q'_3 + \frac{Q_4}{Q}\right)$$
$$+ (\alpha_2 + \alpha_3 b + \alpha_4 b^2) Q'_4 = 0.$$

Nous avons d'ailleurs posé

$$\alpha_4 = A(\varphi + A').$$

On ne peut avoir $\varphi + A' = 0$ sans prendre $\varphi = \varphi_2 = 0$; l'équation $s = f$ aurait alors une involution du 1[er] ordre, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Divisons (35) par α_4, et dérivons par rapport à p, nous obtenons

$$(36) \qquad \left(Q'_3 + \frac{Q_4}{Q} + b\,Q'_4\right)\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_3}{\alpha_4} + Q'_4\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_2}{\alpha_4} = 0.$$

Or nous avons posé

$$\frac{1}{2}\alpha_2 = 3\,\varphi_1^2\,p + 4\,\varphi_1\varphi_3\,p^{\frac{1}{2}} + \varphi^2_3,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_4 = 3\,\varphi^2\,p + 4\,\varphi\,\varphi_2\,p^{\frac{1}{2}} + \varphi^2_2,$$

$$\frac{1}{4}\alpha_3 = 3\,\varphi\,\varphi_1\,p + 2\,(\varphi\,\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2)\,p^{\frac{1}{2}} + \varphi_2\,\varphi_3.$$

Pour qu'on ait $\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = 0$ il faut prendre $\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ et, alors, on a aussi $\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_2}{\alpha_4} = 0$,

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = 2\,\frac{\varphi_1}{\varphi} = 2\,M(x, y, z), \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \frac{\varphi_1^2}{\varphi^2} = M^2.$$

L'équation (35) définit alors M comme une fonction de la seule variable y à moins qu'elle ne se réduise à une identité, c'est-à-dire qu'on n'ait à la fois

$$Q'_4 = 0, \qquad Q'_3 + \frac{Q_4}{Q} = 0, \qquad Q'_2 + \frac{Q_3}{Q} = 0.$$

M. Gosse a éliminé cette dernière hypothèse [1]) pour des raisons qui valent encore ici.

Mais, avec $M = Y$, on a $\varphi_1 = Y\varphi$, $\varphi_3 = Y\varphi_2$,

$$s = A\left(\frac{b}{b'} + Y\frac{1}{b'}\right),$$

équation qui a une involution du 1^er^ ordre.

Prenons enfin $\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \neq 0$. Nous tirons de (36), ou bien $Q'_4 = 0$, $Q'_3 + \frac{Q_4}{Q} = 0$ et, en reportant dans (35), $Q'_2 + \frac{Q_3}{Q} = 0$, hypothèse que nous venons d'écarter ;

ou bien

$$\frac{1}{Q'_4}\left(Q'_3 + \frac{Q_4}{Q}\right) + b = -\frac{\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_2}{\alpha_4}}{\frac{\delta}{\delta p}\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} = Y.$$

1) Gosse, Thèse p. 49.

On peut d'ailleurs, en changeant b prendre $Y = 0$ et, par conséquent,

$$Q'_3 + \frac{Q_4}{Q} + b\,Q'_4 = 0\,;$$

et (36) donne alors $Q'_4 = 0$. Nous retombons sur une hypothèse que nous venons d'écarter.

Le cas (V) *ne contient donc pas d'équation de la première classe.*

Chapitre III. Etude du cas VI $\left(\frac{a}{a'}\right)'' = \left(\frac{b}{b'}\right)'' = 0.$

18. Nous savons qu'on peut prendre soit $a = e^{\alpha_1 p}$, soit $a = (p + \alpha_0)^{\alpha_1}$ avec $\alpha_1 \neq 0$ et, de plus, $\alpha_1 \neq 1$ dans le second cas. Il faut donc envisager successivement les trois hypothèses

$$a = e^{\alpha_1 p}, \qquad b = e^{\beta_1 q}\,;$$

$$a = e^{\alpha_1 p}, \qquad b = (q + \beta_0)^{\beta_1}\,;$$

$$a = (p + \alpha_0)^{\alpha_1}, \quad b = (q + \beta_0)^{\beta_1}.$$

1ère Hypothèse : $a = e^{\alpha_1 p}$, $b = e^{\beta_1 q}$.

19. La condition (11) donne alors

$$A''_1 = \rho(x, y, z)\left(\frac{1}{a'}\right)'', \quad B''_1 = \rho\left(\frac{1}{b'}\right)''\,;$$

$$A_1 = \frac{\rho}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \alpha_2 p + \alpha_3, \quad B_1 = \frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_{\cdot}\, q + \beta_3.$$

Reportons en (10) et (10'), nous obtenons successivement

$$p\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta y} + q\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}\right) + f\alpha_1 = B + \left(\frac{\rho}{\beta_1} e^{-\beta_1 q} + \beta_2 q + \beta_3\right) e^{-\alpha_1 p}.$$

$$\alpha_1 \frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q} + \frac{\delta\alpha_1}{\delta z} = \alpha_1 e^{-\alpha_1 p}(\rho e^{-\beta_1 q} - \beta_{\cdot}),$$

et, corrélativement,

$$\beta_1 \frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q} + \frac{\delta\beta_1}{\delta z} = \beta_1 e^{-\beta_1 q}(\rho e^{-\alpha_1 q} - \alpha_2).$$

L'identification des deux expressions de $\frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q}$ donne

$$\frac{\delta}{\delta z}\log\alpha_1 = \frac{\delta}{\delta z}\log\beta_1, \quad \alpha_{\cdot} = \beta_2 = 0.$$

L'identification des deux expressions de f, tirées de (10) et (10′) donne ensuite

$$\beta_1 B - \alpha_1 \alpha_3 e^{-\beta_1 q} + q\alpha_1 \frac{\delta\beta_1}{\delta x} = \alpha_1 A - \beta_1\beta_3 e^{-\alpha_1 p} + p\beta_1 \frac{\delta\alpha_1}{\delta y} = \omega\,(x, y, z).$$

Reportons en (10) la valeur de B tirée de cette relation, nous avons pour définir f

$$\alpha_1\beta_1 f = \rho e^{-(\alpha_1 p + \beta_1 q)} + \beta_1\beta_3 e^{-\alpha_1 p} + \alpha_1\alpha_3 e^{-\beta_1 q} -$$
$$- \beta_1 \frac{\delta\alpha_1}{\delta z} pq - \beta_1 \frac{\delta\alpha_1}{\delta y} p - \alpha_1 \frac{\delta\beta_1}{\delta x} q + \omega.$$

Cette valeur de f introduit dans (8) un terme en $e^{-2(\alpha_1 p + \beta_1 q)}$ qui provient de $\frac{\delta f}{\delta p}\frac{\delta f}{\delta q}$. Ce terme ne peut se réduire avec aucun autre. Son coefficient $\frac{\rho^2}{\alpha_1\beta_1}$ doit être nul. Il faut donc prendre $\rho = 0$.

On voit encore qu'il existe en (8) un terme en $e^{-2\beta_1 q}$ qui provient de $f\frac{\delta B}{\delta q}$ et ne peut se réduire avec aucun autre. Son coefficient $-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\alpha_3{}^2$ doit être nul, ce qui exige $\alpha_3 = 0$. Mais, alors, f est linéaire en q, cas que nous avons exclu de cette étude.

$2^{\text{ème}}$ *Hypothèse :* $a = e^{\alpha_1 p}$, $\quad b = (q + \beta_0)^{\beta_1}$.

20. En procédant de la même manière on obtient d'abord

$$A_1 = \frac{\rho}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \alpha\ \, p + \alpha_3, \quad B_1 = \frac{\rho}{\beta_1}(q + \beta_0)^{1-\beta_1} + \beta_2\, q + \beta_3.$$

L'identification des deux expressions de $\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q}$ tirées de (10) et de (10′) donne ensuite

$$\frac{\delta\beta_1}{\delta z} = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \frac{\delta A}{\delta p} + \beta_1\left(\beta_2\, e^{-\alpha_1 p} + \frac{\delta \log \alpha_1}{\delta z}\right) = 0.$$

(10) et (10′) deviennent

$$p\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta y} + q\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}\right) + \alpha_1 f = B + \left[\frac{\rho}{\beta_1}(q + \beta_0)^{1-\beta_1} + \beta_2\, q + \beta_3\right] e^{-\alpha_1 p},$$

$$\beta_1\left(\frac{\delta\beta_0}{\delta x} + p\frac{\delta\beta_0}{\delta z}\right) + \frac{\delta\beta_1}{\delta x}(q + \beta_0)\log(q + \beta_0) + \beta_1 f = A\,(q + \beta_0) +$$
$$+ \left(\frac{\rho}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \alpha_3\right)(q + \beta_0)^{1-\beta_1}.$$

Dérivons par rapport à p et identifions les deux expressions de $\frac{\delta f}{\delta p}$, il vient $\frac{\delta \log \alpha_1}{\delta y} - \frac{\delta \beta_0}{\delta z} = (\beta_0 \beta_2 - \beta_3) e^{-\alpha_1 p} + \beta_0 \frac{\delta \log \alpha_1}{\delta z}$,
ce qui exige qu'on ait à la fois

$$\beta_0 \beta_2 - \beta_3 = 0, \quad \frac{\delta \alpha_1}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta z} (\alpha_1 \beta_0) = 0.$$

Il existe, donc une fonction $Z(x, y, z)$ telle que $\alpha_1 = \frac{\delta Z}{\delta z}$ et $\alpha_1 \beta_0 = \frac{\delta Z}{\delta y}$.

Prenons Z pour nouvelle fonction, nous avons

$$P = \frac{\delta Z}{\delta x} + p\alpha_1, \quad Q = \alpha_1 (\beta_0 + q).$$

La remarque du n° 3 nous permet alors de faire $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 0$ c'est-à-dire, en revenant aux minuscules, de prendre

$$a = e^p, \; b = q^{\beta_1}, \; \beta_3 = 0, \; A = \beta_1 \left[\beta_2 e^{-p} + \omega(x, y, z)\right].$$

L'identification des deux expressions de f tirées de (10) et (10′) donne ensuite

$$B = \omega q + \frac{\alpha_3}{\beta_1} q^{1-\beta_1} - \frac{\delta \log \beta_1}{\delta x} q \log q.$$

Changeons ρ et α_3 en $\rho\beta_1$ et $\alpha_3 \beta_1$, nous avons

$$f = B + (\rho q^{1-\beta_1} + \beta_2 q) e^{-p}, \quad B = \omega q + \alpha_3 q^{1-\beta_1} - \frac{\delta \log \beta_1}{\delta x} q \log q.$$

Reportons dans (8), nous obtenons un terme en $q (\log q)^2$ qui provient de $f \frac{\delta B}{\delta q}$ et ne peut se réduire avec aucun autre. Il faut donc annuler son coefficient, c'est-à-dire prendre $\frac{\delta \beta_1}{\delta x} = 0$.

Il se présente alors des termes en q^0, q, $q^{1-\beta_1}$, $q^{1-2\beta_1}$. Il faut donc soit prendre $\beta_1 = \frac{1}{2}$, soit annuler le coefficient de $q^{1-2\beta_1}$. Ce coefficient est $(1 - \beta_1)(\alpha_3^2 - \rho^2 e^{-2p})$. Mais on ne peut avoir $\alpha_3 = \rho = 0$, sans quoi f est linéaire en q. Il faut donc prendre $\beta_1 = \frac{1}{2}$.

Considérons maintenant la condition (8′) et, dans cette condition, le terme en e^{-2p} dont le coefficient est $-\frac{1}{2}(\beta_2 q + \rho q^{\frac{1}{2}})(3\beta_2 - q^{-\frac{1}{2}})$.

Pour que ce terme disparaisse il faut avoir $\beta_2 = \rho = 0$ et f est indépendant de p, cas exclu.

3ème Hypothèse : $a=(p+\alpha_0)^{\alpha_1}$, $b=(q+\beta_0)^{\beta_1}$.

Paragraphe I. Discussion des conditions (10) et (10′). Transformation des conditions (1) et (1′), (6) et (6′).

21. On a ici

$$A_1=\frac{\rho}{\alpha_1}(p+\alpha_0)^{1-\alpha_1}+\alpha_2(p+\alpha_0)+\alpha_3,$$

$$B_1=\frac{\rho}{\beta_1}(q+\beta_0)^{1-\beta_1}+\beta_2(q+\beta_0)+\beta_3.$$

L'identification des deux valeurs de $\frac{\delta^2 f}{\delta p\,\delta q}$ tirées de (10) et (10′) donne

$$\beta_1\frac{\delta B}{\delta q}-\alpha_1\alpha_2(1-\beta_1)(q+\beta_0)^{-\beta_1}+\alpha_1\frac{\delta\beta_1}{\delta z}\Big[\log(q+\beta_0)+1\Big]=$$

$$=\alpha_1\frac{\delta A}{\delta p}-\beta_1\beta_2(1-\alpha_1)(p+\alpha_0)^{-\alpha_1}+\beta_1\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}\Big[\log(p+\alpha_0)+1\Big]=\omega(x,y,z),$$

$$\beta_1 B=\omega(q+\beta_0)+\alpha_1\alpha_2(q+\beta_0)^{1-\beta_1}-\alpha_1\frac{\delta\beta_1}{\delta z}(q+\beta_0)\log(q+\beta_0)+\beta_4(x,y,z),$$

$$\alpha_1 A=\omega(p+\alpha_0)+\beta_1\beta_2(p+\alpha_0)^{1-\alpha_1}-\beta_1\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}(p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)+\alpha_4(x,y,z).$$

Reportons en (10) et (10′) et identifions les deux expressions de f, il vient

$$\alpha_1\beta_1\left(\frac{\delta\alpha_0}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha_0}{\delta z}-\frac{\delta\beta_0}{\delta x}-p\frac{\delta\beta_0}{\delta z}\right)+\beta_1\left(\frac{\delta\alpha_1}{\delta y}+q\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}\right)(p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)-$$

$$-\alpha_1\left(\frac{\delta\beta_1}{\delta x}+p\frac{\delta\beta_1}{\delta z}\right)(q+\beta_0)\log(q+\beta_0)=(p+\alpha_0)\Big[\omega(q+\beta_0)+$$

$$+\alpha_1\alpha_2(q+\beta_0)^{1-\beta_1}-\alpha_1\frac{\delta\beta_1}{\delta z}(q+\beta_0)\log(q+\beta_0)+\beta_4\Big]-$$

$$-(q+\beta_0)\Big[\omega(p+\alpha_0)+\beta_1\beta_2(p+\alpha_0)^{1-\alpha_1}-\beta_1\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}(p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)+\beta_4\Big]+$$

$$+\beta_1(p+\alpha_0)^{1-\alpha_1}\Big[\beta_2(q+\beta_0)+\beta_3\Big]-\alpha_1(q+\beta_0)^{1-\beta_1}\Big[\alpha_2(p+\alpha_0)+\alpha_3\Big].$$

Ce qui exige d'abord (termes en $p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)$ et termes en $(p+\alpha_0)^{1-\alpha_1}$)

$$\frac{\delta\alpha_1}{\delta y}-\beta_0\frac{\delta\alpha_1}{\delta z}=0,\quad \beta_3=0;$$

et par raison de symétrie

$$\frac{\delta\beta}{\delta x}-\alpha_0\frac{\delta\beta}{\delta z}=0,\quad \alpha_3=0.$$

On a ensuite (termes en p)

$$\beta_4 = -\alpha_1 \beta_1 \frac{\delta \beta_0}{\delta z}, \quad \alpha_4 = -\alpha_1 \beta_1 \frac{\delta \alpha_0}{\delta z};$$

et enfin

$$\frac{\delta \alpha_0}{\delta y} - \beta_0 \frac{\delta \alpha_0}{\delta z} = \frac{\delta \beta_0}{\delta x} - \alpha_0 \frac{\delta \beta_0}{\delta z}.$$

Nous avons déjà vu au n° 5 que cette dernière égalité permet de prendre $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $a = p^{\alpha_1}$, $\beta = q^{\beta_1}$.

On voit par ce qui précède qu'on doit prendre ensuite

$$\alpha_4 = \beta_4 = 0; \quad \frac{\delta \alpha_1}{\delta y} = \frac{\delta \beta_1}{\delta x} = 0;$$

et l'on a

$$A_1 = \frac{\rho}{\alpha_1} p^{1-\alpha_1} + \alpha_2 p, \quad B_1 = \frac{\rho}{\beta_1} q^{1-\beta_1} + \beta_2 q.$$

L'une des conditions (10) et (10') donne alors

$$\alpha_1 \beta_1 f = \omega pq + \alpha_1 \alpha_2 pq^{1-\beta_1} + \beta_1 \beta_1 p^{1-\alpha_1} q + \rho p^{1-\alpha_1} q^{1-\beta_1} - \\ - \alpha_1 \frac{\delta \beta_1}{\delta z} pq \log q - \beta_1 \frac{\delta \alpha_1}{\delta z} pq \log p.$$

Modifions ω et ρ et prenons $\alpha = \frac{\alpha_2}{\beta_1}$, $\beta = \frac{\beta_2}{\alpha_1}$. Ces quantités ne peuvent être confondues avec les quantités α et β qui figurent dans les conditions (2) et (2') dont nous venons d'achever la discussion. Nous avons

$$f = \omega pq + \alpha pq^{1-\beta_1} + \beta p^{1-\alpha_1} + \rho p^{1-\alpha_1} q^{1-\beta_1} - \\ - \frac{\delta \log \beta_1}{\delta z} pq \log q - \frac{\delta \log \alpha_1}{\delta z} pq \log p.$$

puis, en particulier,

$$B = \omega \alpha_1 q + \alpha \alpha_2 q^{1-\beta_1} - \alpha_1 \frac{\delta \log \beta_1}{\delta z} q \log q.$$

22. Reportons nous maintenant à (8) et considérons d'abord le terme en $pq (\log q)^2$. Son coefficient $4\left(\frac{\delta}{\delta z} \log \beta_1\right)^2$ doit être nul. Il faut donc prendre $\frac{\delta \beta_1}{\delta z} = 0$ et, par raison de symétrie, $\frac{\delta \alpha_1}{\delta z} = 0$.

