M. KIVELIOVITCH

Sur les points singuliers du problème des trois corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1932

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1932__138__1_0>

N° D'ORDRE :
2213
Série A
N° 1351

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. KIVELIOVITCH

1re THÈSE. — Sur les points singuliers du problème des trois corps.

2e THÈSE. — Les méthodes de sommation des séries divergentes.

Soutenues le 1932, devant la Commission d'Examen.

MM. MONTEL, *Président.*
DENJOY, CHAZY } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—

1932

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.
Doyen	C. MAURAIN, Professeur. Physique du Globe.
Doyen honoraire	M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires.	H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, E. PICARD, Rémy PERRIER.

Professeurs

GOURSAT	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
JANET	Electrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Emile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
ABRAHAM	Physique.
MOLLIARD	Physiologie végétale.
CARTAN	Géométrie supérieure.
Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
Jean PERRIN	Chimie physique.
LAPICQUE	Physiologie générale.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
G. URBAIN	Chimie générale.
L. MARCHIS	Aviation.
VESSIOT	Théorie des fonctions et théorie des transform.
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
Ch. FABRY	Physique.
LESPIEAU	Théories chimiques.
PORTIER	Physiologie comparée.
Charles PÉREZ	Zoologie.
É. BLAISE	Chimie organique.
DANGEARD	Botanique.
Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
Léon BERTRAND	Géologie structurale et Géologie appliquée.
RABAUD	Biologie expérimentale.
G. JULIA	Calcul différentiel et calcul intégral.
Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
V. AUGER	Chimie appliquée.
WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ	Biologie maritime.
Eugène BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
N	Étude des combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique et Géologie dynamique.
Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	Géologie.
P. PASCAL	Chimie minérale.
Léon BRILLOUIN	Théories physiques
ESCLANGON	Astronomie.
H. BÉNARD	Mécanique expérimentale des fluides.
G. MAUGUIN	Minéralogie.
BLARINGHEM	Botanique.
GUILLIERMOND	Botanique (P.C.N.).
DENJOY	Mathématiques générales.
DUFOUR	Physique (P.C.N.).
H. BÉGHIN	Mécanique physique et expérimentale.

PÉCHARD	Chimie (Enseigt P. C. N.).
GUILLET	Physique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
MICHEL-LEVY	Pétrographie.
DEREIMS	Géologie.
MOUTON	Chimie physique.
DUNOYER	Optique appliquée.
JAVILLIER	Chimie biologique.
ROBERT-LEVY	Zoologie.
DEBIERNE	Radioactivité.
DARMOIS	Physique.
BRUHAT	Physique.
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
JOLEAUD	Paléontologie.
M. FRECHET	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.
FOCH	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER	Physique (P. C. N.)
VILLEY	Mécanique physique et expérimentale.
DE BROGLIE	Théories physiques.
LABROUSTE	Physique du Globe.
FREUNDLER	Chimie (P. C. N.).
PRENANT	Zoologie.
P. JOB	Chimie générale.
CHRETIEN	Optique appliquée.
BOHN	Zoologie (P. C. N.).
BOURGUEL	Chimie (P. C. N.).
COMBES	Sciences Naturelles (P.C.N.).
GARNIER	Mécanique rationnelle.

Secrétaire .... A. PACAUD.

94401-32 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

A

MONSIEUR J. CHAZY

Hommage de reconnaissance.

A MES PARENTS

A MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE

SUR

LES POINTS SINGULIERS DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

INTRODUCTION.

L'étude des points singuliers du mouvement des trois corps, qui s'attirent suivant la loi de Newton, commence seulement vers la fin du XIX[e] siècle. C'est grâce aux travaux mémorables de Cauchy et de ses élèves sur les équations différentielles qu'une étude systématique de ce problème a été possible. Avant tout il était nécessaire de faire une étude détaillée de tous les cas singuliers qui peuvent se présenter. Cette question a été étudiée par M. Painlevé, comme application de ses recherches sur les équations différentielles (¹). Il démontre le théorème suivant : le mouvement est régulier tant que les distances sont supérieures à une limite finie différente de zéro. Aussitôt que le mouvement cesse d'être régulier, deux cas peuvent se présenter : 1° ou les trois corps se choquent en un seul point ; ou 2° deux des corps se choquent et le troisième reste à une distance finie des deux autres (²).

Malheureusement on n'a pas encore réussi de démontrer un théorème analogue pour le problème des n corps. il est possible que d'autres singularités que des chocs peuvent se présenter. Seul,

(¹) Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 582-586.

(²) Ce résultat a été déjà pressenti par Weierstrass dans sa correspondance avec S. Kowalewski (*Acta mathem.*, t. 35, p. 57-58), la publication a paru postérieurement aux recherches de Painlevé

M. Chazy a réussi à généraliser le théorème pour le cas des quatre corps, quand les distances sont finies [1].

En ce qui concerne la question des conditions que doivent satisfaire les variables initiales pour qu'un choc binaire soit possible, M. Painlevé indique, sans démonstration, que les variables doivent satisfaire à deux conditions, dans le cas général.

Une fois l'étude des points singuliers tranchée il fallait régulariser le problème. Cette question a été analysée en 1903 par Levi-Civita [2] pour le cas du « problème restreint ». Il obtient une relation analytique uniforme sous forme d'une série développable suivant les puissances croissantes de la distance r des deux corps qui se choquent. Cette relation entre les variables initiales caractérise les chocs passés et futurs. Il a fait aussi une étude qualitative de l'orbite d'un planétoide au voisinage du choc. Dans un second mémoire [3] il réussit à obtenir une représentation holomorphe de tous les éléments de la trajectoire dans une région suffisamment voisine du choc, sans altérer la forme canonique des équations.

L'extension de la méthode précédente pour le cas général des trois corps a été faite par M. Bisconcini-[4] qui réussit à régulariser le problème, en supposant seulement que la vitesse angulaire du rayon vecteur entre les deux corps qui se choquent reste finie quand le temps t tend vers t_0, instant du choc. Cette supposition faite, il prolonge analytiquement le mouvement au delà du choc binaire. Il obtient en outre, sous forme explicite, les deux conditions du choc développées en séries infinies. Malheureusement ces séries sont très compliquées et convergent pour un intervalle de temps suffisamment voisin de l'instant du choc t_0, condition pour la vérification de laquelle on ne possède pas de criterium.

Un pas décisif a été fait par M. Sundman dans ses travaux de 1907 à 1912 [5]. Avant tout il étudie le choc des trois corps. Il démontre le résultat, déjà annoncé par Weierstrass, que ce cas

---

(1) *Sur les singularités...* (*Comptes rendus*, t. 170, 1920, p. 575).

(2) *Traiettorie singolari...* (*Ann. di Matematica*, série III, t. 9, p. 1-32).

(3) *Sur la résolution qualitative...* (*Acta matematica*, t. 30, p. 305-327).

(4) *Sur le problème des trois corps* (*Acta mathem.*, t. 30, p. 49-91).

(5) *Recherches sur le problème des trois corps* (*Act. Soc. Sc. Fennicæ*, t. 34, n° 6, 1907); *Nouvelles recherches sur le probleme des trois corps* (*Ibid.*, t. 35, n° 9, 1909) *Mémoire sur le problème des trois corps* (*Acta math.*, t. 36, p. 105-179).

peut se présenter seulement quand les constantes des aires sont toutes nulles à la fois. Donc, suivant un théorème de Dziobek ([1]), le mouvement doit être plan. Les corps au voisinage du choc triple tendent : 1° ou vers une configuration de Lagrange — les trois corps occupent les sommets d'un triangle équilatéral, ou 2° vers une configuration d'Euler — le mouvement est rectiligne et les trois masses vérifient une certaine relation algébrique. Pour le cas du choc binaire M. Sundman réussit a régulariser le système sans la condition restrictive de M. Bisconcini. La base de ses recherches est constituée par le théoreme de Cauchy-Picard pour le système des n équations différentielles du premier ordre, ne contenant pas explicitement la variable indépendante. M. Sundman applique au système différentiel premierement, la transformation Radau-Jacobi qui consiste a éliminer du second membre une des trois distances et, deuxièmement, la transformation $dt = r\,du$ (r — distance mutuelle des deux corps qui se choquent). Il se sert ingénieusement de la fonction introduite par Lagrange (la somme des carrés des distances divisés par leurs masses). En appliquant le théoreme de Cauchy il démontre que les variables peuvent être développées en séries suivant les puissances de $(t - t_0)^{\frac{1}{3}}$ qui sont définies analytiquement avant et après le choc binaire. Pour plus de symétrie il introduit une variable τ, telle que les coordonnées du corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de τ ; ces séries représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps et cela quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps.

Quelques compléments a la démonstration de Sundman ont été donnés par MM. Birkhoff ([2]), Hadamard ([3]) et Chazy ([4]).

Des généralisations de la méthode pour le cas des n corps ont été données par MM. Pizzetti ([5]) et Armellini ([6]). Ce dernier a

---

([1]) *Mathematische Planeten Bewegungen*, Leipzig, 1888, p. 68-69.

([2]) *Dynamical Systems*, Chap. IX.

([3]) *Sur l'allure de mouvement* (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. 39, p. 124 et suiv.).

([4]) *Sur un Memoire de M. Sundman* (*Bull. Sc. math*, t. 39, p. 249-264).

([5]) *Generalizzazione di alcuné formole del Sundman* (*Giorn di Matem.*, 3e série, vol. 6, p. 272-283).

([6]) *Un theoreme général sur le problème des n corps* (*Comptes rendus*, t. 158).

encore appliqué les développements de Sundman au cas où les points sont remplacés par des sphères élastiques (1). Le cas du choc binaire a été étudié encore par MM. Ermakoff (2) et Bohl (3). M. Chazy a donné les théorèmes suivants concernant les chocs binaires (4) :

1° Dans le problème des trois corps, quand le temps croît indéfiniment, il est impossible que deux corps tendent l'un vers l'autre en restant à distance du troisieme corps supérieure à une longueur fixe ;

2° Dans le probleme des trois corps, tout choc de deux corps a lieu dans le plan de maximum des aires.

Le cas du choc triple a été étudié par MM. H. Block (5) et Chazy (6) et tout récemment, par M. Sokoloff (7) qui a généralisé le cas du choc triple pour un espace à *m* dimensions. Il a fait une étude intéressante des séries au voisinage immédiat d'un choc triple; il a indiqué, en outre, une relation entre les conditions initiales qui caractérise un choc triple.

Le cas du « probleme restreint » a été étudié d'une façon plus complète par G. Birkhoff (8). Il régularise le problème par une transformation applicable aux deux chocs binaires d'un planétoïde avec le corps S et avec le corps J.

A partir de 1915, M. Levi-Civita reprend dans une série de mémoires le problème de la régularisation en conservant la forme canonique des équations. Il considere que « la route suivie par

---

(1) *Estenzione della soluzione del Sundmann* (*Rend. Reale Ac. Lincei*, ser. 5, vol. 24, p. 184-190).

(2) *Les intégrales du mouvement des trois corps* (*Mathem. Sbornick*, t. 30, n° 3, Moscou).

(3) *Ueber ein Dreikorper problem* (*Zeit. Math. und Physik*, vol. 54, p. 381-418).

(4) *Sur les points singuliers...* (*Comptes rendus*, t. 157, 1913); *Sur les singularités impossibles* (*Comptes rendus*, t. 170, 1926); *Sur certaines trajectoires...* (*Bull. astronomique*, t. 35, p. 321-389); *Sur l'allure du mouvement* (*Ann. École Normale*, p. 29-130).

(5) *Sur les chocs dans le problème des trois corps* (*Ark. for Math. Astr. oct, Fys.*, t. 5, n° 9, 1909).

(6) *Bulletin astr.*, t. 35, 1918, p. 376 et suiv.

(7) *Condition d'une collision générale des trois corps* (*Acad. Sc. d'Ukraine*, Kieff, 1928).

(8) *The resricted problem of three bodies* (*Rend. Cir. Mat. Palermo*, t. 39, p. 265-334).

Sundman n'est pas directe, elle demande l'introduction d'un grand nombre des variables supplémentaires et, en outre, les équations du système régularisé ont complètement perdu leur forme dynamique, ce qui est gênant pour l'application à ces équations des méthodes de la mécanique analytique » (1). M. Levi-Civita étudie auparavant le mouvement plan (2). Il régularise le système sans détruire la forme canonique des équations et donne sous forme explicite la relation que doivent vérifier les variables initiales pour qu'un choc binaire se produise au temps $t = t_0$.

En ce qui concerne le mouvement dans l'espace, M. Levi-Civita étudie dans un autre mémoire (3), en se basant sur une étude d'Andoyer, une transformation qui régularise le système sans détruire la forme canonique.

Je me propose dans ce travail, en utilisant les transformations de M. Levi-Civita : 1° de donner, sous une forme symétrique et simple les conditions du choc binaire; 2° d'étudier les orbites au voisinage d'un choc binaire; 3° d'étudier les orbites périodiques avec un ou plusieurs chocs binaires. J'applique en outre ces méthodes pour la recherche des conditions du choc triple ou d'ordre n.

Je ne veux pas terminer ce travail, sans exprimer toute ma reconnaissance à M. Jean Chazy, professeur à la Sorbonne, qui ne m'a jamais cessé ses conseils et ses encouragements et a toujours accueilli avec bienveillance mes résultats.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ET LES CONDITIONS DU CHOC.

Soient m_0, m et m' les masses de trois corps P_0, P et P'; r, r_1 et r_2 les distances P_0P, $P'P_0$ et $P'P$.

Rapportons le corps P à P_0 et P' au centre de gravité g de P_0 et P.

(1) *Fragen der Klassischen und Relativistischen Mechanik* (Berlin, Springer, 1924).

(2) *Rendiconti dei Lincei*, vol. 24, 1915, p. 61-75, 421-433, 485-502, 553-569.

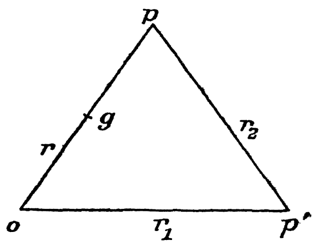
(3) *Acta mathematica*, t. 42, 1918, p. 99-143.

Utilisons le système canonique de Jacobi (1) et soient

$$(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$$

les coordonnées canoniques de P et $(x'_1, x'_2, x'_3;\ p'_1, p'_2, p'_3)$ les

Fig. 1.



coordonnées de P'. Les équations canoniques du mouvement seront

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_i}, & \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p'_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial x_i}, & \frac{dp'_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial x'_i}. \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$K = \frac{1}{2\mu}\sum_1^3 p_i^2 + \frac{1}{2\mu'}\sum_1^3 p_i'^2 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2} = E$$

(intégrale des forces vives)

$$\left[\mu = \frac{m_0 m}{m_0 + m},\quad \mu' = \frac{(m_0 + m)m'}{m_0 + m + m'},\right.$$

$$\left.\alpha = k^2 m_0 m,\quad \alpha_1 = k^2 m_0 m',\quad \alpha_2 = k^2 m m',\quad k^2 = \text{constante d'attraction}\right],$$

$$r^2 = \sum_1^3 x_i^2, \qquad r_1^2 = \sum_1^3 \left(x'_i - \frac{m}{m_0 + m}\, x_i\right)^2,$$

$$r_2^2 = \sum_1^3 \left(x'_i - \frac{m_0}{m_0 + m}\, x_i\right)^2.$$

Les intégrales des aires

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} (x_2 p_3 - x_3 p_2) + (x'_2 p'_3 - x'_3 p'_2) &= a_1, \\ (x_3 p_1 - x_1 p_3) + (x'_3 p'_1 - x'_1 p'_3) &= a_2, \\ (x_1 p_2 - x_2 p_1) + (x'_1 p'_2 - x'_2 p'_1) &= a_3. \end{aligned}\right.$$

(1) *Sur l'élimination des nœuds* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. IX).

