THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

WLADIMIR MARGOULIS

Les abaques à transparent orienté ou tournant. Théorie générale de la représentation plane des équations. Applications à l'art de l'ingénieur

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1931

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1931__131__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SÉRIE A
N° DE SÉRIE 219.
N° D'ORDRE 243.

BIBLIOTHÈQUE
Mathématiques
Recherche
INTERUNIVERSITAIRE JUSSIEU

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR

le Titre de Docteur de l'Université de Paris

PAR

Wladimir MARGOULIS
INGÉNIEUR

1re THÈSE. — **Les abaques à transparent orienté ou tournant. Théorie générale de la représentation plane des équations. Applications à l'Art de l'Ingénieur.**

2e THÈSE. — **Propositions données par la faculté.**

soutenues le 10 Juillet 1931 devant la Commission d'examen

Jury	MM. MARCHIS	Président
	FRÉCHET	Examinateurs
	TOUSSAINT. . .	Examinateurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen ..... C. MAUGUIN, *Professeur*, Physique du globe.
Doyen honoraire ..... M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires
- H. LE CHATELIER.
- H. LEBESGUE.
- A. FERNBACH.
- A. LEDUC.
- E. HEROUARD ...

Professeurs .....

Emile PICARD	Analyse superieure et algebre supérieure.
G. KŒNIGS	Mecanique physique et experimentale.
E. GOURSAT	Calcul differentiel et calcul integral.
P. JANET	Electrotechnique generale.
F. WALLERANT ..	Mineralogie.
P. PAINLEVE	Mécanique analytique et mecanique céleste.
Gabriel BERTRAND	Chimie biologique
Mme P. CURIE	Physique generale et radioactivite.
M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organises).
G. URBAIN	Chimie génerale.
Emile BOREL ..	Calcul des probabilites et Physique mathém.
L. MARCHIS	Aviation
Jean PERRIN ...	Chimie physique.
Remy PERRIER ..	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM	Physique
M. MOLLIARD ...	Physiologie vegetale.
E. CARTAN	Geometrie superieure.
L. LAPICQUE .. .	Physiologie generale.
E. VESSIOT	Theorie des fonctions et theorie des transformations
A. COTTON	Physique generale.
J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY...	Physique.
Charles PEREZ...	Zoologie
Leon BERTRAND ..	Geologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU	Theories chimiques.
E. RABAUD	Biologie experimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparee.
E. BLAISE	Chimie organique.
P. A. DANGEARD..	Botanique.
Paul MONTEL	Mecanique rationnelle.
P. WINTREBERT..	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ ..	Biologie maritime
G. JULIA	Mathematiques générales.
A. JOB	Chimie generale.
A. MAILHE	Etude des combustibles.
L. LAUTARD	Geographie physique et geologie dynamique.
Eugene BLOCH ..	Physique theorique et physique céleste.
Henri VILLAT . ..	Mecanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	Geologie
P. PASCAL	Chimie minerale
Leon BRILLOUIN	Theories physiques.
V. AUGER	Chimie appliquée.
F. ESCLANGON ...	Astronomie

E. PÉCHARD.....	Chimie (Enseigt P. C. N.).
M. GUICHARD	Chimie minerale.
A. GUILLET	Physique
C. MAUGUIN	Mineralogie.
L. BLARINGHEM ..	Botanique
A. MICHEL-LEVY..	Pétrographie.
A. DEREIMS	Geologie
A. DENJOY	Calcul diff. et integral.
H. BENARD	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS	Physique
G. BRUHAT	Physique
H. MOUTON	Chimie physique.

L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organises)
ROBERT-LEVY	Zoologie
L. DUNOYER	Optique appliquee.
A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
V. DEBIERNE	Radioactivite
M. FRECHET	Calcul des Probabilités et Physiques mathématiques.

Secrétaire ..... A. PACAUD .....

34814 a

21 AOUT 1992

A la Mémoire de mon Père,

A Monsieur Maurice d'OCAGNE,

Membre de l'Institut
Fondateur de la Nomographie

comme expression de ma plus profonde reconnaissance
pour les si précieux encouragements
qu'il m'a toujours prodigués au cours de mon travail.

PREMIÈRE PARTIE

Théorie générale de la représentation plane des équations

AVANT-PROPOS

Les principaux types d'abaques employés actuellement comprennent des tracés portés soit sur un plan unique, soit sur deux ou plusieurs plans superposés.

Les premiers constituent les abaques à *entrecroisement* ; les seconds comprennent les abaques à *points alignés* les abaques *hexagonaux* et les abaques à *images logarithmiques*.

Parmi ces derniers types, seuls les abaques à points alignés, dont le principe a été donné par M. d'Ocagne en 1884, ont reçu de très nombreuses applications. Les abaques hexagonaux qui, d'ailleurs, ne représentent que des équations pouvant déjà être figurées par des abaques à entrecroisement, ont été utilisés par leur auteur seulement.

Les abaques à images logarithmiques, inventées en 1889 par M. Mehmke, et qui permettent la représentation d'équations assez compliquées, ne pouvant pas être figurées par les autres systèmes d'abaques, n'ont, malgré leur diffusion par les ouvrages de M. d'Ocagne, reçu jusqu'à présent, que je sache, aucune application pratique.

De nombreux auteurs, à la suite de M. d'Ocagne, ont publié des travaux dans lesquels la méthode des points alignés a été étudiée de la façon la plus détaillée, mais, depuis l'ouvrage de M. Mehmke, c'est-à-dire depuis *quarante* ans, aucun travail n'a été consacré à d'autres types d'abaques (1).

Il en résulte que M. Goodseels pouvait écrire avec raison (2) : « On peut presque dire de la belle méthode par points alignés qu'elle constitue aujourd'hui la Nomographie proprement dite. »

Ajoutons que la façon particulière dont chacune des méthodes citées ci-dessus était exposée n'établissait entre elles aucun lien. Bien au contraire, on peut dire qu'on avait l'impression de se trouver en présence de procédés complètement distincts.

Cependant, ces méthodes étaient loin d'avoir épuisé les possibilités de la Nomo-

---

(1) L'ouvrage de M. Goodseels « *Les procédés pour simplifier les calculs, ramenés à l'emploi de deux transversales qui se rencontrent au sein d'une graduation* ». (Bruxelles 1898), dont nous parlerons plus en détail, p. 81, n'aboutit pratiquement qu'à un seul type nouveau d'abaque à points alignés, celui des abaques à équerre.

(2) *Revue des Questions scientifiques*, Bruxelles, janvier 1922.

graphie. Le fondateur de celle-ci, M. d'Ocagne, avait écrit à ce propos (1) : « La considération de la droite mobile, servant à prendre les alignements, et qui peut être supposée tirée sur un plan transparent (2), conduit tout naturellement à l'idée de tracer sur ce transparent, ou même sur plusieurs transparents superposés, des lignes moins simples voire des systèmes d'éléments cotés pouvant donner lieu à des relations de position plus compliquées entre éléments cotés de plus en plus nombreux (3) ; cette indication sommaire suffit à faire entrevoir l'étendue des horizons qui s'ouvrent encore dans le domaine de la nomographie. »

C'est la partie de ce domaine, restée inexplorée jusqu'à présent, que je me propose d'étudier dans le présent travail en déterminant, au moyen d'une théorie générale, les caractères analytiques et géométriques des abaques à plans mobiles comportant des éléments cotés ou non cotés quelconques, et en fondant, au moyen de la même théorie, en un ensemble cohérent, les anciennes et les nouvelles méthodes.

On peut se demander, cependant, si les anciennes méthodes ne suffisent pas à tous les cas de la pratique ; dans ce cas, l'étude d'autres systèmes d'abaques ne présenterait qu'un intérêt purement théorique.

La meilleure preuve de l'insuffisance des méthodes nomographiques employées jusqu'à présent en face des problèmes de la pratique est donnée par les très nombreux abaques que j'ai établis en vue de la solution de différents problèmes de l'art de l'ingénieur, et dont aucun n'utilise les méthodes nomographiques existantes.

Je tiens à faire remarquer ici que le travail que je présente n'est pas né du désir d'apporter une contribution à la Nomographie, mais a été développée au fur et à mesure que, dans ma pratique d'ingénieur, j'ai dû établir, pour résoudre différents problèmes, des nouveaux types d'abaques.

Je donnerai plus loin (v. pp. 33, 71, 75, 81, 83) plusieurs exemples d'équations déjà représentées par des abaques à points alignés, hexagonaux et à points équidistants, qui montreront la simplification introduite par l'emploi de transparents orientés ou tournant portant des systèmes cotés.

Je ne considère pas les abaques, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent, seulement comme un moyen de calculer rapidement un terme d'une formule. J'estime qu'à côté de la discussion *analytique* (par le calcul), *graphique* (par des constructions géométriques) d'une équation, la discussion *nomographique* peut prendre une place importante.

J'en ai donné de nombreux exemples dans mes abaques, et notamment dans l'étude du *Rayon d'action d'un avion et d'un dirigeable* (l'Air, 1921 et 1928), dans mon *Abaque général pour l'établissement d'un avion ou d'un hélicoptère* (Gauthier-Villars, 1922), dans un travail sur la *Circulation d'eau dans les chaudières* (Vapeur et Force motrice. Mai 1927), etc., etc.

Dans ces travaux, toute la discussion est effectuée au moyen d'abaques à transparent orienté représentant l'équation fondamentale et permettant l'introduction de relations expérimentales entre les différentes variables.

En pratique, l'ingénieur doit très souvent déterminer les valeurs de plusieurs variables, de façon à obtenir la meilleure solution, et nous croyons que, dans ce

---

(1) « Calcul graphique et Nomographie » 3e édit. 1924, p. XXV.

(2) L'auteur a en vue sa méthode des points alignés.

(3) Dans son traité de Nomographie (1re éd., 1899, p. 393 et 397), M. d'Ocagne, se plaçant au point de vue morphologique, a donné, de façon précise, la définition la plus générale de tels abaques. Il en avait d'ailleurs ébauché l'idée dans une communication faite en 1893 à l'Académie des Sciences (C. R., t. 117, p. 216 et 277) ; voir p. 24.

La théorie morphologique de M. d'Ocagne donne une classification générale, capable de prévoir tous les types d'abaques, mais, d'après l'auteur lui-même : « sans avoir égard à la nature géométrique spéciale des lignes qui y interviennent, non plus qu'à la forme des équations correspondantes. (Traité de Nomographie, 2e édit. p. 428).

domaine, la nomographie peut lui rendre des services inappréciables et beaucoup plus importants que ceux qu'elle rend comme instrument de calcul rapide.

L'extension que j'ai donnée aux méthodes nomographiques permet de résoudre facilement ces problèmes de maxima et minima, alors que leur solution analytique serait tellement laborieuse qu'on n'y aurait jamais recours. On ne saurait jamais assez dire que, dans 90 cas sur 100, si l'ingénieur ne peut pas résoudre instantanément un problème au moyen de procédés scientiques, il le résout au moyen de ce fameux « bon sens » qui lui donne, en effet, une solution instantanée, mais bien souvent erronée.

Cependant, pour rendre ces services, les abaques doivent répondre à deux conditions fondamentales, qui sont :

la suppression des systèmes surabondants et la solution par une seule opération (voir p. 1 ce que nous entendons par opération).

En effet, pour pouvoir se rendre compte facilement de l'influence de la variation d'une variable sur la valeur d'une autre variable, ce qui constitue, en somme, le but de toute discussion d'une équation, il faut que ces variables soient *directement* reliées par une liaison géométrique. L'existence de systèmes surabondants et la nécessité de plusieurs opérations sont, évidemment, en contradiction avec cette condition.

Il me reste à dire quelques mots sur la *précision* des méthodes nomographiques.

Ainsi que M. d'Ocagne l'a montré, il existe quatre formes de contacts ponctuels et trois formes de contacts tangentiels qui servent à donner la *position* convenable aux différents éléments constitutifs des abaques et à lire la *solution* (voir p. 2 une note sur la notion des contacts).

En rangeant ces contacts dans l'ordre croissant de la précision qu'ils permettent de réaliser, on trouve, en tenant, bien entendu, compte de l'interpolation qu'il y aura presque toujours lieu de faire pour les éléments cotés du contact :

Contacts tangentiels : entre deux courbes cotées ;
— entre une courbe cotée et une courbe non cotée ;
— (1) entre deux courbes non cotées.
Contacts ponctuels : entre une courbe cotée et un réseau ;
— (1) entre une courbe non cotée ou une échelle graduée et un réseau ;
— entre une courbe cotée et une échelle graduée ;
— (1) entre une courbe non cotée ou une échelle graduée et une échelle graduée.

Cette classification s'applique surtout à chacun des modes de contact : ponctuel ou tangentiel, car si, d'une façon générale, on peut dire que les contacts tangentiels sont moins précis que les contacts ponctuels, il est difficile de comparer à ce point de vue, par exemple, un contact tangentiel entre une courbe cotée et une courbe non cotée et un contact ponctuel entre une courbe cotée et un réseau.

Un autre facteur qui influe sur la précision consiste dans l'inégalité des déformations du fond et du transparent. Un choix judicieux des papiers constituant le fond et le transparent, ainsi que la conservation à l'abri de l'humidité et du soleil peuvent remédier dans une certaine mesure à ces inconvénients (2).

---

(1) On aura un double contact tangentiel (désigné par ⊨) si les deux courbes sont des droites et double contact ponctuel, si l'un des éléments est une échelle graduée et l'autre, soit une échelle gradué, soit un réseau.

(2) On peut également employer, pour le fond le même papier transparent que pour le « transparent » lui-même et effectuer les lectures en posant ce fond sur un papier blanc.

D'autre part quand les éléments cotés et non cotés du transparent se réduisent à des

Sous ce rapport, il est évident que la plus grande précision est obtenue avec les abaques à plan unique, c'est-à-dire les vieux abaques à entrecroisement.

Quoi qu'il en soit, il est certain que les abaques à points alignés, dont la très grande majorité utilise des contacts ponctuels entre une courbe non cotée et une échelle graduée (mais qui, d'une façon plus générale, peuvent comporter le remplacement de l'échelle graduée par un réseau coté), sont ceux qui donnent lieu à la plus grande précision, qui tient non seulement à la forme du contact, mais également au fait qu'il n'y a pas à craindre la déformation du transparent, puisqu'en pratique, on se sert généralement d'une règle pour tracer l'alignement.

Mais on se rend immédiatement compte, en examinant la classification ci-dessus des contacts, que la précision est toujours obtenue au détriment de l'utilisation du contact au point de vue du *nombre* des variables qu'il comporte. Plus ce nombre est élevé (il est égal au maximum à trois), moins la précision est grande.

Or, au point de vue de la *discussion nomographique des équations* auquel nous nous plaçons, il est du plus grand intérêt de réaliser des contacts à grand nombre de variables — et notamment des contacts entre une ligne cotée et un réseau, c'est-à-dire entre trois faisceaux cotés, — car ce sont ces contacts qui permettent de se rendre compte sous une forme très familière, puisque c'est celle d'un abaque à entrecroisement, et par simple lecture, de l'influence réciproque de trois variables En effet, quand un contact porte sur plusieurs variables, il est possible de suivre par simple lecture, et non pas au moyen de nouvelles opérations, les variations corrélatives de ces variables ; c'est là un avantage appréciable en faveur de l'utilisation de tels contacts.

Faisons encore remarquer que l'on exagère généralement la précision dans la solution des problèmes de l'art de l'ingénieur. En effet, les hypothèses qui ont servi à établir les équations représentées par les abaques donnent lieu à des erreurs autrement importantes que celles dues aux abaques eux-mêmes. Dans la grande majorité des cas, et quel que soit le type de l'abaque, il sera toujours très facile d'obtenir dans son tracé et emploi une précision suffisante et, très souvent, il sera préférable de sacrifier dans certaines limites cette précision — par l'emploi, par exemple, d'un format réduit commode à manier — afin de réaliser une plus grande *rapidité* dans son utilisation.

La question de la *facilité d'établissement* (1) des abaques est une question d'espèce : tout dépend de l'importance du problème à résoudre. En effet, peu importe le prix d'une machine-outil, si la série étant suffisamment grande, on peut l'amortir rapidement. Or, la nomographie n'est pas autre chose que la science de fabrication d'une certaine classe de machines à calculer et de machines à raisonner (2). Ainsi que je l'ai dit plus haut, et que je le démontrerai par la suite au moyen de nombreux

---

échelles graduées et à des courbes isolées ne se coupant pas entre elles, on peut employer pour le plan mobile, le même papier non transparent que pour le fond; il suffit de découper le plan mobile suivant les échelles et les courbes non cotées et disposer les graduations des premières à l'intérieur du polygone ainsi formé.

(1) D'après M. Luckey, on attache actuellement en Allemagne beaucoup d'importance à cette question. M. Luckey cite notamment un travail de M. Hak (Ztsch. für angewandte Mathematik u. Mechanik, 1921, 1922 et Annales des Ponts et Chaussées, 1923, p. 375) qui n'hésite pas à introduire dans les abaques à points alignés, des systèmes surabondants, afin de supprimer le tracé d'échelles courbes. De même M. Kretschmer considère la facilité du tracé, comme un avantage important d'une certaine catégorie d'abaques à transparent orienté, qu'on peut établir en se servant uniquement d'un papier logarithmique (v. p. 83).

(2) J'emploie le terme peut-être impropre, de « machine à raisonner », pour désigner des abaques qui permettent de remplacer le raisonnement par des opérations, pour ainsi dire mécaniques, de glissement et de lecture. Ainsi il m'arrive très souvent, pour résoudre qualitativement une question quelconque, de me représenter dans l'esprit l'abaque correspondant et de trouver la solution par un déplacement imaginaire du transparent sur le fond.

exemples, les nouvelles méthodes nomographiques permettent quelquefois d'embrasser l'ensemble d'un problème d'une façon à laquelle ne peut prétendre aucune autre méthode ; encore faut-il que le problème en vaille la peine.

Dans les cas compliqués (1), la difficulté ne réside pas dans le tracé même des systèmes cotés mais surtout dans la mise des équations sous une forme convenable et dans le choix de la disposition des systèmes cotés.

Pour trouver rapidement l'une et l'autre il faut avoir une grande pratique.

C'est précisément dans le but de répandre l'emploi de mes nouveaux types d'abaques, et de venir en aide à tous ceux qui n'ont pas les loisirs d'acquérir une grande pratique de la Nomographie, que j'ai fondé, en 1922, un Bureau d'Études nomographiques (2) qui se charge de l'établissement des abaques.

D'autre part, j'estime avec M. Goodseels (v. le renvoi 2 de la page IX) qu'il serait de la plus grande utilité d'introduire dans l'enseignement scientifique des cours de Nomographie, qui pourraient avantageusement remplacer ceux de géométrie descriptive dont l'intérêt pratique est des plus réduits (3).

Je vais à présent résumer la première partie de ce travail.

J'examine, d'une façon générale, les formes des équations susceptibles d'être traduites par des abaques, et je montre que *toutes* ces équations peuvent être ramenées à une forme unique, dont on pourra déduire directement la structure géométrique et le tracé de l'abaque. En effet, pour qu'une équation

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{1}$$

soit représentable pour un abaque, il faut qu'elle puisse être mise sous la forme

$$F(M, N, z_n) = 0, \tag{2}$$

ou qu'elle résulte de l'élimination de paramètres et de variables communes entre des équations de la forme (2).

M et N sont des fonctions spéciales des variables $z_1 \ldots z_{n-1}$ et des paramètres ; elles dépendent du système des coordonnées adopté, du nombre des plans et du nombre de degrés de liberté entre ces plans. J'ai adopté des coordonnées cartésiennes rectangulaires, mais il est évident que toute équations pourra être représentée sous la même forme en utilisant un système quelconque de coordonnées ; seulement, les fonctions M et N et la façon de dissocier dépendront du système des coordonnées

Cette théorie a l'avantage de ramener à une forme unique *toutes* les équations représentables par des abaques, d'englober ainsi en une seule méthode les méthodes déjà existantes et de fonder en même temps un procédé général de construction des abaques.

Je divise les abaques en deux groupes : les abaques à *contacts ponctuels* (chapitre premier) et les abaques à *contacts tangentiels* (chapitre II). Les premiers comprennent des contacts entre des points ou des points et des courbes ; les seconds sont constitués par des contacts de deux courbes tangentes entre elles. Il n'existait pas, jusqu'à présent, d'abaques de ce type ; plusieurs des abaques que j'ai établis

---

(1) Nous ne voulons pas dire par là, que nos nouveaux types d'abaques à transparent, portant des systèmes cotés ou non cotés, diffèrant d'une droite, soient particulièrement difficiles à établir ; au contraire, très souvent les opérations de dissociation, de disjonction et du tracé sont moins compliquées pour les nouveaux types que pour les anciens.

(2) Un bureau analogue avait été établi et dirigé pendant la guerre à la Section technique de l'Artillerie française par M. d'Ocagne, qui a publié quelques-uns de ses travaux dans son ouvrage : « *Principes usuels de Nomographie avec application à divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation* » (Gauthier-Villars, 1920).

(3) J'en parle par expérience, ayant fait des études dans les Universités belges, où l'enseignement de la Géométrie descriptive avait pris une importance vraiment exagérée.

pour la résolution de problèmes d'aviation constituent les premiers exemples de ces abaques.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode d'établissement des abaques que j'illustre par plusieurs exemples.

J'étudie dans les chapitres IV et V, au moyen de la théorie générale, les types d'abaques employés jusqu'à présent, et notamment les abaques à points alignés de M. d'Ocagne, les abaques hexagonaux de M. Lallemand, les abaques à images logarithmiques de M. Mehmke et, enfin, les abaques à points équidistants de MM. Gercevannof et Luckey.

Je termine par une note sur la dissociation, la disjonction, la représentation simple et composée d'une représentation plane. Ces notions, introduites dans la Nomographie par M. d'Ocagne, s'appliquaient seulement aux types d'abaques utilisés jusqu'à présent. Je précise ces notions et je les étends à n'importe quel type d'abaque. Je montre notamment qu'il existe un moyen analytique très simple permettant de savoir si la représentation de l'équation considérée sera simple ou composée. Ce moyen se base sur le nombre de variables et paramètres communs aux équations provenant de la dissociation en vue de sa représentation par l'abaque, de l'équation donnée.

On trouvera aux pages 20 et 42 les listes des abaques que j'ai établis jusqu'à présent, et dont la description constitue la deuxième partie de ce travail. La plupart d'entre eux ont été publiés soit dans les ouvrages : *Résumé des principaux travaux exécutés pendant la guerre au laboratoire Eiffel* et *Etudes sur les hélices aériennes effectuées au laboratoire Eiffel*, que j'ai rédigés alors que j'étais Directeur du Laboratoire aérodynamique Eiffel, soit dans mes ouvrages *Les Hélicoptères* et *Abaque général pour l'établissement d'un projet d'Avion ou d'Hélicoptère*, soit enfin dans des journaux spéciaux.

Quant à la théorie exposée ci-dessous, j'en avais déjà donné quelques éléments dans deux communications à l'Académie des Sciences : *Les abaques à transparent orienté* (C. R., 26 juin 1922) et *Sur la théorie générale des équations représentables par des éléments mobiles* (C. R., 19 mars 1923).

On trouvera à la p. 92 le résumé détaillé de la deuxième partie de ce travail.

Notes préliminaires

A. — Formes des équations représentables par des abaques

Théorème fondamental. — Pour qu'une équation

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

puisse être représentée par un abaque, elle doit pouvoir être mise soit sous la forme

$$F(M, N, z_n) = 0, \tag{1}$$

soit résulter de l'élimination de variables auxiliaires ζ_1, ζ_2, ..., entre des équations de même forme, les termes M et N étant des fonctions des variables $z_1 \ldots z_{n-1}$ et ζ_1, ζ_2, ..., qui dépendent du système de coordonnées employé, du nombre des plans superposés utilisés, du nombre de degrés de liberté entre les plans et du nombre d'opérations nécessaires pour obtenir la solution de l'équation, mais qui se déduisent toutes d'une forme canonique unique (voir p. 9). La démonstration de ce théorème est donnée p. 15.

Nous entendons par *opération* le fait de mettre en place, en vue d'obtenir le contact de résolution, deux des plans formant l'abaque. Le nombre d'opérations, le nombre de plans et le nombre de degrés de liberté constituent des facteurs du même ordre, en ce sens que le nombre d'opérations dépend directement du nombre de plans utilisés pour la représentation, et que chaque nouvelle opération peut être considérée comme un degré de liberté supplémentaire.

Dans le cas le plus général, la mise en place du plan mobile demande deux translations successives (d'un point du plan mobile le long de deux courbes fixées d'avance du plan fixe) et une rotation du plan mobile. Nous conviendrons que cette mise en place constitue une opération unique, et que chaque nouveau déplacement du plan mobile constitue une opération nouvelle.

Nous examinerons principalement les abaques à opération *unique*, tracés sur un ou deux plans, et nous considérerons les abaques à un plan comme un cas particulier — correspondant à o degré de liberté — des abaques à deux plans.

Cette façon de procéder s'impose d'elle-même, pusque la forme

$$F(M, N, z_n) = 0, \text{ où } M = f_{12}.\ N = g_{12} \text{ et } n = 3,$$

est la forme canonique des abaques à un seul plan, dits abaques à *entrecroisement* (1).

Elle nous permettra de classer tous les abaques à un ou deux plans, suivant le nombre — de o à 3 — de degrés de liberté, et de faire correspondre, ainsi que nous l'avons dit plus haut, à chaque nombre de degrés, une forme canonique des fonctions M et N, déduite de la forme générale.

D'autre part, nous montrerons au chapitre III que, dès que l'équation est mise sous la forme (1), le tracé de l'abaque s'en déduit directement.

---

(1) Nous avons déjà exposé cette manière de voir dans un mémoire non publié sur « *Les abaques à transparent orienté* » établi en juin 1922 et dans lequel nous avons étudié en détail les questions traitées dans notre communication sur ces abaques à l'Académie des Sciences.

Après avoir fait remarquer que les méthodes particulières adoptées par les auteurs pour exposer leurs systèmes d'abaques n'avaient pas mis en évidence la relation étroite existant entre tous les systèmes, nous ajoutions : « Or nous avons montré, que la forme canonique

Nous avons dit plus haut que les équations, représentables par des abaques, devaient pouvoir être mises soit sous la forme

$$F(M, N, z_n) = O,$$

soit provenir de l'élimination de variables auxiliaires entre des équations de cette même forme.

Nous dirons que la représentation s'effectue sans dissociation (1), si elle peut se faire sans introduction de variables auxiliaires ; nous dirons que la dissociation est *simple*, *double*, *triple*, si elle exige l'introduction d'une, de deux ou de trois variables auxiliaires.

Dans l'étude des formes des fonctions M et N et des abaques correspondants qui va suivre, nous établirons donc une double classification, basée d'abord sur le nombre d'équations décomposées et, ensuite, sur le nombre de degrés de liberté.

Pour chaque cas, nous donnerons un schéma de l'abaque accompagné de son mode d'emploi, que nous traduisons au moyen du système de notations créé par M. d'Ocagne, et qui constitue à cet effet un langage abrégé extrêmement commode. (Voir ci-dessous, une note sur ce système.)

Remarque. — Dans tous les abaques où il s'agit d'une rotation, nous admettons des *coordonnées cartésiennes rectangulaires*, les expressions de M et N étant autrement généralement trop compliquées pour répondre à des cas pratiques. Mais quand il sera question uniquement des translations, les expressions de M et N sont valables, quel que soit l'angle entre les axes des coordonnées.

On trouvera à la page 44 quelques considérations sur l'emploi des *coordonnées polaires*.

B. — Les contacts et la méthode de notation des abaques de M. d'Ocagne

Nous allons rappeler quelques notions et définitions dues à M. d'Ocagne qui, d'une part, abrègent utilement le langage et, d'autre part, conduisent à une classification rationnelle des abaques. (Voir p. 29.)

§ 1. — Les éléments constitutifs des abaques

Les éléments géométriques constituant un abaque sont soit des éléments cotés, soit des éléments non cotés ou constants.

Un élément, point ou ligne, dont la nature est indéterminée sera représenté

---

générale des équations, représentables par des abaques est : $F(M, N, z_n) = O$, qui est également celle des abaques à entrecroisement.

C'est peut-être, la connaissance de cette phrase, qui a conduit M. Soreau (Revue générale des Sciences, n° du 15/30 septembre 1922) à appeler — abaques à entrecroisement — nos abaques à transparent orienté.

Or on rencontre bien l'entrecroisement, qui est une forme particulière du contact ponctuel (entre une ligne cotée et un réseau), dans les abaques à 1, 2 ou 3 degrés de liberté (et par conséquent dans des abaques à transparent orienté), mais à côté d'autres formes du contact ponctuel, telles que par exemple, l'intersection d'une ligne cotée ou non cotée avec une échelle graduée. L'entrecroisement ne constitue donc en aucune façon une caractéristique essentielle d'un de ces types d'abaques et ne peut prétendre à leur donner son nom.

(1) Voir p. 86. la définition de la dissociation.

par la lettre E, suivie entre parenthèses, s'il s'agit d'un élément coté, des lettres désignant les cotes y afférentes :

$$E\ (z_1,\ z_2 \ldots\ z_n)$$

ou plus simplement :

$$E_{12\cdots n}$$

Un élément non coté, mais dont la nature reste indéterminée sera désigné par O.

Si la nature de l'élément est connue, on remplacera la lettre E par les lettres indiquées dans le tableau ci-dessous :

Tableau I. — Symboles des éléments

Point faisant partie d'un réseau de points à 2 cotes, représentant les variables z_m, z_n	$P\ (z_m, z_n)$ ou P_{mn}
Point faisant partie d'une courbe graduée représentant la variable z_n. .	$P\ (z_n)$ ou P_n
Point placé à l'infini sur une droite représentant la variable z_n. . .	$P_\infty\ (z_n)$
Point non coté	P
Ligne faisant partie d'un faisceau de courbes représentant la variable z_n.	$L\ (z_n)$ ou L_n
Droite faisant partie d'un faisceau de droites représentant la variable z_n.	$D\ (z_n)$ ou D_n
Droite faisant partie d'un faisceau de droites parallèles représentant la variable z_n.	$\Delta\ (z_n)$ ou Δ_n
Cercle faisant partie d'un système de cercles représentant la variable z_n.	$C\ (z_n)$ ou C_n
Cercle faisant partie d'un système de cercles concentriques représentant la variable z_n.	$\Gamma\ (z_n)$ ou Γ_n
Ligne non cotée (index).	I
Droite non cotée (index droit).	I_d
Cercle non coté..	I_c
Échelles binaires (1) :	
Ligne, lieu des points condensés à deux cotes	$\overline{L}\ (z_m, z_n)$ ou $\overline{L}_{mn}$
Ligne faisant partie d'un faisceau de lignes condensées.	$L\ (z_m, z_n)$ ou L_{mn}
Point faisant partie d'un réseau de lignes condensées.	$P[(z_m, z_n), (z_{m'}, z_{n'})]$

(1) Dans la fig. 69, l'échelle binaire (B, D) comprend :

les faisceaux (L_B), (L_D), le faisceau des lignes condensées $(L_{D,B})$;

la ligne Ox des points condensés $(\overline{L}_{D,B})$;

le point a sera désigné par la notation $P\ [(B, D), (l, \theta)]$; il se trouve à l'intersection de deux lignes condensées $(L_{B\ D})$ et $(L_{l,\theta})$.

Note. Les éléments tracés sur le plan mobile (ou transparent) portent un accent ; par exemple P'_n désigne uu point faisant partie d'une échelle graduée en valeur de z_n et tracée sur le transparent.

§ 2. — La notion du contact

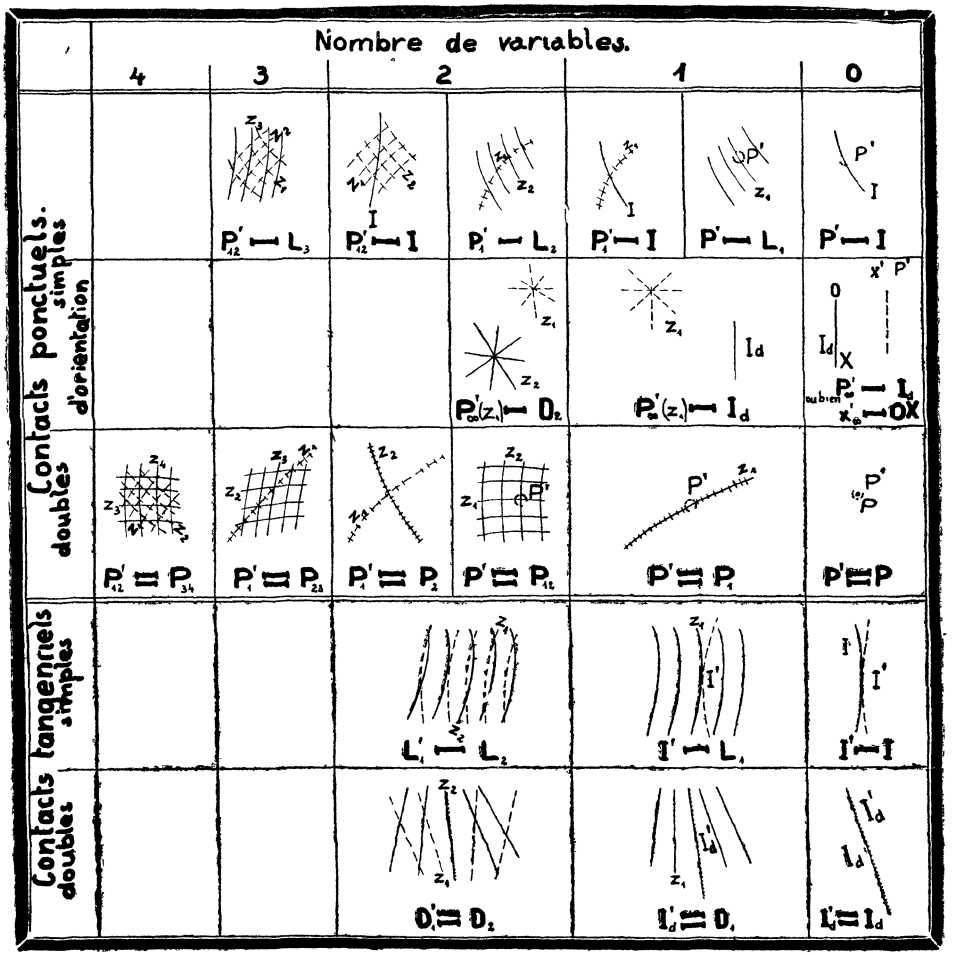
Lorsqu'un point se trouve sur une courbe, ou lorsque deux courbes sont tangentes entre elles, ont dit, en Nomographie, qu'il y a contact entre ces éléments. Pour désigner ce contact, on emploie la notation :

$$E \vdash\!\dashv E'$$

On ne voit pas quelle rélation précise de position pourrait être jugée à vue autre que le contact de deux éléments et, par conséquent, tout mode de représentation graphique plane (1) d'équation à plusieurs variables ne saurait consister qu'en l'établissement ou la constatation de certains contacts entre divers éléments géométriques.

J'ai réuni dans le tableau II les différentes formes de contacts entre éléments tracés sur deux plans superposés, classées d'après le nombre de variables représentées par les éléments en contact.

Tableau II. — Formes de contacts



(1) Dans l'espace on pourrait considérer la rencontre de deux courbes.

Les contacts *ponctuels simples* sont constitués par la coïncidence d'un point et d'une courbe. On obtient toutes les formes possibles en partant du contact à trois variables formé par la coïncidence d'un point faisant partie d'un réseau de points à deux cotes et d'un faisceau de courbes, ou bien, ce qui revient au même, par l'entrecroisement de trois faisceaux cotés. A cet effet, il suffit de diminuer le nombre de variables en transformant, d'une part, le réseau à deux variables en courbe graduée à une variable, puis en un point (élément non coté),, et, d'autre part, en réduisant le faisceau de courbes (1 variable) en courbe non cotée.

Les contacts *simples d'orientation* sont obtenus, dans le cas le plus général, en rendant parallèles une droite d'un faisceau de droites (z_1) tracées sur le plan mobile à une droite du faisceau (z_2), tracé sur le plan fixe. Ceci revient à faire coïncider un point P'_∞ (z_1) placé à l'infini sur la droite (z_1) avec la droite (z_2).

La coïncidence de deux points équivaut à un contact *double*, puisque, dans le cas le plus général de l'entrecroisement de quatre faisceaux de courbes cotées (ou, ce qui revient au même, de deux réseaux de points à deux cotes), cette coïncidence est constituée par le contact de deux courbes avec le même point. Ce contact est désigné par la notation

$$P'_{mn} \mapsto P_{pq}.$$

Le cas le plus général comprend quatre variables ; les autres cas sont obtenus en réduisant chacun des réseaux d'abord à une courbe graduée, puis à un point. Alors que les contacts simples laissent au plan mobile deux degrés de liberté qui autorisent soit une translation (1) et une rotation, soit deux translations, un contact ponctuel double ne laisse au plan mobile qu'un degré de liberté, constitué par une rotation.

Les contacts *tangentiels simples* sont obtenus par la tangence de deux courbes faisant chacune partie d'un faisceau de courbes cotées.

Les contacts *tangentiels doubles* sont formés par la coïncidence de deux droites et sont désignés par la notation.

$$D'_m \mapsto D_n$$

Quand le contact est simple, il laisse au plan mobile deux degrés de liberté ; quand il est double, il ne permet au plan mobile qu'une translation.

§ 3. — Notation des abaques

Si deux plans sont superposés, les déplacements de l'un par rapport à l'autre sont à trois degrés de liberté. Or, un contact établi entre un élément E appartenant au plan π et un élément appartenant au plan π' (2) équivaut à une condition simple entre les trois degrés. Il faut donc établir trois tels contacts pour fixer la position du plan π' par rapport au plan π. Cette fixation sera, par suite, définie par les *contacts de position*

$$E_1' \mapsto E_1, \quad E_2' \mapsto E_2, \quad E_3' \mapsto E_3.$$

La position relative des deux plans étant alors parfaitement déterminée, il ne restera qu'à constater le *contact de résolution*

$$E_4' \mapsto E_4.$$

---

(1) J'appelle *translation* le déplacement du plan mobile parallèlement à lui-même, un point du plan mobile coïncidant avec une courbe du plan fixe.

(2) Nous appellerons par la suite *fond* le plan fixe et *tranparent* le plan mobile tracé sur un papier transparent.

La notation et le mode d'emploi d'un abaque quelconque à deux plans superposés se résumera donc dans la suite de symboles :

$$E_1' \vdash\!\dashv E_1,\ E'_2 \vdash\!\dashv E_2,\ E_3' \vdash\!\dashv E_3,\ E'_4 \vdash\!\dashv E_4.$$

Exemple. — La fig. 1 (p. 7) représente un abaque

dont la notation et le mode d'emploi se résument par la suite des symboles :

$$P'_{34} \vdash\!\dashv P_{12},\quad P'_{\infty}(z_8) \vdash\!\dashv D_7,\quad P'_{56} \vdash\!\dashv L_9$$

se traduisant ainsi : on fait coïncider le point (z_3, z_4) du transparent avec le point (z_1, z_2) du fond ; on fait tourner le transparent autour du point (z_1, z_2) jusqu'à ce que la droite (z_8) du transparent soit parallèle à la droite (z_7) du fond et on lit la valeur de z_9 au droit du point (z_5, z_6).

Remarque. — Si les éléments E'_1, E'_2 (contact de position) et E'_4 (contact de résolution) sont des cercles concentriques ou des droites parallèles (cercles de rayon infini), la position du transparent est indifférente quand *deux* contacts seulement

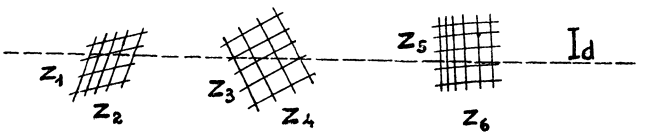


Fig. 2.

sont établis, puisque la rotation ou la translation que peut encore effectuer le transparent ne modifie en rien l'élément E_4, ni par suite le contact $E'_4 \vdash\!\dashv E_4$.

Le contact $E'_3 \vdash\!\dashv E_3$ est par conséquent superflu et doit être laissé indéterminé ; on le désigne alors par le symbole.

$$'' \vdash\!\dashv ''$$

Ainsi les abaques à points alignés (v. fig. 2) pour lesquels les éléments tracés sur le transparent se réduisent à une ligne droite, sont désignés par la notation :

$$I_d \vdash\!\dashv P_{12},\quad I_d \vdash\!\dashv P_{34},\quad I_d \vdash\!\dashv P_{56},\quad '' \vdash\!\dashv ''.$$

NOTE. — Voir p. 31, les différentes classifications des abaques d'après la nature des contacts.

CHAPITRE PREMIER

Abaques à contacts ponctuels

A. — Représentation directe, sans dissociation des équations

§ 1. — Théorie.

Considérons d'abord le cas où l'abaque est constitué par deux graphiques, l'un porté par une feuille fixe, l'autre porté par une feuille transparente mobile glissant sur la première d'un mouvement plan entièrement libre. La position du transparent dépend donc de trois paramètres indépendants ; on se trouve dans le cas des *abaques à transparent tournant*. Les mouvements de celui-ci comportent :

1°. — Trois degrés de liberté : *tout déplacement du transparent peut être réalisé par deux translations et une rotation.*

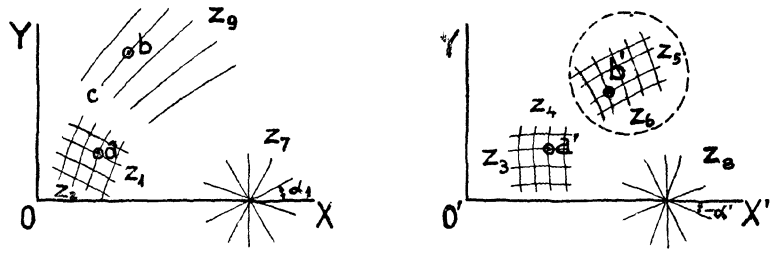


Fig. 1.

Plan fixe ou fond. Plan mobile ou transparent.

Ces translations et la rotation du plan mobile par rapport au plan fixe seront réalisées en faisant coïncider (v. fig. 1) un point a' du plan mobile avec un point a du plan fixe et en faisant tourner d'un certain angle α le plan mobile autour de ce point (1).

La position du point a pourrait être déterminée par ses coordonnées cartesiennes ; elle peut l'être également par la donnée de 2 variables z_1, z_2. Le point a sera donc déterminé au moyen d'un réseau de points à 2 cotes des variables z_1, z_2, défini par les équations,

$$x = f_{12} \; ; \; y = g_{12},$$

x, y étant les coordonnées dans le système d'axes XOY.

De même la position du point a' peut être définie sur le transparent connais-

(1) Voir p. 24, l'explication du cercle en traits pointillés entourant le réseau (z_5, z_6).

sant les valeurs de 2 variables z_3, z_4, au moyen d'un réseau de points à 2 cotes. défini par les équations :

$$x' = -f_{34} \; ; \; y' = -g_{34},$$

x', y' étant les coordonnées dans le système d'axes $X'O'Y'$.

La coïncidence des points a' et a équivaut à un contact double

$$P'_{34} \vdash\!\dashv P_{12}.$$

Pour effectuer une rotation d'un angle α, compté positivement dans le sens inverse à celui des aiguilles d'une montre, on rendra parallèles une droite du plan mobile faisant avec l'axe $O'X'$ un angle $(-\alpha')$ à une droite du plan fixe faisant avec l'axe OX un angle (α_1), la somme $\alpha' + \alpha_1$ étant égale à α. Au lieu de déterminer les deux directions par les α', α_1, on peut déterminer plus généralement chacune par une variable; soient $\alpha_1 = f_7$, une fonction de la variable z_7 et $\alpha' = f_8$, une fonction de la variable z_8. Ces deux variables seront représentées par les faisceaux de droites (z_7) et (z_8) tracés sur le plan fixe et sur le plan mobile.

Le parallélisme des droites z_7 et z_8 sera exprimé par *le contact d'orientation*

$$P'_{\infty}\,(z_8) \vdash\!\dashv D_7.$$

La position du plan mobile par rapport au plan fixe est ainsi fixé par les trois contacts :

$$P'_{34} \vdash\!\dashv P_{12}, \; P'_{\infty}\,(z_8) \vdash\!\dashv D_7.$$

Le contact de résolution est formé par la coïncidence d'un point b' du plan mobile avec une courbe bc du plan fixe : $P'_{56} \vdash\!\dashv L_9$. Le point b' fait partie d'un réseau de points à 2 cotes des variables z_5, z_6, tracé sur le plan mobile et défini par les équations :

$$x'_1 = f_{56} \; ; \; y'_1 = g_{56}$$

La courbe bc fait partie d'un faisceau de courbes représentant la variable z_9, tracé sur le plan fixe et défini par l'équation :

$$F\,(x, y, z_9) = 0$$

Sur la fig. 3 nous avons réalisé la coïncidence des points a' et a, ainsi que la rotation de l'axe $O'X'$ d'un angle α par rapport à l'axe OX.

On voit que les coordonnées M, N du point b', dans le système XOY, sont

$$M = x + (-x' + x'_1) \cos \alpha - (-y' + y'_1) \sin \alpha$$

$$N = y + (-x' + x'_1) \sin \alpha + (y' + x'_1) \cos \alpha$$

Or, nous avions posé ci-dessus :

$$x = f_{12}, \quad y = g_{12}$$

$$x' = -f_{34}, \quad y' = -g_{34}$$

$$x'_1 = f_{56}, \quad y'_1 = g_{56}$$

$$\alpha = f_7 + f_8.$$

Par conséquent

$$(1)\quad \begin{cases} M = f_{12} + (f_{34} + f_{56}) \cos(f_7 + f_8) - (g_{34} + g_{56}) \sin(f_7 + f_8) \\ N = g_{12} + (f_{34} + f_{56}) \sin(f_7 + f_8) + (g_{34} + g_{56}) \cos(f_1 + f_8) \end{cases}$$

et l'équation représentée par l'abaque sera

$$F(M, N, z_9) = 0.$$

L'abaque lui-même sera représenté par le symbole

$$P'_{34} \vdash\!\dashv P_{12}, \quad P'_{\infty}(z_8) \vdash\!\dashv D_7, \quad P'_{56} \vdash\!\dashv L_9$$

qui indique en même temps son *mode d'emploi*, à savoir :

on fait coincider les points (z_3, z_4) et (z_1, z_2) on rend parallèles les droites (z_7)

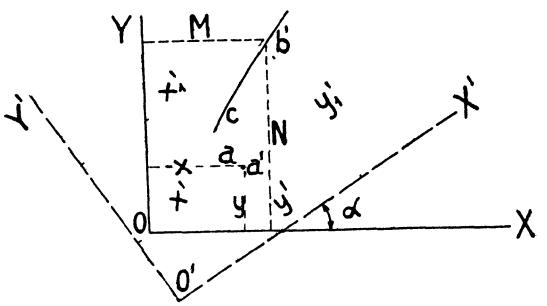


Fig 3

et (z_8) en faisant tourner le transparent autour du point (z_1, z_2) et on lit z_9 au droit du point (z_5, z_6) On trouvera p 59 la méthode générale de construction de cet abaque.

2° — Supposons qu'on astreigne le transparent à glisser par un de ses points sur une droite fixe du fond Alors son deplacement se decompose en une translation de direction donnée et une rotation On se trouve dans le cas de

Deux degrés de liberté *une translation parallèle à une direction donnée et une rotation.*

La forme *canonique* de M et N se déduit de la forme (1) de ces fonctions pour trois degrés de liberté en posant

$$f_{12} = f_1 ; \quad f_{34} = f_2 \quad \text{et} \quad g_{12} = g_{56} = 0$$

et en changeant les indices , on a alors (1) ·

$$(2)\quad \begin{cases} M = f_1 + (f_2 + f_{34}) \cos(f_5 + f_6) - g_{34} \sin(f_5 + f_6) \\ N = f_1 + (f_2 + f_{34}) \sin(f_5 + f_6) - g_{34} \cos(f_5 + f_6) \end{cases}$$

L'équation est $F(M, N, z_7) = 0$.

---

(1) Un cas particulier tres interessant, dans lequel $f_1 = F(f_5 + f_6)$ et qui conduit à un accolement de deux echelles correspondant l'une à une translation et l'autre à une rotation, est étudie p 16 de ce chapitre

L'abaque est représenté par la fig. 4.

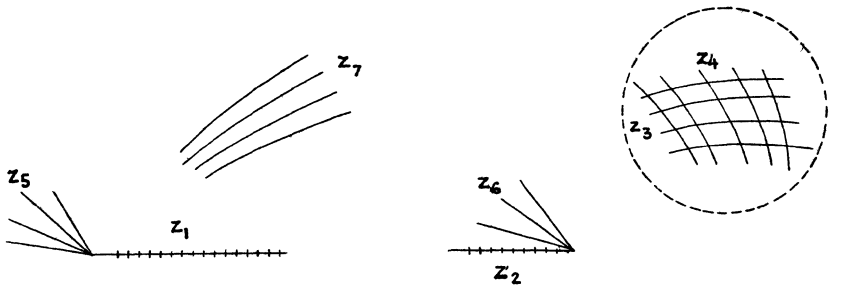


Fig. 4.

Fond. Transparent.

Mode d'emploi :

$$P'_2 \mapsto P_1, \quad P'_\infty (z_6) \mapsto D_5, \quad P'_{34} \mapsto L_7.$$

On fait coïncider les points (z_2) et (z_1), on rend parallèles les droites (z_6) et (z_5) en faisant tourner le transparent autour du point (z_1) et on lit (z_7) au droit du point (z_3, z_4).

3° Si l'on assujettit le transparent à garder la même orientation par rapport au fond, on obtient ce que nous avons l'habitude d'appeler un *abaque à transparent orienté* caractérisé par :

Deux degrés de liberté : *deux translations.*

En annulant dans les équations (1) f_7 et f_8 on obtient :

$$(3) \qquad \begin{cases} M = f_{12} + f_{34} + f_{56} \\ N = g_{12} + g_{34} + f_{56}. \end{cases}$$

L'équation est $F(M, N, z_7) = 0$,

Le schéma de cet abaque est le suivant (fig. 5) :

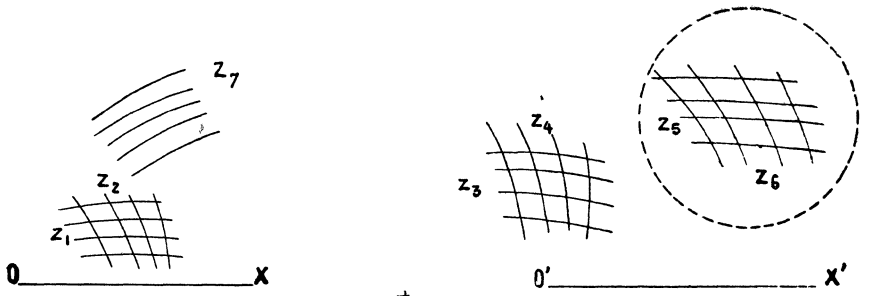


Fig. 5.

Fond. Transparent

Mode d'emploi :

$$P'_{34} \mapsto P_{12}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{56} \mapsto L_7.$$

Le transparent étant toujours orienté de façon à rendre parallèles les droites $O'x'$ et Ox, on fait coïncider les points (z_3, z_4) et (z_1, z_2) ; on lit la valeur de z_7, au droit du point (z_5, z_6).

L'orientation constante du transparent peut être réalisée en rendant parallèles une droite tracée sur le transparent aux droites d'un faisceau de droites tracé sur

le fond, la droite et le faisceau faisant partie si possible des systèmes géométriques cotés ou non cotés déjà tracés sur l'abaque. Ainsi dans notre abaque à transparent orienté pour la détermination des temps de montee d'un avion, dont la construction détaillée est décrite p. 60, la droite du transparent est constituée par l'échelle des temps de montée et le faisceau des droites par le faisceau des valeurs de la hauteur du plafond.

4°. — On peut assujettir le transparent à n'avoir qu'un mouvement de translation parallèle à une direction donnée en faisant par exemple glisser le bord du transparent le long d'une règle ou en faisant coïncider d'une façon permanente deux droites tracées l'une sur le transparent et l'autre sur le fond.

On réaliserait ainsi, ce qu'on peut appeler un *abaque à transparent guidé* (1) et dont de nombreux exemples ont été réalisés sous la forme de *règles à calculs*. Ces abaques comportent :

UN DEGRÉ DE LIBERTÉ : *une translation.*

En annulant dans les équations (3) g_{12} et g_{34} et en égalant f_{12} à f_1 et f_{34} à f_2, on obtient :

$$(4) \qquad \begin{cases} M = f_1 + f_2 + f_{34} \\ N = g_{34} \end{cases}$$

L'équation représentée a la forme $F(M, N, z_5) = 0$.

L'abaque est représenté schématiquement sur la fig. 6.

Fig. 6.

Fond. Transparent.

Mode d'emploi :

$$P'_2 \rightleftarrows P_1, \quad x'_\infty \rightarrow Ox, \quad P'_{34} \rightarrow L_5.$$

On fait glisser l'un sur l'autre les supports droits des variables z_1 et z_2, jusqu'à ce que les points (z_1) et (z_2) coïncident : on lit au droit du point (z_3, z_4) la valeur de z_5.

5°. — On peut aussi fixer sur un point du fond un point du transparent On réalise ainsi un cas particulier des abaques à transparent tournant, comportant :

UN DEGRÉ DE LIBERTÉ (2) : *une rotation.*

En annulant dans les équations (2) f_1 et f_2 et ne changeant les indices, on obtient :

$$(5) \qquad \begin{cases} M = f_{12} \cos(f_3 + f_4) - g_{12} \sin(f_3 + f_4) \\ N = f_{12} \sin(f_3 + f_4) + g_{12} \cos(f_3 + f_4) \end{cases}$$

(1) D'une façon plus générale et conformément à la définition de la translation donnée p 5, les abaques à transparent guidé comprennent le cas où un point du transparent glisse le long d'une courbe du fond, le transparent restant parallèle à lui-même.

(2) Voir, p. 46, une remarque relative aux abaques à un degré de liberté.

La fig. 7 représente le schéma de ce type d'abaque :

FIG. 7.

Mode d'emploi :

$$O' \equiv O, \quad P'_4 \longmapsto P_3, \quad P'_{12} \longmapsto L_5.$$

On fait coincider les points O' et O (en pratique ils coincideraient d'une façon permanente) et on fait tourner le transparent autour du point O, jusqu'à ce que les points (z_4) et (z_3) coincident (les supports z_3 et z_4 sont des arcs du cercle de même rayon) ; on lit z_5 au droit du point (z_1, z_2).

Les *cercles à calculs* constituent un cas particulier des abaques ci-dessus.

6°. — Enfin si l'on fixe complètement le transparent sur le fond on revient à *l'abaque à entrecroisement* usuel. C'est le cas :

ZÉRO DEGRÉ DE LIBERTÉ *plan unique.*

(6) $$M = f_{12}, \quad N = g_{12}.$$

L'équation est F (M, N, z_3) = F (z_1, z_2, z_3) = O.

Fond. FIG 8. Transparent.

Mode d'emploi :

$$O' \equiv O, \quad x'_\infty \longmapsto Ox, \quad P'_{12} \longmapsto L_3.$$

On lit sur le plan unique la valeur de z_3 au droit du point (z_1, z_2).

§ 2. — Quelques exemples d'abaques comportant plusieurs opérations.

Nous avons dit plus haut (p. 1) que nous ne considérions généralement dans ce travail que des abaques à opération unique Mais afin d'illustrer par un exemple la dépendance, déjà relevée p. 1, qui existe entre le nombre d'opérations, le nombre de plans et celui des degrés de liberté, nous allons examiner quelques abaques directement dérivés de ceux que nous venons d'étudier et qui comportent une opération supplémentaire pour la détermination du point de rotation du transparent et *permettent d'augmenter ainsi le nombre de variables de la proposée.*

Ce point de rotation sera fixé par exemple par une translation simple ou double du transparent, orienté suivant une direction fixe indiquée sur le fond.

1°. — Ainsi, si dans l'abaque à TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ (2 translations et 1 rotation) nous voulons déterminer le point de rotation du transparent par une nouvelle opération, comportant une double translation du transparent orienté

d'une façon fixe, il suffira de remplacer dans les expressions (1) de M et N les anciens termes par les termes suivants :

$$f_{12} = f_{78} \; ; \qquad g_{12} = g_{78}$$
$$f_{34} = f_{12} + f_{34} - f_{78} \; ; \qquad g_{34} = g_{12} + g_{34} - g_{78}$$
$$f_7 = f_9$$
$$f_8 = f_{10}$$
$$z_9 = z_{11}$$

On obtient alors :

$$(1') \quad \begin{cases} M = f_{78} + (f_{12} + f_{34} + f_{56} - f_{78}) \cos (f_9 + f_{10}) - \\ \qquad - (g_{12} + g_{34} + g_{56} - g_{78}) \sin (f_9 + f_{10}) \\ N = g_{78} + (f_{12} + f_{34} + f_{56} - f_{78}) \sin (f_9 + f_{10}) + \\ \qquad + (g_{12} + g_{34} + g_{56} - g_{78}) \cos (f_9 + f_{10}) \end{cases}$$

La fig. 9 donne le schéma de l'abaque.

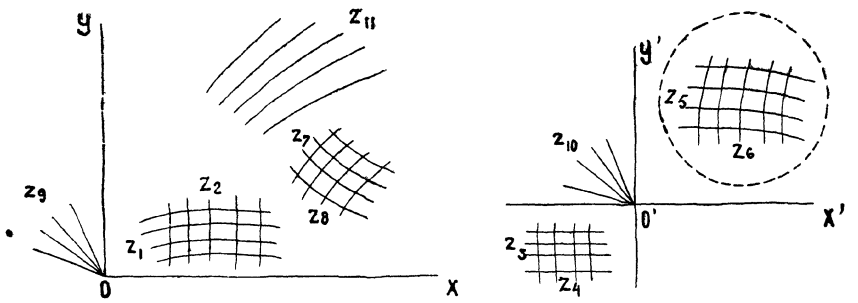


Fig. 9.

Fond. Transparent.

Mode d'emploi :

$$P'_{34} \mapsto P_{12}, \quad x'_{\infty} \mapsto Ox, \quad O' \mapsto P_{78}, \quad P'_{\infty}(z_{10}) \mapsto D_9, \quad P'_{56} \mapsto L_{11}.$$

On fait coincider le point (z_3, z_4) du transparent avec le point (z_1, z_2) du fond. On rend parallèles Ox et $O'x'$ et on fait tourner le transparent autour du point (z_7, z_8) du fond jusqu'à ce que la droite (z_{10}) devienne parallele à la droite (z_9) ; on lit au droit du point (z_5, z_6) la valeur de z_{11}.

2°. — Supposons à présent que dans l'abaque (fig. 4) à DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ (1 translation et 1 rotation) nous voulions déterminer le point de rotation, toujours placé sur l'échelle (z_2) du transparent, par une simple translation de cette échelle le long de l'échelle (z_1) du fond

La forme de M et N se déduit de la forme (1') en posant :

$$f_{12} = f_1 \; ; \; f_{34} = f_2 \; ; \; f_{78} = f_5 \text{ et } g_{12} = g_{34} = g_{78} = 0$$

et en changeant les indices on obtient :

$$(2') \quad \begin{cases} M = f_{54} + (f_1 + f_2 + f_{34} - f_5) \cos (f_6 + f_7) - \\ \qquad g_{34} \sin (f_6 + f_7) \\ N = (f_1 + f_2 + f_{34} - f_5) \sin (f_6 + f_7) + \\ \qquad g_{34} \cos (f_6 + f_7) \end{cases}$$

L'abaque est représenté schématiquement sur la fig. 10.

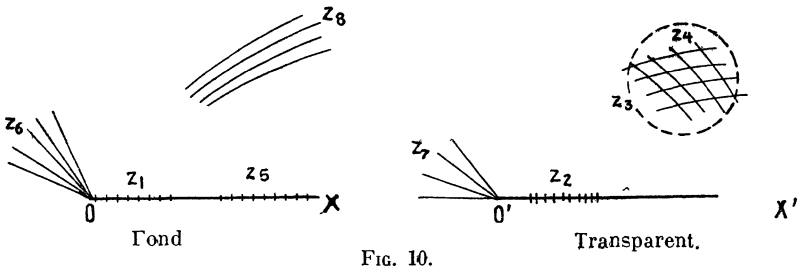


FIG. 10.

Mode d'emploi :

$$P'_2 \equiv P_1, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad O' \mapsto P_5, \quad P'_\infty(z_7) \mapsto D_6, \quad P'_{34} \mapsto L_8.$$

On fait coïncider les points (z_2) et (z_1) ainsi que les supports droits de ces variables, on rend parallèles les droites (z_7) et (z_8) en faisant tourner le transparent autour du point z_5 et on lit z_8 au droit du point (z_3, z_4).