Il se présente ensuite des termes en q^0, q, $q^{1-\beta_1}$, $q^{1-2\beta_1}$ et, comme précédemment il faut prendre $\beta_0 = \frac{1}{2}$ ou bien annuler le coefficient de $q^{1-2\beta_1}$.

Soit d'abord $\beta_1 \neq \frac{1}{2}$. Le soefficient du terme en $q^{1-2\beta_1}$ est, après suppression du facteur $1 - \beta_1$, qui ne peut être nul,

$$\alpha^2(\alpha_1 + 1)p + 2\alpha\rho p^{1-\alpha_1} + \rho^2(1-\alpha_1)p^{1-2\alpha_1}.$$

Il faut donc prendre

$$\rho = o, \qquad \alpha(\alpha_1 + 1) = o.$$

Si l'on a $\alpha = o$, f est linéaire en q, cas exclu. Il faut donc supposer $\alpha = -1$.

Par raison de symétrie, si nous supposons $\alpha_1 \neq \frac{1}{2}$ nous devrons prendre $\beta_1 = -1$, si bien que nous avons à envisager les deux cas suivants

$$\text{(A)} \quad \alpha_1 = \beta_1 = -1, \quad \text{alors } \rho = o;$$

$$\text{(B)} \quad \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

23. *Examen du cas (A)* $\alpha_1 = \beta_1 = -1$, $\rho = o$.

$$f = \omega p q + \alpha p q^2 + \beta p^2 q, \quad B = -\omega q - \alpha q^2.$$

Revenons à l'équation (8). Le terme en $q^{1-2\beta_0} = q^3$ disparaît. Les termes en q^0, q, et q^2 donnent

$$\frac{\partial w}{\partial y} = o.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + (\omega p + \beta p^2)\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z}p^2 + 2\beta p(\omega p + \beta p^2) = o,$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{1}{p}\frac{\partial \log \alpha}{\partial x} + 3\beta p = o.$$

Pour que la première et la dernière de ces équations soient compatibles il faut qu'on ait $\frac{\partial \beta}{\partial y} = o$. Par raison de symétrie on doit prendre $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = o$. On tire alors de la dernière

$$w = -\frac{3}{2}\beta p^2 + \gamma(x, z),$$

et, en reportant dans la seconde, on obtient

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{3}{2}\frac{\partial \beta}{\partial z}p^2 - \beta p(\omega p + \beta p^2) - \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z}p^2 = o.$$

On en tire $\beta = o$. Mais alors f est linéaire en p, cas exclu.

Il faut donc supposer $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$.

24. *Examen du cas* (*B*) $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$.

$$f = \omega p q + \alpha p q^{\frac{1}{2}} + \beta p^{\frac{1}{2}} q + \rho p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} = H_1 q + H_2 q^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

avec $H_1 = \omega p + \beta p^{\frac{1}{2}}$, $H_2 = \alpha p + \rho p^{\frac{1}{2}}$, $B = \frac{1}{2}(\omega q + \alpha q^{\frac{1}{2}})$.

Remarque préliminaire.

Le problème posé exige que la première involution soit d'ordre 2, mais les conditions du N° 3 n'excluent pas les involutions d'ordre inférieur à 2. Il est indispensable pour ce qui va suivre de savoir d'abord reconnaître les formes de f qui donnent lieu à de telles involutions, c'est-à-dire qui sont telles qu'il existe une fonction u (x, y, z, p) vérifiant

$$\Delta_1^y u - u \frac{\delta f}{\delta p} = o,$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} + q \frac{\delta u}{\delta z} + (H_1 q + H_2 q^{\frac{1}{2}}) \frac{\delta u}{\delta p} - u \left(\frac{\delta H_1}{\delta p} q + \frac{\delta H_2}{\delta p} q^{\frac{1}{2}} \right) = o.$$

On en tire

$$\frac{\delta u}{\delta y} = o, \quad \frac{\delta u}{\delta z} + H_1 \frac{\delta u}{\delta p} - u \frac{\delta H_1}{\delta p} = o, \quad H_2 \frac{\delta u}{\delta p} - u \frac{\delta H_2}{\delta p} = o.$$

Cette dernière relation donne $u = \alpha_1 (x, y, z) H_2$ $(\alpha_1 \neq o)$. En reportant dans la première on obtient

$$\frac{\delta}{\delta y}(\alpha \alpha_1) = o, \quad \frac{\delta}{\delta y}(\alpha_1 \rho) = o.$$

En reportant dans la seconde on a ensuite

$$\frac{\delta \alpha_1}{\delta z}(\alpha p + \rho p^{\frac{1}{2}}) + \alpha_1 \left(\frac{\delta \alpha}{\delta z} p + \frac{\delta \rho}{\delta z} p^{\frac{1}{2}} \right) + \alpha_1 (\omega p + \beta p^{\frac{1}{2}})(\alpha + \frac{1}{2} \rho p^{-\frac{1}{2}}) -$$

$$- \alpha_1 (\alpha p + \rho p^{\frac{1}{2}})(\omega + \frac{1}{2} \beta p^{-\frac{1}{2}}) = o,$$

$$\frac{\delta}{\delta z}(\alpha_1 \alpha) = o, \quad \frac{\delta}{\delta z}(\alpha_1 \rho) + \frac{\alpha_1}{2}(\alpha \beta - \omega \rho) = o.$$

De ces diverses relations on tire $\alpha_1 \alpha = X(x)$.

Puisque u et, par conséquent α_1 ne sont définit qu'à un facteur près dépendant de x seul on peut prendre.

Soit $\alpha_1 \alpha = 0$, soit $\alpha_1 \alpha = 1$,

et il reste à vérifier à la fois

$$\frac{\delta}{\delta y}(\alpha_1 \rho) = 0, \quad \frac{\delta}{\delta z}(\alpha_1 \rho) - \frac{1}{2}\alpha_1 \rho\, \omega + \frac{1}{2}\alpha\, \alpha_1 \beta = 0.$$

Soit d'abord $\alpha_1 \alpha = 0$, ce qui exige $\alpha = 0$. Les équations précédentes sont compatibles des qu'on prend $\frac{\delta \omega}{\delta y} = 0$.

Soit ensuite $\alpha_1 \alpha = 1$. Les équations précédente prennent la forme

$$(38) \qquad \alpha \frac{\delta \rho}{\delta y} - \rho \frac{\delta \alpha}{\delta y} = 0, \quad \alpha \frac{\delta \rho}{\delta z} - \rho \frac{\delta \alpha}{\delta z} - \frac{1}{2}\alpha(\omega \rho - \alpha \beta) = 0.$$

25. Reprenons l'étude du cas (B). Nous allons, pour des raisons de calcul, lui appliquer la condition (6) au lieu de la condition (8)

$$(6) \quad \Delta_1^y \mu - XB + F(f) = 0.$$

$$\frac{\delta \mu}{\delta y} + q\frac{\delta \mu}{\delta z} + (H_1 q + H_2 q^{\frac{1}{2}})\frac{\delta \mu}{\delta p} - \frac{X}{2}(\omega q + \alpha q^{\frac{1}{2}}) + \frac{\delta H_1}{\delta z} q \mp \frac{\delta H_2}{\delta z} q^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ (H'_1 q + H'_2 q^{\frac{1}{2}})(H_1 + \frac{1}{2} H_2 q^{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Les accents désignent ici des dérivées prises per rapport à p.

Annulons les coefficients des termes en q^0, $q^{\frac{1}{2}}$, q, nous avons trois conditions

$$(C) \begin{cases} 1) \ \dfrac{\delta \mu}{\delta y} + \dfrac{1}{2} H_2 H'_2 = 0. \\ 2) \ H_2 \dfrac{\delta \mu}{\delta p} - \dfrac{X}{2}\alpha + \dfrac{\delta H_2}{\delta z} + H_1 H'_2 + \dfrac{1}{2} H_2 H'_1 = 0, \\ 3) \ \dfrac{\delta \mu}{\delta z} + H_1 \dfrac{\delta \mu}{\delta p} - \dfrac{1}{2} X\omega + \dfrac{\delta H_1}{\delta z} + H_1 H'_1 = 0. \end{cases}$$

$(C)_2$ est de la forme

$$(\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}})\frac{\delta \mu}{\delta p} = \alpha_1 p^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 + \alpha_2 p^{-\frac{1}{2}}, \qquad \alpha_i = \alpha_i(x, y, z).$$

Son intégrale générale s'écrit

$$\mu = w_1 p + w_2 p^{\frac{1}{2}} + w_3 + w_4 \log(\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}}), \qquad w_i = w_i(x, y, z).$$

Il est facile de voir que si $\alpha = 0$ on a encore la même forme avec $w_4 = 0$.

Reportons en $(C)_1$, nous avons d'abord $\frac{\delta w_4}{\delta y} = 0$, puis

$$\frac{\delta w}{\delta y} p + \frac{\delta w_2}{\delta y} p^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta w_3}{\delta y} + w_4 \frac{\frac{\delta \rho}{\delta y} + \frac{\delta \alpha}{\delta y} p^{\frac{1}{2}}}{\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} (\alpha p + \rho p^{\frac{1}{2}}) (\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho p^{-\frac{1}{2}}) = o.$$

Multiplions par $\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}}$ et annulons les coefficients de $p^{\frac{3}{2}}, p, p^{\frac{1}{2}}$ et p°, nous obtenons

$$\alpha \left(\frac{\delta w_1}{\delta y} + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) = o,$$

$$\alpha \left(\frac{\delta w_2}{\delta y} + \frac{3}{4} \alpha \rho \right) + \rho \left(\frac{\delta w_1}{\delta y} + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) = o,$$

$$\alpha \left(\frac{\delta w_3}{\delta y} + \frac{1}{4} \rho^2 \right) + \rho \left(\frac{\delta w_2}{\delta y} + \frac{3}{4} \alpha \rho \right) + w_4 \frac{\delta \alpha}{\delta y} = o,$$

$$\rho \left(\frac{\delta w_3}{\delta y} + \frac{1}{4} \rho^2 \right) + w_4 \frac{\delta \rho}{\delta y} = o.$$

Supposons $\alpha \neq o$; nous avons d'abord

$$(C_1) \quad \begin{cases} 1) \ \dfrac{\delta w_1}{\delta y} + \dfrac{1}{2} \alpha^2 = o, \\ 2) \ \dfrac{\delta w_2}{\delta y} + \dfrac{3}{4} \alpha \rho = o. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent ensuite

$$(C_1) \qquad 3) \ \frac{\delta w_3}{\delta y} + \frac{1}{4} \rho^2 = o \qquad \text{avec } w_4 = o,$$

à moins que l'on n'ait

$$\alpha \frac{\delta \rho}{\delta y} - \rho \frac{\delta \alpha}{\delta y} = o. \tag{39}$$

Reportons μ en $(C)_3$ nous avons d'abord $\frac{\delta w_4}{\delta y} = o$, puis

$$\frac{\delta w_1}{\delta z} p + \frac{\delta w_2}{\delta z} p^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta w_3}{\delta z} + w_4 \frac{\frac{\delta \rho}{\delta z} + \frac{\delta \alpha}{\delta z} p^{\frac{1}{2}}}{\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}}} + (\omega p + \beta p^{\frac{1}{2}}) \Big(w_1 + \frac{1}{2} w_2 p^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} w_4 \alpha \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{\rho + \alpha p^{\frac{1}{2}}} \Big) - \frac{1}{2} x \omega + \frac{\delta \omega}{\delta z} p + \frac{\delta \beta}{\delta z} p^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ (\omega p + \beta p^{\frac{1}{2}}) (\omega + \frac{1}{2} \beta p^{-\frac{1}{2}}) = o.$$

Si l'on suppose $\alpha \neq o$, on en tire, en procédant comme on vient de le faire avec $(C)_1$

$$(C_2)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{\delta w_1}{\delta z}+\omega w_1+\dfrac{\delta w}{\delta z}+\omega^2=o, \\ 2)\ \dfrac{\delta w_2}{\delta z}+\beta w_1+\dfrac{1}{2}\omega w_2+\dfrac{\delta\beta}{\delta z}+\dfrac{3}{2}\omega\beta=o, \\ 3)\ \dfrac{\delta w_3}{\delta z}+\dfrac{1}{2}\beta w_2-\dfrac{1}{2}x\omega+\dfrac{1}{2}\beta^2=o, \qquad \text{avec } w_4=o, \end{array}\right.$$

à moins qu'on n'ait

$$(40) \qquad \alpha\frac{\delta\rho}{\delta z}-\rho\frac{\delta\alpha}{\delta z}-\frac{1}{2}\alpha(\omega\rho-\alpha\beta)=o.$$

Il suit de la qu'il faut prendre $w_4=o$, sans quoi il existerait une involution d'ordre 1 car (39) et (40) ne sont autres que les conditions (38) d'une telle involution.

Soit donc $\qquad \mu=w_1 p+w_2 p^{\frac{1}{2}}+w_3.$

Reportons enfin cette expression dans $(C)_2$, nous obtenons

$$(\alpha p+\rho p^{\frac{1}{2}})(w_1+\frac{1}{2}w_2 p^{-\frac{1}{2}})-\frac{x}{2}\alpha+\frac{\delta\alpha}{\delta z}p+\frac{\delta\rho}{\delta z}p^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(\omega p+\beta p^{\frac{1}{2}})(\alpha+\frac{1}{2}\rho p^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(\omega+\frac{1}{2}\rho p^{-\frac{1}{2}})(\alpha p+\rho p^{\frac{1}{2}})=o.$$

On en tire

$$(C_3)\left\{\begin{array}{l} 1)\ \alpha(w_1+\dfrac{3}{2}\omega)+\dfrac{\delta\alpha}{\delta z}=o, \\ 2)\ \rho(w_1+\omega)+\alpha(\dfrac{1}{2}w_2+\dfrac{5}{4}\beta)+\dfrac{\delta\rho}{\delta z}=o, \\ 3)\ \rho(w_2+\dfrac{3}{2}\beta)-\alpha x=o. \end{array}\right.$$

Nous avons déjà vu que si l'on prend $\alpha=o$ il faut encore faire $w_4=o$ et il est facile de constater qu'on retrouve les conditions (C_1), (C_2) et (C_3) dans lesquelles on aurait fait $\alpha=o$.

26. *Nous allons démontrer qu'il faut écarter cette hypothèse* $\alpha=o$ *et, d'une façon générale prouver qu'il faut prendre* $\alpha.\beta.\omega.\rho=o$.

En effet, avec $\alpha=o$, (C_1), (C_2) et (C_3) s'écrivent

$$
(C') \left\{
\begin{array}{l}
1)\ \dfrac{\delta w_1}{\delta y} = o, \\
2)\ \dfrac{\delta w_2}{\delta y} = o, \\
3)\ \dfrac{\delta w_3}{\delta y} + \dfrac{1}{4}\rho^2 = o, \\
4)\ \dfrac{\delta}{\delta z}(w_1 + \omega) + \omega(w_1 + \omega) = o, \\
5)\ \dfrac{\delta}{\delta z}(w_2 + \beta) + \dfrac{\omega}{2}(w_2 + \beta) + \beta(w_1 + \omega) = o, \\
6)\ \dfrac{\delta w_3}{\delta z} + \dfrac{1}{2}\beta(w_2 + \beta) - \dfrac{x}{2}\omega = o, \\
7)\ \rho(w_1 + \omega) + \dfrac{\delta \rho}{\delta z} = o, \\
8)\ w_2 + \dfrac{3}{2}\beta = o.
\end{array}
\right.
$$

De $(C')_2$ et $(C')_8$ on tire d'abord $\dfrac{\delta\beta}{\delta y} = o$, puis en dérivant $(C')_5$

$$\frac{\delta\omega}{\delta y}(w_2 + 3\beta) = o.$$

Or, on ne peut prendre $\dfrac{\delta\omega}{\delta y} = o$, sans quoi il existerait une involution du 1^er ordre (N° 24). Il faut donc prendre $w_2 + 3\beta = o$, ce qui combiné avec $(C')_8$ donne

$$w_2 = \beta = o.$$

Soit donc $\alpha = \beta = o$, $w_2 = o$. Il nous reste à satisfaire aux cinq conditions $(C')_1$, $(C')_3$, $(C')_4$, $(C')_6$, $(C')_7$ qui contiennent quatre fonctions arbitraires w_1, w_3, ω, et ρ. Remarquons d'ailleurs que si nous utilisons la condition (6') corrélative de (6) nous obtenons par raison de symétrie cinq nouvelles conditions telles que les $(C')_i$ contenant seulement deux nouvelles fonctions arbitraires. Je dis que l'ensemble des $(C')_i$ et de leurs corrélatives est ici incompatible. En effet, nous tirons de $(C')_7$ et de sa symétrique

$$\frac{\delta^2 \log \rho}{\delta y\, \delta z} + \frac{\delta\omega}{\delta y} = o, \qquad \frac{\delta^2 \log \rho}{\delta x\, \delta z} + \frac{\delta\omega}{\delta x} = o,$$

ce qui donne

$$(41) \qquad \frac{\delta \log \rho}{\delta z} + \omega = Z(z).$$

D'ailleurs la combinaison de $(C')_4$ avec $(C')_7$ donne

$$\frac{\delta^2 \log \rho}{\delta z^2} + \omega \frac{\delta \log \rho}{\delta z} = 0,$$

c'est-à-dire $$Z' + \frac{\delta \omega}{\delta z} + \omega (Z - \omega) = 0,$$

équation de Riccati dont l'intégrale générale est

$$\omega = \frac{Z'}{Z + \theta} - \frac{Z''}{Z'}.$$

On désigne ici par θ une fonction arbitraire de x et y et on a remplacé Z par $-\frac{Z''}{Z'}$.