Dans toutes ces recherches nous supposerons que la constante des aires, c'est-à-dire la quantité $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$.

Régularisation de Levi-Civita. — Envisageons le mouvement pour lequel la constante des forces vives E a une valeur donnée à l'avance et supposons qu'à l'instant $t = 0$ les corps P_0, P se choquent, $r = 0$. Appliquons la transformation de Sundman $dt = r\,du$ ($u = 0$ pour $t = 0$).

Les ∞^{11} solutions du système (I), qui satisfont à la condition $K = E$ vérifient également le système

$$(\mathrm{I}')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{du} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dx'_i}{du} &= \frac{\partial H}{\partial p'_i} \\ \frac{dp_i}{du} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & \frac{dp'_i}{du} &= -\frac{\partial H}{\partial x'_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

avec

$$H = r(K - E).$$

Appliquons la transformation Levi-Civita,

$$x_i = \xi_i\omega^2 - 2\omega_i\sum_1^3 \xi_j\omega_j, \quad p_i = \frac{\omega_i}{\omega^2}, \quad r = \xi\omega^2 \quad \left(\omega^2 = \sum_1^3 \omega_i^2,\ \xi^2 = \sum_1^3 \xi_i^2\right).$$

Cette transformation ne change pas la forme canonique des équations car on vérifie facilement que

$$\sum_1^3 p_i\,dx_i - \sum_1^3 \omega_i\,d\xi_i = -2d\left(\sum_1^3 \xi_i\omega_i\right).$$

Le système (I′) devient

$$(\mathrm{III})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{du} &= \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, & \frac{d\xi'_i}{du} &= \frac{\partial H}{\partial \omega'_i} \\ \frac{d\omega_i}{du} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{d\omega'_i}{du} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi'_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

avec

$$H = r[K - E] = \xi\omega^2\left[\frac{1}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{2\mu'}\sum_1^3 p_i'^2 - \frac{\alpha}{\xi\omega^2} - \frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2} - E\right] = 0$$

ou

$$H = -\alpha - \frac{\xi}{2\mu} \quad \xi\omega^2\left[\frac{1}{2\mu'}\sum_1^3 p_i'^2 - \frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2} - E\right] = 0,$$

et

$$r_1^2=\sum_1^3 x_i'^2-\left(\frac{m}{m_0+m}\right)^2\xi^2\omega^4-\frac{2m}{m_0+m}\sum_1^3{}_i\left(\xi_i\omega^2-2\omega_i\sum_1^3{}_j\,\xi_j\omega_j\right)x_i',$$

$$r_2^2=\sum_1^3 x_i'^2-\left(\frac{m_0}{m_0-m}\right)^2\xi^2\omega^4-\frac{2m_0}{m_0-m}\sum_1^3{}_i\left(\xi_i\omega^2-2\omega_i\sum_1^3{}_j\,\xi_j\omega_j\right)x_i'.$$

Les intégrales des aires ne changent pas de forme

$$\text{(IV)}\qquad\left\{\begin{array}{l}(\xi_2\omega_3-\xi_3\omega_2)-(x_2'p_3'-x_3'p_2')=a_1,\\(\xi_3\omega_1-\xi_1\omega_3)+(x_3'p_1'-x_1'p_3')=a_2,\\(\xi_1\omega_2-\xi_2\omega_1)+(x_1'p_2'-x_2'p_1')=a_3.\end{array}\right.$$

Les conditions du choc binaire. — Le système (III) est régulier au voisinage d'un choc binaire ($r=0$), c'est-à-dire $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$, les ξ_i n'étant pas toutes nulles à la fois, on trouve d'après l'intégrale des forces vives $H=0$ que ξ tend vers $2\mu\alpha$.

On peut donc développer au voisinage de $u=0$ les ξ_i, ω_i, x_i' et p_i' en séries suivant les puissances croissantes de u, les coefficients étant des fonctions régulières des valeurs initiales ξ_i^0, $x_i'^0$, et $p_i'^0$ de ξ_i, x_i', et p_i' pour $u=0$. On aura donc les développements :

$$\text{(V)}\qquad\left\{\begin{array}{l}\xi_i-\xi_i^0\;=u\,A_i(\xi_i^0,\,x_i'^0,\,p_i'^0\mid u),\\x_i'-x_i'^0=u\,X_i(\xi_i^0,\,x_i'^0,\,p_i'^0\mid u)\qquad(i=1,2,3),\\p_i'-p_i'^0=u\,P_i(\xi_i^0,\,x_i'^0,\,p_i'^0\mid u);\end{array}\right.$$

$$\text{(VI)}\qquad\omega_i=u\,\Omega_i(\xi_i^0,\,x_i'^0\,p_i'^0\mid u)\qquad(i=1,2,3).$$

Les A_i, X_i, P_i et Ω_i sont des fonctions régulières des ξ_i^0, $x_i'^0$, $p_i'^0$ et u.

Les équations (V) représentent une substitution des variables ξ_i, x_i et p_i' aux variables ξ_i^0, $x_i'^0$ et $p_i'^0$. On peut donc faire une inversion et l'on trouve finalement

$$\text{(V}'\text{)}\qquad\left\{\begin{array}{l}\xi_i^0\;=\xi_i+u\,A_i'(\xi_i,\,x_i',\,p_i'\mid u)\\x_i'^0=x_i'+u\,X_i'(\xi_i,\,x_i',\,p_i'\mid u)\qquad(i=1,2,3).\\p_i'^0=p_i'-u\,P_i'(\xi_i,\,x_i',\,p_i'\mid u).\end{array}\right.$$

On voit facilement que les fonctions A'_i, X'_i et P'_i sont comme les A_i, X_i, P_i des fonctions régulieres en ξ_i, x'_i, p'_i et u. En effet, si l'on compare (V) et (V') on trouve

$$A_i = -A'_i, \qquad X_i = -X'_i \qquad \text{et} \qquad P_i = -P'_i.$$

Si l'on substitue les valeurs des ξ_i^0, $x_i'^0$ et $p_i'^0$ tirées des équations (V'), dans les équations (VI) on trouve

$$\text{(VII)} \qquad \omega_i = u\,\Omega'_i(\xi_i, x'_i, p'_i, u) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En éliminant u entre les trois équations (VII), on trouve les deux conditions cherchées entre les valeurs initiales pour l'existence d'un choc binaire, si l'on pose que les ξ_i, ω_i, x'_i et p'_i sont les valeurs initiales quelconques pour l'instant u quelconque.

Calcul effectif des deux conditions. — Soit u suffisament petit et développons les Ω_i suivant les puissances croissantes de u. On aura

$$\omega_i = u\,[\alpha_i^0 + \alpha_i^1 u + \alpha_i^2 u^2 + \ldots + \alpha_i^n u^n + \ldots],$$

les α_i^k étant des fonctions des ξ_j, x'_j et p'_j $(i, j = 1, 2, 3.)$.

Differentions (VII) par rapport à u, on aura

$$\frac{d\omega_i}{du} = \frac{\partial(u\Omega'_i)}{\partial u} + u\sum_1^3 \left(\frac{\partial\Omega'_i}{\partial\xi_j}\frac{d\xi_j}{du} + \frac{\partial\Omega'_i}{\partial x'_j}\frac{dx'_j}{du} + \frac{\partial\Omega'_i}{\partial p'_j}\frac{dp'_j}{du}\right),$$

en remplaçant $\frac{d\omega_i}{du}$, $\frac{d\xi_j}{du}$, $\frac{dx'_j}{du}$ et $\frac{dp_j}{du}$ par leurs valeurs tirées du système (III) on obtient finalement

$$\text{(VIII)} \qquad -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \Omega'_i + u\,\frac{\partial\Omega'_i}{\partial u} - u\sum_1^3 \left(\frac{\partial\Omega'_i}{\partial\xi_j}\frac{\partial H}{\partial\omega_j} + \frac{\partial\Omega'_i}{\partial x'_j}\frac{\partial H}{\partial p'_j} - \frac{\partial\Omega'_i}{\partial p'_j}\frac{\partial H}{\partial x'_j}\right).$$

En remplaçant les Ω_i et ω_i par leurs développements en u et en comparant les coefficients de mêmes puissances de u, on peut calculer de proche en proche les coefficients α_i^n. Pour effectuer cette opération il faut d'abord développer H suivant les puissances croissantes de ω_i; a cet effet développons avant tout

$\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$, on trouve, en posant pour simplifier l'écriture.

$$\rho^2 = \sum x_i'^2 \qquad \text{et} \qquad A = \sum_{1}^{3}{}_{i}\left(\xi_i\omega^2 - 2\omega_i \sum_{j}^{3}{}_{1} \xi_j\omega_j\right) x_i',$$

$$\begin{aligned}
I &\equiv \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2} \\
&= k^2 m' \left[\frac{m_0}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2\omega^4 - \frac{2m}{m_0 - m} A}} - \frac{m}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2\omega^4 - \frac{2m_0}{m_0 - m} A}}\right] \\
&= \frac{k^2 m'(m_0 - m)}{\rho} - \frac{k^2 m_0 m m'}{m_0 - m} \frac{1}{2\rho^3} \xi^2\omega^4 - \frac{k^2 m_0 m m'}{m_0 + m} \frac{3}{2\rho^5} A^2 \\
&\quad + k^2 m_0 m m' \frac{(m - m_0)}{(m_0 - m)^2} \frac{3}{2\rho^7} \xi^2\omega^4 A - \frac{k^2 m_0 m m'(m - m_0)}{(m_0 + m)^2} \frac{5}{2\rho^5} A^3 \\
&\quad + \frac{k^2 m_0 m m'(m^2 + m_0^2 - m_0 m)}{(m_0 + m)^3} \frac{3}{8\rho^5} \xi^4\omega^8 \\
&\quad - \frac{k^2 m_0 m m'(m^2 - m_0^2 - m_0 m)}{(m_0 + m)^3} \frac{15}{4\rho^7} \xi^2\omega^4 A^2 \\
&\quad + \text{termes de degré 10 en } \omega_i + \ldots \\
&= \frac{k^2 m'(m_0 + m)}{\rho} + I_1 + [10] - \ldots,
\end{aligned}$$

$[n]$ désigne les termes de degré n en ω_i.

On trouve finalement

$$\text{(1)} \qquad H = -\alpha - \frac{\xi}{2\mu} + \xi\omega^2 \left[\frac{1}{2\mu'} \sum_{1}^{3} p_i'^2 - \frac{k^2(m_0 + m)m'}{\rho} - E\right] - \xi\omega^2 I_1 - [12] - \ldots.$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i}{\xi} \left\{\frac{1}{2\mu} - \omega^2 \left[\frac{1}{2\mu'} \sum p_i'^2 - \frac{k^2 m'(m_0 + m)}{\rho} - E\right]\right\} + \frac{\xi_i}{\xi} \omega^2 I_1 - \xi\omega^2 \frac{\partial I_1}{\partial \xi_i} - [12] - \ldots,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial H}{\partial \omega_i} = 2\xi\omega_i \left[\frac{1}{2\mu'} \sum p_i'^2 - \frac{k^2(m_0 + m)}{\rho} m' - E\right] - 2\xi\omega_i I_1 - \xi\omega^2 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_i} - [11] + \ldots,$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i'} = \xi\omega^2 \frac{k^2 m'(m_0 + m)}{\rho^3} x_i' - \xi\omega^2 \frac{\partial I_1}{\partial x_i'} + [12] - \ldots,$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i'} = \xi\omega^2 \frac{1}{\mu'} p_i'.$$

En substituant dans (VIII) les valeurs (2), (3), (4), et (5) et en remplaçant ω_i par $u\sum_0^\infty \alpha_i'' u^n$, on trouve

$$
(\mathrm{IX})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\alpha_i^0 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\xi_i}{\xi}, \qquad \alpha_i^1 = 0, \qquad \alpha_i^2 = -\frac{M}{12\mu^2}\frac{\xi_i}{\xi},\\
&\alpha_i^3 = 0, \qquad \alpha_i^4 = -\frac{M}{60\mu^3}\frac{\xi_i}{\xi}, \qquad \alpha_i^5 = 0,\\
&\alpha_i^6 = -\left[\frac{17}{5040}\frac{M^3}{\mu^4} + \frac{1}{896}\frac{k^2 m_0 m m'}{m_0+m}\frac{\xi^2}{\mu^6\rho^3}\right.\\
&\qquad\left. - \frac{3k^2 m_0 m m'}{(m_0+m)\mu^6\rho^5}\left(\sum_1^3 \xi_j x_j'\right)^2\right]\frac{\xi_i}{\xi} - \frac{3\xi\sum_1^3 \xi_j x_j'}{448\mu^6\rho^5}\, x_i',\\
&\alpha_i^7 = 0, \qquad \alpha_i^8 = l_1\frac{\xi_i}{\xi} + m_1 x_i', \qquad \alpha_i^9 = l_2\frac{\xi_i}{\xi} + m_2 x_i' + n_2 p_i',
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a posé pour simplifier

$$
M = \frac{1}{2\mu'}\sum p_i'^2 - \frac{k^2 m'(m_0+m)}{\rho} - E.
$$

D'une façon générale, d'après les expressions des dérivées partielles de H et de la forme des équations (VIII) on voit facilement que les équations (VII) seront de la forme

$$
(\mathrm{VII}')\qquad \omega_i = A\xi_i + Bx_i' + Cp_i'.
$$

Les A, B et C sont des séries croissantes de u de la forme

$$
A = \sum_1^\infty a_n u^n, \qquad B = \sum_7^\infty b_n u^n, \qquad C = \sum_{10}^\infty c_n u^n;
$$

les a_n, b_n et c_n sont des fonctions symétriques en ξ_i, x_i' et p_i' c'est-à-dire restent invariables lorsqu'on change ξ_i, x_i', p_i' en $-\xi_i$, $-x_i'$, $-p_i'$; elles restent en outre invariables par la permutation circulaire des indices.

En effet, soient $\omega_i = \sum_0^\infty \alpha_n' u^n$ et supposons que tous les termes α_j' jusqu'à α_n' soient de la forme (a), $A\xi_i + Bx_i' + Cp_i'$, il faut démontrer que α_{n+1}' sera aussi de la même forme.

Si l'on développe les dérivées partielles de H par rapport à ξ_i, x_i', p_i' et par rapport à ω_i, en remplaçant les ω_i par les n premiers termes en u, on voit facilement qu'elles seront toutes de la forme (a). Si l'on reprend la formule (VIII) on trouve que le premier membre est de la forme (a) ; le troisième terme du second membre est aussi de la forme (a), donc x'_{n+1}, qui est égale à la différence de ces deux termes, sera aussi de la forme (a).