3°. — Enfin si dans l'abaque (fig. 7) à UN DEGRÉ DE LIBERTÉ (1 rotation) nous voulons fixer le point de rotation du transparent par une translation simple d'une droite non cotée du transparent le long d'une échelle droite graduée du fond, il faudra annuler f_1 et f_2 dans les expressions (5') de M et N ; en changeant convenablement les indices on obtiendra :

$$(5') \qquad \begin{cases} M = f_3 + (f_{12} - f_3)\cos(f_4 + f_5) - g_{12}\sin(f_4 + f_5) \\ N = f_{12} - f_3)\sin(f_4 + f_5) + g_{12}\cos(f_4 + f_5) \end{cases}$$

L'abaque est représenté sur la fig. 11 ci-dessous :

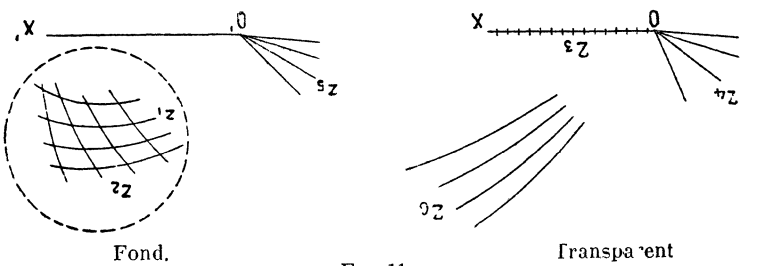


FIG. 11.

Mode d'emploi :

$$O' \equiv O, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad O'' \mapsto P_3, \quad P'_\infty(z_5) \mapsto D_4, \quad P'_{12} \mapsto L_6.$$

On fait coïncider les points O' et O et les droites O'x et Ox, on fait tourner le transparent autour du point (z_3) jusqu'à ce que la droite (z_5) devienne parallèle à la droite (z_4) et on lit z_6 au droit du point (z_1, z_2).

§ 3. — Exemples.

1°. — NOUVEL ABAQUE A TRANSPARENT TOURNANT DE LA FORMULE DE LA DÉVIATION DU COMPAS.

A titre d'application de la théorie exposée ci-dessus nous allons étudier une équation qui donne lieu à un abaque présentant des particularités intéressantes.

La déviation (δ) du compas d'un navire est exprimée par la formule :

$$\delta = A + B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha + m \sin \alpha + n \cos \alpha, \tag{1}$$

où α est le cap du compas,

m et n des fonctions de la longitude (L) et de la latitude (l),

A, B et C des constantes pour le navire donné.

M. Lallemand (1) a établi pour cette formule un abaque hexagonal comprenant deux échelles ternaires (L, l, α) et une échelle simple (δ), c'est-à-dire, 7 systèmes figuratifs pour 4 variables : L, l, α, δ.

M. d'Ocagne (2) a proposé un abaque à points alignés à deux échelles binaires (L, l) et un réseau de points à 2 cotes (α, δ) comprenant 6 systèmes figuratifs pour 4 variables.

Nous mêmes, nous avions d'abord pensé (3) à un abaque à transparent orienté *sans systèmes* surabondants, constitué par un fond portant les réseau (L, l,) et (α, δ) et un index orienté courbe, d'après le schéma ci-dessous :

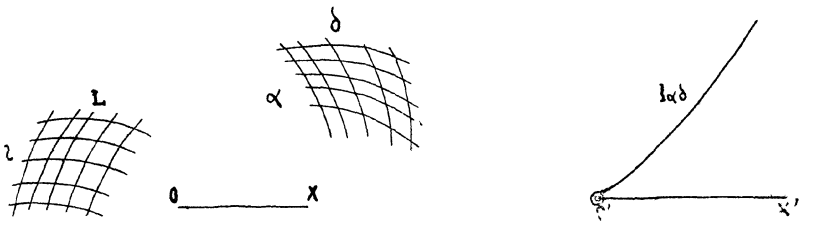


Fig. 12.

A cet effet nous avons transformé l'expression (1) de la façon suivante :

$$1 = (m + 20) \frac{\sin \alpha}{\delta - A - B \sin 2\alpha - C \cos 2\alpha + 20 \sin \alpha + 20 \cos \alpha} +$$

$$+ (n + 20) \frac{\cos \alpha}{\delta - A - B \sin 2\alpha - C \cos 2\alpha + 20 \sin \alpha + 20 \cos \alpha}.$$

Cette équation de la forme $1 = f_{12} f_{34} + g_{12} g_{34}$ est représentable par l'abaque de la fig. 12 en posant dans l'équation générale $F(M, N, z_n) = 0$:

$$M = \log f_{12} + \log f_{34} \text{ et } N = \log g_{12} + \log g_{34}$$

Mais pour que l'anamorphose logarithmique ne conduise pas à un transparent à deux ou trois index et à des réseaux comprenant des points situés à l'infini, il faut que les fonctions $f_{12} \ldots g_{34}$ ne changent pas de signe, quelles que soient les valeurs — positives ou négatives — des variables.

---

(1) Cet abaque a été reproduit notamment dans la 1re et la 2e édition du Traité de Nomographie de M. d'Ocagne (p. 353 et 151).

(2) Traité de Nomographie, 1re édition, p. 353.

(3) Il nous paraît intéressant de mentionner ici nos recherches à titre d'exemple des inconvénients que présente quelquefois l'anamorphose logarithmique.

C'est pourquoi nous avons introduit dans l'équation (1) les termes 20 sin α et 20 cos α qui permettent de réaliser cette condition pour les fonctions (m + 20) et (n + 20).

Mais cet artifice est insuffisant, car les fonctions de α et de δ continuent à changer de signe.

Nous avons alors procédé à une anamorphose semi-logarithmique en écrivant :

$$-n + \frac{\delta - A - B \sin 2\alpha - C \cos 2\alpha + 20 \sin \alpha}{\cos \alpha} = (m + 20) \operatorname{tg} \alpha,$$

équation qui est de la forme

$$f_{12} + f_{34} = g_{12} g_3$$

et qui peut être représentée par un abaque à transparent orienté, analogue à celui de la fig. 12, en posant :

$$M = f_{12} + f_{34} \text{ et } N = \log g_{12} + \log g_3$$

Il n'y a plus à craindre le changement de signe de f_{12} et f_{34} et d'autre part l'introduction du terme 20 sinα a permis de rendre toujours positive la fonction $g_{12} = m + 20$. Malheureusement tgα devient négative pour 180° à 360° de sorte que l'abaque devra comprendre un transparent à 2 index.

L'inconvénient ne serait pas bien grand, si la forme des fonctions f_{34} et g_3, de α et de δ ne conduisait pas à des réseaux de points à deux cotes extrêmement compliqués et très difficiles à lire à cause de l'enchevêtrement des courbes du faisceau (α).

Ce défaut est d'ailleurs commun aux trois types d'abaques décrits ci-dessus.

Pour y remédier on a dû répéter dans l'abaque *hexagonal* deux fois l'échelle binaire (n), l'une de ses positions correspondants à α = 0 à 90° et 180° à 270° et l'autre à α = 90° à 180° et 270° à 360° ; mais on a conservé un seul faisceau en α, quoique les droites de ce faisceau s'entrecroisent.

Si l'on construisait l'abaque à POINTS ALIGNES, le faisceau (a) du réseau (α, δ), serait constitué par des droites parallèles à DEUX COTES α et α + 180°, d'où résulteraient un faisceau (δ) très compliqué ; enfin pour certaines valeurs de α, les points du réseau (α, δ) se trouveraient à l'infini.

L'abaque à TRANSPARENT TOURNANT, que nous avons établi a permis de résoudre le problème en faisant correspondre à l'angle α une rotation du transparent par rapport au fond.

L'équation

$$A + B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha + n \cos \alpha + m \sin \alpha = \delta$$

peut être considérée comme un cas particulier de l'*équation représentable sans dissociation par abaque à deux degrés de liberté* (translation et rotation) étudiée p. 9.

En effet on peut l'écrire sous la forme F (N z_n) = O, où

$$N = (A + B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha) + n \cos \alpha + m \sin \alpha =$$
$$= f(\alpha) + f(L, l) \cos \alpha + \varphi(L, l) \sin \alpha$$
$$\text{et } z_n = \delta$$

L'équation F = O devient :

$$N = \delta$$

D'après la méthode de construction indiquée p. 59, l'abaque se présenterait d'après le schéma ci-contre :

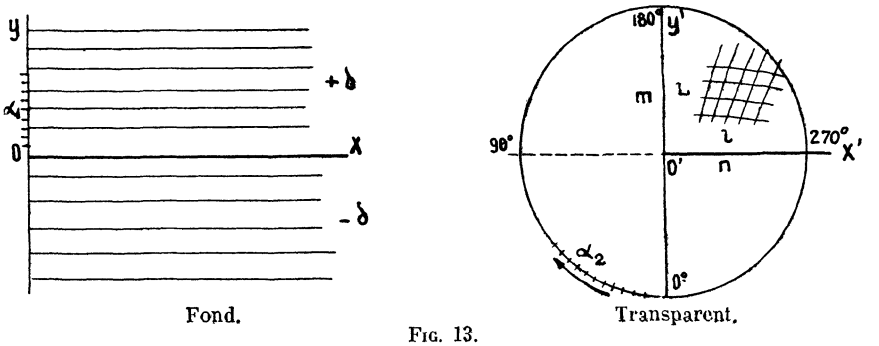


FIG. 13.

Mode d'emploi :

$$O' \mapsto P_{\alpha_1},\quad P'_{\alpha_2} \mapsto Oy,\quad P'_{L,l} \mapsto D\delta.$$

On fait coïncider les points (α_1) et (O'). On fait tourner alors le transparent autour du point O' de manière à amener le point (α_2) sur Oy ; on lit au droit du point (L, l) la valeur δ.

Mais l'abaque ainsi tracé comprend deux systèmes figuratifs de la variable (α), l'un correspondant à une translation et l'autre à une rotation.

Nous allons montrer que, de même que dans un système de coordonnées rectangulaires, on réduit à un seul système figuratif qui est une échelle graduée, deux translations $(x = f_1,\ y = g_1)$, de même en employant des coordonnées *polaires* (r, θ) on réduit à un seul système figuratif qui est encore une échelle graduée une translation et une rotation $(r = f_1,\ \theta = g_1)$. (1)

A cet effet, il suffit de tracer sur le transparent en COORDONNÉES POLAIRES (r, θ), avec le point O' comme centre, la courbe (α), telle que :

$$r = A + B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha;\quad \theta = -90° - \alpha.$$

Ce transparent sera utilisé comme fond et on tracera sur le transparent une simple croix, dont un des côtés sera gradué en valeurs positives et négatives de δ.

La fig. 14 donne le schéma de l'abaque (2).

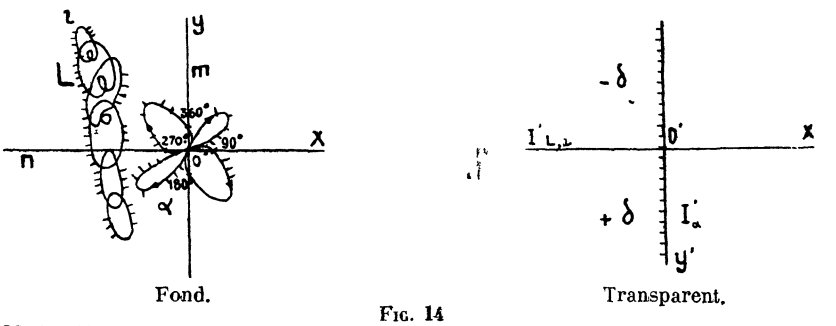


FIG. 14

Mode d'emploi :

$$I'_\alpha \mapsto P_\alpha,\quad I'_\alpha \mapsto O,\quad I'_{L\,l} \mapsto P'_{L\,l},\quad P'_\delta \mapsto I_\alpha.$$

(1) Voir p. 18 une remarque indiquant la forme générale correspondant à ce cas.

(2) Ce schéma reproduit exactement la disposition réelle de l'abaque ; nous n'avons pas pris la peine de le dessiner complètement, car nous avons appris qu'on ne se servait jamais à bord des bateaux de l'équation (1), à cause de la variation toujours possible des coefficients A, B et C.

La droite $O'y'$ du transparent passant par les points (O) et (α) du fond, ont fait glisser le transparent jusqu'à ce que l'index $I_{L,l}$ passe par le point (L,l) ; on lit la valeur de δ sur l'échelle (δ) au droit du point (α).

La preuve qu'il n'existe pas de systèmes surabondants masqués pour la variable (α), peut se faire en prenant cette variable comme inconnue et en constatant que sa détermination s'effectue sans tâtonnements de la façon suivante :

$$I'_{L,l} \mapsto P_{L,l}, \quad I'\alpha \mapsto O, \quad P'_{\delta} \mapsto P\alpha.$$

On fait passer l'index $I'_{L,l}$ par le point (L,l) et l'index I'_{α} par le point O et on tourne et glisse le transparent jusqu'à ce que le point (δ) tombe sur la courbe (α), en un point dont la cote indiquera la valeur cherchée de α (1).

Il nous reste à dire quelques mots sur les avantages de notre abaque au point de vue de la DISCUSSION NOMOGRAPHIQUE de l'équation donnée.

Le suppression des systèmes surabondants et l'emploi du réseau de points à deux cotes pour les valeurs de L et l permet de représenter par un point unique, un point quelconque du planisphère et de constater par exemple à simple vue les points du planisphère pour lesquels la déviation est la même.

On peut ainsi constater immédiatement ce fait important que quand le cap du compas est peu différent de 80° ou de 260°, une variation sensible de la longitude et une très grande variation de la latitude n'influent pas sur la valeur de la déviation. Par contre quand $\alpha = 170°$ ou 350°, les variations de la déviation en fonction de la longitude et de la latitude sont maxima.

Evidemment l'abaque hexagonal permettrait egalement de faire ces constatations, mais au prix de raisonnements assez laborieux et c'est surtout dans la suppression simultanée des calculs et des raisonnements, qui tous les deux deviennent des opérations pour ainsi dire mécaniques, que nous voyons l'intérêt principal de cet abaque.

Faisons encore remarquer qu'en portant sur le cadran d'un compas les courbes tracées sur le fond de l'abaque, en cotant la courbe (α) en valeurs de $r = A + B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha$, en reliant l'aiguille du compas à un transparent portant un faisceau de droites perpendiculaires à l'aiguille et cotées en valeurs de $\delta - r$, on réaliserait un appareil presque automatique pour la détermination de la déviation, puisqu'il suffirait de faire l'addition de la valeur de r (lue à l'intersection de l aiguille avec le courbe α) et de la valeur de $\delta - r$, cote de la droite passant par le point (L, l).

Remarque :

La forme générale de l'équation $F(M, N, z_n) = O$, dans le cas où la variable (z_1) correspondant à la rotation figure également dans le terme représentant la translation, est :

$$F(f_1 + f_{23} \cos z_1 - g_{23} \sin z_1, g_1 + f_{23} \sin z_5 + g_{23} \cos z_1, z_4) = O$$

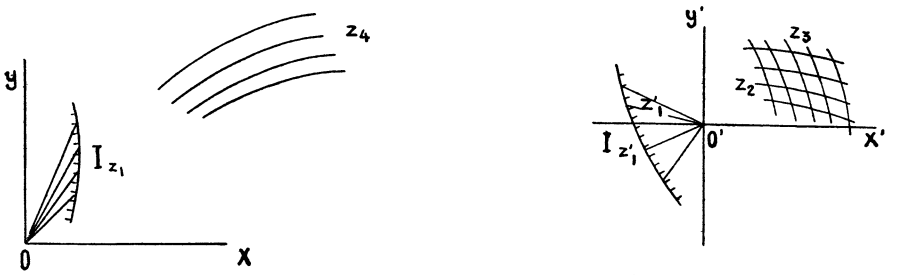
Il suffit à cet effet de poser dans les expression de M et N dl la p. 9.

$$f_{12} = f_1, g_{12} = g_1 \; ; f_{34} + f_{54} = f_{23}, g_{34} + g_{54} = g_{23} \; ; f_7 + f_8 = z_1$$

---

(1) On ne procède pas autrement avec un abaque en équerre à sommet guidé. Les mouvements de rotation et de glissement nécessaires à la détermination de α ne comportent pas plus de tatonnements que les mouvements de translation, que demanderait un abaque analogue à transparent orienté, comprenant une échelle, résultant de l'élimination de α entre les équations $x = f(\alpha)$, $y = g(\alpha)$.

Cette équation peut être résolue par l'abaque ci-contre :



Fond. Transparent.

Fig. 15.

La courbe z'_1 du transparent est tracée en posant $\theta = 180^\circ - z_1$, $r = \sqrt{f_1^2 + g_1^2}$; la courbe z_1 du fond, en posant $x = f_1$, $y = g_1$.

Mode d'emploi :

quand les inconnues sont z_2, z_3 ou z_4 :

$$O' \mapsto P_1, \quad P'_1 \mapsto O, \quad P'_{23} \mapsto L_4.$$

On fait coïncider le point O' avec le point z_1 et le point z'_1 avec le point O ; on lit z_4 au droit du point (z_2, z_3).

Quand l'inconnue est z_1, le *mode d'emploi* est :

$$P'_{23} \mapsto L_4 \quad O' \mapsto I_{z_1} \quad D'_{z_1} \mapsto D_{z_1}.$$

Les points (z_2, z_3) et O' du transparent tombant respectivement sur les courbes (z_4) et I_{z_1} du fond, on fait coïncider les droites O_{z_1} et $O'_{z'_1}$ correspondant à la même valeur de z_1.

2° — Un autre exemple d'abaque à TRANSPARENT TOURNANT est celui du deuxième abaque pour la détermination des *angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère* (v. fig. 88 et 88').

Cet abaque représente l'équation à 5 variables

$$\sin\Delta \operatorname{ctg}\alpha - \bar{r} Z - \cos\Delta \cos\delta = O$$

En l'écrivant sous la forme :

$$\operatorname{tg}\Delta \operatorname{ctg}\alpha - \frac{\bar{r} Z}{\cos\Delta} = \cos\delta$$

et en posant :

$$M = \lg \operatorname{tg}\Delta + \lg \operatorname{ctg}\alpha, \quad N = \lg \bar{r} + \lg Z - \lg \cos\Delta$$

j'ai tracé un premier abaque à transparent orienté, dont le fond (fig. 87) porte le faisceau (δ) et l'échelle (Δ) et dont le transparent est constitué par le réseau $(\bar{r}, \alpha)$ et l'échelle (Z).

Mode d'emploi :

$$P'(Z) \mapsto P(\Delta), \quad P'_\infty(\alpha) \mapsto Ox, \quad P'(\bar{r}, \alpha) \mapsto L(\delta).$$

On peut également écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$\cos\delta \cos\Delta - \operatorname{ctg}\alpha \sin\Delta = -\bar{r} Z = -z,$$

qui appartient à la forme canonique à 4 variables :

$$F(f_{12} \cos z_3 - g_{12} \sin z_3, z_4) = O$$

représentable par un abaque à transparent tournant autour d'un point fixe O (fig. 88')

et portant le réseau (δ, α) et un index droit I'_Δ ; le fond porte le faisceau (z) et une échelle circulaire (Δ).

Le *mode d'emploi* est :

$$O' \mapsto O, \quad I'_\Delta \mapsto P(\Delta), \quad P'(\delta, \alpha) \mapsto D(z).$$

Ce deuxième abaque présente les avantages suivants sur le premier abaque :

a) Le faisceau de droites (δ) et l'échelle circulaire (Δ) du deuxième abaque sont plus faciles à tracer.

b) L'orientation variable du transparent du second abaque peut être obtenue avec plus de précision que l'orientation fixe du premier transparent.

Par contre, dans le deuxième abaque, on a dû réunir en une seule, les variables $\bar{r}$ et Z.

Remarque. — Les équations de la forme $M = f(z_n)$, où

$$M = f_1 + f_2 + (f_{34} + f_{56}) \cos(f_7 + f_8) - (g_{34} + g_{56}) \sin(f_7 + f_8)$$

et qui peuvent être représentées par un abaque à transparent tournant sont plus fréquentes en pratique que les équations (M, N, z_n) ayant la forme la plus générale, indiquée p. 9.

§ 4. — Énumération des abaques établis.

J'ai tracé de nombreux abaques à *transparent orienté* figurant des équations du type générale de la p. 7 représentable sans dissociation. On trouvera dans la 2eme partie un grand nombre de ces abaques ; voir figures 78, 84, 87, 91, 109, 112, 113, 118, 119, 120 et 121.

Les abaques à *plan unique* (abaques *à entrecroisement*) que j'ai établis peuvent être classés en trois groupes.

1° *Abaques proprement dits*, tracés une fois pour toutes ; voir fig. 103, 104, 114, 116 et 117 ;

2° Abaques résultant d'un *calcul au trait*, dont la trace forme un abaque ; voir fig. 101, 102, 105, 106, 107, 108, 111, 123 et 124.

3° Abaques résultant de *l'utilisation d'un abaque à transparent orienté*, la trace de ce transparent (placé convenablement sur le fond) représentant la solution du problème considéré ; voir fig. 96, 99, 100 et 110.

B.— Equations représentables au moyen d'une dissociation (1) simple, double ou triple.

La représentation de ces équations s'obtient en les décomposant en deux, trois ou quatre équations de la forme

$$F(M. N, z_n) = O$$

au moyen de l'introduction d'une, de deux ou de trois variables auxiliaires ou paramètres ζ_1, ζ_2, ζ_3...

Ainsi que nous le montrerons plus bas (p. 88), la décomposition au moyen d'un paramètre conduit à une représentation *composée*, permettant le tracé de l'abaque sur deux feuilles séparées. Ce n'est que dans le cas où la décomposition

(1) Pour la définition de la dissociation voir p. 85, chapitre VI. .. *Dissociation disjonction, représentation simple et composée et nombre des dimensions d'une représentation plane.*

s'effectue au moyen de deux ou trois paramètres variables communes que la représentation est simple.

§ 1. — **Paramètres communs.** — Nous examinerons d'abord le cas, dans lequel les équations décomposées n'ont en commun que des paramètres, les variables étant différentes d'une équation à l'autre.

Dans ces conditions on obtient des abaques à un, deux ou trois degrés de liberté en accolant convenablement les abaques à un, deux ou trois degrés de liberté, représentant des équations non dissociées.

D'après le nombre d'équations décomposées nous rencontrerons les cas suivants :

1°. — Dissociation simple.

Nous distinguons ici le cas d'une dissociation effectuée au moyen d'un seul paramètre.

Considérons une relation entre 6 variables et supposons qu'elle soit équivalente à un système de 2 équations chacune entre 3 de ces variables et un même paramètre ζ_1. Chacune de ces deux équations est représentable sans dissociation par un abaque à un degré de liberté. Alors ces deux équations auront les formes :

$$F_1 (M_1, N_1, z'_n) = 0$$
$$F_2 (M_2, N_2, z''_n) = 0$$

On obtient les expressions de M_1, N_1 et M_2, N_2 en prenant dans les expressions (4) et (5) des fonctions M et N entrant dans les *équations représentables sans dissociation* par des abaques *à un degré de liberté* (pp. 11, 12) :

$$f_1 + f_2 = \zeta_1 \text{ pour la translation}$$
$$f_3 + f_4 = \zeta_1 \text{ pour la rotation}$$

En changeant convenablement les indices, on obtient :

Translation.	Rotation.
$M_1 = \zeta_1 + f_{12}$	$M_1 = f_{12} \cos \zeta_1 - g_{12} \sin \zeta_1$
$N_1 = g_{12}$	$N_1 = f_{12} \sin \zeta_1 + g_{12} \cos \zeta_1$
$z'_n = z_3$	$z'_n = z_3$

et

$M_2 = \zeta_1 + f_{45}$	$M_2 = f_{45} \cos \zeta_1 - g_{45} \sin \zeta_1$
$N_2 = g_{45}$	$N_2 = f_{45} \sin \zeta_1 + g_{45} \cos \zeta_1$
$z''_n = z_6$	$z''_n = z_6$

L'équation représentée résultera de l'élimination de ζ_1 entre les équations :

$$F_1 (\zeta_1 + f_{12}, g_{12}, z_3) = 0$$
$$F_2 (\zeta_1 + f_{45}, g_{45}, z_6) = 0$$

dans le cas de l'abaque à transparent *guidé*, et des équations (1) :

$$F_1 (f_{12} \cos \zeta_1 - g_{12} \sin \zeta_1, f_{12} \sin \zeta_1 + g_{12} \cos \zeta_1, z_3) = 0$$
$$F_2 (f_{45} \cos \zeta_1 - g_{45} \sin \zeta_1, f_{45} \sin \zeta_1 + g_{45} \cos \zeta_1, z_3) = 0$$

dans le cas de l'abaque à transparent *tournant*.

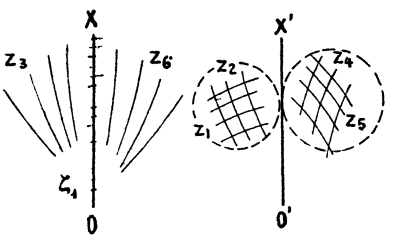
On accole les abaques représentant les relations entre ζ_1, z_1, z_2, z_3 d'une part, ζ_1, z_4, z_5, z_6 d'autre part, par l'échelle (ζ_1).

---

(1) Voir p. 46, une remarque relative aux équations représentables par les abaques des fig. 16 et 17.

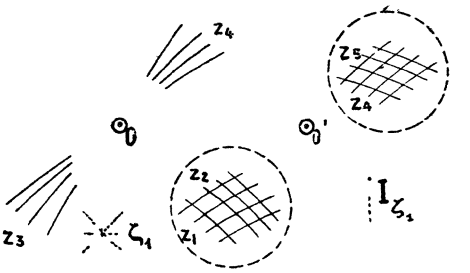
Les schémas des abaques sont les suivants :

FIG. 16 Translation.



Fond Transparent.

FIG. 17 Rotation.



Fond Transparent.

Mode d'emploi :

$$O'x' \equiv Ox, \quad P'_{12} \vdash L_3, \quad P'_{45} \equiv L_6 \quad \text{(translation)}$$
$$O' \equiv O, \quad P'_{12} \vdash L_3, \quad P'_{45} \equiv L_6 \quad \text{(rotation)}$$

On fait coïncider les droites $O'x'$ et Ox (ou les points O' et O) et on fait glisser (ou tourner) le transparent pour amener le point (z_1, z_2) sur la ligne (z_3) ; on lit z_6 au droit du point (z_4, z_5).

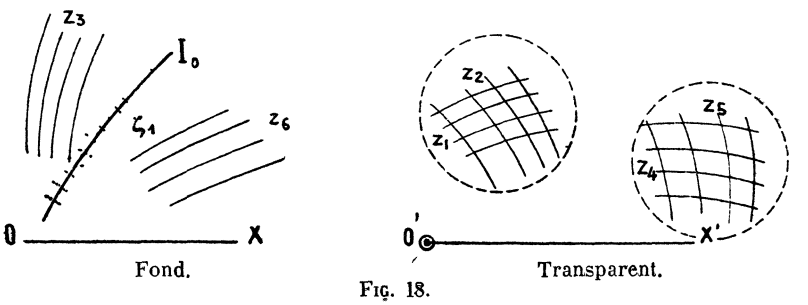
On obtient une forme plus générale de l'abaque à translation en posant dans les expressions (3) p. 10 de l'abaque à deux degrés de libertés (deux translations).

$$f_{12} + f_{34} = f(\zeta_1)$$
$$g_{12} + g_{34} = g(\zeta_1)$$

L'équation représentée résultera de l'élimination de ζ_1 entre les équations :

$$F_1[f(\zeta_1) + f_{12}, g(\zeta_1) + g_{12}, z_3] = 0; \quad F_2[f(\zeta_1) + f_{45}, g(\zeta_1) + g_{45}, z_6] = 0.$$

L'abaque correspondant est schématisé sur la fig. 18.



Fond. Transparent.

FIG. 18.

Mode d'emploi :

$$O' \vdash I_0, \quad x'_\infty \vdash Ox, \quad P'_{12} \vdash L_3, \quad P'_{45} \vdash L_6.$$

On fait glisser le point O' le long de l'index I_0, les droites Ox et $O'x'$ étant parallèles entre elles, de façon à amener le point (z_1, z_2) sur la ligne (z_3) ; on lit z_6 au droit du point (z_4, z_5).

2°. — DISSOCIATION DOUBLE.

Nous étudierons ici le cas d'une dissociation de la proposée en 3 équations au moyen de 2 paramètres. Le transparent a deux degrés de liberté.

a) Deux translations transparent orienté.

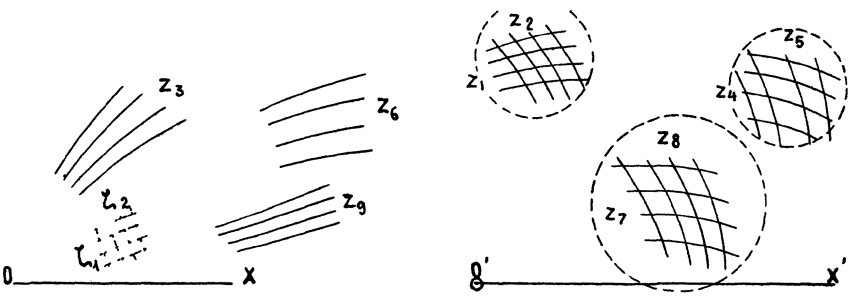
Les fonctions entrant dans les équations dissociées :

$$F_1(M_1, N_1, z'_n) = 0, \quad F_2(M_2, N_2, z''_n) = 0, \quad F_3(M_3, N_3, z'''_n) = 0$$

ont la forme.

$$(7) \quad \begin{cases} M_1 = f_1(\zeta_1, \zeta_2) + f_{12}; \quad M_2 = f_1(\zeta_1, \zeta_2) + f_{45}; \quad M_3 = f_1(\zeta_1, \zeta_2) + f_{78} \\ N_1 = g_1(\zeta_1, \zeta_2) + g_{12}; \quad N_2 = g_1(\zeta_1, \zeta_2) + g_{45}; \quad N_3 = g_1(\zeta_1, \zeta_2) + g_{78} \\ z'_n = z_3; \quad z''_n = z_6; \quad z''_n = z_9. \end{cases}$$

L'abaque est schématisé sur la fig. 19.



Fond. Transparent.

Fig 19.

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{12} \mapsto L_3, \quad P'_{45} \mapsto L_6, \quad P'_{78} \mapsto L_9.$$

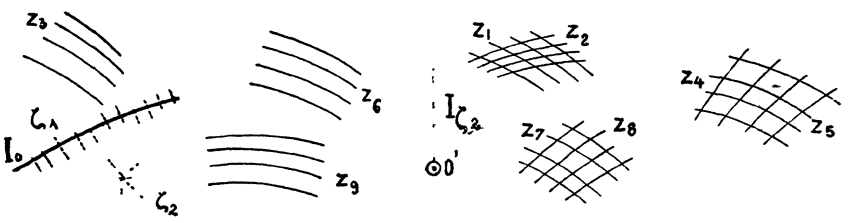
La droite O'x' restant parallèle à la droite Ox, on amène les points (z_1, z_2) et (z_3, z_4) sur les courbes (z_3) et (z_6), on lit z_9 au droit du point (z_7, z_8).

b) Translation et rotation

Les fonctions $M_1 .. M_3$, $N_1 ... N_3$, $z'_n ... z'''_n$ ont la forme suivante :

$$(8) \quad \begin{cases} M_1 = f_1(\zeta_1) + f_{12} \cos \zeta_2 - g_{12} \sin \zeta_2; \quad M_2 = f_1(\zeta_1) + \\ \quad + f_{45} \cos \zeta_2 - g_{45} \sin \zeta_2; \quad M_3 = f_1(\zeta_1) + f_{78} \cos \zeta_2 - g_{78} \sin \zeta_2. \\ N_1 = g_1(\zeta_1) + f_{12} \sin \zeta_2 + g_{12} \cos \zeta_2; \quad N_2 = g_1(\zeta_1) f_{45} \sin \zeta_2 + \\ \quad + g_{45} \cos \zeta_2; \quad N_3 = g_1(\zeta_1) + f_{78} \sin \zeta_2 + g_{78} \cos \zeta_2 \\ z'_n = z_3; \quad z''_n = z_n; \quad z'''_n = z_9. \end{cases}$$

La fig. 20 schématise l'abaque.



Fond Transparent.

Fig. 20.

Mode d'emploi :

$$O' \mapsto I_0, \quad P'_{12} \mapsto L_3, \quad P'_{45} \mapsto L_6, \quad P'_{78} \mapsto L_9.$$

Le point O′ restant sur l'index I_0, on amène les points (z_1, z_2) et (z_4, z_5) respectivement sur les courbes (z_3) et (z_6) ; on lit z_9 au droit du point (z_7, z_8).

3°. — DISSOCIATION TRIPLE.

La proposée est dissociée en 4 équations au moyen de 3 paramètres.

Le transparent a trois degrés de liberté.

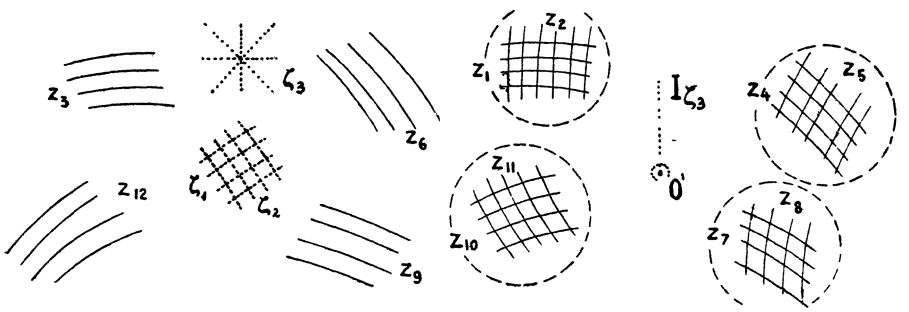
Les fonctions $M_1 \ldots N_1 \ldots z'_n \ldots$ sont obtenues en introduisant trois paramètres $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ et en posant dans les expressions (6) :

$$f_{12} = f(\zeta_1, \zeta_2), \quad f_{34} = 0, \quad f_7 + f_8 = \zeta_3, \quad g_{12} = g(\zeta_1, \zeta_2), \quad g_{34} = 0.$$

On obtient ainsi en changeant convenablement les indices :

$$(9) \quad \begin{cases} M_1 = f(\zeta_1, \zeta_2) + f_{12} \cos \zeta_3 - g_{12} \sin \zeta_3 ; \quad M_2 = \ldots ; \\ \qquad M_3 = \ldots ; \quad M_4 = f(\zeta_1, \zeta_2) + f_{10,11} \cos \zeta_3 - g_{10,11} \sin \zeta_3 . \\ N_1 = g(\zeta_1 . \zeta_2) + f_{12} \sin \zeta_3 + g_{12} \cos \zeta_3 ; \quad N_2 = \ldots ; \quad N_3 = \ldots ; \\ \qquad N_4 = g(\zeta_1, \zeta_2) + f_{10,11} \sin \zeta_3 + g_{10,11} \cos \zeta_3 . \\ \qquad\qquad z'_n = z_3 ; \quad z''_n = z_6 ; \quad z'''_n = z_9 ; \quad z^{IV} = z_{12} . \end{cases}$$

Le schéma de l'abaque est représenté sur la fig. 21.



Fond. Transparent.

FIG. 21.

Mode d'emploi :

$$P'_{12} \vdash\!\dashv L_3, \quad P'_{45} \vdash\!\dashv L_6, \quad P'_{78} \vdash\!\dashv L_9, \quad P''_{10,11} \vdash\!\dashv L_{12}$$

On amène les points (z_1, z_2), (z_4, z_5) et (z_7, z_8) respectivement sur les courbes (z_3), (z_6) et (z_9) ; on lit z_{12} au droit du point (z_{10}, z_{11}) (1).

§ 2. — **Variables et paramètres communs.** — Si les équations décomposées contiennent des variables et des paramètres communs, il faudra d'une façon générale chercher à accoler les éléments figuratifs des unes et des autres.

Nous allons examiner le cas, que nous avons rencontré le plus fréquemment et dans lequel un ou deux paramètres, entrant dans les équations étudiées plus haut, sont remplacés par une ou deux variables communes.

La forme des fonctions M et N, sera celle des expressions (7), (8) et (9) dans lesquelles les variables communes prennent la place des paramètres, *mais le nombre d'équations décomposées est évidemment réduit du nombre des variables communes.*

Les cas suivants correspondent aux abaques des fig. 19, 20 et 21, dans lesquelles les paramètres éliminés ont été tracés en traits pointillés et les variables communes sont entourées d'un cercle en trait plein.

(1) M. d'Ocagne avait dès 1893 (v. C. R., t. CXVII, pages 216, 277) envisagé un type d'abaque très général.

$$D'_{11} \vdash\!\dashv P_{15}, \quad D'_{11} \vdash\!\dashv P_{26}, \quad L'_9 \vdash\!\dashv P_{37}, \quad L'_{10} \vdash\!\dashv P_{48}$$

qui dérive de l'abaque ci-dessus en réduisant les faisceaux des courbes (L_9) et (L_{12}) à un faisceau de droites (D_{11}).

1°. — DISPOSITION DOUBLE : *deux translations :*

La proposée devra résulter de l'élimination de ζ_1 entre 2 équations ayant la variable commune ζ_1. On obtient ces équations en remplaçant dans les expressions, (7) de M_1, N_1, M_2, N_2 indiquées p. 23, ζ_2 par ζ_1 et en changeant convenablement les indices des autres variables. On obtient ainsi :

$$F_1[f_1(\zeta_1, z_1) + f_{23}, g_1(\zeta_1, z_1) + g_{23}, z_4] = 0.$$
$$F_2[f_1(\zeta_1, z_1) + f_{56}, g_1(\zeta_1, z_1) + g_{56}, z_7] = 0.$$

Le schéma de la fig. 22 représente l'abaque correspondant :

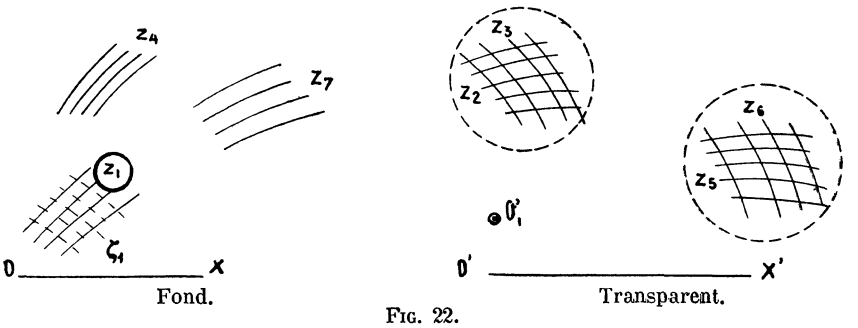


FIG. 22.

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \vdash\!\dashv Ox, \qquad O'_1 \vdash\!\dashv L_1, \qquad P'_{23} \vdash\!\dashv L_4, \qquad P'_{56} \vdash\!\dashv L_7.$$

$O'x'$ étant parallèle à Ox, on amène les points O'_1 et (z_2, z_3) respectivement sur les courbes (z_1) et (z_4) ; on lit z_7 au droit du point (z_5, z_6).

Un exemple de ce type d'abaque est donnée par notre abaque « *Convoi remorqué par une locomotive* ». Dans cet abaque (v. p. 33) le faisceau (z_7) est réduit à un index. D'autre part comme le faisceau (z_1) est un faisceau de droites parallèles à Ox, la détermination de z_1 s'effectue par l'intersection de l'index O'x' et de l'échelle (z_1), le faisceau (z_1) servant à l'orientation du transparent.

2°. — DISSOCIATION DOUBLE : *translation et rotation.*

a) *Quand la variable commune ζ_1 représente une translation*, on obtient l'abaque de la fig. 23.

Les équations dissociées sont obtenues en remplaçant dans les expressions (8), p. 23, ζ_1 par z_1, ζ_2 par ζ_1 et en changeant convenablement les indices des variables ; on a alors :

$$F_1[f_1 + f_{23}\cos\zeta_1 - g_{23}\sin\zeta_1, \quad g_1 + f_{23}\sin\zeta_1 + g_{23}\cos\zeta_1, z_4] = 0$$
$$F_2[f_1 + f_{45}\cos\zeta_1 - g_{45}\sin\zeta_1, \quad g_1 + f_{45}\sin\zeta_1 + g_{45}\cos\zeta_1, z_7] = 0.$$

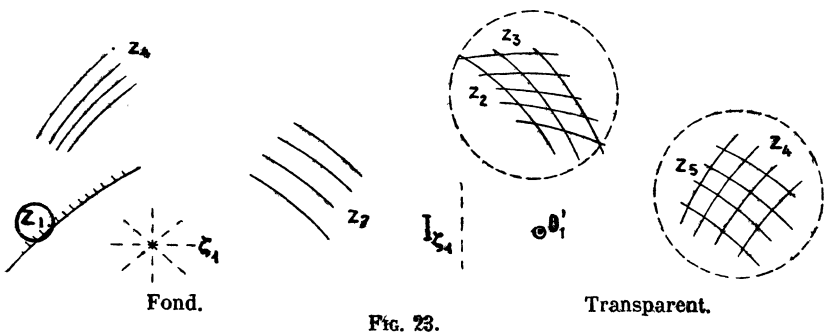


FIG. 23.

Mode d'emploi :

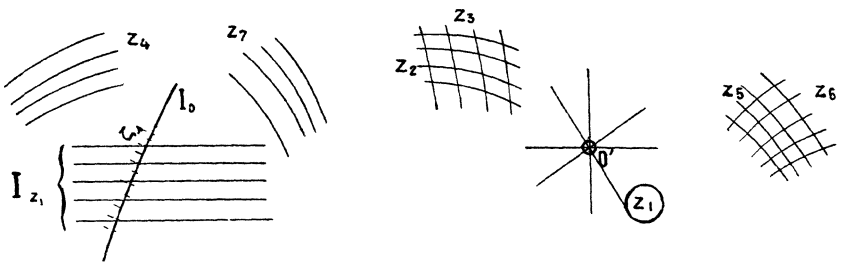
$$O'_1 \vdash\!\dashv P_1, \quad P'_{23} \vdash\!\dashv L_4, \quad P'_{56} \vdash\!\dashv L_7.$$

On fait coïncider le point O'_1 avec le point coté z_1 et le point (z_2, z_3) avec la courbe (z_4) ; on lit z_7 au droit du point (z_5, z_6).

b) Quand la variable commune z_1 correspond à une rotation, on obtient le schéma de la fig. 24.

On obtient les équations dissociées en remplaçant dans les expressions (8), p. 23, ζ_2 par ζ_1 et en changeant convenablement les indices des autres variables ; il vient alors :

$$F_1[f_1(\zeta_1) + f_{23}\cos z_1 - g_{23}\sin z_1,\ g_1(\zeta_1) + f_{23}\sin z_1 + g_{23}\cos z_1\ z_3] = 0$$
$$F_2[f_1(\zeta_1) + f_{45}\cos z_1 - g_{45}\sin z_1,\ g_1(\zeta_1) + f_{45}\sin z_1 + g_{45}\cos z_1, z_7] = 0.$$



Fond. Transparent.

FIG. 24.

Mode d'emploi :

$$O' \vdash\!\dashv I_0,\quad P'_\infty(z_1) \vdash\!\dashv I(z_1),\quad P'_{23} \vdash\!\dashv L_4,\quad P'_{56} \vdash\!\dashv L_7$$

Le point O' glissant le long de l'index I_0. on oriente le transparent de façon à rendre parallèles les droites (z_1) et $I(z_1)$ et on amène le point (z_2, z_3) sur la courbe (z_4) ; on lit z_7 au droit du point (z_5, z_6).

3°. — DISSOCIATION TRIPLE : *deux translations et une rotation.*

Les cas suivants peuvent se présenter :

Une variable et deux paramètres communs représentant $\begin{cases} \text{une translation } (a) \\ \text{une rotation } (b) \end{cases}$

Deux variables et un paramètre communs représentant $\begin{cases} \text{deux translations } (c) \\ \text{une translation} \\ \text{et une rotation } (d) \end{cases}$

Les cas (c) et (d) sont évidemment identiques à ceux que nous venons de traiter (fig. 23 et 24), car le nombre de variables communes étant de deux, le nombre d'équations se réduit également à deux. La seule différence est que l'échelle (z_1) du fond de la fig. 23 devient un réseau de points à 2 cotes représentant les variables communes et que l'index constant du fond de la fig. 24 est remplacé par un faisceau de courbes représentant l'une des variables communes.

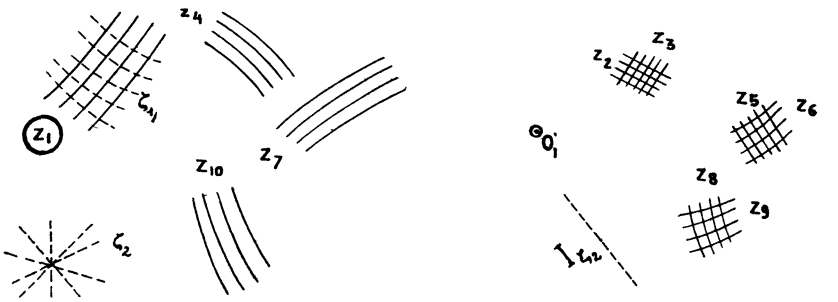
Les fig. 25 à 28 schématisent ces différents cas ; comme précédemment les lignes correspondant au paramètre sont tracés en traits pointillés et les variables communes sont entourées d'un cercle en trait plein.

a) 1 paramètre ζ_1 correspond à une translation, 1 paramètre (ζ_2) à une rotation, 1 variable commune (ζ_1) à une translation.

La proposée résulte de l'élimination des paramètres ζ_1 et ζ_2 et de la variable commune z_1 entre 3 équations. Les expressions M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3 entrant

dans ces équations sont celles indiquées p 24 [équations (9)] avec cette différence que le paramètre ζ_1 a été remplacé par la variable commune z_1 ; on obtient ainsi :

$$F_1[f(z_1, \zeta_1) + f_{23}\cos\zeta_2 - g_{23}\sin\zeta_2,\ g(z_1, \zeta_1) + f_{23}\sin\zeta_2 + g_{23}\cos\zeta_2, z_4] = 0$$
$$F_2[f(z_1, \zeta_1) + f_{56}\cos\zeta_2 - g_{56}\sin\zeta_2,\ g(z_1, \zeta_1) + f_{56}\sin\zeta_2 + g_{56}\cos\zeta_2, z_7] = 0$$
$$F_3[f(z_1, \zeta_1) + f_{89}\cos\zeta_2 - g_{89}\sin\zeta_2,\ g(z_1, \zeta_1) + f_{89}\sin\zeta_2 + g_{89}\cos\zeta_2, z_{10}] = 0$$



Fond Transparent.

FIG. 25.

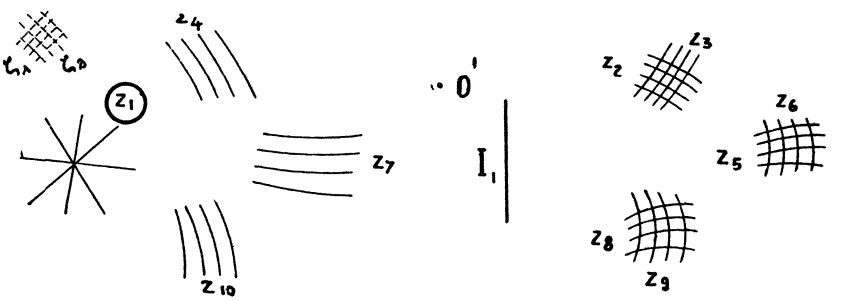
Mode d'emploi ·

$$O'_1 \longmapsto L_1, \quad P_{23} \longmapsto L_4, \quad P'_{56} \longmapsto L_7, \quad P'_{89} \longmapsto L_{10}.$$

b) 1 paramètre (ζ_1) — translation, 1 paramètre (ζ_2) — translation, 1 variable commune (z_1) — rotation

La proposée résulte de l'élimination des paramètres ζ_1 et ζ_2 et de la variable commune z_1 entre les équations suivantes :

$$F_1[f(\zeta_1, \zeta_2) + f_{23}\cos z_1 - g_{23}\sin z_1,\ g(\zeta_1, \zeta_2) + f_{23}\sin z_1 + g_{23}\cos z_1, z_4] = 0$$
$$F_2[f(\zeta_1, \zeta_2) + f_{56}\cos z_1 - g_{54}\sin z_1,\ g(\zeta_1, \zeta_2) + f_{56}\sin z_1 + g_{54}\cos z_1, z_7] = 0$$
$$F_3[f(\zeta_1, \zeta_2) + f_{89}\cos z_1 - g_{89}\sin z_1,\ g(\zeta_1, \zeta_2) + f_{89}\sin z_1 + g_{89}\cos z_1, z_{10}] = 0$$



Fond. Transparent.

FIG. 26.

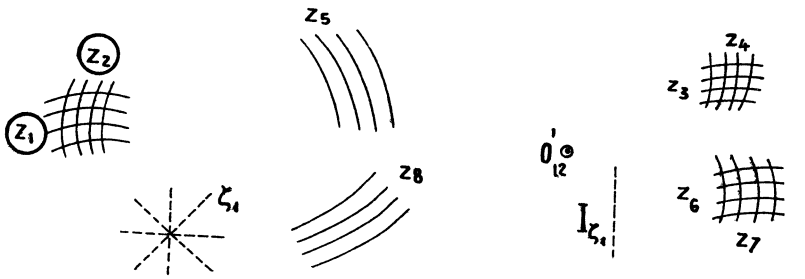
Mode d'emploi :

$$P_\infty(z_1) \longmapsto I_1, \quad P'_{23} \longmapsto L_4, \quad P'_{56} \longmapsto L_7, \quad P'_{89} \longmapsto L_{10}.$$

c) 1 paramètre (ζ_1) — rotation, 1 variable commune (z_1) — translation, 1 variable commune (z_2) — translation.

Les équations dissociées sont :

$$F_1 [f_{12} + f_{34} \cos \zeta_1 - g_{34} \sin \zeta_1,\ g_{12} + f_{34} \sin \zeta_1 + g_{34} \cos \zeta_1, z_5] = 0$$
$$F_2 [f_{12} + f_{67} \cos \zeta_1 - g_{67} \sin \zeta_1,\ g_{12} + f_{67} \sin \zeta_1 + g_{67} \cos \zeta_1, z_8] = 0$$



Fond. Transparent.

FIG. 27.

Mode d'emploi :

$$O'_{12} \vdash\!\dashv P_{12},\quad P'_{34} \vdash\!\dashv L_5,\quad P'_{67} \vdash\!\dashv L_8.$$

d) 1 paramètre (ζ_1) — translation, 1 variable commune (z_1) — translation, variable commune (z_2) — rotation.

Les équations dissociées sont :

$$F_1 [f(z_1, \zeta_1) + f_{34} \cos z_2 - g_{34} \sin z_2,\ g(z_1, \zeta_1) + f_{34} \sin z_2 + g_{34} \cos z_2, z_5] = 0$$
$$F_2 [f(z_1, \zeta_1) + f_{67} \cos z_2 - g_{67} \sin z_2,\ g(z_1, \zeta_1) + f_{67} \sin z_2 + g_{67} \cos z_2, z_8] = 0$$

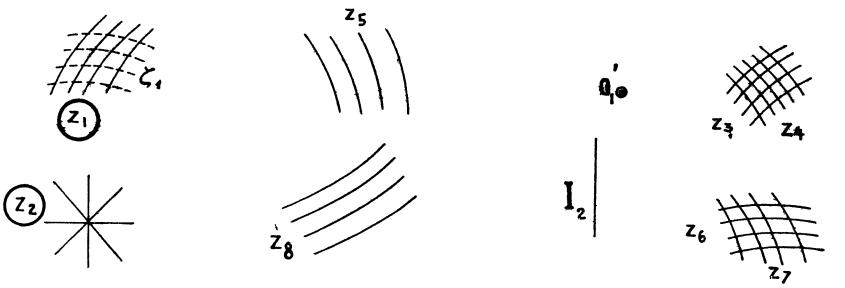


FIG. 28.

Mode d'emploi :

$$O'_1 \vdash\!\dashv L_1,\quad P_\infty (z_2) \vdash\!\dashv I_2,\quad P'_{34} \vdash\!\dashv L_5,\quad P'_{67} \vdash\!\dashv L_8.$$

Remarque. — Si nous considérons l'abaque de la fig. 22, nous ne pourrons pas à première vue déterminer si il a été établi en dissociant la proposée en 2 équations au moyen d'un paramètre et d'une variable commune, ou si la proposée a été dissociée en 3 équations au moyen de 2 paramètres (cas de la fig. 19), les variables z_1 et z_2 étant nulles et leur réseau se réduisant à un point fixe (O') marqué sur le transparent.

Mais il est facile de voir que quand $f_{12} = g_{12} =$ constante, $M_1 = f_1(\zeta_1, \zeta_2)$, et $N_1 = g_1(\zeta_1, \zeta_2)$, $F_1(M_1 . N_1, z_3) = 0$ se réduit à $F(\zeta_1, \xi_2, z_3) = 0$, d'où en remplaçant ζ_2 par sa valeur $\Phi(\zeta_1, z_3)$ on obtient

$$M_2 = f_1(\theta_1, z_3) + f_{45}\,; \quad M_3 = f_1(\zeta_1, z_3) + f_{78}$$
$$N_2 = g_1(\zeta_1, z_2) + g_{45}\,; \quad N_2 = g_1(\zeta_1, z_3) + g_{78}$$

En changeant convenablement les indices on arrivera aux expressions de M et N :

$$M_1 = f_1(\zeta_1, z_1) + f_{23}\,; \quad M_2 = f_1(\zeta_1, z_1) + f_{56}$$
$$N_1 = g_1(\zeta_1, z_1) + g_{23}\,; \quad N_2 = g_1(\zeta_1, z_2) + g_{56}$$

d'où dérive directement l'abaque de la fig. 22.

La même remarque peut être faite au sujet des abaques fig. 21 et 25.

Les abaques à contacts tangentiels que nous allons étudier dans le chapitre suivant, nous présenterons d'autres exemples où les équations décomposées comprennent des variables et des paramètres communs.

§ 3. — La théorie morphologique de M. d'Ocagne. Classification des abaques.

La théorie morphologique de M. d'Ocagne a pour but « d'envisager les abaques au seul point de vue de leur structure, sans avoir égard à la nature géométrique spéciale des lignes qui y interviennent non plus qu'à la forme des équations correspondantes. » Elle permet d'établir une classification générale capable d'embrasser tous les abaques possibles.

Cette classification se base sur la notion du contact et la méthode de notation des abaques établies par M. d'Ocagne et dont nous avons donné un résumé, p. 2 ; elle considère comme caractère le plus essentiel de la structure d'un abaque, la répartition des éléments non cotés ou *constants* (désignés par O) et des éléments *cotés* (désignés par E). Chaque type d'abaque est caractérisé par un premier chiffre égal au nombre d'éléments cotés ; un second chiffre placé en indice correspond à la composition des contacts, qui peut être

$$E' \vdash\!\dashv E, \quad E' \vdash\!\dashv O \quad \text{ou} \quad O \vdash\!\dashv O.$$

Le tableau III ci-après donne la classification de M. d'Ocagne. Nous y avons ajouté dans la dernière colonne les numéros des figures des abaques décrits dans le texte précédent et correspondant aux différents types.

On constate qu'il y a en tout 8 types d'abaques et que chaque type peut présenter jusqu'à 3 cas différents.

On peut envisager également une classification différente basée sur le nombre de contacts $O \vdash\!\dashv O$ et qui correspond à une classification des abaques d'après le nombre de degrés de liberté du transparent par rapport au fond, puisque *le nombre de degrés de liberté est égal à 3 moins le nombre de contacts* $O \vdash\!\dashv O$.

Le tableau IV résume cette classification. Les symboles qui désignent les abaques sont ceux qui correspondent aux contacts entre des points à 2 cotes et des faisceaux donnant le maximum (3) de variables par contact. La désignation de l abaque comprend le nombre de degrés de liberté avec, en indice, le nombre de variables. Par contre la désignation de M. d'Ocagne basée sur le nombre d'éléments cotés indique le nombre minimum de variables.

Tableau III. — Classification de M. d'Ocagne d'après le nombre d'éléments cotés

TYPE	SYMBOLE DE L'ABAQUE				N^os DES FIGURES
1	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	
2	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv E_1$	8
2_1	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	
3_1	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	$E'_3 \vdash\!\dashv O$	
3_2	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	
4_1	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	$E'_3 \vdash\!\dashv O$	$E'_4 \vdash\!\dashv O$	
4_2	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	
4_1	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv E_1$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	6, 7, 17, 18
5_1	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	$E'_3 \vdash\!\dashv O$	$E'_4 \vdash\!\dashv E_4$	
5_2	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	22, 23, 24
6_1	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv O$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	$E'_4 \vdash\!\dashv E_4$	27, 28
6_2	$O \vdash\!\dashv O$	$E'_1 \vdash\!\dashv E_1$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	4, 5, 19, 20
7	$E'_1 \vdash\!\dashv O$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	$E'_4 \vdash\!\dashv E_4$	25, 26
8	$E'_1 \vdash\!\dashv E_1$	$E'_2 \vdash\!\dashv E_2$	$E'_3 \vdash\!\dashv E_3$	$E'_4 \vdash\!\dashv E_4$	1, 21

Tableau IV. — Classification des abaques d'après le nombre de degrés de liberté

CLASSE	N^os DES FIGURES	Degrés de liberté	SYMBOLE DE L'ABAQUE				Désignation d'après le nombre de degrés de liberté et le nombre max. de variables	Désignations de M. d'Ocagne
A échelles accolées			$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv P_{12}$	O_2	1_1
A entrecroisement	8	0	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv L_3$	O_3	2
			$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	I_4	2_1
Règles et cercles à calculs		1	$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv L_5$	I_5	3_2
	7, 17, 18		$O \vdash\!\dashv O$	$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv L_3$	$P_{45} \vdash\!\dashv L_6$	I_6	4_4
A transparent guidé et tournant			$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	$P_{56} \vdash\!\dashv O$	II_6	3_1
A transparent orienté			$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	$P'_{56} \vdash\!\dashv L_7$	II_7	4_2
	22, 23, 24	2	$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv L_5$	$P'_{67} \vdash\!\dashv L_8$	II_8	5_2
	4, 5, 19, 20		$O \vdash\!\dashv O$	$P'_{12} \vdash\!\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\!\dashv L_6$	$P'_{78} \vdash\!\dashv L_9$	II_9	6_2
			$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	$P'_{56} \vdash\!\dashv O$	$P'_{78} \vdash\!\dashv O$	III_8	4_1
			$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	$P'_{56} \vdash\!\dashv O$	$P'_{78} \vdash\!\dashv L_8$	III_9	5_1
A transparent tournant	27, 28	3	$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv O$	$P'_{56} \vdash\!\dashv L_7$	$P'_{89} \vdash\!\dashv L_{10}$	III_{10}	6_1
	25, 26		$P'_{12} \vdash\!\dashv O$	$P'_{34} \vdash\!\dashv L_5$	$P'_{67} \vdash\!\dashv L_3$	$P'_{9\,10} \vdash\!\dashv L_{11}$	III_{11}	7
	1, 21		$P'_{12} \vdash\!\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\!\dashv L_6$	$P'_{78} \vdash\!\dashv L_9$	$P'_{10\,11} \vdash\!\dashv L_{12}$	III_{12}	8

En cherchant à relier la théorie morphologique à la théorie analytique exposée dans ce chapitre, nous avons constaté que c'est la nature des contacts qui dépend des caractéristiques analytiques de l'équation représentée par l'abaque.

Rappelons que dans la 2e note préliminaire p. 2, nous avons défini 3 types de contacts ponctuels : le contact simple **S** constitué par la coïncidence d'un réseau et d'un faisceau ; le contact d'orientation **O** formé par le parallélisme de deux droites et le contact double **D** formé par la coïncidence de deux points.

Comme il n'y peut y avoir plus d'un contact d'orientation, les différentes combinaisons que peuvent former les contacts sont les suivantes :

DOS **DSS** **SSSS** **OSSS** (1)

La combinaison **DOS** comprend toutes les équations à représentation directe sans dissociation, étudiées ci-dessus au § 1.

La classe **DSS**, qui ne comprend pas le contact d'orientation **O**, réunit toutes les équations représentables par l'élimination d'un paramètre correspondant à une rotation.