Reportons en (41) cette valeur de ω, nous obtenons

$$\frac{\delta \log \rho}{\delta z} + \frac{Z'}{Z + \theta} = 0,$$

$$\rho = \frac{u(x, y)}{Z + \theta},$$

et l'équation $s = f$ s'écrit

$$s = \left(\frac{Z'}{Z + \theta} - \frac{Z''}{Z'}\right) p q + \frac{u}{Z + \theta} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons Z pour nouvelle fonction inconnue et employons de nouveau les minuscules, nous avons

$$s = \frac{1}{z + \theta} p q + \frac{u}{z + \theta} p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}},$$

ce qui revient à faire $\omega = \frac{1}{z + \theta}, \quad \rho = \frac{u}{z + \theta}.$

Avec ces valeurs de ω et ρ, la condition de compatibilité de $(C')_3$ et de $(C')_6$ $\quad \rho \frac{\delta \rho}{\delta z} + X \frac{\delta \omega}{\delta y} = 0$, n'est pas vérifiée.

On devra donc supposer $\alpha . \beta \neq 0$.

Considérons maintenant l'hypothèse $\rho = 0$.

$(C_3)_2$ donne $$w_2 + \frac{5}{2} \beta = 0.$$

On tire ensuite de $(C_1)_2$ $\quad \frac{\delta \beta}{\delta y} = 0.$

$(C_3)_1$ s'ecrit $$\frac{\delta \log \alpha}{\delta z} + w_1 + \frac{3}{2} \omega = 0.$$

Reportons en $(C_2)_2$ les valeurs de $w_1 + \frac{3}{2}\omega$ et de w_2, nous avons

$$6\frac{\delta \log \beta}{\delta z} + 4\frac{\delta \log \alpha}{\delta z} + 5\omega = o,$$

et, par raison de symetrie

$$6\frac{\delta \log \alpha}{\delta z} + 4\frac{\delta \log \beta}{\delta z} + 5\omega = o,$$

ce qui entraîne $$\frac{\delta \omega}{\delta y} = o.$$

Mais alors $(C_1)_1$ donne $\alpha = o$ et f est linéaire en q. On doit donc prendre $\rho \neq o$.

Enfin il faut écarter l'hypothèse $\omega = o$, car $(C_2)_1$, $(C_1)_1$ et $(C_3)_1$ puis, de nouveau $(C_1)_1$ donnent successivement

$$\frac{\delta w_1}{\delta z} = o, \quad \frac{\delta \alpha}{\delta z} = o, \quad w_1 = o, \quad \alpha = o.$$

ce qui doit être exclu.

Conclusion. L'étude de (6) et de (6') nous a donc montré qu'il faut supposer $\alpha\beta\omega\rho \neq o$ et nous a donné les 9 conditions (C_1), (C_2), (C_3) et 9 conditions corrélatives.

27. Il nous reste à considérer la condition (1)

$$\Delta\psi - \psi\frac{\delta f}{\delta p} + H(f) = o,$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta y} + q\frac{\delta\psi}{\delta z} + (H_1 q + H_2 q^{\frac{1}{2}})\frac{\delta\psi}{\delta p} - (H'_1 q + H'_2 q^{\frac{1}{2}})\psi + \frac{\delta H_1}{\delta x} q + \frac{\delta H_2}{\delta x} q^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ p\left(\frac{\delta H_1}{\delta z} q + \frac{\delta H_2}{\delta z} q^{\frac{1}{2}}\right) + (H_1 q + H_2 q^{\frac{1}{2}})(H_1 + \frac{1}{2} H_2 q^{-\frac{1}{2}}) = o.$$

La discussion est tout à fait semblable à celle de la condition (6). La relation précédente donne d'abord

$$(G)\begin{cases} 1) \; \dfrac{\delta\psi}{\delta y} + \dfrac{1}{2} H_2^2 = o, \\ 2) \; H_2\dfrac{\delta\psi}{\delta p} - H'_2\psi + \dfrac{\delta H_2}{\delta x} + p\dfrac{\delta H_2}{\delta z} + \dfrac{3}{2} H_1 H_2 = o, \\ 3) \; \dfrac{\delta\psi}{\delta z} + H_1\dfrac{\delta\psi}{\delta p} - H'_1\psi + \dfrac{\delta H_1}{\delta x} + p\dfrac{\delta H_1}{\delta z} + H_1^2 = o. \end{cases}$$

On peut écrire $(G)_2$ sons la forme

$$\frac{\delta}{\delta p}\left(\frac{\psi}{H_2}\right)=\frac{u_1 p^2+u_2 p^{\frac{3}{2}}+u_3 p+u_4 p^{\frac{1}{2}}}{(\alpha p+\rho p^{\frac{1}{2}})^2}, \quad u_i=u_i(x,y,z).$$

On en tire, en modifiant les u_i,

$$\frac{\psi}{\alpha p+\rho p^{\frac{1}{2}}}=u_1 p+u_2 p^{\frac{1}{2}}+u_3+\frac{u_4}{\alpha p^{\frac{1}{2}}+\rho}+u_5 \log(\alpha p^{\frac{1}{2}}+\rho),$$

$$\psi=v_1 p^2+v_2 p^{\frac{3}{2}}+v_3 p+v_4 p^{\frac{1}{2}}+v_5(\alpha p+\rho)\log(\alpha p+\rho).$$

Lorsqu'on reporte dans $(G)_3$ il se présente des termes logarithmiques dont il faut annuler le coefficient

$$\frac{\delta}{\delta z}(v_5\alpha)\, p+\frac{\delta}{\delta z}(v_5\rho)\, p^{\frac{1}{2}}+v_5\Big[(\alpha+\frac{1}{2}\rho p^{-\frac{1}{2}})(\omega p+\beta p^{\frac{1}{2}})-$$
$$-(\alpha p+\rho p^{\frac{1}{2}})(\omega+\frac{1}{2}\beta p^{\frac{1}{2}})\Big],$$

ce qui entraîne

$$\frac{\delta}{\delta z}(v_5\alpha)=0, \quad \frac{\delta}{\delta z}(v_5\rho)+\frac{1}{2}v_5(\alpha\beta-\omega\rho)=0.$$

En reportant dans $(G)_1$ on obtient de même

$$\frac{\delta}{\delta y}(v_5\alpha)=0, \quad \frac{\delta}{\delta y}(v_5\rho)=0.$$

Il résulte alors des calculs qui ont été développés au N° 24 que $v_5 H_2$ satisfait à $\Delta_1^y u-u\frac{\delta f}{\delta p}=0$. Il faut donc prendre $v_5=0$

$$\psi=v_1 p^2+v_2 p^{\frac{3}{2}}+v_3 p+v_4 p^{\frac{1}{2}}.$$

On tire alors sans peine de $(G)_1$ les conditions

$$(\mathrm{G}_1)\begin{cases} 1)\ \dfrac{\delta v_1}{\delta y}+\dfrac{1}{2}\alpha^2=0, \\ 2)\ \dfrac{\delta v_2}{\delta y}+\alpha\rho=0, \\ 3)\ \dfrac{\delta v_3}{\delta y}+\dfrac{1}{2}\rho^2=0, \\ 4)\ \dfrac{\delta v_4}{\delta y}=0\,; \end{cases}$$

de $(G)_2$ les conditions

$$
(G_2)\begin{cases}
1)\ \dfrac{\delta v_1}{\delta z} + \dfrac{\delta \omega}{\delta z} + \omega(v_1 + \omega) = o, \\
2)\ \dfrac{\delta v_2}{\delta z} + \dfrac{1}{2}\omega v_2 + \dfrac{3}{2}\beta v_1 + 2\omega\beta + \dfrac{\delta\beta}{\delta z} = o, \\
3)\ \dfrac{\delta v_3}{\delta z} + \beta v_2 + \dfrac{\delta \omega}{\delta x} + \beta^2 = o, \\
4)\ \dfrac{\delta v_4}{\delta z} - \dfrac{1}{2}\omega v_4 + \dfrac{1}{2}\beta v_3 + \dfrac{\delta\beta}{\delta x} = o\,;
\end{cases}
$$

et, enfin, de $(G)_3$

$$
(G_3)\begin{cases}
1)\ \alpha\left(v_1 + \dfrac{3}{2}\omega\right) + \dfrac{\delta\alpha}{\delta z} = o, \\
2)\ 3\rho v_1 + \alpha v_2 + 3\omega\rho + 3\alpha\beta + 2\dfrac{\delta\rho}{\delta z} = o, \\
3)\ \rho v_2 = \dfrac{3}{2}\beta\rho + \dfrac{\delta\alpha}{\delta x} = o, \\
4)\ \dfrac{1}{2}\rho v_3 = \dfrac{1}{2}\alpha v_4 + \dfrac{\delta\rho}{\delta x} = o.
\end{cases}
$$

On tirerait de même de (1′) 12 conditions corrélatives de (G_1), (G_2) et (G_3).

Remarque. Si l'on avait utilisé la condition (8) on eût obtenu encore des conditions telles que (C_i).

Paragraphe II. Discussion des conditions (C_i) et (G_i) et des conditions corrélatives.

28. Dans ce qui suit nous marquerons par des accents les fonctions telles que v_j et w_j qui figurent dans les conditions corrélatives de (C_i) et (G_i). Avant d'écrire cet ensemble de conditions remarquons que $(C_3)_1$ et $(G_3)_1$ entraînent $w_1 = v_1$.

Nous avons alors à discuter le système suivant, nécessaire et suffisant pour assurer l'existence d'une involution d'ordre 2 et d'un invariant d'ordre 3 pour chacun des systèmes X et Y de caracteristiques

(1) $$\frac{\delta v_1}{\delta y} + \frac{1}{2}\alpha^2 = o,$$

(2) $$\frac{\delta}{\delta z}(v_1 + \omega) + \omega(v_1 + \omega) = o,$$

$$(3) \qquad \alpha\left(v_1 + \frac{3}{2}\omega\right) + \frac{\delta\alpha}{\delta z} = 0;$$

$$(1') \qquad \frac{\delta v_1}{\delta z} + \frac{1}{2}\beta^2 = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{\delta}{\delta z}(v'_1 + \omega) + \omega(v'_1 + \omega) = 0,$$

$$(3') \qquad \beta\left(v'_1 + \frac{3}{2}\omega\right) + \frac{\delta\beta}{\delta z} = 0;$$

$$(4) \qquad \frac{\delta v_2}{\delta y} + \alpha\rho = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\delta}{\delta z}(v_2 + \beta) + \frac{1}{2}\omega(v_2 + \beta) + \frac{3}{2}\beta(v_1 + \omega) = 0,$$

$$(6) \qquad \alpha(v_2 + \beta) + 3\rho(v_1 + \omega) + 2\frac{\delta\rho}{\delta z} + 2\alpha\beta = 0,$$

$$(7) \qquad \rho(v_2 + \beta) + \frac{1}{2}\rho\beta + \frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0;$$

$$(8) \qquad \frac{\delta w_2}{\delta y} + \frac{3}{4}\alpha\rho = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{\delta}{\delta z}(w_2 + \beta) + \frac{1}{2}\omega(w_2 + \beta) + \beta(v_1 + \omega) = 0,$$

$$(10) \qquad \alpha(w_2 + \beta) + 2\rho(v_1 + \omega) + 2\frac{\delta\rho}{\delta z} + \frac{3}{2}\alpha\beta = 0,$$

$$(11) \qquad \rho(w_2 + \beta) + \frac{1}{2}\rho\beta - X\alpha = 0;$$

$$(4') \qquad \frac{\delta v'_2}{\delta x} + \beta\rho = 0,$$

$$(5') \qquad \frac{\delta}{\delta z}(v'_2 + \alpha) + \frac{1}{2}\omega(v'_2 + \alpha) + \frac{3}{2}\alpha(v'_1 + \omega) = 0,$$

$$(6') \qquad \beta(v'_2 + \alpha) + 3\rho(v'_1 + \omega) + 2\frac{\delta\rho}{\delta z} + 2\alpha\beta = 0,$$

$$(7') \qquad \rho(v'_2 + \alpha) + \frac{1}{2}\rho\alpha + \frac{\delta\beta}{\delta y} = 0;$$

$$(8') \qquad \frac{\delta w'_2}{\delta x} + \frac{3}{4}\beta\rho = 0,$$

$$(9') \qquad \frac{\delta}{\delta z}(w'_2 + \alpha) + \frac{1}{2}\omega(w'_2 + \alpha) + \alpha(v'_1 + \omega) = 0.$$

$$(10')\qquad \beta(w'_2+\alpha)+2\rho(v'_1+\omega)+2\frac{\delta\rho}{\delta z}+\frac{3}{2}\alpha\beta=0,$$

$$(11')\qquad \rho(w'_2+\alpha)+\frac{1}{2}\rho\alpha-Y\beta=0\,;$$

$$(12)\qquad \frac{\delta v_3}{\delta y}+\frac{1}{2}\rho^2=0,$$

$$(13)\qquad \frac{\delta v_3}{\delta z}+\beta(v_2+\beta)+\frac{\delta\omega}{\delta x}=0\,;$$

$$(14)\qquad \frac{\delta w_3}{\delta y}+\frac{1}{4}\rho^2=0,$$

$$(15)\qquad \frac{\delta w_3}{\delta z}+\frac{1}{2}\beta(w_2+\beta)-\frac{1}{2}X\omega=0\,;$$

$$(12')\qquad \frac{\delta v'_3}{\delta x}+\frac{1}{2}\rho^2=0,$$

$$(13')\qquad \frac{\delta v'_3}{\delta z}+\alpha(v'_2+\alpha)+\frac{\delta\omega}{\delta y}=0\,;$$

$$(14')\qquad \frac{\delta w'_3}{\delta x}+\frac{1}{4}\rho^2=0,$$

$$(15')\qquad \frac{\delta w'_3}{\delta z}+\frac{1}{2}\alpha(w'_2+\alpha)-\frac{1}{2}Y\omega=0\,;$$

$$(16)\qquad \frac{\delta v_4}{\delta y}=0,$$

$$(17)\qquad \frac{\delta v_4}{\delta z}+\frac{1}{2}\omega v_4+\frac{1}{2}\beta v_3+\frac{\delta\beta}{\delta x}=0,$$

$$(18)\qquad \alpha v_4-\rho v_3-2\frac{\delta\rho}{\delta x}=0\,;$$

$$(16')\qquad \frac{\delta v'_4}{\delta x}=0,$$

$$(17')\qquad \frac{\delta v'_4}{\delta z}-\frac{1}{2}\omega v'_4+\frac{1}{2}\alpha v'_3+\frac{\delta\alpha}{\delta y}=0,$$

$$(18')\qquad \beta v'_4-\rho v'_3-2\frac{\delta\rho}{\delta y}=0.$$

Nous distinguerons les deux hypothèses $(v_1+\omega)(v'_1+\omega)\neq 0$ *et* $(v_1+\omega)(v'_1+\omega)=0$.

1ère hypothèse $(v_1 + \omega)(v'_1 + \omega) \neq 0.$

29. De (5) et (9) on tire

$$\frac{\delta}{\delta z}(3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta) + \frac{1}{2}\,\omega\,(3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta) = 0, \tag{42}$$

de (6) et (6')

$$\alpha\,v_2 - \beta\,v'_2 + 3\,\rho\,(v_1 - v'_1) = 0, \tag{43}$$

de (10) et (10')

$$\alpha\,w_2 - \beta\,w'_2 + 2\,\rho\,(v_1 + v'_1) = 0, \tag{44}$$

ce qui donne

$$\alpha\,(3\,w_2 - 2\,v_2) = \beta\,(3\,w'_2 - 2\,v'_2),$$

qu'on peut écrire

$$\alpha\,(3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta) = \beta\,(3\,w'_2 - 2\,v'_2 + \alpha). \tag{45}$$

30. I°) Soit $3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta = 0.$

On tire alors de (45)

$$3\,w'_2 - 2\,v'_2 + \alpha = 0,$$

puis de (7) et de (11)

$$\rho\,\beta - 6\,X\alpha - 4\,\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0,$$

$$\rho\,\beta - 4\,\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0.$$

Il faut donc prendre $X = 0.$

(11) donne alors

$$w_2 = -\frac{3}{2}\,\beta,$$

et, en reportant en $3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta = 0$, on obtient

$$v_2 = -\frac{7}{4}\,\beta.$$

Or (4) et (8) donnent

$$4\,\frac{\delta w_2}{\delta y} - 3\,\frac{\delta v^2}{\delta y} = 0.$$

Il faut donc prendre $\frac{\delta\beta}{\delta y} = 0$. Par raison de symétrie on a de même $\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0$. Mais on tire alors de (46) $\rho\,\beta = 0$, ce qui est à rejeter.