C. Q. F. D.

On voit que les premiers termes de A, B et C seront

$$\begin{aligned}
A = &- \frac{u}{2\mu\xi} - \frac{M u^3}{12\mu^2\xi} - \frac{M^2 u^5}{60\mu^3\xi} \\
&- \frac{1}{\xi}\left[\frac{17}{5040}\frac{M^3}{\mu^4} - \frac{1}{896}\frac{k^2 m_0 m m'}{(m_0 + m)}\frac{\xi^2}{\mu^6\rho^3} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{15 k^2 m_0 m m'}{(m_0 + m)\mu^6\rho^5}\left(\sum_1^3 \xi_j x'_j\right)^2\right] u^7 - \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= -3\xi \frac{\sum_1^3 \xi_j x'_j}{448\mu^6\rho^5} u^7 - b_9 u_9 - b_{10} u^{10} + \ldots, \\
C &= \quad c_{10} u^{10} - c_{11} u^{11} + \ldots
\end{aligned}$$

On peut encore déduire de la forme des équations différentielles quelques conditions pour les coefficients a_n, b_n et c_n. Les équations différentielles ne changent pas lorsqu'on change ω_i, p'_i et u en $-\omega_i$, $-p'_i$ et $-u$. D'après les équations (VII') on trouve

$$\begin{aligned}
a_m(-p'_i) &= (-1)^{m+1} a_m(p_i), \\
b_m(-p'_i) &= (-1)^{m+1} b_m(p_i), \\
c_m(-p'_i) &= (-1)^{m} \quad c_m(p_i),
\end{aligned}$$

on peut trouver d'autres relations analogues.

Pour éliminer u entre les trois équations (VII') on peut opérer de la façon suivante (seulement dans le cas de l'espace). On résout les trois équations par rapport à A, B et C, en utilisant les intégrales des aires on trouve

$$\text{(X)} \qquad A = \frac{\sum_1^3 a_i\omega_i}{\sum_1^3 a_i\xi_i}, \qquad B = \frac{\sum_1^3 a_i p'_i}{\sum_1^3 a_i\xi_i}, \qquad C = -\frac{\sum_1^3 a_i x'_i}{\sum_1^3 a_i\xi_i},$$

les a_i sont les constantes des aires.

Supposons que l'on connaisse les valeurs ω_i^0, ξ_i^0, $x_i'^0$, $p_i'^0$ pour un certain moment initial u_0; dans ce cas A, B et C ont des valeurs données à l'avance

$$A_0 = \frac{\sum_1^3 a_i \omega_i^0}{\sum_1^3 a_i \xi_i^0}; \qquad B_0 = \frac{\sum a_i p_i'^0}{\sum a_i \xi_i^0}; \qquad C_0 = -\frac{\sum a_i x_i'^0}{\sum a_i \xi_i^0}.$$

On peut tirer u en fonction de A et substituer cette valeur dans les deux autres formules.

Ces formules se simplifient davantage, si l'on choisit comme plan de maximum des aires le plan xy, dans ce cas $a_1 = a_2 = 0$ et l'on trouve

$$A_0 = \frac{\omega_3^0}{\xi_3^0}, \qquad B_0 = \frac{p_3'^0}{\xi_3^0}, \qquad C_0 = -\frac{x_3'^0}{\xi_3^0},$$

on trouve donc $u = \sum_m l_m (A_0)^m$; les deux conditions du choc seront

$$\text{(XI)} \quad B_0 = \sum_7^\infty b_n \left[\sum_m l_m (A_0)^m\right]^n, \quad \text{et} \quad C_0 = \sum_{n=7}^\infty c_n \left[\sum_m l_m (A_0)^m\right]^n.$$

Si l'on calcule les premiers termes de ces développements on trouve

$$u = -2\mu\xi\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right) - \frac{4}{3}M\mu^2\xi^3\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^3 + \frac{16}{5}M^2\mu^3\xi^5\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^5 - \ldots,$$

$$\frac{p_3'}{\xi_3} = -\frac{3\xi\sum_{j=1}^3 \xi_j x_j'}{448\mu^6\xi^5}\left[-2\mu\xi\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right) + \frac{4}{3}M\mu^2\xi^3\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^3 - \frac{16}{5}M^2\mu^3\xi^5\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^5 - \ldots\right]^7 - \ldots,$$

$$-\frac{x_3'}{\xi_3} = C_{10}\left[-2\mu\xi\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right) + \frac{4}{3}M\mu^2\xi^3\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^3 - \frac{16}{5}M^2\mu^3\xi^5\left(\frac{\omega_3}{\xi_3}\right)^5 - \ldots\right]^{10} + \ldots.$$

En reprenant les variables primitives (x_i, p_i), (x_i', p_i') les conditions deviennent

$$(\text{XII}) \qquad Kx_i + Lp_i - Mx_i' + Np_i' = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les K, L, M, N sont des fonctions analogues à A, B et C et s'expriment en A, B, C suivant les formules

$$K = Ap^2; \qquad L = -\left[\frac{1}{p^2} \quad \lambda \sum_{1}^{3} r_i p_i\right]; \qquad M = B; \qquad N = C.$$

Dans les A, B et C il faut remplacer les ξ_i et ω_i par leurs expressions en fonctions des x_i et p_i, c'est-à-dire

$$\xi_i = x_i p^2 - 2p_i \sum_{1}^{3} r_i p_i; \qquad \omega_i = \frac{p_i}{p_2} \qquad \text{et} \qquad r = \xi\omega^2,$$

et u en fonction de t par la formule

$$t = \int_0^u \xi\omega^2\, du,$$

le développement de u sera une fonction croissante de $t^{\frac{1}{3}}$.

Comme complément à toutes ces formules il est utile de donner les développements en séries ξ_i, ω_i, x_i', p_i'.

On a d'après les equations différentielles du problème

$$\xi_i = \xi_i^0 - \frac{1}{1.2}\,\frac{M_0\xi_i^0}{\mu}\,u^2 \quad \frac{}{4!\,\mu^2}\,M_0^2\,\xi_i^0\,u^4 \quad \ldots,$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\xi_i^0}{\xi_0}\,u - \frac{1}{3!}\,\frac{M_0}{2\mu^2}\,\frac{\xi_i^0}{\xi_0}\,u - \frac{2}{5!}\,\frac{M_0^2}{\mu^3}\,\frac{\xi_i^0}{\xi_0}\,u^5 + \ldots,$$

$$x_i' = x_i'^0 + \frac{\xi_0}{2\mu^2\mu'}\,p_i'^0\,\frac{u^3}{3!} - \frac{M_0}{\mu^3\mu'}\,\xi_0 p_i'^0\,\frac{u^5}{5!} - \frac{5M_0}{2\mu^4\mu'}\,\xi_0^2\left(\frac{\partial M}{\partial x_i'}\right)_0\frac{u^6}{6!} + \ldots,$$

$$p_i' = p_i'^0 - \frac{\xi_0}{2\mu^2}\left(\frac{\partial M}{\partial x_i'}\right)_0\frac{u^3}{3!} + \frac{\xi_0 M_0}{\mu^3\mu'}\left(\frac{\partial M}{\partial x_i'}\right)_0\frac{u^5}{5!} + \ldots,$$

$$t = \frac{u}{12\mu^2} - \frac{M_0 u^5}{120\mu^3} - \ldots,$$

d'où

$$u = (12\mu^2 t)^{\frac{1}{3}} - \frac{M_0}{30}(12\mu^2)^{\frac{1}{3}}\,t + \ldots.$$

Quelques conséquences. — En utilisant les développements précédents on peut démontrer le théorème suivant :

Dans le cas général du mouvement newtonien des trois corps dans l'espace il ne peut se produire qu'un seul choc binaire, exception faite des orbites périodiques.

En effet supposons qu'on ait deux chocs binaires aux instants u_0 et u_1 ; dans ce cas on a deux systemes de trois équations de la forme (XII).

$$(\mathrm{XII}') \qquad K_1 x_i - L_1 p_i - M_1 x'_i - N_1 p'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(\mathrm{XII}'') \qquad K_2 x_i - L_2 p_i - M_2 x'_i - N_2 p'_i = 0.$$

Si l'on élimine entre ces deux systèmes, par exemple, x_1, x_2 et x_3 on trouve trois équations

$$H_1 p_i - H_2 x'_i - H_3 p'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Un système homogène des trois équations à trois inconnues H_1, H_2 et H_3. Supposons qu'elles ne sont pas toutes nulles à la fois, il faut donc que le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & x'_1 & p'_1 \\ p_2 & x'_2 & p'_2 \\ p_3 & x'_3 & p'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En utilisant les intégrales des aires (on suppose partout que la constante des aires $\neq 0$) on trouve

$$\sum_1^3 a_i p_i = 0,$$

c'est-à-dire que le vecteur (p_i) se trouve constamment dans le plan de maximum des aires. De même, en éliminant les p_i, ou x'_i, ou p'_i on trouve de la même façon que les vecteurs (x_i), (p'_i) et (x'_i) se trouvent dans le même plan de maximum des aires le mouvement est donc plan, ce qui est contraire à notre supposition.

Considérons le cas où $H_1 = H_2 = H_3 = 0$. D'après le calcul des H on a

$$H_1 = L_1 K_2 - K_1 L_2, \qquad H_2 = M_1 K_2 - K_1 M_2 \qquad \text{et} \qquad H_3 = N_1 K_2 - K_1 N_2.$$

Si tous les H sont nuls on aura

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2},$$

c'est-à-dire que les systèmes (XII') et (XII'') sont identiques, on a donc un seul système des conditions, donc un seul choc binaire, ce qui est contraire à notre supposition.

Pour le cas du plan on a un théorème analogue : *les orbites planes du mouvement newtonien des trois corps admettent au plus deux chocs binaires*, sauf le cas des orbites périodiques. Si le nombre des chocs est supérieur à deux, le mouvement est nécessairement rectiligne.

En effet, supposons que le système admet trois chocs binaires, aux moments u_0, u_1 et u_2 on aura trois systèmes de conditions

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} K_1 x_1 + L_1 p_1 + M_1 x'_1 + N_1 p'_1 = 0, \\ K_1 x_2 + L_1 p_2 + M_1 x'_2 + N_1 p'_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\beta)\qquad \begin{cases} K_2 x_1 + L_2 p_1 + M_2 x'_1 + N_2 p'_1 = 0, \\ K_2 x_2 + L_2 p_2 + M_2 x'_2 + N_2 p'_2 = 0. \end{cases}$$

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} K_3 x_1 + L_3 p_1 + M_3 x'_1 + N_3 p'_1 = 0, \\ K_3 x_2 + L_3 p_2 + M_3 x'_2 + N_3 p'_2 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons grouper ces six équations d'une autre manière, à savoir

$$K_i x_1 + L_i p_1 + M_i x'_1 + N_i p'_1 = 0,$$
$$K_i x_2 + L_i p_2 + M_i x'_2 + N_i p'_2 = 0$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

On peut tirer du premier système $\frac{x_1}{p'_1}$, $\frac{p_1}{p'_1}$ et $\frac{x'_1}{p'_1}$,

$$\frac{x_1}{p'_1} = -\frac{\begin{vmatrix} N_1 & L_1 & M_1 \\ N_2 & L_2 & M_2 \\ N_3 & L_3 & M_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_1 & L_1 & M_1 \\ K_2 & L_2 & M_2 \\ K_3 & L_3 & M_3 \end{vmatrix}} = -\frac{D_1}{D}, \qquad \frac{p_1}{p'_1} = -\frac{\begin{vmatrix} K_1 & N_1 & M_1 \\ K_2 & N_2 & M_2 \\ K_3 & N_3 & M_3 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{D_2}{D}$$

et

$$\frac{x'_1}{p'_1} = -\frac{\begin{vmatrix} K_1 & L_1 & N_1 \\ K_2 & L_2 & N_2 \\ K_3 & L_3 & N_3 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{D_3}{D}.$$

De même si l'on tire du second système $\frac{x_2}{p'_2}$, $\frac{p_2}{p'_2}$ et $\frac{x'_2}{p'_2}$, on trouve

$$\frac{x_2}{p'_2} = -\frac{D_1}{D}, \quad \frac{p_2}{p'_2} = -\frac{D_2}{D}, \quad \frac{x'_2}{p'_2} = -\frac{D_3}{D},$$

c'est-à-dire, en comparant les deux valeurs on a finalement

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x'_1}{x'_2} = \frac{p'_1}{p'_2},$$

tous les vecteurs sont dirigés suivant une même ligne droite, le mouvement est donc rectiligne.

Le seul cas d'exception c'est que tous les déterminants

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0,$$

mais dans ce cas le troisième système est une conséquence des deux premiers, c'est-à-dire qu'on a seulement deux systèmes de conditions pour deux chocs binaires et non trois, contrairement à notre supposition.

Quelques cas particuliers. — *Premier cas.* — Si l'on néglige les termes à partir de u^7 $\left(\text{c'est-à-dire } t^{\frac{7}{3}}\right)$ on trouve facilement, d'après les valeurs des coefficients α''_i de la formule (IX), que les équations de condition du choc se présentent sous la forme

$$\omega_1 = \xi_1 + \varepsilon, \qquad \omega_2 = \xi_2 + \varepsilon', \qquad \omega_3 = \xi_3 - \varepsilon'',$$

les ε — des infiniment petits de l'ordre de u^7. En revenant aux variables primitives on aura

$$x_1 = p_1 + \eta_1, \qquad x_2 = p_2 - \eta_2 \qquad \text{et} \qquad x_3 = p_3 + \eta_3,$$

les η_i des infiniment petits de l'ordre de $t^{\frac{7}{3}}$. Cela signifie que si l'on néglige les termes à partir de $t^{\frac{7}{3}}$ le mouvement se rapproche d'un mouvement rectiligne.

Deuxième cas. — Si l'on néglige les termes à partir de $u^{10}\left(t^{\frac{10}{3}}\right)$, les équations de condition du choc deviendront

$$\omega_i = A\,\xi_i + B\,x'_i + \varepsilon_i,$$

ε_i infiniment petits de l'ordre de u^{10}. Si entre ces trois équations on élimine A et B en négligeant les ε_i on trouve une condition de la forme

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \xi_1 & x'_1 \\ \omega_2 & \xi_2 & x'_2 \\ \omega_3 & \xi_3 & x'_3 \end{vmatrix} = 0$$

aux termes de u^{10} près.

Si l'on développe ce déterminant en utilisant les intégrales des aires on trouve

$$(6) \qquad \sum_1^3 a_i x'_i = 0,$$

c'est-à-dire que pour un instant suffisamment voisin du choc binaire, le troisième corps se trouve dans le plan du maximum des aires. L'équation (6) nous apprend que x'_3 est au moins de l'ordre de $u^{10}\left(t^{\frac{10}{3}}\right)$, donc p'_3 au moins de l'ordre de u^7. Ce résultat a été déjà démontré par M. Chazy dans son Mémoire de 1922 (¹).

On peut faire d'autres applications en utilisant la propriété des fonctions A, B et C des équations de condition. Comme A commence par les termes de premier degré en u, B de degré 7 et C de degré 10, on peut considérer des formules de la forme

$$C - KA^3B = \Gamma_1 u^{11} \qquad \text{et} \qquad AC^2 - K'B^3 = \Gamma_2 u^{22}$$

si l'on choisit convenablement les nombres K et K′ de façon à annuler respectivement les coefficients de u^{10} et de u^{21}. Si l'on exécute les calculs on trouve aux termes de u^{11} près, et en substituant les valeurs de A, B et C en fonction de ξ_3, ω_3, x'_3 et p'_3, d'après les formules (XI)

$$r_3\left[\frac{x_3 p^2 - 2p_3 \sum_1^3 x_i p_i}{r}\right]' - \frac{\mu'}{5\alpha} p'_3 (p_3)^3 = \Gamma_1 u^{11},$$

et la deuxième formule aux termes de u^{22} près

$$\frac{7p_3}{p^2}(x'_3)^2 \sum_{i=1}^{3}\left(x_i p^2 - 2p_i \sum_{j=1}^{3} x_j p_j\right) x'_i - \frac{448}{75}\mu'^2\alpha^5(p'_3)^3 = \Gamma_2 u^{22}.$$

(¹) *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 39, p. 127-128.