La classe **SSSS** comprend les équations représentables par l'élimination de deux

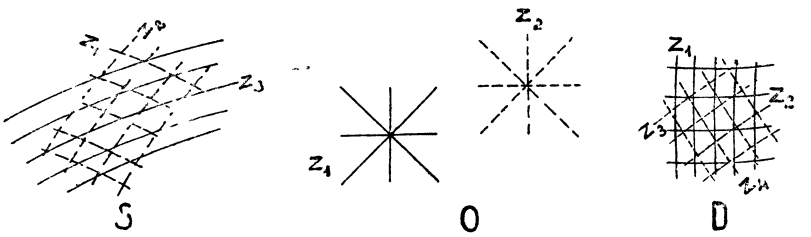


Fig. 29.

ou trois paramètres dont un ou deux correspondent à des translations et le 3e à une rotation.

La classe **OSSS** comprend les équations représentables par l'élimination de un ou deux paramètres correspondant à des translations.

Dans chaque classe les différentes variétés d'abaques résultent des combinaisons possibles des degrés de liberté, obtenues par des combinaisons convenables des contacts de position.

Les différents abaques étudiés ci-dessus ont été réunis dans le tableau V et groupés d'après leur classe.

Dans la 3e colonne nous avons indiqué les degrés de liberté du plan mobile en désignant par la lette t une translation et par la lettre r une rotation. De même dans les colonnes 4 et 5 la lettre t indique soit un paramètre éliminable, soit une variable commune correspondant à une translation ; la lettre r désigne un paramètre ou une variable commune correspondant à une rotation.

On remarquera, ce qui était d'ailleurs évident *a priori*, que le nombre et la nature des degrés de liberté du transparent correspondent au nombre et à la nature des degrés de liberté des paramètres et des variables communes.

Ainsi dans la classe **OSSS**, les abaques des fig. 19 et 22 comprennent des transparents à deux degrés de liberté : t + t et représentent des équations résultant soit de l'élimination de deux paramètres (t + t) entre 3 équations, soit de l'élimination d'un paramètre (t) entre 2 équations, ayant une variable commune (t).

Il est évident que les différentes combinaisons que peuvent présenter dans

(1) La classification d'après la nature des contacts limite les types d'abaques réalisables, alors que les classifications précédentes ne tenaient pas compte des relations entre les contacts.

Tableau V. — Classification des abaques d'après la combinaison des contacts

DESIGNATION DE L'ABAQUE	SYMBOLE DE L'ABAQUE				DEGRÉS DE LIBERTÉ	PARAMÈTRES ÉLIMINABLES	VARIABLES COMMUNES	Classification de M. d'Ocagne	N° DE FIGURE DE L'ABAQUE
DOS	$P'_{34} \vdash\dashv P_{12}$	$P'_{\infty}(z_7) \vdash\dashv D_8$	$P'_{56} \vdash\dashv L_9$		r + t + t	0	0	8	1
	$P'_{2} \vdash\dashv P_{1}$	$P'_{\infty}(z_6) \vdash\dashv D_6$	$P'_{34} \vdash\dashv L_7$		r + t	»	»	6_2	4
	$P'_{34} \vdash\dashv P_{12}$	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P'_{56} \vdash\dashv L_7$		t + t	»	»	6_2	5
	$P'_{2} \vdash\dashv P_{1}$	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P'_{34} \vdash\dashv L_5$		t	»	»	4_4	6
	$P' \vdash\dashv P$	$P'(z_4) \vdash\dashv D_3$	$P'_{12} \vdash\dashv L_5$		r	»	»	4_4	7
	$P' \vdash\dashv P$	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$			»	»	2	8
	$P' \vdash\dashv P$	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P'_{12} \vdash\dashv I$	(échelles accolées)		»	»	1	
DSS (1)	$P' \vdash\dashv P_{12}$	$P'_{34} \vdash\dashv L_5$	$P'_{67} \vdash\dashv L_8$		r + t + t	r	t + t	6_1	27
	$P' \vdash\dashv P_{1}$	$P'_{23} \vdash\dashv L_4$	$P'_{56} \vdash\dashv L_7$		r + t	r	t	5_2	23
	$P' \vdash\dashv P$	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$	$P_{45} \vdash\dashv L_6$		r	r		4_4	17
SSSS	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\dashv L_6$	$P'_{78} \vdash\dashv L_9$	$P'_{1011} \vdash\dashv L_{12}$	r + t + t	r + t + t		8	21
	$P' \vdash\dashv L_1$	$P'_{23} \vdash\dashv L_4$	$P'_{65} \vdash\dashv L_7$	$P'_{89} \vdash\dashv L_{10}$	r + t + t	r + t	t	7	25
	$P' \vdash\dashv I$	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\dashv L_6$	$P'_{78} \vdash\dashv L_9$	r + t	r + t		6_2	20
OSSS	$P'_{\infty}(z_1) \vdash\dashv I_d$	$P'_{23} \vdash\dashv L_4$	$P'_{56} \vdash\dashv L_7$	$P'_{89} \vdash\dashv L_{10}$	t + t + r	t + t	r	7	26
	$P'_{\infty}(z_1) \vdash\dashv I_d$	$P' \vdash\dashv L_2$	$P'_{34} \vdash\dashv L_5$	$P'_{67} \vdash\dashv L_8$	t + t + r	t	t + r	6_1	28
	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\dashv L_6$	$P'_{78} \vdash\dashv L_9$	t + t	t + t		6_2	19
	$P'_{\infty}(z_1) \vdash\dashv I_d$	$P' \vdash\dashv I$	$P'_{23} \vdash\dashv L_4$	$P'_{56} \vdash\dashv L_7$	t + r	t	r	5_2	24
	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P' \vdash\dashv L_1$	$P'_{23} \vdash\dashv L_4$	$P'_{56} \vdash\dashv L_7$	t + t	t	t	5_2	22
	$P'_{\infty} \vdash\dashv I_d$	$P' \vdash\dashv I$	$P'_{12} \vdash\dashv L_3$	$P'_{45} \vdash\dashv L_6$	t	t		4_4	18

(1) Nous considérons le cas *DD* comme un cas particulier de la classe *DSS* ; il comprend des abaques très particuliers (v. p. 82) représentables par l'élimination du paramètre « rotation » entre 2 équations ayant 6 variables communes.

chaque classe les degrés de liberté doivent tenir compte des caractéristiques essentielles de ces classes, ainsi qu'elles ont été définies ci-dessus. C'est ainsi que la classe **DSS**, dans laquelle la présence du degré de liberté r est obligatoire, ne peut présenter que les combinaisons :

r + t + t r +t r

Le nombre maximum de variables de chaque équation est donné par l'indice de la dernière lettre du symbole de l'équation.

Le tableau IV permet de constater qu'une formule très simple relie ce nombre (n) au nombre de degrés de liberté (d), au nombre de paramètres éliminables (p) et au nombre de variables communes (v). Cette formule est :

$$n = 3 + 2d + p - v$$

Ainsi, par exemple, l'abaque (fig. 19) de la classe **OSSS** représente une équation à $3 + 2 \times 2 + 2 = 9$ variables Voir également à ce sujet p. 91.

LA DERNIÈRE COLONNE DU TABLEAU V PERMET DE CONSTATER QUE LA MÉTHODE ANALYTIQUE QUE NOUS AVONS SUIVIE PERMET DE FORMER TOUS LES ABAQUES POSSIBLES. AINSI SE TROUVE DÉMONTRÉ LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA PAGE 1.

§ 4. — Exemple.

CONVOI REMORQUÉ PAR UNE LOCOMOTIVE A VOYAGEURS, 7 variables.

(Faisait partie de la circulaire, envoyée en 1922 pour annoncer la fondation de mon Bureau d'Etudes Nomographiques).

Cet abaque constitue une application des différentes méthodes décrites ci-dessus et notamment de la dissociation des équations, des échelles binaires et des réseaux de points à 2 cotes. Nous l'avons choisi, parce qu'il montre la supériorité de l'emploi d'un transparent à systèmes cotés, quand le nombre de variables dépasse 4 et quand l'équation ne fait pas partie des formes, relativement peu nombreuses, représentables par un abaque à points alignés au moyen d'une seule opération et sans systèmes surabondants (1).

En effet l'abaque à points alignés (fig. 30), de la même équation (v. R. Soreau : *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie*, p. 451) comprend pour 7 variables, 10 systèmes figuratifs et nécessite dans les cas les plus simples, c'est-à-dire quand aucune des variables à systèmes surabondants n'est prise comme inconnue, 6 opérations. Quand on prend comme inconnue une des variables à systèmes surabondants, le poids de la locomotive par exemple, la solution est pratiquement impossible, car elle demande trop de tâtonnements.

L'équation peut être mise sous la forme :

$$n(0{,}0025 + \sin\alpha)\,p + 31 + 0{,}0032\,P + P\sin\alpha =$$

$$-0{,}00475\,V^2 n + 0{,}1496\,\frac{\theta\sqrt{D}}{\sqrt{V}} - 0{,}0874\,V^2,$$

où n est le nombre de wagons, $\sin\alpha$ — la déclivité, p — le poids de chaque wagon (en kg), P — le poids de la locomotive et du tender (en kg), V — la vitesse (en km/h). θ — l'effort de traction (en kg), D — le diamètre des roues motrices (en cm.).

---

(1) Quand une variable est représentée par deux ou plusieurs systèmes figuratifs : par deux échelles graduées, p. ex., on dit que l'abaque comprend des systèmes surabondants.

En décomposant l'équation en deux parties par l'introduction de la variable auxiliaire ζ, on a :

$$\frac{n(0{,}0025 + \sin\alpha)\,p}{\zeta} + \frac{31 + 0{,}0031\,P + P\sin\alpha}{\zeta} = 1$$

$$\frac{-0{,}00475\,n\,V^2}{\zeta} + \frac{0{,}1496\,\theta\sqrt{D/V} - 0{,}00874\,V^2}{\zeta} = 1$$

La première de ces équations est de la forme : $(M, N, p) = 0$ ou $M = f(n) + f(\alpha, P) + f(\zeta)$ et $N = g(\alpha, P) + g(\zeta)$; la deuxième équation a une forme semblable.

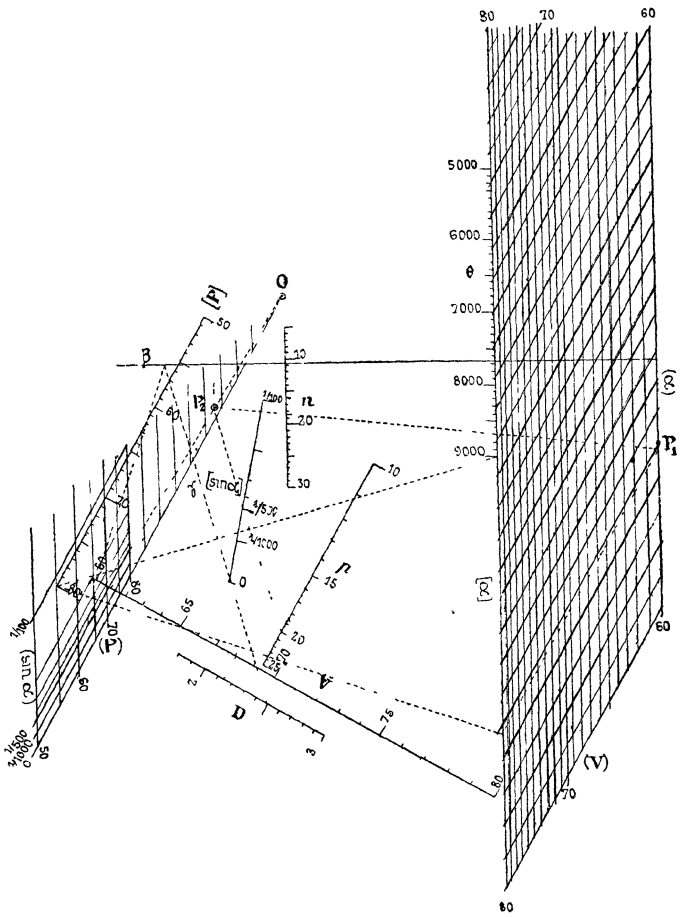


Fig. 30. — *Abaque à points alignés de la formule Frank et Vaes.*

Mode d'emploi. — 1) Double alignement en équerre -[P], D-β ; 2) Double alignement en équerre β—V, [P]-[α]; 3) Marquer dans le réseau [(α), (V)] le point P_1 ; 4) Réunir le point O au point (P, α) du réseau [(P), (sin α)] ; 5 L'intersection de l'alignement p-[sin α] avec la droite O-(P, α) donne le point P_2 ; 6) L'alignement P_1-P_2 donne la valeur de n. Les lignes en pointillé correspondent à la recherche de n pour les données figurant dans la légende de la fig. 31.

On superposera (v. fig. 31 et 31′) les échelles (n) et (ζ) des deux abaques et on éliminera (ζ) en conservant une échelle (n) sur le fond et un indez I_n sur

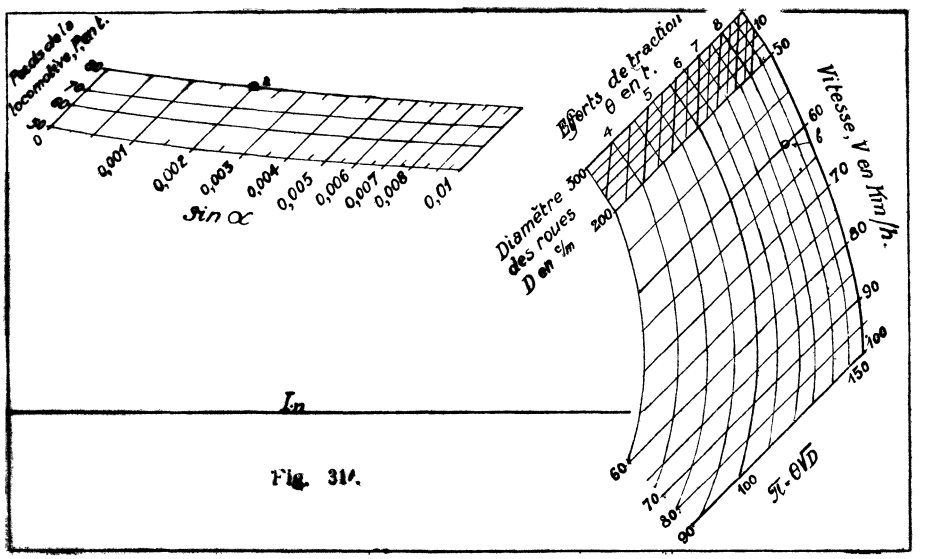

Poids de la locomotive, en t.
0
0,001
0,002
0,003
0,004
0,005
0,006
0,007
0,008
0,01
Sin α
Efforts de traction θ en t.
4
5
6
7
8
10
Diamètre des roues D en c/m
300
200
Vitesse, V en Km/h.
50
60
70
80
90
100
150
60
70
80
90
100
π.θ√D
In

Fig. 31.

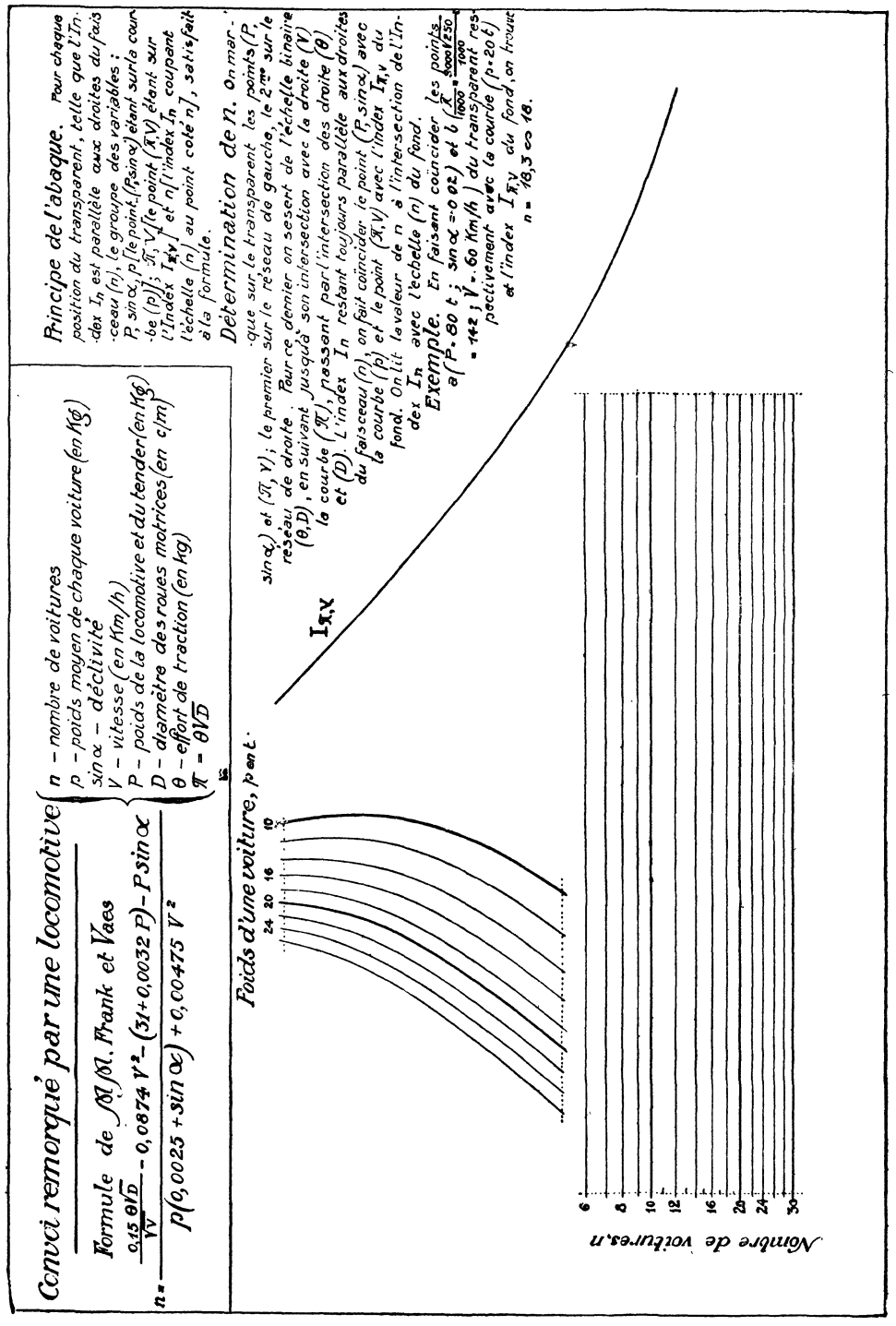


FIG. 31. — *Abaque à transparent orienté de la formule Frank et Vaes.* — Fond.

le transparent. Mais afin de rendre plus facile l'orientation du transparent, on a tracé également sur le fond le faisceau (n) auquel devra toujours être parallèle l'index I_n. En plus le fond porte le faisceau (p) et l'index $I_{\pi,V}$.

Le transparent porte deux réseaux (P, α) et (V, θ $\sqrt{D}$), une échelle binaire (θ, D) et l'index I_n. On a donc pour chaque variable un seul système figuratif.

Pour chaque position du transparent, les valeurs des variables (P, α) et (V, θ, D), dont les points représentatifs sont placés sur les courbes (p) et l'index $I_{\pi,V}$, et de la variable (n), lue sur l'échelle (n), constituent une solution de l'équation qui s'effectue ainsi par une seule opération.

La légende inscrite sur la fig. 31 indique l'emploi de l'abaque en vue de la détermination de n.

§ 5. — Autres exemples de dissociations étudiées dans l'ouvrage.

Pour mémoire, nous allons classer ci-dessus les différents cas de dissociation traités dans cet ouvrage et se rapportant d'abord :

1°. — A des abaques à *transparent oriente à index courbes pour formes canoniques d'équations représentables par des abaques à points alignés* (v. p. 72-73, fig. 59-61).

a) L'équation à 3 variables, d'ordre 5.

$$f_1 = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}$$

est représentable par une dissociation simple au moyen du paramètre éliminable ζ et de la variable commune z_1.

b) L'équation à 3 variables, d'ordre 6

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_1 - f_3}{g_1 - g_3}$$

peut être représentée au moyen d'une dissociation double utilisant deux paramètres éliminables.

c) L'équation à 4 variables.

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_3 - f_4}{g_3 - g_4}$$

sera décomposée au moyen d'un paramètre en deux équations d'ordre 5.

2°. — A *des abaques à transparent orienté pour équations de la forme*

$$ax^m y^n + bx^p y^q + cx^r y^s + \ldots = 0.$$

La plupart de ces relations ont été traitées par M. Mehmke et figurent dans le chapitre V, p. 75 ; ce sont notamment les équations :

a) $ax^m y^n + bx^p y^q + cx^r y^s + 1 = 0$ et $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (v. fig. 62 et 66). Dissociation simple au moyen d'un paramètre non éliminable (donnant lieu à deux systèmes figuratifs) et de trois variables communes.

b) $ax^m + bx^p + cx^r + d = 0$. Dissociation simple au moyen d'un paramètre éliminable et d'une variable commune.

c) $x^m + ax^p + bx^q + cx^r + d = 0$. Dissociation double comportant deux paramètres dont l'un s'élimine et l'autre ne s'élimine pas et est représenté par un système figuratif unique.

d) $ax^m + bx^p + cx^r + dx^t + ex^v + fx^w = 0$. Alors que toutes les équations précédentes étaient résolubles au moyen d'une seule opération, cette équation devra

d'abord être dissociée au moyen d'un paramètre (ζ) en deux équations du type (α) ci-dessus, dans lesquelles ζ remplacera y. La solution sera donnée au moyen d'une double opération par l'intersection des courbes $y = f(\zeta)$.

Note. — On trouvera, p. 42, un exemple intéressant d'une représentation d'un système d'équations obtenue au moyen d'une dissociation simple de chacune des équations.

C. — Systèmes d'équations

Quand plusieurs équations comprennent des variables communes on cherche à établir pour chaque équation un abaque de façon à pouvoir superposer les systèmes figuratifs des variables communes.

En premier lieu on peut citer tous les systèmes d'équations comprenant des équations identiques à celles provenant d'une dissociation d'une équation unique et dans lesquelles les variables communes remplacent les paramètres ; v. pp. 21-29.

En second lieu, nous allons étudier deux cas qui sont ceux que nous avons rencontrés le plus fréquemment dans notre pratique.

§ 1. — **Premier cas.** Un système de n équations :

$$F_1(M_1 N_1, z_5) = 0; \qquad F_2(M_2, N_2, z_8) = 0 \ldots$$

où

$$M_1 = f_1 + f_2 + f_{34}; \qquad M_2 = h_1 + h_2 + f_{67} \ldots$$
$$N_1 = f_1 + f_2 + g_{34}; \qquad N_2 = e_1 + e_2 + g_{67} \ldots$$

pourra être représenté par un abaque à transparent orienté si l'on peut superposer les échelles (z_1) et (z_2). Comme pour les abaques à points alignés, l'accolement s'effectue facilement, si les échelles (z_1) et (z_2) sont des droites :

Prenons le cas de 2 équations, analogues à celle représentée sur la fig. 22, et supposons que :

$$f_1 = mz_1; \quad g_2 = nz_1; \quad h_1 = pz_1; \quad e_1 = qz_2$$
$$f_2 = m'z_2; \quad g_2 = n'z_1; \quad h_2 = p'z_2; \quad e_2 = q'z_2.$$

On peut se donner les modules l_1 et l_2, ainsi que la direction des axes des coordonnées Ox, Oy de l'abaque représentant la première équation. Les valeurs des modules l'_1 et l'_2, ainsi que les angles α'_1 et α'_2 que doivent faire les axes O'x' et O'y' avec l'axe Ox seront tirées des équations suivantes :

$$n\, l_2 = pl'_1 \sin \alpha'_1 + ql'_2 \sin \alpha'_2$$
$$m\, l_1 = pl'_1 \cos \alpha'_1 + ql'_2 \cos \alpha'_2$$

$$n' l_2 = p' l'_1 \sin \alpha'_1 + q' l'_2 \sin \alpha'_2$$
$$m' l_1 = p' l'_1 \cos \alpha'_1 + q' l'_2 \cos \alpha'_2$$

Ces relations supposent que les axes xOy sont rectangulaires.

L'abaque (v. fig. 32) est constitué par un fond portant les réseaux (z_1, z_2) et les faisceaux (z_5), (z_8)..... Le transparent porte les réseaux (z_3. z_4), (z_6, z_7)..... et un point $O'_{1,2}$.

Mode d'emploi :

$$O'_{1,2} \mapsto P_{12} \quad x'_\infty \mapsto Ox \quad \begin{cases} P'_{34} \mapsto L_5 \\ P'_{67} \mapsto L_8 \end{cases}.$$

1°. — A titre d'exemple de ce cas nous reproduisons ci-dessous (fig. 33 et 33')

l'ABAQUE POUR LA DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ ET DE LA PRESSION DE L'AIR, qui permet de résoudre les deux équations dites « balistiques » suivantes :

$$\log\left(\delta \cdot \frac{p_0}{273+t_0}\right) = \left(\frac{0{,}0342}{b} - 1\right)\log\left(1 - \frac{bh}{273+t_0}\right)$$

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{0{,}0342}{b}\log\left(1 - \frac{bh}{273+t_0}\right)$$

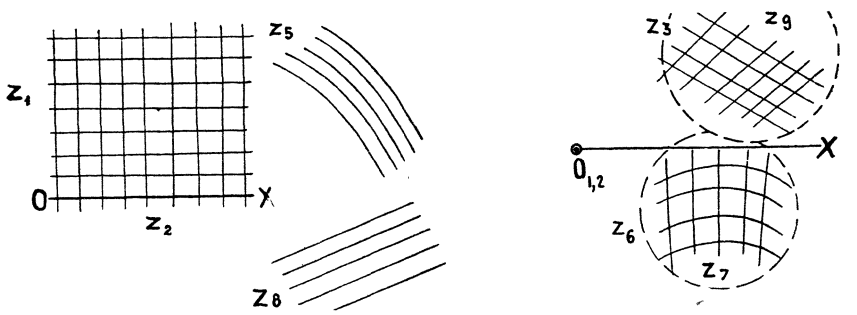
où δ — est la densitè en kg — m/m³, p et p_0 — les pressions en mm de mercure à l'altitude h et au sol, t_0 — la température au sol et b le coefficient de la formule balistique de décroissance de la température $t = t_0 - bh$.

Chacune des équations est représentable sans dissociation par un abaque à transparent orienté du type de la fig. 5 dont le mode d'emploi est :

$$P'_{34} \mapsto P_{12}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{56} \mapsto L_7$$

La forme canonique de ces équations est :

$$F(f_{12} + f_{34} + f_{56},\ g_{12} + g_{34} + g_{56},\ z_7) = 0 \tag{3}$$



Fond. Transparent

FIG. 32.

Ecrivons les 2 équations ci-dessus sous la forme :

$$F_1\left(\frac{\delta p_0}{273+t_0}, \frac{h}{273-t_0}, b\right) = 0$$

$$F_2\left(\frac{p}{p_0}, \frac{h}{273+t_0}, b\right) = 0.$$

ou bien :

$$F_1\{[\log p_0 - \log(273+t_0) + \log\delta],\ [-\log(273+t_0) + \log h], b\} = 0$$

$$F_2\{[-\log p_0 + \log p],\ [-\log(273+t_0) + \log h], b\} = 0$$

équations de la forme (3), représentables par les abaques séparés

$$O' \mapsto P_{p_0, t_0} \qquad x'_\infty \mapsto Ox \qquad P'_{h,\delta} \mapsto L_b$$

$$O' \mapsto P_{p_0, t_0} \qquad x'_\infty \mapsto Ox \qquad P'_{h,\delta} \mapsto L_b$$

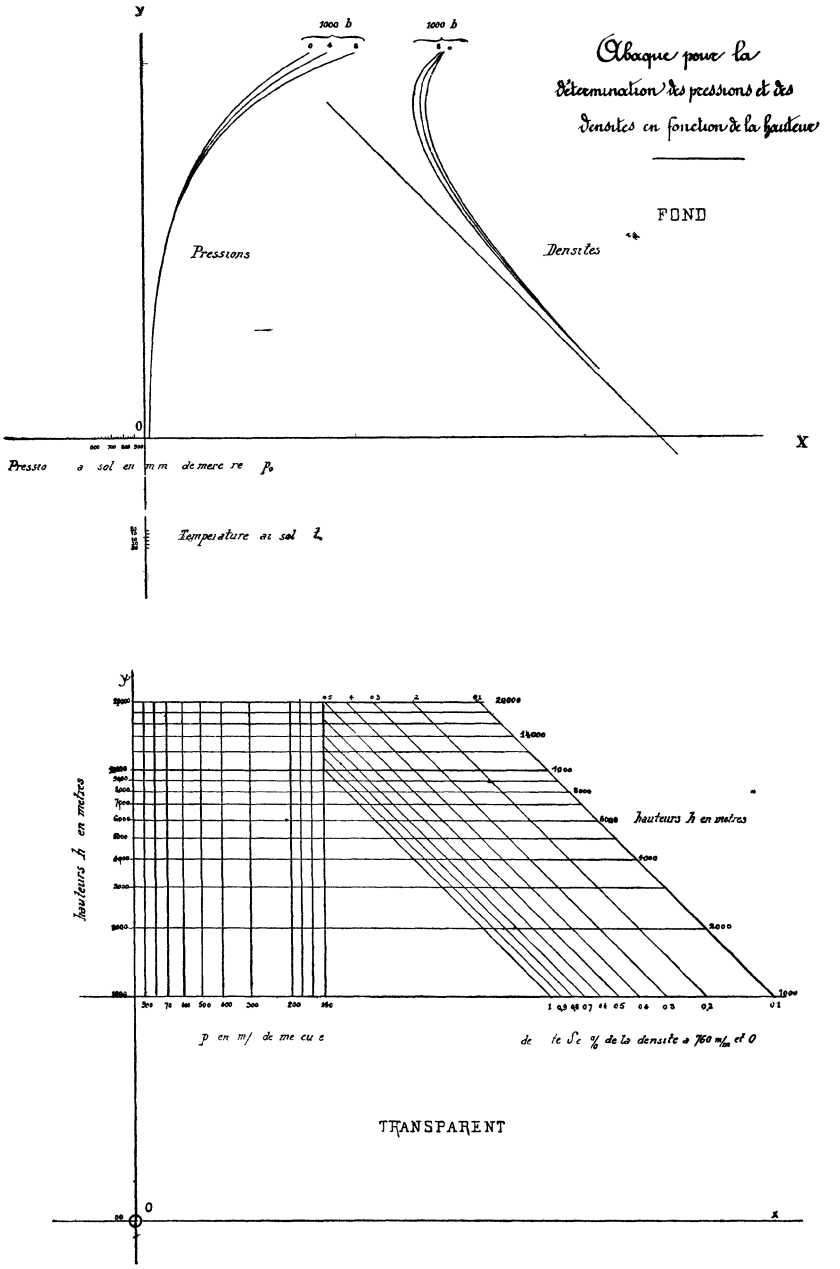


FIG 33 et 33′ — *Abaque pour la détermination des densités et des pressions de l'air.*

Mode d'emploi — L'axe O′x′ du transparent étant parallèle à l'axe Ox du fond, on fait passer l'axe O′x′ par le point de l'échelle Oy cote t_0 et l'axe O′y′ par le point de l'échelle Ox côte p_0. On lit la valeur de la densité δ (à droite du transparent) sur le réseau (δ, h) au droit de l'intersection de la droite (h) avec la courbe (b) du fond. La valeur de la pression p est lue de la même façon sur le réseau à gauche du transparent.

En superposant les faisceaux représentant les variables communes p_0, t_0 et h, on obtient l'abaque des fig. 33 et 33′, dont le mode d'emploi est :

$$O' \mapsto P_{p_0, t_0} \qquad x'_\infty \mapsto Ox \qquad P'_{h,\delta} \mapsto L_h\,, \quad P'_{h,p} \mapsto L_h$$

2°. — Énumération des abaques établis.

Nous avons établi de nombreux abaques de ce système et notamment ceux qui sont tracés sur les fig. 33, 77, 79, 80, 81, 89, 92, 93, 94, 95, 97, 98 et 126.

§ 2. — **Deuxième cas.** — Les équations

$$F_1\,(M,\ N,\ f_{78}) = O \text{ et } F_2\,(M,\ N,\ g_{78}) = O$$

se traduisent par un abaque à transparent orienté à 4 réseaux, dont deux sur le fond et deux sur le transparent (1), à condition d'avoir :

$$M = f_{12} + f_{34} + f_{56} \text{ et } N = g_{12} + g_{34} + g_{56},$$

ce qui permet de superposer les réseaux (z_2, z_2), (z_3, z_4), (z_5, z_6) des abaques représentant les deux équations.

1°. — Premier exemple. — Un abaque de cette forme (v. fig. 34) est constitué par l'abaque que nous avons établi en transformant une méthode *nomographique* la *méthode de calcul par le trait* imaginée par M. Rith pour le choix des hélices aérienne (Voir « Etudes sur l'Hélice aérienne faites au Laboratoire d'Auteuil » et 2e Partie p. 106 de notre ouvrage).

Les expériences sur une famille d'hélices différant par le pas donnent la variation des coefficients de puissance $(P_m/n^3 D^5)$ et des rendements (ρ) en fonction du coefficient de vitesse (V/nD) et du pas relatif (h), — P_m étant la puissance motrice, n — le nombre de tours, D — le diamètre le l'hélice et V — la vitesse de l'avion.

En posant

$$M = \log(V/nD) \text{ et } N = \log(P_m/n^3 D^5),$$

on a les équations

$$\rho = f_1\,(M,\ h) \text{ et } N = f_2\,(M,\ h)$$

qui seront représentées par l'abaque fig. 34.

Mode d'emploi ·

Dans le cas de la détermination du rendement (ρ) et du pas (h) de l'hélice connaissant P_m, V, n et D

$$(P_m, V)' \mapsto O, \quad P_{m(\infty)} \mapsto D_{(V/nD)}, \quad (n, D)' \mapsto (P, h).$$

On trouvera dans la 2e Partie de ce travail d'autres abaques à transparent orienté basés sur les mêmes considérations et s'appliquant au choix d'hélices sustentatrices et de moulinets, et à l'étude du fonctionnement de groupes motopropul-

(1) L'abaque à points équidistants de M. Luckey (v. p. 82) constitue un exemple d'abaque à transparent tournant à 4 réseaux, dont deux sur le fond et deux sur le transparent, représentant une *seule* équation décomposable en deux équations au moyen de quatre variables communes et d'un paramètre.

seurs ou sustentateurs et de groupes moulinets-génératrices, ainsi qu'à l'étude des ventilateurs, pompes et turbines.

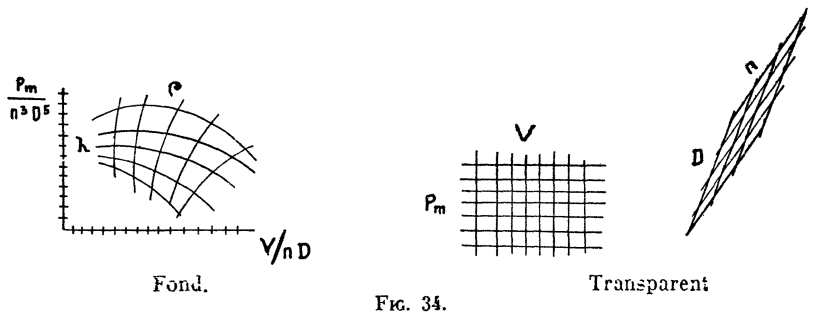
2°. — Deuxième exemple. Emploi d'échelles binaires.

Supposons que les deux équations étudiées ci-dessus soient de la forme,

$$F_1 (M, N, f_{89}) = O \text{ et } F_2 (M. N, g_{89}) = O,$$

où

$$M = f_{12} + f_{34} + F(z_5^m, z_6^n, z_7^p), \qquad N = g_{12} + g_{34} + \Phi(z_5^{m'}, z_6^{n'}, z_7^{p'})$$



Fond. Transparent

Fig. 34.

Nous mettrons F et Φ sous la forme

$$F[(z_5^a z_6^b)^\alpha (z_6^c z^d)^\beta] \quad \text{et} \quad \Phi[(z_5^a z_6^b)^{\alpha'} (z_6^c z_7^d)^{\beta'}]$$

ou plus simplement

$$F[(f_{56})^\alpha (f_{67})^\beta] \quad \text{et} \quad \Phi[(f_{56})^{\alpha'} (f_{67})^{\beta'}].$$

On pourra alors tracer l'abaque (fig. 35) analogue à celui de la fig. 34 et dont le mode d'emploi sera :

$$P'_{12} \mapsto P_{56,67}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{34} \mapsto P_{89}.$$

On complétera l'abaque par deux échelles binaires (z_5, z_6) et (z_6, z_7) tracées sur

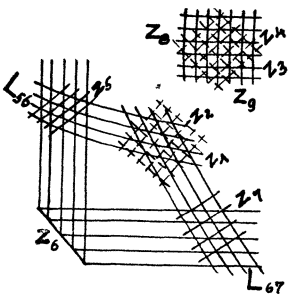


Fig. 35.

le prolongement des faisceaux (z_{56}) et z_{67}). Au sujet des échelles binaires, v. p. 3.

La fig. 127 de la 2e Partie de cet ouvrage représente le schéma d'un *abaque pour l'étude des réchauffairs à plaques* qui constitue un exemple du cas traité ci-dessus.

L'abaque pour la détermination des coefficients d'éclairage (v. fig. 129) a été établi d'après le même principe.

3°. — Enumération des abaques établis.

Les abaques correspondant au deuxième cas traité ci-dessus sont ceux tracés sur les fig. 82, 83, 85, 86, 90, 125, 127, 128 et 129.

§ 3. — Systèmes d'équations et dissociation.

Nous allons étudier un exemple très intéressant portant sur une représentation de 2 équations, obtenue au moyen de la dissociation de chacune d'elle.

Nous avons rencontré ce cas au courant de travaux en vue d'établissement d'un *abaque pour la détermination des éléments de fonctionnement et de construction des réchauffeurs d'air « Roubaix »*, qui nous a été demandé par la *Société Anonyme des Foyers Automatiques.*

Quoique finalement nous n'avons pas adopté les abaques ci-dessous, nous avons tenu néanmoins à les publier ici, car ils présentent un grand intérêt nomographique.

Soient θ_e, θ_s et t_e, t_s les températures d'entrée et de sortie dans le réchauffeur des fumées et de l'air.

C et ρ — la caractéristique et le coefficient d'utilisation du réchauffeur. Ces deux notions, introduites par nous dans la théorie des réchauffeurs d'air, indiquent la quantité de calories abandonnées par 1 kg de fumées pour 1° de différence logarithmique des t° moyennes des fumées et de l'air et le rapport $(\theta_e - \theta_s) : (\theta_e - t_e)$ de la chaleur utilisée par le réchauffeur à la chaleur disponible;

$m = 1{,}02\, P_f/P_a$, où P_f et P_a sont les poids horaires des fumées et de l'air.

Les abaques, que nous avons établis, représentent 2 équations, dont la première :

$$1{,}02\, P_f(\theta_e - \theta_s) = P_a(t_e - t_s) \tag{1}$$

exprime l'égalité des quantités de chaleur abandonnée par les fumées et reçue par l'air.

La deuxième équation donne la relation entre les températures, le coefficient (K) de transmission de chaleur, le poids horaire P_f et la surface S.

$$\frac{(\theta_e - t_s) - (\theta_s - t_e)}{0{,}25\,(\theta_e - \theta_s)\ln\left[\dfrac{\theta_e - t_s}{\theta_s - t_e}\right]} = \frac{P_f}{SK} = \frac{1}{C}. \tag{2}$$

Cette équation peut être d'abord mise sous la forme :

$$\frac{(\theta_m - t_m)\quad Z}{0{,}25\,(\theta_e - \theta_s)} = \frac{1}{C}.$$

En posant $A' = 0{,}25/CZ$, on obtient :

$$A'\,\theta_e + (t_e - \theta_e) = A'\,\theta_s + (\theta_s - t_s). \tag{2'}$$

L'équation (1) peut être transformée de la façon suivante :

$$(m + 1)\,\theta_e + (t_e - \theta_e) = (m + 1)\,\theta_s + (t_s - \theta_s) \tag{1'}$$

Chacune de ces équations peut être représentée (1) en la dissociant au moyen d'un paramètre éliminable ζ et de la variable commune A' ou $(m + 1)$.

Dans l'équation (1') les faisceaux (θ_e) et (θ_s) ainsi que (t_e) et (t_s) coïncident, il en est de même des faisceaux (θ_e) et (θ_s) dans l'équation (2').

D'autre part on peut superposer les faisceaux (θ_e) et par conséquent (θ_s), ainsi que (t_e) des abaques des 2 équations. On obtient ainsi l'abaque de la fig. 36 qui est complété par une échelle binaire $Z = f[(\theta_e - t_s), \quad (\theta_s - t_e)]$ tracée sur le transparent.

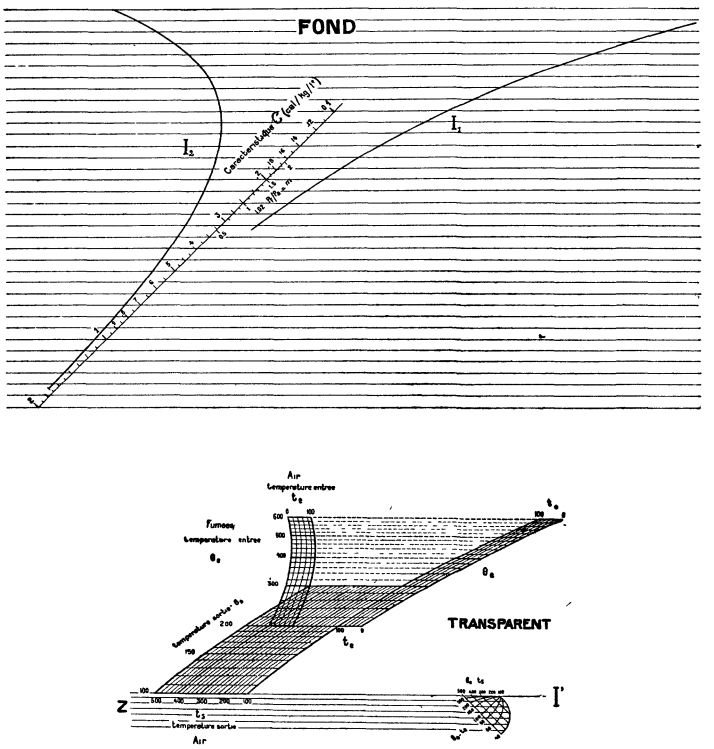


Fig. 36 et 36'. — *Températures de l'air et des fumées dans un réchauffair.* 1er abaque.

La détermination de C s'effectue comme suit, quand on connait θ_e, t_e, θ_s et m :

a) — détermination de t_s. $x'_\infty \longmapsto Ox$, $I' \longmapsto (m)$, $(\theta_e, t_e)' \longmapsto I_1$, $(\theta_s, t_s)' \longmapsto I_1$

b) — détermination de C. $x'_\infty \longmapsto Ox$, $(\theta_e, t_e)' \longmapsto I_2$, $(\theta_s, t_s)' \longmapsto I_2$, $D_{(z)} \longmapsto (C)$.

Note. — Pour la détermination de t_s on se sert du réseau (θ_e, t_e) placé vers la droite du transparent; le réseau $(\theta_e\ t_e)$ placé vers la gauche sert à la détermination de C. Le contact de position x'_∞ Ox s'obtient par le parallélisme des droites (Z) du transparent et des droites du faisceau tracé sur le fond.

---

(1) On utilise l'anamorphose semi-logarithmique, en posant

$$M = \log(m + 1) + \log\theta_e = \log A' + \log\theta_e \ldots ; N = t_e - \theta_e - \zeta = \theta_s - t_s - \zeta.$$

L'équation (2) peut être également mise sous la forme :

$$(2'') \qquad C = \frac{0{,}25 \ln \left[\frac{\theta_e - t_s}{\theta_s - t_e} \right]}{(1 - m)}.$$

En posant $W = e^{4C(1-m)}$ et en éliminant t_s entre les équations (1) et (2''), on obtient l'équation :

$$\frac{\theta_e}{\theta_s} \cdot \frac{1 - m}{m - W} - \frac{t_e}{\theta_s} \cdot \frac{W - 1}{m - W} + 1 = 0$$

ou $\frac{1 - m}{m - W}$ et $\frac{1 - 1}{m - W}$ sont des fonctions de m et de C.

Nous avons d'abord songé à un abaque à transparent orienté du type de la fig. 5, obtenu sans dissociation de la proposée, et dont le mode d'emploi aurait été

$$x'_\infty \vdash\!\dashv Ox, \quad (t_e, \theta_e)' \vdash\!\dashv (m, C), \quad (\theta_s)' \vdash\!\dashv I.$$

Mais en essayant de tracer le réseau (m, C), nous nous sommes aperçus qu'il se réduisait à une courbe unique, car $\frac{1 - m}{m - W} + \frac{W - 1}{m - W} = 1$, (voir p. 96).

Il aurait donc fallu tracer un faisceau arbitraire (m) et un faisceau correspondant (I).

Heureusement l'équation des courbes (m) était la même que celle de l'index I.

On peut utiliser le faisceau (m) comme faisceau (I), ce qui a été fait sur l'abaque de la fig. 37 dont le mode d'emploi est :

$$x'_\infty \vdash\!\dashv Ox, \quad (\theta_e, t_e)' \vdash\!\dashv (P_f/P_a), \quad (\theta_s)' \vdash\!\dashv (C, P_f/P_a).$$

Je rappelle que $m = 1{,}02\, P_f/P_a$.

L'orientation convenable du transparent est obtenue en rendant parallèles les droites du faisceau (t_e) du transparent et les droites inclinées à 45° tracées en traits fins sur la partie gauche du fond.

L'utilisation de l'abaque est assez laborieuse au point de vue de la mise en place du transparent, surtout quand il faut interpoler entre les valeurs de m. Aussi l'avons nous abandonné, quoique la solution à première vue paraissait des plus élégantes.

D. — Emploi de coordonnées polaires

Nous pouvons dire que dans le cas des *coordonnées polaires*, comme dans celui des *coordonnées cartésiennes*

pour qu'une équation puisse être représentée par un abaque, elle doit pouvoir être mise, soit sous la forme :

$$F(R, \alpha, z_a) = 0,$$

soit résulter de l'élimination de variables auxiliaires entre des équations de même forme.

Prenons le cas de l'abaque représenté sur la fig. 1 et dans lequel le trans-

parent a trois degrés de liberté : deux translations et une rotation. Nous avons superposé sur la fig. 38 le transparent et le fond, les systèmes du transparent étant tracés en traits interrompus.

On voit facilement que

$$R^2 = [f_{12} \sin g_{12} + f_{34} \sin (g_{34} + f_7 + f_8) + f_{56} \sin (g_{56} + f_7 + f_8)]^2$$
$$+ [f_{67} \cos g_{12} + f_{34} \cos (g_{34} + f_7 + f_8) + f_{56} \cos (g_{56} + f_7 + f_8)]^2$$

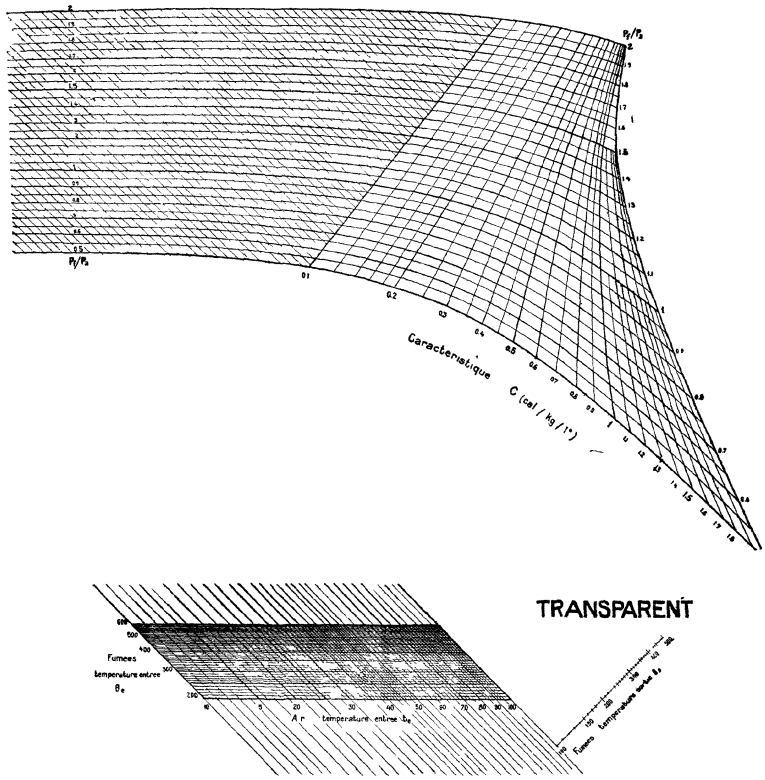


Fig. 37 et 37'. — *Températures de l'air et des fumées dans un réchauffair.* 2e abaque.

et

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{f_{12} \sin g_{12} + f_{34} \sin (g_{34} + f_7 + f_8) + f_{56} \sin (g_{56} + f_7 + f_8)}{f_{12} \cos g_{12} + f_{34} \cos (g_{34} + f_7 + f_8) + f_{56} \cos (g_{56} + f_7 + f_8)}.$$

Les formes des équations peuvent être déterminées exactement comme dans le cas des coordonnées cartésiennes en considérant d'abord la représentation sans dissociation, puis celle avec dissociation et en étudiant dans chacun de ces cas les différentes combinaisons des degrés de liberté du transparent. Il est évident qu'en utilisant les coordonnées polaires, ainsi que tout autre système de coordonnées nous ne pouvons pas représenter des équations différentes de celles que nous avons étudiées ci-dessus au moyen de coordonnées cartésiennes. Aussi nous ne repren-

drons pas cette étude, d'autant plus que les formes non explicites des équations auxquelles nous conduirait l'utilisation des coordonnées polaires différent sensiblement des équations qu'on rencontre le plus souvent en pratique. Cependant dans certains cas l'emploi de coordonnées polaires peut être utile.

Ainsi considérons les abaques à un degré de liberté, représentés sur la fig. 6 et 7.

L'abaque à transparent *guidé* (fig. 6) représente une équation de la forme

$$F[f_1 - f_2 - f_{34},\ g_{34},\ z_5] = 0$$

Celui à transparent *tournant* (fig. 7) correspond à l'équation

$$F[f_{12}\cos(f_3 + f_4) - g_{12}\sin(f_3 + f_4),\ f_{12}\sin(f_3 - f_4) + g_{12}\cos(f_3 - f_4),\ z_5] = 0$$

Si nous employons les coordonnées polaires, ce dernier abaque représentera une équation

$$F(R,\ \alpha,\ z_5) = 0$$

où les valeurs de R et de α peuvent être déterminées en annulant dans les expressions

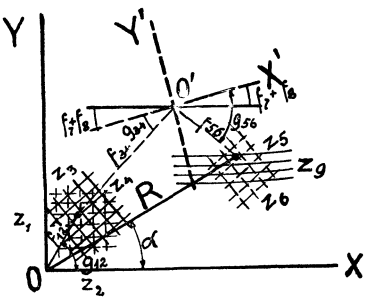


FIG 38

générales de R et de α données ci-dessus les valeurs de f_{12} et de f_{34} ; en changeant convenablement les indices on obtient :

$$F[f_1 - f_2 - f_{34},\ g_{34},\ z_5] = 0$$

qui est la forme de l'équation représentable par l'abaque à transparent guidé. On peut par conséquent dire que toute équation représentable par un abaque à transparent *guidé* du type de la fig 6 peut être également représentée par l'abaque à transparent *tournant* du type de la fig 7. D'ailleurs ces abaques sont des généralisations des règles et des cercles à calculs, qui effectuent les mêmes opérations.

De même une équation représentable au moyen d'une dissociation simple par l'élimination de ζ_1 entre les équations :

(a) $$F_1(\zeta_1 - f_{12},\ g_{12},\ z_3) = 0 \quad \text{et} \quad F_2(\zeta_1 + f_{45},\ g_{45},\ z_4) = 0$$

peut être représentée indifféremment par un abaque à transparent guidé (v. fig. 16) ou un abaque à transparent tournant (v. fig. 17).

L'étude ci-dessus mériterait d'être poussée plus loin, en examinent la question de savoir quels sont les cas dans lesquels une translation peut être remplacée par une rotation et *vice versa.*

Nous nous bornerons pour le moment à poser ce problème, sans le résoudre, et nous dirons quelques mots sur deux questions connexes qui également n'ont pas été traitées dans ce travail.

La première est celle de l'explicité des formes des équations représentables par des abaques. Ainsi l'équation (a) ci-dessus peut être mise sous la forme plus explicite

$$f_{12} + \varphi(g_{12}, z_3) = f_{45} + \psi(g_{45}, z_6)$$

Il suffit à cet effet d'eliminer ζ_1 entre les deux équations.

Un autre cas où l'on peut ramener une équation à une forme très explicite est celui que nous avons traités p. 82

La deuxième question est la suivante : étant donnée une équation reconnaître si elle est représentable par un abaque à transparent tournant ou orienté Cette question a été, après de longues recherches, résolue théoriquement pour les abaques à points alignés, qui constituent (voir p 68) un cas particulier des abaques à transparent Pratiquement, pour les abaques à points alignés, on ne recherche pas à appliquer les règles très compliquées au moyen desquelles cette théorie permet de voir si une équation peut être représentée par un abaque, mais on cherche à la mettre sous une forme canonique

Nous avons procédé de la même façon pour les abaques autres que ceux à points alignés ; néanmoins la question ci-dessus présente de l'intérêt et mérite d être étudiée.

CHAPITRE II

Abaques à contacts tangentiels

Lorsque deux courbes sont tangentes nous disons qu'il y a entre ces courbes un contact *tangentiel*.

La théorie des abaques comprenant de tels contacts n'avait pas été encore étudiée et d'ailleurs il n'existait pas jusqu'à présent d'abaques à contacts tangentiels sauf quelques rares exemples, dans lesquels une des courbes était une droite.

Nous avons établi depuis 1915 un certain nombre de ces abaques et nous allons examiner ci-dessous leur théorie.

En ce qui concerne leur forme géométrique il est évident, qu'on obtiendra tous les types possibles d'abaques en remplaçant dans les abaques à contacts ponctuels, que nous avons étudiés plus haut, chaque contact, constitué par une courbe et un point, par un contact tangentiel.

Nous avons entouré dans les fig. 1, 4, 5, 6, et 16 à 29 d'un cercle en traits pointillés les réseaux des points à deux cotes et les faisceaux, correspondant aux contacts ponctuels en question ; pour obtenir le schéma de l'abaque à contacts tangentiels, il n'y aura qu'à remplacer le réseau par un faisceau.

On obtiendra ainsi soit des abaques *mixtes* à contacts ponctuels et tangentiels, soit des abaques à contacts tangentiels seulement. Ces derniers peuvent également devenir des abaques mixtes, si tous les réseaux de points à 2 cotes n'ont pas été remplacés par des faisceaux.

L'énoncé du mode d'emploi sera changé : au lieu de dire « on fait passer la courbe (z_1) par le point (z_2, z_3) » on dira « on rend tangentes les courbes (z_1) et (z_2) ».

Dans la méthode de M. d'Ocagne on remplacera le signe

$$P'_{23} \vdash\!\dashv P_1 \text{ par le signe } L_1 \vdash\!\dashv L_2.$$

A. — Forme des équations

Pour se rendre bien compte de la forme des équations représentables par les abaques tangentiels, nous allons examiner en détail un type particulier d'abaque, correspondant à l'abaque ponctuel d'une équation représentable par un abaque à deux degrés de liberté (deux translations) ; voir fig. 5.

La figure 39 schématise cet abaque.

Nous avons figuré sur le transparent en traits pointillés le réseau (ζ_1, ζ_2) de l'abaque à contacts ponctuels, remplacé par le faisceau (z_6).

Il est évident que l'abaque à contacts tangentiels représente une équation

$$G(z_1 \ldots z_6) = 0.$$

résultant de l'élimination de *quatre* paramètres x, y, ζ_1, ζ_2 entre les *cinq* équations suivantes :

(1) $$F[f_{12}+f_{34}+f(\zeta_1, \zeta_2),\ g_{12}+g_{34}+g(\zeta_1, \zeta_2), z_5]=0.$$

(2) $$\Phi(\zeta_1, \zeta_2, z_6)=0.$$

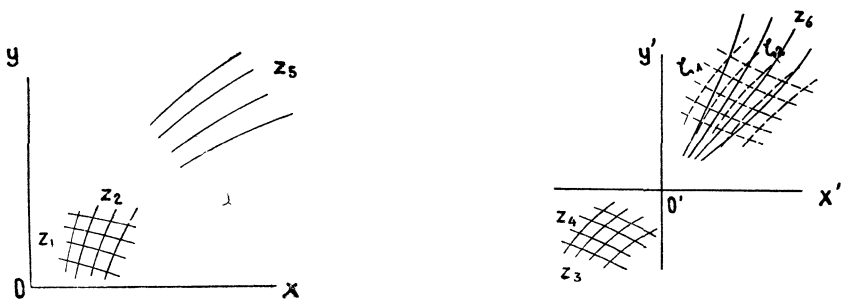
(3) et (4) $$x=f(\zeta_1, \zeta_2), \quad y=g(\zeta_1, \zeta_2).$$

(5) $$\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$$

où F'_x, Φ'_x et F'_y, Φ'_y sont les dérivées par rapport à x et y des équations

$$F(x, y, z_5)=0$$
$$\Phi(x, y, z_6)=0,$$

c'est-à-dire des équations des faisceaux (z_5) et (z_6) dans les systèmes des coordon-



Fond. Transparent.

FIG 39

nées Oxy et O'xy , la première de ces équations s'obtient en posant dans l'équation (1)

$$x = f_{12} + f_{34} + f(\zeta_1,\zeta_2),$$

$$y = g_{12} + g_{34} + g(\zeta_1,\zeta_2).$$

La deuxième équation résulte de l'élimination de ζ_1 et de ζ_2 entre les équations (2), (3), et (4).

On voit immédiatement :

1° que l'équation (5) constitue la condition analytique du maximum ou du minimum de z_5 ou de z_6, les valeurs de z_1 . z_4, z_6 ou de z_1. z_5 étant données.

2° que l'équation $G(z_1.. z_6) = 0$ représente la relation entre les valeurs maxima de z_5 ou de z_6 et les valeurs de z_1 ...z_4.

En somme l'abaque à contacts tangentiels de l'équation unique

$$G(z_1... z_6) = 0$$

est un cas particulier de l'abaque à contacts ponctuels de deux équations

$$F(z_1 \ldots z_5, \zeta_1, \zeta_2) = 0$$

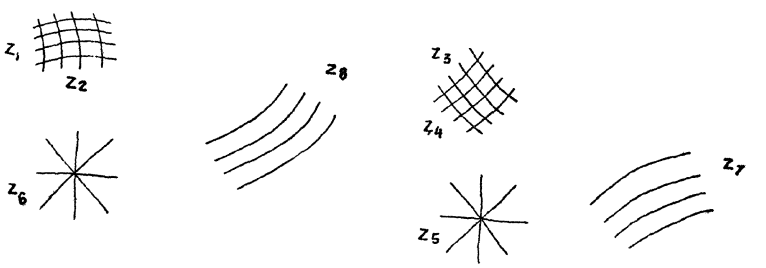
$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2, z_6) = 0,$$

ce cas particulier correspondant à la mise en équation des questions de maximum ou de minimum des variables z_5 ou z_6

C'est sous cette forme de recherche de certains maxima ou minima, ainsi que nous le verrons plus loin, que nous avons été amené à établir plusieurs abaques à contacts tangentiels

On voit que pour obtenir les équations représentables par des abaques à contacts tangentiels, il suffira de remplacer dans toutes les expressions des fonctions M et N, indiquées précédemment pour les abaques à contacts ponctuels, les variables entrant dans les réseaux à deux cotes en contact avec des faisceaux par les paramètres ζ_1, ζ_2 et d'adjoindre a l'équation ainsi obtenue les équations (2), (3), (4) et (5).

Ainsi l'abaque ci-dessous à contacts tangentiels,



Fond. Transparent.