31. II°) $(3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta)\,(3\,w'_2 - 2\,v'_2 + \alpha) \neq 0$.

Dans cette hypothèse (42) donne

$$\frac{\delta}{\delta z} \log (3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta) = -\frac{1}{2}\,\omega,$$

et la proposition corrélative permet d'écrire

$$\frac{\delta}{\delta z} \log (3\,w_2 - 2\,v_2 + \beta) = \frac{\delta}{\delta z} \log (3\,w'_2 - 2\,v'_2 + \alpha).$$

Il s'ensuit qu'on tire de (45)

$$\frac{\delta}{\delta z} \log \alpha = \frac{\delta}{\delta z} \log \beta. \tag{47}$$

Mais alors la comparaison de (3) et (3') donne $v_1 = v'_1$ et (44) s'écrit

$$\alpha\,w_2 - \beta\,w'_2 = 0.$$

Multiplions (11) par α et (11') par β et comparons, nous avons

$$X\alpha^2 = Y\beta^2. \tag{48}$$

Nous dtstinguerons encore deux cas

32. A°) $X \neq 0$.

On tire de (1) et (1')

$$\frac{\delta \alpha^2}{\delta x} = \frac{\delta \beta^2}{\delta y}.$$

Ecrivons (48) comme il suit

$$\frac{\alpha^2}{Y} = \frac{\beta^2}{X} = \mu\,(x, y, z),$$

nous avons
$$Y\frac{\delta \mu}{\delta x} - X\frac{\delta \mu}{\delta y} = 0.$$

Si nous posons $Y = \eta'$, $X = \xi'$, la solution générale de cette équation est $\mu = \mu\,(\xi + \eta,\ z)$. Prenons ξ et η pour variables indépendantes, ce qui ne change ni a ni b, l'équation $s = f$ devient

$$S = \bar{\omega}\,PQ + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\eta'}}\,P\,Q^{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{\xi'}}\,P^{\frac{1}{2}}\,Q + \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{\eta'\,\xi'}}\,P^{\frac{1}{2}}\,Q^{\frac{1}{2}}.$$

On a marqué ici par des traits que α, β, ω, ρ, sont exprimés au moyen de ξ et η.

Reprenons d'ailleurs, pour la commodité de l'écriture, les lettres x et y et les minuscules, nous avons

$$(49) \qquad \alpha^2 = \beta^2 = \mu\,(x+y,\, z),$$

ce qui revient à faire $X=Y=1$. On en tire, en faisant appel à (23) et (24)

$$(50) \qquad \beta = \varepsilon\,\alpha, \qquad v'_2 = \varepsilon\, v_2, \qquad w'_2 = \varepsilon\, w_2.$$

Considérons maintenant (2) et (3). On y satisfait en prenant

$$\alpha^2 = \frac{\delta u}{\delta z}, \qquad v_1 + \omega = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta z}\log u, \qquad \omega = -\frac{\delta}{\delta z}\log(v_1+\omega) =$$
$$= \frac{\delta}{\delta z}\log u - \frac{\delta}{\delta z}\log\frac{\delta u}{\delta z}.$$

On tire de là

$$v_1 = \frac{\delta}{\delta z}\log\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{3}{2}\frac{\delta}{\delta z}\log u.$$

Reportons dans (1), il vient

$$\frac{\delta^2}{\delta y\,\delta z}\log\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{\delta y\,\delta z}\log u + \frac{1}{2}\frac{\delta u}{\delta z} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\log\frac{\delta u}{\delta z} - \frac{3}{2}\frac{\delta}{\delta y}\log u + \frac{1}{2}\,u = \frac{1}{2}\,\varphi_1(x, y),$$

$$u\frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta z} - \frac{3}{2}\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{1}{2}\,u^2\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{1}{2}\,\varphi_1\, u\frac{\delta u}{\delta z},$$

et, par une nouvelle intégration,

$$u^{-\frac{3}{2}}\frac{\delta u}{\delta y} + u^{\frac{1}{2}} = -\varphi_1\, u^{-\frac{1}{2}} - \varphi_2(x, y),$$

$$(51) \qquad \frac{\delta u}{\delta y} + \varphi_1\, u + \varphi_2\, u^{\frac{3}{2}} + u^2 = 0.$$

(6) et (7) donnent ensuite

$$(52) \qquad 3\,\rho^2(v_1+\omega) + 2\,\rho\frac{\delta\rho}{\delta z} + \frac{3}{2}\,\rho\,\alpha\,\beta - \alpha\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0,$$

puis (10) et (10′)

$$(53) \qquad 2\,\rho^2(v_1+\omega) + 2\,\rho\frac{\delta\rho}{\delta z} + \rho\,\alpha\,\beta + \alpha^2 = 0,$$

et enfin (52) et (53)

$$2\,\rho\frac{\delta\rho}{\delta z} + 3\,\alpha^2 + 2\,\alpha\frac{\delta\alpha}{\delta x} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque $\dfrac{\delta\alpha}{\delta x} = \dfrac{\delta\alpha}{\delta y}$,

$$\frac{\delta\rho^2}{\delta z} + 3\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta z} = 0,$$

$$\rho^2 + 3u + \frac{\delta u}{\delta y} = \varphi_3(x, y),$$

et, en remplaçant $\dfrac{\delta u}{\delta y}$ par son expression tirée de (51).

$$\rho^2 = \varphi_3 + (\varphi_1 - 3)\,u + \varphi\;u^{\frac{3}{2}} + u^2. \tag{54}$$

On tire encore de (52) et (53)

$$\rho^2(v_1 + \omega) + \frac{1}{2}\rho\,\alpha\,\beta - \alpha^2 - \alpha\frac{\delta\alpha}{\delta y} = 0\,;$$

or
$$v_1 + \omega = -\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta z}\log u = -\frac{1}{2u}\frac{\delta u}{\delta z} = -\frac{1}{2u}\alpha^2,$$

donc
$$-\frac{1}{2u}\alpha^2\rho^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\,\alpha^2\rho - \alpha^2 - \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha^2}{\delta y} = 0,$$

$$\frac{1}{u}\rho^2 - \varepsilon\rho + 2 + \frac{\delta}{\delta y}\log\alpha^2 = 0.$$

Remplaçons ρ^2 par son expression (54), nous avons

$$\varepsilon\rho = \varphi_3 u^{-1} + \varphi_1 - 1 + \varphi_2 u^{\frac{1}{2}} + u + \frac{\delta}{\delta y}\log\alpha^2. \tag{55}$$

Or
$$\frac{\delta}{\delta y}\log\alpha^2 = \frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta z} : \frac{\delta u}{\delta z}.$$

D'ailleurs on tire de (51)

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta z} = -\left(\varphi_1 + \frac{3}{2}\varphi_2 u^{\frac{1}{2}} + 2u\right)\frac{\delta u}{\delta z}.$$

On a donc

$$\frac{\delta}{\delta y}\log\alpha^2 = -\varphi_1 - \frac{3}{2}\varphi_2 u^{\frac{1}{2}} - 2u,$$

et (55) donne

$$\varepsilon\rho = \varphi_3 u^{-1} - 1 - \frac{1}{2}\varphi_2 u^{\frac{1}{2}} - u.$$

Reportons enfin en (54), nous obtenons

$$\left(\varphi_3 u^{-1} - 1 - \frac{1}{2}\varphi_2 u^{\frac{1}{2}} - u\right)^2 = \varphi_3 + (\varphi_1 - 3)\,u + \varphi_2 u^{\frac{3}{2}} + u^2,$$

Cette relation définit u comme indépendant de z, ce qui conduit à $\alpha = o$, qui est une impossibilité.

Elle doit donc se réduire à une identité, ce qui exige d'abord qu'on ait $\varphi_3 = o$. Mais alors le premier membre contient un terme indépendant de u et la second n'en contient pas. On arrive donc encore à une impossibilité.

Il faut donc prendre $X = Y = o$.

33. $B^o)$ $X = Y = o$.

On tire de (11) $$w_2 = -\frac{3}{2}\beta,$$

puis de (8) $$\frac{\delta\beta}{\delta y} = \frac{\alpha\rho}{2}.$$

D'ailleurs (14) et (15) s'écrivent

$$4\frac{\delta w_3}{\delta y} = -\rho^2, \qquad 4\frac{\delta w_3}{\delta z} = \beta^2.$$

Leur compatibilité exige

$$\rho\frac{\delta\rho}{\delta z} + \beta\frac{\delta\beta}{\delta y} = o,$$

c'est-à-dire $$2\frac{\delta\rho}{\delta z} + \alpha\beta = o.$$

Mais on tire de (10)

$$2\rho(v_1 + \omega) + 2\frac{\delta\rho}{\delta z} + \alpha\beta = o;$$

On doit donc avoir $\rho(v_1 + \omega) = o$, ce qui est impossible.

L'hypothèse $(v_1 + \omega)(v'_1 + \omega) \neq o$ ne convient donc pas à des équations de la première classe.

2ème Hypothèse $v_1 + \omega = o$.

34. Il n'y arien à changer aux raisonnements des Nos 29, 30 et 31 qui nous ont conduit à la relation (47), puis à $v'_1 = v_1$. L'hypothèse $v_1 + \omega = o$ entraîne donc sa corrélative $v'_1 + \omega = o$.

On tire de (1) et (1')

$$\alpha^2 = 2\frac{\delta\omega}{\delta y}, \qquad \beta^2 = 2\frac{\delta\omega}{\delta x},$$

puis de (3)

$$\frac{\delta\alpha}{\delta z} + \frac{1}{2}\alpha\omega = o, \quad 2(\omega_{yz} + \omega\omega_y) = o, \quad \frac{\delta}{\delta y}(2\omega_z + \omega^2) = o,$$

et de (3') $$\frac{\delta}{\delta x}(2\,\omega_z + \omega^2) = 0.$$

Donc $$2\,\omega_z + \omega^2 = F(z).$$

Posons $$F(z) = 3\,\frac{Z''^2}{Z'^2} - 2\,\frac{Z'''}{Z'},$$

nous avons $$\omega = \frac{2\,Z'}{Z-\theta} - \frac{Z''}{Z'}. \quad (\theta \text{ fonction arbitraire de } x \text{ et } y).$$

Par conséquent on peut prendre

$$\alpha = 2\,\frac{\sqrt{Z'\theta_y}}{Z-\theta}, \quad \beta = 2\,\frac{\sqrt{Z'\theta_x}}{Z-\theta}.$$

Posons encore $\omega = -2\,\frac{\delta}{\delta z}\log \pi\,(x, y, z),$

nous avons $$\pi = \frac{\sigma_0(x, y)\sqrt{Z'}}{Z-\theta}.$$

(5) donne ensuite

$$v_2 + \beta = \sigma_1\,(x, y)\,\pi,$$

où, d'ailleurs, σ_1 peut être nul.

Portons dans (6), nous obtenons

$$2\,\frac{\delta\rho}{\delta z} + \alpha\,\sigma_1\,\pi + 2\,\alpha\,\beta = 0,$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta z} + \sigma_0\,\sigma_1\,\frac{Z'\sqrt{\theta_y}}{(Z-\theta)^2} + 4\,\frac{Z'\sqrt{\theta_x\theta_y}}{(Z-\theta)^2} = 0,$$

$$\rho = \frac{\rho_1\,(x, y)}{Z-\theta} + \rho_2\,(x, y).$$

On a ainsi

$$s = \left(\frac{2\,Z'}{Z-\theta} - \frac{Z''}{Z'}\right)p\,q + 2\,\frac{\sqrt{Z'\theta_y}}{Z-\theta}\,p\,q^{\frac{1}{2}} + 2\,\frac{\sqrt{Z'\theta_x}}{Z-\theta}\,p^{\frac{1}{2}}\,q +$$
$$+ \left(\frac{\rho_1}{Z-\theta} + \rho_2\right)p^{\frac{1}{2}}\,q^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons Z pour nouvelle fonction, nous avons

$$P = Z'p, \quad Q = Z'q, \quad S = Z''p\,q + Z's = \frac{Z''}{Z'^2}\,PQ + Z's,$$

et, en revenant aux minuscules

$$(56) \quad s = \frac{2}{z-\theta}\,p\,q + 2\,\frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta}\,p\,q^{\frac{1}{2}} + 2\,\frac{\sqrt{\theta_x}}{z-\theta}\,p^{\frac{1}{2}}\,q + \left(\frac{\rho_1}{z-\theta} + \rho_2\right)p^{\frac{1}{2}}\,q^{\frac{1}{2}}.$$

Nous sommes ainsi amenés à prendre

(57) $$\omega=\frac{2}{z-\theta},\quad \alpha=2\frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta},\quad \beta=2\frac{\sqrt{\theta_x}}{z-\theta},\quad \rho=\frac{\rho_1}{z-\theta}+\rho_2.$$

(58) $$v_1=v'_1=-\frac{2}{z-\theta}.$$

Avec ces valeurs (1), (2), (3), (1′), (2′), (3′) *sont satisfaites.*

35. On vérifie (5) en prenant $v_2=\dfrac{2\,\sigma(x,y)}{z-\theta}$.

Portons en (4), nous avons

$$\frac{1}{z-\theta}\frac{\delta\sigma}{\delta y}+\frac{\sigma\,\theta_y}{(z-\theta)^2}+\frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta}\left(\frac{\rho_1}{z-\theta}+\rho_2\right)=0,$$

ce qui exige

(59) $$\sqrt{\theta_y}\,\rho_1+\sigma\,\theta_y=0,\quad \sqrt{\theta_y}\,\rho_2+\frac{\delta\sigma}{\delta y}=0.$$

Considérons ancore (10) et (11), nous en tirons

$$\rho\left(\alpha\beta+2\frac{\delta\rho}{\delta z}\right)+X\alpha^2=0,\quad \left(\frac{\rho_1}{z-\theta}+\rho_2\right)(2\sqrt{\theta_x\theta_y}-\rho_1)+2X\theta_y=0$$

ce qui donne, en particulier

$$\rho_1(2\sqrt{\theta_x\theta_y}-\rho_1)=0.$$

Or on ne peut pas prendre $\rho_1=0$, sans quoi (59) donnerait encore $\sigma=0$, puis $\rho_2=0$. Il faut donc prendre

(60) $$\rho_1=2\sqrt{\theta_x\theta_y},$$

puis $X=0$. On a alors en (59) $\sigma=-2\sqrt{\theta_x}$, puis

(61) $$\rho_2=\frac{\theta_{xy}}{\sqrt{\theta_x\theta_y}},$$

et (56) devient

(E) $$s=\frac{2}{z-\theta}\left(pq+\sqrt{\theta_y}\,pq^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\theta_x}\,p^{\frac{1}{2}}q+\sqrt{\theta_x\theta_y}\,p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{\theta_{xy}}{\sqrt{\theta_x\theta_y}}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}.$$

Avec l'expression précédente de σ on a $v_2=-4\dfrac{\sqrt{\theta_x}}{z-\theta}=-2\beta$. Par raison de symétrie et au moyen de (10′) et (11′) on a ainsi

(62) $$v_2+2\beta=0,\quad v'_2+2\alpha=0,\quad w_2+\frac{3}{2}\beta=0,\quad w'_2+\frac{3}{2}\alpha=0.$$

Nous avons de la sorte satisfait aux conditions (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), *et aux conditions corrélatives.*

Remarquons d'ailleurs que ces relations entraînent

$$\alpha \frac{\delta \alpha}{\delta x} = \beta \frac{\delta \beta}{\delta y} = \frac{1}{2} \rho \alpha \beta = - \rho \frac{\delta \rho}{\delta z}. \tag{63}$$

Dans ces conditions il est facile de vérifier qu'il existe une fonction w_3 satisfaisant à (14) et (15) et une fonction w'_3 satisfaisant à (14') et (15').

36. *Restent donc seulement à verifier* (12), (13), (16), (17), (18) *et les conditions corrélatives.*

Il est facile de voir qu'il existe une fonction v_3 satisfaisant à (12) et (13) et une fonction v'_3 satisfaisant à (12') et (13').