Point attiré par deux centres fixes. — Une application intéressante présente l'étude d'un point attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton.

Considérons le mouvement dans l'espace et choisissons comme coordonnées les axes absolus passant par un des points fixes O de masse m_1. Soient les coordonnées du second corps fixe P : a_1, a_2, a_3 sa masse m_2. Les coordonnées canoniques du corps mobile de masse M seront : x_1, x_2, x_3 ; p_1, p_2, p_3. Les équations du mouvement seront

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F = \mu \sum_1^3 (p_i)^2 - \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r'}\right) = E$$

(intégrale des forces vives),

$$r^2 = \sum_1^3 x_i^2, \qquad r'^2 = \sum_1^3 (x_i - a_i)^2.$$

On voit facilement que les seuls points singuliers sont des chocs binaires MO et MP. Considérons le mouvement au voisinage du choc MO et supposons que le choc se produit au temps $t = 0$. Pour régulariser le problème appliquons :

1° La transformation $dt = r\,du$ ($u = 0$ pour $t = 0$).
2° La transformation Levi-Civita

$$x_i = \xi_i \omega^2 - 2\omega_i \sum_1 \xi_i \omega_i, \qquad p_i = \frac{\omega_i}{\omega^2},$$

et prenons comme nouvelle fonction canonique $H = r(F - E) = 0$ comme dans le cas général des trois corps. E est fixée d'avance.

Le système transformé devient

$$(2) \qquad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$H = -\alpha_1 - \mu\xi - \xi\omega^2 \left[\frac{\alpha_2}{r'} + E\right] = 0.$$

On voit facilement que c'est un système régulier d'équations différentielles. Le point $\omega = 0$ et $\xi = \frac{\alpha_1}{\mu}$ correspond au point du choc MO. On peut donc développer les ξ_i et ω_i suivant les puissances croissantes de u. On trouve

$$\xi_i = \xi_i^0 + u X_i(\xi_j^0 \mid u) \tag{3}$$

et

$$\omega_i = u \Omega_i(\xi_j^0 \mid u) \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4}$$

les ξ_i^0 les valeurs de ξ_i pour $u = 0$.

Du système (3) on peut par inversion tirer les valeurs des ξ_i^0 en fonction des ξ_i et u, on trouve

$$\xi_i^0 = \xi_i + u \overline{X}_i(\xi_j \mid u), \tag{5}$$

en substituant ces valeurs de ξ_i^0 dans (4) on trouve finalement

$$\omega_i = u \overline{\Omega}_i(\xi_j \mid u) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

on s'assure facilement, comme dans le cas général des trois corps, que les fonctions $\overline{X}_i$ et $\overline{\Omega}_i$ sont des fonctions régulières.

Si l'on élimine u entre les trois équations (6) on trouve les deux conditions du choc binaire, que doivent satisfaire les variables initiales pour un instant quelconque u_1.

Par un raisonnement analogue à celui du cas général on s'assure facilement que les équations (6) seront de la forme

$$\omega_i = A\xi_i + Ba_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

les A et B sont des fonctions développées suivant les puissances croissantes de u, paires en ξ_i et a_i et invariables par la substitution circulaire des indices i. Si l'on revient aux variables canoniques primitives les équations (7) deviennent

$$\alpha x_i + \beta p_i + \gamma a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

c'est-à-dire trois équations homogenes à trois inconnues : α, β et γ. Pour que le système admette une solution, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & a_1 \\ x_2 & p_2 & a_2 \\ x_3 & p_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire une condition pour que le mouvement soit plan. Donc, *il n'existe pas d'orbites à choc binaire dans l'espace*. Si l'on passe au cas du plan on démontre facilement que *toutes les orbites planes admettent au maximum un choc binaire*.

En effet, pour deux chocs successifs aux instants t_0 et t_1, il faut que les variables vérifient deux systèmes de conditions

$$\alpha x_i + \beta p_i + \gamma a_i = 0 \tag{9}$$

et

$$\alpha' x_i + \beta' p_i + \gamma' a_i = 0 \qquad (i = 1, 2,). \tag{10}$$

Si l'on élimine entre ces quatre équations homogènes, par exemple p_1 et p_2, on trouve deux équations homogènes

$$l x_1 + m a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad l x_2 + m a_2 = 0.,$$

Si l et m ne sont pas nulles toutes les deux à la fois, il faut que $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$, c'est-à-dire le corps mobile se meut sur la droite qui passe par les deux corps fixes, le mouvement est donc rectiligne.

Si l et m sont toutes les deux nulles, comme on a

$$l = \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0, \qquad m = \gamma\beta' - \beta\gamma' = 0,$$

il faut que

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

c'est-à-dire que les deux systèmes de conditions (9) et (10) sont identiques, il n'y a qu'un seul choc binaire, ce qui est contraire à notre supposition.

Si l'on développe les α, β et γ suivant les puissances de u et si l'on élimine u entre les deux équations de condition on trouvera la condition approchée du choc binaire dans le plan; tous les calculs faits on trouve

$$\frac{\alpha_2\alpha_1^{3}}{(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{(a_1^2 + a_2^2)}{\alpha_2\alpha_1^{3}}\,\frac{(x_1 p_2 - p_1 x_2)}{r p^2}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{11}$$

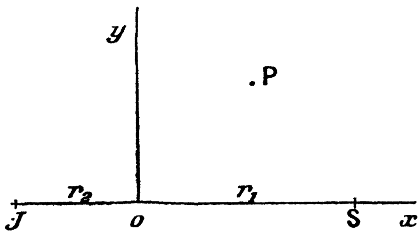
$$= \frac{p_2}{p^2\left[x_2 p^2 - 2 p_2 \sum_1^2 x_i p_i\right]} + \dots$$

$$(\alpha_2 = k^2 M m_2,\ \alpha_1 = k^2 M m_1,\ p^2 = p_1^2 + p_2^2).$$

Le problème restreint. — *Soient les deux corps S et J de masses* un et μ, qui tournent d'un mouvement uniforme autour de leur centre de gravité commun O. Posons $SO = r_1$ et $JO = r_2$.

Soit $r_1 + r_2 = 1$, on a en outre $r_1 - \mu r_2 = 0$. Soit un petit corps P de masse m attiré par S et J. Rapportons le mouvement

Fig. 2.



aux axes xy passant par O et tournant d'un mouvement uniforme de vitesse n. Les équations canoniques du mouvement du point P seront de la forme (¹)

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$F = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + n(p_1 q_2 - q_1 p_2) - U = E,$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{(q_1 - r_1)^2 + q_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 + r_2)^2 + q_2^2}}.$$

Considérons le mobile P au voisinage d'un choc avec S, ce qui correspond à $q_1 = r_1$ et $q_2 = 0$. Pour régulariser le problème posons

$$dt = \overline{PS}.du \qquad (u = 0 \text{ pour } t = 0),$$

l'instant du choc étant $t = 0$,

$$q_1 = r_1 + \xi_1 \omega^2 - 2\omega_1 \sum_1^2 \xi_i \omega_i \qquad \text{et} \qquad q_2 = \xi_2 \omega^2 - 2\omega_2 \sum_1^2 \xi_i \omega_i$$

$$(\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2),$$

et

$$p_1 = \frac{\omega_1}{\omega^2}, \qquad p_2 = \frac{\omega_2}{\omega^2}.$$

(¹) CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, B. II, p. 102-107.

Prenons comme nouvelle fonction canonique

$$H = \xi\omega^2(F - E) = 0,$$

E constante des forces vives fixée d'avance.

La transformation est canonique, en effet, on a

$$\sum_1^2 p_i\,dq_i - \sum_1^2 \omega_i\,d\xi_i = dW.$$

On trouve un nouveau système canonique

$$\frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2),$$

$$H = -1 + \frac{1}{2}\xi - 2n(\omega_1\xi_2 - \xi_1\omega_2)\xi\omega^2 - \xi\omega^2\left(\frac{\mu}{\rho_2} + E\right) = 0.$$

$$\left[\rho_2 = \sqrt{(q_2 - r_2)^2 + q_2^2}\right].$$

Le mouvement est régulier et l'on a, par analogie avec le cas général, la condition du choc binaire en éliminant u entre les deux équations

(2) $$\omega_i = u\Omega_i(\xi_i \mid u).$$

Si l'on développe H suivant les puissances croissantes des ω_i et l'on calcule les coefficients des puissances de u dans les équations (2), on trouve que les ω_i seront de la forme

(2′) $$\begin{cases} \omega_1 = A\xi_1 + B, \\ \omega_2 = A\xi_2 - C, \end{cases}$$

$$A = -\frac{2u}{\xi} + \frac{1}{3}\left(\mu - \frac{r_1^2}{2}\right)\frac{u^3}{\xi} + \ldots,$$

$$B = b_5 u^5 + \ldots \qquad \text{et} \qquad C = -nr_1 u^2 - c_4 u^4 - \ldots.$$

En variables primitives les conditions seront de la forme

$$\alpha q_1 + \beta p_1 + \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha q_2 + \beta p_2 + \delta = 0.$$

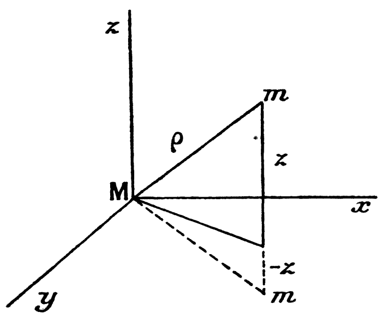
On voit par analogie avec le cas général que *le système **admet** des orbites avec, au plus, deux chocs*. De la même façon ***les** orbites dans l'espace admettent au plus **un seul** choc.*

Cas d'exception. — Ces cas se présentent lorsque, au lieu des trois conditions (espace), ou deux (plan), on a seulement une équation de la forme

$$Ax - By' - Cp - Dp' = 0,$$

dans ce cas on ne peut pas éliminer le temps, et les conditions initiales ne sont liées par aucune relation déterminant le choc. Ce sont des cas où la production d'un choc est conditionnée par les données mêmes du problème. Comme exemple typique on peut considérer le problème étudié par M. Chazy [1] : un système des trois points qui sont au sommet d'un triangle isoscele, dont deux masses sont égales, le mouvement admet un plan de symétrie.

Fig. 3.



Soient les masses égales m, la troisième masse M. Rapportons le mouvement au corps M. Le plan xy, plan de symétrie. Les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(M+2m)\frac{x}{\rho^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -(M+2m)\frac{y}{\rho^3},$$

$$\frac{(M+2m)}{M}\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m}{M}(M+2m)\frac{1}{4z^2} - (M+2m)\frac{z}{\rho^3}$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

L'intégrale des forces vives sera

$$F = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{m}{M}(M+2m)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$- \frac{m}{4M}\frac{(M+2m)}{z} - \frac{(M+2m)}{\rho} = E.$$

[1] *Comptes rendus*, t. 188, 1929, p. 526.

Si l'on passe à la forme canonique

$$F = \frac{1}{2}\left[p^2 + q^2 + \frac{m}{\alpha}\, r^2\right] - \frac{\alpha}{4z} - \frac{M + 2m}{\rho} = E \qquad \left[\alpha = \frac{m}{M}(M + 2m)\right],$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial q}, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial r}, \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, & \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial z}. \end{cases}$$

Les seuls points singuliers sont : 1° un choc triple ou 2° un choc binaire des deux masses égales. Étudions le dernier cas qui correspond à $z = 0$.

Pour régulariser le système considérons les transformations

$$dt = z\, du \qquad z = \xi\omega^2, \qquad r = -\frac{1}{\omega}$$

et prenons comme fonction canonique

$$H = z[F - E] = 0,$$

en supposant E donnée à l'avance.

On trouve finalement :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{dy}{du} = \dfrac{\partial H}{\partial q}, & \dfrac{d\xi}{\partial u} = \dfrac{\partial H}{\partial \omega}; \\[2ex] \dfrac{dp}{du} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{dq}{du} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{d\omega}{\partial u} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}; \end{cases}$$

$$H = -\frac{\alpha}{4} + \frac{m}{2\alpha}\xi + \xi\omega^2\left[\frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{M + 2m}{\rho} - E\right] = 0.$$

Le choc correspond au point

$$\omega = 0, \qquad \xi = \frac{\alpha^2}{2m}.$$

Le système (2) est régulier et il admet comme solution :

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = \xi_0 + u\Gamma(\xi_0, x_0, y_0, p_0, q_0 \mid u), \\ x = x_0 + uX(\xi_0, x_0, y_0, p_0, q_0 \mid u), \\ y = y_0 + uY(\xi_0, x_0, y_0, p_0, q_0 \mid u), \\ p = p_0 + uP(\ldots), \qquad q = q_0 + uQ(\ldots) \end{cases}$$

et

$$(4) \qquad \omega = u\Omega(\xi_0, x_0, y_0, p_0, q_0 \mid u),$$

les $\xi_0, x_0, \ldots, q_0$ sont les valeurs de ces variables au point du choc $u = 0$; Γ, X, Y, P, Q et Ω sont des fonctions régulières développées suivant les puissances croissantes de u.

Si l'on tire des équations (3) les valeurs de $\xi_0, x_0, \ldots, q_0$ en fonction de $\xi, x, \ldots, q$ et on les porte dans (4) on trouve

$$(4') \qquad \omega = u\,\Omega(\xi, x, y, p, q \mid u),$$

c'est-à-dire une seule relation entre les variables et u. On ne peut donc pas appliquer à ces cas nos théorèmes généraux, car la trajectoire du choc est rectiligne — l'axe des z.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE L'ORBITE AU VOISINAGE D'UN CHOC BINAIRE.

Supposons que la troisième masse est suffisamment petite.

Reprenons les équations primitives (III), écrivons-les seulement sous une autre forme :

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2)}{\partial\omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2)}{\partial\xi_i},$$

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2)}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2)}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\mathrm{H}_1 = -\alpha + \frac{\xi}{2\mu} + \xi\omega^2\left[\frac{\Sigma p_i'^2}{2\mu'} - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_2^0}{\rho} - \mathrm{E}\right] = -\alpha + \frac{\xi}{2\mu} + \xi\omega^2\mathrm{H}'_1,$$

$$\mathrm{H}_2 = \xi\omega^2\left[\frac{\alpha_1^0 - \alpha_2^0}{\rho} - \frac{\alpha_1^0}{r_1} - \frac{d_2^0}{r_2}\right] - \alpha - \alpha_0 = \xi\omega^2[\mathrm{H}'_2] + \alpha - \alpha_0,$$

$$(\alpha_0 = k_0^2 m_0 m; \qquad \alpha_1^0 = k_0^2 m_0 m'; \qquad \alpha_2^0 = k_0^2 m m' \qquad \text{et} \qquad \alpha = k^2 m m').$$

Nous avons ajouté à H_2 un terme supplémentaire $\alpha - \alpha_0$, à cause de la valeur de E fixée d'avance d'après la transformation de Levi-Civita. Pour cela on suppose k^2, le coefficient d'attraction, comme variable, pour pouvoir appliquer plus tard les transformations iso-énergétiques suivant la terminologie de Levi-Civita. Voir à ce sujet les travaux de MM. Andoyer (¹), Levi-

(¹) *L'anomalie excentrique...* (*Bull. astr.*, t. XXX, 1913, p. 425).

Civita ([1]), et de Sitter ([2]). $\alpha - \alpha_0$ peut être considérée de l'ordre de la fonction perturbatrice. On voit facilement que le premier terme de H_2 est de l'ordre de ω^6.