FIG. 40.

dont le *mode d'emploi* est :

$$P'_{34} \vdash\!\dashv P_{12}, \quad P'_{\infty}(D_5) \vdash\!\dashv D_6, \quad L_7 \vdash\!\dashv L_8$$

et qui correspond à l'abaque fig. 1, représente une équation

(1) $$G(z_1, \ldots, z_8) = 0$$

résultant de l'élimination des paramètres x, y, ζ et ζ' entre les équations

(2) $$F[f_{12} - (f_{34} + f_{\zeta_1, \zeta_2}) \cos f_{56}^{(1)} - (g_{34} + g_{\zeta_1, \zeta_2}) \sin f_{56},$$

$$g_{12} + (f_{34} + f_{\zeta_1, \zeta_2}) \sin f_{56} + (g_{34} + g_{\zeta_1, \zeta_2}) \cos f_{56}, z_8)] = 0$$

(3) $$x = f_{12} + (f_{34} + f_{\zeta_1, \zeta_2}) \cos f_{56} - (g_{34} + g_{\zeta_1, \zeta_2}) \sin f_{56}$$

(4) $$y = g_{12} + (f_{34} + f_{\zeta_1, \zeta_2}) \sin f_{56} + (g_{34} + g_{\zeta_1, \zeta_2}) \cos f_{56}$$

(5) $$\Phi(\zeta, \zeta', z_7) = 0$$

(6) $$\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{\Phi'_x}{\Phi'_y},$$

(1) Pour simplifier nous écrivons f_{56} à la place de $f_5 + f_6$.

où F'_x, Φ'_x, F'_y et Φ'_y sont les dérivées par rapport à x et y des équations (2) et (5)

$$F(x, y, z_8) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(x, y, z_7) = 0,$$

cette dernière s'obtenant par l'élimination de ζ et ζ' entre les équations (3), (4) et (5).

Il y a lieu de remarquer que l'abaque à contacts tangentiels de l'équation (1) constitue un cas particulier de l'abaque à contacts pontuels des équations (2) et (5), correspondant à la mise en équation des questions de maxima ou de minima de z_7 ou z_8.

De même l'abaque à transparent orienté à contacts tangentiels, correspondant à l'abaque à transparent orienté à contacts ponctuels d'une équation représentable par double dissociation (v. fig. 19), figurera l'équation suivante :

$$\text{I} \quad \begin{cases} F_1[\alpha + f_1(\zeta_1, \zeta'_1), \quad \beta + g_1(\zeta_1, \zeta'_1), z_1] = 0 \\ \Phi_1(\zeta_1, \zeta'_1, z_2) = 0. \\ x = f_1(\zeta_1, \zeta'_1); \quad y = g_1(\zeta_1, \zeta'_1) \\ F'_{1x}/F'_{1y} = \Phi'_{1x}/\Phi'_{1y}. \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} F_2[\alpha + f_2(\zeta_2, \zeta'_2), \quad \beta + g_2(\zeta_2, \zeta'_2), z_3] = 0 \\ \Phi_2(\zeta_2, \zeta'_2, z_4) = 0 \\ x = f_2(\zeta_2, \zeta'_2); \quad y = g_2(\zeta_2, \zeta'_2) \\ F'_{2x}/F'_{2y} = \Phi'_{2x}/\Phi'_{2y} \end{cases}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} F_3[\alpha + f_3(\zeta_3, \zeta'_3), \quad \beta + g_3(\zeta_3, \zeta'_3), z_5] = 0 \\ \Phi_3(\zeta_3, \zeta'_3, z_6) = 0 \\ x = f_3(\zeta_3, \zeta'_3), \quad y = g_3(\zeta_3, \zeta'_3) \\ F'_{3x}/F'_{3y} = \Phi'_{3x}/\Phi'_{3x} \end{cases}$$

L'élimination de x, y, $\zeta_1 .. \zeta_3$ dans les groupes I, II et III et l'élimination de α et β entre ces groupes, conduirait à une équation :

$$G(z_1 \ldots . z_6) = 0$$

représentée par l'abaque de la fig. 41.

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \mapsto Ox, \quad L'_2 \mapsto L_1, \quad L'_4 \mapsto L_3 \quad L'_6 \mapsto L_5$$

$O'x'$ étant parallèle à Ox, on rend tangentes entre elles les courbes (z_2) et (z_1), ainsi que les courbes (z_4) et (z_3) ; la valeur inconnue de z_5 est donnée par la cote de la courbe du *faisceau* (z_5) tangente à la courbe (z_6).

Au point de vue analytique cet abaque résout le problème suivant :

déterminer pour une valeur donnée de z_6 la valeur maximum ou minimum inconnue de z_5 à condition que la valeur donnée de z_3 soit maximum ou minimum

pour la valeur donnée de z_4 et que la valeur donnée de z_1 soit maximum ou minimum pour la valeur donnée de z_2.

B. — Exemples

§ 1. — Abaque pour la détermination d'après la théorie de W. Froude-Drzewiecki des profils et des angles d'attaque des sections d'un moulinet (1) fournissant la puissance maximum pour une vitesse de vent et un diamètre donnés.

Soient :

P_m — la puissance fournie par le moulinet

V — la vitesse du vent

D — le diamètre du moulinet

n — le nombre de tours/sec du moulinet

l — le rapport de la largeur de la pale au diamètre

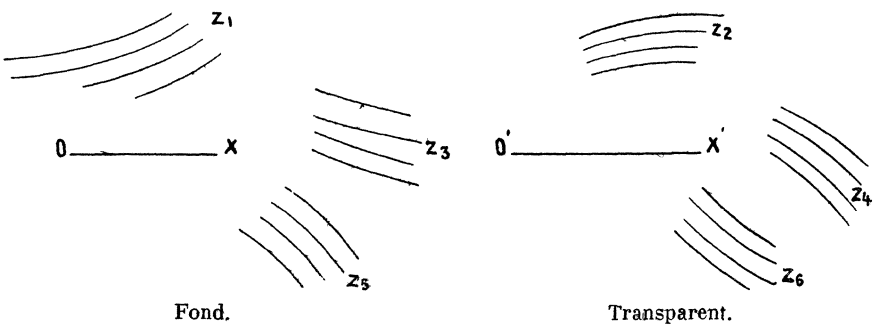


FIG 41

r — le rayon d'une section quelconque de la pale

$$Z = \frac{\pi n D}{V} \quad \text{et} \quad z = \frac{2 \pi n r}{V}$$

K_x et K_y sont les composantes, parallèles et normales à la direction du vent relatif, de l'effort de l'air sur une aile d'un m^2 de surface à la vitesse de 1 m/sec.

Les valeurs de K_x et K_y sont déterminées expérimentalement au laboratoire aérodynamique ; pour une aile donnée elles varient avec l'angle d'attaque.

L'expression

$$\Phi\left(\frac{K_x}{K_y},\ K_y,\ C\right) = 0$$

(1) Un moulinet est une petite hélice accouplée à une génératrice d'éclairage ou de T. S. F. qu'on place sur un avion ; sous l'action du vent elle prend un mouvement de rotation et fournit ainsi une certaine puissance.

représentera les résultats du laboratoire, C étant un paramètre désignant le type d'aile.

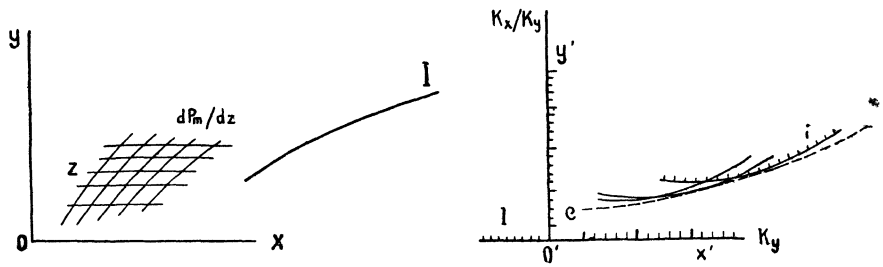
La théorie de l'hélice de M. Drzewiecki permet d'établir la relation.

$$F\left(\frac{dP_m}{dz},\ \frac{K_x}{K_y},\ K_y,\ z,\ l\right) = 0$$

entre la puissance $\frac{dP_m}{dz}$ fournie par un élément de la pale et les autres variables.

Le problème pratique est le suivant : déterminer pour chaque section de la pale (c'est-à-dire pour chaque valeur de z) le profil de l'aile (valeur de C) et l'angle (valeur de K_x et K_y) donnant le maximum de $\frac{dP_m}{dz}$ et par conséquent le maximum de puissance motrice.

L'abaque, schématisé sur la fig. 42 (1), permet de résoudre ce problème.



Fond. Transparent.

FIG. 42

C'est un abaque à transparent orienté à contacts tangentiels, analogue à celui que nous avons étudié plus haut, fig. 39, avec cette différence, que le faisceau (z_5) est réduit à un index, que le réseau (z_3, z_4) est réduit à l'échelle l et que

$$x = \zeta_1 = K_y \text{ et } y = \zeta_2 = K_x/K_y$$

Mode d'emploi :

$$O'x' \mapsto D_z,\quad C \mapsto I,\quad P'_1 \mapsto L_{\frac{dP_m}{dz}}.$$

On fait glisser O'x' sur la droite (parallèle à Ox) côtée z, jusqu'à ce que l'enveloppe des courbes C (dont chacune est graduée en valeurs de l'angle d'attaque et correspond à un profil déterminé) tangente l'index I ; on lit au droit du point l (valeur donnée), la valeur de dP_m/dz.

En recommençant pour chaque valeur de z, depuis z_0 (moyeu de l'hélice) jusqu'à Z (extrémité de la pale), on trace sur le réseau (z, dP_m/dz) la courbe $dP_m/dz = f(z)$ qui permet de calculer la valeur de P_m.

On a déterminé en même temps les valeurs de l'angle d'attaque et le profil pour chaque section (z) qui permettront de construire le moulinet.

(1) On trouvera l'original à la p. 105 de la 2e Partie, fig. 81.

Si l'on se donnait une fois pour toutes l'enveloppe des courbes (C), on pourrait en portant sur le réseau (dP_m/dz, z) la trace du point O', et en graduant la courbe ainsi obtenue en valeurs de C et de l'angle d'attaque, transformer l'abaque à contact tangentiel en abaque à contacts ponctuels (1).

Pratiquement, il y a intérêt à conserver l'abaque tel qu'il est, car il arrive souvent qu'on est obligé, pour des raisons de construction, d'adopter des profils et des angles d'attaque, dont les points représentatifs ne se trouvent pas sur l'enveloppe (C) (2).

§ 2. — Abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère (3).

Cet abaque, à transparent orienté, permet de résoudre un grand nombre de problèmes ; nous ne considérons ici qu'un problème particulier, pour lequel l'abaque se transforme en abaque mixte (deux contacts tangentiels et un contacts ponctuel) représentant une équation analogue à celle qui a été schématisée sur la fig. 41.

Soient :

K_x et K_y les éléments de la résultante de la « polaire réduite », qui constitue la caractéristique *aérodynamique d'un type d'avion*

h — la hauteur à laquelle vole l'avion

H — le plafond de l'avion, c'est-à-dire la hauteur maximum à laquelle il peut monter

t — le temps de montée à la hauteur h

n — le nombre d'heures de vol que l'avion peut effectuer avec le poids de combustible qu'il emporte

S — la surface de l'avion

q_u — le poids utile.

q_p/Q — le rapport du poids du planeur (q_p) au poids total de l'avion (Q).

La relation $q_p\,Q = f(S)$ constitue la caractéristique *constructive* d'un type d'avion ; on la trace sur le fond et on la fait glisser parallèlement à l'axe Ox de façon à faire correspondre chaque courbe à une valeur particulière du nombre d'heures d'essence, le poids par cheval du groupe motopropulseur et la consommation par cheval/heure étant donnés et constituant une troisième caractéristique *motopropulsive* du type d'avion.

Le schéma de la fig. 43 représente l'abaque réduit de façon à pouvoir résoudre le problème suivant : déterminer le poids utile *maximum* que peut emporter

---

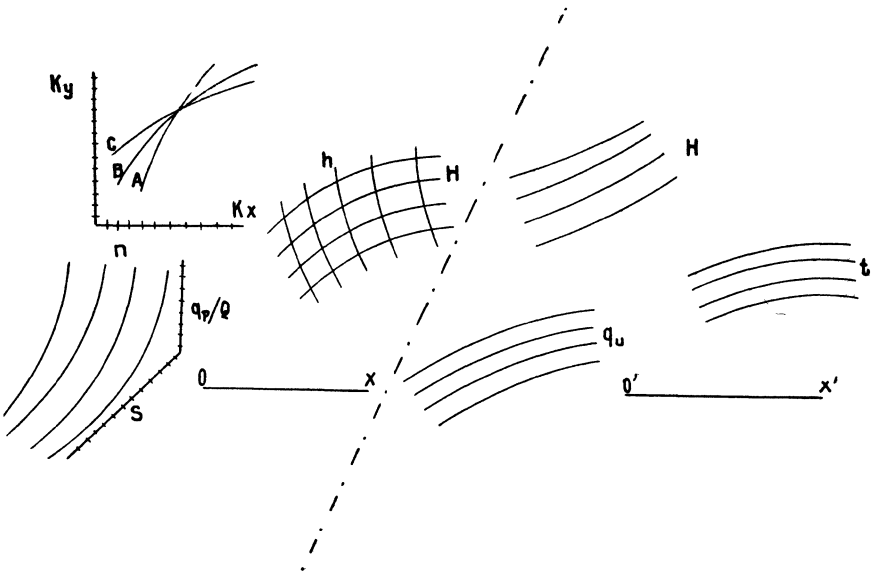
(1) D'une façon plus générale, tout abaque à transparent orienté comprenant un groupe de contacts tangentiels formés par un faisceau coté et un index, peut être transformé en un abaque à transparent orienté à contacts ponctuels formés par un faisceau coté et un point. Quand l'index est une droite, le faisceau sera constitué par des droites parallèles l'index.

(2) Cet abaque nous a permis de constater que, contrairement à certains auteurs, le maximum de puissance n'est pas obtenu par un angle d'attaque constant et correspondant au minimum de K_x/K_y, mais par des angles variables le long du rayon et supérieurs à celui donnant le minimum K_x/K_y

(3) Voir p. 130 et fig. 98, 98'.

un avion avec une provision de combustible pour n heures de vol, à la condition que son plafond, c'est-à-dire la hauteur *maximum* à laquelle il pourra monter, soit H avec la voilure A et que le temps de montée à h soit de t minutes.

Les courbes tracées sur le réseau (K_x, K_y) représentant les polaires de différentes voilures A, B, C...



Fond. Transparent.

FIG. 43

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \longmapsto OX, \quad L'_H \longmapsto L_A, \quad L'_t \longmapsto P_{H,h}, \quad L'_{qu} \longmapsto L_n.$$

Le transparent étant convenablement orienté, on fait passer la courbe (t) par le point (H, h) et on rend tangente la courbe (H) à la courbe (A); la valeur cherchée de q_u sera celle de la cote de la courbe (q_u) tangente à la courbe (A).

Les deux contacts tangentiels ont lieu entre les faisceaux (H) et (A, B, C..) d'une part, (q_u) et (n) d'autre part, le contact ponctuel a lieu entre le faisceau (t) et le réseau (H, h).

Il y a lieu de remarquer que les courbes (A, B, C...) et (n) sont des courbes expérimentales, qui s'explicitent difficilement, de sorte que la solution analytique du problème ci-dessus serait excessivement laborieuse.

§ 3. — Les abaques à points alignés à contacts tangentiels.

En ce qui concerne les abaques à éléments cotés à une variable (échelles graduées ou faisceaux), M. d'Ocagne a fait remarquer (*Traité de Nomographie*, 2e édition, p. 160) que n'importe quelle équation à 3 variables pouvait être représentée

par un abaque à points alignés à 3 faisceaux de courbes (fig. 44_a), et même plus simplement par un abaque à 2 échelles droites et un faisceau de courbes (fig. 44_b).

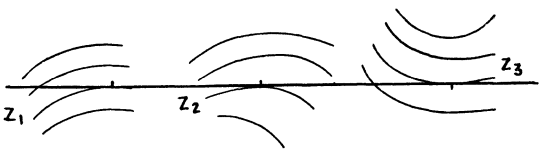


FIG. 44_a

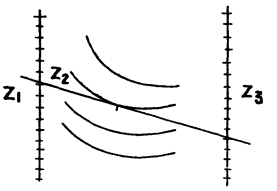


FIG. 44_b

Pratiquement, même le dernier abaque, ne présente pas un grand intérêt, car d'une part l'abaque à entrecroisement correspondant sera généralement plus facile à établir et d'autre part les contatcs tangentiels ne comportent pas une grande précision.

Les abaques à plus de 3 variables, comportant des éléments à deux cotes (réseaux) et au moins un contact tangentiel, se réduisent aux 3 types schématisés sur la fig. 45.

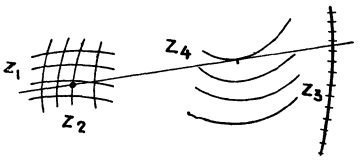


FIG 45_a

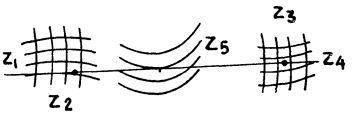


FIG 45_b

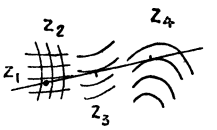


FIG 45_c

Les équations que permet de représenter l'abaque 45_b, résultent de l'élimination de u et de v entre les équations suivantes de disjonction (ou de dissociation) en coordonnées tangentielles :

(1) $$z_5 = F(u, v)$$

(2) $$u f_{12} + v g_{12} + 1 = 0$$

(3) $$u f_{34} + v g_{34} + 1 = 0$$

En introduisant dans la première de ces équations les expressions de u et de v, tirées des équations (2) et (3), on obtient l'équation.

(a) $$z_5 = F\left(\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{12} f_{34} - f_{12} g_{34}}, \frac{g_{12} - g_{34}}{g_{12} f_{34} - f_{12} g_{34}}\right)$$

L'abaque, fig. 45_a, est un cas particulier de l'abaque fig. 45_b, le réseau (z_3, z_4) se réduisant à l'échelle (z_3), il permet par conséquent de représenter des équations de la forme :

(b) $$z_4 = F\left(\frac{f_3 - f_{12}}{g_{12} f_3 - f_{12} g_3}, \frac{g_{12} - g_3}{g_{12} f_3 - f_{12} g_3}\right)$$

Enfin l'abaque fig. 45_c représente des équations résultant de l'élimination des paramètres u, v, des équations.

$$u f_{12} + v g_{12} + 1 = 0; \quad z_3 = F(u, v); \quad z_4 = \Phi(u, v)$$

Cette élimination conduit à l'équation

$$f_{12}g_{34} + g_{12}f_{34} + 1 = 0 \qquad \text{(c)}$$

Les deux premières équations (a) et (b) se présentent bien rarement en pratique, par contre l'équation (c) se rencontre très fréquemment et sa solution sous la forme de l'abaque (fig. 45_c) a été depuis longtemps indiquée par le P. Poulain (voir p 315 de la 2e édition du *Traité de Nomographie* de M d'Ocagne).

Au point de vue de la théorie générale, on voit que l'abaque (fig. 45_c) constitue un cas particulier de l'abaque à contacts mixtes correspondant à l'abaque à transparent tournant à contacts ponctuels de la fig 21 dans laquelle :

1° le fond et le transparent sont intervertis ;

2° les réseaux (z_4, z_5) et (z_7, z_8) sont réduits aux faisceaux (z_3) et (z_4) ;

3° le réseau (z_{10}, z_{11}) est indéterminé ;

4° les faisceaux (z_3), (z_6), (z_9) et (z_{12}) du fond sont remplacés par un index unique.

M. Paladini a fait remarquer que si l'on considère une des courbes (z_4) et si l'on trace les tangentes communes à cette courbe et à chacune des courbes (z_3), le lieu des points de contacts de ces tangentes et des courbes (z_3) sera une certaine courbe (z'_4).

On peut donc remplacer le faisceau (z_4) par un autre faisceau (z'_4) formant avec le faisceau (z_3) un réseau (z_3, z_4) ; l'abaque se présentera alors sous la forme suivante :

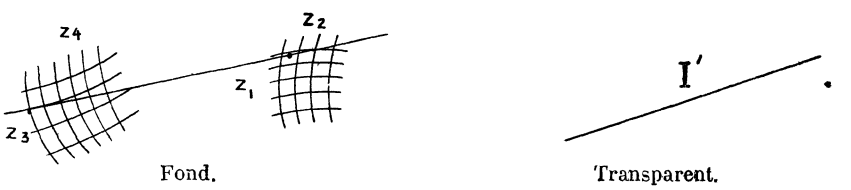


FIG. 46

Mode d'emploi (1) ;

$$I' \vdash\!\dashv P_{12}, \quad I' \vdash\!\dashv L_3, \quad I \vdash\!\dashv P_{34}, \quad \vdash\!\dashv$$

On se trouve ici en présence d'un deuxième exemple de réduction d'un contact tangentiel à un contact ponctuel, le premier exemple étant celui que nous venons indiqué à la p. 54.

L'abaque ci-dessus peut être directement dérivé de l'abaque à transparent tournant à contacts ponctuels de la fig. 1, à condition :

1° d'intervertir le fond avec le transparent ;

2° de remplacer le faisceau (z_9) et le réseau (z_1, z_2) du fond par l'index I' ;

3° de remplacer le réseau (z_3, z_4) par le réseau (z_1, z_2) et le réseau (z_5, z_6) par le réseau (z_3, z_4) ;

---

(1) Voir M. d'Ocagne, *Traité de Nomographie*, 2e édition, renvoi p. 442.

4° de remplacer les variables (z_7, z_8) correspondant à la rotation du transparent par la condition de faire tangenter l'index I′ à une des courbes du faisceau (z_3).

Il est facile d'établir les équations que représente cet abaque : elles sont :

$$F(f_{12} + x' \cos \alpha, \quad g_{12} + x' \sin \alpha, \quad z_3) = 0$$

$$x = f_{12} + x' \cos \alpha$$

$$y = g_{12} + x' \sin \alpha$$

$$\Phi(x, \quad y, \quad z_4) = 0$$

$$\frac{F'_x}{F'_y} = -\operatorname{tg} \alpha .$$

L'élimination de x, y, x′ et α entre ces cinq équations donne l'équation cherchée :

$$f_{12} g_{34} + g_{12} h_{34} + f_{34} = 0$$

Remarque. — Cette équation, étant un cas particulier de l'équation

$$f_{12} f_{34} f_{56} + g_{12} g_{34} g_{56} + h_{12} h_{34} h_{56} = 0$$

peut être représentée plus simplement par l'abaque à transparent orienté ne comprenant que des contacts ponctuels, du type de la fig. 5.

Son mode d'emploi est :

$$P_{34} \vdash\!\dashv Ox, \quad x'_{\infty} \vdash\!\dashv Ox, \quad P'_{56} \vdash\!\dashv I.$$

CHAPITRE III

Méthode générale pour le tracé des abaques

A. — Cas général

Nous allons montrer la façon de procéder pour tracer les éléments cotés constituant le cas général de l'abaque à 3 degrés de liberté, fig. 1, p. 7.

$$M = f_{12} + (f_{34} + f_{56}) \cos (f_7 + f_8) - (g_{34} + g_{56}) \times \sin (f_7 + f_8)$$

$$N = g_{12} + (f_{34} + f_{56}) \sin (f_7 + f_8) + (g_{34} + g_{56}) \times \cos (f_7 + f_8)$$

$$F(M\ N, z_9) = 0$$

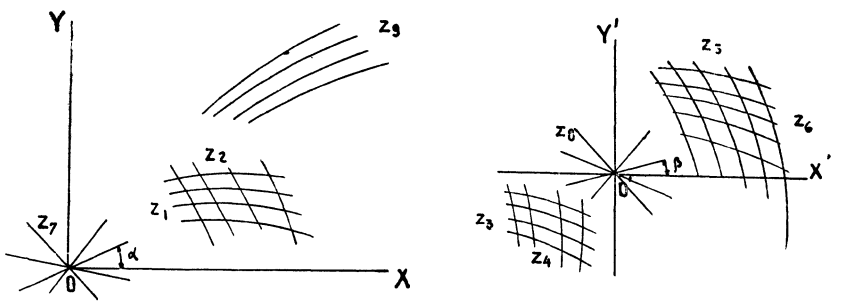


FIG. 47

Tracé du fond. — 1° Le réseau de points à 2 cotes (z_1, z_2) est tracé dans le systèmes d'axes OXY en éliminant z_1 et z_2 entre les équations $x = f_{12}$, $y = g_{12}$.

2° Le faisceau (z_9) est tracé dans le même système d'axes au moyen de l'équation $F(x, y, z_9) = 0$.

3° Le faisceau de droites (z_7) est tracé de façon à ce que l'angle α de chaque droite avec l'axe OX soit égale à f_7 et en faisant passer toutes ces droites par le point O, par exemple.

Tracé du transparent. — 1° On trace le réseau (z_3, z_4) dans le même système d'axes O'X'Y' en éliminant z_3 et z_4 entre les équations $x' = - f_{34}$, $y' = - g_{34}$.

2° Le réseau (z_5, z_6) est tracé de la même façon, après élimination de z_5 et z_6 entre les équations $x' = f_{56}$, $y = g_{56}$.

3° Le faisceau de droites (z_8) est tracé en posant l'angle $\beta = f_8$ et en faisant passer toutes les droites par le point O', par exemple.

Le même méthode sera employée pour n'importe quelle équation représentable sans dissociation. Pour les équations représentables par décomposition, ainsi que pour les systèmes de plusieurs équations, on construira de la même façon chaque équation séparée en adoptant un système unique d'axes pour le fond et le transparent ; les systèmes figuratifs des paramètres et des variables communes devront évidemment coïncider pour qu'il n'y ait pas de système surabondants.

Remarque. — *Réseaux de points à 2 cotes et échelles binaires.*

Si, par exemple, $f_{12} = f_1 + f_2$ et $g_{12} = g_1 + g_2$ on tracera d'abord les échelles (z_1) et (z_2) en éliminant z_1 entre les équations $x = f_1$, $y = g_1$ et z_2 entre $x = f_2$, $y = g_2$. On tracera ensuite le réseau (z_1, z_2) en déplaçant ces échelles parallèlement à elles-mêmes, le déplacement de l'échelle (z_1) donnant le faisceau (z_2) et inversement. Le réseau sera alors constitué par 2 faisceaux métriquement espacés et je dirai que le réseau est *simple* L'intérêt de ces réseaux est qu'on peut les remplacer par 2 échelles graduées conduisant soit à une meilleure disposition de l'abaque, soit à des contacts d'une plus grande précision (v. p. XI).

Si l'un des faisceaux n'est pas métriquement espacé, je dirai que le réseau est *composé.*

Si dans les expression de M et N (p. 59) on a f_{12} ou $g_{12} = O$, ou bien $g_{12} = \Phi\ (f_{12})$, le réseau (z_1, z_2) se réduit à une ligne, *lieu des points condensés à deux cotes.*

On sera alors obligé de compléter cette ligne par une échelle binaire constituée par un triple faisceau : (z_1), (z_2) et (lignes condensées ζ).

Il est évident qu'un réseau de points à deux cotés est préférable à une échelle binaire, puisque cette dernière nécessite non seulement le tracé supplémentaire du faisceau des lignes condensées et du lieu des points condensés, mais également des lectures supplémentaires, le contact de position ou de résolution étant pris entre les éléments du transparent et le lieu des points condensés du fond.

Cependant dans le cas particulier des abaques hexagonaux, pour lesquels le transparent est orienté d'une façon constante et porte un système de 3 index droits, on peut supprimer les tracés et les lectures supplémentaires et considérer directement le contact de l'index avec le réseau (z_1, z_2) de l'échelle binaire.

Comme exemples de l'intérêt du remplacement des échelles binaires par des réseaux de points à deux cotés, nous pouvons citer 2 abaques à transparent orienté, dont l'un établi par moi en remplacement d'un abaque hexagonal pour la détermination de *l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique* (v. p. 80) et l'autre établi par M. Luckey pour la détermination de *l'épaisseur des tôles des foyers cylindriques,* en remplacement d'un abaque à points alignés (v. p. 84).

B. — Exemple. Abaques pour la détermination des temps de montée des avions

Le cas, de beaucoup le plus fréquent que nous avons rencontré dans notre pratique, est celui des équations représentables sans dissociation par un abaque à transparent orienté. Aussi l'avons nous choisi pour montrer d'une façon détaillée la manière de procéder pour tracer un abaque.

Soient :

$\frac{Q}{P_m}$ — la charge par cheval, $\frac{Q}{S}$ — la charge par m², η_0 — le rapport de la puissance du moteur en montée au sol à la puissance P_m.

ρ_0 — le rendement de l'hélice au sol ; K_x et K_y — les éléments unitaires de la résultante à l'incidence de la montée au sol ; v et t — la vitesse ascensionnelle et le temps de montée à l'altitude h ; f (h) — le rapport de la puissance utile du groupe motorpropulseur à l'altitude h à la puissance utile en montée au sol, c'est la fonction que représente la *loi de la variation de la puissance* en fonction de l'altitude ; δ_0 et δ étant le poids specifique de l'air au sol et à l'altitude h, $\varphi(h) = \sqrt{\delta_0/\delta}$ représente la *loi de la variation du poids spécifique de l'air.*

J'ai montré (1) que les équations générales donnant les valeurs des vitesses ascensionnelles, des temps de montée et des plafonds (H) étaient :

$$X = \int_0^h \frac{dh}{f(h) - Y\varphi(h)} ; X_1 = \frac{1}{f(h) - Y\varphi(h)}$$

$$Y = \frac{f(H)}{(H)},$$

où

$$X = \left(\frac{P_m}{Q}\right)^{-1} \eta_0 \rho_0 t$$

$$X_1 = \left(\frac{P_m}{Q}\right)^{-1} \cdot \eta_0 \rho_0 \cdot \frac{1}{v}$$

$$Y = \left(\frac{Q}{P_m}\right) \cdot \left(\frac{Q}{S}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\eta_0 \rho_0} \cdot \frac{1}{K_y^{3/2}/K_x} \cdot$$

Nous devons résoudre simultanément 3 équations, dont chacune a la forme

$$f(M, N, z_n) = 0,$$

où

$$M = \log X = -\log \frac{Q}{P_m} + \log \eta_0 \rho_0 + \log t$$

ou bien

$$M = \log X_1 = -\log \frac{Q}{P_m} - \log \eta_0 \rho_0 - \log v$$

$$N = \log Y = \log \frac{Q}{P_m} + 0{,}5 \log \frac{Q}{S} - \log (K_y^{3/2}/K_x)$$

et $z_n = h$ ou H.

---

(1) *Review of Aeronautical Works*, Nos 7 à 11, 1920.

Chacune de ces équations peut être représentée par l'abaque à transparent orienté schématisé sur la fig. 48 (qui est un cas particulier de la fig. 5) et représentant l'équation $F(f_{12} + f_{34} + f_5, g_{12} + g_{43} + g_5, z_6) = 0$ en posant :

$$f_{12} = f_1 = -\log \frac{Q}{P_m}$$

$$g_{13} = g_1 + g_2 = \log \frac{Q}{P_m} + 0{,}5 \log \frac{Q}{S}$$

$$f_{34} = f_3 = \log \eta_0 \rho_0$$

$$g_{34} = g_3 + g_4 = -\log \eta_0 \rho_0 + \log (K_y^{3/2}/K_x)$$

$$g_5 = \log t \quad \text{ou bien} = -\log v$$

$$z_6 = h \quad \text{ou bien} = H$$

En superposant les réseaux $(Q/P_m, Q/S)$ et $(\eta_0 \rho_0, K_y^{3/2}/K_x)$ et en accolant sur la même échelle droite les variables (t) et (v), on obtient *un abaque unique résolvant les trois équations au moyen d'une seule opération.*

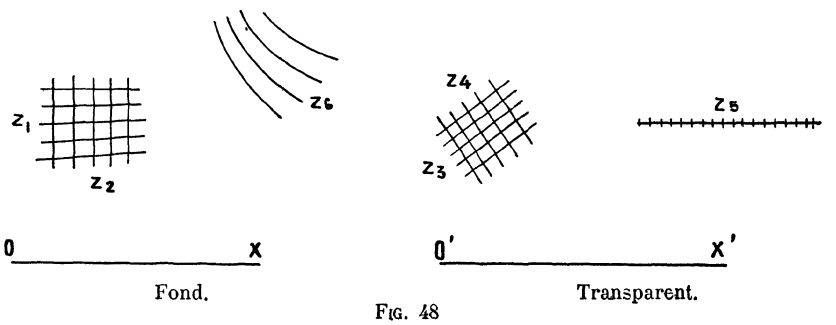


FIG. 48

Cet abaque sera constitué (v. fig. 49) par *un fond* portant le réseau $\left(\frac{Q}{P_m}, \frac{Q}{S}\right)$, 2 faisceaux de courbes (h) et un faisceau de courbes (H), et un *transparent* portant le le réseau $(\eta_0 \rho_0, K_y^{3/2} K_x)$ et une échelle graduée en valeurs de v et de t. Tous ces éléments, sauf les trois faisceaux (h, H) restent les mêmes, quelles que soient les fonctions f(h) et φ(h).

Nous avons ainsi établi 3 abaques se rapportant à 3 cas de la variation de la puissance utile en fonction de l'altitude : moteur ordinaire avec hélice rigide, moteur suralimenté avec hélice rigide et moteur suralimenté avec hélice à pales orientables.

Le mode d'emploi de ces 3 abaques est le même : on fait coincider les points $(\eta_0 \rho_0, K_y^{3/2}/K_x)$ et $(Q/P_m, Q/S)$, on oriente l'échelle (t) du transparent parallèlement aux droites du faisceau (H) du fond et on lit à l'intersection de l'échelle (v, t) avec les faisceaux (h) et (H) les valeurs de v, t et H.

Pour montrer comment on trace pratiquement les éléments cotés formant l'abaque, je vais prendre le cas du *moteur ordinaire avec hélice rigide.*

Si l'on exprime Q en kg, P_m en ch, S en m², K_y et K_x en kg/m²/ms, t en min, v en m/s et h et H en m et si l'on admet, ainsi que le montre la pratique, que la

vitesse de montée décroit linéairement avec l'altitude, les équations ci-dessus prennent la forme suivante :

(1) $$X = \frac{0{,}0384\,F(Y)}{1 - Y} \log \left[\frac{1}{1 - h/F(Y)}\right]$$

(2) $$X_1 = \frac{1}{1 - Y};$$

(3) $$H = F(Y) \quad \text{ou bien} \quad Y = \psi(H)$$

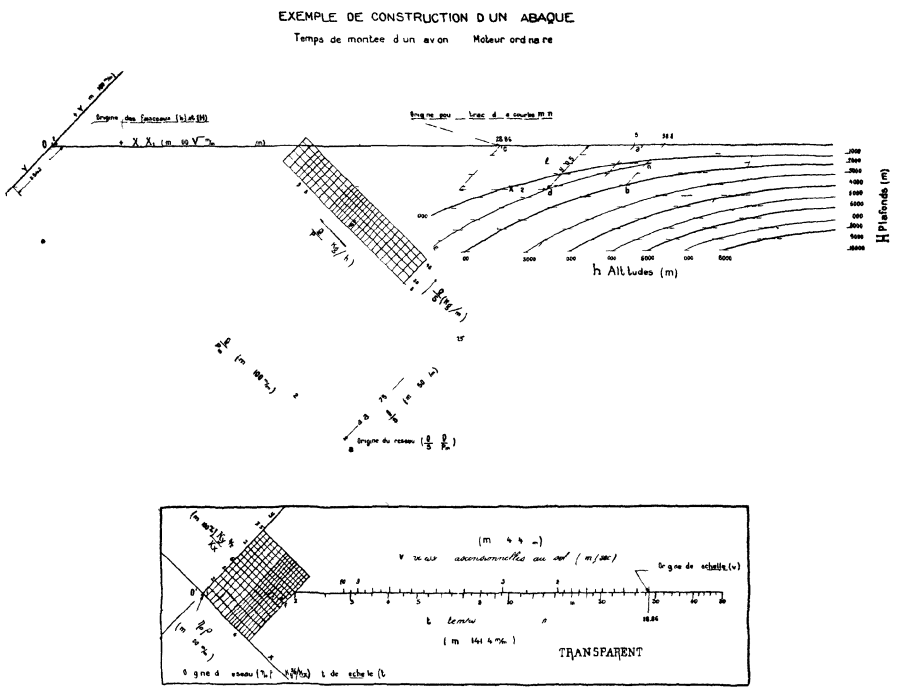


FIG 49 et 49′ — *Exemple de construction d'un abaque à transparent orienté.*

La relation entre Y et H a ete obtenue en admettant que :

1° pendant la montée, l'incidence reste constante,

2° le couple moteur est proportionnel à la pression de l'air,

3° $\frac{\eta\rho}{\eta_0\rho_0} = \sqrt[4]{\delta/\delta_0}$,

4° la montée se fait dans l'air standard, type 1918

La relation entre H et Y est alors representée par le tableau suivant :

H = 0	2 000	4 000	6 000	8 000	10 000 m
Y = 1	0,750	0,542	0,374	0,255	0,174

L'expression de X_1 se rapporte à la vitesse ascensionnelle au sol (v_0) ; on l'obtient directement de l'expression générale de X_1 en posant f(H) = (h) = 1.

Les expressions de $M = \log X = \log X_1$ et $N = \log Y$ sont celles que nous avons écrites ci-dessus à l'exception du facteur 75, provenant de l'adoption du ch. comme unité de puissance.

$$M = \log X = \log 75 - \log \frac{Q}{P_m} - \log \eta_0 \rho_0 + \log t$$

$$M = \log X_1 = \log 75 - \log \frac{Q}{P_m} + \log \eta_0 \rho_0 - \log v_0$$

$$N = \log Y =$$

$$= - \log 75 + \frac{Q}{P_m} \frac{Q}{S} + 0,5 \log \frac{Q}{S} - \log \eta_0 \rho_0 - \log \frac{K_y^{3/2}}{K_x}.$$

Si nous adoptons des échelles logarithmiques pour la graduation des axes des coordonnées (v. fig. 49), la cote de l'origine étant 1 (puisque $\log_1 = 0$), nous pourrons raisonner comme si M et N étaient des sommes des différents termes et non pas de leurs log.

Le choix de l'angle entre les axes des coordonnées du fond (xOy) et du transparent (xO'y) et des modules des échelles a été fait de façon à obtenir des réseaux orthogonaux (Q/P_m, Q/S) et ($\eta_0 \rho_0$, $K_y^{3/2}/K_x$). A cet effet nous avons adopté un angle de 45° entre les axes et un module de $25^{mm} = \log 10 =$ pour l'échelle des y et un module de $25\sqrt{2} = 35,25^{mm} = \log 10$ pour l'echelle des x (1).

Pour tracer sur le fond et le transparent les différents systèmes cotés on procède comme suit :

Fond. — 1° *Réseau* (Q/P_m, Q/S). L'origine de ce réseau, c'est-à-dire le point pour lequel $Q/P_m = Q/S = 1$, se trouvera en a, dont les coordonnées sont $x = 75$, $y = -75$. L'axe des Q/S sera parallele à l'axe Oy et son module sera $0,5 . 25 = 12,5^{mm}$.

L'axe des Q/P_m fera un angle de 135° avec Ox et son module sera de 25^{mm}; on obtient cette direction et la valeur du module en additionnant géométriquement les secteurs $Ox = -35,25^{mm}$ et $Oy = 25^{mm}$.

On trace ensuite un réseau limité aux valeurs de 2 à 12 pour Q/P_m et de 25 à 50 pour Q S.

2° *Faisceau* (H). Ce faisceau est composé de droites parallèles à l'axe Ox, son équation est $y = Y = \psi(H)$, les valeurs corrélatives de Y et H étant prises dans le tableau ci-dessus (p. 102). Ainsi pour H = 4.000 m, y = 0,542. Ces droites sont asympotiques aux courbes correspondantes du faisceau (h).

3° *Faisceau* (h) pour la détermination de t. On dresse un tableau donnant d après l'équation (1) les valeurs de X pour des valeurs rondes de h et de F(Y) = H et l'on trace le faisceau (h) en posant x = X, y = Y.

Exemple : pour h = 2 000 m. le point b aura comme coordonnées y = Y = 0,542 et X = 98,8.

4° *Courbes* (h = 0) pour la détermination de v. L'équation (2) de cette courbe est x = 1 : (1 — y). Si l'on trace la courbe d'après cette équation, on s aperçoit qu'elle se trouve trop à gauche On la déplace vers la droite en prenant

(1) Ces valeurs ont servi à tracer l'abaque original ; la figure 49 représente une réduction aux 3/10es de l'original.

comme origine pour son tracé le point c dont les coordonnées sont $x = 28{,}86$, $y' = 0$.

Si nous posons dans l'équation (2) $y = 0{,}5$, nous obtiendrons le point d. dont les coordonnées, par rapport au point c, seront $x = 2$, $y = 0{,}5$.

Nous verrons ci-dessous la modification que ce déplacement de l'origine apporte dans le trace du transparent.

TRANSPARENT. — 1° *Réseau* ($\eta_0 \rho_0$, $K_y^{3/2}/K_x$). L'origine étant en O', l'axe des $K_y^{3/2}/K_x$ coincidera avec l'axe O' y, et son module sera de 25^{mm}. Ainsi que nous l'avons indiqué dans le cas général, $y' = -f_{34} = -(-K_y^{3/2}/K_x) = K_y^{3/2}/K_x$. Le sens des valeurs positives de $K_y^{3/2}/K_x$ sera donc le même que celui des y positifs du système xOy du fond.

La direction et le sens positif de l'axe des $\eta_0 \rho_0$ s'obtient en additionnant géométriquement les secteurs $O'x = -35{,}25$ et $O'y = 25^{mm}$; il sera parallèle à l'axe des Q/P_m du fond et son module sera de 25^{mm}.

Le réseau tracé a été limité aux valeurs de 1 à 0,5 pour $\eta_0 \rho_0$ et de 1 à 2,5 pour $K_y^{3/2}/K_x$.

2° *Echelle* (t) Cette échelle coincidera avec l'axe O'y et son module sera de 35,25 mm. L'équation de la graduation est $y = t$.

3° *Echelle* (v) La courbe ($h = 0$) servant à la lecture de v ayant été déplacée sur le fond parallèlement à elle-même d'une longueur $x = 28{,}86$, on déplacera de même sur le transparent l'origine de la graduation de l'échelle (v) qui viendra ainsi en (e) au point coté $t = 28{,}86$ mm Le module de l'échelle (v) sera de 35,25 mm , elle coincidera avec l'axe O'x et par conséquent avec l'échelle (t) ; mais comme d'après l'expression ci-dessus de M, $y = -v$, les valeurs de v augmenteront vers la gauche, alors que celles de t augmentent vers la droite.

Exemple de l'emploi de l'abaque. — Avion Bréguet XIV. $Q/S = 30{,}8$ kg/m², $Q/P_m = 4{,}5$ kg/ch, $K_y^{3/2}/K_x = 1{,}72$, $\eta_0 \rho_0 = 0{,}53$.

On obtient $H = 6.600^m$, $t_{1000} = 3',2$, $t_{3000} = 11',5$, $t_{5000} = 27',5$, et $v_0 = 5{,}9$ m/s.

REMARQUE. — Les déplacements des origines des systèmes cotés ou non cotés tracés sur le fond et le transparent constituent avec le choix convenable des axes des coordonnées et de leurs modules, les moyens employés le plus fréquemment pour obtenir une bonne disposition de l'ensemble de l'abaque.

Chaque déplacement d'un système du fond nécessite un déplacement correspondant d'un ou de plusieurs systèmes du transparent D'une façon générale on obtiendra ces déplacements en considérant les expressions de M et de N, dans lesquelles les déplacements correspondent à une addition et une soustraction d'un certain vecteur.

Ainsi si l'on avait

$$M = f_{12} + f_{34} + f_{56}$$
$$N = g_{12} + g_{34} + g_{56}$$

on aura également :

$$M = (f_{12} + A) + (f_{34} - a_1) + (f_{56} - a_2), \text{ où } A = a_1 + a_2$$

$$N = (g_{12} + B) + (g_{34} - b_1) + (g_{56} - b_2), \text{ où } B = b_1 + b_2$$

En faisant varier convenablement les valeurs de a_1, a_2, b_1, b_2, on pourra toujours arriver à une bonne disposition de l'abaque.

C. — Méthode de calcul par le trait

Parallèlement à la méthode nomographique que nous venons d'exposer, il existe une méthode de calcul par le trait qui peut être utilisée soit indépendamment dans le cas d'équations non dissociables, soit conjuguée avec la méthode nomographique.

Cette méthode constitue la généralisation, par l'emploi d'échelles courbes, d'une méthode due à M. Rith (« Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation effectuées au laboratoire d'Auteuil », Paris 1914, p. 41) et qu'il a appliquée d'une façon très intéressante à la solution de plusieurs problèmes de l'aviation.

Quoiqu'elle puisse être appliquée à n'importe quel type d'équation non dissociable, elle n'a d'intérêt pratique que pour les équations à 2 degrés de liberté

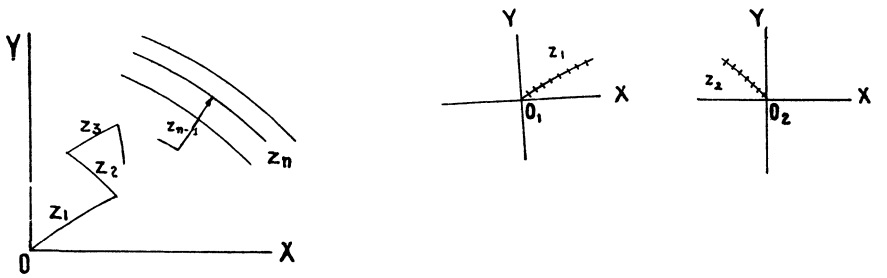


FIG. 50

(deux translations) et à réseaux simples (v. p. 60). Elle peut alors s'énoncer comme suit :

la solution graphique d'une équation de la forme

$$F(M, N, z_n) = 0, \tag{1}$$

où

$$M = f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}$$

et

$$N = g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1}.$$

peut être effectuée en traçant dans le système d'axes OXY (v. fig. 50) au moyen d'échelles métriques le faisceau (z_n) représenté par l'équation $F(x, y, z_n) = 0$.

On trace ensuite au moyen des équations

$$x = f_1,\ y = g_1\ ;\ x = f_2,\ y = g_2 \dots$$

dans les systèmes d'axes O_1XY, O_2XY... parallèles aux axes OXY, les échelles des variables $z_1 \dots z_{n-1}$.

On porte à partir de l'origine O, la ligne brisée composée des segments des échelles, orientés comme celles-ci et correspondant aux valeurs données des variables.

L'intersection de l'échelle de la variable inconnue avec la courbe (z_n) détermine la valeur de cette variable.

La méthode de calcul par le trait a le désavantage de nécessiter chaque fois un tracé nouveau demandant beaucoup de temps et sujet à erreur et de ne pouvoir s'appliquer aux équations représentables par dissociation. Mais elle peut venir en aide à la méthode nomographique, soit en augmentant le nombre de variables (voir dans la deuxième partie la fig. 112 représentant un *abaque pour le calcul des montants d'avions*), soit en permettant de garder la trace d'une opération (voir à ce sujet, p 202 *l'abaque pour la détermination de la participation de l'Etat aux bénéfices de la société Pechelbronn*)

La méthode de calcul par le trait, que nous venons d'exposer, et qui procède par juxtaposition de segments, pris sur des échelles tracées une fois pour toutes, peut toujours être transformée en méthode nomographique, et ne permet pas la solution d'autres équations que celles représentables par des abaques.

A coté de cette méthode il en existe une autre, connue depuis longtemps, et qui constitue la méthode pure de calcul graphique En effet si les éléments sont trop variables pour que leur représentation par des échelles soit intéressante, il est préférable d'effectuer pour chaque cas une construction géométrique séparée Cependant quand toutes ces constructions sont effectuées, les résultats peuvent constituer un abaque à entrecroisement se rapportant au cas spécial traité

C'est dans cette catégorie qu'il faut ranger la méthode que le professeur Joukowski et moi avons établie pour l'étude du vol oblique des avions (voir fig. 106 et 107).

CHAPITRE IV

Les abaques à points alignés de M. d'Ocagne

Dans ce chapitre et dans le chapitre suivant, je me propose d'étudier au point de vue de la théorie générale exposée ci-dessus, les différents systèmes connus d'abaques et d'examiner si dans certains cas cette théorie ne permet pas de tracer des abaques plus simples, que ceux qui ont été établis jusqu'à présent.

A. — La méthode des points alignés, considérée comme un cas particulier de la théorie générale

Dans ma communication de 1922 à l'Académie des Sciences sur « *Les abaques à transparent orienté* » (C. R. du 26 juin) j'avais montré que les abaques à points alignés constituaient un cas particulier de l'abaque à transparent orienté schématisé sur la fig. 19 et obtenu par double dissociation de la proposée.

En effet, l'équation générale, représentable par des abaques à points alignés :

$$|f_i \; g_i \; h_i| = 0, \tag{1}$$

i désignant une ou deux variables, peut être dissociée en 3 équations de la forme

$$M\zeta_1 - N = 0,$$

où

$$M = \frac{\delta(h_1 - g_1)}{h_1 + g_1} \qquad \text{et } N = \frac{-f_1}{h_1 + g_1} + \zeta_2,$$

ζ_1 et ζ_2 étant 2 variables auxiliaires.

Il est facile de voir que l'élimination de ζ_1 et ζ_2 entre les trois équations.

$$\zeta_1 \frac{\delta(h_1 - g_1)}{h_1 + g_1} - \zeta_2 + \frac{-f_1}{h_1 + g} = 0 \tag{2}$$

donne l'équation

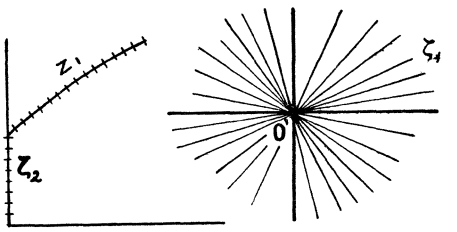
$$|f_1 \; g_1 \; h_1| = 0.$$

Or chacune des équations (2) peut être représentée par un abaque à transparent orienté comprenant (voir fig. 51) un fond portant les échelles (ζ_2) et (z_1), et un transparent portant le faisceau de droites (ζ_1).

Si l'on accole les 3 abaques par l'échelle de ζ_2, on aura un abaque à transparent orienté (voir fig. 52), tel que l'origine O′ devra se trouver sur l'échelle (ζ_2) et que la solution sera donnée par les points des 3 échelles situés sur la même droite (ζ_1) ; cet abaque est l'abaque à points alignés cherché.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, il constitue un cas particulier de l'abaque plus général de la fig. 19, dans lequel les 3 faisceaux du fond sont remplacés par un faisceau unique de droites (ζ_1) et où on a conservé l'échelle de la variable auxiliaire (ζ_2) et l'origine O′ des coordonnées du transparent.

Dans la communication à l'Académie des Sciences faite à la suite de la mienne (« *Sur les nomogrammes à transparent orienté* », C. R. 26 juin 1922), M. d'Ocagne a fait remarquer avec raison que les abaques à points alignés devaient être plutôt considérés comme un cas particulier des abaques à transparent tournant, portant un seul index droit, car l'emploi en fait d'un transparent orienté avec faisceau



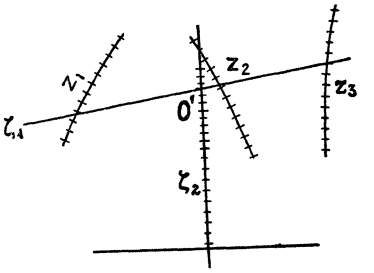
Fond. Transparent.

Fig. 51

de droites nécessiterait une interpolation entre les différentes droites, nuisant considérablement à la précision de l'abaque.

Rien de plus facile d'ailleurs que d'appliquer la théorie générale des abaques à transparent tournant à la méthode des points alignés, qui devient alors un cas particulier de l'abaque schématisé sur la fig. 21, à condition de réduire les 4 faisceaux de courbes cotés du fond à un index droit tracé sur un transparent et les 4 réseaux tracés sur le transparent à 3 réseaux tracés sur un fond.

En ne considérant, pour simplifier les écritures, que des échelles graduées,



Fond. Transparent.

Fig 52

on peut concevoir un abaque à points alignés constitué par l'accolement par l'échelle (z_1) de 3 abaques (voir fig. 53) comportant chacun un fond, portant un index droit et un transparent portant les échelles (z_1) et (z_1), ou (z_2), ou (z_3).

La proposée doit être dissociée en 3 équations au moyen de deux paramètres, dont l'un est une des variables (z_1) et l'autre l'angle (ζ_1) des axes du transparent et du fond. Cela revient à définir le mode d'emploi de l'abaque par l'énoncé

$$(z_1) \mapsto O, \quad z_2 \mapsto I, \quad z_3 \mapsto I$$

équivalent à l'énoncé de M. d'Ocagne

$$\Delta' \mapsto z_1, \quad \Delta' \mapsto z_2, \quad \Delta' \mapsto z_3, \mapsto$$

La théorie générale (p. 7) du transparent tournant donne pour chaque abaque.

$$(f_1 - f_1)\cos\zeta_1 - (g_1 - g_1)\sin\zeta_1 = 0$$

$$(f_2 - f_1)\cos\zeta_1 - (g_2 - g_1)\sin\zeta_1 = 0$$

$$(f_3 - f_1)\cos\zeta_1 - (g_3 - g_1)\sin\zeta_1 = 0$$

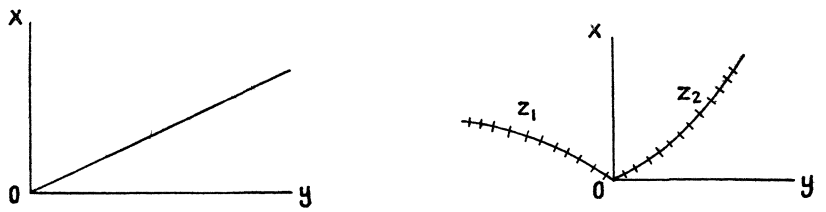
En divisant chacune des équations par $\sin\zeta_1$ et en éliminant entre les 3 équations les termes communs de $\mathrm{ctg}\zeta_1$ et $f_1\ \mathrm{ctg}\zeta_1$, on obtient une équation représentée par la somme de 2 déterminants.

$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & g_1 \\ f_2 & 1 & g_1 \\ f_3 & 1 & g_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & 1 & g_1 \\ f_2 & 1 & g_2 \\ f_3 & 1 & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, le premier déterminant est nul, par conséquent,

$$|f_1 \ 1 \ g_1| = 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En pratique, pour la représentation par points alignés, il n'y aura jamais lieu de recourir à ces dissociations, car les méthodes existantes permettent, une



Fond. Transparent.

FIG. 53

fois l'équation mise sous une forme convenable, d'écrire directement les équations de disjonction.

D'ailleurs le déterminant $|f_1 g_1 h_1| = 0$, conduit directement aux équations de disjonction en coordonnées tangentielles $u f_1 + v g_1 + h_1 = 0$; si l'on considère u et v comme des paramètres, ces équations constituent en même temps des équations de dissociation.

Si j'ai tenu à traiter la méthode des points alignés par la théorie générale, ce n'est pas parce que cette théorie simplifie le tracé de ces abaques mais parce que je voulais montrer la parenté étroite reliant tous les abaques, quels que soient les systèmes cotés ou non, tracés sur le plan mobile.

Il semble, en effet, car ce fut mon cas, que pour les lecteurs étudiant les ouvrages existants sur la nomographie, les abaques à points alignés paraissent être d'une essence très différente des autres abaques.

B. — Quelques types d'abaques à transparent orienté pour formes canoniques des équations représentables par la méthode des foires alignes

§ 1. — Abaques à échelles graduées.

1°. — Trois variables.

Les formes canoniques des équations, d'après la classification de M. Soreau, sont (1) :

Ordre 3 : $f_1 + f_2 + f_3 = 0$; $f_1 f_2 f_3 + f_1 + f_2 + f_3 = 0$

Ordre 4 : $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$; $f_1 f_2 f_3 + f_1 + f_2 + g_3 = 0$

Ordre 5 : $f_1 = \dfrac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}$

Ordre 6 : $\dfrac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \dfrac{f_1 - f_3}{g_1 - g_3}$.

On peut représenter ces équations par des abaques à transparent orienté,

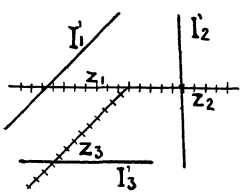


Fig. 54

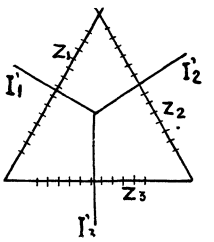


Fig. 55

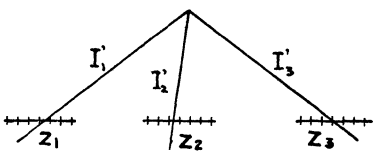


Fig. 56

différents des abaques à points alignés, en empoyant telle quelle l'équation d'ordre 3 à 3 termes, en utilisant l'anamorphose logarithmique pour les autres équations d'ordre 3 et 4 enfin en se servant de la dissociation et de l'anamorphose logarithmique pour les ordres 5 et 6.

Dans ces conditions, les équations d'*ordre* 3 à 3 *termes* seront représentées par un abaque comportant un fond à 3 échelles droites et un transparent à 3 index droits ; les échelles et les index peuvent faire entre eux des angles quelconques (voir fig. 54).

En adoptant des angles de 120° entre les échelles et entre les index on arrive à la disposition des abaques *hexagonaux* (voir fig. 55).

Si les échelles font entre elles un angle de 0°, alors que les index forment des angles quelconques, on obtient un type d'abaque, qu'on peut appeler à « *échelles alignées* » (voir fig. 56).

Les abaques représentant les équations d'*ordre* 4 à 3 *termes* comprennent trois échelles, dont une peut être courbe, et 3 index, dont deux droits et une courbe (voir fig. 57).

(1) D'après M. Soreau, on appelle *ordre nomographique par rapport à* z_1 d'une équation mise sous la forme

$$\Sigma f_1 F_{2,3.\ n} = 0,$$

où les f_1 sont linéairement indépendants, le nombre p_1, lorsque cette équation à $p_1 + 1$ termes, et $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, *l'ordre nomographique total* de l'équation.

Les équations d'*ordre* 3 et 4 à 4 *termes* sont constituées par trois échelles et trois index courbes (voir fig. 58).

La construction des abaques pour équations à 3 termes se fait au moyen de l'*anamorphose logarithmique* en écrivant ces équations sous la forme

$$10^M + 10^N + 1 = 0, \text{ où } M = \log f_1 + \log f_2 + \log f_3 \text{ et } N = \log g_1 + \log g_2 + \log g_3.$$

L'équation à 4 termes se met sous la forme $10^M + N = 0$; c'est ce que nous appelons une *anamorphose semi-logarithmique.*

On sait que les équations d'ordre 5 et 6 ne sont qu'exceptionnellement représentables par des abaques à points alignés à 3 échelles distinctes (1). La forme canonique citée plus haut (p. 71) d'*ordre* 5 est représentable par un abaque a

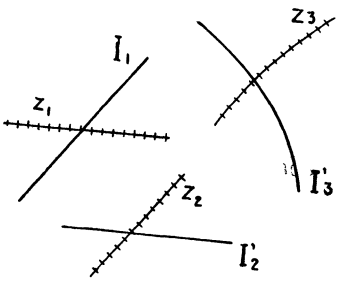


FIG. 57

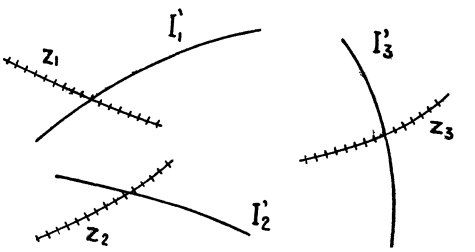


FIG. 58

transparent orienté à une échelle droite et à 2 échelles droites ou courbes et à 2 ou 3 index dont 1 droit (voir fig. 59).

A cet effet on décompose l'équation en deux autres équations :

$$f_1 g_2 - f_2 = \zeta \quad \text{et } f_1 g_3 - f_3 = \zeta$$

et on accole les deux abaques par les échelles de z_1 et ζ, puis on supprime ζ.

L'abaque de l'équation d'*ordre* 6 comporte 3 échelles droites ou courbes et 1,2 ou 3 index courbes (voir fig. 60).

Cette représentation résulte de la dissociation de l'équation en 3 équations séparées :

$$\zeta_1 g_1 - f_1 = \zeta_2; \quad \zeta_1 g_2 - f_2 = \zeta_2; \quad \zeta_1 g_3 - f_3 = \zeta_2.$$

On accole les 3 abaques par les échelles de ζ_1 et ζ_2, puis on les élimine par la suppression du réseau (ζ_1, ζ_2).

Quand il n'y a qu'un index (voir fig. 60) on est en présence d'un type d'abaque qui rappelle les abaques à points alignés avec cette différence que l'index n'est pas une droite et qu'il doit toujours être convenablement orienté.