On *a* en effet en (13)

$$\frac{\delta v_3}{\delta z} = \frac{1}{2} \beta^2 = 2 \frac{\theta_x}{(z-\theta)^2},$$

$$v_3 = -2 \frac{\theta_x}{z-\theta} + \varphi(x, y),$$

et, en reportant en (12), φ se détermine par la relation

$$\frac{\delta \varphi}{\delta y} + \frac{1}{2} \frac{\theta_{x,y}^2}{\theta_x \theta_y} = 0, \qquad \rho_2^2 + 2 \frac{\delta \varphi}{\delta y} = 0. \tag{64}$$

Considérons enfin (16), (17) et (18); et d'abord dérivons (18) par rapport à z

$$\alpha \frac{\delta v_4}{\delta z} + v_4 \frac{\delta \alpha}{\delta z} - \rho \frac{\delta v_3}{\delta z} - v_3 \frac{\delta \rho}{\delta z} - 2 \frac{\delta^2 \rho}{\delta x \, \delta z} = 0.$$

Le comparaison avec (17) donne

$$v_4 \left(\frac{\delta \alpha}{\delta z} + \frac{1}{2} \omega \alpha \right) - v_3 \left(\frac{\delta \rho}{\delta z} + \frac{1}{2} \alpha \beta \right) - 2 \frac{\delta^2 \rho}{\delta x \, \delta z} - \rho \frac{\delta v_3}{\delta z} - \alpha \frac{\delta \beta}{\delta x} = 0.$$

Le coefficient de v_4 est identiquement nul en vertu de (3), celui de v_3 en vertu de (63). Remplaçons $\frac{\delta v_3}{\delta z}$ par son expression tirée de (13) nous avons

$$2 \frac{\delta^2 \rho}{\delta x \, \delta z} + \frac{1}{2} \rho \beta^2 + \alpha \frac{\delta \beta}{\delta x} = 0.$$

D'ailleurs (63) donne

$$2 \frac{\delta \rho}{\delta z} + \alpha \beta = 0, \qquad 2 \frac{\delta^2 \rho}{\delta x \, \delta z} + \alpha \frac{\delta \beta}{\delta x} = - \beta \frac{\delta \alpha}{\delta x}.$$

Il vient donc

$$2\frac{\delta\alpha}{\delta x} = \rho\beta,$$

ce qui résulte aussi de (63).

Dérivons maintenant (18) par rapport à y et comparons avec (16) il vient

$$v_4\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \rho\frac{\delta v_3}{\delta y} - v_3\frac{\delta\rho}{\delta y} - 2\frac{\delta^2\rho}{\delta x\,\delta y} = o.$$

Eliminons v_4 entre cette relation et (18), nous avons, en tenant compte de (12)

$$(65)\qquad v_3\left(\rho\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \alpha\frac{\delta\rho}{\delta y}\right) + \frac{1}{2}\alpha\rho^3 + 2\left(\frac{\delta\rho}{\delta x}\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \alpha\frac{\delta^2\rho}{\delta x\,\delta y}\right) = o.$$

Or

$$(66)\quad \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\delta\alpha}{\delta y} - \alpha\frac{\delta\rho}{\delta y}\right) = \left(\frac{\rho_1}{z-\theta} + \rho_2\right)\left[\frac{\theta_{y^2}}{2\sqrt{\theta_y}\,(z-\theta)} + \frac{\theta_y^{\frac{3}{2}}}{(z-\theta)^2}\right] -$$

$$-\frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta}\left[\frac{\delta\rho_1}{\delta y}\frac{1}{z-\theta} + \rho_1\frac{\theta_y}{(z-\theta)^2} + \frac{\delta\rho_2}{\delta y}\right] = \frac{1}{z-\theta}\left[\rho_2\frac{\theta_{y^2}}{2\sqrt{\theta_y}} - \sqrt{\theta_y}\frac{\delta\rho_2}{\delta y}\right] +$$

$$+\frac{1}{(z-\theta)^2}\left[\rho_1\frac{\theta_{y^2}}{2\sqrt{\theta_y}} - \sqrt{\theta_y}\frac{\delta\rho_1}{\delta y} + \rho_2\,\theta_y^{\frac{3}{2}}\right].$$

Le dernier crochet peut s'écrire

$$\rho_1^2\frac{\delta}{\delta y}\frac{\sqrt{\theta_y}}{\rho_1} + \rho^2\,\theta_y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\rho_1^2\frac{\delta}{\delta y}\frac{1}{\sqrt{\theta_x}} + \frac{\theta_y\,\theta_{x,y}}{\sqrt{\theta_x}},$$

ce qui est identiquement nul.

On a donc en (65)

$$2\left(\varphi - 2\frac{\theta_x}{z-\theta}\right)\left(\rho_2\frac{\theta_{y^2}}{2\sqrt{\theta_y}} - \sqrt{\theta_y}\frac{\delta\rho_2}{\delta y}\right)\frac{1}{z-\theta} + \frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta}\left[\frac{\rho_1^3}{(z-\theta)^3} + 3\frac{\rho_1^2\rho_2}{(z-\theta)^2} +\right.$$

$$\left.+3\frac{\rho_1\rho_2^2}{z-\theta} + \rho_2^3\right] + 4\left[\frac{\delta\rho_1}{\delta x}\frac{1}{z-\theta} + \rho_1\,\theta_x\frac{1}{(z-\theta)^2} + \frac{\delta\rho_2}{\delta x}\right]\left[\frac{\theta_{y^2}}{2\sqrt{\theta_y}}\frac{1}{z-\theta} +\right.$$

$$\left.+\frac{\theta_y^{\frac{3}{2}}}{(z-\theta)^2}\right] - 4\frac{\sqrt{\theta_y}}{z-\theta}\left[\frac{\delta^2\rho_1}{\delta x\delta y}\frac{1}{z-\theta} + \left(\frac{\delta\rho_1}{\delta x}\theta_y + \frac{\delta\rho_1}{\delta y}\theta_x + \rho_1\theta_{x,y}\right)\frac{1}{(z-\theta)^2} +\right.$$

$$\left.+2\rho_1\,\theta_x\,\theta_y\frac{1}{(z-\theta)^3} + \frac{\delta^2\rho_2}{\delta x\delta y}\right] = o.$$

Cette relation doit être une identité en $\frac{1}{z-\theta}$. On doit donc avoir :

termes de degré 4

$$\rho_1{}^2 - 4\,\theta_x\,\theta_y = o,$$

ce qui est vérifié identiquement ;

termes de degré 3

$$3\sqrt{\theta_y}\,\rho^2{}_1\,\rho_2 + 2\,\rho_1\frac{\theta_x}{\sqrt{\theta_y}}\,\theta_{y^2} - 4\sqrt{\theta_y}\left(\frac{\delta\rho_1}{\delta y}\,\theta_x + \rho_1\,\theta_{x,y}\right) = o,$$

ce qui est une identité dès qu'on tient compte des valeurs de ρ_1 et de ρ_2 ;

termes de degré 2

$$2\,\theta_y\frac{\delta^2\rho_1}{\delta x\,\delta y} - 2\,\frac{\delta\rho_2}{\delta x}\,\theta_y^2 - 2\,\frac{\delta\rho_2}{\delta y}\theta_x\,\theta_y + \theta_{y^2}\left(\rho_2\,\theta_x - \frac{\delta\rho_1}{\delta x}\right) - 3\,\rho_2\,\theta_x\,\theta_{x,y} = o,$$

ce qui est encore identiquement vérifié par les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 ;

termes de degré 1

$$\varphi\left(\rho_2\,\theta_{y^2} - 2\,\theta_y\frac{\delta\rho_2}{\delta y}\right) + \rho^3{}_2\,\theta_y + 2\,\frac{\delta\rho_2}{\delta x}\,\theta_{y^2} - 4\,\frac{\delta^2\rho_2}{\delta x\,\delta y}\,\theta_y = o, \tag{67}$$

qu'on peut écrire, en tenant compte de (64)

$$\theta_{y^2}\left(\varphi\,\rho_2 + 2\,\frac{\delta\rho_2}{\delta x}\right) - 2\,\theta_y\left(\varphi\frac{\delta\rho_2}{\delta y} + \rho_2\frac{\delta\varphi}{\delta y} + 2\,\frac{\delta^2\rho_2}{\delta x\,\delta y}\right) = o.$$

On en tire par une intégration

$$\varphi\,\rho_2 + 2\,\frac{\delta\rho_2}{\delta x} + 2\,X\sqrt{\theta_y} = o. \tag{68}$$

Les fonction θ, ρ_2 et φ qui figurent dans cette condition sont liées par les relations

$$\rho_2 = \frac{\theta_{x,y}}{\sqrt{\theta_x\,\theta_y}}, \qquad \rho^2{}_2 + 2\,\frac{\delta\varphi}{\delta y} = o. \tag{69}$$

L'élimination de φ conduit enfin, après division par $\rho^2{}_2$, à

$$\frac{\delta^2}{\delta x\,\delta y}\log\rho_2 - \frac{1}{4}\,\rho^2{}_2 + X\frac{\delta}{\delta y}\frac{\sqrt{\theta_y}}{\rho_2} = o. \tag{70}$$

On a une condition symétrique de (70) en considérant (12′), (13′), (16′), (17′) et (18′)

$$\frac{\delta^2}{\delta x\,\delta y}\log\rho_2 - \frac{1}{4}\,\rho^2{}_2 + Y\frac{\delta}{\delta x}\frac{\sqrt{\theta_x}}{\rho_2}. \tag{70′}$$

Les conditions (70) et (70′) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les 36 équations du N° 28 soient compatibles.

Remarquons que l'équation (E) se conserve dans tout changement des variables x et y et nous voyons sans peine qu'on peut, en changeant au besoin la variable x, prendre en (70) $X = 0$ ou $X = 1$. On peut de même en (70') prendre soit $Y = 0$, soit $Y = 1$. Nous verrons d'ailleurs au N° 38 que $X = 0$ entraîne $Y = 0$.

37. Le problème que nous nous sommes posé exige qu'il n'existe pas d'involution d'ordre inferieur à 2. Il faut donc éliminer les formes de θ qui sont telles que (E) admette de telles involutions.

Or, nous avons établi au N° 24 les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une involution d'ordre inférieur à 2 pour le système X. Ce sont les conditions

$$(38) \qquad \alpha\frac{\delta\rho}{\delta y} - \rho\frac{\delta\alpha}{\delta y} = 0, \quad \alpha\frac{\delta\rho}{\delta z} - \rho\frac{\delta\alpha}{\delta z} - \frac{1}{2}\alpha(\omega\rho - \alpha\beta) = 0.$$

La dernière est identiquement vérifiée en vertu de (3) et de (63).

Quant à la première, l'équation (66) permet de l'écrire

$$(71) \qquad \frac{\delta}{\delta y}\frac{\rho_2}{\sqrt{\theta_y}} = 0.$$

L'unique condition d'involution d'ordre 1 pour le système X est de même

$$(71') \qquad \frac{\delta}{\delta x}\frac{\rho_2}{\sqrt{\theta_x}} = 0.$$

De (71) nous tirons

$$\theta_{x,y} = X\theta_y\sqrt{\theta_x}.$$

Si $X = 0$, nous devons prendre $\theta_{x,y} = 0$, et, en changeant au besoin les variables x et y, $\theta = x + y$.

Si X si est pas nul nous pouvons prendre $X = 2$,

$$(72) \qquad \theta_{x,y} = 2\theta_y\sqrt{\theta_x}.$$

Posons $\sqrt{\theta_x} = Z$, nous obtenons $\theta_y = Q$, puis

$$S = 2ZQ.$$

L'intégrale générale de cette équation est [1])

$$Z = \frac{1}{2}\frac{X''}{X'} - \frac{X'}{X+Y}.$$

En prenant X et Y pour nouvelles variables on aura

---

[1]) Goursat E. I, p. 96.

$$Z = -\frac{1}{x+y}.$$

L'intégrale générale de (72) est alors

$$\theta = a - \frac{1}{x+y}.$$

On peut, d'ailleurs, en changeant z, prendre $a = 0$, $\theta = -\dfrac{1}{x+y}$.

Nous avons ainsi ramené à deux formes les équations (E) qui admettent un invariant d'ordre 2 pour le système X. Il résulte d'ailleurs de l'expression de θ que ces équations ont un invariant du même ordre pour le système Y.

Avec $\theta = x + y$, l'équation (E) s'écrit

$$s = \frac{2}{z-(x+y)}(p + p^{\frac{1}{2}})(q + q^{\frac{1}{2}}).$$

Avec $\theta = -\dfrac{1}{x+y}$ on a

$$s = \frac{2}{z(x+y)+1}\left[(x+y)\,pq + p^{\frac{1}{2}}q + pq^{\frac{1}{2}} - zp^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right].$$

Cette dernière équation se ramène d'ailleurs à la précédente en posant $Z = -\dfrac{1}{z}$.

Dans la première faisons enfin $z - (x+y) = Z$, il vient

$$SZ - 2\,(P + 1 + \sqrt{P+1})\,(Q + 1 + \sqrt{Q+1}) = 0.$$

Cette équation est du type IV de M. GOURSAT [1]).

38. Les équations que nous venons d'obtenir ne répondent pas au problème proposé. Il faudra donc exclure les formes de θ qu'on peut, par un changement des variables x et y ramener à $\theta = (x+y)^{\pm 1}$.

Cette remarque faite, revenons aux conditions (70) et (70') et cherchons d'abord les foctions $\theta = (x+y)^u$ qui leur satisfont. Un calcul d'identification facile donne, en plus des deux formes de θ que nous venons d'écarter, $\theta = (x+y)^{\pm 1}$.

La solution $\theta = (x+y)^{-3}$ donne l'équation de M. LAINÉ [2]).

La solution $\theta = (x+y)^3$ donne une équation nouvelle.

On peut d'ailleurs obtenir une infinité d'équations (E) de la première classe en procédant comme il suit :

---

[1]) GOURSAT, E_1, p. 67.

[2]) LAINÉ, Thèse, p. 59.

Faisons $X = o$ en (70). Nous remarquons d'abord qu'il faut aussi faire $Y = o$ en (70′) sans quoi on aurait un invariant d'ordre 2.

Les conditions (70), (70′) se réduisent alors à une seule

$$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \rho_2 = \frac{1}{4} \rho_2^2.$$

Posons $\log \rho_2 = \frac{1}{2}(u + \log \sqrt{2})$, il vient

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = e^u.$$

L'intégrale générale de cette équation, qui est l'équation de Liouville, est donnée par

$$e^u = \frac{2 X'Y'}{(X+Y)^2}.$$

On en tire

$$\rho_2 = \frac{2\sqrt{X'Y'}}{X+Y},$$

$$\theta_{x,y} = 2\frac{\sqrt{X'Y'}\sqrt{\theta_x \theta_y}}{X+Y},$$

et, en prenant X et Y pour nouvelles variables

$$\theta_{x,y} = 2\frac{\sqrt{\theta_x \theta_y}}{x+y}.$$

Cette équation est de la première classe. Elle a eté integrée par M. Goursat [1]). Son intégrale générale est

$$\theta = -\frac{(Y-X)^2}{x+y} + \int X'^2\, dx + \int Y'^2\, dy.$$

En reportant dans (E) cette valeur de θ, nous obtenons une infinité d'équations qui répondent au problème que nous nous sommes posé.

39. Reprenons cette équation (E) (N° 35) et considérons la transformation de Backlund

$$\text{(T)} \qquad P = \frac{\sqrt{p\,\theta_x} + \theta_x}{z - \theta}, \quad Q = \frac{\sqrt{q\,\theta_y} + \theta_y}{z - \theta}.$$

On constate sans peine que l'élimination de Z conduit à l'équation (E).

---

[1]) Goursat, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXV, N° 2, p. 44.

Eliminons z. Nous avons d'abord

$$p = \frac{[P(z-\theta)-\theta_x]^2}{\theta_x}, \quad q = \frac{[Q(z-\theta)-\theta_y]^2}{\theta_y},$$

$$dz = (z-\theta)^2 \left(\frac{P^2}{\theta_x} dx + \frac{Q^2}{\theta_y} dy\right) - 2(z-\theta)\, dZ + d\theta,$$

$$-d\frac{1}{z-\theta} + 2\frac{dZ}{z-\theta} = \frac{P^2}{\theta_x} dx + \frac{Q^2}{\theta_y} dy,$$

$$-d\frac{e^{-2Z}}{z-\theta} = \frac{P^2 e^{-2Z}}{\theta_x} dx + \frac{Q^2 e^{-2Z}}{z-\theta} dy.$$

Posons encore $e^{-Z} = z_1$, nous avons

$$-d\frac{z_1^2}{z-\theta} = \frac{p_1^2}{\theta_x} dx + \frac{q_1^2}{\theta_y} dy.$$

Il reste à écrire que le second membre est une différentielle exacte, ce qui donne

$$(E_1) \qquad 2\frac{s_1}{\theta_{x,y}} = \frac{p_1}{\theta_x} + \frac{q_1}{\theta_y}.$$

Cette remarquable transformation est dûe à M. GOSSE [1]).

En égalant à zéro les invariants (au sens de LAPLACE) h et k de (E_1), on a les conditions (71) et (71'). Les conditions (70) et (70') ne sont autres que $h_1 = 0$ et $k_1 = 0$. Les équations (E) qui répondent au problème sont donc celles qu'on obtient en appliquant la transformation (T) aux équations (E_1) qui ont un invariant d'ordre 2 pour chaque système de caractéristiques L'ordre minimum des invariants a diminué d'une unité lorsqu'on a passé de (E) à (E_1).

La transformation (T) permet de constater que l'ensemble des équations (E) qui sont de la première classe n'est pas constitué uniquement par les formes de θ qui satisfont à (71) et (71') ou à (70) et (70'). Au contraire les équations (E) qui répondent à notre problème se présentent comme un cas très particulier des équations (E) de la première classe. Il est clair, en effet, qu'on peut déterminer θ de telle sorte que (E_1) admette un invariant d'un ordre n quelconque, fixé d'avance pour l'un de ses systèmes de caractéristiques ; il suffit pour cela de poser $h_{n-1} = 0$ au $k_{n-1} = 0$. Il existe d'ailleurs des formes

[1]) GOSSE, C. R. 25 Janvier 1932. — M. GOURSAT (C. R. 4 Avril 1932) ramène par une nouvelle T. B. cette équation (E_1) à l'équation $s^2 = \frac{\theta^2_{x,y}}{\theta_x \theta_y} p q$ qu'il a étudiée dans le Bulletin de la Société Mathématique de France XXV, 1897, p. 36. Cette dernière équation ne peut avoir d'invariant pour un de ses systèmes sans en avoir aussi pour l'autre. Il en résulte que l'équation (E) est de la première classe dès qu'elle a un invariant.

de θ qui sont telles que (E_1) admette pour chacun des systèmes un invariant d'ordre minimum aussi élevé qu'on voudra. Il suffit pour cela de poser $h_{n-1} = 0$ et de prendre, par exemple, $\theta = \theta(x + y)$, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que (E_1) soit une équation à invariants égaux.