Pour intégrer les systèmes (A) et (B) appliquons la méthode de variation des constantes arbitraires. Pour cela considérons le système

$$(\mathrm{A}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{du} &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} = 2\xi\omega_i \mathrm{M}, \\ \frac{d\omega_i}{du} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \xi_i} = -\frac{\xi_i}{\xi}\left(\frac{1}{2\mu} + \mathrm{M}\omega^2\right) \\ &\left(\mathrm{M} = \frac{1}{2\mu'}\Sigma p_i'^2 - \frac{\alpha_1^0 + \alpha_2^0}{\rho} - \mathrm{E}\right) \end{aligned}\right.$$

et

$$(\mathrm{B}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'_i}{du} &= \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p'_i} = \xi\omega^2 \frac{\partial \mathrm{H}'_1}{\partial p'_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} &= -\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x'_i} = -\xi\omega^2 \frac{\partial \mathrm{H}'_1}{\partial x'_i}. \end{aligned}\right.$$

Appliquons aux systèmes (A_1) et (B_1) la méthode d'intégration de Jacobi. Considérons d'abord le système (B_1). Si l'on revient à la variable primitive $t\,(dt = \xi\omega^2\, du)$ le système (B_1) devient

$$(\mathrm{B}'_1)\qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}'_1}{\partial p'_i}, \qquad \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}'_1}{\partial x'_i}.$$

Intégration du système (B_1). — Le système (B'_1) représente le mouvement des deux points de masses $m_0 + m$ et m' qui se meuvent suivant la loi de Newton. On a l'intégrale des forces vives : $\mathrm{H}'_1 = \mathrm{C}$. donc

$$\mathrm{M} = \mathrm{C} - \mathrm{E} = \text{const.},$$

ce qui nous servira dans la suite.

Supposons $\mathrm{C} < \mathrm{O}$, on a le mouvement elliptique. Appliquons les méthodes générales de la Mécanique céleste ([3]) : $p'_i = \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x'_i}$.

([1]) *Nuovo sistema canonico di elementi ellitici* (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. 20, 1913, p. 153).

([2]) *On canonical elements* (*Comptes rendus de l'Académie d'Amsterdam*, vol. XVI, 1913, p. 279).

([3]) Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, Chap. III, p. 63-89.

On a

$$\frac{1}{2\mu'}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x'_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x'_2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x'_3}\right)^2\right]-\frac{\alpha_1^0-\alpha_2^0}{\rho}=C,$$

$$\alpha_1^0-\alpha_2^0=k_0^2\frac{m'(m_0-m)}{m_0-m-m'}(m_0+m-m')=k_0^2\mu'N \qquad (N \text{ la masse totale}).$$

Soient $C=-\frac{k_0^4\mu'^3N^2}{2L_1^2}$, w_1 l'anomalie excentrique, θ_1 la longitude du nœud, i_1 l'inclinaison, θ_1+g_1 longitude du périhélie, l_1 l'anomalie moyenne, a_1 grand axe, e_1 excentricité et $n_1=\sqrt{\frac{k_0^2N}{a_1^3}}$.

On a

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_1(\cos w_1-e_1)(\cos g_1\cos\theta_1-\sin g_1\sin\theta_1\cos i_1)\\
&\quad -a_1\sin w_1\sqrt{1-e_1^2}(\sin g_1\cos\theta_1-\cos g_1\sin\theta_1\cos i_1),\\
x'_2 &= a_1(\cos w_1-e_1)(\cos g_1\sin\theta_1\quad \sin g_1\cos\theta_1\cos i_1)\\
&\quad +a_1\sin w_1\sqrt{1-e_1^2}(-\sin g_1\sin\theta_1-\cos g_1\cos\theta_1\cos i_1).
\end{aligned}$$

Les variables conjuguées

$$L_1=\mu'\sqrt{k_0^2Na_1},\qquad G_1=\mu'\sqrt{k_0^2Na_1(1-e_1^2)}$$

$$\Theta_1=G_1\cos i_1,\qquad l_1=w_1-e_1\sin w_1,\qquad \rho=a_1(1-\cos w_1).$$

Prenons comme variables canoniques le système de Delaunay

$$\begin{pmatrix} e_1 & g_1 & \theta_1\\ L_1 & G_1 & \Theta_1\end{pmatrix}$$

et reprenons le système (B).

Comme les ξ_i et ω_i sont indépendantes des x'_i et p'_i le système (B) peut être remplacé par le suivant :

$$\frac{dx'_i}{du}=\xi\omega^2\frac{\partial(H'_1-H'_2)}{\partial p'_i}\qquad\text{et}\qquad\frac{dp'_i}{du}=-\xi\omega^2\frac{\partial(H'_1-H'_2)}{\partial x'_i}$$

ou

$$(B_2)\qquad \frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial(H'_1-H'_2)}{\partial p'_i},\qquad \frac{dp'_i}{dt}=-\frac{\partial(H'_1+H'_2)}{\partial x'_i},$$

c'est-à-dire que les systèmes (B) et (B₂) sont équivalents si l'on change les variables indépendantes u et t ainsi que les fonctions caractéristiques H_1+H_2 et $H'_1+H'_2$.

On peut donc prendre pour le système (B_2) comme fonction perturbatrice la fonction H'_2. On trouvera finalement pour les variables de Delaunay le système

$$
(C_2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dl_1}{dt} &= \frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial L_1}, \qquad \frac{dg_1}{dt} = \frac{\partial H'_2}{\partial G_1} = \frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial G_1},\\
\frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\partial H'_2}{\partial \Theta_1} = \frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial \Theta_1},\\
\frac{dL_1}{dt} &= -\frac{\partial H'_2}{\partial l_1} = -\frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial l_1},\\
\frac{dG_1}{dt} &= -\frac{\partial H'_2}{\partial g_1} = -\frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial g_1},\\
\frac{d\Theta_1}{dt} &= -\frac{\partial H'_2}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial \theta_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Chacune des équations (C_2) peut être écrite sous une forme analogue au système (B), c'est-à-dire

$$\frac{dl_1}{du} = \xi\omega^2 \frac{\partial(H'_1 + H'_2)}{\partial L_1}, \qquad \ldots$$

Comme $\xi\omega^2$ dépend seulement de L_1 par l'intermédiaire de

$$M = C - E = -\frac{k_0^2 \mu'^3 N^2}{2 L_1^2} - E,$$

Si l'on regarde dans les équations M comme une constante, on pourra transformer (C_2) en un système (C)

$$(C)\qquad \frac{dl_1}{du} = \frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial L_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial \theta_1}.$$

Le $\alpha - \alpha_0$ ne dépendant pas des éléments $l_1, g_1, \ldots, \Theta_1$. La relation entre u et $t\,(l_1 = n_1 t)$ sera donnée par la solution du système (A).

Remarque. — On peut aussi prendre pour les valeurs de l'excentricité l_1 — voisin de un, le sextuple iso-énergétique de Levi-Civita : $(w_1, g_1, \theta_1, W_1, G_1, \Theta_1)$; les w_1, g_1, θ_1, G_1 et Θ_1 ayant la même signification qu'avant, sauf $W_1 = \sqrt{2\mu' C}\,.\,a_1$. Dans ce cas $M = C - E$ sera une constante fixée d'avance, car les valeurs de C et E sont fixées d'avance. Il faudra seulement ajouter à la fonction perturbatrice un terme complémentaire : $\xi\omega^2 \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1^0 - \alpha_2^0}{\rho}$, car le coefficient d'attraction est supposé variable.

Intégration du système (A_1). — Posons

$$\omega_i = \frac{\partial S_1}{\partial \xi_i}. \tag{1}$$

Il faut résoudre le système aux dérivées partielles

$$M\xi\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_3}\right)^2\right] + \frac{\xi}{2\mu} - \alpha = 0. \tag{2}$$

Effectuons le changement de variables :

$$\xi_1 = \xi \sin\zeta \cos\varphi, \qquad \xi_2 = \xi \sin\zeta \sin\varphi, \qquad \xi_3 = \xi \cos\zeta, \tag{3}$$

on trouve :

$$M\xi\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \zeta}\right)^2 + \frac{1}{\xi^2 \sin^2\zeta}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{\xi}{2\mu} - \alpha = 0. \tag{2'}$$

On voit immédiatement que si l'on divise tous les termes par $2M\xi$ ($\xi \neq 0$ comme nous avons supposé en appliquant la transformation de Levi-Civita) on est dans le cas du problème des deux corps. On peut donc satisfaire à l'équation (2') par une fonction $S_1 = S + G\zeta$, d'après la méthode de Poincaré. S une fonction de ξ et G une constante. On trouve, comme

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi} = \frac{dS}{d\xi}, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \zeta} = G \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$M\xi\left[\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2 + \frac{G^2}{\xi^2}\right] + \frac{\xi}{2\mu} - \alpha = 0, \tag{2''}$$

d'où

$$\frac{dS}{d\xi} = \sqrt{\frac{\alpha}{M\xi} - \frac{G^2}{\xi^2} - \frac{1}{2\mu M}} \equiv \sqrt{R}, \qquad \text{d'où} \qquad S = \int \sqrt{R}\, d\xi. \tag{4}$$

La solution que nous venons de trouver n'est pas générale, car elle dépend seulement des deux constantes arbitraires G et α ($\alpha = k^2 m_0 m$) au lieu de trois. Pour avoir la solution générale il suffit de remplacer ζ (l'angle de ξ avec ξ_3) par un autre angle ζ que fait le vecteur ξ avec un axe Δ du plan ξ_1, ξ_2 ; soit θ l'angle de Δ avec ξ_1 on trouve facilement

$$\cos\zeta = \frac{\xi_1 \cos\theta - \xi_2 \sin\theta}{\xi}$$

et, par analogie avec le calcul de Poincaré :

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = -\cos\iota \qquad (\iota\text{, l'inclinaison}).$$

Posons finalement

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \alpha', \qquad \frac{\partial S_1}{\partial G} = g \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = -\Theta,$$

les α', g et Θ sont des constantes, ou des fonctions linéaires de u. De l'équation $\frac{\partial S_1}{\partial \theta} = -\Theta$ on tire $\Theta = G\cos i$.

Passons à l'équation $\frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{R}$. Il faut distinguer deux cas suivant que $M \lessgtr 0$.

Pour $M < 0$, on a le cas hyperbolique, pour $M > 0$, le cas elliptique que nous allons étudier. Il faut que $C - E > 0$ comme

$$C = \frac{-k_0^2 \mu'^2 N^2}{2L_1^2} < 0,$$

il faut que $E < 0$ et $|E| > |C|$.

$\xi^2 R$ admet deux racines ξ' et ξ''. Pour que les racines soient réelles il faut que $\alpha^2\mu^2 - 2\mu MG^2 > 0$. Soit $\xi' < \xi''$. Posons

$$\xi' = a(1-e) \qquad \text{et} \qquad \xi'' = a(1+e),$$

d'où

$$a = \frac{\xi' + \xi''}{2} = \mu\alpha, \qquad 1 - e^2 = \frac{2\mu MG^2}{a^2}, \qquad e = \sqrt{\frac{\alpha^2\mu^2 - 2\mu MG^2}{\mu^2\alpha^2}}$$

et

$$p = a(1-e^2) = \frac{2MG^2}{\alpha}.$$

Cherchons les valeurs des ω_i et ξ_i. Pour cela calculons les valeurs des

$$\frac{d\xi_i}{du} = 2M\xi\omega_i = 2M\xi\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_i}\right);$$

soit

$$\omega_\xi = \frac{\partial S_1}{\partial \xi}, \qquad \omega_\zeta = \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \zeta}\right), \qquad \omega_\varphi = \frac{1}{\xi \sin\zeta}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right).$$

En utilisant les équations (3) et $\omega_i = \dfrac{\partial S_1}{\partial \xi_i}$ on trouve

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_\xi &= \omega_1 \sin\zeta \cos\varphi + \omega_2 \sin\zeta \sin\varphi + \omega_3 \cos\zeta,\\ \omega_\zeta &= \omega_1 \cos\zeta \cos\varphi + \omega_2 \cos\zeta \sin\varphi - \omega_3 \sin\zeta,\\ \omega_\varphi &= -\omega_1 \sin\zeta \sin\varphi + \omega_2 \sin\zeta \cos\varphi, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on a finalement

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\xi \cos\zeta - \omega_\zeta \sin\zeta,\\ \omega_2 &= \omega_\xi \sin\zeta \cos\varphi + \omega_\zeta \cos\zeta \sin\varphi - \omega_\varphi \sin\varphi,\\ \omega_3 &= \omega_\xi \sin\zeta \sin\varphi + \omega_\zeta \cos\zeta \cos\varphi - \omega_\varphi \cos\varphi \end{aligned}\right.$$

et

$$\Sigma \xi_i \omega_i = \xi \sqrt{R} = \sqrt{\xi^2 R}.$$

Reprenons le système (A_1)

$$(7)\qquad \frac{d\xi_i}{du} = 2M\xi\omega_i$$

et

$$(8)\qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\left(M\omega^2 + \frac{1}{2\mu}\right)\frac{\xi_i}{\xi},$$

de ces équations on tire

$$\sum \xi_i \frac{d\xi_i}{du} = 2M\xi \Sigma \xi_i \omega_i = 2M\xi\sqrt{\xi^2 R},$$

d'où

$$\frac{d\xi}{du} = 2M\sqrt{\xi^2 R},$$

en intégrant on trouve

$$(9)\qquad \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 R}} = 2M\int du + \text{const.}$$

Posons

$$(10)\qquad \xi = \xi' \cos^2\frac{w}{2} + \xi'' \sin^2\frac{w}{2} = a(1 - e\cos w).$$

Faisons varier ξ de ξ'' à ξ, alors w varie de π à w et u de u_0 à u. On a

$$(11)\qquad \int_{\xi''}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 R}} = \sqrt{2\mu M}\int_{\pi}^{w} dw = 2M(u - u_0).$$

D'après la valeur de ξ on voit qu'il est plus régulier de rapporter le mouvement au second foyer. Posons donc $w' = w - \pi$, on trouve

$$\xi = a(1 - e \cos w'),$$

w' joue le rôle de l'anomalie excentrique.