En résumé, quand on compare, avec les types existants, les abaques à trans-

---

(1) Les formes canoniques des équations à 3 et à 4 termes représentables *sans dissociation* par des abaques à transparent orienté, sont respectivement :

$$f_1 f_2 f_3 + g_1 g_2 g_3 + h_1 h_2 h_3 = 0 \quad \text{et} \quad f_1 f_2 f_3 + g_1 + g_2 + g_3 = 0.$$

Ces équations sont d'ordre 6 et, comme on le sait, ne sont pas représentables par la méthode des points alignés au moyen de 3 échelles distinctes ; on les rencontre pourtant très fréquemment en pratique.

parent orienté décrits ci-dessus, on constate qu'on passe de l'abaque hexagonal (ordre 3 à trois termes) à une sorte d'abaque hexagonal généralisé (ordre 3 à 4 termes et ordre 4 à 3 et 4 termes), puis à un abaque se rapprochant des abaques à double alignement en équerre, dans lequels l'obligation de faire passer

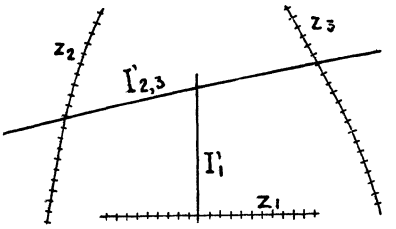


FIG. 59

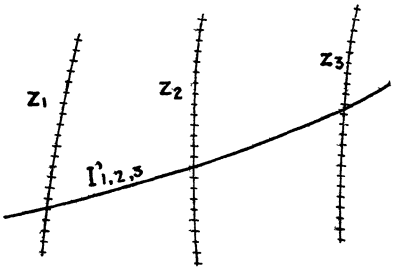


FIG 60

un des index par un point fixe est remplacée par la condition d'orientation fixe de l'index (ordre 5).

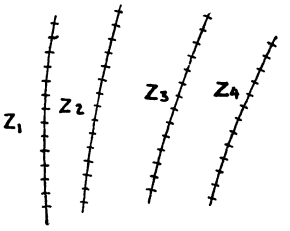
Enfin, pour l'ordre 6, on arrive à un abaque à index courbe orienté, tout à fait analogue à l'abaque à points alignés.

2°. — QUATRE VARIABLES.

La forme générale, representable par un abaque à double alignement parallèle, concourant ou en équerre, est :

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_3 - f_4}{g_3 - g_4} = \zeta_1.$$

En décomposant cette équation en deux équations d'ordre 5, on obtient un abaque à transparent orienté (voir fig. 61) constitué par 4 échelles courbes ou



Fond.

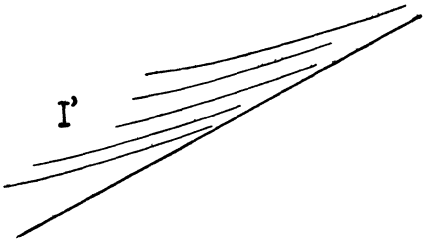


FIG. 61 Transparent.

droites et un faisceau d'index courbes, tracés en déplaçant le même index courbe parallèlement à une droite parallèle à l'échelle (ζ_1) éliminée.

Cet abaque est semblable à l'abaque correspondant à points alignés et la manière de procéder est la même ; on fait passer un index quelconque du transparent par les points (z_1) et (z_2) et on lit la valeur de (z_4) à l'intersection de l'index passant par le point (z_3) avec l'échelle (z_4).

§ 2. — A propos des abaques à entrecroisement.

Les équations à 3 ou 4 variables représentables par des abaques à points alignés à 3 ou 4 échelles graduées sont également représentables par des abaques à entrecroisement à systèmes de lignes ∞^1.

Les abaques à transparent orienté décrits ci-dessus de ces mêmes équations

se transforment directement en abaques à entrecroisement en déplaçant les index parallèlement à eux mêmes et en les cotant d'après les graduations des échelles correspondantes.

On remplace ainsi chaque échelle et son index par un faisceau tracé sur le fond et un point marqué sur le transparent.

On arrive ainsi à des abaques comprenant soit un faisceau, deux échelles et un point et deux index, soit 2 faisceaux, 1 échelle et 1 point et 1 index, soit 3 faisceaux ; ces derniers constituent des abaques à entrecroisement.

Pour les relations à 3 termes, les équations des courbes de chaque faisceau sont obtenues soit par l'*anamorphose logarithmique* des équations de disjonction des échelles, soit par l'anamorphose logarithmique de l'équation $\pm M \pm N = 1$. Pour les équations à 4 termes on emploie l'anamorphose *semi-logarithmique*, puisqu'on pose : $x = \log f_1$, $y = g_1$.

Pour l'équation d'ordre 6 les trois faisceaux sont constitués par la même courbe obtenue par l'anamorphose logarithmique de l'équation $M - N = 1$.

Un exemple d'abaque a entrecroisement obtenue par anamorphose logarithmique, est donné fig. 103 et 104) par l'*abaque pour la détermination des performances d'un avion type* 1918.

Un deuxième abaque à entrecroisement obtenu également par anamorphose logarithmique qui permet de lui donner une disposition particulièrement simple est représenté par la fig. 116. Il a été établi pour étudier le *fonctionnement d'une soufflerie aerodynamique* de mon système à air comprimé ou raréfié.

§ 3. — Abaques à réseaux de points à 2 cotes.

L'emploi de réseaux de points à 2 cotes permet de représenter des équations qui nécessiteraient des abaques à entrecroisement à système ∞^n L'élément mobile, prenant chaque fois la position convenable, intervient alors pour éviter la confusion, qui résulterait si l'on marquait chaque fois sa trace.

Les formes canoniques proviennent de l'introduction de points à 2 cotés dans les formes canoniques des équations à 3 et 4 variables :

4 variables $f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0$ et $f_1 f_2 f_{34} + f_1 + f_2 + g_{34} = 0$

5 variables $f_1 = \dfrac{f_{23} - f_{45}}{g_{23} - g_{45}}$

6 variables $\dfrac{f_{12} - f_{34}}{g_{12} - g_{34}} = \dfrac{f_{12} - f_{56}}{g_{12} - g_{56}}$

8 variables $\dfrac{f_{12} - f_{34}}{g_{12} - g_{34}} = \dfrac{f_{56} - f_{78}}{g_{56} - g_{78}}$

Toutes ces équations sont également représentables par des abaques à transparent orienté décrits plus haut et dans lesquels les échelles, qui peuvent être courbes, sont remplacées par des réseaux.

Conclusion. Pour les équations à petit nombre de variables (on rencontre rarement les formes canoniques d'équations à nombre élevé de variables), énumérées ci-dessus, la méthode des points alignés devra être employée de préférence comme donnant des abaques plus simples (1).

(1) Parmi les équations non représentables par la méthode des points alignés, mais qui peuvent être figurées par des abaques à transparent orienté à réseaux de points à deux cotés, citons les formes pratiquement très fréquentes :

$$f_{12} f_{34} f_{56} + g_{12} g_{34} g_{56} + h_{12} h_{34} h_{56} = 0 \quad \text{et} \quad f_{12} f_{34} f_{56} + g_{12} + g_{34} + g_{56} = 0$$

CHAPITRE V

Les abaques de MM. Mehmke, Lallemand, Goodseels, Gercevannof et Luckey

A. — La méthode des images logarithmiques de M. Mehmke

L'emploi systématique du transparent orienté a été fait dès 1885 par M. Lallemand, mais on ne peut pas considérer son utilisation dans les abaques hexagonaux autrement qu'un artifice de lecture pour certains abaques à entrecroisement.

C'est en 1889 (1) que l'emploi du transparent orienté dans les abaques à images logarithmiques de M. Mehmke, a permis à cet auteur la solution d'équations non représentables au moyen d'abaques à un seul plan (à entrecroisement) et d'abaques à deux plans connus en ce moment (à points alignés).

Cependant la façon très particulière, circonscrite à l'anamorphose logarithmique, avec laquelle M. Mehmke a traité la question, ainsi que l'application qu'il en a faite à des équations également très particulières, étaient loin d'avoir épuisé le sujet.

Nous allons reprendre au moyen de notre théorie générale quelqu'unes des équations traitées par M. Mehmke et nous allons montrer que les développements, que nous avons apportés à la théorie des abaques à transparent orienté, permettent de résoudre certaines d'entre elles d'une façon plus simple, que celle de M. Mehmke.

§ 1. — L'abaque de l'équation

$$\text{(A)} \qquad a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s + 1 = 0$$

où les exposants m, n, p, q, r et s sont des constantes, constitue un exemple d'une dissociation d'une équation en deux équations comprenant 1 paramètre et 2 variables communes. On ne peut pas éliminer le paramètre, car il donne lieu à deux systèmes figuratifs différents.

---

(1) *Neue Méthode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulosen* (Civilingenieur, Band 35, 1889), et *Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln zweier numerischen algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten* (Schlomilch's Zeitschrift, 1890).

Voir également W. Dyck : *Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente* (München, 1892), ainsi que les ouvrages de M. d'Ocagne.

Nous traiterons cette équation au moyen de notre méthode générale, différente de celle adoptée par M. Mehmke ,mais conduisant à un abaque semblable.

En posant :

$$M = ax^m y^n \quad \text{et} \quad N = bx^p y^q$$

on a

$$(1) \qquad M \quad N - \frac{c}{a^t b^u} M^t N^u + 1 = 0,$$

où

$$t = \frac{rq - sp}{mq - np} \quad \text{et} \quad u = \frac{rn - sm}{pn - qm}.$$

On tracera un premier abaque du type (1) :

$$O'_{a,b} \mapsto P_{a,b}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{x,y} \mapsto L_\zeta$$

D'autre part en posant .

$$\zeta = \frac{c}{a^t b^u}$$

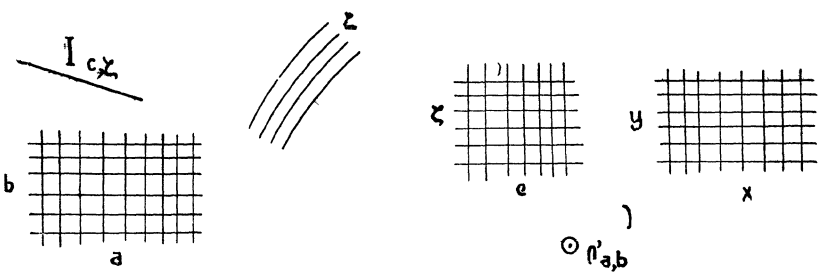
on a

$$(2) \qquad \frac{a}{c^{1/t}} = \left(\frac{1}{b\zeta^{1/u}}\right)^u.$$

Le deuxième abaque représentant cette équation sera du type :

$$O'_{a\,b} \mapsto P_{a,b}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{c,\zeta} \mapsto I_{c,\zeta}.$$

En superposant les échelles (a) et (b) on obtient l'abaque de la fig. 62.



Fond FIG. 62 Transparent.

Mode d'emploi ·

$$O' \mapsto P_{a\,b}, \quad x'_\infty \mapsto D_b, \quad P'_{(\zeta\,c)} \mapsto I_{(\zeta,c)}, \quad P'_{(x,y)} \mapsto L_{(\zeta)}.$$

On fait coincider les points (O′) et (a, b), on rend parallèles les droites (y) et (b) et on lit à l'intersection de l'index I, ζ avec le réseau (c, ζ) la valeur de ζ. La trace de la courbe (ζ) sur le réseau (x, y) donne les différentes valeurs de ces variables satisfaisant à l'équation considérée

(1) Nous rappelons que $x'_\infty \mapsto Ox$ indique que le transparent doit être orienté d'une façon constante par rapport au fond ; les droites O′x′ et Ox n'ont pas été tracées sur les fig 62 à 68.

Dans l'abaque (fig. 63) établi par M. Mehmke et dans lequel le paramètre ζ est désigné par la lettre γ, M. Mehmke emploie au lieu du réseau (a, b) deux échelles et deux index. Ensuite l'index $I_{c,\zeta}$ est tracé sur le transparent au lieu d'être tracé sur le fond, alors que c'est l'inverse pour le réseau (c, ζ).

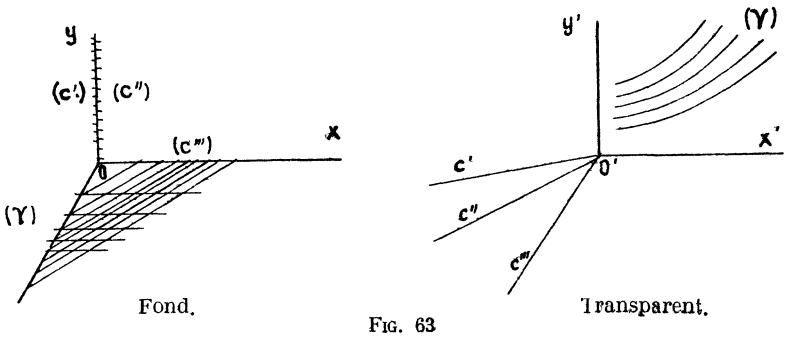


FIG. 63

§ 2. — L'équation

(B) $$a x^m + b x^p + c x^r + y = 0$$

est résolue par M. Mehmke de la même façon que l'équation précédente, en posant les exposants.

$$n = q = s = -1.$$

Or elle peut être représentée, plus simplement, par un abaque *sans systèmes surabondants* dont le fond portera les réseaux (a, b) et (c, y), ainsi qu'une échelle (x) et un transparent à 3 index $I_{a,b}$, $I_{c,y}$ et I_x.

En effet, l'équation :

(B') $$a x^m + b x^p + c x^q + d = 0,$$

où d remplace y, est représentable par un abaque à transparent orienté en la décomposant en deux équations au moyen de la variable commune (x) et du paramètre *éliminable* (ζ).

On a alors :

$$a x^m + b x^p = \zeta \quad \text{et} \quad c x^q + d = -\zeta$$

et on superpose les échelles (x) et (ζ) des deux abaques.

On obtient ainsi l'abaque de la fig. 64, dans laquelle le faisceau de droites (x) du fond a été remplacé par l'échelle (x), le transparent portant l'index droit I'_x.

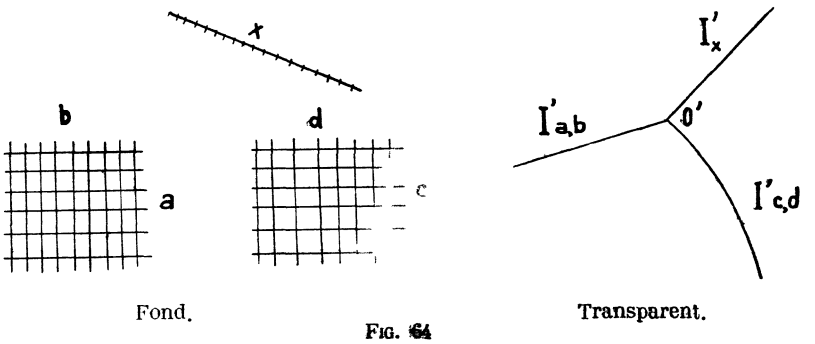


FIG. 64

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \longmapsto Ox, \quad I'_{a,b} \longmapsto P_{a,b}, \quad I'_{c,d} \longmapsto P_{c,d}, \quad I'_x \longmapsto P_x.$$

§ 3. — L'équation du 4° degré.

(C) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

et l'équation du 3e degré

(D) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

que M. Mehmke représente par des abaques comprenant un fond et *deux* transparents, peuvent être représentées par des abaques à *un seul transparent*, la suppression du second transparent simplifiant notablement les opérations.

En effet, la première de ces équations constitue un cas particulier de l'équation

(C') $$x^m + ax^p + bx^q + cx^r + d = 0$$

qui peut être représentée au moyen d'une *double* dissociation comportant deux paramètres, dont l'un *éliminable* et l'autre non *éliminable*.

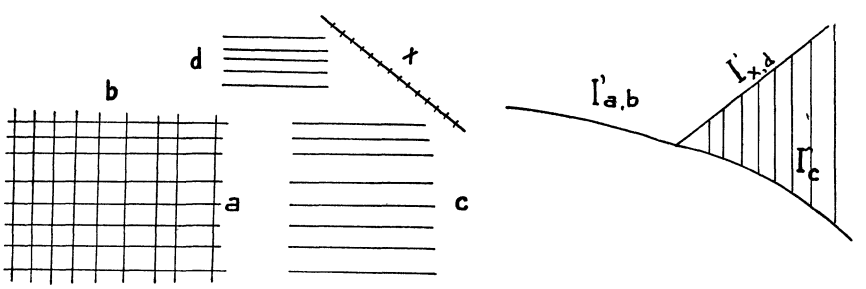
On a :

$$ax^p + bx^q + cx^r + \zeta = 0$$

et

$$x^m + d = -\zeta.$$

Or la première expression est du type de l'équation (B') traitée ci-dessus, ζ jouant le rôle de d. En traçant sur le fond dans les systèmes des faisceaux (ζ) (1) et (x) le faisceau (d) donné par la deuxième expression, on obtient l'abaque de la fig. 65.



Fond. FIG. 65 Transparent.

Mode d'emploi :

$$P_{a,b} \longmapsto I'_{a,b}, \quad x'_\infty \longmapsto Ox, \quad P_{c,\zeta} \longmapsto I'_c, \quad P_{a,\zeta} \longmapsto I'_{x,d}.$$

On fait passer l'index $I'_{a,b}$ par le point (a,b), l'index I'_c et l'index $I'_{x,d}$ doivent couper les faisceaux (c) et (d) de façon que les points d'intersection se trouvent sur la même droite du faisceau tracé entre les index $I'_{x,d}$ et I'_c.

L'intersection de l'index $I'_{x,d}$ avec l'échelle (x) donnera la valeur de x.

L'équation du 4° degré

(C) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(1) Le faisceau (ζ), constitué par des droites parallèles aux droites du faisceau (b), n'a pas été tracé sur la fig. 65, car il n'intervient pas dans la solution.

pourrait être représentée comme nous venons de représenter l'équation (C'), mais *elle constitue également un cas particulier de l'équation* (A), examinée p 75, et peut être résolue plus simplement par l'abaque de la fig. 66 en la transformant comme suit :

$$1 + \frac{ax^3}{x^4+d} + \frac{bx^2}{x^4+d} + \frac{ac}{b^2}\frac{(x^2b)^2}{(x^4+d)^2}\frac{(x^4+d)}{ax^3} = 0$$

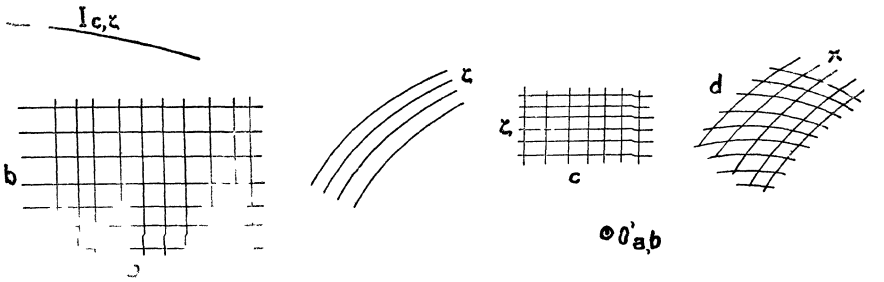
ou bien

$$1 + M + N - \frac{ac}{b^2}\frac{N^2}{N} = 0.$$

et

$$ac = (b\,\zeta^{1/2})^2.$$

On superpose les échelles (a) et (b) et on trace le réseau de points à 2 cotes (x, d).



Fond. Transparent.

FIG. 66

Mode d'emploi :

$$O' \mapsto P_{a,b}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{c,\zeta} \mapsto I_{c,\zeta}, \quad P'_{x,d} \mapsto L\zeta.$$

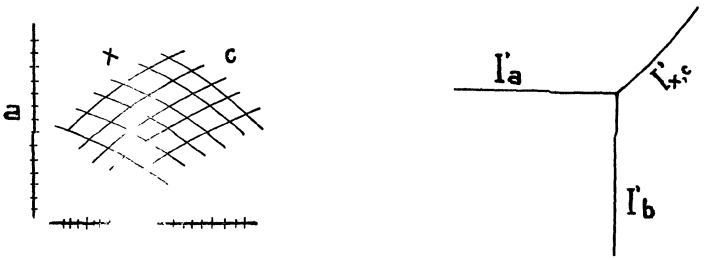
Enfin l'équation du 3e degré.

(D) $$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

peut être mise d'abord sous la forme suivante :

(D') $$\frac{a\,x^2}{x^3+c} + \frac{b\,x}{x^3+c} + 1 = 0.$$

Elle est alors représentable par l'abaque schématisé sur la fig. 67.



Fond. Transparent.

FIG. 67

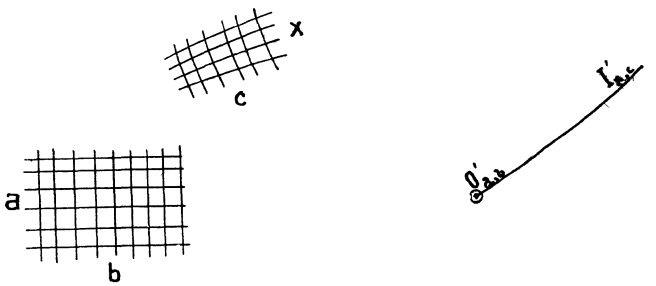
Mode d'emploi :

$$x'_\infty \mapsto Ox, \quad I'_a \mapsto P_a, \quad I'_b \mapsto P_b, \quad I'_{x,c} \mapsto P_{x,c}.$$

L'équation (D) peut être également mise sous la forme

$$(D'') \qquad \frac{a\,x^2}{x^3 + bx} + \frac{c}{x^3 - bx} + 1 = 0.$$

Elle sera alors représentée par l'abaque de la fig. 68.



Fond. Transparent.

FIG. 68

Mode d'emploi :

$$x'_\infty \mapsto Ox, \quad O' \mapsto P_{a,b}, \quad I'_{x,c} \mapsto P_{x,c}.$$

B. — Les abaques hexagonaux de M. Lallemand.

Nous avons déjà montrée au Ch. IV, p. 71 comment la méthode générale du transparent orienté, comprenant un fond et un transparent portant des réseaux et des faisceaux cotés, conduisait directement à l'abaque hexagonal constitué par un fond portant 3 échelles droites cotées et un transparent à 3 droites non cotées.

Nous nous proposons de montrer ci-dessous comment certains types d'équations représentables par un abaque hexagonal en utilisant le glissement du transparent, *correspondant en fait à plusieurs opérations*, peuvent être résolus au moyen d'une seule opération, en employant des systèmes mobiles, cotés ou non cotés, mais différents d'une droite.

Le fait de réduire les opérations à une seule présente des avantages non seulement au point de vue de la rapidité et de la précision, mais également à celui de la compréhension de l'influence des différents facteurs.

Prenons comme exemple l'équation de l'*erreur de réfraction dans le nivellement géométrique* (1).

$$\varepsilon = a\,\frac{B}{D}\,\frac{l^2}{(1 - \alpha\theta)\,2}\,f(t_2 - t_1,\ t_3 - t_2),$$

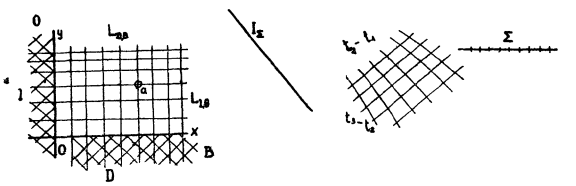
où B est la pression, D — la différence de niveau, l — la longueur de la nivelée, $3\,\theta = t_1 + t_2 + t_3$, t_3 — la température à la hauteur de la lunette, t_1 et t_2 — les températures aux mires d'arrière et d'avant.

(1) Voir M. d'Ocagne : *Traité de Nomographie*, 2e édition, p. 147.

M. Lallemand a utilisé un abaque hexagonal à 3 échelles binaires (B, D), (I, θ) et ($t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$) et une échelle simple (ε). La solution s'obtient par un double glissement du transparent.

On pourrait supprimer une opération en employant, par exemple (voir fig. 69), un fond portant deux échelles binaires (B, D), (I, θ), un réseau de droites [L (B, D), L (I. θ)] et l'index I_ε. Le transparent comprendrait le réseau ($t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$) et l'échelle (ε) En faisant coïncider le point ($t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$) avec le point [(B, D), (I, θ)], on lirait ε à l'intersection de l'échelle de cette variable avec l'indice I_ε.

On peut également établir un abaque encore plus simple *sans échelles binaires*,



Fond. Transparent.

FIG. 69

dont le fond porterait le réseau (B, D) et le faisceau (ε), tandis que le transparent porterait les réseaux (I, θ) et ($t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$).

Le mode d'emploi serait :

$$P'_{I,\theta} \mapsto P_{B,D}, \quad x'_\infty \mapsto Ox, \quad P'_{t_2-t_1,\, t_3-t_2} \mapsto L_\varepsilon.$$

C. — Les abaques de M. Goodseels

Si nous étudions au moyen de notre théorie générale l'ouvrage de l'auteur, *Les procédés pour simplifier les calculs, ramenés à l'emploi de deux transversales qui se rencontrent au sein d'une graduation* (Bruxelles, 1898), nous constaterons que l'auteur voulait envisager des abaques, dont le contact de résolution était formé par l'intersection de 3 faisceaux, dont l'un (que l'auteur appelle «graduation ») est tracé sur un plan fixe et les deux autres (constitués par des « transversales ») sont tracés sur des plans mobiles.

On a ainsi affaire à des abaques à *deux* plans mobiles et les équations représentables par ces abaques résultent de l'élimination de M et N entre les équations

$$F_1(M, N, z_{n+1}) = 0$$

$$F_2(M, N, z_{n+2}) = 0$$

$$F_3(M, N, z_{n+3}) = 0$$

M et N étant des fonctions de $z_1 \ldots z_n$ ayant la forme habituelle (v. p. 9) de ces fonctions.

Mais l'auteur n'a pas examiné le problème sous cette forme générale, il s'est borné à traiter quelques cas particuliers et principalement celui des abaques à équerre, qui, ainsi que l'a démontré M. Soreau (1), appartiennent au type des abaques à points alignés.

(1) « *Traité des abaques* » (Chiron, Paris 1921).

M. Goodsels a également étudié un abaque à transparent tournant constitué par un fond portant 2 échelles (z_1 et z_2) et un transparent tournant portant une droite doublement cotée en (z_3) et (z_4). Le mode d'emploi de cet abaque est

$$z'_3 \models z_1 \qquad z'_4 \models z_2$$

De cet abaque M. d'Ocagne a déduit plusieurs autres (voir fig. 176 à 180, pp. 443-4 de la 2e édition du *Traité de Nomographie*) comprenant des contacts entre des index (lignes non cotées) et des échelles cotées, et qui constituent des cas particuliers de l'abaque fig. 21 dans lequel les faisceaux sont réduits à une courbe non cotée et les réseaux à une courbe cotée.

D. — La méthode des points équidistants de MM. Gercevannof et Luckey

Le mode d'emploi de l'abaque fig. 70 imaginé par M. Gercevannof (1), est le suivant :

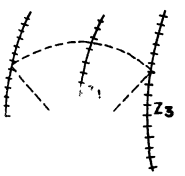


Fig. 70

l'une des pointes du compas étant mise au point coté z_1, l'autre en z_2, on fait tourner le compas autour de la pointe z_1 jusqu'à ce que l'autre pointe tombe sur l'échelle (z_3) ; la cote du point ainsi marqué est le nombre cherché.

En d'autres termes on a un fond portant 3 échelles graduées et un transparent portant un point fixe et un faisceau de cercles concentriques ayant le point fixe comme centre.

M. Luckey (2) a généralisé cette méthode (voir fig. 71) en employant au lieu des échelles (z_1) et (z_2) des réseaux de points à 2 cotes (z_1, z_2) et (z_3, z_4), puis en portant une des pointes du compas dans un nouveau réseau (z_5, z_6). L'intersection de l'arc de cercle tracé avec le rayon [(z_1, z_2) — (z_3, z_4)] avec la ligne (z_7) donne la valeur cherchée de (z_8).

Mode d'emploi :

$$P'_{56} \models P_{12}, \quad P'_{78} \models P.$$

Ainsi que M. Luckey l'a fait remarquer, ce type d'abaque rentre dans la classe des abaques à transparent tournant et son mode d'emploi est celui indiqué ci-dessus.

Nous allons lui appliquer notre théorie générale afin de déterminer le type d'équation qu'il permet de représenter.

Il est facile de voir que cette équation doit résulter de l'élimination du para-

---

(1) Voir les ouvrages de M. d'Ocagne.

(2) *Nomographische Darstellungsmöglichkeiten* (Ztschr. für angewandte Mathematik und Mechanik, Februar 1923).

mètre ζ (correspondant à une rotation) entre 2 équations ayant 6 variables communes z_1, z_2, z_5, z_6, z_7 et z_8 ,correspondant à des translations :

$$(A)\ldots \qquad F_1 (M_1, N_1, z_3 = O \text{ et } F_2 (M_1, N_2, z_4 = O,$$

$$\text{où } M_1 = f_{12} + (f_{56} + f_{78}) \cos \zeta - (g_{56} + g_{78}) \sin \zeta$$

$$N_1 = g_{12} + (f_{56} + f_{78}) \sin \zeta + (g_{56} + g_{78}) \cos \zeta$$

En éliminant N_1, puis M_1 entre les équations (A) on obtient :

$$M_1 = f_{34} \text{ et } N_1 = g_{34},$$

d'où l'on tire

$$(f_{34} - f_{12}) = (f_{56} + f_{78}) \cos \zeta - (g_{56} + g_{78}) \sin \zeta$$

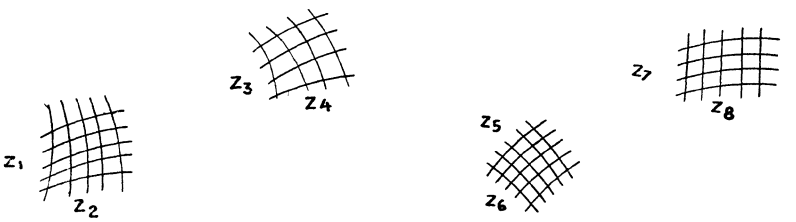
$$(g_{34} - g_{12}) = (f_{56} + f_{78}) \sin \zeta + (g_{56} + g_{78}) \cos \zeta$$

En élevant au carré et en ajoutant les deux expressions on a :

$$(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{56} + f_{78})^2 + (g_{56} + g_{78})^2,$$

qui est la forme canonique de l'équation représentable par l'abaque fig. 71 et qui a été obtenue par M. Luckey au moyen d'un raisonnement élémentaire.

Pour ce type d'équation l'abaque considéré donne certainement la solution



Fond. Transparent.

FIG. 71

la plus simple ; seulement on le rencontre bien rarement en pratique et il arrive même, que si l'on parvient à mettre une équation sous cette forme, ce n'est qu'au prix de complications inutiles

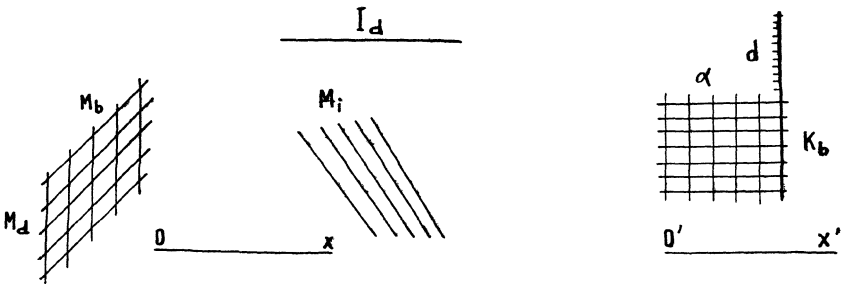
Exemples. — C'est le cas de l'abaque établi par M. Luckey pour résoudre les équations :

$$\left(\frac{d}{10}\right)^3 \frac{\pi K_b}{32 M_b} = 0{,}35 + 0{,}65 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 M_d^2}{M_b^2}} = \frac{M_t}{M_b}$$

donnant les valeurs du *diamètre* (d) *et du moment fictif* (M_t) ***d'un arbre travaillant à la tension*** (M_d) *et à la flexion* (M_b), le taux de travail étant K_b et α étant une constante de la matière

L'abaque de M Luckey nécessite 7 opérations (il y a deux systèmes figuratifs pour la variable M_b) pour déterminer les valeurs de d et M_t, alors qu'on peut résoudre les mêmes équations d'une façon beaucoup simple au moyen de l'abaque à transparent oriente, sans système surabondants, schématisé par la fig. 72 (1).

(1) Dans la *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik* (1925, p. 184), M. Kretschmer, a établi un abaque analogue en examinant d'une façon générale le type



Fond. Transparent.

FIG. 72

Mode d'emploi

$$x'_\infty \vdash Ox, \quad (\alpha, K_b)' \dashv (M_b, M_d), \quad P_d \dashv I_d, \quad P_{K_b} \vdash L_{M_i}.$$

Il y a lieu d'ajouter que le grand nombre d'opérations *distinctes* nécessitées par l'emploi du compas ne permet pas de se rendre compte de l'influence réciproque des variables, ce qui constitue le grand avantage de l'emploi du transparent, créant des liaisons géométriques directes entre les variables .

D'ailleurs par la suite M. Luckey a publié un article (1) dans lequel, se basant sur mes travaux, il a fait ressortir tout l'intérêt des abaques à transparent orienté ; ce travail comprend plusieurs abaques de ce type établis par l'auteur lui-même.

L'un d'eux représente notamment la formule de Bach

$$e = \frac{p\,d}{2400}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{al}{p(1-d)}}\right),$$

donnant l'épaisseur (e) des *toles des foyes cylindriques*. C'est un abaque à transparent orienté dont le fond porte les réseaux (d l) et (a, e), tandis que le transparent comprend l'échelle graduée (p) et un index courbe. La solution s'effectue au moyen d'une seule opération, alors que l'abaque à points alignés, établi par M. Soreau (2) pour cette même formule, comprend 2 échelles pour la variable d, dont une échellle binaire (e, d) et nécessite *deux* opérations sans compter la lecture supplémentaire due à l'échelle binaire.

---

d'abaques à transparent orienté, dont les éléments côtés peuvent être constitués par des faisceaux de droites tracés sur un papier à quadrillage logarithmique. Ces abaques représentent des équations de la forme : $F(z_1^a z_2^b \ldots z_6^f, z_1^{a'} z_2^{b'} \ldots z_6^{f'}) = 0$; ils rentrent evidemment, ainsi que d'ailleurs l'a fait remarquer M. Luckey, dans la forme canonique $F(f + f_{34} + f_{56}, g_{12} + g_{34} + g_{56}, z_7)$ que j'ai indiquee dans ma première communication à l'Académie des Sciences (C.R. 26/VI, 1929).

(1) *Die Flächenschieber oder zweidimensionalen ebenen Rechenschieber* (Ztschr. für angew. Math. u. Mech. 1925, p. 254).

(2) R. Soreau : « *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie* » (Mémoires et Compte Rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils de France, août 1911).

CHAPITRE VI

Dissociation, disjonction, représentation simple et composée et nombre des dimensions d'une représentation plane

§ 1. — Définitions données par M. d'Ocagne.

Les notions ci-dessus ont été introduites par M. d'Ocagne :

1° — pour désigner les opérations destinées à mettre les équations sous des formes convenables permettant leur représentation ;

2° — pour définir analytiquement les différents systèmes géométriques formant l'abaque

3°. — pour distinguer la nature même de cette représentation.

En les établissant M. d'Ocagne avait uniquement en vue les abaques à entrecroisement, les abaques à points alignés et les abaques hexagonaux. Nous allons préciser ces notions et les étendre à n'importe quel type d'abaque.

Voici d'après M. d'Ocagne (*Revue Générale des Sciences*, N° du 30 avril 1922) les définitions des ces notions :

« Si, sur un même plan, on peut faire correspondre à chacune des variables « z_1, z_2..... z_n un système ∞^1 coté, et si le fait que ces variables sont liées analy- « tiquement par une certaine équation se traduit par une *liaison graphique* « simple, d'une constatation immédiate, entre les éléments cotés correspondant « à ces variables, de telle sorte que la connaissance des éléments cotés au moyen « des valeurs données de n — 1 de ces variables entraine *sans tatonnemnet* celle « de l'élément coté au moyen de la valeur correspondante de la n^e, on a, sous « forme de nomogramme, réalisé une représentation plane de l'équation donnée. « Mais cela ne signifie pas, dans tous les cas, que l'on ait, à proprement parler, « réduit n dimensions à une représentation plane

« Ici se place, en effet, une distinction fondamentale dont il convient de « bien préciser le sens : dans certains cas, la liaison graphique ne suppose l'intro- « duction d'aucun système d'éléments auxiliaires, correspondant à des variables « venant s'ajouter à celles qui entrent dans l'équation considérée ; on dit alors « que la représentation est simple, parce qu'elle porte directement sur l'ensem- « ble des n dimensions envisagées, *sans décomposition possible*. C'est évidem- « ment lorsque cette circonstance se produit, et dans ce cas là seulement, que « l'on peut dire que la n^e *dimension a été effectivement réduite à une représen- « tation plane*. Il n'en va plus de même si, une telle représentation simple « n'étant pas réalisable, on parvient à former grâce à l'introduction de ν varia- « bles auxiliaires convenablement choisies, $\nu + 1$ équations, chacune d'un nom- « bre p de dimensions inférieur à n individuellement susceptibles d'une repré- « sentation simple, et telles que l'élimination entre elles des ν variables auxiliaires « reproduisent précisément l'équation donnée. Dans ces conditions, l'ensemble « des $\nu + 1$ nomogrammes à p dimensions ainsi construits pourra suppléer à

« la représentation simple, supposée impossible, de l'équation proposée, cet « ensemble constituera alors pour cette équation ce que l'on peut appeler *une « représentation composée bornée à la p^e dimension* (avec $p < n$), qu'il est « essentiel de ne pas confondre avec la représentation simple ci-dessus définie « qui atteint seule effectivement la n^e dimension.

« L'opération qui consiste à former les $\nu + 1$ équations individuellement « susceptibles de représentation simple, en parlant de l'équation donnée, est « dite une *dissociation à la p^e dimension* si chacun des nomogrammes partiels « possède au plus p dimensions.

« Il convient de ne pas confondre cette dissociation avec la dijonction des « variables ayant pour objet en vue de la construction d'un nomogramme simple, « de définir analytiquement, au moyen des coordonnées choisies, les divers sys- « tèmes cotés figurant sur ce nomogramme. »

Une définition plus détaillée de la disjonction a été donnée par M. d'Ocagne dans son *Traité de Nomographie*, 2e édition, p. XIV :

...« La *disjonction des variables*, c'est-à-dire la formation d'équations de « forme donnée, liant ces variables à des paramètres dont l'élimination reproduit « l'équation à représenter, et qui, interprétée comme des coordonnées, dans tel « ou tel système donnent naissance à un nomogramme de tel ou tel type ».

§ 2. — Nos définitions de la dissociation et de la disjonction

J'appellerai *dissociation d'une équation donnée entre n variables, l'opération purement analytique consistant à former au moyen de μ paramètres* (je donne le nom de paramètres aux variables auxiliaires, afin de ne pas les confondre avec les variables mêmes de l'équation) *et ν varables communes, $\mu + 1$ équations, telles que l'élimination entre elles des μ paramètres reproduise l'équation donnée.*

On voit que je sépare nettement l'opération de la dissociation de la nature de la représentation à laquelle elle conduit ; en effet, ainsi que nous le verrons plus loin, la dissociation peut, suivant les cas, donner lieu à une représentation simple ou composée.

En ce qui concerne la *disjonction*, c'est la première (1) définition de M. d'Ocagne que nous adopterons en l'énonçant comme suit :

la disjonction des variables est la formation des relations entre les variables

---

(1) La deuxième définition de M. d'Ocagne comprend une condition (formation d'équations liant les variables à des paramètres dont l'élimination reproduit l'équation à représenter) qui constitue ainsi que nous l'avons dit, l'opération de la *dissociation* ; or il est important d'éviter la confusion entre la disjonction et la dissociation.

Il est vrai que pour certains types d'abaques les équations de disjonction, dans lesquelles on considère les coordonnées comme des paramètres, peuvent être considérées comme des équations de dissociation.

Ainsi pour le type canonique de l'équation représentable par un abaque à points alignés

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \\ f_{56} & g_{56} & h_{56} \end{vmatrix} = 0$$

les équations de disjonction en coordonnées parallèles sont :

$$\text{(A')} \qquad \begin{cases} uf_{12} + vg_{12} + h_{12} = 0 \\ uf_{34} + vg_{34} + h_{34} = 0 \\ uf_{56} + vg_{56} + h_{56} = 0 \end{cases}$$

Si nous considérons u et v comme des paramètres, l'élimination de ceux-ci entre les équations (A') reproduit l'équation (A), mais c'est un cas particulier spécial aux équations représentables par des abaques à points alignés.

et les coordonnées choisies définissant analytiquement les différents systèmes cotés ou non cotés (1) constituant l'abaque (2).

EXEMPLES.

1°. — ABAQUES A UN SEUL PLAN (entrecroisement).

Pour représenter par un abaque à entrecroisement l'équation

$$f_{12} + f_{34} + f_5 = 0$$

on la *dissocie* au moyen de deux paramètres en (3) trois équations :

$$\zeta_1 = f_{12}, \quad \zeta_2 = f_{34}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 + f_5 = 0.$$

En adoptant un système d'axes XOY (v. fig. 73) et en appelant x, y les coordonnées d'un point, les équations de *disjonction* pour chacune des équations dissociées seront :

1re *équation* $\zeta_1 = f_{12}$; $x = \zeta_1$; $y = -z_1$; $\varphi(x, y, z_2) = 0$.

2e *équation* $\zeta_2 = f_{34}$; $x = -\zeta_3$; $y = \zeta_2$; $\psi(x, y, z_4) = 0$.

3e *équation* $\zeta_1 + \zeta_2 + f_5 = 0$; $x = \zeta_1$; $y = \zeta_2$; $x + y + f_5 = 0$.

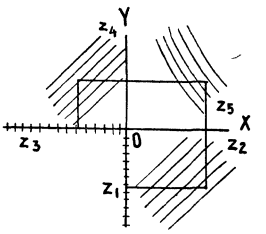


FIG. 73

2°. — ABAQUES A POINTS ALIGNÉS.

Nous venons de voir au renvoi de la p 86, que si l'on adopte les coordonnées *parallèles* et si l'équation est mise sous la forme du déterminant (A), les équations de disjonction s'en déduisent directement.

On a vu au chapitre IV, que si l'on considère la méthode des points alignés, comme un cas particulier de la théorie générale, utilisant des coordonnées *cartésiennes*, il faudra dissocier l'équation (A) en 3 équations au moyen de deux paramètres.

Les équations de disjonction se déduiront des équations dissociées ; elles

(1) Ainsi que nous l'avons dit plus haut, M d'Ocagne n'avait en vue que les abaques à entrecroisement, à points alignés et hexagonaux. Dans les premiers (sauf dans le cas de 2 variables) il n'y a pas de systèmes non cotés, dans les deux autres les systèmes non cotés (une seule droite ou 3 droites à 120° tracées sur un transparent) sont définis une fois pour toutes.

Mais d'une façon générale, l'opération de la disjonction doit comprendre également la définition analytique des systèmes non cotés faisant partie de l'abaque .

(2) La notion de la disjonction ne dépend pas de la nature de la représentation (simple ou composée) résultant de la mise en œuvre des équations de disjonction, aussi avons-nous supprimé les mots « nomogramme simple », figurant dans le premier énoncé de M. d'Ocagne.

(3) Ainsi que nous le verrons plus loin, la représentation sera composée, car les équations de dissociations, prises par groupes de deux, contiennent seulement un paramètre commun.

seront évidemment les mêmes que celles données par la méthode des points alignés, quand cette méthode utilise les coordonnées cartésiennes.

En plus, les équations de disjonction définiront un système d'éléments non cotés se réduisant à une droite, qui doit être tracée sur le transparent.

3°. — Abaques a éléments mobiles cotés.

On trouvera au chapitre III, traitant de la méthode générale de construction des abaques, les équations de disjonctions dans le cas le plus général comprenant un transparent tournant à éléments cotés.

D'autre part j'examine dans les chapitres I et II tous les cas possibles de dissociation des équations.

§ 3. — Représentation simple et composée.

Pour différencier la *représentation simple et composée* nous nous baserons sur la possibilité ou l'impossibilité de la décomposition des abaques en abaques tracés sur feuilles séparées et nous montrerons comment les caractères analytiques des équations décomposées permettent de voir si la représentation sera simple ou composée. Considérons d'abord le cas dans lequel :

1°. — Les équations décomposées prises deux a deux ne contiennent pas la même variable.

Si 2 équations ont un paramètre commun, les abaques qui représentent chacune de ces équations ont été accolés au moyen de l'échelle de ce paramètre. Comme elles ne comprennent pas de variable commune, on pourra toujours déterminer au moyen des variables données sur l'un des abaques la valeur du paramètre, et passer ensuite au second abaque qui déterminera la variable inconnue ; on pourra donc tracer les deux abaques sur 2 feuilles séparées et la représentation sera *composée*.

Tous les abaques à entrecroisement (à plan unique), portant sur plus de 3 variables et composés par des systèmes ramifiés, constituent des représentations composées. Il en est de même des échelles binaires et ternaires entrant dans la composition des abaques à éléments mobiles.

Si deux équations ont 2 ou 3 paramètres communs, on ne pourra employer des abaques séparés, qu'en traçant chaque fois, sur les fonds la ligne non cotée (2 paramètres communs) ou cotée (3 paramètres communs) constituant la trace d'un point du transparent.

On ne peut pas considérer ces procédés comme des méthodes nomographiques, qui ne peuvent comporter pendant leur utilisation aucun tracé nouveau et nous dirons dans ces cas que la représentation est simple, simple étant pris dans le sens d'indécomposable (1).

EXEMPLES

a) — Considérons l'abaque à transparent orienté (fig 5) de l'équation

$$F(f_1 + f_2 + f_3, \quad g_1 + g_2 + g_3) = 0$$

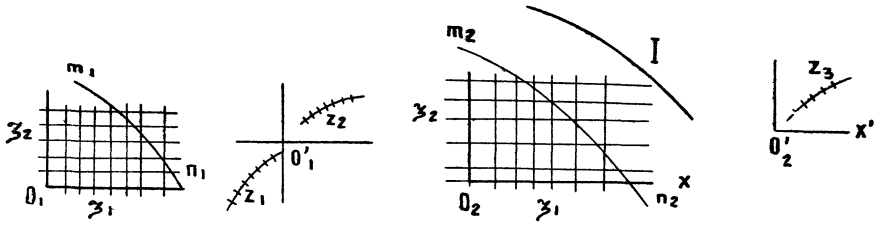
représentable sans dissociation.

Dissocions là en 3 équations de la forme

$$\zeta_1 = f_1 + f_2 ; \quad \zeta_2 = g_1 + g_2 ; \quad F(\zeta_1 + f_3, \zeta_2 + g_3) = 0.$$

(1) On voit ainsi clairement pourquoi M. d'Ocagne, considérait qu'une dissociation conduisait toujours à une représentation composée : c'est parce qu'il n'avait envisagé la dissociation qu'au moyen d'*un seul paramètre*.

Ces équations sont représentables par les deux abaques schématisés ci-dessous.



Fond I Transparent I Fond II Tranparent II

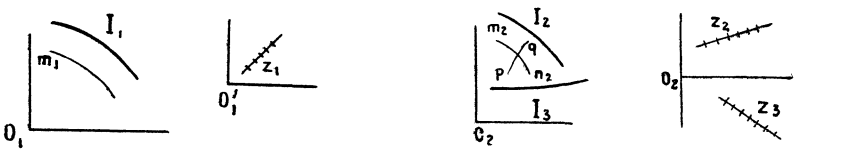
FIG. 74

Quand z_2 est inconnue, il faudra tracer sur le réseau (ζ_1, ζ_2) du *fond* II la trace m_2n_2 du point O'_2 obtenue en faisant glisser le long de l'index I le point (z_3) du transparent II. Il faudra reporter ensuite cette courbe sur le fond I ; la valeur de (z_2) sera déterminée par le contact de l'échelle (z_2) avec la courbe m_1n_1, le point (z_1) coïncidant avec O_1.

b) — Considérons l'abaque à transparent orienté (fig. 19) d'une équation représentable au moyen d'une double dissociation :

$$F_1\ (f_1 + \zeta_1,\quad g_1 + \zeta_2) = 0$$
$$F_2\ (f_2 + \zeta_1,\quad g_2 + \zeta_2) = 0$$
$$F_3\ (f_3 + \zeta_1,\quad g_3 + \zeta_3) = 0$$

On pourra séparer l'abaque en 2 abaques, qui se présentent comme suit :



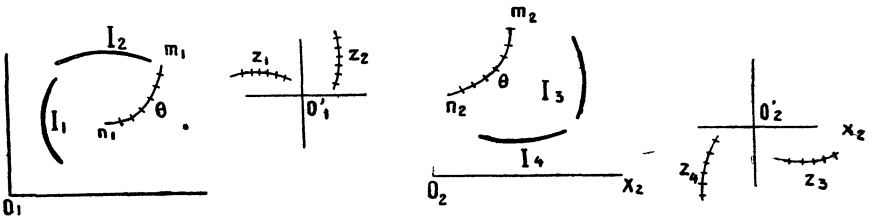
Fond I Transparent I Fond II Transparent II

FIG. 75

Pour déterminer, par exemple, la valeur de z_2, il faudra porter sur le fond II la trace m_1n_1 du point O'_1, obtenue en glissant le point (z_3) le long de l'index I_1.

L'intersection de la courbe m_2n_2 avec la trace pq du point O'_2, le point (z_3) glissant le long de I_3, permet de déterminer z_2.

c) — Examinons à présent le cas de 3 paramètres communs. L'abaque à transparent tournant (fig. 21) peut être divisé en 2 abaques séparés suivant le schéma ci-dessous.



Fond I Transparent I Fond II Transparent II

FIG. 76

Pour déterminer la valeur de z_2, il faut reporter sur le fond I la trace mn du point O'_2, obtenue en faisant coïncider les points (z_3) et (z_4) avec les index I_3 et I_4 et en cotant cette courbe en valeurs de θ, angles de $O'_2 x_2$ avec $O_2 x_2$. Il faudra ensuite glisser le point O'_1 le long de $m_1 n_1$ en donnant en chaque point à $O'_2 x_1$ l'inclinaison θ convenable et trouver le point pour lequel le point z_1 coïncide avec I_1.

L'examen de l'abaque permet le plus souvent de se rendre immédiatement compte si l'abaque est simple ou composé.

Ainsi si le support d'un paramètre n'a pas été éliminé, la représentation sera généralement composée, comme cela est le cas de l'abaque à transparent orienté (v. fig. 16 et 17)

Mais il peut arriver que le système figuratif du paramètre soit éliminé ; la représentation étant tout de même composée, c'est le cas des abaques hexagonaux (v. fig. 55), dans lesquels les faisceaux de droites des paramètres ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont remplacés par des index droits I_1, I_2, I_3.

Quand un paramètre est représenté par un système figuratif unique, il n'est pas généralement coté et la représentation est composée ; quand il y a plus d'un système figuratif pour un paramètre, ces systèmes doivent être cotés et la représentation peut être simple

Les abaques à transparent orienté (v. fig 62 et 66) constituent des exemples de représentations simples comprenant un paramètre non éliminable possédant 2 systèmes figuratifs. Généralement dans ces abaques, la détermination de certaines variables ne peut s'effectuer qu'au prix de tatonnements plus ou moins laborieux.

2°. — Les équations décomposées prises deux a deux contiennent des variables communes.

Deux variantes peuvent se présenter : l'abaque comporte un seul système figuratif pour chacune de ces variables ; la détermination de celles-ci s'effectue alors sans tâtonnement, ou bien l'abaque comporte deux ou plus de systèmes figuratifs pour ces variables ; si l'une d'elles est inconnue, sa détermination ne pourra s'effectuer que par tâtonnements.

Quel que soit le cas, les conditions, définies ci-dessus et nécessaires pour que l'abaque soit simple, restent les mêmes : les équations prises deux à deux doivent comprendre plus d'un paramètre ou d'une variable commune.

Un exemple du premier cas est donné par notre abaque *Convoi remorqué par une locomotive* (voir p. 33) ; l abaque hexagonal de la *Déviation du compas* (voir p. 15) constitue un exemple du deuxième cas-

Remarque — Il y a lieu de faire remarquer que pour savoir si une représentation est simple ou composée, il faut que la décomposition ne soit pas inutilement compliquée.

Ainsi l'équation

$$F(\zeta + f_{12},\quad \zeta' + g_{12},\quad z_3) = 0. \tag{1}$$

$$\Phi(\zeta + f_{45},\quad \zeta' + g_{45},\quad z_6) = 0. \tag{2}$$

$$\zeta + a = c(\zeta' + b). \tag{3}$$

est représentable par l'abaque

$$O'x' \vdash\!\dashv Ox,\quad P'_{12} \vdash\!\dashv L_3,\quad P'_{45} \vdash\!\dashv L_6.$$

Les équations ci-dessus comprennent 2 paramètres communs, cependant la

représentation est composée, car l'abaque est évidemment décomposable en deux abaques comprenant la variable auxiliaire ζ reportée sur la droite Ox :

$$O'x' \equiv Ox, \quad P'_{12} \vdash L_3, \quad O' \vdash P_\zeta.$$

$$O'x \equiv Ox, \quad O' \vdash P_\zeta, \quad P'_{45} \vdash L_6.$$

La possibilité de cette décomposition s'aperçoit également si l'on porte dans les équations (1) et (2) la valeur de ζ ou de ζ' tirée de l'équation (3).

Les équations (1) et (2) ont alors seulement un paramètre commun.

§ 4. — Nombre des dimensions.

Il nous reste à parler du nombre des dimensions d'une représentation simple, qui, d'après M. d'Ocagne, est égal au nombre de variables figurant dans cette représentation.

Ce nombre (n) dépend exclusivement du nombre (d) de degrés de liberté d'un plan par rapport à un autre et du nombre de ces plans.

Si l'on ne considère que deux plans et si l'on envisage, ainsi que nous le faisons habituellement, le cas d'un plan, comme celui de deux plans à O degrés de liberté, le nombre de variables (1) sera pour les équations sans dissociation

$$n_s = 3 + 2d$$

et de

$$n_c = 3 + 3d = 3 + 2d + p$$

pour les équations représentables au moyen d'une dissociation simple, double ou triple, donnant lieu à des abaques à 1, 2, 3 degrés de liberté, la dissociation étant faite au moyen de paramètres seulement, le nombre de ceux-ci étant p.

S'il y avait v variables communes, le nombre total des variables serait

$$n_c = 3 + 3d - 2v = 3 + 2d + p - v.$$

On voit ainsi que c'est par l'augmentation du nombre de degrés de liberté qu'on parvient à figurer les équations, dont la représentation avec un nombre de degrés de liberté moindre, serait irréalisable car elle demanderait l'emploi de système ∞^n, n étant supérieur à l'unité. L'élément mobile, prenant chaque fois la position convenable, intervient alors pour éviter la confusion qui résulterait de la nécessité de marquer chaque fois sa trace.

En particulier, la possibilité de réduire, au moyen du principe des points alignés, à une représentation plane un nombre de dimensions supérieur à trois, tient à l'emploi d'un élément mobile constant à 2 degrés de liberté, tandis que l'impossibilité de la représentation simple au moyen d'abaques hexagonaux des équations à plus de 3 variables ne tient pas à l'emploi d'un transparent orienté à 2 degrés de liberté, mais à la forme particulière adoptée pour l'élément mobile qui réduit à zéro le nombre de degrés de liberté.

---

(1) Voir p. 33.

DEUXIÈME PARTIE

Applications à l'art de l'Ingénieur

RÉSUMÉ

J'ai réuni, dans cette seconde partie de mon travail les nombreux abaques, dont plusieurs inédits, que j'ai établis depuis une quinzaine d'années pour résoudre les différents problèmes rencontrés dans ma pratique d'ingénieur.

En traçant ces abaques, je ne poursuivais pas primitivement le but d'apporter une contribution à la Nomographie et si j'ai dû établir des nouvelles méthodes nomographiques, c'est parce que les anciennes méthodes se sont montrées insuffisantes pour résoudre les problèmes posés.

Ce n'est que depuis 1922, que j'ai développé la théorie générale de ces abaques, exposée dans la première partie de ce travail.

Je me permets de croire que certains de mes travaux, en dehors de leur intérêt nomographique, constituent une contribution à l'art de l'Ingénieur, soit au point de vue de la façon de poser les problèmes, soit au point de vue de leur solution.

Le but principal de cette deuxième partie étant d'apporter des exemples à la première partie théorique de mon travail, je n'ai pu décrire que très succinctement les différents abaques, me proposant d'y revenir, en ce qui concerne l'Aviation notamment, d'une façon plus complète dans un ouvrage en préparation sur la Mécanique de l'Aviation.

Les difficultés d'édition et le désir de présenter un ouvrage facilement maniable m'ont forcé d'une part à réduire sensiblement par la photographie les dimensions des abaques originaux et d'autre part à faire imprimer les « transparents » sur du papier non transparent.

J'ai réuni dans le premier chapitre une série de travaux sur les TURBO-MACHINES A HÉLICES, nom général qui comprend les ventilateurs, pompes et turbines-hélices, les hélices propulsives et sustentatrices, les moulinets et moulins à vent. C'est à ma connaissance pour la première fois et avec des moyens nouveaux que cette question, d'un grand avenir industriel, est présentée sous une forme d'ensemble.

La généralisation de la théorie tourbillonnaire des hélices propulsives de Joukowki m'a permis d'établir sous une forme très simple des équations fondamentales s'appliquant à toutes ces machines. Un premier abaque sert à résoudre les problèmes de détermination des éléments de construction ou des conditions de fonctionnement de ces machines. Dans certains cas particuliers on doit utiliser un deuxième abaque basé sur la théorie de la persienne infinie de Tchapliguine, théorie d'une grande valeur, mais restée jusqu'à présent sans application par suite des difficultés de la solution analytique.

La théorie, déjà ancienne, des hélices propulsives de Drzewiecki, présente encore à l'heure actuelle de l'intérêt par suite de sa simplicité ; je décris plusieurs

abaques basés sur cette théorie et s'appliquant aux *hélices propulsives* ou aux *moulinets*.

D'autres abaques permettent le choix extrêmement rapide des hélices propulsives ou des moulinets en vue de leur utilisation sur les avions ou dirigeables. Ces abaques utilisent les courbes caractéristiques des hélices et des moulinets déterminées soit expérimentalement par des essais en grandeur ou sur modèles, soit théoriquement par les abaques cités ci-dessus.

Les *hélices sustentatrices* constituent un problème, dont je me suis occupé tout particulièrement. Un premier abaque sert à la représentation graphique des caractéristiques des hélices travaillant au point fixe, ainsi qu'à la solution de différents problèmes relatifs à l'adaptation de ces hélices. Un second abaque, basé sur l'utilisation de courbes spéciales que j'ai appelé *polaires des sustentateurs*, permet la comparaison et l'appréciation de n'importe quel organe sustentateur : voilure fixe, hélice sustentatrice, aile battante..., ainsi que la détermination des régimes de vol des machines volantes utilisant ces sustentateurs.

La notion des *polaires des sustentateurs parfaits* permet de limiter *a priori* les possibilités des différents systèmes sustentateurs.

L'abaque décrit ci-dessus pour l'étude des turbo-machines à hélices résout tous les problèmes relatifs aux hélices travaillant au point fixe. Un autre abaque basé sur les mêmes considérations sert à la détermination de la poussée et de la puissance absorbée par ces hélices.

Les ventilateurs centrifuges et hélicoïdaux fabriqués industriellement ont généralement des rendements déplorables. Cela tient d'une part à leurs principes de fonctionnement, mais d'autre part aussi au fait qu'ils sont très souvent fabriqués par des tôliers qui sont loin d'être des aérodynamiciens.

Aussi leurs produits seront avantageusement remplacés par les *ventilateurs-hélices*, nés dans les laboratoires aérodynamiques, et dont les rendements sont très supérieurs à ceux des ventilateurs centrifuges et hélicoïdaux. Il se passera là le même phénomène qui s'est déjà produit pour les turbines-hélices, qui grâce à une expérimentation scientifique dans les laboratoires de puissantes usines, ont atteint à l'heure actuelle un haut degré de perfection et qui ont remplacé dans de nombreux cas les turbines radiales.

J'ai eu l'occasion d'étudier aussi bien expérimentalement que théoriquement les ventilateurs-hélices et j'ai établi plusieurs abaques qui simplifient sensiblement la solution des différents problèmes de construction ou d'adaptation de ces machines.

Le deuxième chapitre comprend une série de travaux constituant une MÉCANIQUE NOMOGRAPHIQUE DE L'AVION.

Parmi ces travaux je citerai :

L'étude des temps de montée des avions, dans laquelle j'ai réussi à mettre les équations de montée d'un avion sous une forme générale, indépendante de la variation de la densité de l'air et du couple du moteur avec l'altitude, et à résoudre ces équations dans le cas du moteur suralimenté muni d'une hélice rigide ou à pas variable.