Remarquons enfin que l'équation d'Euler[1])

$$E(\beta, \beta') \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} - \frac{\beta'}{x - y}\frac{\delta z}{\delta x} + \frac{\beta}{x - y}\frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

est un cas particulier de l'équation (E_1) dès qu'on y fait $\beta = \beta'$. Il suffit de faire $\theta = (x - y)^{2\beta + 1}$. On peut d'ailleurs changer y en $-y$. Les résultats obtenus au N° 38 se rattachent ainsi à des résultats plus généraux: On sait[2]) qu'il faut et qu'il suffit que β soit un nombre entier pour que $E(\beta, \beta)$ soit de la première classe, l'ordre minimum d'invariant est alors $\beta + 1$ si β est positif et $-\beta$ si β est négatif.

SECONDE PARTIE

Recherche des équations $s = f(x, y, z, q)$ qui sont de la première classe.

Chapitre I. Généralités.

Soit $\qquad (A) \quad s = f(x, y, z, q).$

Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir des conditions nécessaires à l'existence d'un invariant du système X. Il est d'ailleurs clair que l'existence d'une involution de ce système pour (A) entraîne celle d'un invariant puisque

$$\Delta_m^y \theta = \theta \frac{\delta f}{\delta p} \qquad \text{s'écrit} \quad \Delta_m^y \theta = 0.$$

40. Supposons que $\theta(x, y, z, p)$ soit une intégrale intermédiaire du 1er ordre nous aurons

$$\Delta_1^y \theta = \frac{\delta \theta}{\delta y} + q\frac{\delta \theta}{\delta z} + f\frac{\delta \theta}{\delta p} = 0.$$

Cette équation définit f comme linéaire en q à moins qu'on n'ait à la fois

$$\frac{\delta \theta}{\delta y} = \frac{\delta \theta}{\delta z} = \frac{\delta \theta}{\delta p} = 0,$$

---

1) Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, tom. II, Ch. III, p. 55.

2) Darboux, loc. cit., p. 62.

c'est-à-dire que l'invariant $\mathfrak{h}$ ne soit autre que l'invariant banal X. L'étude des équations (A) linéaires en q et admettant un invariant du 1er ordre a été faite de façon définitive par M. GAU [1]). Lorsqu'elles sont de la première classe elles se ramènent par des transformations ponctuelles à des équations linéaires, à des équations de MOUTARD, à l'équation $s = qz$, à l'équation de M. GOURSAT $s = qe^z$, ou à l'équation de M. GAU $s = (e^z + e^{-z})\,q$.

41. Nous écrirons l'involution d'ordre minimum sous la forme

$$p_m + \varphi\,(x, y, z, p_1 \dots . p_{m-1}) = 0,$$

et nous supposerons $m > 1$.

De la condition d'involution

$$\Delta^y_{m-1}\,\varphi + \frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} = 0 \tag{1}$$

on tire

$$\Delta^y_{m-1}\,\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}} + \frac{\delta f}{\delta z} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta^y_{m-1}\,\frac{\delta^2 f}{\delta p_{m-1}} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}}\; X_{m-1}\, p_{m-1} + \psi_{m-2}\,(x, y, z, p_1, \dots . p_{m-2}),$$

et, en reportant en (2)

$$\Delta^y_{m-2}\,\psi_{m-2} + X_{m-1}\,\frac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}} + \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Si X_{m-1} n'est pas nul, par combinaison avec (2) on obtient

$$\Delta^y_{m-1}\left(X_{m-1}\,\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}} - \frac{\delta\psi_{m-2}}{\delta p_{m-2}}\right) = 0.$$

Il existerait donc un invariant d'ordre $m - 1$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Il faut donc prendre $X_{m-1} = 0$ et $\dfrac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}}$ est au plus d'ordre $m - 2$. Le raisonnement se peut poursuivre jusqu'aux dérivées du premier ordre. Nous avons donc

$$\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}} = Xp + \mu\,(x, y, z), \tag{3}$$

1) GAU, Annales de l'Université de Grenoble t. 25, p. 104, N° 6.

et, en reportant en (1), on en tire une condition necessaire à l'existence d'une involution du système X

$$(\mathrm{K}_1) \quad \Delta_0^y \mu(x, y, z) + Xf + \frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

dans laquelle X peut être nul.

42. Nous allons chercher de nouvelles conditions nécessaires à l'existence d'une telle involution.

Remarquons d'abord que les expressions [1]) M_n^{n-1} sont formées, dans l'hypothèse $\frac{\delta f}{\delta p} = 0$, dès qu'on a $n = 3$, et supposons $m > 3$. Reportons dans (1) l'expression de φ tirée de (3)

$$\varphi = (Xp + \mu) p_{m-1} + \varphi_{m-2}(x, y, z, p_1, \ldots . p_{m-2}),$$

nous obtenons

$$(4) \qquad \Delta_{m-2}^y \varphi_{m-2} + (Xp + \mu) \frac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}} + \left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right) = 0.$$

Le symbole $\left(\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}\right)$ désigne, suivant l'usage, l'expression $\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}}$ privée de son terme d'ordre supérieur.

On a ensuite

$$\Delta_{m-2}^y \frac{\delta \varphi_{m-2}}{\delta p_{m-2}} + (Xp + \mu) \frac{\delta f}{\delta z} + M_{m-1}^{m-2} = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de $M_{m-1}^{m-2} = (m-1) \frac{d}{dx} \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z}$,

$$\Delta_{m-2}^y \frac{\delta \varphi_{m-2}}{\delta p_{m-2}} + (Xp + \mu) \frac{\delta f}{\delta z} + (m-1) \frac{d}{dx} \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Posons $u = \frac{\delta \varphi_{m-2}}{\delta p_{m-2}} - \frac{1}{2}(Xp + \mu)^2 - (m-1) \frac{d}{dx}(Xp + \mu)$, nous avons

$$(5) \qquad \Delta_{m-2}^y u + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Je dis que u est au plus d'ordre 3. Cela est évident si l'on a $m \leq 5$. Supposons donc $m - 2 > 3$ et u d'ordre $k > 3$. Nous tirons de (5)

$$\Delta_k^y \frac{\delta u}{\delta p_k} = 0, \qquad u = \xi p_k + u_{k-1}. \qquad (\xi \neq 0).$$

et, en reportant en (5)

---

1) Gosse, Journal de Liouville, loc. cit., pag. 303.

$$(6) \qquad \Delta_{k-1}^{y} u_{k-1} + \xi \frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

$$\Delta \frac{\delta u_{k-1}}{\delta p_{k-1}} + \xi \frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\delta u_{k-1}}{\delta p_{k-1}} - \xi (Xp + \mu) = \xi X_1, \qquad u_{k-1} = \xi (Xp + \mu + X_1) p_{k-1} + u_{k-2}.$$

L'equation (6) s'écrit donc

$$(7) \qquad \Delta u_{k-2} + \xi (Xp + \mu + X_1) \frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}} + \xi \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \right) + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

on en tire

$$\Delta \frac{\delta u_{k-2}}{\delta p_{k-2}} + \xi (Xp + \mu + X_1) \frac{\delta f}{\delta z} + (k-1) \xi \frac{d}{dx} \frac{\delta f}{\delta z} + \xi \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Posons

$$v = \frac{\delta u_{k-2}}{\delta p_{k-2}} - \xi \frac{(Xp + \mu)^2}{2} - \xi X_1 (Xp + \mu) - (k-1) \xi \frac{d}{dx} (Xp + \mu).$$

Nous avons

$$\Delta v + \xi \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Si nous rapprochons cette relation de (5) nous contatons que $\xi u - v$ est un invariant d'ordre k, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Il faut donc que u soit au plus d'ordre 3. Supposons le d'abord d'ordre 3. En procédant comme nous venons de le faire, nous retrouvons d'abord la relation (7).

$$\Delta_1^{y} u_1 + \xi (Xp + \mu + X_1) \frac{df}{dx} + \xi \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) + \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

On en tire par dérivation

$$\Delta \frac{\delta u_1}{\delta p} + \xi X \frac{df}{dx} + \xi (Xp + \mu + X_1) \frac{\delta f}{\delta z} + 2 \xi \frac{d}{dx} \frac{\delta f}{\delta z} + \xi \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

et, en posant

$$w = \frac{\delta u_1}{\delta p} - \xi X p_2 - \xi \frac{(Xp + \mu)^2}{2} - \xi X_1 (Xp + \mu) - 2 \xi \frac{d}{dx} (Xp + \mu),$$

nous avons

$$\Delta w + \xi \frac{\delta f}{\delta q} \frac{\delta f}{\delta z}.$$

Cette relation est incompatible avec (5) car leur ensemble définit $\xi u - w$ comme un invariant d'ordre 3.

Il faut donc que u soit au plus d'ordre 2. Soit douc

$$\Delta_2^y u + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Nous avons encore $u = \xi p_2 + u_1(x, y, z, p)$, où ξ peut être nul.

$$\Delta_1^y u_1 + \xi \frac{df}{dx} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

$$\Delta \frac{\delta u_1}{\delta p} + \xi \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

On en tire par le procédé déjà employé

$$u_1 = \frac{\xi}{2} X p^2 + (\xi \mu + X_1) p + \lambda(x, y, z), \quad \text{où } X_1 \text{ peut être nul.}$$

et l'on a enfin

$$(\mathrm{K}_2) \quad \Delta_0^y \lambda + (\xi \mu + X_1) f + \xi \left(\frac{\delta f}{\delta x} + f \frac{\delta f}{\delta q}\right) + \frac{\delta f}{\delta z}\frac{\delta f}{\delta q} = 0.$$

Remarque. (K_2) a été établie dans l'hypothèse $m > 3$. Cette condition subsiste pour $m = 3$.

En effet, la relation (4) est encore vraie ; elle s'écrit

$$\Delta_1^y \varphi_1 + (Xp + \mu)\frac{df}{dx} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0.$$

On en tire

$$\Delta \frac{\delta \varphi_1}{\delta p} + X \frac{df}{dx} + (Xp + \mu)\frac{\delta f}{\delta z} + 2 \frac{d}{dx}\frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

et, par le même procédé que tout à l'heure, une relation telle que (5).

$$\Delta_2^y u + \frac{\delta f}{\delta q}\frac{\delta f}{\delta z} = 0,$$

au moyen de laquelle on obtient encore (K_2).

Plaçons nous maintenant dans l'hypothèse $m = 2$, nous avons

$$\Delta_1^y \varphi + \frac{df}{dx} = 0,$$

$$\Delta \frac{\delta \varphi}{\delta p} + \frac{\delta f}{\delta z} = 0, \qquad \varphi = \frac{X}{2} p^2 + (\mu + X_1) p + \lambda(x, y, z).$$

et on peut remplacer (K_2) par la condition

$$(\mathrm{K}'_2) \quad \Delta_0^y \lambda + (\mu + X_1) f + \frac{\delta f}{\delta x} + f \frac{\delta f}{\delta q} = 0.$$

Les conditions (K_1), (K_2) ou (K'_2) vont nous permettre de résoudre le problème que nous nous sommes proposé.

Nous supposerons d'ailleurs essentiellement que dans (A) on a $\frac{\delta f}{\delta z}\frac{\delta f}{\delta q} \neq 0$. L'hypothèse $\frac{\delta f}{\delta z} = 0$ a été traitée par M. Gosse [1]; l'hypothèse $\frac{\delta f}{\delta q} = 0$ par Clairin [2].

Chapitre II.

Equations linéaires en q. (A) $s = b(x, y, z)\, q + c(x, y, z)$.

Paragraphe I. Conditions (K_1), (K_2) ou (K'_2) et $(\Gamma')_1$, $(\Gamma')_2$.

$$(\Gamma')_1 \quad \Delta_1^x \theta + b\theta = 0,$$

$$(\Gamma')_2 \quad \Delta_1^x \beta - Y\theta H_1(f) + \frac{\delta f}{\delta z} = 0, \qquad \text{avec } H_1(f) = \frac{\delta f}{\delta y} + q\frac{\delta f}{\delta z}.$$

44. On tire de $(\Gamma')_1$

$$(8) \qquad \frac{\delta\theta}{\delta z} = 0, \qquad \frac{\delta\theta}{\delta x} + (bq + c)\frac{\delta\theta}{\delta q} + bq = 0.$$

$$\left(\frac{\delta b}{\delta z} q + \frac{\delta c}{\delta z}\right)\frac{\delta\theta}{\delta q} + \frac{\delta b}{\delta z}\theta = 0.$$

Si $\frac{\delta b}{\delta z} = 0$, $(\Gamma')_1$ est vérifiée par $\theta = \theta(z, y)$.

Si l'on a $\frac{\delta b}{\delta z} \neq 0$, on doit prendre $\frac{\delta\theta}{\delta q} \neq 0$ et on tire de la dernière relation

$$\frac{\delta c}{\delta z} + \left(\frac{\theta}{\theta'} + q\right)\frac{\delta b}{\delta z} = 0, \qquad \left(\theta' = \frac{\delta\theta}{\delta q}\right).$$

Il faut donc prendre $\frac{\theta}{\theta'} + q = -u(x, y)$, ce qui entraîne

$$\log\theta = v(x, y) - \log(u + q).$$

En reportant dans la seconde des équations (8), on voit qu'il faut prendre

$$\frac{\delta v}{\delta x} = 0, \qquad c = bu - \frac{\delta u}{\delta x},$$

ce qui permet, en posant $Z = z + \varphi(x, y)$, de ramener (A) à la forme

$$s = a(x, y, z)\, p.$$

---

[1] Gosse, Mémorial des sciences Mathématiques. Fascicule XII, p. 43.

[2] Clairin, Loc. cit.

1ère Hypothèse $\frac{\delta b}{\delta z} \neq 0$. Etude de $s = a(x, y, z)\, q$.

45. M. Gau a fait cette étude quand a est indépendant de y [1]). Il a obtenu les équations de la première classe $s = e^z q$, et $s = (e^z + e^{-z})\, q$. Il faut leur adjoindre $s = zq$. L'hypothèse $\frac{\delta a}{\delta y} = 0$ est ainsi entièrement traitée. Nous supposerons donc $\frac{\delta a}{\delta y} \neq 0$.

Condition (K_1)

$$\frac{\delta \mu}{\delta y} + q \frac{\delta \mu}{\delta z} + X a q + \frac{\delta a}{\delta z} q = 0 \quad \text{donne}$$

(8)
$$\frac{\delta \mu}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta \mu}{\delta y} + X a + \frac{\delta a}{\delta z} = 0,$$

$$a = \sigma(x, y)\, e^{-Xz} + \tau(x, z), \quad s = (\sigma\, e^{-Xz} + \tau)\, q.$$

Si X n'est pas nul, on peut prendre $X = -1$ et l'on a par conséquent l'un des deux types d'équations.

(9)
$$s = (\sigma + \tau)\, q,$$

(10)
$$s = (\sigma\, e^z + \tau)\, q.$$

Pour (9) on peut prendre $\mu = -\tau$,

et, pour (10), $\mu = \tau_1 - \frac{\delta \tau_1}{\delta z}$, avec $\tau = \frac{\delta \tau_1}{\delta z}$.

Il est facile de voir que la condition (K'_2) exige $\frac{\delta \sigma}{\delta y} = 0$; l'équation est alors d'un type que nous venons d'écarter.