Nous avons intégré de ξ'' à ξ, car d'après les conditions initiales du choc il faut avoir, pour $u_0 = 0$,

$$\xi = 2\mu\alpha = 2a;$$

donc

$$w' = 0 \qquad \text{et} \qquad e = 1.$$

Pour trouver la valeur de ω on peut utiliser l'intégrale des forces vives

$$-\alpha + \frac{\xi}{2\mu} + \xi\omega^2 M = 0,$$

on trouve

$$\omega^2 = \frac{1 - e \cos w'}{2\mu M(1 + e \cos w')},$$

d'où, si l'on revient au vecteur primitif r, on trouve

$$r = \xi\omega^2 = \frac{a(1 - e \cos w')}{2\mu M} = a_1(1 - e \cos w'),$$

c'est-à-dire w' est l'anomalie excentrique, la même que pour les coordonnées ξ_i, seulement le grand axe est devenu

$$a_1 = \frac{a}{2\mu M} = \frac{\alpha}{2M}.$$

L'anomalie moyenne

$$e = w' - e \sin w' = n(t - t_0) = n \int_{u_0}^{u} r\, du$$

$$= n \int_0^{w'} \sqrt{\frac{\mu}{2M}}\, a_1(1 - e \cos w')\, dw' = n a_1 \sqrt{\frac{\mu}{2M}}\, (w' - e \sin w'),$$

d'où

$$(12) \qquad n = \frac{\sqrt{\frac{2M}{\mu}}}{a_1} = \frac{\sqrt{\mu(2M)^3}}{a} = \frac{(2M)^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}\alpha}.$$

Cherchons les valeurs des ξ_i. On a

$$g = \frac{\partial S_1}{\partial G} = \zeta + \frac{\partial S}{\partial G}.$$

Posons

$$\xi = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos v}.$$

On trouve facilement que $g = \zeta + v$ ($\pi - v$ sera l'anomalie vraie pour le vecteur ξ). On a

$$\xi\cos v = a(\cos w' + e) \qquad \text{et} \qquad \xi\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin w'.$$

d'où finalement

$$\xi_i = A_i a(\cos w' + e) + B_i a\sqrt{1-e^2}\sin w',$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \cos g\cos\theta - \sin g\sin\theta\cos i, & B_1 &= \sin g\cos\theta - \cos g\sin\theta\cos i,\\
A_2 &= \cos g\sin\theta - \sin g\cos\theta\cos i, & B_2 &= \sin g\sin\theta - \cos g\cos\theta\cos i,\\
A_3 &= \sin g\sin i, & B_3 &= -\cos g\sin i,
\end{aligned}$$

$$\sum_1^3 A_i^2 = 1, \qquad \sum_1^3 B_i^2 = 1, \qquad \sum_1^3 A_i B_i = 0.$$

Les paramètres étant α, G et θ, on trouve

$$\alpha' = \frac{\partial S_1}{\partial\alpha} = \int_{\xi''}^{\xi}\frac{d\xi}{2M\xi\sqrt{R}} = \frac{1}{2M}\sqrt{2M\mu}\,w' = \sqrt{\frac{\mu}{2M}}\,w' = u - u_0.$$

Posons

$$W' = \alpha\sqrt{\frac{\mu}{2M}},$$

on aura

$$\frac{\partial S_1}{\partial W'} = w',$$

$$g = \frac{\partial S_1}{\partial G} = \zeta + v \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial S_1}{\partial\theta} = -\Theta.$$

On aura de cette façon un système canonique des variables iso-énergétiques $\begin{pmatrix} W' & G & \Theta \\ w' & g & \theta \end{pmatrix}$:

$$W' = \alpha\sqrt{\frac{\mu}{2M}} = \frac{a}{\sqrt{2\mu M}},$$

$$\Theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{2\mu M}}\cos i = G\cos i \qquad \text{et} \qquad G = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{2\mu M}}.$$

On trouve finalement les formules suivantes :

$$\xi_1 = \sqrt{2\mu M}\left(W'\cos w' + \sqrt{W'^2 - G^2}\right)\left(\cos g \cos\theta - \sin g \cos\theta \frac{\Theta}{G}\right)$$
$$- \sqrt{2\mu M}\, G \sin w' \left(\sin g \cos\theta - \cos g \sin\theta \frac{\Theta}{G}\right),$$

$$\xi_2 = \sqrt{2\mu M}\left(W'\cos w' - \sqrt{W'^2 - G^2}\right)\left(\cos g \sin\theta + \sin g \cos\theta \frac{\Theta}{G}\right)$$
$$- \sqrt{2\mu M}\, G \sin w' \left(\sin g \sin\theta + \cos g \cos\theta \frac{\Theta}{G}\right),$$

$$\xi_3 = \sqrt{2\mu M}\left(W'\cos w' + \sqrt{W'^2 - G^2}\right)\sin g \frac{\sqrt{G^2 - \Theta^2}}{G}$$
$$- \sqrt{2\mu M}\, G \sin w' \cos g \frac{\sqrt{G^2 - \Theta^2}}{G}$$

et

$$\xi = \sqrt{2\mu M}\left(W' + \frac{\sqrt{W'^2 - G^2}}{G}\cos w'\right).$$

Pour développer la fonction perturbatrice il faut calculer les valeurs des ω_i.

On a

$$\omega_i = \frac{1}{2M\xi}\frac{d\xi_i}{du} = \frac{1}{2M\xi}\frac{d\xi_i}{dw'}\sqrt{\frac{2M}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu M}}\frac{1}{\xi}\frac{d\xi_i}{dw'},$$

d'où

$$\omega_i = \frac{-A_i W' \sin w' - B_i G \cos w'}{\sqrt{2\mu M}\left(W' + \sqrt{W'^2 - G^2}\cos w'\right)},$$

dans les A_i et B_i il faut remplacer

$$\cos i = \frac{\Theta}{G} \qquad \text{et} \qquad \sin i = \frac{\sqrt{G^2 - \Theta^2}}{G},$$

$$\omega^2 = \frac{W'^2 \sin^2 w' + G^2 \cos^2 w'}{2\mu M\left(W' + \sqrt{W'^2 - G^2}\cos w'\right)^2}.$$

Les x_i deviendront

$$x_i = \xi_i \omega^2 - 2\omega_i \Sigma \xi_j \omega_j = \frac{A_i\left(W'\cos w' - \sqrt{W'^2 - G^2}\right) + B_i G \sin w'}{\sqrt{2\mu M}}$$

et

$$r = \xi\omega^2 = \frac{W' - \sqrt{W'^2 - G^2}\cos w'}{\sqrt{2\mu M}}.$$

On vérifie facilement que la transformation est canonique

$$dS_1 = \sum_1^3 \frac{\partial S_1}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial S_1}{\partial W'} dW' + \frac{\partial S_1}{\partial G} dG - \frac{\partial S_1}{\partial \theta} d\theta$$
$$= \sum_1^3 \omega_i \, d\xi_i + w' \, dW' + g \, dG - \theta \, d\theta,$$

donc

$$dS_1 - d(w'W' + gG) = d(S_1 - w'W' - gG)$$
$$= \sum_1^3 \omega_i \, d\xi_i - W' \, dw' - G \, dg - \theta \, d\theta.$$

C. Q. F. D.

Le *système général* deviendra le système (A),

$$(A_2) \qquad \frac{dw'}{du} = \frac{\partial H}{\partial W'}, \qquad \frac{dg}{du} = \frac{\partial H}{\partial G}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\theta}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

et le système (B),

$$(B_2) \qquad \frac{dl_1}{du} = \frac{\partial H}{\partial L_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\theta_1}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1},$$

ou, si l'on passe à la fonction perturbatrice H_2,

$$\frac{dw'}{du} = \sqrt{\frac{2M}{\mu}} + \frac{\partial H_2}{\partial W'}, \qquad \frac{dg}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial G}, \qquad \frac{d\theta}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial \theta},$$
$$\frac{dW'}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial w'}, \qquad \frac{dG}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial g}, \qquad \frac{d\theta}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial \theta}$$

et

$$\frac{dl_1}{du} = \frac{(W' - \sqrt{W'^2 - G^2} \cos w')}{\sqrt{2\mu M}} \frac{\mu'^3 M^2}{L_1^3} + \frac{\partial H_2}{\partial L_1}, \qquad \frac{dg_1}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial G_1},$$
$$\frac{d\theta_1}{du} = \frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \qquad \frac{dL_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial l_1}, \qquad \frac{dG_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial g_1}, \qquad \frac{d\theta_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial \theta_1},$$

H_2 ne contenant plus de termes en $\alpha - \alpha_0$.

Pour le cas plan on trouve facilement les formules en annulant l'angle d'inclinaison $i = 0$. On a les deux systèmes

$$\begin{pmatrix} l_1 & g_1 \\ L_1 & G_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} w' & g \\ W' & G \end{pmatrix}.$$

Pour l'étude des orbites à choc il faut considérer dans le mouvement non perturbé $e = 1$, c'est-a-dire G et $\Theta = 0$.

Pour appliquer ce développement aux orbites périodiques à choc ainsi que pour la symétrie des développements il est préférable de remplacer le système (B) par un système iso-énergétique

$$\begin{pmatrix} w_1 & g_1 & \theta_1 \\ W_1 & G_1 & \Theta_1 \end{pmatrix},$$

on aura les équations

$$\frac{dw_1}{du} = \frac{\xi\omega^2}{\rho}\sqrt{\frac{2C}{\mu'}} + \frac{\partial H_2}{\partial W_1}, \qquad \frac{dg_1}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial G_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\Theta_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial \theta_1}.$$

On peut encore simplifier en rapportant le mouvement au plan de maximum des aires.

Les intégrales des aires sont

$$\begin{aligned} \sqrt{G^2 - \Theta^2}\sin\theta - \sqrt{G_1^2 - \Theta_1^2}\sin\theta_1 &= a_3, \\ -\sqrt{G^2 - \Theta^2}\cos\theta + \sqrt{G_1^2 - \Theta_1^2}\cos\theta_1 &= a_2, \\ \Theta + \Theta_1 \qquad\qquad &= a_1. \end{aligned}$$

On aura

$$a_2 = a_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 = k.$$

Appliquons la transformation de Poincaré (*Méthodes nouvelles*, t. I, p. 39-40),

$$\Theta = \frac{k}{2} + \frac{1}{2k}(G^2 - G_1^2), \qquad \Theta_1 = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}(G^2 - G_1^2)$$

soit

$$G = \Gamma \qquad \text{et} \qquad G_1 = \Gamma_1.$$

On aura finalement les systèmes

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dw}{du} = \sqrt{\frac{2M}{\mu}} - \frac{\partial H_2}{\partial W}, \qquad \frac{dg}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial \Gamma}, \\ &\frac{dW}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial w}, \qquad \frac{d\Gamma}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial g}, \\ &\frac{dw_1}{du} = \frac{(W^2 - \sqrt{W^2 - \Gamma^2}\cos w)}{\sqrt{2\mu M(W_1^2 - \sqrt{W_1^2 - \Gamma_1^2}\cos w_1)}} + \frac{\partial H_2}{\partial W_1}, \qquad \frac{dg_1}{du} = \frac{\partial H_2}{\partial \Gamma_1}, \\ &\frac{dW_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial w_1}, \qquad \frac{d\Gamma_1}{du} = -\frac{\partial H_2}{\partial g_1} \end{aligned} \right.$$

(pour plus de simplicité on a remplacé w' et W' par w et W),

$$H_2 = \xi\omega^2 \left[\alpha_1^0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_1}\right) \quad \alpha_2^0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_2}\right)\right],$$

et pour le cas plan, si l'on pose $g - g_1 = \varpi$ et $G = \Pi$, on trouve

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \dfrac{dw}{du} = \sqrt{\dfrac{2M}{\mu}} \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial W}, \\[2ex] \dfrac{dw_1}{du} = \dfrac{W^2 - \sqrt{W^2 - (k - \Pi)^2} \cos w}{\sqrt{2\mu M(W_1^2 - \sqrt{W_1^2 - \Pi^2} \cos w_1)}} \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial W_1}, \\[2ex] \dfrac{dW}{du} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial w}, \qquad \dfrac{dW_1}{du} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial w_1}, \\[2ex] \dfrac{d\varpi}{du} = \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial \Pi}, \qquad \dfrac{d\Pi}{du} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial \varpi}. \end{cases}$$

Les variables g, g_1, θ, θ_1, G, G_1, Θ, Θ_1 sont les variables de Delaunay. Les W et W_1 sont proportionnelles aux grands axes, w et w_1 sont les anomalies excentriques.

CHAPITRE III.

ORBITES PÉRIODIQUES AVEC CHOC BINAIRE.

Cas du plan. — Considérons le mouvement plan, donc les équations (II) du dernier chapitre. Soit pour $u = 0$ on a un choc binaire des corps P_0P. Dans ce cas $G = 0$ et $\xi = W\sqrt{2\mu M}(1 + \cos w)$ pour $H_2 = 0$.

Le corps P décrit d'un mouvement périodique un segment de droite de longueur $2\sqrt{2\mu M}\,W$ et le corps P' une ellipse. Remplaçons H_2 par εH_2, ε un paramètre suffisamment petit de l'ordre de la troisieme masse. On peut démontrer que *dans le plan pour $\varepsilon \neq 0$ et suffisamment petit, on peut avoir des solutions périodiques avec chocs analogues aux solutions de la deuxième sorte de Poincaré*, c'est-à-dire aux excentricités finies et inclinaisons nulles.

Pour démontrer ce théorème il suffit de répéter avec quelques changements le raisonnement de Poincaré (*Méthodes nouvelles*, t. I, Chap. III).

Soit pour $\varepsilon = o$,

$$W = W^0, \qquad W_1 = W_1^0, \qquad \Pi = \Pi^0, \qquad w = k_1 u + \Delta_1,$$

$$w_1 = \varphi(u) + \Delta_2, \qquad \varpi = \varpi_0, \qquad k_1 = \sqrt{\frac{2M}{\mu}};$$

$\varphi(u)$ est déterminée par la relation

$$w_1 - e_1 \sin w_1 = \frac{n_1}{n}(w - \sin w) + \Delta, \qquad \Delta = -\left(\frac{n_1}{n} h_1 - h_2\right),$$

où

$$h_1 = \Delta_1 - \sin\Delta_1, \qquad h_2 = \Delta_2 - e_1 \sin\Delta_2,$$

n et n_1 les moyens mouvements

$$n = \sqrt{\frac{2M\mu}{W}}, \qquad n_1 = \frac{2C}{W_1}.$$

Supposons que $\frac{n_1}{n} = m$ un nombre entier.

Si u augmente de T, w augmente de k_1T et soit k_1 tel que $k_1 T = 2\pi$, alors w_1 augmente de $\frac{n_1}{n} 2\pi = 2m\pi$. Le mouvement est donc périodique pour $\varepsilon = o$.

Soit $\varepsilon \neq o$ et suffisamment petit et posons pour $u = o$

$$W = W^0 + \beta_1, \qquad W_1 = W_1^0 + \beta_2 \qquad \text{et} \qquad \Pi = \Pi^0 + \beta_3,$$

$$w = \Delta_1 + \beta'_1, \qquad w_1 = \Delta_2 + \beta'_2 \qquad \text{et} \qquad \varpi = \varpi_0 - \beta'_3$$

[car pour $u = o$ on a $-\varphi(u) = o$].

Pour $u = T$ on aura

$$W = W^0 + \beta_1 + \psi_1, \qquad W_1 = W_1^0 + \beta_2 + \psi_2, \qquad \Pi = \Pi_0 + \beta_3 + \psi_3$$

et

$$w = k_1 T + \Delta_1 + \beta'_1 + \psi'_1, \qquad w_1 = m k_1 T + \Delta_2 + \beta'_2 + \psi'_2,$$

$$\varpi = \varpi_0 + \beta'_3 + \psi'_3.$$

Cherchons les conditions pour l'existence des solutions périodiques pour $\varepsilon \neq o$ et suffisamment petit. Il faut premièrement que $\psi_i = \psi'_i = o$ pour $u = T$ et que le déterminant fonctionnel des ψ_i et ψ'_i par rapport aux β_i et β'_i soit différent de zéro pour

$$\varepsilon = \beta_i = \beta'_i = o.$$

Le système $\psi_i = \psi'_i = 0$ n'est pas indépendant. Comme le système admet une intégrale des forces vives, une des conditions devient inutile, soit $\psi_1 = 0$. D'autre part on peut choisir l'origine des temps de façon que $w = 0$, c'est-à-dire $\Delta_1 = \beta'_1 = 0$, dans notre cas il faut prendre $u_0 = 0$, donc $h_1 = 0$.

De même pour $\varepsilon = 0$, ψ_2 et ψ_3 sont identiquement nulles. On peut les remplacer par $\frac{\psi_2}{\varepsilon} = \frac{\psi_3}{\varepsilon} = 0$.