L'étude du rayon d'action et de la durée du parcours des avions et dirigeables. Dans ce travail j'ai introduit la notion nouvelle des polaires des consommations, courbes expérimentales qu'on détermine au moyen d'essais en vol de l'avion ; en les traçant ensuite sur un abaque spécial on peut déterminer avec une très grande rapidité au cours du voyage le régime optimum, dépendant de la charge de l'avion, de la direction et de l'intensité du vent et de l'altitude du vol et conduisant au parcours maximum.

L'abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère. Dans cet abaque qui résout un ensemble de 8 équations avec 14 variables,

j'ai relié pour la première fois toutes les performances d'un avion, c'est-à-dire non seulement les vitesses horizontales et ascensionnelles, mais également les poids constitutifs et notamment le poids utile.

L'abaque permet la solution directe des problèmes posés par les programmes des Services officiels ainsi que des problèmes relatifs aux records de vitesse, de durée, ou de distance, etc..., etc...

Un transparent spécial sur lequel il suffit de calquer la polaire de la voilure constitue un diagramme complet des performances de l'avion en vol à toutes les altitudes.

Nouvelle méthode graphique pour l'étude des performances d'un avion. Cette méthode réunit sur la même figure, sans les déformer, la polaire de l'avion, la caractéristique du moteur et le diagramme de l'hélice, elle permet la détermination des différents régimes du vol, sans aucun calcul, par un simple glissement du diagramme de l'hélice.

La méthode permet également d'introduire dans la détermination des performances l'influence du *souffle* de l'hélice, influence que j'ai été le premier à mettre en évidence, et qui dans certains cas peut modifier sensiblement les résultats obtenus.

Au point de vue de la simplicité et de la rapidité d'application, ainsi que de la précision des performances déterminées, cette méthode me paraît particulièrement intéressante.

La méthode des *polaires réduites* et des *polaires réduites type* s'est montrée féconde dans l'appréciation et la comparaison des avions ; l'*abaque pour la détermination des performances d'un avion type* est d'un emploi commode.

La méthode d'*étude du vol oblique*, que j'ai établie en collaboration avec le professeur Joukowski présente un grand intérêt pour la détermination des performances des avions à grand excédent de puissance ; c'est au moyen de cette méthode que j'ai montré que ces avions possédaient, en plus de leurs régimes de vol habituels, un autre régime, resté inconnu jusqu'à présent.

Mes travaux sur la *stabilité longitudinale* des avions consistent d'abord dans une méthode graphique de représentation des essais en soufflerie du modèle de l'avion. Au moyen de cette méthode j'ai pu mettre en évidence dès 1915 plusieurs faits remarquables qui étaient cependant ignorés à cette époque. C'est notamment l'indépendance de la stabilité statique du profil de l'aile, la possibilité de rendre stable tout avion en avançant son centre de gravité, la légende de la nécessité du V longitudinal.

Dans un travail fondamental sur la stabilité longitudinale statique et dynamique des avions, publié en 1923, travail qui, j'ose le dire, a fait école en France, j'ai résolu d'une façon complète et simple cette question d'une si grande importance pratique pour l'Aviation.

Dans le troisième chapitre consacré à des QUESTIONS DIVERSES INTÉRESSANT L'AVIATION, je noterai mes travaux sur les *souffleries aérodynamiques*. J'ai donné en 1918 une théorie « hydraulique » des souffleries, qui est encore la seule théorie existante à l'heure actuelle. Elle a été vérifiée par mes recherches expérimentales ainsi que par celles d'autres expérimentateurs et a rendu de grands services dans l'établissement des projets des souffleries.

En 1921, j'ai imaginé un nouveau type de soufflerie, dit à *pression variable*, qui permet de satisfaire avec une faible puissance motrice aux lois de similitude, dont l'inobservation fausse gravement les résultats obtenus dans les souffleries à pression atmosphérique. Une soufflerie à pression variable de ce type a été construite aux Etats-Unis et a donné des résultats d'une très grande valeur scientifique et pratique ; une autre soufflerie du même type est en construction au National

Physical Laboratory à Teddington. J'ai été également le premier à proposer les *supersoufflerie*s, pour essais de groupes motopropulseurs et d'avions en grandeur, soufflerie qu'on construit actuellement dans plusieurs pays.

Je mentionnerai parmi différents travaux sur les *moteurs à combustion interne* une de mes premières études nomographiques, datant de 1912, et relative à un diagramme pour l'étude des cycles thermodynamiques de ces moteurs.

Il est basé sur l'emploi d'un système d'axes rectangulaires gradués en valeurs des logarithmes des rapports de la pression et du volume du gaz à la pression et du volume de ces gaz au commencement de l'admission.

Le réseau (p/p_0, v/v_0) ainsi obtenu est complété par un faisceau de droites inclinées à 45° cotées en valeurs de T/T_0 (rapports des températures absolues). Une construction géométrique extrêmement simple permet de tracer un quatrième faisceau de courbes métriquement espacées (il suffit donc d'en construire une seule) cotées en valeurs de l'entropie et ceci en tenant compte de la variation de la chaleur spécifique avec la température.

En traçant dans le réseau (pression-volume) le cycle théorique ou expérimental d'un moteur on obtient ainsi en même temps le *diagramme entropique* (entropie-température) de ce cycle.

On peut également, sans tracer sur notre diagramme le faisceau (entropie), transporter rapidement le cycle dans un système de coordonnées (entropie-température) à échelles métriques.

Je citerai enfin une série d'abaques inédits sur le *bombardement aérien*, sur les *radiateurs* et les *montants* des avions.

A la demande de plusieurs Sociétés industrielles j'ai eu ces dernières années l'occasion de m'occuper de la solution de plusieurs problèmes d'ordre thermique.

L'ensemble de ces travaux constitue une étude nomographique complète de la TRANSMISSION DE LA CHALEUR ET DES PERTES DE CHARGE DANS LES GROUPES VAPORISATEURS.

J'ai étudié en collaboration avec M. Dieterlen, qui est le grand spécialiste de ces questions, les écoulements de la chaleur et des gaz dans les chambres de combustion, les faisceaux tubulaires, les économiseurs, les réchauffairs et les conduites calorifugées.

Trois de ces travaux forment l'objet du quatrième chapitre. Ils traitent de la circulation d'eau dans les chaudières, de la transmission de la chaleur dans les chambres de combustion et les rechauffairs à plaques.

La connaissance de la *vitesse et de la teneur en vapeur à la sortie des tubes d'eau* constituant soit le faisceau tubulaire d'une chaudière, soit les murs d'eau de sa chambre de combustion, présente une grande importance, car si l'on dépasse certaines limites on peut faire brûler ces tubes.

Mon abaque se base sur des relations établies par Münzinger et sert à la détermination de la vitesse et de la teneur en vapeur à la sortie des tubes en fonction de la vitesse à l'entrée, du flux de chaleur traversant la paroi et des dimensions des tubes.

L'abaque pour l'étude du fonctionnement des chambres de combustion permet la détermination de la quantité de chaleur absorbée par la chambre de combustion, de son rendement et de la température moyenne de combustible en fonction du pouvoir calorifique du combustible, de la surface de rayonnement de la chambre par 1.000 kg/h de combustible, de la température de l'air de combustion et de la valeur de l'excès d'air.

L'abaque permet l'introduction de courbes expérimentales traduisant la relation entre la chaleur totale des fumées et leur température.

La solution analytique du même problème aurait demandé en premier lieu

l'explicitation de ces courbes et en second lieu la solution d'une équation complète du quatrième degré, opération qui rebuterait de nombreux ingénieurs.

De même la solution analytique du problème de la *détermination des dimensions d'un rechauffair* devant répondre à des conditions données ou des caractéristiques de fonctionnement d'un rechauffair existant, présente de sérieuses difficultés par suite des valeurs fractionnaires des exposants dans les équations.

Ces difficultés sont supprimées dans mon abaque, dans lequel j'ai surtout tenu à mettre en évidence l'influence de la puissance absorbée par les ventilateurs sur les dimensions du rechauffair. Le même abaque résout le problème du rechauffair optimum soit au point de vue du fabricant soit à celui du client.

Parmi les ABAQUES DIVERS formant objet du cinquième chapitre, je citerai d'abard l'abaque pour la *détermination du coefficient d'utilisation dans les projets d'éclairage.*

Le problème qui se pose le plus souvent à l'ingénieur éclairagiste est celui de la disposition et de la puissance des sources d'éclairage nécessaires pour assurer l'éclairage d'un local déterminé.

M. Dourgnon avait établi une étude analytique très remarquable de ce problème qui l'avait conduit à des relations tellement fastidieuses à résoudre qu'il n'avait pas eu la patience d'en faire une seule application. Mon étude nomographique, basée sur le travail de M. Dourgnon, m'a conduit en premier lieu à un abaque qui permet la solution instantanée des problèmes. Elle m'a conduit également à certaines considérations nouvelles et notamment à une méthode de détermination du flux direct utile et du flux direct atteignant le plafond, au moyen de *courbes caractéristiques de la source lumineuse, ainsi qu'à l'établissement de la notion du coefficient caractéristique du local.*

Comme exemple d'application de la nomographie à une question financière je signalerai l'abaque pour la *détermination de la participation de l'Etat aux bénéfices de la Société Pechelbronn* qui m'a été demandé par cette Société.

Il s'agissait d'établir le montant de cette participation, le rapport de celle-ci au capital investi étant une fonction discontinue du rapport du superbénéfice à ce même capital investi.

Le calcul de ce prélèvement d'après le contrat d'amodiation était assez compliqué et demandait, paraît-il pour chaque cas une demi-journée au bureau de comptabilité de la Société.

Après avoir établi les équations reliant les différents facteurs, j'ai tracé un abaque qui permettait la détermination instantanée des différentes variables.

Cette facilité d'emploi de l'abaque a une grande importance, car au moment de l'établissement de la balance des comptes, elle permet au personnel dirigeant de se rendre par lui-même compte de la répercussion apportée par telle ou telle modification dans un des chapitres de la balance, sans recourir chaque fois au bureau de comptabilité.

D'autre part, l'abaque permet de figurer la solution adoptée ou proposée par une ligne brisée tracée sur le fond de l'abaque et dont chaque segment correspond à une des variables. Une telle représentation parle bien à l'esprit et nous la voyons très bien pendant une réunion d'actionnaires placée devant chacun d'eux, de même que nous voyons un Conseil d'administration discuter de la balance au moyen de l'abaque.

Les cinq derniers abaques, ont rendu des services importants aux Sociétés industrielles qui nous les avaient demandés.

Ils constituent une preuve probante de l'intérêt des nouvelles méthodes nomographiques non seulement au point de vue de la solution pure et simple d'un certain système d'équations, mais surtout au point de vue de la facilité de compréhension des problèmes techniques et financiers les plus compliqués.

CHAPITRE PREMIER

Les turbo-machines à hélices

§ 1. — Théorie générale.

Je comprends sous le nom général de turbo-machines à hélices :

les ventilateurs-hélices et les pompes-hélices ;
les turbines-hélices hydrauliques et aériennes ;
les hélices propulsives ou sustentatrices, aériennes et marines ;
les moulins à vent et moulinets.

Les turbo-machines à hélices sont caractérisées par le mouvement axial du fluide à travers le rotor, celui-ci étant constitué par un petit nombre de pales de forme et de profil analogues à ceux des hélices d'avions.

J'ai réussi (1) à mettre les équations fondamentales de la théorie tourbillonnaire des hélices propulsives de Joukowski (2) sous une forme très simple qui permet d'étendre cette théorie à l'étude de toutes les turbo-machines à hélices Ces équations sont :

$$\text{tang}(\varphi - i) = \left(\frac{1}{Z_1 \bar{r}}\right) : \left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma}{\bar{r}^2} = f\varphi(i)\sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_1 \bar{r}}\right)^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = 1 - \frac{\Gamma}{4\bar{r}^2}. \tag{3}$$

Ces équations suffisent pour les ventilateurs et turbines ; pour les hélices et moulinets intervient une relation supplémentaire :

$$\left(\frac{1}{Z_1 \bar{r}} - \frac{1}{Z_1 \bar{r}}\right) \frac{1}{Z_1 \bar{r}} = \frac{\Gamma}{4\bar{r}^2}\left(1 - \frac{\Gamma}{4\bar{r}^2}\right), \tag{4}$$

où $\bar{r}$ est le rayon relatif de la section considérée ; φ, l'angle de pas ; i, l'angle d'attaque ; Ω, la vitesse angulaire de rotation du rotor ; $\Omega_1 = \Omega - \frac{v}{2r}$, v étant la vitesse induite de rotation ; $Z = \frac{\Omega R}{W}$, W étant la vitesse axiale non perturbée devant les hélices

(1) Voir ma note : *Sur l'application de la nomographie à l'étude des turbo-machines à hélices* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, N° du 3 janvier 1928).

(2) N. Joukowski : *Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive*. Traduit du russe par A. Apostol. (Gauthier-Villars, éditeurs).

propulsives et moulinets, $Z_1 = \frac{\Omega R}{W_1}$, W_1 étant la vitesse axiale dans le plan du rotor; Γ, le coefficient de circulation, $\Gamma = a \frac{J}{\pi \Omega R^2}$, a étant le nombre de pales et J, la circulation autour de chaque pale ; f, la fraction de pas ; $\varphi(i) = c_z$, la portance d'une aile d'envergure *infinie*.

Il faut distinguer deux cas fondamentaux : celui dans lequel le fluide sort du rotor avec une certaine vitesse de rotation et celui (non envisagé par Joukowski) dans lequel le fluide sort du rotor avec une vitesse purement axiale due à la présence à l'amont d'un distributeur ou d'un autre rotor tournant en sens inverse. Dans les relations ci-dessus, le coefficient de la circulation Γ sera positif si, dans le plan de rotor, le fluide tourne dans le même sens que le rotor (ventilateurs sans distributeur, turbines avec distributeur et hélices). Le signe devant i sera + pour les turbines avec ou sans distributeur et les moulinets On peut également envisager le cas d'un stator redressant le courant à l'aval d'un rotor.

Les équations ci-dessus peuvent être démontrées d'une façon tout à fait élémentaire. La *première* exprime une relation bien connue entre les angles et les vitesses ; la *seconde* est la traduction d'un nouveau théorème de Joukowski sur la relation entre la circulation, la vitesse et la résistance d'un élément de pale d'hélice.

C'est à la lumière de nos connaissances actuelles sur la résistance induite des ailes, que ce théorème prend toute son importance. Il peut être considéré comme un théorème tout à fait général, s'appliquant indifféremment à une aile d'envergure infinie ou finie et à une pale d'hélice. Il suffit à cet effet de le formuler de la façon suivante (1) :

La résultante des pressions exercées sur un élément d'aile par un fluide qui s'écoule avec une vitesse uniforme le long de l'envergure de cet élément, est normale à la direction de la somme géométrique moyenne des vitesses du fluide à l'entrée et à la sortie, et égale au produit de cette vitesse moyenne par la densité et par la circulation de la vitesse, prise le long du contour considéré ; pour obtenir la direction de cette force on fait tourner la vitesse moyenne d'un angle droit en sens inverse de la circulation.

En effet, nous savons que pour une aile d'allongement infini la vitesse induite est nulle, la vitesse moyenne sera donc égale à la vitesse à l'infini et l'on obtient le théorème que Joukowski a établi en 1905. Pour une aile d'allongement fini, la vitesse moyenne dans chaque section aura comme composante une vitesse induite égale à la moitié de la vitesse induite loin derrière l'aile. De ce fait la portance tournera d'un certain angle et donnera lieu à la résistance induite de Prandtl.

Enfin le professeur Joukowski lui-même a signalé que pour un élément de pale d'hélice les vitesses dans le plan de l'hélice étaient égales aux sommes géométriques moyennes des vitesses correspondant à des points éloignés au-dessus et au-dessous de l'hélice.

La *troisième* équation dit que la circulation autour des pales due à la portance est égale à la circulation dans le fluide derrière l'hélice. Cette relation est très importante, car c'est elle qui donne à la théorie de Joukowski sa très grande simplicité et permet d'introduire dans toutes les équations le coefficient de circulation comme paramètre principal. Joukowski considère (v. p. 172 de la traduction française), que dans la détermination de la vitesse induite de rotation dans le plan du rotor, il

---

(1) Tirée de la préface, que j'ai écrite pour la traduction française de l'ouvrage de Joukowski.

n'y a pas lieu de tenir compte de la circulation due à la composante de la résistance parallèle à la trajectoire, ainsi que le font actuellement certains auteurs.

Enfin la *quatrième* équation représente l'application du théorème de Bernouilli en deux points du cercle de rayon ; l'un est situé bien en avant de l'hélice, l'autre est placé derrière l'hélice, dans la section la plus contractee. Je ne tiens pas compte dans cette relation du terme $\int_1^{\bar{r}} \left(\frac{\Gamma}{4\bar{r}^2}\right)^2 \frac{d\bar{r}}{\bar{r}}$ dû à la rotation de la veine, et dont la valeur est généralement négligeable.

§ 2. — Premier abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices. Application aux hélices propulsives ou sustentatrices.

Les équations fondamentales comprennent neuf variables :

les données de construction : le rayon, l'angle de pas et la fraction de pas ;

les données de fonctionnement · la vitesse d'avancement pour les hélices et les moulinets ou la vitesse axiale dans le plan du rotor pour les ventilateurs et turbines et la vitesse de rotation ;

les inconnues de fonctionnement : l'angle d'attaque, la vitesse de rotation induite et la circulation autour des pales.

Leur solution analytique est très laborieuse, surtout lorsqu'il s'agit de déterminer le fonctionnement d'une turbo-machine existante. car on ne peut pas mettre la valeur de l'angle d'attaque sous forme explicite. Mon *premier abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices* permet de résoudre très rapidement les différents problèmes consistant à déterminer soit les conditions de fonctionnement d'une turbo-machine déjà existante, soit les données de construction d'une turbo-machine répondant aux conditions posées.

L'abaque comprend un transparent et quatre fonds différents. Le transparent (voir fig. 77') porte un point O' et un réseau de droites (i, c_z), sur lequel on trace les courbes expérimentales des portances pour les sections considérées (1). Quand i change de signe on retourne le transparent.

La fond I_a s'applique aux ventilateurs avec rotation et aux turbines sans rotation à la sortie du rotor; le fond II_a — aux ventilateurs sans rotation et aux turbines avec rotation, le fond I_b (voir fig. 77) — aux helices propulsives et sustentatrices; le fond II_b — aux moulinets. Chaque fond porte un réseau (φ -- angle de pas , f — fraction de pas) sur lequel sont tracés : le faisceau $\left(z_1 = \frac{\Omega r}{W_1}\right)$ pour les fonds I_a et II_a, ou le faisceau $\left(z = \frac{\Omega r}{W}\right)$ pour les fonds I_b et II_b; les faisceaux (ΓZ_1^2) et $\left(\frac{\Gamma}{r^2}\right)$ qui sont les mêmes pour les fonds I_a et I_b d'une part et les fonds II_a et II_b d'autre part, et enfin les faisceaux du rendement élémentaire (η) pour une finesse de 0,05.

Le mode d'emploi de l'abaque s'énonce comme suit :

$$O' \rightleftarrows P(\varphi, f), \quad x'_\infty \rightleftarrows Ox, \quad P'(i) \rightleftarrows L\left(z \text{ ou } z_1, \text{ ou } \Gamma Z_1^2, \text{ ou } \frac{\Gamma}{r^2}, \text{ ou } \eta\right)$$

---

(1) L'utilisation des courbes expérimentales des portances offre un grand intérêt, car ces courbes, pour les valeurs élevées de la portance, ont une allure très irrégulière et difficilement représentable par des formules.

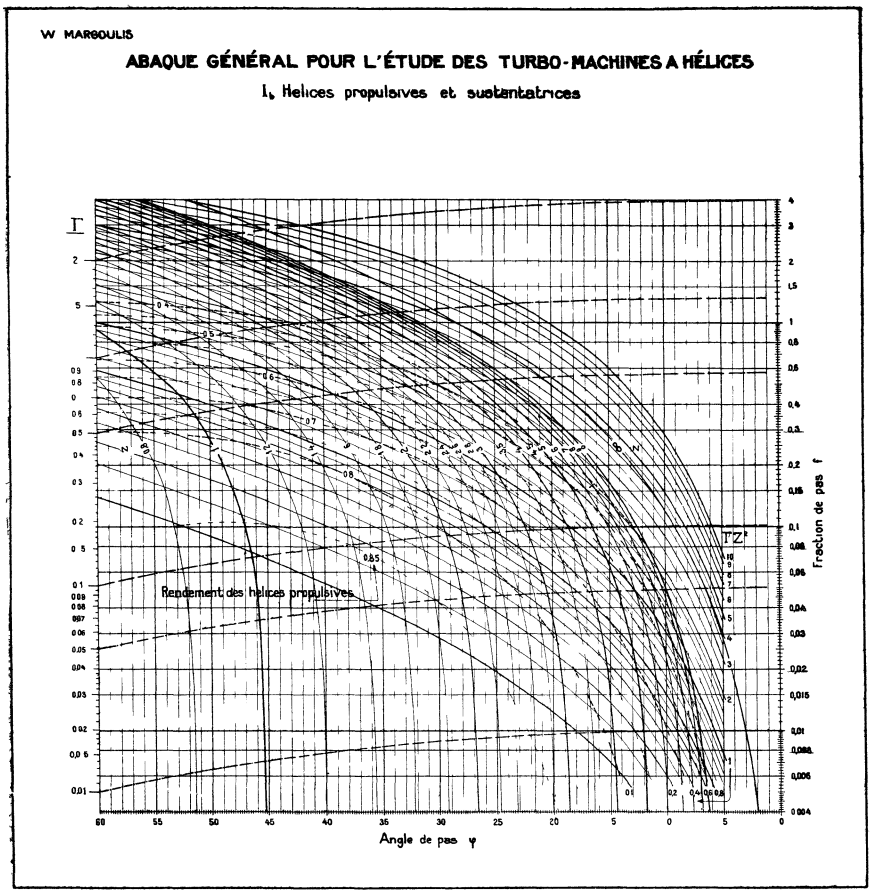


FIG. 77 — *Premier abaque pour l'etude des turbo machines a helices* — Fond.

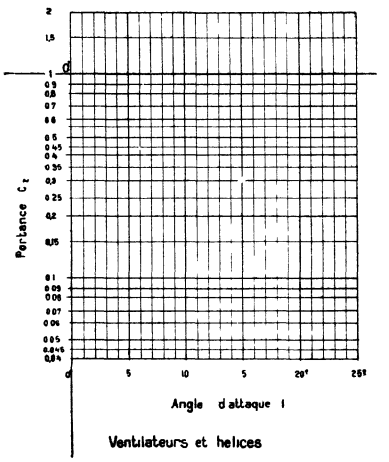


FIG. 77′ — Transparent.

Exemple : *Déterminer l'angle d'attaque au rayon $\bar{r}$ d'une hélice donnée* (on connaît donc φ et f), *fonctionnant au régime* Z (on connaît donc $z = Z\bar{r}$).

On trace sur le transparent la courbe des portances; on fait coïncider le point O′ du verso du transparent avec le point (φ, f) du fond I_b, on oriente le transparent de façon à rendre parallèles les droites (c_z) du transparent aux droites (f) du fond. Au point d'intersection de la courbe des portances du transparent avec la courbe (z) du fond on lit : sur le transparent les valeurs cherchées de i et de c_z, et sur le fond la valeur de $\frac{\Gamma}{\bar{r}^2}$ (d'où l'on tire la valeur cherchée de Γ) et la valeur du rendement élémentaire. On en déduit par les formules bien connues les valeurs de la poussée et de la puissance.

§ 3. — Second abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices.

Dans la théorie tourbillonnaire des turbo-machines, l'interaction des pales du rotor ou des aubes du stator se traduit par la modification des valeurs des vitesses et des angles induites ; pour des angles effectifs égaux l'écoulement autour des pales et des aubes est identique à l'écoulement autour d'une aile isolée.

Quand la fraction de pas est élevée, ce qui se produit surtout pour le stator, on ne peut plus considérer les pales ou les aubes comme des éléments isolés et il y a lieu de les considérer comme faisant partie d'une *persienne* infinie.

L'application de la théorie de la persienne de *Tchapliguine* (1) aux turbo-machines à hélices m'a conduit à tracer un deuxième *Abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices* (2), qui, ainsi que le premier abaque, permet la détermination très rapide des éléments de construction ou de fonctionnement de ces machines.

L'abaque (v. fig. 78 et 78′) représente l'équation fondamentale (1) des *ventilateurs et pompes*.

$$\frac{\bar{r}^2}{\Gamma}\left(1 - \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{z_1}\right) = F(f, \varphi),$$

où, de même que dans les équations de la p. 97, $\Gamma = \frac{aJ}{\pi\Omega R^2}$ est le coefficient de circulation, $z_1 = \bar{r}Z_1 = \frac{\Omega r}{W_1}$, f est la fraction de pas et φ l'angle de pas.

Le *fond* (fig. 78) porte le réseau (f, φ) et l'index I · le *transparent* (fig. 78′) comporte le point O′ et le réseau $\left(\frac{\Gamma}{\bar{r}^2}, z_1\right)$.

Le mode d'emploi est le suivant :

on fait coïncider le point O′ avec le point (f, φ), du fond ; on rend parallèles les droites (z_1) et (φ) et on lit la valeur de $\frac{\Gamma}{\bar{r}^2}$ au droit de l'intersection de la droite (z_1) avec l'index I du fond.

Un faisceau (c_z) — non tracé sur la fig. 78′ — indique la valeur de la portance.

On peut ainsi soit déterminer la circulation (et par conséquent les valeurs de la poussée et du couple) d'un ventilateur existant, soit déterminer la variation de la fraction et de l'angle de pas le long du rayon en se donnant *a priori* la circulation.

En comparant les résultats obtenus avec ceux donnés dans les mêmes conditions

(1) S. Tchapliguine : *La théorie de l'aile en forme de persienne. (Recueil des Mathématiques* t. XXIX, Moscou 1914) et

N. Joukowski : *Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive*, pp. 94 et 122 (Paris, 1929, Gauthier-Villars).

(2) Cet abaque est inédit, je me propose de le publier avec plus de détails par ailleurs.

par notre premier abaque, on peut confronter les deux méthodes, ce qui présente un grand intérêt, car d'après l'exposé de Joukowski, on ne voit pas du tout si elles conduisent à des résultats identiques ou différents.

VOICI UN EXEMPLE PARTICULIÈREMENT FRAPPANT D'UNE THÉORIE D'UN GRAND INTÉRÊT PRATIQUE, MAIS RESTÉE COMPLÈTEMENT STÉRILE PAR SUITE DES DIFFICULTÉS DE SON APPLICATION A DES CAS CONCRETS ET DE L'IMPOSSIBILITÉ QUI EN RÉSULTAIT D'EN TIRER DES CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Notre abaque permet également de traiter le cas de la turbine-hélice et celui de la persienne immobile Cette dernière question qui a été étudiée d'abord par Kutta,

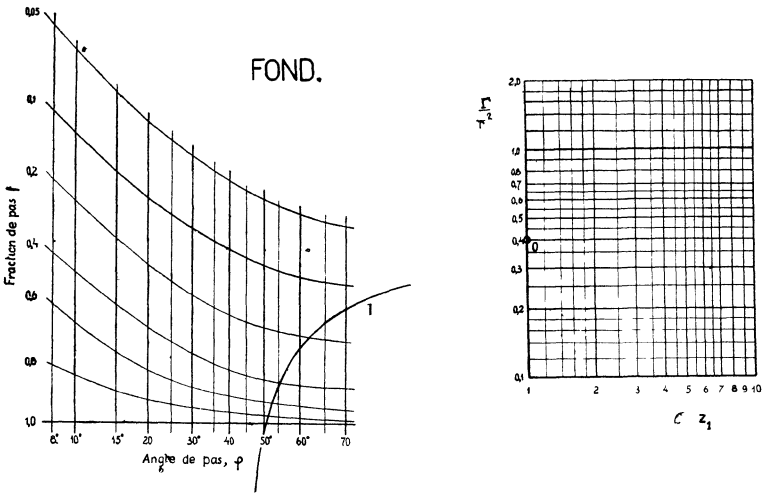


FIG. 78 et 78'. — *Deuxième abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices.*

puis par Tchapliguine et ensuite par Konig est restée également assez confuse par suite de la complication des calculs.

§ 4. — Détermination des éléments de construction des hélices propulsives et des moulinets aériens d'après la théorie de Drzewiecki.

(Les abaques décrits ci-dessous ont été établis en 1914 et 1915 et publiés dans la *Review of Aeronautical Works*, N° 3/4 1920)

D'après la théorie de Drzewiecki, on a pour les hélices et les moulinets à *largeur et angle d'attaque constants* les équations suivantes :

Hélices .

$$\frac{P_m}{V^3 D^2}, \quad \frac{P_m n^2}{V^5} = \frac{a\, l\, K_y}{Z^{4,-1}} \left[f(Z) + \frac{K_x}{K_y} \psi(Z) \right]$$

$$\frac{P}{V^3 D^2}, \quad \frac{P_m n^2}{V^4} = \frac{a\, l\, K_y}{Z^{4,-1}} \left[f(Z) - \frac{K_x}{K_y} \varphi(Z) \right]$$

$$\rho = \Phi(Z, K_x/K_y)$$

Moulinets :

$$\frac{P_m n^2}{V^5} = \frac{a\, l\, K_y}{Z^{-1}} \left[f(Z) - \frac{K_x}{K_y} \varphi_1(Z) \right]$$

$$\rho = \Phi_1(Z, K_x/K_y),$$

où P_m est la puissance motrice absorbée par l'hélice ou fournie par le moulinet, P — la puissance utile, n — le nombre de tours/sec, V — la vitesse en m/sec, a — un coefficient numérique proportionnel au nombre de pales, l — la largeur relative, K_x et K_y — les éléments de la résultante pour l'angle d'attaque de l'hélice ou du moulinet, $Z = \pi n D/V = h_0$, h_0 étant le pas relatif primitif de l'hélice ou du moulinet, ρ — le rendement.

Quatre problèmes différents se posent généralement pour les hélices, suivant que l'on se donne l'un des quatre coefficients caractéristiques

$$\frac{P_m n^2}{V^5}, \quad \frac{P n^2}{V^5}, \quad \frac{P_m}{V^3 D^2}, \quad \frac{P}{V^2 D^2},$$

en même temps que la ou les polaires des profils d'hélices, entre lesquelles doit se faire le choix. On demande de déterminer le profil, l'angle d'attaque et le pas primitif donnant le rendement maximum.

Les 5 abaques que nous avons tracés, comprennent chacun un *fond* (fig. 79 et 80) portant deux faisceaux (Z) et (ρ) et une échelle du coefficient caractéristique.

Le *transparent* (fig. 79′), *qui est le même pour les 5 abaques*, porte l'échelle (l) et le réseau (K_x, K_x/K_y), sur lequel on trace les polaires.

Nous ne donnons ici que les abaques pour hélices et moulinets, relatifs au coefficient le plus employé $P_m n^2/V^5$.

Mode d'emploi. — On fait coïncider les échelles (l) et celle du coefficient caractéristique, ainsi que les points de ces échelles, répondant aux valeurs données de ces variables ; on lit au droit de chaque point (K_y, K_x/K_x) les valeurs de Z et de ρ. Le point de la polaire, où celle-ci est tangente à la courbe (ρ), donne la solution de l'hélice de rendement maximum.

L'abaque montre, contrairement à une opinion qui était très répandue, que le maximum de rendement correspond à un angle supérieur à celui qui donne la valeur minimum de K_x/K_y.

Dans le travail cité plus haut nous avons donné deux autres abaques permettant le tracé direct sur le fond des diagrammes logarithmiques d'hélices de Ruth des courbes $P_m/n^3 D^5 = f(V/nD)$, cotées en valeurs du rendement pour des hélices et des moulinets à largeur et angle d'attaque constants, les variables étant, comme précédemment, la largeur relative, K_x et K_y.

La figure 81 représente un *abaque pour la détermination de la variation de l'angle d'attaque* (et par conséquent du pas) *d'un moulinet optimum*, fournissant le maximum de puissance pour une vitesse et un diamètre donnés. La trace du transparent (fig. 79′) sur le fond a été figurée en traits pointillés sur la fig. 81.

Cet abaque nous a permis de constater que le maximum de puissance n'est pas obtenu par un angle d'attaque constant et correspondant au maximum de finesse, mais par des angles variables le long du rayon et supérieurs à l'angle optimum.

Remarque. — La théorie de Drzewiecki, qui fut pendant trente ans la théorie la plus employée pour le calcul des hélices, est actuellement abandonnée, au profit de la théorie tourbillonnaire de Joukowski.

Cependant si l'on adopte pour les pales un *allongement fictif* convenable (voir les travaux de *Pistolesi*), on peut obtenir des résultats pratiquement suffisants. Nous estimons que les abaques décrits ci-dessus peuvent encore être utiles à l'heure actuelle, d'abord parce qu'ils permettent de tenir compte de cet allongement (il suffit de tracer sur le transparent les polaires correspondantes) et ensuite à cause de la rapidité et de la simplicité de leur emploi.

Ainsi que nous l'avons montré par ailleurs (1), c'est surtout dans une question de principe et notamment dans celle de l'*hélice optimum* que la théorie de Drzewiecki se montre défaillante

En effet l'abaque (fig 79) montre que, quelle que soit la valeur de $P_m\, n^2/V^5$ (coefficient caractérissant les données du problème de choix d'une hélice pour avion), le rendement est maximum avec une hélice de pas sensiblement constant, dont la

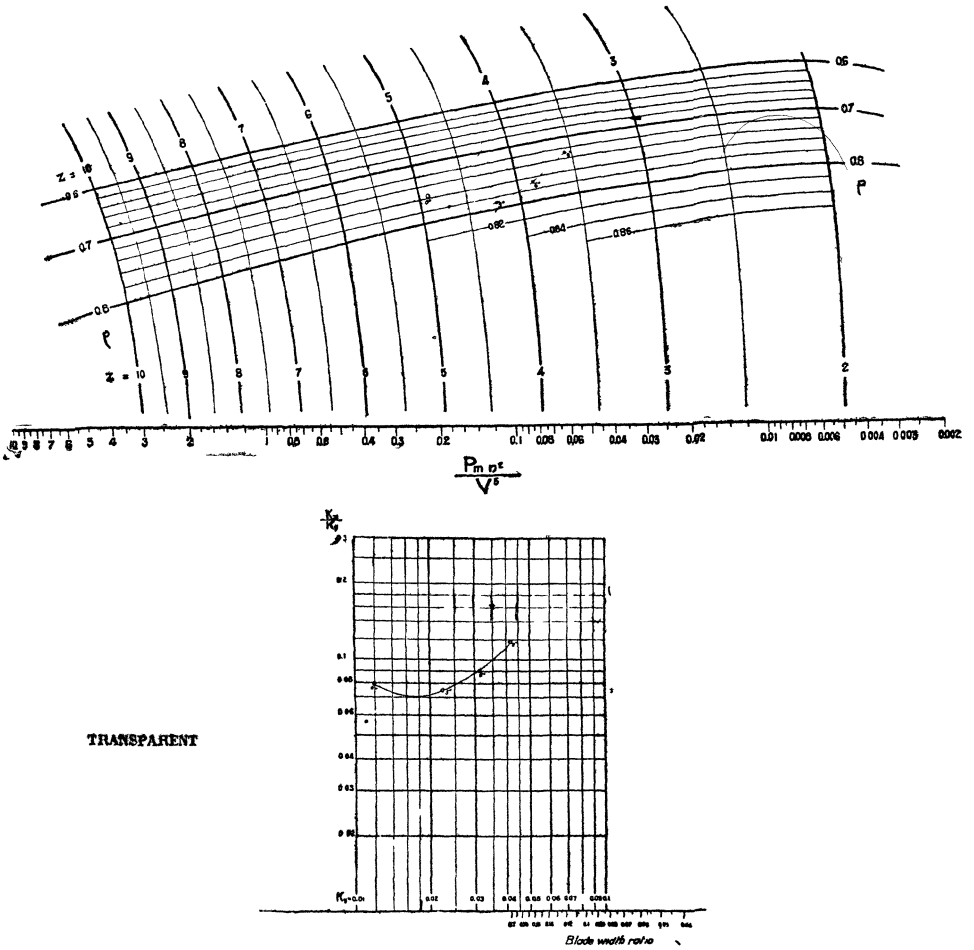


Fig. 79 et 79'. — *Détermination des éléments de construction des hélices propulsives aériennes d'après le coefficient* $\frac{P_m n^2}{V^5}$.

valeur est d'environ 1,6. La largeur de la pale doit être d'autant plus grande que la valeur de $P_m\, n^2/V^5$ est plus élevée.

Cette conclusion est en désaccord formel avec l'expérience. Cela tient au fait

(1) Voir mon article *Aerial propellers. Notes on Froude's Theory* (Review of Aeronautical Works published by the Paris Office of the U S National Advisory Committee for Aeronautics, N° 4/6 1920),

et mon travail *Applications de la théorie tourbillonnaire des hélices propulsives de Joukowski* (*La Technique Aéronautique*, n° du 15 novembre 1928).

que la théorie de Drzewiecki admet que, quelle que soit la largeur de la pale, le rendement ne dépend que du nombre de modules et de la finesse de la section.

Par contre la théorie de Joukowski montre, que quand la valeur du coefficient

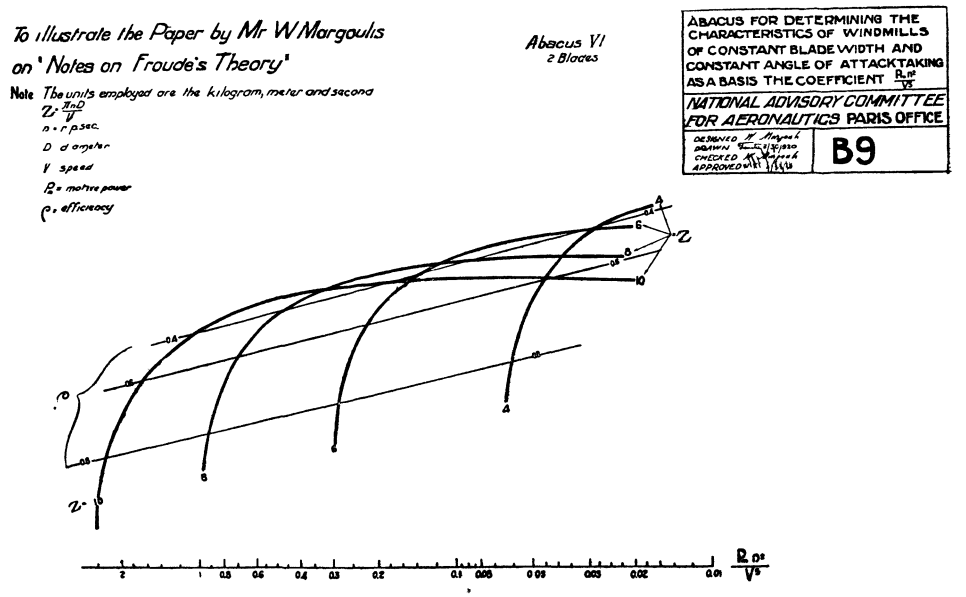


FIG. 80. — *Détermination des éléments de construction des moulinets aériens d'après le coefficient* $\frac{P_m n^2}{V^5}$.

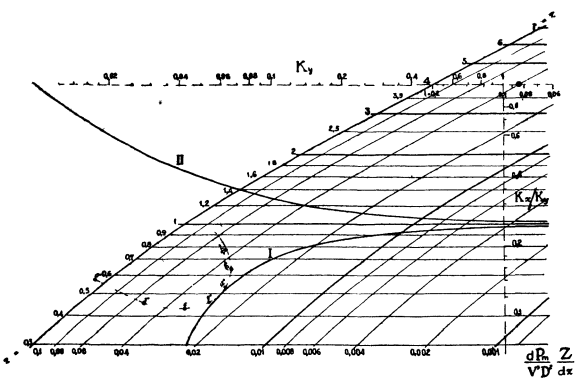


FIG. 81. — *Angles d'attaque d'un moulinet de puissance maximum.*

Mode d'emploi. — On fait glisser l'échelle (K_y) du transparent le long de la droite (z) du fond jusqu'à ce que la polaire du transparent tangente l'index I du fond. Au point de tangence on lit l'angle d'attaque et au droit du point (I) de l'échelle I (graduation inférieure de l'échelle (K_y) on lit la valeur de $\frac{dP_m}{V^3 D^2} \cdot \frac{Z}{dz}$, d'où l'on tire la puissance dP_m fournie par l'élément de la pale.

caractéristique $P_m n^2/V^5$ diminue, le pas et le rendement augmentent, la largeur diminuant assez lentement pour les hélices d'avion et plus rapidement pour les hélices de dirigeable.

§ 5. — Représentations graphiques des caractéristiques et méthodes de choix d'hélices propulsives et de moulinets Étude du fonctionnement des groupes motopropulseurs et des groupes moulinets-génératrices.

(Ces travaux ont été publiés dans les *Etudes sur l'hélice aérienne faites au laboratoire d'Auteuil*, dans *Les Hélicoptères*, etc., etc.)

Les différents abaques que j'ai établis représentent les équations :

$$P_m/n^3D^5 = f(V/nD) \quad \text{et} \quad \rho = f(V/nD),$$

complétées pour l'étude du fonctionnement des groupes motopropulseurs et autres, par la relation $P_m = f(n)$.

Ils constituent, soit la transformation en méthode *nomographique*, soit le développement d'une méthode de *calcul par le trait de* L. Rith (Nouvelles recherches sur la Résistance de l'Air et l'Aviation, effectuées au Laboratoire d'Auteuil, Paris, 1914).

Les fig. 82 et 83, représentent le diagramme logarithmique des hélices de Rith et un diagramme analogue que j'ai établi pour les moulinets.

La fig. 82′ constitue le transparent, formant avec la fig. 82 un abaque pour le choix des hélices. La transformation, que j'ai réalisée de la méthode de calcul par le trait en méthode *nomographique*, supprime tout tracé et cause d'erreur et réduit littéralement à quelques secondes, la durée de la solution d'un problème.

Pour étudier le fonctionnement des groupes moto-propulseurs ou des groupes moulinet-génératrice, j'ai établi les transparents, fig. 82″, 82‴ et 83′.

Les légendes inscrites sur ces figures donnent toutes les explications nécessaires à leur emploi.

Ces transparents permettent le choix rationnel d'une hélice pour un avion, tenant compte non seulement de la vitesse maximum en palier, mais également de la vitesse maximum de montée. J'ai décrit dans les *Etudes sur l'hélice aérienne* (p. 108) la manière de procéder à cet effet.

J'ai établi également un transparent analogue (voir *Les Hélicoptères*, p. 47) pour l'étude du fonctionnement d'un groupe motopropulseur avec moteur coupé, s'appliquant au cas d'un *avion descendant en vol piqué* ou d'un *hélicoptère en descente verticale.*

Enfin, j'ai developpé ces méthodes en ajoutant à la courbe β

$$[P_m/n^3D^5 = f(V/nD)]$$

de l'hélice, une courbe γ obtenue en portant à partir de la courbe β, parallèlement aux droites (V), des segments mesurant le rendement.

On peut ainsi lire directement, non seulement la vitesse, le nombre de tours et la puissance motrice, mais également la puissance utile et la poussée. On trouvera dans *Les Hélicoptères* des applications :

1° A l'étude du fonctionnement d'un groupe motosustentateur sur un *hélicoptère descendant avec moteur allumé* (p. 45) ,

2° A l'étude du fonctionnement d'un groupe motosustentateur sur un *avion-hélicoptère en vol oblique* (p. 76).

FAMILLE D HELICES A PAS CONSTANT

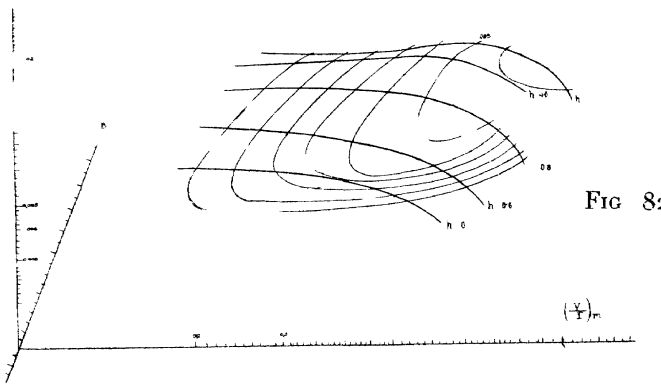


FIG 82

TRANSPARENT

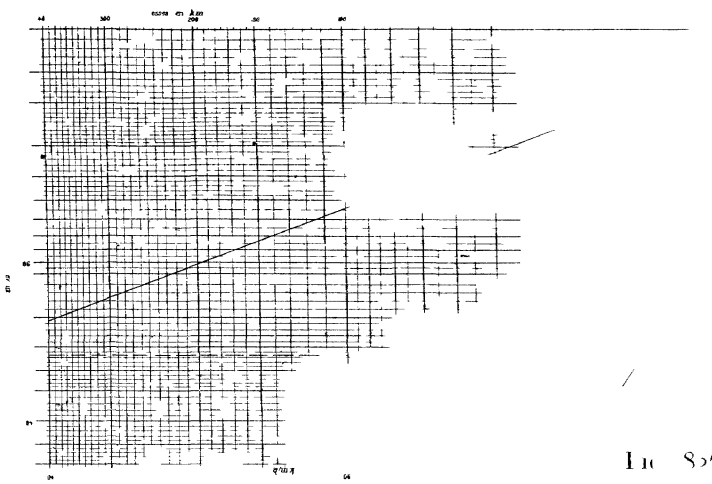


FIG 82'

TRANSPARENT

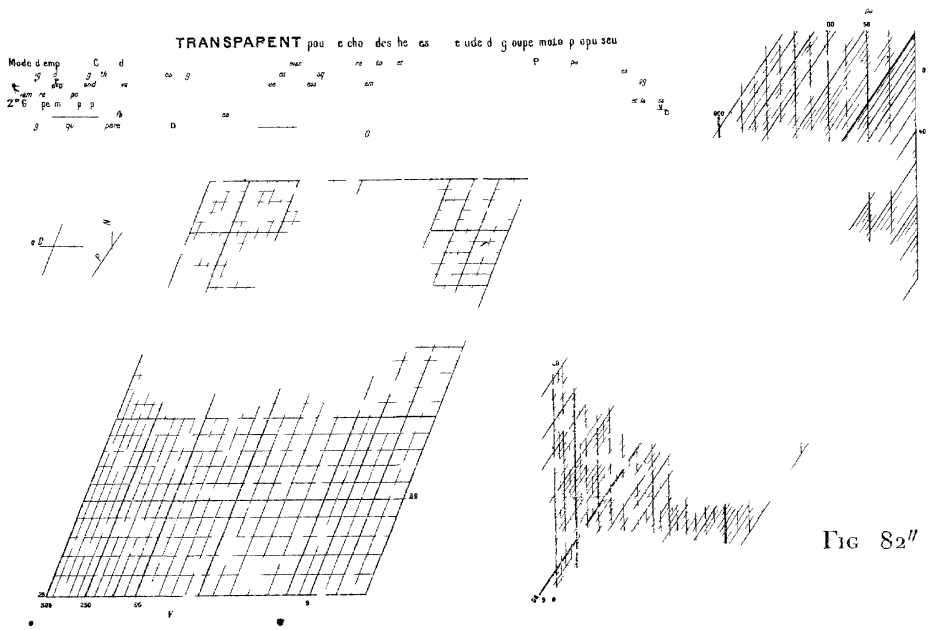


FIG 82''

TRANSPARENT

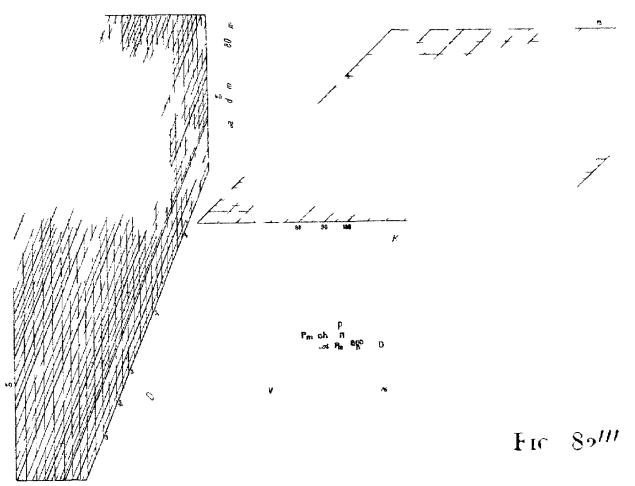


FIG 82'''

FAMILLE DE MOULINETS
A PAS CONSTANT

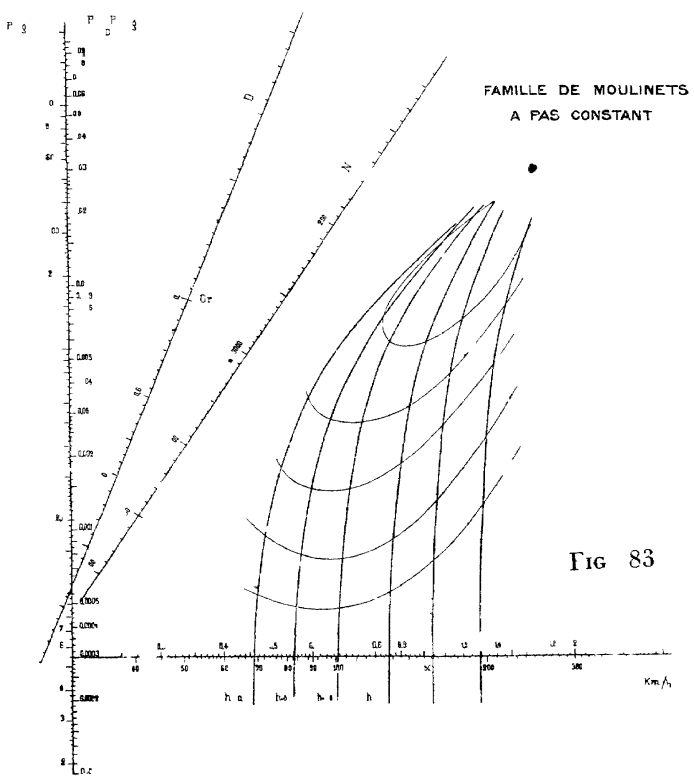


FIG 83

TRANSPARENT

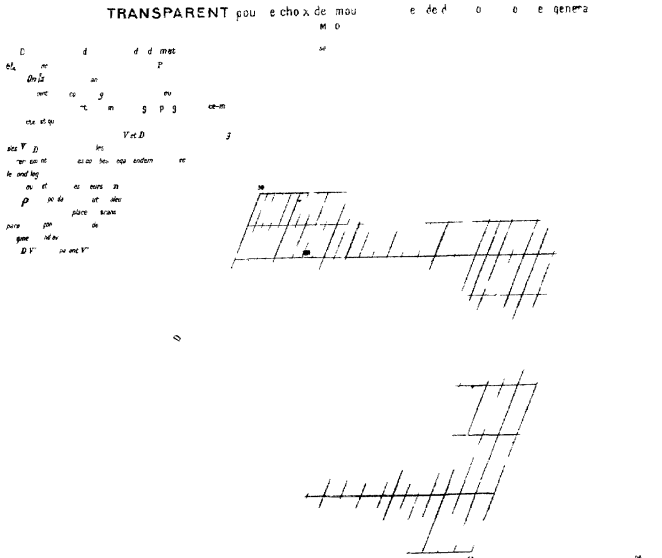


FIG 83'

§ 6. — Angles d'attaque des hélices propulsives.

(Abaque établi en 1914, publié dans les *Etudes sur l'hélice aérienne faites au Laboratoire d'Auteuil*, et dans la *Review of Aéronautical Works*, n° 3/4, 1920.)

L'abaque (fig. 84 et 84′) représente l'équation :

$$\frac{h}{V/nD} = \frac{1 + \pi \operatorname{tg} i \left(\frac{r/R}{V/nD}\right)}{1 - \frac{\operatorname{tg} i}{\pi}\left(\frac{V/nD}{r/R}\right)},$$

où h est le pas relatif au rayon relatif r/R, V/nD est le rapport de la vitesse d'avan-

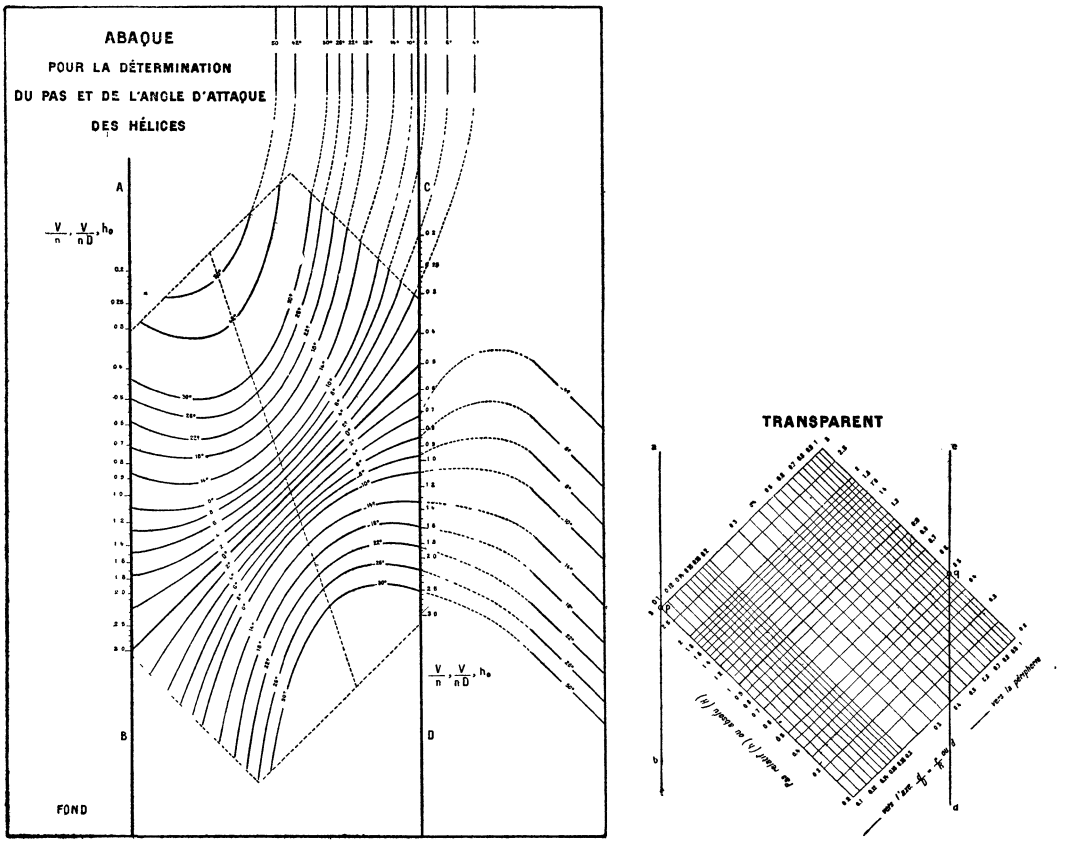


Fig. 84 et 84′. — *Angles d'attaque des hélices propulsives.*

cement de l'hélice au produit du nombre de t/sec par le diamètre, i est l'angle d'attaque au rayon r.

Les angles d'attaque indiqués par l'abaque sont ceux envisagés par la théorie de Drzewiecki ; les angles d'attaque effectifs, résultant de l'application de la théorie tourbillonnaire, sont donnés par l'abaque tracé sur les fig. 77 et 77′.

Mode d'emploi. — L'abaque se compose d'un fond et d'un transparent.

Le fond comprend un faisceau de courbes cotées en valeurs de i (i = angle d'attaque)

et deux échelles A B et C D cotées en valeurs de $\frac{V}{n}$ (avance par tour), ou de $\frac{V}{nD}$ ou du pas primitif h_0.

Le transparent comprend le réseau $\frac{d}{D}$ ou $\frac{r}{R}$ $\left(\frac{d}{D} = \frac{r}{R} = \text{rayon relatif d'un élément de pale}\right)$ et H ou h (H = pas de l'élément de pale, h = pas relatif $\frac{H}{D}$ du même élément).

1° Pour la détermination de l'angle d'attaque pour un $\frac{V}{n}$ ou $\frac{V}{nD}$ donné, l'emploi de l'abaque est le suivant : on trace au crayon sur le transparent la courbe donnant la relation $h = f\left(\frac{r}{R}\right)$ pour l'hélice choisie $\left(h \text{ et } \frac{r}{R} \text{ sont relevés sur le dessin de l'hélice}\right)$. On déplace le transparent sur le fond, de façon que les droites ab et cd du transparent se confondent avec les échelles AB et CD, les points p et q coïncidant avec les points cotés $\frac{V}{n}$ ou $\frac{V}{nD}$. On lit sur le faisceau (i) du fond, au droit de la courbe $h = f\left(\frac{r}{R}\right)$ du transparent, la valeur de i pour chaque valeur de $\frac{r}{R}$.

2° Pour la détermination du pas absolu ou relatif le long du rayon d'une hélice, réalisant pour une valeur $\frac{V}{nD}$ déterminée, un angle d'attaque donne i, on fait coïncider les points p et q du transparent avec la valeur donnée de $\frac{V}{nD}$ et on calque la courbe (i) du fond correspondant à l'angle i donné. Cette courbe ainsi calquée sur le transparent fait connaître immédiatement la relation entre $\frac{r}{R}$ et le pas h.

§ 7. — Les hélices sustentatrices.

1°. — Représentation graphique des caractéristiques des hélices travaillant au point fixe.

J'ai utilisé le fond de la fig. 82 (Review of Aéronautical Works, 1920, n°s 4-6) pour représenter les caractéristiques d'une *hélice au point fixe*. A cet effet, (voir fig. 85), je porte en abcisses les valeurs de 0,2 β_0/α_0 et en ordonnées les valeurs β_0, β_0 et α_0 étant les valeurs de P_m/n^3D^5 et de F/n^2D^4 au point fixe. Chaque hélice est donc représentée par un point. J'ai indiqué dans mon ouvrage *Les Hélicoptères*, (page 9), les méthodes de calcul par le trait ou nomographiques (utilisant le transparent, fig 82') permettant la solution des différents problèmes relatifs aux hélices travaillant au point fixe. La fig 85, tirée de mon ouvrage *Les Hélicoptères*, représente les résultats des essais de Durand-Lesley. La cote de l'échelle K_F, au point d'intersection de cette échelle avec la parallèle à l'échelle (n), tracée par le point représentant l'hélice, donne la valeur de $K_F = \alpha_0/\beta_0^{2/3}$, mesurant la qualité sustentatrice de l'hélice.

Les courbes en traits pointillés représentent les résultats d'essais de Bendemann-Schmidt sur une famille d'hélices à pales orientables à 2 et 4 branches.