46. *Condition* (K_2)

$$\frac{\delta \lambda}{\delta y} + q \frac{\delta \lambda}{\delta z} + (\xi \mu + X_1) f + \xi \left(\frac{\delta f}{\delta x} + f \frac{\delta f}{\delta q}\right) + \frac{\delta f}{\delta z} \frac{\delta f}{\delta q} = 0.$$

Appliquons cette condition à (9) nous obtenons

$$\frac{\delta \lambda}{\delta y} = 0; \quad \frac{\delta \lambda}{\delta z} + (X_1 - \xi \tau)(\sigma + \tau) + \xi \left[\frac{\delta \sigma}{\delta x} + \frac{\delta \tau}{\delta x} + (\sigma + \tau)^2\right] + \frac{\delta \tau}{\delta z}(\sigma + \tau) = 0.$$

La condition de compatibilité s'écrit

$$X_1 + \xi \tau + 2 \xi \sigma + \frac{\delta \tau}{\delta z} + \xi \frac{\delta}{\delta x} \log \frac{\delta \sigma}{\delta y} = 0.$$

On en tire

1) Gau, Thèse, p. 109—116.

$$\frac{\delta\tau}{\delta z} + \xi\tau = X_3,$$

$$X_1 + X_3 + \xi\left(\frac{\delta}{\delta x}\log\frac{\delta\sigma}{\delta y} + 2\sigma\right) = 0.$$

Nous avons ici à distinguer deux cas

1°. Ou bien $\xi = 0$ et (K_1) est vérifié dès qu'on prend $\tau = X_3 z + X_4$. (A) s'écrit alors, en modifiant σ

$$s = (\sigma + X_2 z) q.$$

En posant $Z = X_4 z$ on peut prendre $X_3 = 1$ et l'on obtient

(I) $$s = (\sigma + z) q.$$

2°. Ou bien on a $\xi \neq 0$. On peut alors, en modifiant σ et τ, prendre $X_3 = 0$ et il vient

$$\frac{\delta^2\sigma}{\delta x \delta y} + 2\sigma\frac{\delta\sigma}{\delta y} + \xi_1\frac{\delta\sigma}{\delta y} = 0,$$

$$\frac{\delta\tau}{\delta z} + \xi\tau = 0.$$

On en tire

$$\sigma = \frac{\xi'_3}{\xi_3 + Y} + \xi_4, \quad \tau = \xi_5 e^{-\xi z},$$

$$s = \left(\frac{\xi'_3}{\xi_3 + Y} + \xi_4 + \xi_5 e^{-\xi z}\right) q.$$

On peut donner à cette équation la forme

(II) $$s = \left(X + \frac{1}{x + y} + e^z\right) q.$$

47. Appliquons maintenant la condition (K_2) à (3) nous avons, en désignant par des accents les dérivées par rapport à z

$$\frac{\delta\lambda}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta\lambda}{\delta z} + \left[\xi(\tau_1 - \tau) + X_1\right](\sigma e^z + \tau) + \xi\left[\frac{\delta\sigma}{\delta x}e^z + \frac{\delta\tau}{\delta x} + (\sigma e^z + \tau)^2\right] +$$
$$+ (\sigma e^z + \tau')(\sigma e^z + \tau) = 0,$$

ce qui exige

(11) $$\left[\xi(\tau_1 - \tau) + X_1\right]\frac{\delta\sigma}{\delta y} + \xi\left[\frac{\delta^2\sigma}{\delta x \delta y} + 2\frac{\delta\sigma}{\delta y}(\sigma e^z + \tau)\right] +$$
$$+ \frac{\delta\sigma}{\delta y}(2\sigma e^z + \tau + \tau') = 0.$$

Une dérivation par rapport à y donne, après suppression du facteur non nul $\frac{\delta\sigma}{\delta y}$

$$\xi(\tau'_1 + \tau') + \tau' + \tau'' + 2(\xi + 1)\sigma e^z = 0,$$

ce qui exige $\xi + 1 = 0$, puis

12) $$\tau'' - \tau'_1 = 0, \quad \tau' - \tau_1 = X_2,$$

et (11) donne alors, en changeant X_1

$$\frac{\delta^2\sigma}{\delta x \delta y} + X_1 \frac{\delta\sigma}{\delta y} = 0.$$

L'intégrale génerale en est

$$\sigma = \xi_1 Y_1 + \xi_2, \qquad (\xi_1 Y_1 \neq 0).$$

Celle de (12) est

$$\tau = \xi_3 e^z + \xi_4 e^{-z}.$$

On a donc, en changeant ξ_2,

$$s = \left[(\xi_1 Y_1 + \xi_2) e^z + \xi_4 e^{-z}\right] q.$$

Suivant que $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ dépend ou non de x, on peut donner à cette équation l'une des formes

(III) $$s = \left[(x + y) e^z + X_1 e^{-z}\right] q.$$

(IV) $$s = (x e^z + y e^{-z}) X q.$$

48. *Condition* (Γ'_2). On a dans tous les cas $\theta = \frac{1}{q}$,

$$\frac{\delta\beta}{\delta x} + p\frac{\delta\beta}{\delta z} + f\frac{\delta\beta}{\delta q} - \frac{Y}{q} H_1(f) + \frac{\delta f}{\delta z} = 0.$$

Cette condition se vérifie sans peine pour (I) et (II); il suffit de prendre $Y = -1$, $\beta = \beta(x, y)$ et, dans un cas, $\frac{\delta\beta}{\delta x} = \frac{\delta\sigma}{\delta x}$, dans l'autre $\frac{\delta\beta}{\delta x} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Appliquons la à (III) on en tire

$$\frac{\delta\beta}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta\beta}{\delta x} + \left[(x + y) e^z + X e^{-z}\right] q \frac{\delta\beta}{\beta q} - Y\left[e^z + (x + y) e^z q - X e^{-z} q\right] +$$
$$+ \left[(x + y) e^z - X e^{-z}\right] q = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\delta\beta}{\delta x} = 0, \quad (x + y) q \left(\frac{\delta\beta}{\delta q} - Y + 1\right) - Y = 0, \quad X\left(\frac{\delta\beta}{\delta q} + Y - 1\right) = 0.$$

Ces équations ne sont compatibles que si l'on prend $X=Y=0$.

L'équation (III) s'écrit alors

$$\text{(III)}_a \qquad s=(x+y)\,e^z\,q.$$

Application de (Γ'_2) à (IV).

On a, puisqu'il faut ici supposer $X \neq 0$

$$\frac{\delta\theta}{\delta z}=\frac{\delta\theta}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta\theta}{\delta y}-Y+1=0, \quad yq\left(\frac{\delta\theta}{\delta q}+Y-1\right)-Y=0.$$

Ces équations sont incompatibles.

Il faut donc écarter le type (IV) et continuer l'étude de (I), (II) et (III)_a.

49. *Etude de* (I) $\qquad s=(\sigma+z)\,q.$

La transformation $q=e^Z$ change cette équation en

$$\text{(I)}_a \qquad s=e^z+\frac{\delta\sigma}{\delta y}.$$

Elle élève d'un ordre les invariants du système X, s'il en existe, et abaisse d'un ordre ceux du système Y. Or, l'invariant minimum du système X pour (I) est au moins d'ordre 3 ; il est, au moins d'ordre 4 pour sa transformée (I)_a. Mais Clairin a démontré qu'une équation telle que (I)_a ne pouvait être de la première classe que si elle se ramène par une transformation ponctuelle à une équation de Liouville, laquelle a un invariant du 2[e] ordre pour chaque système. (I) ne peut donc pas être de la première classe.

Etude de (III)_a $\qquad s=(x+y)\,e^z\,q.$

Pour qu'il existe un invariant $u(x, y, z, p_1, \ldots p_m)$ il faut et il suffit qu'on ait

$$\Delta_1^y\,u=\frac{\delta u}{\delta y}+q\frac{\delta u}{\delta z}+f\frac{\delta u}{\delta p_1}+\frac{df}{dx}\frac{\delta u}{\delta p_2}+\ldots+\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\frac{\delta u}{\delta p_m}=0.$$

Or de $f=(x+y)\,e^z\,q$ on tire

$$\frac{df}{dx}=\left[e^z+(x+y)\,e^z\,p+(x+y)^2\,e^{2z}\right]q.$$

D'une façon générale $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ présente q en facteur commun et il renferme un terme et un seul en $(x+y)^{n+1}$ qui est $(x+y)^{n+1}\,e^{(n+1)z}\,q$. Si nous reportons dans $\Delta_m^y\,u$ $\;f$ et ses derivées successives nous aurons d'abord à prendre $\frac{\delta u}{\delta y} = 0$, et le terme en $(x+y)^{n+1} e^{(n+1)z}$ ne peut pas disparaître. L'équation $(\mathrm{III})_a$ n'est donc pas de la première classe.

Etude de (II) $\quad s = (X + \frac{1}{x+y} + e^z)\, q.$

Posons $q = e^Z$, nous avons

$$P = X + \frac{1}{x+y} + e^z,$$

$$S = e^z q - \frac{1}{(x+y)^2} = \left(P - X - \frac{1}{x+y}\right) e^Z - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Revenons aux minuscules, puis posons $Z = z + \varphi(x, y)$, il vient

$$S = \left(P - \frac{\delta\varphi}{\delta x} - X - \frac{1}{x+y}\right) e^{Z-\varphi} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x\, \delta y} - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Nous pouvons prendre φ de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} + X + \frac{1}{x+y} = 0, \qquad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x\, \delta y} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0,$$

et

$$S = X_1 (x+y)\, e^Z P.$$

Il suffit d'appliquer à cette équation les conditions (K'_2) et (K_2) pour vérifier qu'il faut prendre X_1 constant. On peut alors, en modifiant Z prendre $X_1 = 1$ et l'équation précédente est du type (III) a. Elle n'est donc pas de la première classe.

Conclusion. Les seules équations de la première classe qui sattsfont à cette première hypothèse sont des équations de M, Gau.

$2^{ème}$ *Hypothèse* $\frac{\delta b}{\delta z} = 0 \qquad s = a(x, y)\, q + b(x, y, z).$

50. Ces équations vérifient (Γ'_1) (n° 1). *Appliquons leur la condition* (K_1).

$$(\mathrm{K}_1) \quad \frac{\delta\mu}{\delta y} + q \frac{\delta\mu}{\delta z} + X(a q + b) + \frac{\delta b}{\delta z} = 0.$$

Il faut prendre $X \neq 0$, sans quoi b et, par suite, f serait linéaire eu z. On tire de l'équation précédente

$$\frac{\delta\mu}{\delta y} + bX + \frac{\delta b}{\delta z} = 0, \qquad \frac{\delta\mu}{\delta y} + aX = 0.$$

Il résulte de la dernière équation que μ est du premier degré en z, et, de la précédente on tire alors

$$b = a_1 e^{-Xz} + a_2 z + a_3, \qquad a_i = a_i(x, y),$$

puis

$$s = a q + a_1 e^{-Xz} + a_2 z + a_3.$$

E: posant d'abord $-Xz = z_1$ on obtient une équation de même forme dans laquelle $X = -1$. On peut ensuite prendre $a = 1$ en posant $z_1 = z_2 - \log a_1$.

Soit donc

$$s = a q + e^z + a_2 z + a_3.$$

Si nous revenons à (Γ'_1) nous avons $a_2 = \frac{\partial a}{\partial y}$ et $\mu = az + a_4(x, y)$.

Nous prendrons donc, en changeant les notations,

$$s = a q + e^z + \frac{\partial a}{\partial y} + a_1, \qquad \mu = a z + a_2. \tag{13}$$

Appliquons la condition (K_2)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \left[\xi (a z + a_2) + X_1\right] \left(a q + e^z + \frac{\partial a}{\partial y} z + a_1\right) +$$
$$+ \xi \left(\frac{\partial a}{\partial x} q + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} z + \frac{\partial a_1}{\partial z}\right) + \xi a \left(a q + e^z + \frac{\partial a}{\partial y} z + a_1\right) +$$
$$+ a \left(e^z + \frac{\partial a}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(14) \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \left[\xi (a z + a_2) + X_1\right]\left(e^z + \frac{\partial a}{\partial y} z + a_1\right) + \xi \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} z + \frac{\partial a_1}{\partial x}\right) + \\ &\qquad + \xi a \left(e^z + \frac{\partial a}{\partial y} z + a_1\right) + a \left(e^z + \frac{\partial a}{\partial y}\right) = 0, \\ &\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} + a \left[\xi (a z + a_2) + X_1\right] + \xi \left(\frac{\partial a}{\partial x} + a^2\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend $a = 0$, on a une équation de Clairin. Si l'on pred $a \neq 0$, la dernière équation donne

$$\lambda = -\frac{\xi a^2}{2} z + a_3 z + a_4.$$

En reportant dans la précédente on obtient un terme en z^2 dont le coefficient est $-\xi a \frac{\partial a}{\partial y}$ et qui ne peut disparaître que si l'on prend $\xi = 0$ ou $\frac{\partial a}{\partial y} = 0$.

Soit d'abord $\xi = o$; $\lambda = = aX_1 z + a_3 = o$. En reportant dans la première équatiou (14) on observe qu'il existe deux termes en e^z qui ne peuvent disparaître que si l'on a $X_1 + a = o$. Il faut donc dans tous les cas prendre $a = X$ et l'équation (13) s'écrit

$$s = Xq + e^z + a_1.$$

Cette équation se ramène à une équation de Clairin en posant $Z = \xi z$ où ξ est une fonctipn convenablement choisie de z.

Si maintenant nous appliquons à (13) la condition (K'_2) nous obtenons $a = o$ et nous avons encore des équations de Clairin.

Conclusion. Les seules équations qui, dans cette seconde hypothèse peuvent être de ıa première classe sont des équations linéaires ou des équaiions de Clairin.

Paragraphe II (Γ'_1) n'est verifié que par $\theta = o$.

51. M. Gau a démontré[1]) qu'à l'exception des équations de Clairin les seules équations de ce type qni satisfont à la condition (K_1) sont

$$\text{(B)} \quad s = e^z q + a_1(x, y)\, e^{mz} + a_2(x, y)$$

où l'on a $m \geq 2$, m étant l'ordre minimum d'involution du système Y, et $\frac{\delta a_1}{\delta y} \neq o$.

Reprenons la condition (K_1) nous en tirons les deux suivantes

$$\frac{\delta \mu}{\delta z} + (X + 1)\, e^z = o, \qquad \frac{\delta \mu}{\delta y} + X(a_1 e^{mz} + a_2) + m\, a_1 e^{mz} = o.$$

La compatibilité de ces équations exige $X + m = o$. Remplaçons a_2 par $\frac{\delta a_2}{\delta y}$ nous avons

$$\mu = (m - 1)\, e^z + m\, a_2,$$

$$\text{(B)} \quad s = e^z q + a_1 e^{mz} + \frac{\delta a_2}{\delta y}.$$

Condition (K). En annulant séparément les termes indépendants de q et le coefficient de q, la condition (K) donne

$$\frac{\delta \lambda}{\delta z} + \xi\left[(m-1)\, e^z + m\, a_2\right] e^z + X_1 e^z + (\xi + 1)\, e^{2z} = o,$$

$$(15) \quad \frac{\delta \lambda}{\delta y} + \xi\left[(m-1)\, e^z + m\, a_2\right]\left(a_1 e^{mz} + \frac{\delta a_2}{\delta y}\right) + X_1\left(a_1 e^{mz} + \frac{\delta a_2}{\delta y}\right) +$$
$$+ \xi\left[\frac{\delta a_1}{\delta x} e^{mz} + \frac{\delta^2 a_2}{\delta x \delta y} + e^z\left(a_1 e^{mz} + \frac{\delta a_2}{\delta y}\right)\right] + m\, a_1 e^{(m+1)z} = o.$$

[1]) Gau, Annales de Grenoble, p. 162.

La première définit λ comme fonction du second degré en e^z. Dans la seconde $e^{(m+1)z}$ doit donc disparaître. Son coefficient est $m(\xi + 1)a_1$. Il faut donc prendre $\xi + 1 = 0$. Mais alors la première équation (15) définit λ comme une fonction du premier degré en e^z. Les termes en e^{mz} doivent donc disparaître de la seconde. Il faut alors, en changeant X_1 prendre

$$a_2 = X_1 - \frac{1}{m}\frac{\delta}{\delta x}\log a_1,$$

et l'équation (B) s'écrit

$$s = e^z q + a_1 e^{mz} - \frac{1}{m}\frac{\delta^2}{\delta x \delta y}\log a_1.$$

Si l'on fait le changement de fonction $z = Z - \frac{1}{m}\log a_1$ on a

$$S = e^{Z - \frac{1}{m}\log a_1}\left(Q - \frac{1}{m}\frac{\delta}{\delta y}\log a_1\right) + e^{mZ}.$$

En posant encore $\frac{1}{m}\log a_1 = -\log a$ et en revenant aux minuscules on a

$$s = e^z\left(a q + \frac{\delta a}{\delta y}\right)e^{mz}.$$

La transformation de Bäcklund $p - a e^z = Z$ donne

$$Q = e^{mz}, \qquad S = m e^{mz} p = m e^{mz}(Z + a e^z).$$

En reprenant les minuscules et en changeant a et z on a ainsi

$$s = zq + a q^{\frac{m+1}{m}}, \qquad (a \neq 0).$$

52. Pour que $p_n + \varphi(x, y, z, p_1 \ldots p_{n-1})$ soit un invariant on doit avoir

$$\Delta^y_{n-1}\varphi + \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} = 0. \tag{16}$$

Dans $\Delta^y_{n-1}\varphi$ ne figurent que les dérivées de f d'ordre inférieur à $n-1$. Or, en se bornant aux plus hautes puissances de $q^{\frac{1}{m}}$, on a successivement

$$\frac{df}{dx} = \frac{m+1}{m}a^2 q^{\frac{m+2}{m}} + \ldots, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{(m+1)(m+2)}{m^2}a^3 q^{\frac{m+3}{m}} + \ldots,$$

et, d'une façon générale,

$$\frac{d^k f}{dx_k} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{m^k} a^{k+1} q^{\frac{m+k+1}{m}} + \ldots$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation (16) contient un terme en $q^{\frac{m+n}{m}}$ qui ne peut se réduire avec aucun autre et dont le coefficient n'est pas nul.

L'équation $s = zq + aq^{\frac{m+1}{m}}$ n'est donc pas de la première classe.

L'application de la condition (K'_2) à l'équation (B) montre qu'il faudrait prendre $a_1 = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Les seules équations du type étudié dans ce paragraphe qui puissent être de la première classe sont donc des équations de Clairin.

53. *Conclusion générale.*

Les seules équations $s = a(x, y, z)\, q + b(x, y, z)$ qui sont de la première classe se ramênent par des transformations ponctuelles à des types connus qui sont des épuations linéaires, des équations de Clairin, de Moutard, l'équation de M. Goursat $s = qe^z$, l'équation de M. Gau $s = (e^z + e^{-z})\, q$ et l'équation $s = qz$.