Calculons les ψ'_i. Pour cela écrivons la fonction des forces vives sous la forme $H = H'_1 + \varepsilon H'_2$,

$$H'_1 = -\alpha_0 + W\sqrt{\frac{2M}{\mu}} + \frac{\xi\omega^2}{\rho}\left[W_1\sqrt{\frac{2C}{\mu'}} - (\alpha_1^0 + \alpha_2^0)\right].$$

les deux derniers termes sont de l'ordre de ε.

On a, pour $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned}\psi'_1 + h_1 T &= \int_0^T \frac{dw}{du}\,du \\ &= \int_0^T \frac{\partial H'_1(W^0 + \beta_1, W_1^0 + \beta_2, \Pi^0)\,du}{\partial W^0} = T\left(\frac{\partial H'_1}{\partial \beta_1}\right)_{\varepsilon=0},\end{aligned}$$

$$\psi'_2 + m k_1 T = \int_0^T \frac{d\alpha_1}{du}\,du = \int_0^T \frac{\partial H'_1}{\partial W_1^0}\,du = \int_0^T \left(\frac{\partial H'_1}{\partial \beta_2}\right)_{\varepsilon=0} du.$$

On voit facilement que H'_1 est une fonction linéaire de $W^0 + \beta_1$ pour $\varepsilon = 0$. Pour que les dérivées de ψ'_1 par rapport à β_i ne s'annulent pas toutes on peut se servir de l'artifice de Poincaré qui consiste à prendre, au lieu de l'intégrale des forces vives, une fonction quelconque de cette intégrale, ce qui ne change pas les équations. Dans notre cas il faut seulement transporter la constante α_0 dans le second membre et prendre comme intégrale $f(H + \alpha_0)$. Il suffit, par exemple, de prendre $(H + \alpha_0)^2$, qui devient pour $\varepsilon = 0$ — $(H'_1 + \alpha_0)^2$. Dans ce cas le déterminant fonctionnel

$$\left(\frac{\psi'_1, \psi'_2}{\beta_1, \beta_2}\right) \neq 0.$$

Il reste à s'assurer que le déterminant fonctionnel

$$\left(\frac{\frac{\psi_2}{\varepsilon}, \frac{\psi_3}{\varepsilon}, \psi'_3}{\beta_3, \beta'_2, \beta'_3}\right) \neq 0, \tag{1}$$

car le déterminant fonctionnel

$$\left(\frac{\frac{\psi_2}{\varepsilon}, \frac{\psi_3}{\varepsilon}, \psi'_1, \psi'_2, \psi'_3}{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta'_2, \beta'_3}\right)$$

est pour $\varepsilon = 0$ un produit de deux déterminants fonctionnels

$$\left(\frac{\psi'_1, \psi'_2}{\beta_1, \beta_2}\right) \times \left(\frac{\frac{\psi_2}{\varepsilon}, \frac{\psi_3}{\varepsilon}, \psi_3}{\beta_3, \beta'_2, \beta'_3}\right),$$

car pour $\varepsilon = 0$ les ψ'_1 et ψ'_2 ne dépendent pas de β_3, β'_2 et β'_3. Il faut donc démontrer l'inégalité (1). On a

$$\psi'_1 = \int_0^T \frac{d\varpi}{du}\, du = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \Pi}\, du = \varepsilon \int_0^T \frac{\partial H'_1}{\partial \Pi}\, du.$$

De même on trouve

$$\frac{\psi_2}{\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial w_1}\, du \qquad \text{et} \qquad \frac{\psi_3}{\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial \varpi}\, du.$$

Calculons ces intégrales pour $\varepsilon = \beta_i = \beta'_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Pour cela considérons la valeur moyenne de H_2 pour $\varepsilon = 0$,

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial w_1}\, du.$$

Dans notre cas il y a une complication provenant de ce que H_2 est développée en w et w_1; w_1 étant une fonction tres compliquée de u et w. Il s'agit donc d'exprimer w_1 en fonction de w. On trouve facilement que la fonction perturbatrice

$$H_2 = \Sigma \beta_{p_1 p_2} \cos(p_1 w + p_2 w_1 - l\varpi + h),$$

les β_{p_1}, β_{p_2} fonctions de Π, W et W_1. Il s'agit de transformer cette série en une fonction de w seule, en utilisant la relation

$$w_1 - e_1 \sin w_1 = \frac{n_1}{n}(w - e \sin w) + \Delta;$$

e tendant vers 1.

Appliquons l'artifice de Hansen, simplifié par Poincaré. Soit $F = \Sigma B'_{p_1 p_2} E^{i(p_1 w + p_2 w_1)}$, soit $w' = \frac{n_1}{n} w + \Delta$, d'où

$$F = \Sigma A_{m_1, m_2} E^{i(m_1 w + m_2 w')},$$

$$A_{m_1, m_2} = \sum_{p_1, p_2} \frac{p_2}{m_2} B'_{p_1, p_2} J_{m_1 - p_1}\left(-\frac{n_1}{n} m_2 e\right) J_{m_2 - p_2}(m_2 e_1),$$

les J sont des fonctions de Bessel.

Dans le cas de Hansen on a $J_{m_1 - p_1}\left(-\frac{n_1}{n} m_2 e\right)$ pour $e < 1$, dans notre cas comme e tend vers un, on n'a pas le droit de développer suivant les puissances croissantes de e, étant donné que le rayon de convergence de e est plus petit que un.

On trouve finalement

$$H_2 = \sum_{m_1, m_2} A'_{m_1, m_2} \cos(m_1 w + m_2 w' + h'\varpi + h''),$$

c'est-à-dire

$$H_2 = \sum_{m_1, m_2} A'_{m_1, m_2} \cos\left[\left(m_1 + \frac{n_1}{n} m_2\right) w + m_2 \Delta + h'\varpi + h''\right],$$

alors

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T H_2 \, du = \frac{1}{k_1 T} \Sigma' A_{m_1, m_2} \cos(m_2 \Delta + h'\varpi + h''),$$

le Σ' se rapporte aux indices m_1 et m_2 tels que $m_1 + \frac{n_1}{n} m_2 = 0$, c'est-à-dire $\frac{m_2}{m_1} = -m$, on trouve donc

$$\frac{\psi_2}{\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial w_1} du = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial \Delta} du = k_1 T \frac{dR}{d\Delta},$$

de même

$$\frac{\psi_3}{\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial \varpi} du = k_1 T \frac{dR}{d\varpi_0},$$

$$\frac{\psi'_3}{\varepsilon} = \int_0^T \frac{\partial H_2}{\partial \Pi} du = k_1 T \frac{dR}{d\Pi^0}.$$

Il faut donc

$$(\alpha) \qquad \frac{dR}{d\Delta} = \frac{dR}{d\varpi_0} = \frac{dR}{d\pi^0} = 0,$$

R admet un maximum ou minimum, c'est-à-dire le système (α) admet des solutions de l'ordre de multiplicité impair. On voit facilement que la fonction perturbatrice contient seulement des cosinus, donc $h'' = 0$.

On peut satisfaire au système $\frac{dR}{d\Delta} = \frac{dR}{d\varpi_0}$ en prenant

$$\Delta = \varpi_0 = 0.$$

Reste à satisfaire à l'équation $\frac{dR}{d\Pi^0} = 0$.

Si l'on se rapporte au développement de εH_2 on s'aperçoit facilement, comme dans le cas classique, que H_2, donc R, ne contient que des puissances paires en Π^0 ou Π. Donc $\frac{dR}{d\Pi^0}$ admet une racine en Π^0 de l'ordre de multiplicité impair. La valeur $\Pi^0 = G = 0$ annule $\frac{dR}{d\Pi^0}$ et rend R maximum ou minimum avec $\Delta = \varpi_0 = 0$. Si l'on choisit d'avance la constante des aires $k = G_1 - \Pi^0$ les conditions seront satisfaites et l'on aura, au moins, une solution périodique pour $\varepsilon \neq 0$.

On a donc une orbite périodique avec choc binaire, analogue à celle de Poincaré de la deuxieme sorte, l'excentricité e étant voisine de un. Il est bien entendu que la condition du choc doit être vérifiée. Cette orbite dépendra des trois parametres, la condition du choc réduit ce nombre *à deux*.

Orbites périodiques dans l'espace. — Reprenons le système (I) du dernier chapitre.

Supposons que pour $\varepsilon = 0$ on a

$$(\beta) \qquad W^0,\ W_1^0,\ \Gamma^0,\ \Gamma_1^0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ g^0,\ g_1^0,$$

les valeurs initiales de nos huit variables.

Les variables w^0 et w_1^0 sont choisies de telle façon, comme pour le cas plan, que le rapport $\frac{n_1}{n} = m$ soit un nombre entier et $k_1 T$ égale à un multiple de 2π, quelles que soient les six constantes Γ^0, Γ_1^0, Δ_1, Δ_2, g^0, et g_1^0. Il s'agit de choisir ces six constantes de façon que pour des petites valeurs de ε, les équations du mouvement admettent une solution périodique avec choc binaire, telle que nos huit variables soient fonctions de ε et se réduisent au système (β) pour $\varepsilon = 0$.

On opère comme pour le cas plan; on prend la valeur initiale de $u = 0$ de façon que $\Delta_1 = 0$. Ensuite on forme le H_2 et sa valeur moyenne R.

Il s'agit de déterminer les cinq constantes Γ^0, Γ_1^0, g^0, g_1^0 et Δ_2 de façon à rendre R maximum ou minimum. A chaque maximum (ou minimum) de R correspondra une solution périodique. Nous avons à satisfaire aux relations

$$\frac{dR}{d\Delta_2} = \frac{dR}{dg_0} = \frac{dR}{dg_1^0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dR}{d\Gamma^0} = \frac{dR}{d\Gamma_1^0} = 0.$$

On satisfait facilement au premier système en faisant

$$\Delta_2 = g^0 = g_1^0 = 0.$$

On a facilement, comme $\Delta_1 = 0$ et $\theta = \theta'$,

$$R = \Sigma A \cos(m_1 \Delta_2 + m_2 g^0 + m_3 g_1^0),$$

A dépend de W^0, W_1^0, Γ^0 et Γ_1^0;

$$|W^0| > |\Gamma^0| \quad \text{et} \quad |W_1^0| > |\Gamma_1^0|.$$

Comme

$$|\Gamma_1^0| - |\Gamma^0| < C < |\Gamma_1^0| + |\Gamma^0|,$$

Γ_1^0 et Γ^0 varient dans un champ limité. La fonction R admet donc un maximum ou minimum auxquels correspondent des solutions périodiques.

L'orbite périodique dépendra en général de cinq paramètres diminués de deux conditions du choc, donc de trois paramètres.

Comme applications étudions deux cas particuliers.

Orbites avec deux chocs successifs. — Soient trois corps p_0, p et p' avec les masses m_0, m et m'.

Rapportons le mouvement au corps p_0 et soient (x_i, p_i) et (x_i', p_i') les éléments canoniques.

Faisons la transformation de Sundman $U\,dt = du$ (U est la fonction des forces) et considérons la transformation canonique de Levi-Civitâ :

$$x_i = \xi_i \omega^2 - 2\omega_i \sum_1^3 \xi_j \omega_j, \qquad p_i = \frac{\omega_i}{\omega_2}$$

$$x'_i = \xi'_i \omega'^2 - 2\omega'_i \sum_1^3 \xi'_j \omega'_j, \qquad p'_i = \frac{\omega'_i}{\omega'^2} \qquad (\text{pour } t = 0;\ u = 0).$$

On obtient un système canonique

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{d\xi'_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega'_i}, \qquad \frac{d\omega'_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi'_i}$$

$$(i = 1, 2, 3);$$

$$(\mathrm{II}) \qquad H = \frac{\xi\xi'[\mu\omega'^2 + \mu'\omega^2 + 2\mu_0 \Sigma \omega_i \omega'_i - E\omega^2\omega'^2]}{\alpha'\xi\omega^2 + \alpha\xi'\omega'^2 + \alpha'' \dfrac{\xi\omega^2\xi'\omega'^2}{\Delta}} - 1 = 0$$

(E est la constante des forces vives ayant une valeur fixée d'avance, Δ la distance pp' et μ, μ', μ_0, α, α', α'' sont des fonctions des masses).

Supposons que la constante des aires a soit différente de zéro, ξ et ξ' bornés; on s'aperçoit facilement que les seuls points singuliers sont les chocs $p_0 p$ et $p_0 p'$, qui sont régularisés par la transformation.

Si l'on développe les équations du mouvement (I) en utilisant l'intégrale (II), on trouve pour $\frac{d\omega}{du}$ et $\frac{d\omega'}{du}$ les valeurs suivantes :

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{d\omega}{du} = \xi'\omega'^2 A \qquad \text{et} \qquad \frac{d\omega'}{du} = \xi\omega^2 B.$$

Supposons que pour $t = 0$, $u = 0$ on ait un choc $p_0 p$, c'est-à-dire $\omega = 0$, $\xi \neq 0$. Comme ω est une fonction positive, elle croît à partir du moment $u = 0$, $\frac{d\omega}{du} > 0$ jusqu'à un certain maximum pour lequel $\frac{d\omega}{du} = 0$. Mais $\frac{d\omega}{du}$ tend vers zéro si : 1° A tend vers zéro ou 2° $\xi'\omega'^2$ tend vers zéro, c'est-à-dire si la distance $p_0 p' = 0$. On peut donc choisir parmi l'infinité des trajectoires à choc simple une trajectoire qui après avoir passé par un choc $p_0 p$ aboutit pour un temps $u = u_1$, convenablement choisi, à un choc $p_0 p'$.

Une fois arrivé au deuxième choc $p_0 p'$ on peut raisonner de la même manière sur l'équation différentielle $\frac{d\omega'}{du} = \zeta\omega^2 B$ et l'on trouvera qu'on peut choisir une trajectoire, laquelle aboutit à nouveau, pour un temps $u = u_2$ convenablement choisi, à un choc $p_0 p$, etc.

Comme nous avons démontré dans le premier Chapitre qu'une orbite dans l'espace n'admet qu'un seul choc binaire et dans le plan, au maximum, deux chocs binaires, l'orbite en question, qui admet plus de deux chocs, doit nécessairement être périodique, et comme elle admet deux chocs différents $p_0 p$ et $p_0 p'$, elle est plane.

Si l'on utilise les deux conditions pour l'existence des deux chocs différents, on peut réduire le mouvement à un système du second ordre.

Exemple de Poincaré. — Comme second exemple on peut considérer les orbites que Poincaré appelle de deuxième espèce (¹).

Il s'agit de deux planètes de masses infiniment petites, chacune décrivant une ellipse keplérienne autour du corps central. A un certain moment ces deux ellipses se rencontrent, ou passent très près l'une de l'autre, de façon que la distance mutuelle de deux planètes devient très petite; à ce moment leur action perturbatrice mutuelle pourra devenir sensible et les deux orbites subiront des perturbations importantes. Puis de nouveau les planètes décriront des ellipses, mais qui différeront beaucoup des anciennes. Considérons le cas limite où ces ellipses se rencontrent et la distance de deux planètes devient nulle. Pour que le système soit périodique, il faut que chaque orbite admette au moins deux chocs. Mais d'après nos résultats une telle orbite, admettant deux chocs binaires, doit être plane. Une orbite pareille admettant plus de deux chocs binaires ne peut pas exister, sauf si le mouvement est rectiligne.

(¹) *Méthodes nouvelles*, t. III, p. 363-371.

CHAPITRE IV.

CHOCS MULTIPLES.

On peut considérer un choc multiple comme limite d'un certain nombre des chocs binaires. Pour le démontrer étudions un choc triple, qui peut être considéré comme limite des deux chocs binaires, se produisant au même instant. En effet, rapportons le mouvement des deux corps p et p' de masses m et m' au troisième corps O de masse m_0.