La fig. 86, tirée de mon deuxième Mémoire (encore inédit) sur les hélicoptères, représente les courbes des familles d'hélices sustentatrices optima, que j'ai déter-

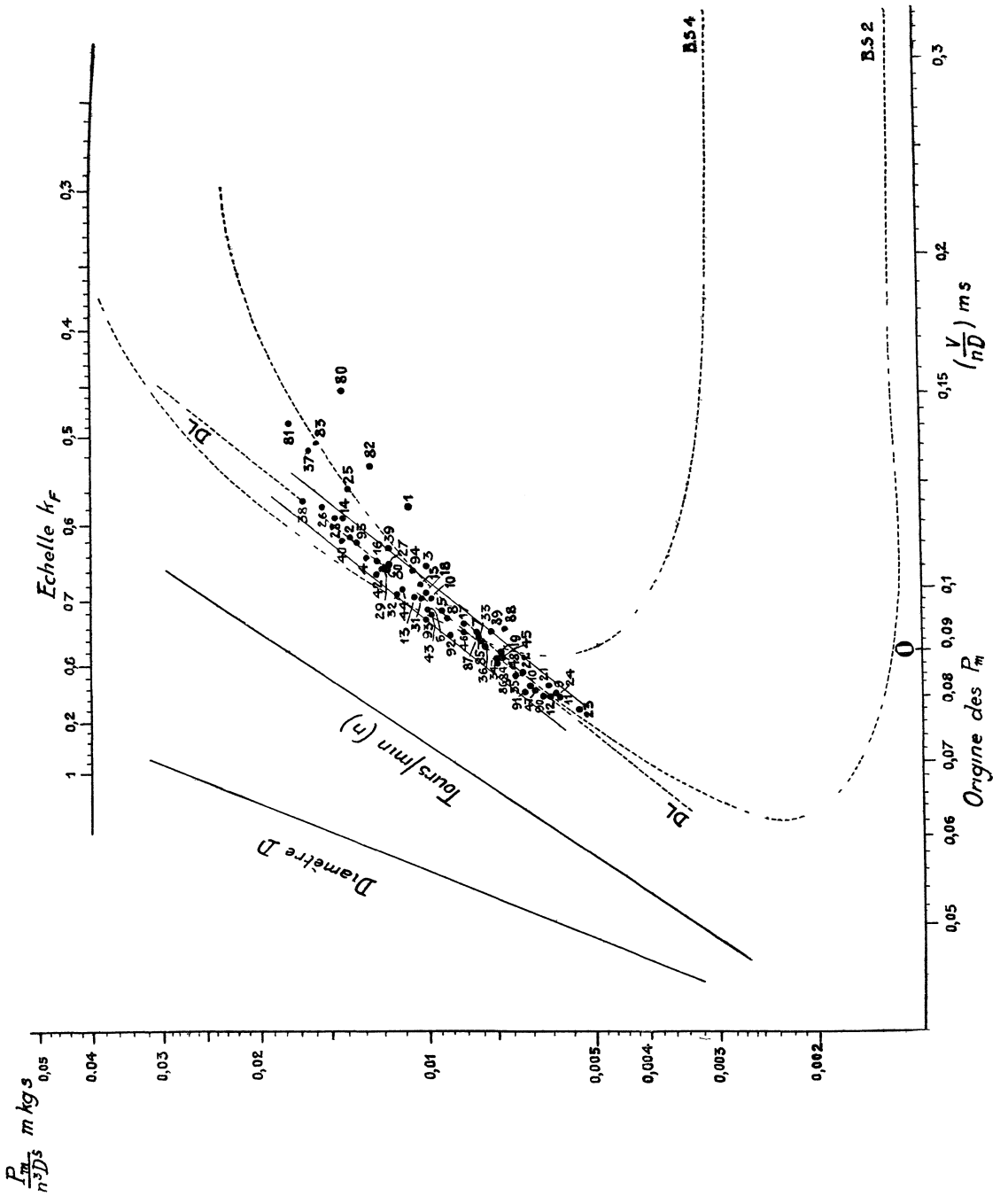


FIG. 85. — *Représentation des caracteristiques des hélices au point fixe. Essais Durand-Lesley.*

minées (d'après la théorie tourbillonnaire de l'hélice du professeur Joukowski pour différentes valeurs de μ, qui est la finesse du profil de la pale Les différents points portés sur la planche représentent les résultats de nouveaux essais que j'ai

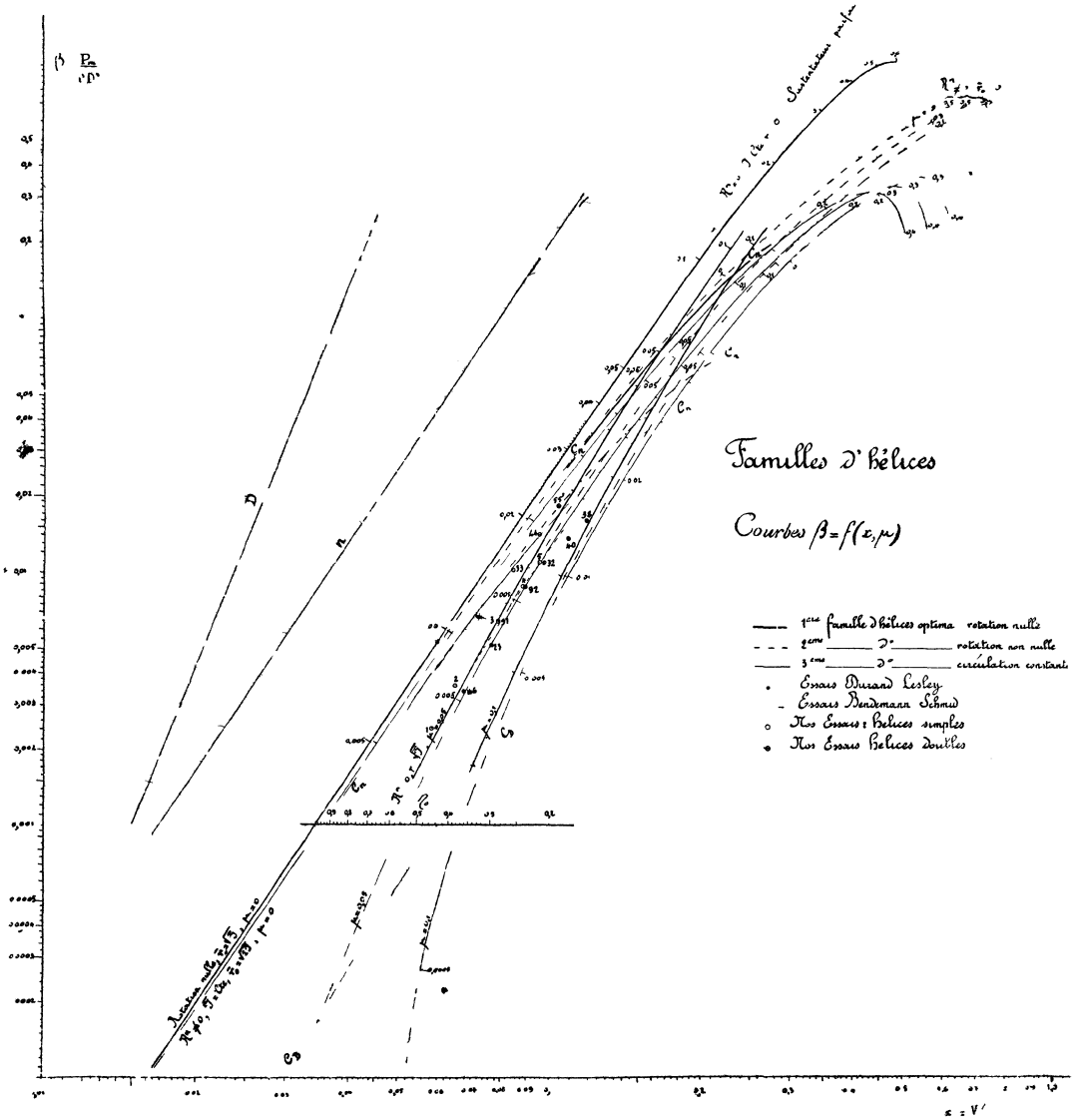


FIG. 86. — *Représentation des caractéristiques des hélices au point fixe.* Familles d'hélices optima et essais Margoulis.

effectués en 1924 au Laboratoire Eiffel sur des hélices isolées ou sur deux hélices accolées tournant en sens inverse. Ces essais, les premiers qui aient été effectués sur des hélices doubles, montrent, en accord avec la théorie, qu'on peut réaliser des groupes sustentateurs excessivement puissants, c'est-à-dire à valeurs élevées de P_m/n^3D^5, tout en obtenant de très bonnes valeurs de l'efficacité $\eta_0 = 2{,}26\, \alpha_0^{3/2}/\beta_0$.

2°. — Polaires des sustentateurs.

Je me propose d'exposer ci-dessous une méthode graphique qui permet la comparaison et l'appréciation des différents organes sustentateurs, ainsi que des machines volantes utilisant ces organes et, notamment, des voilures fixes, des hélices des ailes battantes, des cylindres tournants, des roues à aubes... employés sur les avions, les hélicoptères, les ornithoptères, etc., etc.

J'ai exposé pour la première fois cette méthode en 1923 dans mon ouvrage *Les Hélicoptères*, où elle m'a servi à étudier à tous les régimes les qualités aérodynamiques des hélices sustentatrices et à les comparer avec celles des voilures fixes.

Elle consiste à tracer des « polaires » pour les sustentateurs isolés et des « polaires réduites » pour les machines volantes complètes, en portant en abscisses les coefficients de puissance et en ordonnées les coefficients de poussée pour différentes valeurs de l'angle d'attaque (i) d'un plan de référence avec la trajectoire et pour différentes valeurs du coefficient de vitesse (γ).

Pour les organes sustentateurs, les expressions de ces coefficients sont :

$$\textit{coefficient de poussée : } \bar{c}_z = \frac{F_z}{0{,}5\,\rho\pi R^2 V^2}$$

$$\textit{coefficient de puissance utile : } \bar{c}_x = \frac{0{,}75\,\Pi_m + F_x V}{0{,}5\,\rho\pi R^2 V^3},$$

où F_z et F_x sont les composantes normale et parallèle à la trajectoire des efforts de l'air sur l'organe sustentateur, F_x étant négatif quand la force est dirigée dans le sens du mouvement ; R est égal à la moitié de l'envergure, 0 75 est un coefficient représentant la valeur moyenne du rendement des hélices propulsives. Ce coefficient est introduit afin de pouvoir comparer *équitablement* les organes sustentateurs (voilures fixes ou autogyres), qui ne demandent, pour fonctionner, aucune puissance motrice, avec les organes (hélices, ailes battantes...), dont le fonctionnement nécessite l'intervention d'une certaine puissance motrice Π_m.

Les premiers doivent être remorqués par des organes propulseurs, dont le rendement est toujours inférieur à l'unité ; la valeur de Π_m étant nulle, on a pour ces sustentateurs :

$$\bar{c}_z = \frac{F_z}{0{,}5\,\rho\pi R^2 V^2}, \quad \bar{c}_x = \frac{F_x}{0{,}5\,\rho\pi R^2 V^2},$$

expressions qui diffèrent des coefficients habituels de portance et de résistance seulement en ce que les forces sont rapportées au carré de l'envergure et non pas à la surface des sustentateurs.

Ainsi que je l'ai montré, page 64 de mon ouvrage *Les Hélicoptères*, l'emploi de ces polaires présente le très grand avantage d'*effectuer l'étude des performances de n'importe quel appareil au moyen des méthodes déjà établies pour les avions* et ensuite de tracer pour certains sustentateurs, et notamment pour les voilures fixes et pour les hélices, des paraboles limites qui fixent une fois pour toutes les possibilités offertes par ces sustentateurs. Les paraboles limites sont des polaires des sustentateurs parfaits, qui indiquent pour chaque portance le minimum de puissance correspondant à la perte d'énergie nécessaire pour produire cette portance.

Les équations de ces polaires (tirées de la théorie de la résistance induite pour les ailes et de la théorie de Froude pour les hélices) sont les suivantes :

$$\textit{ailes...}\ \bar{c}_x = 0{,}25\,\bar{c}_z^{\,2}\ ;\ \textit{hélices sustentatrices...}\ \bar{c}_x = 0{,}75\,(0{,}5\,\bar{c}_z^{\,3/2}).$$

J'ai tracé sur la fig. 97 (voir p. 129) qui représente le fond de mon *abaque pour le*

choix de la voilure d'un avion ou d'un hélicoptère les polaires — i, cotées en valeurs de de $V/nD = \pi\gamma$, d'une hélice sustentatrice fonctionnant au régime II, qui est celui du *vol propulsif.*

Les droites P. L. A. et P. L. H. représentent les polaires de deux sustentateurs parfaits : aile et hélice. La courbe « Polaire en K'_x, K_y » est la polaire d'une bonne aile d'allongement 5.

3°. — Angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère en vol freiné ou autorotatif. (Abaque établi en 1924, inédit).

Supposons l'axe de l'hélice immobile et le vent soufflant sur l'hélice avec la vitesse (V) ; soient :

Δ — l'angle que le vent fait avec le plan de rotation de l'hélice ; α — l'angle du plan de rotation avec la vitesse relative, par rapport à l'air, d'un élément de la pale ; φ — l'angle de la corde d'un élément de la pale avec le plan de rotation ; $i = \Delta + \varphi$ — l'angle d'attaque de l'élément de la pale ; δ — l'angle de la pale avec le plan passant par l'axe de l'hélice et perpendiculaire à la direction du vent, cet angle est mesuré dans le sens indiqué sur le croquis du fond.

Appelons : $\bar{r} = r/R$ le rayon relatif de l'élément considéré et $Z = \frac{\omega R}{V}$, le rapport de la vitesse périphérique de l'hélice à la vitesse du vent. L'équation qui relie ces grandeurs est :

$$\sin \Delta = \operatorname{tg} \alpha \left(\bar{r}Z + \cos\Delta \cos\delta\right).$$

Elle est représentée par un premier abaque à *transparent orienté* constitué par un *fond* (fig. 87), portant un faisceau (δ), ainsi qu'une échelle graduée (Δ) et un *transparent* (fig. 87') sur lequel sont tracés le réseau $(\bar{r}, \alpha)$ et l'échelle (Z).

Mode d'emploi. — On fait coïncider les points (Z) et (Δ) du transparent et du fond, en orientant le transparent de façon à rendre parallèles les droites du faisceau (α) à la droite Ox du fond. On lit sur faisceau (α) du transparent les valeurs de α en fonction des valeurs $\bar{r}$ et δ.

Un second abaque à *transparent tournant*, a été tracé sur les fig. 88 et 88'. Il représente la même équation, mais le produit $\bar{r}Z$ a été remplacé par la variable unique z. Son *mode d'emploi* est le suivant :

Les points O' et O coïncidant, on fait tourner le transparent de façon à faire passer la droite Δ'_Δ du transparent par le point Δ de l'échelle circulaire du fond. On lit la valeur de α au droit de l'intersection de la droite (δ) du transparent avec la droite (z) du fond. On trouvera à la p. 20 une remarque sur les avantages que présente le second abaque au point de vue de la facilité du tracé et de la précision des lectures.

Une question qui se pose souvent en pratique, et pour la solution de laquelle l'abaque a été établi, est celle de savoir à partir de quelle valeur de l'angle Δ, il y a passage du vol freiné au vol autorotatif. Il est facile de voir que, pour que l'effort de l'air sur un élément de pale donne une composante motrice dans le plan de rotation de l'hélice, il faut que la *finesse* de l'élément soit inférieure à $\operatorname{tg} \sigma$.

L'échelle (α) du transparent étant graduée en valeurs de $f = \operatorname{tg} \alpha$, on peut voir immédiatement, pour des valeurs données de Z, δ et de Δ, quelles sont les valeurs minimum de f pour que tous les éléments de la pale fournissent un couple moteur.

Pour les petites valeurs de Δ, et quand δ est peu différent de 0°, les éléments périphériques de la pale ne donnent pas généralement une composante motrice. Pour décider s'il y a alors autorotation, il faudrait effectuer une intégration des

couples le long du rayon. Pour obtenir un résultat tout à fait exact, il faudrait encore tenir compte des vitesses induites par le fonctionnement de l'hélice elle-même Ces vitesses qu'on pourrait déterminer par le théorème de Froude, sont

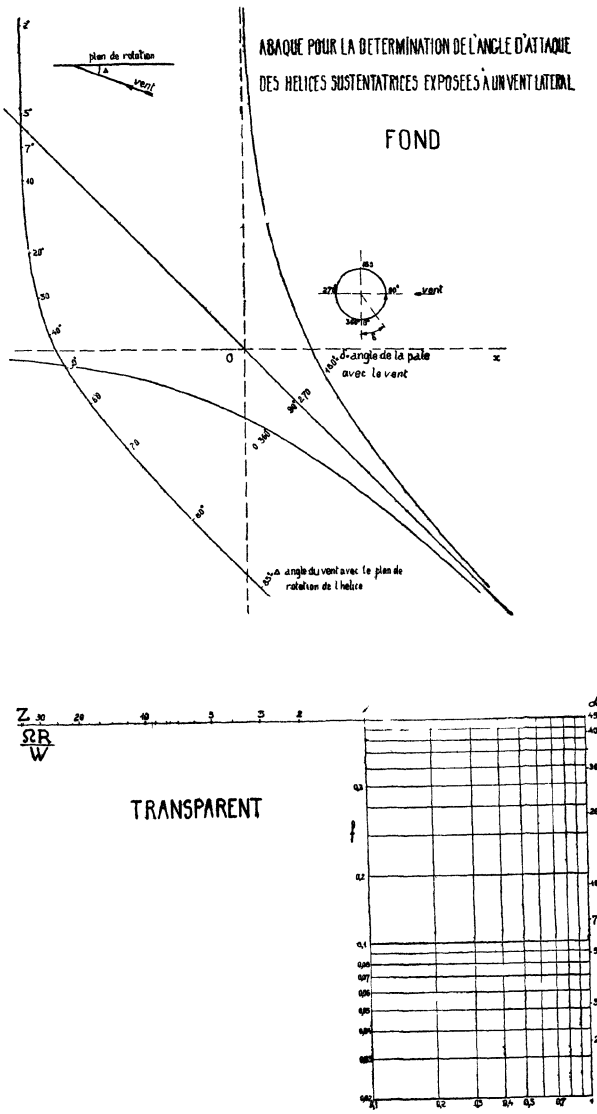


Fig. 87 et 87'. — *Angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère* Premier abaque.

dirigées en sens inverse de la composante perpendiculaire à V de la poussée de l'hélice ; elles diminuent l'angle d'attaque géométrique (i) des éléments de la pale.

Il ne faut donc considérer l'abaque proposé que comme un moyen approché pour se rendre compte du fonctonnement des éléments des pales

4°. — Détermination des éléments de fonctionnement et de construction des hélices travaillant au point fixe.

Le fond I_b (fig. 77) de mon premier abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices permet de résoudre tous les problèmes relatifs aux hélices travaillant au point fixe. A cet effet, il suffit de considérer chaque fois l'intersection de la courbe $c_z = f(i)$ du transparent (fig. 77') avec la courbe $z = \infty$ du fond.

J'avais établi antérieurement un abaque spécial (1) pour la *détermination de la poussée et de la puissance d'hélices travaillant au point fixe.*

Je vais indiquer le mode d'emploi de l'abaque lorsqu'il s'agit de déterminer les

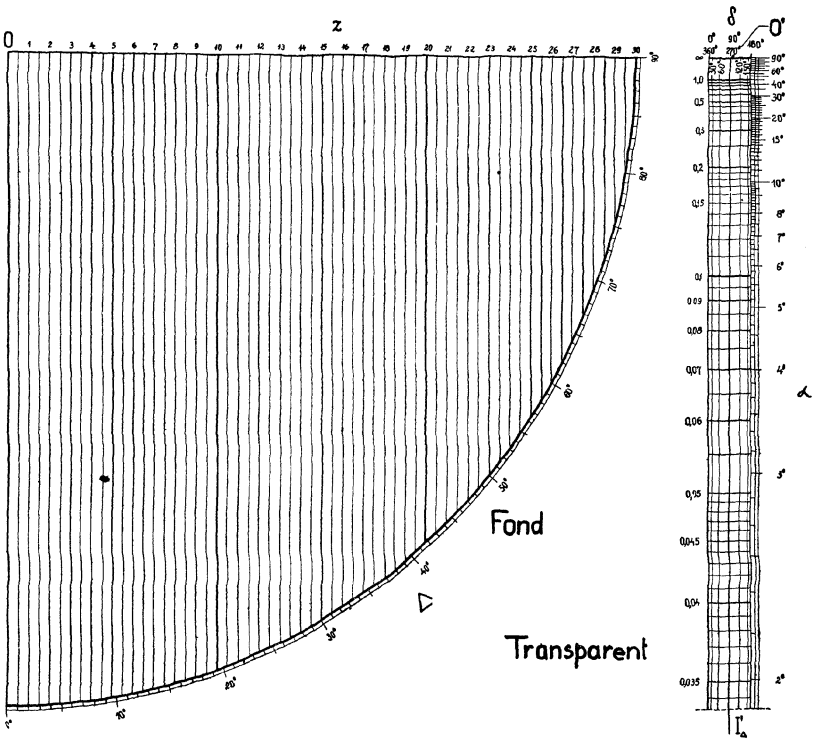


Fig. 88 et 88'. — *Angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère.* Deuxième abaque

incidences et les valeurs de la circulation $(\bar{J}/\bar{r}^2 = \Gamma/4\bar{r}^2)$ pour une hélice existante. On commence par tracer sur le *fond* (v. fig 89) *la caractéristique géométrique* C de l'hélice, c'est-à-dire la courbe représentant la relation entre le pas effectif relatif $h = H/2R$, le rayon relatif $\bar{r}$ et la largeur relative $b/2R$. Si la largeur est constante, cette caractéristique se trace directement sur le réseau $(h, \bar{r})$ du fond. Si la largeur est variable, on

(1) Cet abaque datant de 1924 fait partie d'un travail encore inédit : *Les Hélicoptères. Théorie tourbillonnaire de l'hélice travaillant au point fixe. Recherches expérimentales sur le fonctionnement général de deux hélices tournant en sens inverse,* faisant suite à mon premier travail : *Les Hélicoptères. Recherches expérimentales sur le fonctionnement le plus général des hélices. Etudes sur la mécanique de l'hélicoptère.* (Gauthier-Villars, 1922).

ajoutera en chaque point de la courbe $(h, \bar{r})$ un segment parallèle à l'échelle AB et correspondant à la largeur au rayon considéré, le point O étant pris comme origine.

On fait coïncider les échelles ab du *transparent* (v. fig. 89′) et AB du *fond*, de façon à ce que le point O_2, O_3 ou O_4 (suivant qu'il s'agit d'une hélice à 2, 3 ou 4 pales) coïncide avec le point O du fond.

On calque sur le transparent la caractéristique géométrique, qui devient une *caractéristique aérodynamique* (C′), car en chaque point de cette courbe on lit les

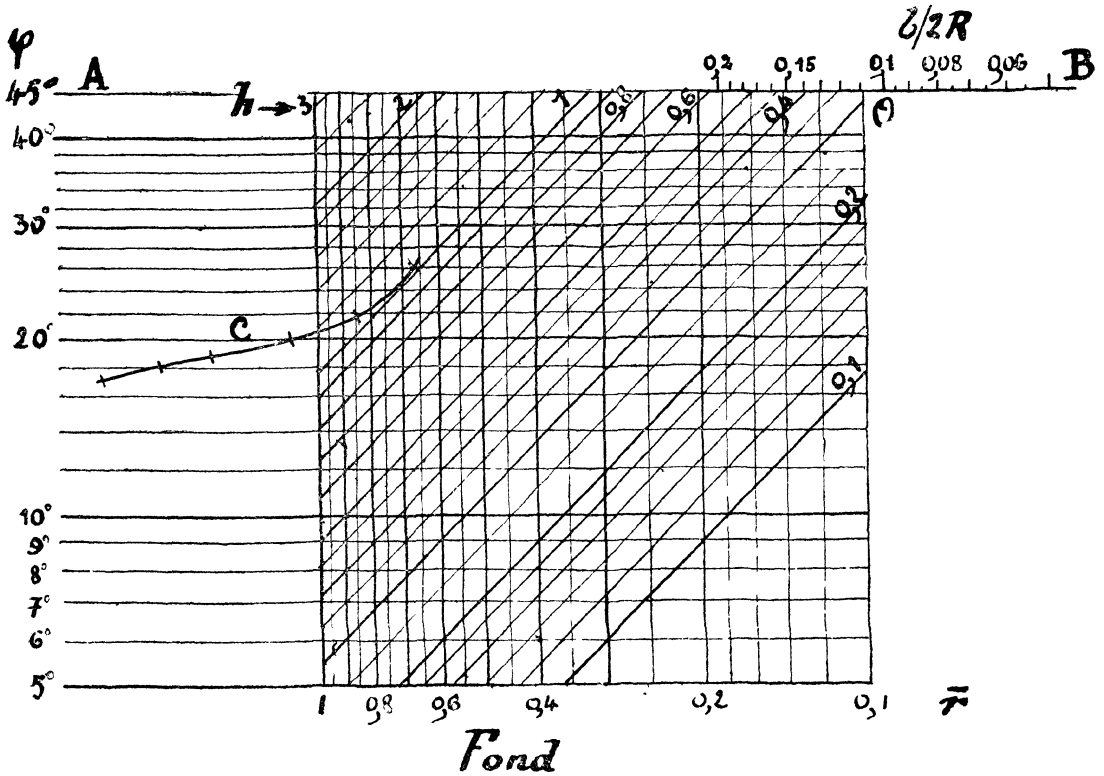


Fig. 89. — *Poussée et puissance d'hélices travaillant au point fixe.*

valeurs corrélatives de l'angle d'attaque i, de la circulation $\bar{J}/\bar{r}^2$ et de l'efficacité élémentaire pour différentes valeurs de la finesse μ de la pale.

On peut également résoudre le problème inverse : déterminer les pas et les largeurs pour une répartition donnée de la circulation le long du rayon.

L'abaque est basé sur une relation fixe entre la portance (c_z) et l'angle d'attaque (i); notamment $c_z = 0,11$. Aux grands angles, pour lesquels cette relation n'est pas vraie, le mode d'emploi de l'abaque est un peu plus compliqué, alors que le nouvel abaque (fig. 77 et 77′) utilise directement la courbe expérimentale $c_z = f(i)$.

§ 8. — Les ventilateurs-hélices.

On trouvera dans mon article : « *Nouvelle méthode d'essais de modèles en souffleries aérodynamiques* » (Premier Congrès International de la Navigation

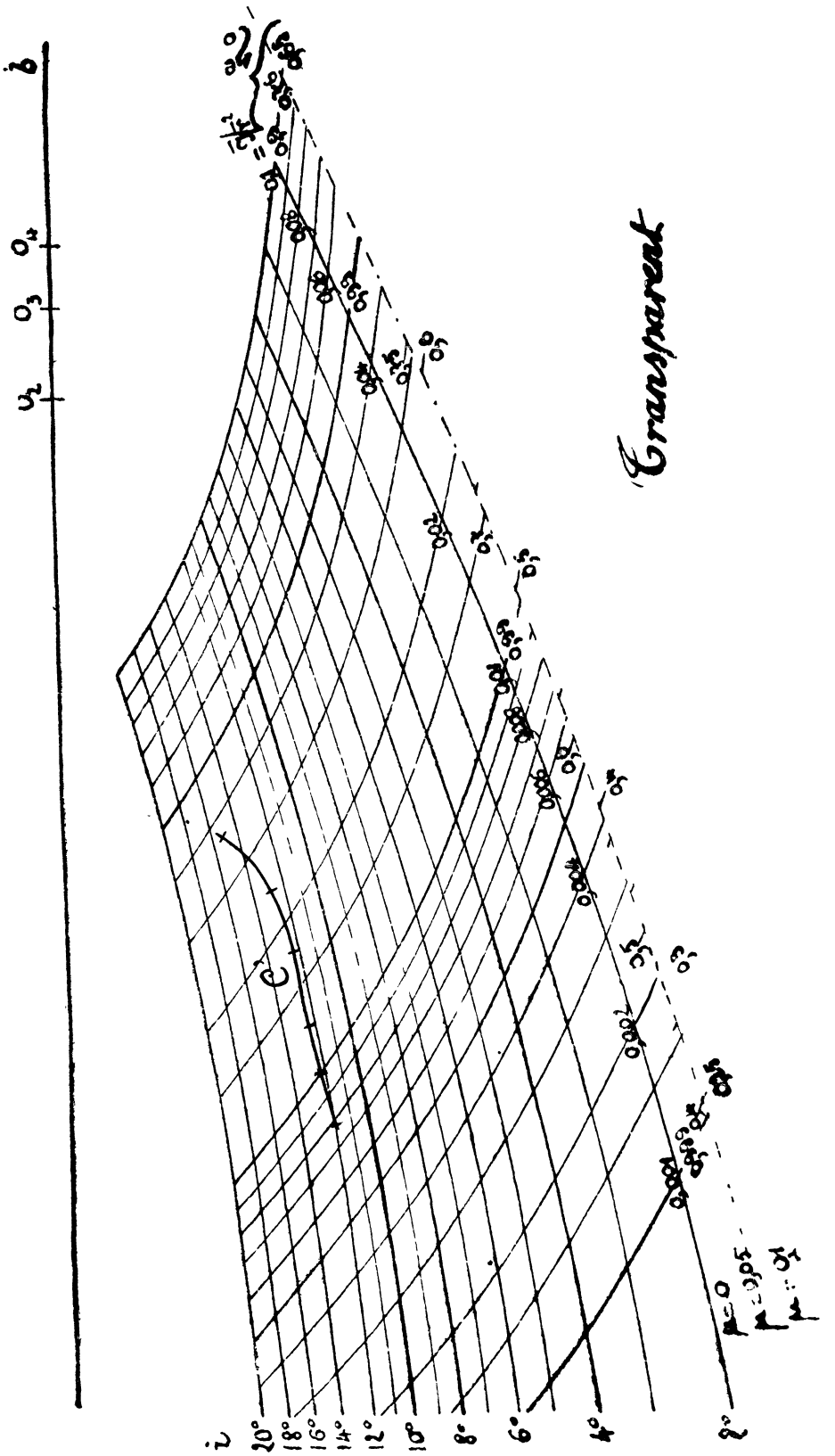


Fig. 89′

Aérienne, Paris 1921, tome II, p. 1) une méthode de représentation des caractéristiques et de choix des *hélices-ventilateurs*, utilisant le fond de la fig. 82.

J'ai donné dans ce travail les résultats de mes essais de 1917 (1) sur les hélices-ventilateurs et j'ai indiqué une méthode pour déterminer le diagramme d'une hélice travaillant en ventilateur, d'après son diagramme d'essai en hélice propulsive.

Les deux *abaques pour l'étude des turbo-machines à hélices*, que j'ai décrits pp. 99 et 101, permettent la détermination, soit des dimensions et des formes des éléments des pales du rotor et du stator d'un ventilateur devant répondre à des conditions données, soit du débit, de la pression et de la puissance d'un ventilateur existant.

Afin de pouvoir utiliser rapidement les enseignements théoriques donnés par ces abaques ou les résultats des expériences, j'ai établi un *abaque pour le choix d'un ventilateur et l'étude de son fonctionnement.*

Cet abaque (inédit jusqu'à présent) comprend un fond (fig. 90), sur lequel on trace pour chaque type de ventilateur la courbe du *coefficient manométrique* en fonction du *coefficient de débit* cette courbe est cotée en valeurs rondes du rendement.

Un transparent (fig. 90′) est alors posé sur le fond et permet, pour chaque ventilateur, la lecture immédiate du rendement et d'une des cinq variables : densité, débit, pression, diamètre du rotor, nombre de tours en fonction des quatre autres variables (2).

Ainsi si l'on donne, comme cela a lieu généralement, la densité, le débit, la pression et le nombre de tours, on lit pour chaque ventilateur les valeurs du rendement et du diamètre et l'on peut choisir immédiatement le ventilateur qui donne le meilleur rendement, et déterminer son diamètre. Le mode d'emploi de l'abaque est :

$$P'(Q, \Delta) \mapsto P(\rho), \quad D'(\Delta)_{Q=\infty} \mapsto D(\alpha), \quad P'(D, n) \mapsto L[\alpha = f(\gamma)].$$

Toute l'opération dure au maximum une minute.

Si l'on veut étudier le *fonctionnement* d'un ventilateur déterminé, on complètera la courbe du coefficient manométrique par la courbe du coefficient de puissance, qu'on tracera sur le fond en portant, à partir de la droite ab, des segments

---

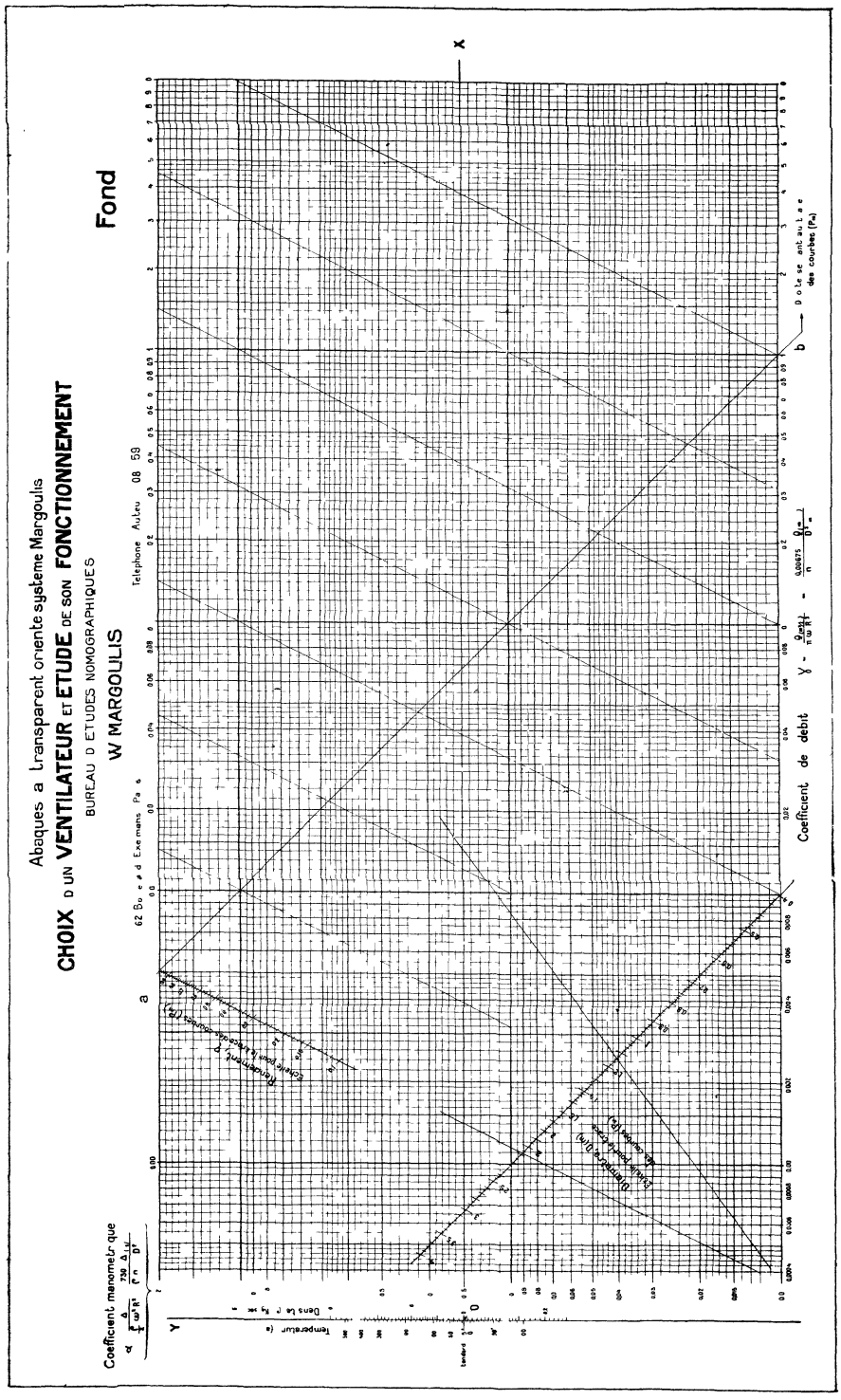
(1) Le ventilateur-hélice est né au laboratoire aérodynamique ; jusqu'en 1917, les laboratoires aérodynamiques français utilisaient pour leurs souffleries soit des ventilateurs centrifuges (Laboratoire Eiffel du Champ de Mars), soit des ventilateurs hélicoïdaux de la Maison Rateau (Laboratoire Eiffel d'Auteuil et Institut Aérotechnique de Saint-Cyr).

En 1917, j'ai effectué au Laboratoire Eiffel les premières recherches systématiques sur des modèles de ventilateurs-hélices. A la suite de ces essais j'ai établi un type de ventilateur-hélice qui a été adopté par les Etablissements Sautter-Harlé dans leur soufflerie pour essais de moulinets dont j'ai établi le projet en 1917.

Le même type de ventilateur a été choisi par M. Toussaint, directeur de l'Institut de Saint-Cyr, pour remplacer l'ancien ventilateur hélicoïdal Rateau lors de la transformation, en 1919, de la soufflerie de Saint-Cyr.

Enfin, le même type avec un diamètre de 7 m. a été utilisé par le Service Technique de l'Aéronautique à Issy-les-Moulineaux dans sa grande soufflerie dont j'avais établi, en 1917, le premier projet.

(2) Cet abaque s'applique naturellement à n'importe quel type, hélicoïdal ou centrifuge, de ventilateur ou pompe et même de turbine hydraulique ; une modification convenable du transparent permet de l'appliquer également au choix et à l'étude du fonctionnement des *turbo-compresseurs* à un ou plusieurs étages. Pour ces dernières machines, l'abaque résout instantanément des problèmes, dont la solution analytique demande de nombreux tâtonnements.


Abaques a transparent orienté système Margoulis
CHOIX D'UN VENTILATEUR ET ETUDE DE SON FONCTIONNEMENT
BUREAU D'ETUDES NOMOGRAPHIQUES
W MARGOULIS
Fond
Coefficient manométrique
Coefficient de débit
Dans le cas d'un ventilateur
Température (°)
Dans le cas d'un ventilateur
Dans le cas d'un ventilateur
Courbe pour la température moyenne (20°)
Courbe pour la température moyenne (20°)
Courbe pour la température moyenne (20°)
Dans le cas d'un ventilateur
Dans le cas d'un ventilateur
Dans le cas d'un ventilateur

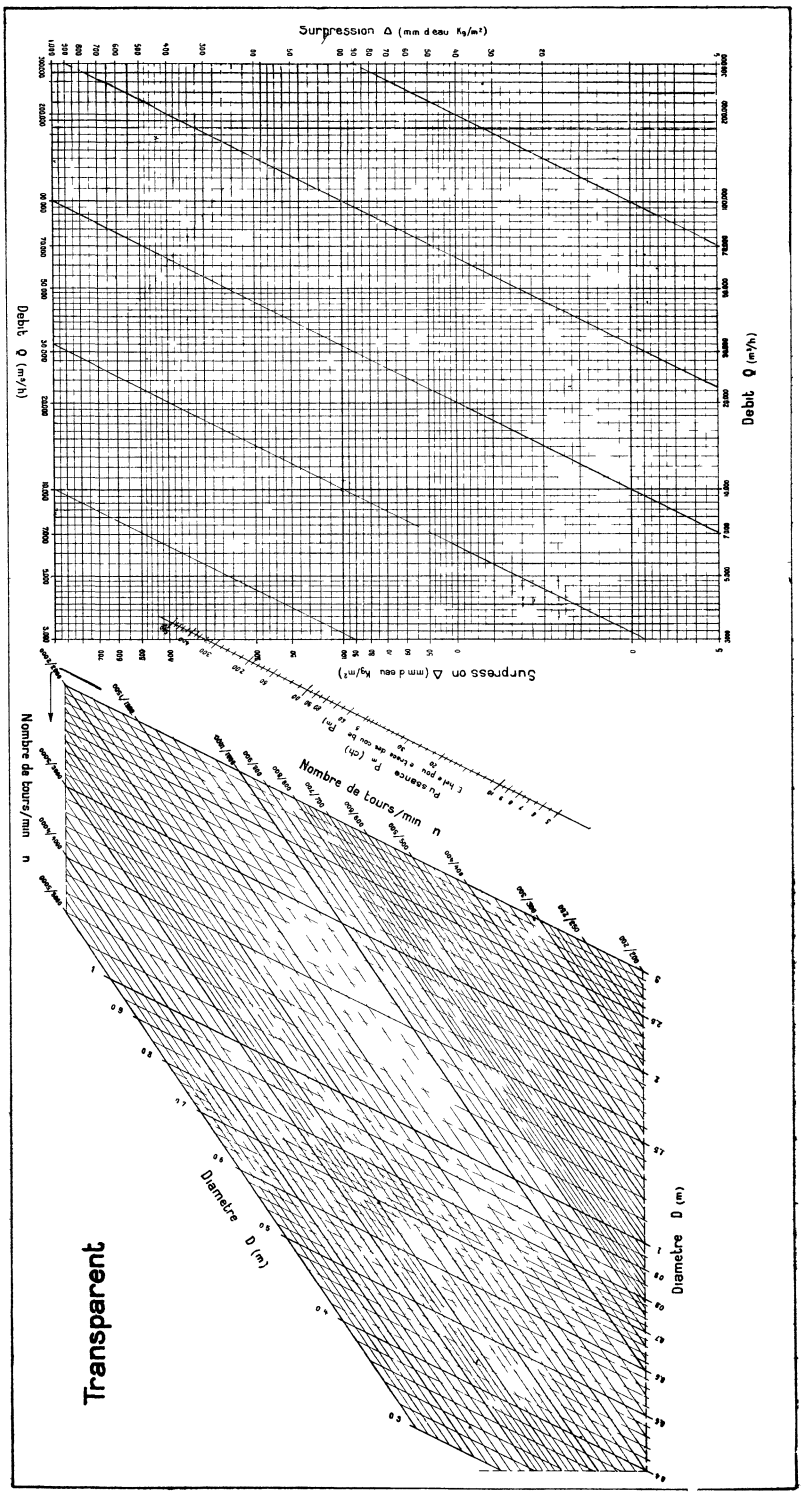

Transparent
Nombre de tours/min n
Diamètre D (m)
Débit Q (m³/h)
Surpression Δ (mm d'eau Kg/m²)
Puissance P (ch)
Hauteur pression en mètres d'eau

FIG. 90.

mesurés sur l'échelle η. En calquant convenablement sur le transparent ces deux courbes, on obtiendra dans le système des coordonnées (*débit, pression*) un premier faisceau de courbes d'égal *nombre de tours* et un deuxième faisceau de courbes d'égale *puissance*, l'ensemble représente le fonctionnement complet du ventilateur.

L'opération complète dure trois minutes.

Le même abaque permet la représentation simple des caractéristiques d'une *famille* de ventilateurs, les types entrant dans cette famille pouvant différer par un ou plusieurs paramètres, la courbe caractéristique de chaque type étant obtenue expérimentalement ou d'après des considérations théoriques (1).

Le choix d'un type de ventilateur, d'après les conditions posées, doit comprendre également la vérification de la *résistance* des pales aux efforts dus à l'action de l'air et à ceux dus aux forces centrifuges. *L'abaque pour le choix d'un ventilateur et l'étude de son fonctionnement* résout cette question d'une façon excessivement simple ; il suffit de tracer sur le fond de l'abaque à côte des courbes des coefficients manométriques, les courbes de coefficients spéciaux, que j'ai appelés *coefficients de résistance.*

La valeur du coefficient de résistance est :

$$\frac{t}{0{,}5\,\rho\,\omega^2 R^2} = f(\gamma) + \rho\,\varphi(\gamma),$$

où t est la tension maximum, γ — le coefficient de débit et ρ — la densité du fluide dans lequel travaille le ventilateur ; f et φ veulent dire « fonction de ».

L'application du transparent sur le fond permet de lire simultanément pour le ventilateur choisi les valeurs de rendement, du diamètre et de la *tension maxima,* on peut ainsi écarter immédiatement les ventilateurs de haut rendement mais ne présentant pas une sécurité suffisante.

---

(1) Pour donner une idée du gain de temps réalisé par l'emploi de ces différents abaques, je citerai le cas d'une maison anglaise fabriquant des ventilateurs-hélices et dont le bureau d'études emploie les méthodes analytiques tirées de l'ouvrage de Joukowski. Le temps demandé par ce bureau pour la détermination complète d'un type de ventilateur est de 5 heures, alors qu'il n'est que de 10 minutes avec mes abaques.

CHAPITRE II

Aviation

La Mécanique nomographique de l'avion

---

§ 1. — Pression et densité de l'air.

(Abaque établi en 1918, inédit).

La réduction des performances d'un avion à celles qu'il aurait effectuées dans un air-standard, exige la connaissance de la variation de la densité et de la pression de l'air en fonction de l'altitude pour une décroissance donnée de la température avec la hauteur et pour des valeurs quelconques de la température et de la pression au sol.

Les équations « balistiques », déterminant la densité et la pression, peuvent être mises sous la forme suivantes :

$$\log\left(\delta\ \frac{p_0}{273+t_0}\right) = \left(\frac{0{,}0342}{b} - 1\right) \times \log\left(1 - \frac{bh}{273+t_0}\right)$$

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{0{,}0342}{b} \log\left(1 - \frac{bh}{273+t_0}\right)$$

δ — étant la densité en $kgsec^2/m^4$, p et p_0 — les pressions en mm de mercure à l'altitude h et au sol, t_0 — la température au sol et b le coefficient de la formule de décroissance de la température $t = t_0 - bh$.

Nous avons représenté les deux formules par un abaque (fig. 33 et 33′) à transparent orienté, constitué par deux abaques, dont les faisceaux (p_0), (t_0) et (h) sont confondus.

Le mode d'emploi est indiqué p. 39.

La manipulation de l'abaque permet de faire immédiatement les conclusions suivantes, qui ne paraissent pas évidentes au premier examen.

1°. — Pour une hauteur donnée, l'augmentation de la décroissance de la t° conduit à une diminution de la pression et à une augmentation de la densité. Cependant pour de très basses t° au sol et pour de grandes hauteurs, il semble exister un point pour lequel la densité reste constante. quelle que soit la loi de décroissance de la t°.

2°. — Pour une hauteur donnée une diminution de la t° au sol conduit à une diminution de la pression et, jusqu'à une certaine hauteur, à une augmentation de la densité ; pour des hauteurs plus élevées la diminution de la t° au sol correspond à une diminution de la densité.

On pourra encore utiliser l'abaque, si la loi de la décroissance de la t° est quelconque (par exemple pour des hauteurs supérieures à 12.000 m. pour lesquelles on admet généralement que la t° reste constante).

A cet effet on divisera la hauteur envisagée en tronçons pour lesquels on admettra une variation linéaire de la t°. On déterminera ensuite de la façon habituelle la variation de la pression et de la densité pour le premier tronçon.

Pour le deuxième tronçon on déplacera le transparent de façon à faire passer

1°. — L'axe O'X' par une nouvelle valeur de t_0 telle que $t_{02} = t_1 - b_2 h_1$, t_1 étant la t° au bout du premier tronçon de hauteur h_1 et b_2 —le coefficient de décroissance de la t° le long du deuxième tronçon.

2°. — Le point (p_1, h_1) du transparent relatif aux pressions (où p_1 est la pression à la fin du premier tronçon lue au cours de la première opération) par la courbe (b_2) du fond se rapportant également aux pressions ; automatiquement le point (p_1, h_1) et la courbe (b_2) relatifs aux densités se confondront

On calquera sur le transparent, entre les hauteurs h_2 et h_1, chacune des courbes (b_2).

On procédera de même pour le troisième tronçon et ainsi de suite. Il est évident que cette façon de procéder consiste à donner, à chaque commencement de tronçon, à la pression et à la t° leurs valeurs réelles, condition suffisante pour que leur variation le long du tronçon examiné soit correcte.

§ 2. — Résistance induite des biplans.

(*Abaque établi en* 1921, *édité par le Bureau d'Etudes Nomographiques*).

Pour calculer la résistance induite (W) d un biplan, le professeur Prandtl a donné (*Technische Berichte* vol. III, fasc, 7) la formule suivante :

$$W = \frac{1}{\pi q}\left(\frac{A_1^2}{b_1^2} - \frac{A_2^2}{b_2^2} \quad 2\sigma \frac{A_1}{b_1}\frac{A_2}{b_2}\right) \tag{1}$$

où A_1 et A_2 sont les forces sustentatrices, q — la pression dynamique, b_1 et b_2 — les envergures des ailes ($b_1 > b_2$) et σ — un coefficient dépendant des valeurs de l'entreplan relatif (h/b_1) et du rapport des envergures ($\mu = b_2/b_1$)

Présentée sous cette forme, la formule ne permet pas de se rendre facilement compte de l'influence de la disposition et des dimensions relatives des plans sur le coefficient de résistance induite $c_{w1} = W\,Sq$.

Aussi avons-nous transformé la formule de la façon suivante :

$$c_{w1} = \frac{c_a^2}{\frac{\pi b_1^2}{S}}\left\{\left[1 - s_2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\right]^2 - \left(\frac{1-\sigma}{\mu}\right)\left[(1 - s_2)\, s_2\right]\right\} = \frac{c_a^2}{\frac{\pi b_1^2 . Z}{S}} \tag{2}$$

où s_2 est le rapport de la surface à envergure b_2 à la surface totale S.

Nous appellerons :

ALLONGEMENT APPARENT — le terme b_1^2/S ; c'est l'allongement d'un monoplan ayant la même surface et la même envergure que le biplan considéré.

QUALITÉ AÉRODYNAMIQUE (1) — le coefficient Z ; il dépend seulement de la disposition et des dimensions relatives des plans.

ALLONGEMENT VRAI — le produit Z (b_1^2/S) : c'est l'allongement d'un monoplan de même surface et donnant la même résistance induite que le biplan.

---

(1) Le laboratoire de Gœttingen emploie, sous le nom de « Gutegrad », le coefficient $\lambda = 1/Z$; nous estimons plus logique notre coefficient Z, dont la valeur augmente, quand la qualité augmente.

Pour connaître l'*allongement vrai* du biplan, il suffit donc de déterminer la valeur de la *qualité aérodynamique* Z. Or, d'après la formule (2), Z est fonction de s_2, μ et σ. D'autre part σ est une fonction de μ et h/b_1 dont les valeurs sont données par un graphique qui se trouve dans l'article cité ci-dessus du prof. Prandtl (1).

Pour $h/b_1 = 0{,}1$ à $0{,}2$ nous avons trouvé que les valeurs du terme $2\left(\frac{1-\sigma}{\mu}\right)$ peuvent être représentées avec une erreur inférieure à 1 %. par la formule

$$(3) \qquad 2\left(\frac{1-\sigma}{\mu}\right) = 2{,}88\left(\frac{0{,}15 + h/b_1}{\mu^{1\,67}}\right).$$

On a alors :

$$(4) \qquad \frac{1}{Z} = \left[1 - s_2\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\right]^2 - 2{,}88\left(\frac{0{,}15 + h/b_1}{\mu^{1\,67}}\right) s^2 (1 - s_2).$$

On voit que la *qualité aérodynamique* dépend du rapport des surfaces (s_2), du rapport des envergures (μ) et de l'entreplan relatif (h/b_1), c'est-à-dire *seulement de la disposition et des dimensions relatives des plans.*

C'est cette relation que représente l'abaque à transparent orienté (fig. 91 et 91').

Il comprend :

un *fond* portant un faisceau (Z) et la droite d'orientation AB ;

un *transparent* portant un faisceau (μ) coté en valeurs de s_2 (2) et une droite d'orientation ab portant l'échelle (h/b_1).

Mode d'emploi. — μ, h/b_1, et s_2 étant donnés, on fait glisser la droite ab du transparent sur la droite AB du fond jusqu'à ce que le point coté h/b_1 vienne coïncider avec le point O du fond. On lit la valeur de Z sur le faisceau (Z) du fond au droit du point de la courbe (μ) cotée de la valeur donnée de s_2.

Pour $\mu = 1$, les valeurs de Z sont lues sur le faisceau des verticales, placé dans la partie supérieure du fond.

La valeur de s_2, donnant le maximum de Z pour un groupe de valeurs données de h/b_1 et μ, se lira immédiatement sur la courbe (μ) au point où celle-ci tangente la courbe (Z).

Exemple — S = 62 m2 ; b_1 = 18,3 m ; h/b_1 = 0,1 ; μ = 0,8 ; s_2 = 0,4

On lit sur l'abaque pour $s_2 = 0{,}4$, Z = 1,04 ; le maximum de Z = 1,07 a lieu pour $s_2 = 0{,}25$.

L'allongement vrai est :

$$\frac{18{,}3^2}{62} \cdot 1{,}04 = 5{,}6.$$

Remarque 1. — On peut établir un abaque à transparent orienté donnant $Z = f(\mu, s_2, h/b_1)$, sans remplacer $2\left(\frac{1-\sigma}{\mu}\right)$ par sa valeur approchée (3), mais en prenant les valeurs de $\sigma = f(\mu, h/b_1)$ d'après le graphique du prof. Prandtl.

---

(1) Ce graphique donne σ en fonction de μ et de l'entreplan relatif

$$h : \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) = \frac{2\,h/b_1}{1 + \mu}$$

et par conséquent en fonction de μ et h/b_1.

(2) Le faisceau (s_2) n'a pas été tracé, car sa disposition est telle que les lectures dans le réseau (μ, s_2) seraient trop difficiles.

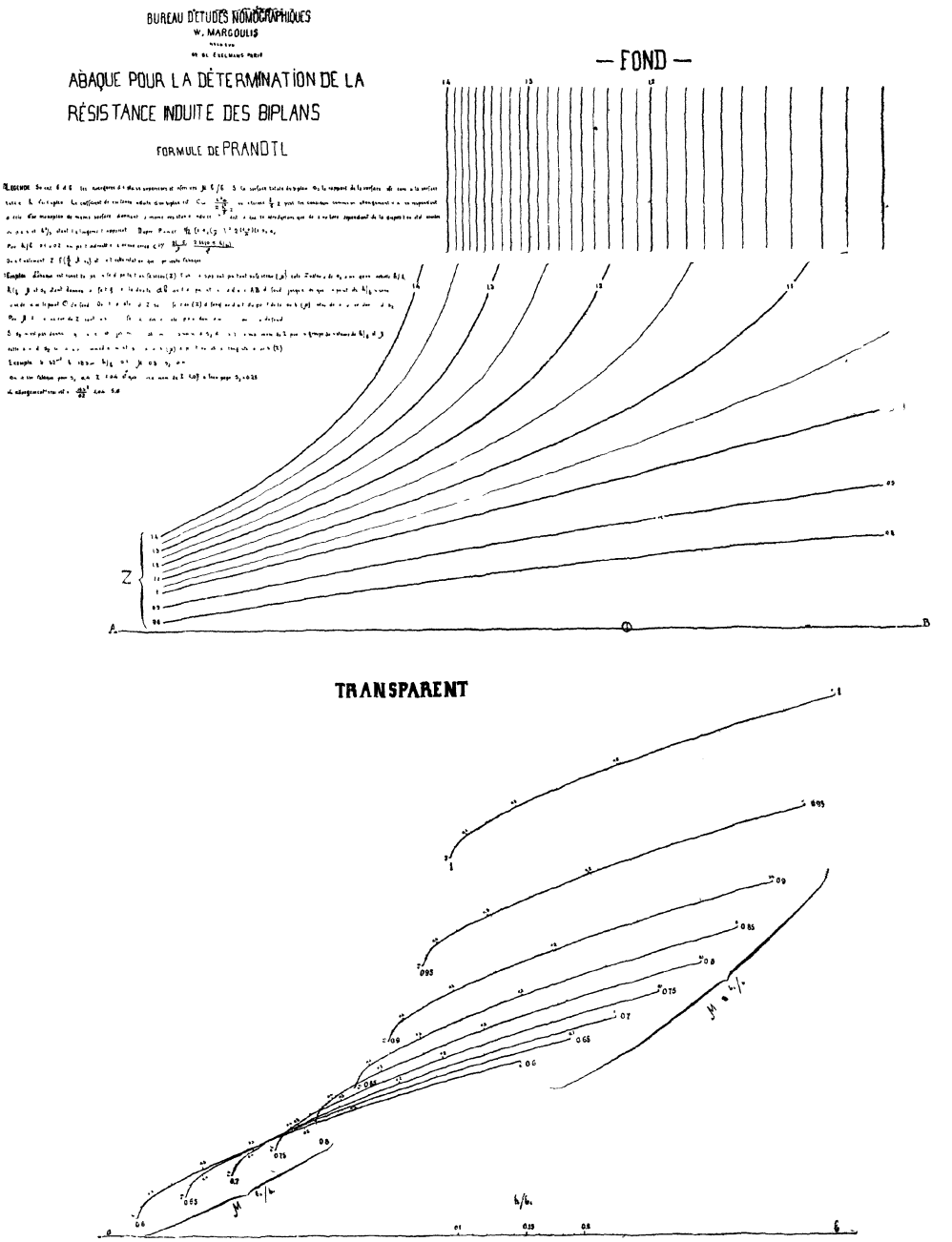


FIG. 91 et 91'. — *Résistance induite des biplans.*

Cet abaque serait constitué par un fond portant le faisceau (Z) et un point fixe O_{s_2} et un transparent portant un réseau (h/b_1, μ) et une échelle (s_2).

Remarque 2. — Il y a lieu de rappeler ici que d'après les expériences du Laboratoire de Goettingen (*Ergebnisse...*, II Lieferung, 1923), la résistance induite mesurée est d'environ 8 % supérieure à la résistance induite calculée au moyen de la formule.

§ 3. — Montée d'un avion.

(Determination of the climbing time of an airplane. *Review of Aeronautical Works*, n°s 7 à 11, 1920).

Soient $\frac{Q}{P_m}$ — la charge par cheval, $\frac{Q}{S}$ — la charge par m², η_0 — le rapport de la puissance du moteur en montée au sol à la puissance P_m, ρ_0 — le rendement de l'hélice au sol, K_y et K_x — les éléments unitaires de la résultante à l'incidence de la montée à l'altitude h, f(h) — le rapport de la puissance utile du groupe motopropulseur à l'altitude h à la puissance utile en montée au sol, $\varphi(h) = \sqrt{\delta/\delta_0}$, δ_0 et δ étant les poids spécifique de l'air au sol et à l'altitude h.

J'ai montré dans l'article cité ci-dessus, que les équation générales donnant les valeurs des vitesses ascensionnelles, des temps de montée et des plafonds (H) étaient :

$$X_1 = \frac{1}{f(h) - Y\varphi(h)}; \quad X = \int_0^h \frac{dh}{f(h) - Y\varphi(h)}; \quad Y = \frac{f(H)}{\varphi(H)};$$

où

$$X_1 = \left(\frac{Q}{P_m}\right)^{-1} \cdot \eta_0 \rho_0 \cdot \frac{1}{v};$$

$$Y = \left(\frac{Q}{P_m}\right) \left(\frac{Q}{S}\right)^{1/2} \frac{1}{\eta_0 \rho_0} \cdot \frac{1}{K_y^{3/2}/K_x};$$

$$X = \left(\frac{Q}{P_m}\right)^{-1} \eta_0 \rho_0 \cdot t$$

f(h) représente la loi de la variation de la puissance en fonction de l'altitude. $\varphi(h)$ la loi de la variation du poids spécifique de l'air. Quelles que soient ces lois, on peut toujours déterminer les valeurs de v, t et H au moyen d'un abaque, constitué par un *fond* (fig. 92, 93 et 94) comportant le réseau $\frac{Q}{P_m}$, $\frac{Q}{S}$, 2 faisceaux de courbes (h) et un faisceau de courbes (H), et un *transparent* (fig 92') portant le réseau ($\eta_0 \rho_0$, $K_y^{3/2}/K_x$) et une échelle graduée en valeurs de v et de t. Tous ces éléments, sauf les 3 faisceaux (h, H), restent les mêmes, quelles que soient les fonctions f(h) et $\varphi(h)$.

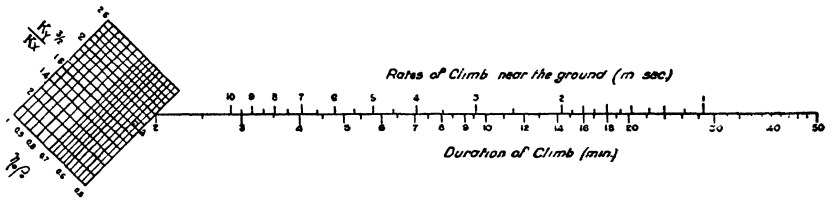


Fig. 92'. — *Montée d'un avion.* Transparent.