J'ai étudié également les équations $s = f(x, y, z, q)$ non linéaires en q. Les seules qui soient de la première classe sont celles qui se ramènent par des transformations ponctuelles à l'équation de M. Goursat $s = e^z \sqrt{yq^2 + q}$. Cette conclusion, qui est très simple, s'appuie sur des calculs trop longs pour trouver place ici. Je me propose d'en donner les développements dans un second mémoire.

ERRATA.

Pour des raisons indépendantes de ma volonté j'ai été mis dans l'impossibilité de corriger les épreuves d'imprimerie de ce travail. C'est pourquoi le texte présente de trop nombreuses erreurs. Je prie les lecteurs d'agréer mes regrets et mes excuses. Pour ne pas allonger outre mesure ces errata j'ai dû me borner à rectifier les fautes qui risquaient de rendre le texte inintelligible.

Page	lignes	au lieu de	lire
1	15 et 18	intégrale	intégrable
2	19, 20, 21	$\varphi = O$	$\varphi = o$
3	2	$m \geq 2$ on $A = p_m + \ldots$	$m \geq 2$ on a $A = p_m + \ldots$
3	26	$\Delta_1^y \alpha + (m-1)[\ldots]$	$\Delta_1^y \alpha_1 + (m-1)[\ldots]$
4	19	supprimer la parenthèse et la reporter après les formules (Γ)	
		au lieu de	lire
4	26	$\Delta_1^y \sigma + x \frac{\delta f}{\delta p} + F(f) = o$	$\Delta_1^y \sigma + X \frac{\delta f}{\delta p} + F(f) = o$
5	2	$\frac{\delta \psi}{\gamma p}$	$\frac{\delta \psi}{\delta p}$
5	note [4])	M et M	M_1 et M_2
8 ligne 14		$r + \phi$	$r + \psi = o$
8	21	$\alpha_1 = \frac{\delta \alpha}{\delta p} + \alpha \psi$	$\alpha_1 = \frac{\delta \psi}{\delta p} + \alpha \psi$
8	26	y	Y
9	1	$\alpha = \frac{\delta^2 a}{\delta p^2} : \frac{\delta a}{\delta p} : \frac{a''}{a'}$,	$\alpha = \frac{\delta^2 a}{\delta p^2} : \frac{\delta a}{\delta p} = \frac{a''}{a'}$.
9	15	$\mu = \sigma + x \log a$	$\mu = \sigma + X \log a'$
9	21	$v = d_2 - \mu$	$v = \alpha_2 - \mu$
10	7	$\Delta_1^x \lambda - \lambda A + F(f) = o$	$\Delta_1^x \lambda - YA + F(f) = o$
11	8	$\left(\frac{1}{a'}\right)$	$\left(\frac{1}{a'}\right)''$.
13	7	$\beta_1 \frac{\delta f}{\delta p \delta q}$	$\beta_1 \frac{\delta^2 f}{\delta p \delta q}$.
13	10	$= \beta_1 \frac{\delta B}{\delta q} + \ldots$	$= \beta_1 \frac{\delta B_1}{\delta q} + \ldots$

Page	ligne	au lieu de	lire
13	12	$+\beta_1\,\omega\,(p+\alpha_0)\,\beta_1\,\alpha_4$	$+\beta_1\,\omega\,(p+\alpha_0)+\beta_1\,\alpha_4.$
14	1	$\frac{1}{\beta_1}(\rho\,p\log p+\alpha\,p)\,q^{1-\beta_1}$	$\frac{1}{\beta_1}(\rho\,p\log p+\alpha_2\,p)\,q^{1-\beta_1}.$
14	10	$f=p\log p\,(\beta_2\,q+2\,pq^{\frac{1}{2}})+\ldots$	$f=p\log p\,(\beta_2 q+2\,\rho q^{\frac{1}{2}})+\ldots$
14	11	$B=\beta_2\,q+2\,pq^{\frac{1}{2}}$	$B=\beta_2\,q+2\,\rho q^{\frac{1}{2}}.$
15	7	$+\frac{1}{b'}\left[\rho\,(p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)+\ldots\right]$	$+\frac{1}{b'}\left[\rho_1\,(p+\alpha_0)\log(p+\alpha_0)+\ldots\right].$
15	10	$\frac{\rho^2}{b'}\left[1+\left(\frac{1}{b'}\right)'\right](p+\alpha_0)$	$\frac{\rho_1^2}{b'}\left[1+\left(\frac{1}{b'}\right)'\right](p+\alpha_0).$
16	7	$-\frac{\rho_0}{\alpha_1}\frac{b}{b'}[,\ldots]$	$-\frac{\rho_0^2}{\alpha_1}\frac{b}{b'}[\ldots].$
16	8	$\rho_1=0,\quad \rho_0=0$	$\rho_1\neq 0,\quad \rho_0=0.$
17	9	$b=\sigma(x,y,z)\,\varphi(x,y,q)$	$b=\sigma(x,y,z)\,\varphi(y,z,q).$
17	15	$f=2\,pB+p^{\frac{1}{2}}\,B_1$	$f=2\,pB+2\,p^{\frac{1}{2}}\,B_1$
18	1	$\frac{\delta f}{\delta p}=2\,B+\frac{1}{2}\,p^{-\frac{1}{2}}\,B_1$	$\frac{\delta f}{\delta p}=2\,B+p^{-\frac{1}{2}}\,B_1$
18	8	$\left[2p^2\frac{\delta^2 v}{\delta p^2}+9p\frac{\delta v}{\delta p}+\sigma v\right]p^{\frac{1}{2}}B'+\ldots$	$\left[2p^2\frac{\delta^2 v}{\delta p^2}+9p\frac{\delta v}{\delta p}+6v\right]p^{\frac{1}{2}}B'+\ldots$
18	18	p_1	p
19	6	$2\,p\frac{\delta^2 v}{\delta p\,\delta z}+3\frac{\delta v}{\delta p}=0$	$2\,p\frac{\delta^2 v}{\delta p\,\delta z}+3\frac{\delta v}{\delta z}=0$
19	22	$\psi=\beta\,p^2+\beta_1\,p^{\frac{3}{2}}+\beta_2\,p+\beta_3$	$\psi=\beta p^2+\beta_1\,p^{\frac{3}{2}}+\beta_2\,p+\beta_3\,p^{\frac{1}{2}}$
20	9	$\frac{\delta\beta}{\delta y}+y\frac{\delta\beta}{\delta z}$	$\frac{\delta\beta}{\delta y}+q\frac{\delta\beta}{\delta z}$
20	10	$2)\;\frac{\delta B_1}{\delta y}+\ldots$	$2)\;\frac{\delta\beta_1}{\delta y}+\ldots$
21	2	$s=f=(2\,p_1\,\pi_1+\ldots)$	$s=f=(2\,\pi_1\,p+\ldots)$
21	19	$s-2\,\tau\,p+2\,B_1\,p^{\frac{1}{2}}$	$s=2\,\tau\,p+2\,B_1\,p^{\frac{1}{2}}$
21	23	$v=\frac{\delta^2\mu}{\delta p^2}=\pi_2\,p^{-1}+\alpha\,p^{-\frac{3}{2}}$	$v=\frac{\delta^2\mu}{\delta p^2}=\pi_2\,p^{-\frac{1}{2}}+\alpha\,p^{-\frac{3}{2}}$
22	22	$+q\frac{\delta}{\delta z}(\beta_2-\alpha_2)+\ldots$	$+q\frac{\delta}{\delta z}(\beta_1-\alpha_1)+\ldots$
23	16	$\frac{\delta^2\mu_1}{\delta p^2}=\alpha\,p^{-\frac{3}{2}}+\varphi_1\,p^{-2}$	$\frac{\delta^2\mu_1}{\delta p^2}=\alpha\,p^{-\frac{3}{2}}+\varphi_1\,p^{-\frac{3}{2}}$
24	17	$\frac{\delta}{\delta y}(\pi_1\,\pi_2)$ donne	$\frac{\delta}{\delta y}(\pi_1\,\pi_2)=0$ donne

Page	ligne	au lieu de	lire
25	4	$1 = 2(XYp + p^{\frac{1}{2}}) B_1 + \ldots$	$s = 2(XYp + p^{\frac{1}{2}}) B_1 + \ldots$
25	21	$\ldots + XB + \frac{\delta B}{\delta z} = 0$	$\ldots + XB + \frac{\delta B}{\delta x} = 0$
26	7	$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \mu_3 + q \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \mu_3 + \ldots$	$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \log \mu_3 + q \frac{\delta^2}{\delta x \delta z} \log \mu_3 + \ldots$
26	10	$\mu_3 = X_1 \tau(x, y)$	$\mu_3 = X_1 \tau_1(x, y)$
26	12	$\ldots + p(x, y, z) \frac{\delta B_1}{\delta x}$	$\ldots + \beta(x, y, z) \frac{\delta B_1}{\delta x}$
29	12	$\ldots + \left(\mu_1 \mu_4 + 2 \frac{\delta \mu}{\delta x}\right) + \ldots$	$\ldots + \left(\mu_1 \mu_4 + 2 \frac{\delta \mu}{\delta x}\right) B + \ldots$
29	18	$\Delta^x{}_1 \lambda - \lambda \frac{\delta f}{\delta p} = 0$	$\Delta^+{}_1 \lambda - \lambda \frac{\delta f}{\delta q} = 0$
29	20	$\frac{\delta \lambda}{\delta z} + 2B \frac{\delta \lambda}{\delta q} + 2B'_1 \lambda = 0$	$\frac{\delta \lambda}{\delta z} + 2B \frac{\delta \lambda}{\delta q} + 2B' \lambda = 0$
30	17	$\left[\ldots + b\left(\frac{\delta \varphi}{\delta p} + p \frac{\delta \varphi}{\delta z}\right)\right] Q + \ldots$	$\left[\ldots + b\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} + p \frac{\delta \varphi}{\delta z}\right)\right] Q + \ldots$
34	17	$A_1 = \frac{\rho}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \alpha p + \alpha_3$	$A_1 = \frac{\rho}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 p} + \alpha_2 p + \alpha_3$
36	18	$\ldots - \beta_1 \frac{\delta \alpha_1}{\delta z} (p + \alpha_0) \log (p + \alpha_0) + + \beta_4] +$	$\ldots - \beta_1 \frac{\delta \alpha_1}{\delta z} (p + \alpha_0) \log (p + \alpha_0) + + \alpha_4] +$
36	20	(termes en $p + \alpha_0) \log (p + \alpha_0) \ldots$	(termes en $(p + \alpha_0) \log (p + \alpha_0)$)
37	12	$\ldots + \beta_1 \beta_1 p^{1-\alpha_1} q + \ldots$	$\ldots + \beta_1 \beta_2 p^{1-\alpha_1} q$
37	18	$\ldots + \beta p^{1-\alpha_1} + \ldots$	$\ldots + \beta p^{1-\alpha_1} q + \ldots$
37	21	$\ldots + \alpha \alpha_2 q^{1-\beta_1} + \ldots$	$\ldots + \alpha \alpha_1 q^{1-\beta_1} + \ldots$
38	7	supposer $\alpha = -1$	supposer $\alpha_1 = -1$
40	20	$\ldots + \alpha_2 + \alpha_2 p^{-\frac{1}{2}},$	$\ldots + \alpha_2 + \alpha_3 p^{-\frac{1}{2}}$
41	1	$\frac{\delta w}{\delta y} p + \ldots$	$\frac{\delta w_1}{\delta y} p + \ldots$
41	16	$\frac{\delta w_4}{\delta y} = 0$	$\frac{\delta w_4}{\delta z} = 0$
41	18	$\ldots - \frac{1}{2} x \omega + \ldots$	$\ldots - \frac{1}{2} X \omega + \ldots$
42	5, 13, 18	remplacer x par X	

Page	ligne	au lieu de	lire
42	3	$\ldots + \frac{\delta w}{\delta z} + \ldots$	$\ldots + \frac{\delta \omega}{\delta z} + \ldots$
42	14	$\ldots + \frac{1}{2}(\omega + \frac{1}{2}\rho p^{-\frac{1}{2}}) + \ldots$	$\ldots + \frac{1}{2}(\omega + \frac{1}{2}\beta p^{-\frac{1}{2}}) + \ldots$
42	23	$\alpha . \beta . \omega . \rho = 0$	$\alpha . \beta . \omega . \rho \neq 0$
43	6	$\ldots - \frac{x}{2}\omega = 0$	$\ldots - \frac{X}{2}\omega = 0$
44	3	$Z' + \frac{\delta\omega}{\delta z} + \omega(Z - \omega) = 0$	$Z' - \frac{\delta\omega}{\delta z} + \omega(Z - \omega) = 0$
46	9	$(\omega + \frac{1}{2}\beta p^{\frac{1}{2}})$	$(\omega + \frac{1}{2}\beta p^{-\frac{1}{2}})$
47	8	$\rho v_2 = \frac{3}{2}\beta\rho + \ldots$	$\rho v_2 + \frac{3}{2}\beta\rho + \ldots$
47	9	$\frac{1}{2}\rho v_3 = \frac{1}{4}\alpha v_4 + \ldots$	$\frac{1}{2}\rho v_3 - \frac{1}{4}\alpha v_4 + \ldots$
48	2	$\frac{\delta v_1}{\delta z} + \frac{1}{2}\beta^2 = 0$	$\frac{\delta v'_1}{\delta x} + \frac{1}{2}\beta^2 = 0$
49	12	$\frac{\delta v_4}{\delta z} + \frac{1}{2}\omega v_4 + \ldots$	$\frac{\delta v_4}{\delta z} - \frac{1}{2}\omega v_4 + \ldots$
50	7	$\ldots + 2\rho(v_1 + v'_1) = 0$	$\ldots + 2\rho(v_1 - v'_1) = 0$
50	25	$4\frac{\delta w_2}{\delta y} - 3\frac{\delta v^2}{\delta y} = 0$	$4\frac{\delta w_2}{\delta y} - 3\frac{\delta v_2}{\delta y} = 0$
52	20	$\ldots + 2p\frac{\delta\rho}{\delta z} + \ldots$	$\ldots + 2\rho\frac{\delta\rho}{\delta z} + \ldots$
53	5	$\ldots + \varphi u^{\frac{3}{2}} + \ldots$	$\ldots + \varphi_2 u^{\frac{3}{2}} + \ldots$
58	15	$\ldots + \rho^2\theta_y^{\frac{3}{2}} + \ldots$	$\ldots + \rho_2\theta_y^{\frac{3}{2}} + \ldots$
59	9	$\ldots - 3\rho_2\theta_x\theta_{x,y} = 0$	$\ldots - 3\rho_2\theta_y\theta_{x,y} = 0$
59	24	ajouter $= 0$ à (70′)	
		au lieu de	lire
60	16	pour le système X	pour le système Y
61	22	$\theta = (x + y)^u$	$\theta = (x + y)^n$

Page	ligne	au lieu de	lire
61	24	$\theta = (x+y)^{\pm 1}$	$\theta = (x+y)^{\pm 3}$
65	15	$\Delta^y_{m-1} \frac{\delta^2 f}{\delta p_{m-1}} = 0$	$\Delta^y_{m-1} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta p^2_{m-1}} = 0$
65	17	$\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}} X_{m-1} p_{m-1} + \ldots$	$\frac{\delta\varphi}{\delta p_{m-1}} = X_{m-1} p_{m-1} + \ldots$
69	12	$\ldots + b\,q.$	$\ldots + b\,\theta.$
69	14	$\theta = \theta(z, y)$	$\theta = \theta(x, y)$
70	8	$\frac{\delta\mu}{\delta y} + Xa + \frac{\delta a}{\delta z} = 0$	$\frac{\delta\mu}{\delta z} + Xa + \frac{\delta a}{\delta z} = 0$
71	6	$s = (\sigma + X_2 z)\,q$	$s = (\sigma + X_3 z)\,q$
71	18	(3)	(10)
72	21	$\frac{\delta\beta}{\delta x} = \frac{\delta\sigma}{\delta z}$	$\frac{\delta\beta}{\delta x} = \frac{\delta\sigma}{\delta y}$
73	24	$\Delta^y_1\, u$	$\Delta^y_m\, u$
74	14	type (III) a	type $(\mathrm{III})_a$
74	24	$\frac{\delta\mu}{\delta y} + aX = 0$	$\frac{\delta\mu}{\delta z} + aX = 0$
75	16	$\xi\left(\frac{\delta a}{\delta x} q + \frac{\delta^2 a}{\delta x \delta y} z + \frac{\delta a_1}{\delta z}\right) + \ldots$	$\xi\left(\frac{\delta a}{\delta x} q + \frac{\delta^2 a}{\delta x \delta y} z + \frac{\delta a_1}{\delta x}\right) + \ldots$
75	23	$\lambda = -\frac{\xi a^2}{2} z + a_3 z + a_4$	$\lambda = -\frac{\xi a^2}{2} z^2 + a_3 z + a_4$
76	1	$\lambda = = aX_1 z + a_3 = 0$	$\lambda = - aX_1 z + a_3$
76	7	... choisie de z	... choisie de x
77	14	$s = e^z\left(a\,q + \frac{\delta a}{\delta y}\right) e^{mz}$	$s = e^z\left(a\,q + \frac{\delta a}{\delta y}\right) + e^{mz}$