Reprenons le système (I), du dernier chapitre

$$(1)\qquad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \qquad \frac{d\omega_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{d\xi'_i}{du} = \frac{\partial H}{\partial \omega'_i}, \qquad \frac{d\omega'_i}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \xi'_i}$$

$$(i = 1, 2),$$

$$(2)\qquad H = \xi\xi'\left[\mu\omega'^2 + \mu'\omega^2 - 2\mu_0\sum_1^2 \omega_i\,\omega'_i - E\,\omega^2\omega'^2\right]$$
$$- a\xi'\omega^2 - a'\xi\omega'^2 - a''\frac{\xi\omega^2\xi'\omega'^2}{\Delta} = 0.$$

Calculons les dérivées partielles de H par rapport à ξ_i, ω_i, ξ'_i, ω'_i en utilisant la relation $H = 0$. On trouve

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \xi'\omega'^2\left[a\frac{\xi_i}{\xi^2} - a''\xi\omega^2\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial\xi_i}\right],$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi'_i} = \xi\omega^2\left[a'\frac{\xi'_i}{\xi'^2} - a''\xi'\omega'^2\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial\xi'_i}\right],$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega'_i} = \xi\xi'[2\mu'\omega_i - 2\mu_0\omega'_i - 2E\omega'^2\omega_i]$$
$$- 2a'\xi\omega_i - \frac{2a''\xi\xi'\omega'^2}{\Delta}\omega_i - a''\xi\omega^2\xi'\omega'^2\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial\omega_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega'_i} = \xi\xi'[2\mu\omega'_i - 2\mu_0\omega_i - 2E\omega^2\omega'_i]$$
$$- 2a\xi'\omega'_i - \frac{2a''\xi\xi'\omega^2}{\Delta}\omega'_i - a''\xi\omega^2\xi'\omega'^2\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial\omega'_i}.$$

Si l'on applique les mêmes raisonnements que dans le cas ordinaire du choc binaire, on trouvera par les mêmes développements la condition du choc binaire, seulement avec les nouvelles variables.

On trouvera pour un choc binaire au temps $u = u_0$ les conditions

$$\omega_i = \alpha\xi_i + \beta\xi'_i + \gamma\omega'_i \qquad (i = 1, 2), \tag{3}$$

α, β, γ des fonctions symétriques en ξ_i, ξ'_i et ω'_i, invariables par le changement circulaire des indices et développables suivant les puissances entières et croissantes de $(u - u_0)$. On aura

$$\alpha = \sum_1^\infty \alpha_n(u - u_0)^u, \qquad \beta = \sum_3^\infty \beta_n(u_n - u_0)^u, \qquad \gamma = \sum_2^\infty \gamma_n(u - u_0)^u;$$

si entre les deux équations (3) on élimine $(u - u_0)$ on trouve la condition du choc (comme on a vu le mouvement est plan, car on a deux chocs binaires). En calculant les coefficients par la même méthode que pour le cas simple du choc binaire et en utilisant les formules des dérivées partielles de H on trouve pour les premiers coefficients

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{-a\xi'\omega'^2}{\xi^2}, \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{-2a\mu_0\xi'^3\omega'^2\displaystyle\sum_1^2\xi'_j\omega'_j}{\xi^3} + \dfrac{a(\mu\xi - a)\displaystyle\sum_1^2\xi'_j\omega'_j}{\xi^2}, \quad \ldots, \\[2ex] \beta_1 = 0, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_3 = 0, \qquad \beta_4 = 0, \qquad \ldots, \\[1ex] \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = a\mu_0\omega'^2\dfrac{\xi'^2}{\xi}, \qquad \ldots. \end{array}\right. \tag{4}$$

De même pour le second choc à l'instant $u = u_1$ on aura les conditions

$$\omega'_i = \alpha'\xi_i + \beta'\xi'_i + \gamma'\omega_i \qquad (i = 1, 2), \tag{5}$$

les α', β', γ', fonctions symétriques en ξ_i, ω_i et ξ'_i, invariables par le changement circulaire des indices et développables en séries entières et croissantes de $(u - u_1)$. En éliminant $(u - u_1)$ entre les deux équations (5) on trouve la condition du choc binaire à l'instant u_1.

On trouve de la même manière

$$\alpha' = \sum_{3}^{\infty} \alpha'_n (u - u_1)^n, \qquad \beta' = \sum_{1}^{\infty} \beta'_n (u - u_1)^n, \qquad \gamma' = \sum_{2}^{\infty} \gamma'_n (u - u_1)^n,$$

les premiers coefficients seront

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = \alpha'_4 = 0, \qquad \ldots, \\ \beta'_1 = -\dfrac{a'\xi\omega^2}{\xi'^2}, \\ \beta_2 = -\dfrac{a'\mu_0\xi^2\omega^2}{\xi'^3} \displaystyle\sum_1^2 \xi'_j\omega_j - a'(\xi'\mu' - a') \sum_1^2 \xi_j\omega_j \dfrac{\omega^2}{\xi^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_1 = 0, \qquad \gamma'_2 = a'\mu_0\omega^2 \dfrac{\xi^2}{\xi'}, \qquad \ldots. \end{array} \right.$$

Reprenons les deux systèmes d'équations (3) et (5) et éliminons entre ces équations ω'_1 et ω'_2, on aura

$$(7) \qquad \frac{\alpha'\gamma + \alpha}{1 - \gamma\gamma'} \xi_i - \frac{\beta'\gamma + \beta}{1 - \gamma\gamma'} \xi'_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2);$$

de ces équations on tire

$$(8) \qquad \frac{\alpha'\gamma + \alpha}{1 - \gamma\gamma'} = \frac{\omega_1\xi'_2 - \omega_2\xi'_1}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta'\gamma - \beta}{1 - \gamma\gamma'} = \frac{\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1};$$

de même si entre les systèmes (3) et (5) on élimine ω_1 et ω_2 on trouve

$$(9) \qquad \frac{\alpha\gamma' - \alpha'}{1 - \gamma\gamma'} \xi_i \quad \frac{\beta\gamma' + \beta'}{1 - \gamma\gamma'} \xi'_i = \omega'_i \qquad (i = 1, 2),$$

de ces équations on tire

$$(10) \qquad \frac{\beta\gamma' - \beta'}{1 - \gamma\gamma'} = \frac{\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha\gamma' + \alpha'}{1 - \gamma\gamma'} = -\frac{\xi'_1\omega_2 - \xi'_2\omega_1}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1},$$

d'ou de (8) et (10) on peut tirer

$$(11) \qquad \frac{\beta'\gamma - \gamma' - \alpha\gamma' - \alpha'}{1 - \gamma\gamma'} = \frac{\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1 - \xi_1\omega'_2 - \xi'_2\omega'_1}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1} = \frac{C}{\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1},$$

C est la constante des aires.

Les systèmes (8) et (10) remplacent les systèmes (3) et (5). Supposons qu'on fait tendre u_0 vers u_1, on aura comme limite un choc triple. Si l'on reprend l'équation (11) on voit d'après les valeurs des coefficients α_i, β_i, γ_i, α'_i, β'_i, et γ'_i que le premier membre contient en facteur, lorsque u_0 tend vers u_1, $(u - u_0)^4$, donc si l'on prend comme origine du mouvement l'instant $u = u_0$ le premier membre est nul, il faut donc que $C = 0$, c'est-à-dire pour l'existence d'un choc triple il faut que la constante des aires soit nulle. D'autre part nous avons trouvé que le mouvement est plan. On a donc les deux conditions trouvées par M. Sundman.

Cherchons les autres conditions du choc triple. Pour cela il suffit de réduire d'une équation, qui indique la condition $C = 0$, les systèmes (8) et (10), par exemple la deuxième du système (10). Il reste trois conditions; si l'on élimine $(u - u_0)$ on aura les deux conditions restantes du choc triple.

Remarque. — Pour l'existence d'un choc triple il faut que les variables initiales remplissent trois conditions; en effet, comme le mouvement est plan, il faut que les coordonnées $x(t - t_0) = 0$, $y(t - t_0) = 0$, $x'(t - t_0) = 0$, $y'(t - t_0) = 0$, si l'on élimine $(t - t_0)$ entre ces quatre équations on aura les trois relations cherchées.

Calculons ces conditions. Si dans les systèmes (8) et (10) on développe les coefficients suivant les puissances $(u - u_0)$ et $(u - u_1)$ et l'on fait tendre u_1 vers u_0, on trouve

$$\alpha_1(u - u_0) + \alpha_2(u - u_0)^2 + \ldots = \frac{\| \omega_i, \xi'_i \|}{\| \xi_i, \xi'_i \|} = A,$$

$$\beta'_1(u - u_0) + \beta'_2(u - u_0)^2 + \ldots = \frac{\| \xi_i, \omega'_i \|}{\| \xi_i, \xi'_i \|} = C,$$

$$\beta'_1 \gamma_2 (u - u_0)^3 + (\beta'_1 \gamma_3 + \beta'_2 \gamma_2)(u - u_0)^4 + \ldots = \frac{\| \xi_i, \omega_i \|}{\| \xi_i, \xi'_i \|} = B.$$

Si l'on tire la valeur de $(u - u_0)$ de la première équation et l'on porte cette valeur dans les deux autres équations, on aura les deux conditions cherchées :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta'_1 \gamma_2 \frac{A^3}{(\alpha_1)^3} \left[1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1)^2} A + \ldots \right]^3 \\ & \qquad + (\beta'_1 \gamma_3 + \beta'_2 \gamma_2) \frac{A^4}{(\alpha_1)^4} \left[1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1)^2} A + \ldots \right]^4 + \ldots = B, \\ & \beta'_1 \frac{A}{\alpha_1} \left[1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1)^2} A + \ldots \right] + \beta'_2 \frac{A^2}{(\alpha_1)^2} \left[1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_1)^2} A + \ldots \right]^2 + \ldots = C. \end{aligned} \right.$$

Si l'on revient aux variables primitives x_i, p_i, x'_i et p'_i, il faudra remplacer les α_1, α_2, β'_1, β'_2, γ_2, A, B et C par les valeurs suivantes :

$$\alpha_1 = -\frac{ar'}{r^2p^4},$$

$$\alpha_2 = -\frac{2a\mu_0 r'^2 p'^2}{r^3p^6p'^2}\sum_{j=1}^{2}\left(x_jp^2 - 2p_j\sum_{k=1}^{2} x_kp_k\right) - \frac{a(\mu r p^2 - a)\,\Sigma x'_jp'_j}{r^2p^4p'^2};$$

$$\gamma_2 = a\mu_0 r'^2 p'^2.$$

$$\beta'_1 = -\frac{a'r}{r'^2p'^4},$$

$$\beta'_2 = -\frac{2a'\mu_0 r^2p^2}{r'^3p'^6p^2}\sum_{j=1}^{2}\left(x'_jp'^2 - 2p'_j\sum_{k=1}^{2} x'_kp'_k\right)$$

$$-\frac{a'(\mu' r' p'^2 - a')\sum_{j=1}^{2} x_jp_j}{p^2r'^2p'^4},$$

$$A = \frac{1}{p^2}\frac{\| p_i,\ x'_ip'^2 - 2p'_i\Sigma x'_jp'_j \|}{\| x_ip^2 - 2p_i\Sigma x_jp_j,\ x'_ip'^2 - 2p'_i\Sigma x'_jp'_j \|},$$

$$B = \frac{\| x_i,\ p_i \|}{\| x_ip^2 - 2p_i\Sigma x_jp_j,\ x'_ip'^2 - 2p'_i\Sigma x'_jp'_j \|},$$

$$C = \frac{\| x_ip^2 - 2p_i\Sigma x_jp_j,\ p'_i \|}{\| x_ip^2 - 2p_i\Sigma x_jp_j,\ x'_ip'^2 - 2p'_i\Sigma x'_jp'_j \|}.$$

$$(p^2 = \Sigma p_i^2; \qquad p'^2 = \Sigma p_i'^2)$$

Si l'on arrête le développement (12) aux premiers termes on aura des formules assez simples :

$$(12') \qquad r^3p^4A = r'^3p'^4C \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a'\mu_0}{a^2}\frac{p'}{p_2}}\,\frac{r^2p'^3}{r'}A = \sqrt[3]{B}.$$

Cas des n corps. — Passons au cas général des n corps et supposons que les seuls points singuliers sont les chocs des corps entre eux.

Si l'on ne considère que les chocs binaires on démontre facilement le théorème suivant :

Le cas général des n corps, abstraction faite des autres points singuliers, admet au maximum 2n — 5 chocs binaires pour les orbites dans l'espace et 2n — 4 chocs binaires pour les orbites planes, sauf les orbites périodiques.

En effet soient x'_j et p'_j ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$; $j = 1, 2, 3$) les coordonnées canoniques des corps des masses $-m_i$ rapportées au corps m_0. Pour chaque choc binaire on aura un système des conditions de la forme

$$A_1^k x_j^1 + A_2^k x_j^2 + \dots + A_{n-1}^k x_j^{n-1} + B_1^k p_j^1 + \dots + B_{n-1}^k p_j^{n-1} = 0$$
$$(j = 1, 2, 3).$$

Supposons qu'on a plus de $(2n-5)$ chocs par exemple $(2n-4)$ on peut donc faire varier l'indice k de 1 à $(2n-4)$. On aura donc $(2n-4)$ systèmes des trois équations de condition.

Si l'on prend l'ensemble des équations ayant l'indice j fixe, par exemple $j=1$, on peut éliminer entre ces $(2n-4)$ équations $(2n-5)$ variables, par exemple : $x_1^1 \dots x_1^{n-1}, p_1^1, \dots p_1^{n-1}$. Il restera donc une équation de la forme

$$\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 = 0; \tag{1}$$

si l'on répète le même raisonnement pour les indices $j=2$ et $j=3$, comme les coefficients A_h^k et B_h^k sont les mêmes pour $j = 1, 2, 3$, on aura deux autres équations

$$\alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_1 x_3^1 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_3 x_3^3 = 0. \tag{3}$$

On a trois équations homogènes (1), (2), (3) à trois inconnues; pour qu'elles admettent une solution il faut que

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que les vecteurs x^1, x^2 et x^3 se trouvent dans le même plan. Si l'on élimine les autres variables, on trouve finalement que tous les vecteurs x^k, p^k se trouvent dans le même plan. Le mouvement est donc plan.

D'une façon analogue on démontre le théorème pour le cas du plan.

Si l'on introduit les chocs triples, quadruples, etc., et en se basant sur le théorème qu'un choc d'ordre m peut être considéré comme une limite de $(m-1)$ chocs binaires se produisant au même instant, on peut démontrer le théorème suivant :

Si le système des n corps admet s_1 chocs binaires, s_2 chocs triples, ... et s_{m-1} chocs d'ordre m, les s_i vérifient toujours une certaine inégalité, à savoir

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + (m-1)s_{m-1} \leqq 2n-3 \qquad \text{(pour l'espace)}$$

et

$$s_1 + 2s_2 \quad \dots\dots\dots \quad (m-1)s_{m-1} \leqq 2n-4 \qquad \text{(pour le plan).}$$

Si l'on applique le même raisonnement au cas des $n-2$ corps attirés par deux centres fixes, on aura pour l'espace

$$\sum_{1}^{m-1} is_i \leqq 2n-4.$$

et pour le mouvement plan

$$\sum^{m-1} is_i \leqq 2n-3.$$

Vu et approuvé :
Paris, le 17 avril 1932.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 17 avril 1932.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.
S. CHARLETY.