Nous avons ainsi établi 3 abaques se rapportant à 3 cas différents de la variation de la puissance utile en fonction de l'altitude : moteur *ordinaire* avec hélice *rigide*

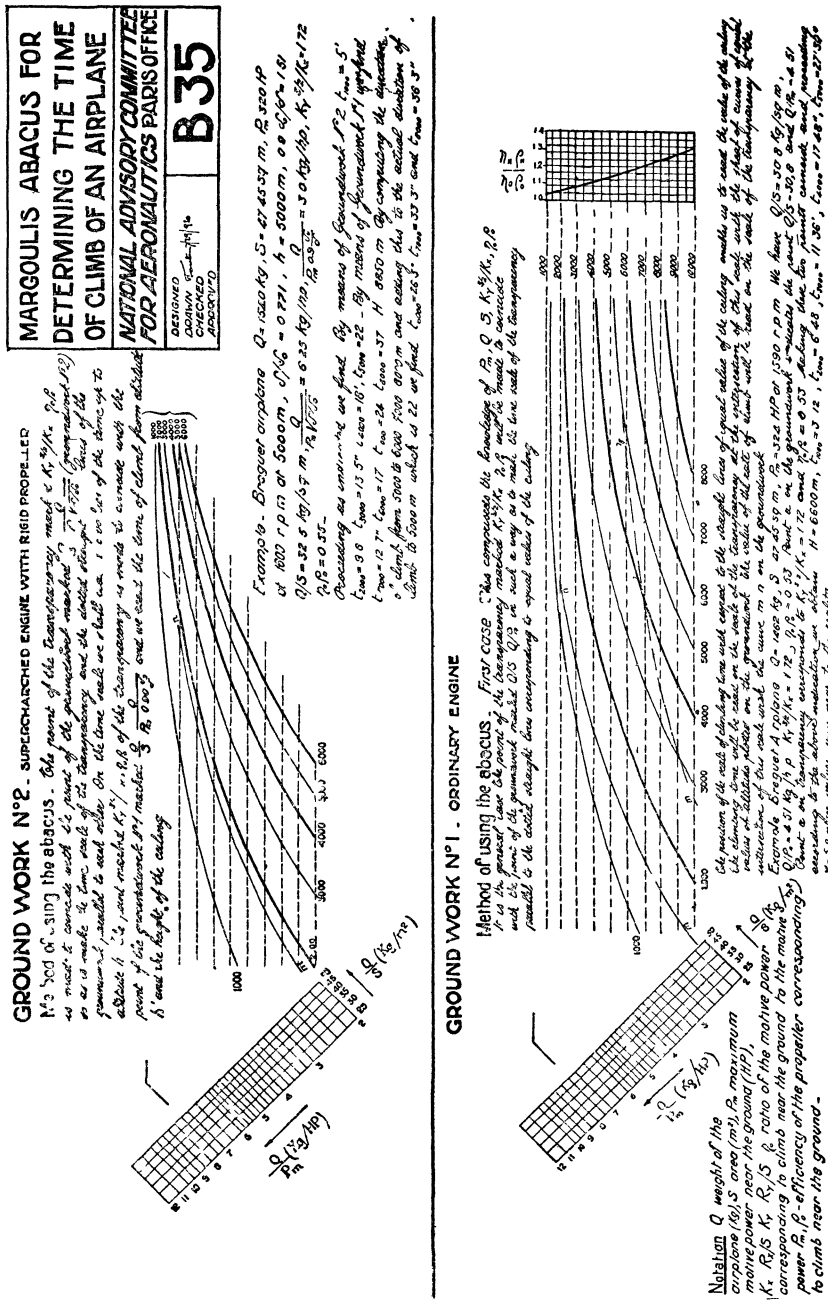


Fig. 92 et 93. — *Montée d'un avion moteur ordinaire et hélice rigide* (ground work N° 1) et moteur suralimenté et hélice rigide (ground work N° 2).

(fig. 92), moteur *suralimenté* avec hélice *rigide* (fig. 93) et moteur *suralimenté* avec hélice à *pales orientables* (fig. 94).

Le *mode d'emploi* de ces 3 abaques est le même : on fait coïncider les points

($\eta_0 \rho_0$, $K_y^{3/2}/K_x$) et (Q/P_m, Q/S) et on lit à l'intersection de l'échelle ($\dot{v}$, t) avec les faisceaux (h) et (H) les valeurs de v, t et H.

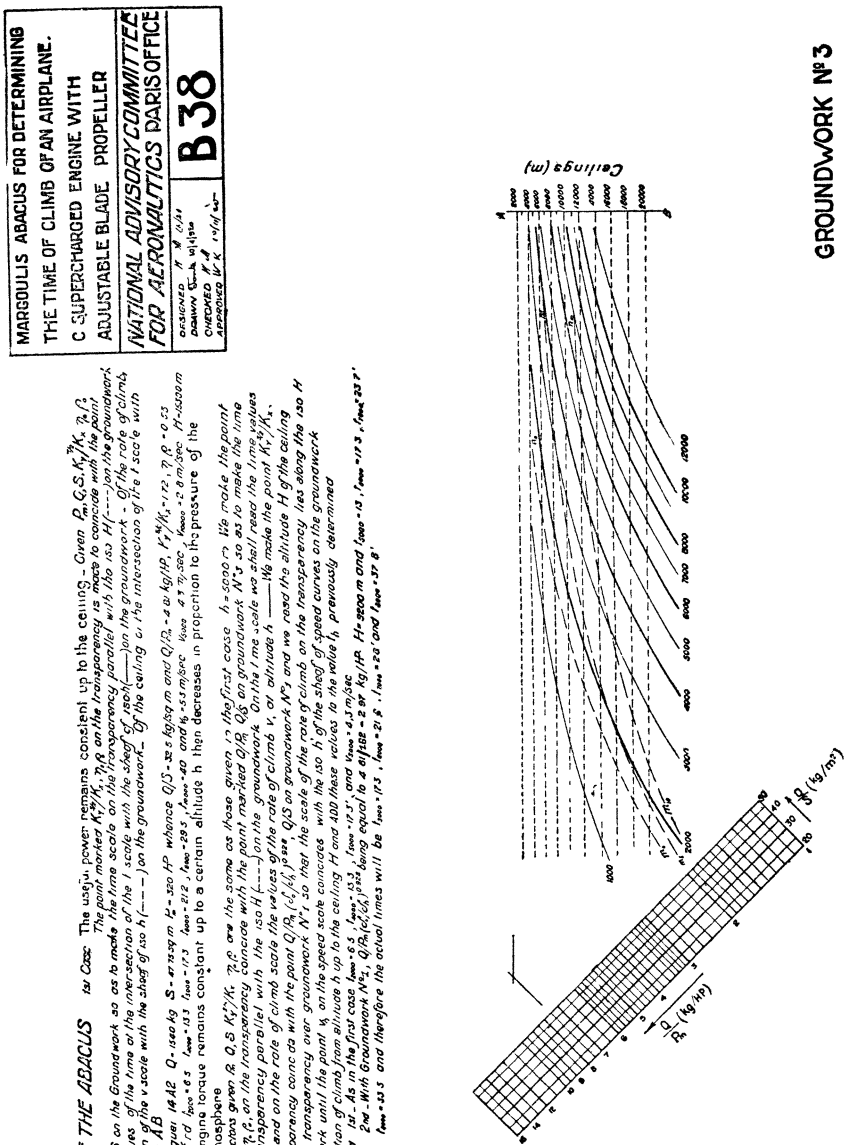


Fig. 94. — *Montée d'un avion : moteur suralimenté et hélice à pales orientables.*

§ 4. — Choix et détermination des dimensions des surfaces d'un avion. Représentation des régimes de vol d'un avion. Comparaison des voilures.

(Travaux publiés dans le *Résumé des Travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire Eiffel*, pp. 8 et 197).

1°. — L'ABAQUE POUR LA DÉTERMINATION DE LA SURFACE ET LE CHOIX DU PROFIL

DES AILES D'UN AVION (fig. 95 et 95') représente l'ensemble des 3 équations suivantes :

$$1 + \frac{K_x S}{R'_x} = \frac{K_y S P^{2/3} (\delta/\delta_0)}{R'^{2/3}_x Q}$$

$$V^3 = \frac{P/R'_x}{1 + \frac{K_x S}{R'_x}}$$

$$K_x = f(K_y).$$

La légende inscrite sur le fond indique son mode d'emploi.

L'abaque permet la détermination de la vitesse (V) d'un avion en palier aux différentes altitudes, ainsi que du plafond (H) en fonction de la résistance nuisible (R'_x), de la puissance utile (P), du poids (Q) et de la surface (S) pour un planeur dont on connaît la polaire : $K_x = f(K_y)$; δ/δ_0 est le rapport des poids spécifiques de l'air à l'altitude h et au sol.

Il sert en somme à étudier les régimes de vol d'un avion et c'est cette possibilité de déterminer rapidement les régimes de vol qui permet de choisir parmi plusieurs voilures dont on connaît les polaires, celle qui donne les performances maximum Voir à ce sujet la Remarque de la p 134

2° — J'ai montré dans le même ouvrage, que la méthode de COMPARAISON DES PROFILS, généralement employée à cette époque et basée sur la comparaison des valeurs de K_x pour les mêmes valeurs de K_y ne correspondait pas aux problèmes

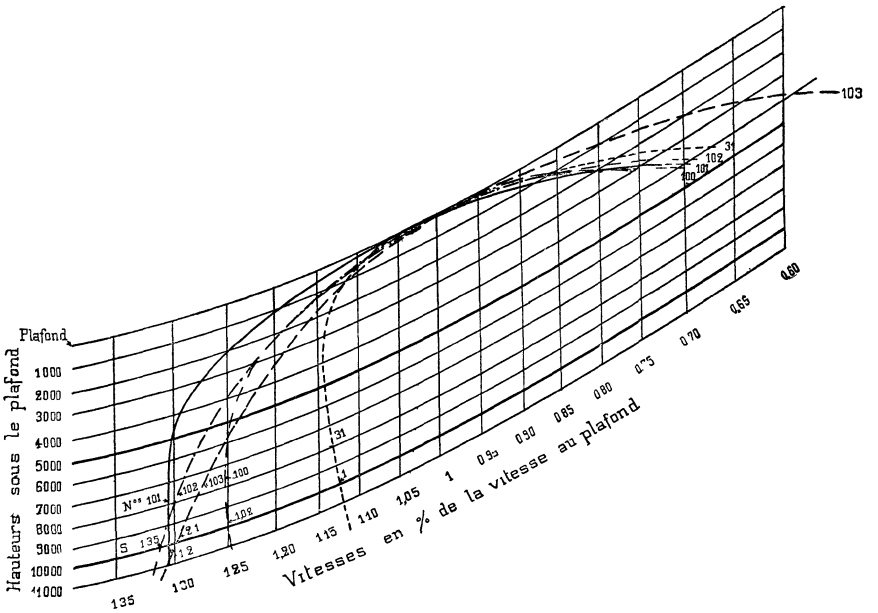


FIG. 96. — *Comparaison des profils à égalité de hauteur de plafond.*

posés par la pratique En effet, il ne s'agit pas de comparer les profils à surface égale, mais de décider quel est le profil qui, à égalité de plafond ou de vitesse

LABORATOIRE AERODYNAMIQUE

G EIFFEL

Paris, le 28 Avril 1917

LEGENDE

L'abaque permet de résoudre le problème suivant

On s'est fixé les valeurs de la puissance utile P, du poids total en charge Q et de la résistance nuisible R'_x d'un avion. Déterminer la surface S et le profil des ailes afin d'atteindre la plus grande vitesse en palier à une altitude h donnée à la condition de plafonner à une altitude H déterminée.

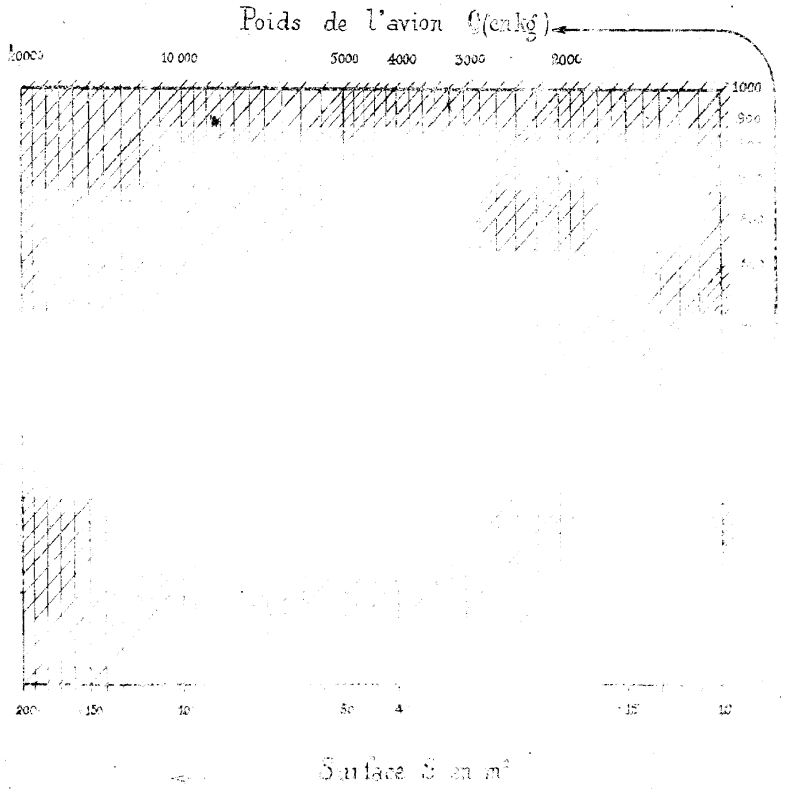
Emploi de l'abaque

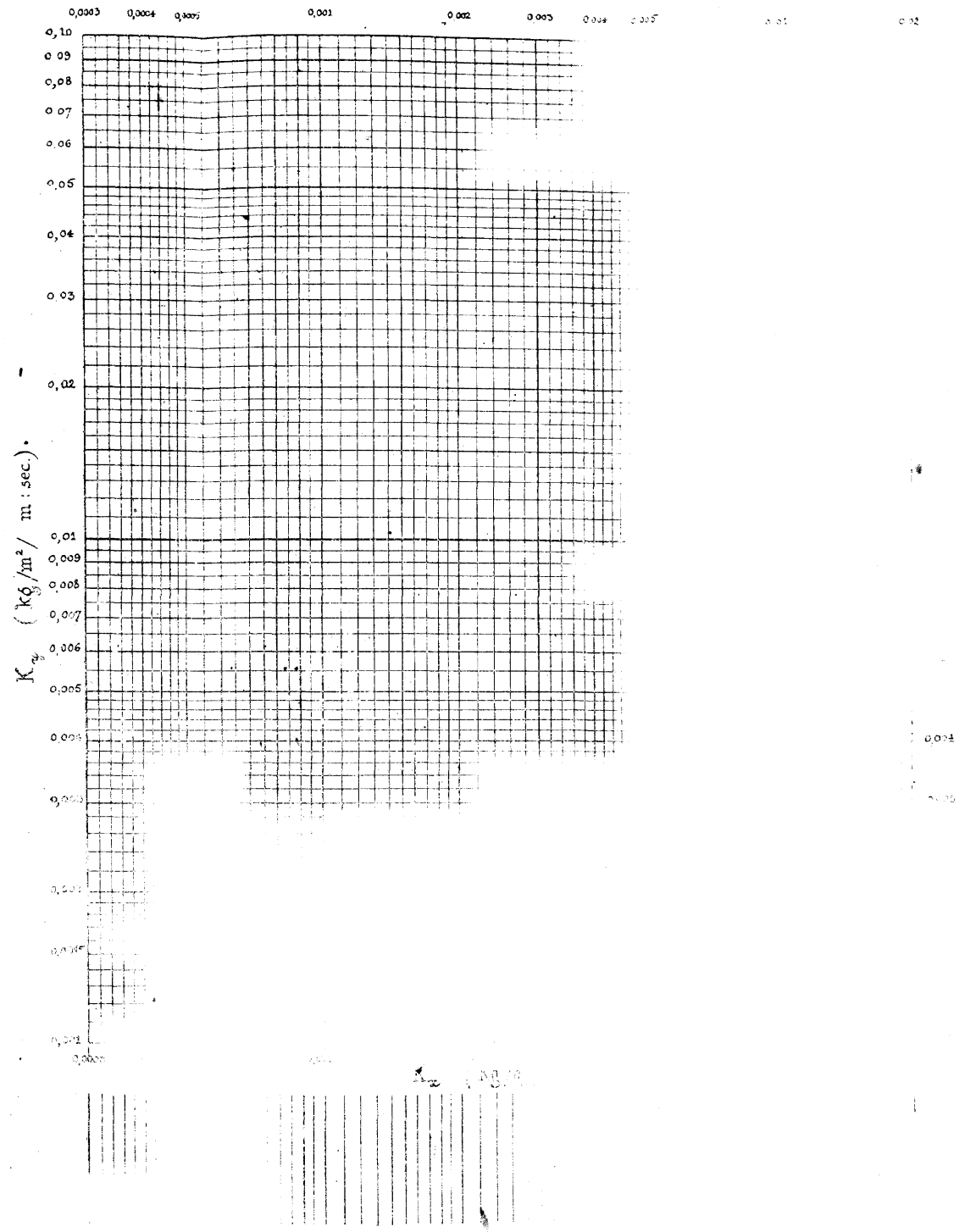
On trace dans le système d'axes K_x, K_y du fond les polaires des ailes parmi lesquelles s'effectuera le choix.

On fait glisser le point coté P, R'_x du transparent le long de la droite d'égale valeur de Q du fond (la droite AB du transparent restant parallèle à l'échelle des K_x du fond.) jusqu'à ce que la courbe d'égale valeur de H du transparent devienne tangente à une des polaires du fond.

On lira sur le fond au droit du point (P, R'_x) du transparent la valeur de la surface S. La valeur de la vitesse V à la hauteur h sera lue au droit de l'intersection de la verticale passant par le point d'intersection de la polaire et de l'iso-h avec l'horizontale passant par le point P, R'_x.

L'incidence du vol à la hauteur h est celle indiquée sur la polaire au point d'intersection de celle-ci avec l'iso-h.





ABAQUE POUR LA DETERMIN

ET LE CHOIX DU PROFIL DES

Fig. 95.

ABAQUE POUR LA DETERMINATION DE LA SURFACE ET LE CHOIX DU PROFIL DES AILES D'UN AVION

TRANSPARENT

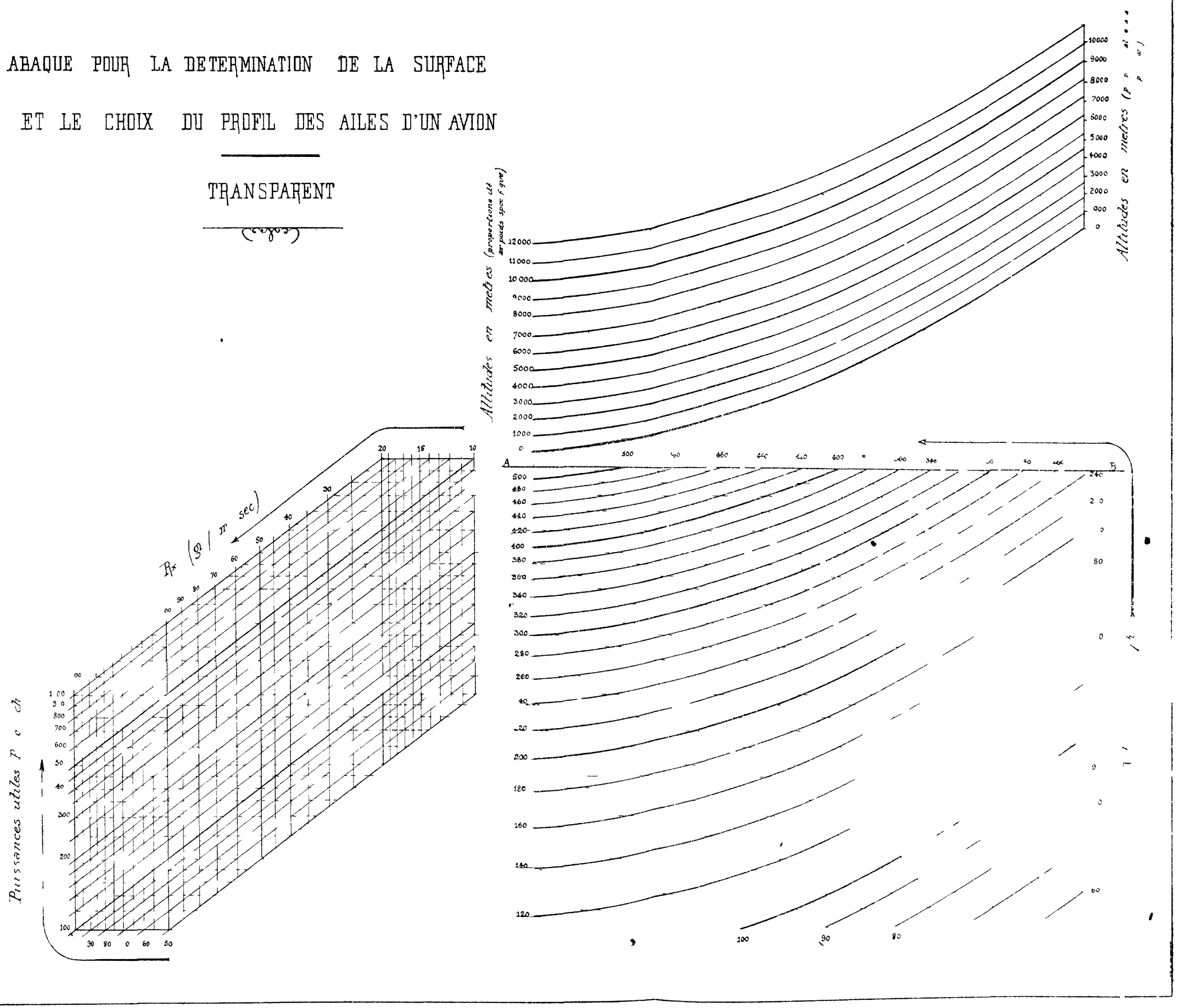


FIG. 95/

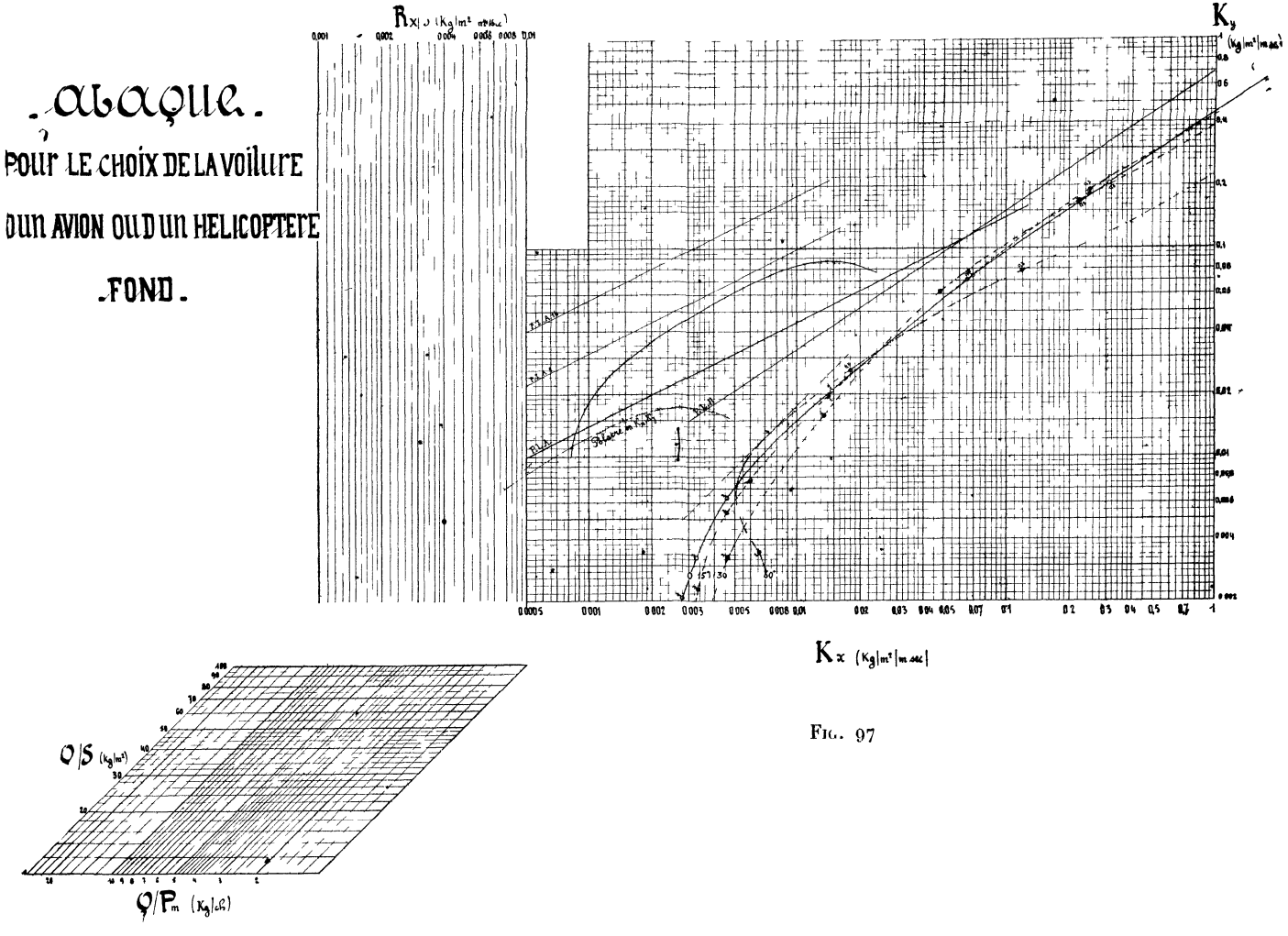

Abaque
Pour le choix de la voilure
d'un avion ou d'un hélicoptère
Fond
R_x
K_y
K_x
Q/S
Q/P_m

Fig. 97

d'atterrissage, donne la plus grande vitesse à l'altitude d'utilisation, les dimensions des surfaces étant généralement différentes et constituant justement une des inconnues du problème.

J'ai établi ainsi une methode générale de comparaison des voilures au moyen de mon abaque. La fig. 96 représente une comparaison à égalité de plafond de profils monoplans d'allongement 6 pour une résistance nuisible unitaire de 0.002 kg/m2/ms.

§ 5. — Choix de la voilure d'un avion ou d'un hélicoptère.

Une modification de l'abaque précédent, effectuée en considérant comme variables non plus les valeurs séparées de R'_x, P, Q et S, mais les trois coefficients fondamentaux caractérisant un avion ou un hélicoptere : Q/P_m, Q S et R'_x S, a été publié par moi dans *l'Aéronautique* (mars 1922) et dans mon ouvrage *les Hélicoptères*.

Le nouveau groupement des variables (v. fig 97 et 97'), permet la lecture directe de la vitesse au point considéré de la polaire et supprime ainsi le faisceau auxiliaire existant dans le premier abaque

L'*emploi* de l'abaque est le suivant :

On trace sur le fond, dans le réseau (K_x, K_y), les polaires considérées. On fait coincider le point O de la droite AB du transparent avec le point coté $\frac{Q}{S}$, $\frac{Q}{P_m}$ du fond et l'on rend parallèle la droite AB aux droites $\left(\frac{Q}{S}\right)$ du fond. A partir du point d'intersection de la droite MN avec la droite $\left(\frac{R'_x}{S}\right)$ du fond, on suit sur le transparent la

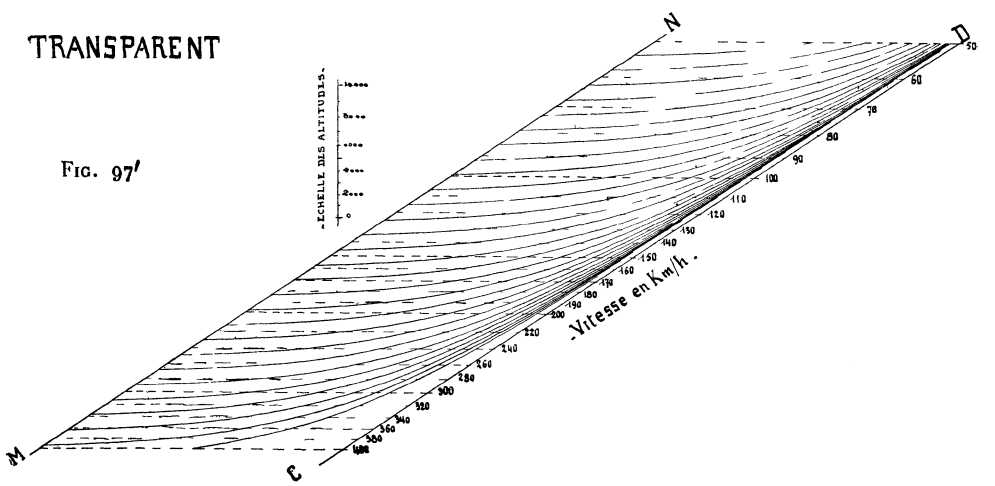


FIG. 97'

courbe en trait plein $\left(\frac{R'_x}{S}\right)$ passant par ce point jusqu'à son intersection avec les polaires. On lit les vitesses aux différents points de la polaire sur le faisceau (en traits pointilles) des vitesses du transparent.

Le *plafond* sera déterminé en portant sur l'échelle des altitudes le segment égal à la longueur, dont il faut glisser le transparent parallèlement à l'axe des K_y pour que la courbe $\left(\frac{R'_x}{S}\right)$ vienne tangenter la polaire.

§ 6. — Abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère.

(*Etabli en* 1922, *publié chez Gauthier-Villars*).

1°. — DESCRIPTION DE L'ABAQUE.

Dans cet abaque j'ai réuni les équations représentées par les abaques décrits aux §§ 3 et 5, ainsi que l'équation :

$$\frac{1}{S} = \frac{q_u}{Q/S} = 1 - \frac{m + nc}{Q/P_m} - f(S),$$

où

$$\frac{q_p}{Q} = f(S),$$

et dans laquelle q_u est le poids utile, m — le poids par cheval du groupe motopropulseur, n — le nombre d'heures d'essence, c — la consommation spécifique et q_p — le poids du planeur. Rappelons que Q/S est la charge par m² et Q/P_m la charge par cheval.

Toutes les équations ont deux variables communes : Q S et Q/P_m : on superpose ces deux systèmes, ce qui permet de résoudre par une seule opération l'ensemble des équations.

Le *mode d'emploi* est le suivant : on fait coincider le point O du *transparent* (fig. 98') avec le point $(Q/S, Q/P_m)$ du *fond* (fig. 98). On lit alors à l'intersection de la courbe (R'_x/S) (1) avec la polaire, la valeur de la vitesse V en palier au sol, et au moyen de l'échelle auxiliaire des altitudes — la hauteur (H) du plafond. A cet effet, on porte sur cette échelle le segment égal à la longueur, dont il faudrait glisser le transparent parallèlement à l'echelle (K_y). pour que la courbe (R'_x/S) vienne tangenter la polaire.

On lit les temps de montée aux altitudes (h) à l'intersection de la droite (H) avec les faisceaux (t) et (h).

On lit la valeur du poids utile sur le faisceau (q_u) du transparent au point $(m+nc, S)$ du réseau du fond.

Nous avons relié ainsi pour la première fois par un abaque *toutes* les performances d'un avion, c'est-à-dire non seulement les vitesses horizontales et ascensionnelles, mais également les poids constitutifs et notamment le poids utile.

Nous avons admis pour f(S) une certaine expression résultant de statistiques anglaises, mais nous fournissons aux constructeurs un fond disposé de façon à ce

(1) Comme dans l'abaque précédent la courbe $\left(\frac{R'_x}{S}\right)$ du transparent est celle qui passe par l'intersection de la droite MN du transparent avec la droite $\left(\frac{R'_x}{S}\right)$ du fond.

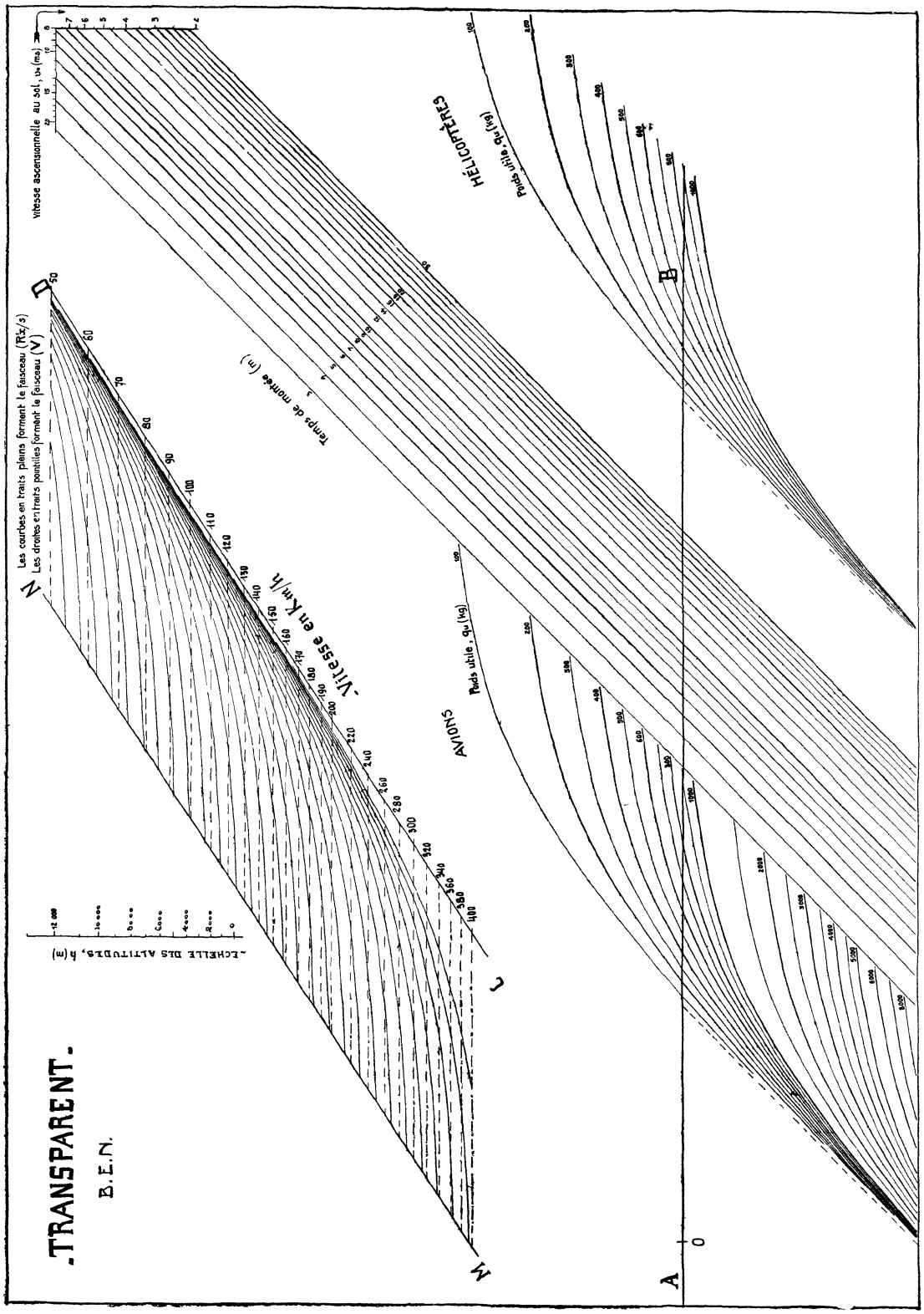

.TRANSPARENT.
B.E.N.
Les courbes en traits pleins forment le faisceau (Rs/s)
Les droites en traits pointillés forment le faisceau (V)
Vitesse ascensionnelle au sol, vs (ms)
Temps de montée (m)
Vitesse en km/h
Poids utile, pu (kg)
HÉLICOPTÈRES
AVIONS
ÉCHELLE DES ALTITUDES, h (m)
N
P
M
L
A
B
O

Fig. 98'.

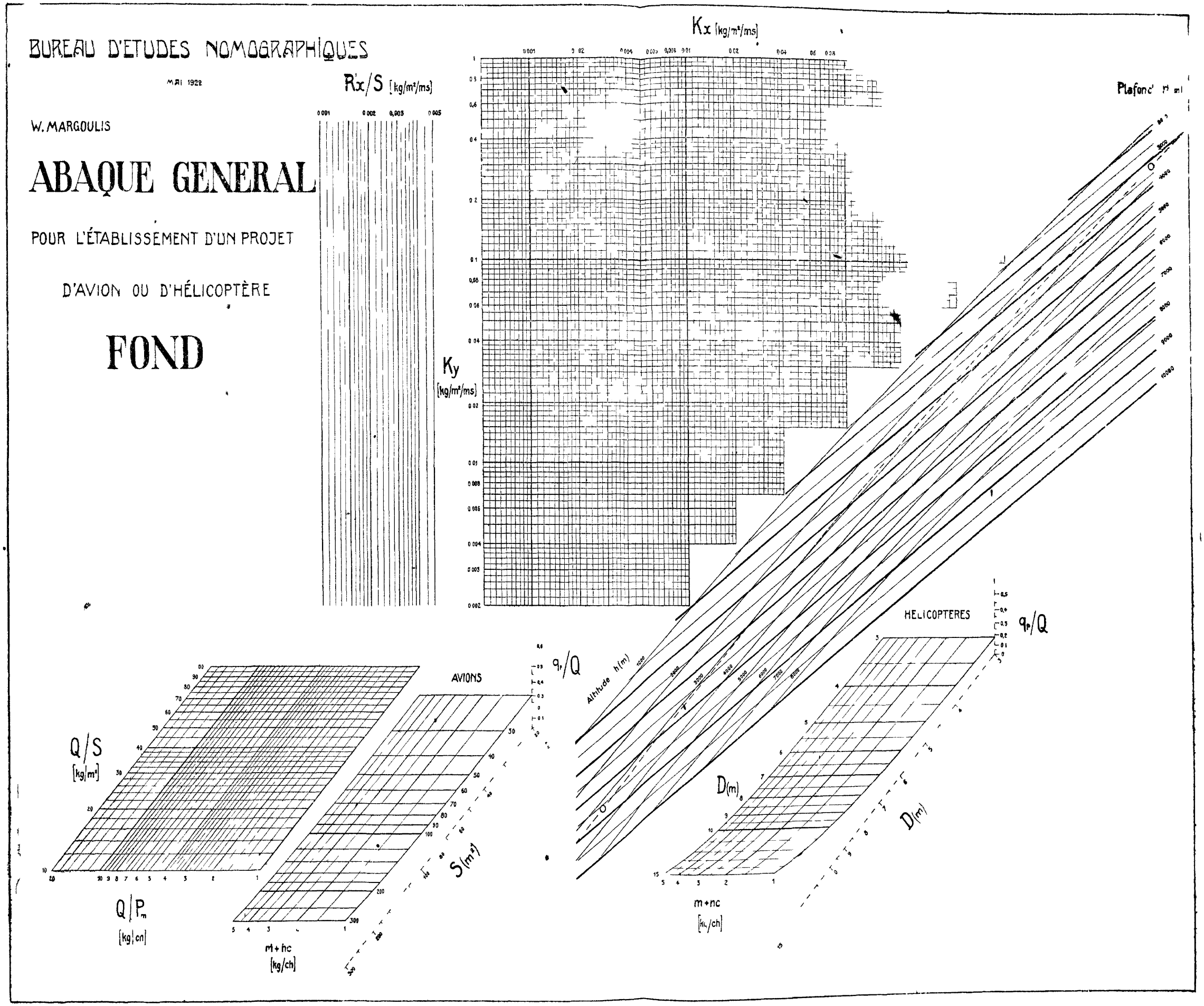

BUREAU D'ETUDES NOMOGRAPHIQUES
MAI 1922
W. MARGOULIS
ABAQUE GENERAL
POUR L'ÉTABLISSEMENT D'UN PROJET
D'AVION OU D'HÉLICOPTÈRE
FOND
R'x/S [kg/m²/ms]
Kx [kg/m²/ms]
Ky [kg/m²/ms]
Plafond H (m)
Altitude h(m)
AVIONS
HELICOPTERES
q_p/Q
Q/S [kg/m²]
Q/P_m [kg/cm]
m+hc [kg/ch]
S(m²)
D(m)
m+nc [kg/ch]

Fig 98

qu'ils puissent tracer rapidement eux-mêmes, d'après leur expérience et pour le type d'avion qui les intéresse, le réseau (m + nc, S). L'abaque permet donc l'introduction par l'opérateur de deux relations expérimentales :

$$q = f(S) \quad \text{et} \quad K_x = f(K_y)$$

Le faisceau (q_u) et le réseau (m + nc, S) placés dans la partie droite du transparent et du fond, se rapportent aux hélicoptères. En effet, nous avons montré (v. notre ouvrage *les Hélicoptères*, Gauthier-Villars éditeurs, 1922) que l'étude des conditions de vol de ces appareils pouvait s'effectuer exactement comme pour les avions au moyen de *polaires d'hélices* qu'on trace sur le réseau (K_x, K_y) du fond.

Le mode d'emploi décrit ci-dessus s'applique au cas où l'on connaît la charge par ch et par m2 et on cherche à déterminer les vitesses et le plafond.

J'ai examiné dans mon travail d'autres problèmes et notamment ceux posés par les programmes du Service Technique de l'Aéronautique Française, pour les avions de guerre et de transport, et ceux qui se présentent aux constructeurs voulant battre les records de vitesse, de durée, de distance, etc.., etc...

2°. — Représentation de la solution adoptée.

Le problème posé étant résolu, il s'agit de représenter les performances en vol de l'avion adopté A cet effet nous avons établi un *transparent* spécial T_2 (fig 98″), dont l'emploi s'effectue de la façon suivante :

La position du transparent de l'abaque par rapport au fond correspondant à la solution adoptée, on fait glisser la droite OO du T_2 sur la droite CD du transparent de l'abaque, jusqu'à ce que la courbe h = o du T_2 coïncide avec la courbe R'_x S du transparent, R'_x/S étant donné par les conditions du problème.

On inscrira sur la courbe h = o du T_2, à l'intersection de celle-ci avec le faisceau (V) du transparent de l'abaque, les valeurs rondes de la vitesse On calquera sur T_2, la polaire du fond, ainsi que les échelles K_x, K_y

On possédera alors un graphique donnant les performances de l'avion à toutes les altitudes.

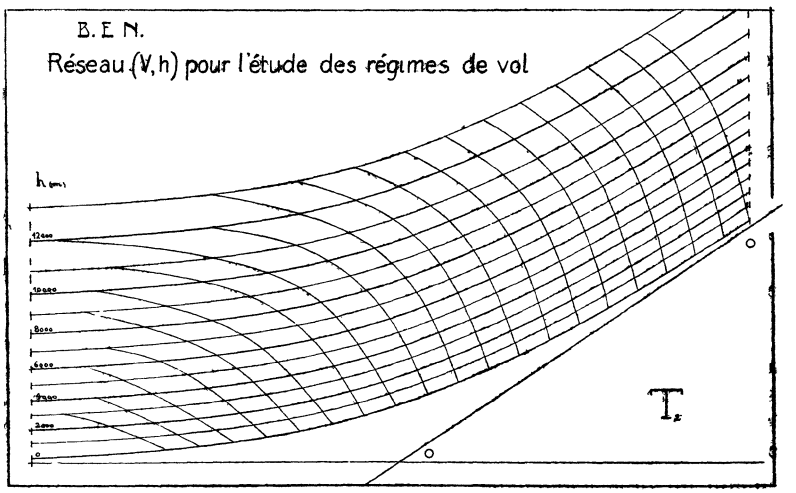


Fig. 98″. — *Tranparent pour la représentation des régimes de vol d'un avion.*

En effet, les *vitesses maxima en palier* à toutes les altitudes sont lues sur le réseau (h, V) à l'intersection de la polaire avec les courbes de ce réseau. Les vitesses en palier avec *admission réduite* à une incidence quelconque seront lues à l'intersection de la parallèle à l'échelle K_x, passant par le point envisagé de la polaire, avec le réseau (h, V). La hauteur du *plafond* est déterminée par la cote de la courbe (h), tangentant la polaire.

A titre d'exemple nous donnons sur la fig. 99 "*Etudes des régimes de vol*", une reproduction d'une telle représentation. On lit sur cette figure, que le plafond est de 7.700 m. et que les vitesses maxima sont de 180 km/h à 2 000 m et de 160 km/h à 6.000 m. La vitesse en palier au sol à l'incidence de — 3° est de 152 km/h.

Remarque. — J'avais déjà donné dans le *Résumé des principaux Travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire d'Auteuil* (p. 206) une représentation

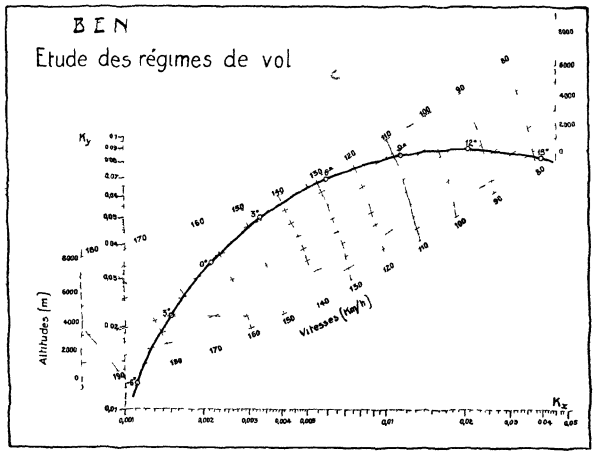


Fig. 99.

analogue des performances en vol des avions au moyen de mon *Abaque pour le choix et détermination des dimensions des surfaces d'un avion*, décrit ci-dessus, p 127.

Une application de cet abaque à la détermination des performances de l'avion *Fokker D VII*, établie en tenant compte de la variation de la puissance utile en fonction de la vitesse, a paru dans la *Review of Aeronautical Works* (N° 2/3, 1920, p. 23) et dans l'*Aéronautique* (Janvier 1921).

La méthode primitive exigeait chaque fois le tracé du faisceau (V), alors que ce faisceau est tracé une fois pour toutes sur le transparent T_2 de l'*Abaque général*.

3°. — Préparation d'un concours d'avions.

Quand on prépare un concours, il est utile de se rendre compte des solutions possibles en groupant dans une classe les avions du même type, répondant aux conditions posées, mais différant par certaines performances, qui guideront le constructeur dans son choix.

J'ai défini un *type d'avion* par les caractéristiques suivantes : relation entre la résistance nuisible unitaire et la surface : $(R'_x/S) = f(S)$; polaire de la voilure :

$K_x = f(K_y)$; relation entre le poids spécifique du planeur, la surface et le poids : $(q_p/Q) = f(S, Q)$; poids spécifique du moteur (c en kg/ch h).

Tous les avions du même *type* forment une *famille* qui comprend plusieurs *classes*, définies chacune par le plafond (H en m) et, soit par le nombre (n) d'heures de vol, soit par le rayon d'action (L en km).

L'emploi de mon abaque général permet de représenter les dimensions des avions, leurs performances en vol et les poids utiles emportés par un graphique (fig. 100) parlant bien à l'esprit et qui permettra au constructeur d'arrêter la solution définitive.

D'autre part l'examen de ce graphique m'a permis d'établir quelques consi

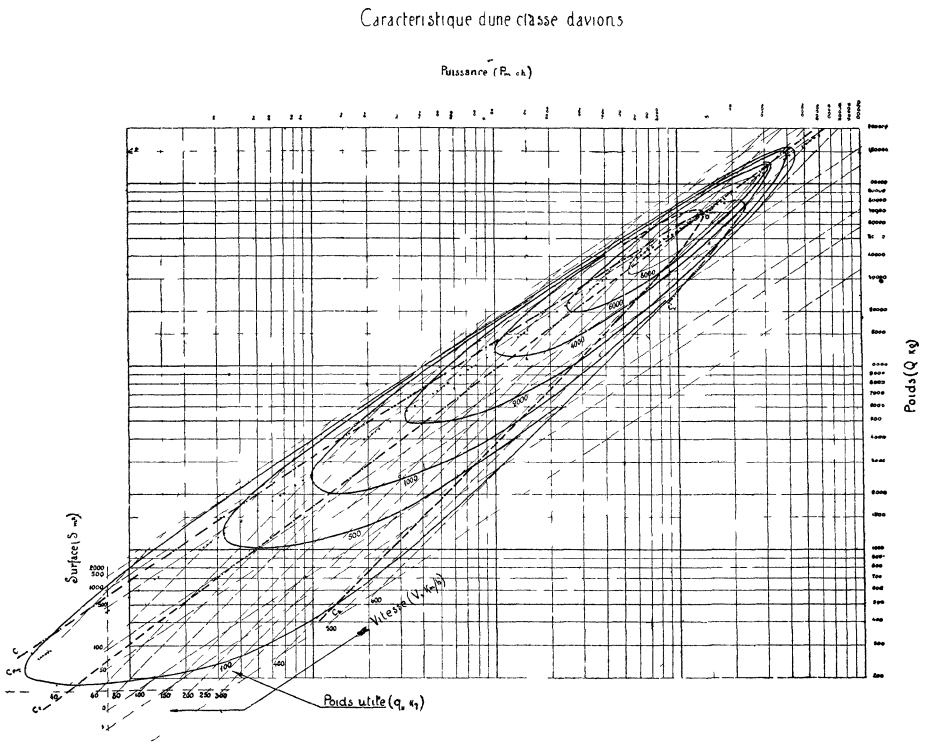


FIG. 100. — *Caractéristique d'une classe d'avions.*

Note. — L'abaque ci-dessus est constitué par l'entrecroisement de 4 faisceaux de droites : puissance, poids total, surface, vitesse maximum au sol et d'un faisceau de courbes : poids utile Au point a on lit : $P_m = 450$ ch, $Q = 11500$ kg, $S = 161$ m², $V = 200$ km/h et $q_u = 4000$ kg Les courbes C_{Pm}, C_Q, C_S, C_V représentent des *groupes* d'avions transportant le maximum de poids utile pour des valeurs données de P_m, Q, S ou V.

dérations générales sur la question encore très discutée de l'agrandissement des appareils.

Ainsi je montre, qu'il n'existe pas *une* méthode optima pour *agrandir* un avion, ainsi que le croit par exemple Rohrbach, mais qu'à chaque problème correspond une méthode particulière.

Aussi les relations entre les charges par m2 et par ch, qui fixent la méthode d'agrandissement des appareils, seront différentes suivant que l'on se donne le

poids, la puissance, la surface ou la vitesse avec la condition de réaliser la charge utile maximum.

§ 7. — Fonctionnement du groupe avion-moteur-hélice.

Les méthodes nomographiques exposées aux §§ 4, 5 et 6 permettent la détermination des performances d'un avion en partant plus particulièrement de la polaire de la voilure et des valeurs, supposées constantes, de la résistance nuisible et de la puissance utile.

Nous allons à présent exposer d'autres méthodes permettant l'étude complète du fonctionnement en vol de l'avion, de son moteur et de son hélice et basées sur la connaissance de la polaire de l'avion.

1°. — Développements de la méthode des polaires logarithmiques de Rith. La courbe des performances.

La courbe des performances permet une détermination rapide et simple des vitesses maximum de l'avion à toutes les altitudes ; elle met surtout en évidence l'influence de la variation de la puissance du moteur en fonction de l'altitude. J'ai exposé cette méthode dans le *Résumé des principaux travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire aérodynamique d'Auteuil* [§ 3. — *Application de la méthode des polaires logarithmiques à la détermination du vol à différentes altitudes et à celles du plafond* (pp. 98-110)].

Je vais donner ci-dessous le résumé d'une application de ce procédé que j'ai faite dans mon travail (1) *Remarks to « Study of the performances of an Airplane fitted with a supercharged engine » by A. Toussaint* (*L'Aéronautique, octobre* 1919).

M. Toussaint avait traité au moyen de l'abaque à points alignés d'*Alcan* et *Coroller* le problème suivant : déterminer les performances du Bréguet $14B_2$ (1.650 kg., 52 m2) avec différents moteurs suralimentés — d'après les performances du Bréguet $14A_2$ (1.520 kg. 48,7 m2) muni d'un moteur ordinaire. Dans mes remarques au sujet de son travail j'avais montré les avantages de l'utilisation de la méthode des polaires logarithmiques et de la notion de la *courbe des performances*.

La fig. 101 représente cette étude.

Tracé de la polaire de l'avion 14 B_2. — Chaque point de la polaire de l'avion A_2 se trouve à l'extrémité de la ligne brisée composée des segments : π (poids), ρT_0 (puissance utile au sol), 1 μ (rapport des densités), $\frac{t}{t_0}$ (rapport des températures absolues) et V (vitesse). Chacune de ces valeurs correspond aux performances de l'avion A_2 et aux caractéristiques de l'air à l'altitude considérée. Pour passer ensuite à l'avion B_2, il suffit de faire glisser la polaire parallèlement à l'échelle des surfaces d'une longueur égale au rapport $\frac{48,7}{52} = 0,935$.

On peut, par conséquent, tracer immédiatement la polaire de l'avion B_2 en intercalant entre les segments π et ρT_0 le segment représentant le rapport des surfaces.

Exemple. — La ligne brisée a b c d e f g représente le tracé pour l'altitude de 4000^m. Nous admettons que le rendement de l'hélice est de 0,7 jusqu'à 5000^m ; il est de 0,65 au plafond qui est de 6200^m.

On obtient ainsi la polaire PL de l'avion B_2 et la courbe oo que nous appellerons *courbe des performances* de l'avion, puisqu'elle relie directement la vitesse et la puis-

(1) *Review of Aeronautical Works*, n° 2-3, 1920.

sance réelle de l'avion à l'altitude. D'une façon générale cette courbe est tracée en portant, à partir du point extrême de la ligne brisée, composée des segments π, ρT_0 et éventuellement S, le segment $1\ \mu$ (parallèle à l'échelle des π) et le segment $\frac{\eta rc}{\mu}$ (parallèle à l'échelle des T) où :

ρ est la variation de la puissance motrice due à la variation du nombre de tours du moteur.

r est la variation du rendement de l'hélice.

c est le rapport de la puissance motrice effective à l'altitude considérée à la puissance motrice au sol, le nombre de tours étant le même dans les deux cas.

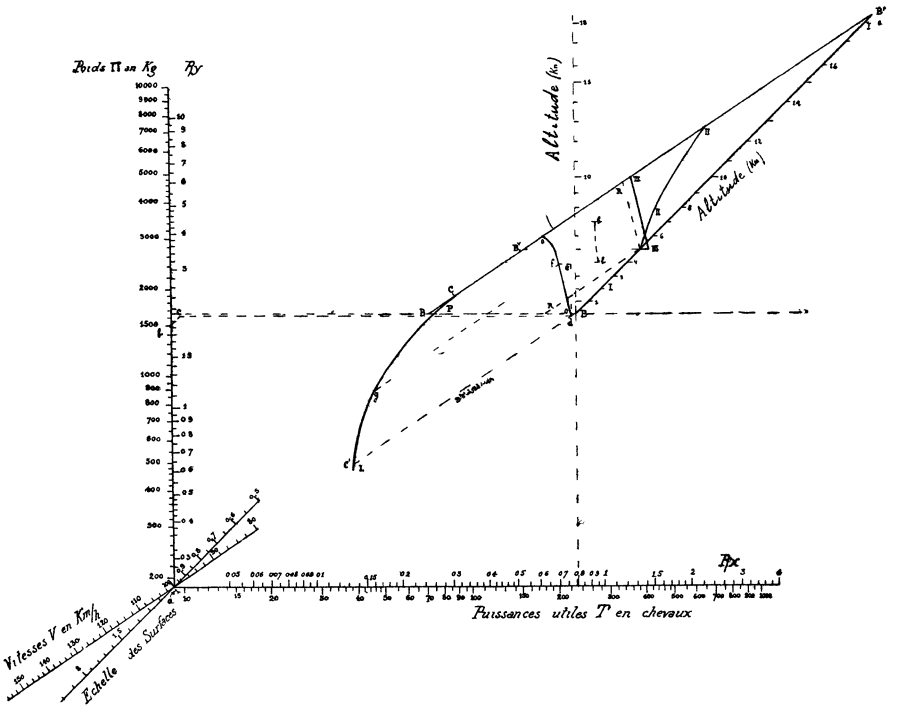


FIG. 101. — *Etude des régimes de vol d'un avion au moyer de la courbe des performances.*

Ainsi pour un moteur ordinaire, si l'on admet, comme l'a fait l'auteur, un rendement et un nombre de tours constants, le segment $\frac{\eta rc}{\mu} = \frac{t_0}{t}$.

Tracé des courbes des performances dans quatre cas différents.

Pour étudier le fonctionnement de l'avion B_2 dans les trois premiérs cas, il faut faire partir les courbes des performances du point B′ dont les coordonnées sont $\pi = 1450$ kg et $\rho\ T_0 = 0.77\ 300 = 231$ ch.

Premier cas la puissance est constante à toutes les altitudes.

La courbe des performances I sera une droite parallèle à l'échelle des surfaces.

Deuxième cas : la puissance est constante jusqu'à 5.000 m. puis le compresseur maintient une surpression constante.

La courbe des performances II, à partir de 5000^m, sera tracée en portant, à partir du point B' parallèlement à l'échelle des II, des segments égaux à $1/\mu$ et parallèlement à l'échelle des T les segments $\left(\frac{1-\mu'_5+\mu'}{\mu}\right)$; μ' et μ'_5 sont les rapports des pressions à l'altitude considérée et à 5000^m — à la pression de l'air au sol.

Troisième cas : A partir de 5.000 m. la puissance est le double de celle d'un moteur non suralimenté.

La courbe des performances III, à partir de 5000^m, est obtenue en portant à partir du point B' les segments $1/\mu$ et $\frac{2\mu'}{\mu}$.

Quatrième cas : le moteur est muni d'une hélice rigide calculée pour faire tourner le moteur à son régime normal à 5.000 m. ; le couple du moteur est constant jusqu'à 5.000 m. puis il diminue proportionnellement à la pression.

La courbe des performances R est une droite parallèle à l'échelle des vitesses jusqu'à 5000^m, puis les coordonnées de la courbe sont $1/\mu$ et $\frac{\mu'}{\mu'-\mu_5}$

Enfin j'ai indiqué sur la fig. 101 la courbe des performances bb de l'avion B_2 avec moteur suralimenté, d'après les essais en vol. On voit que le compresseur employé donnait des puissances inférieures à celles correspondant aux cas envisagés.

Faisons encore remarquer que les vitesses suivant la trajectoire en montée ne dépendent que de l'altitude et sont mesurées sur la droite BB^p, parallèle à l'échelle des vitesses et tangente à la polaire, par les segments B'_1, B''_1 ..., C, les ordonnées des points B'_1, B''_1 ..., par rapport à l'origine B' étant égales à $1/\mu$.

Ainsi pour 5000^m la vitesse en montée est $B_1{}^v C = 121$ km/h.

Quant aux puissances utiles, elles sont mesurées par les segments parallèles à l'échelle des puissances et limitées par la droite $B' B^p$ et la courbe des performances correspondant au cas considéré ; on porte ensuite ces segments sur l'échelle des puissances à gauche du point coté 231 ch.

2°. — Nouvelle méthode graphique ou nomographique d'étude des performances d'un avion. Influence du souffle de l'hélice.

Pour étudier le fonctionnement du groupe avion-moteur-hélice j'ai donné dans l'avant dernière publication du Laboratoire d'Auteuil (1) des procédés nouveaux, qui constituent le développement des méthodes des polaires logarithmiques des avions et des diagrammes logarithmiques des hélices de *Rith*, et qui consistent :

a) A superposer sur le fond des diagrammes logarithmiques d'hélices au réseau, représentant la caractéristique du moteur, un faisceau représentant le fonctionnement de l'hélice aux différentes altitudes et d'en déduire les caractéristiques du groupe motopropulseur à ces altitudes

b) A superposer sur le fond des polaires logarithmiques à la polaire de l'avion un réseau représentant le fonctionnement du groupe motopropulseur aux différentes altitudes.

Le fonctionnement du groupe avion-moteur-hélice peut être ainsi étudié d'une façon plus précise qu'au moyen de la courbe des performances basée sur des relations hypothétiques entre la puissance utile et l'altitude.

---

(1) « Résumé des principaux Travaux exécutés pendant la guerre... » *Nouveau type de procès-verbal d'essai d'un modèle d'avion*, p. 111.

Je me suis aperçu (1) depuis lors que ces méthodes pourraient être considérablement simplifiées en utilisant les caractéristiques du groupe motopropulseur non pas pour des valeurs constantes de l'*admission*, ainsi qu'on le fait habituellement, mais pour des valeurs constantes du *couple moteur*. D'ailleurs dans les limites de fonctionnement du moteur sur un avion, les deux caractéristiques diffèrent fort peu, surtout si l'on a soin de choisir les valeurs moyennes des couples correspondant aux différentes altitudes aux valeurs constantes de l'admission.

Enfin, il est très facile de faire les corrections nécessaires pour passer aux caractéristiques à admission constante.

Dans ces conditions, il suffit de déterminer la caractéristique du groupe motopropulseur au sol seulement, de la tracer sur le fond des polaires et, afin d'obtenir le faisceau des iso-altitudes, de la faire glisser parallèlement à l'axe des R_y d'une longueur représentant le rapport des couples moteurs au sol et à l'altitude considérée, les iso-vitesses s'obtiennent ensuite d'une façon très simple.

On supprime ainsi le calcul des caractéristiques du groupe motopropulseur aux différentes altitudes et le tracé de ces caractéristiques sur le fond des polaires, qui nécessitait un temps appréciable. Mais ce qui est surtout intéressant dans cette simplification, c'est qu'elle permet de rattacher le fonctionnement du groupe avion-moteur-hélice *au sol* à son fonctionnement aux différentes *altitudes* et de se rendre directement compte de l'influence de la loi de variation du couple moteur suivant l'altitude.

Par la suite, toujours dans le même but de simplification, j'ai établi une nouvelle méthode (2), qui supprime le calcul intermédiaire de la caractéristique du groupe motopropulseur au sol et permet de rattacher directement la polaire de l'avion au diagramme de l'hélice en les réunissant sur une même figure ; les différents régimes de vol d'un avion (changement d'altitude, du poids de l'avion, de l'admission des gaz au moteur, etc.) sont obtenus dans ces conditions par un simple glissement du diagramme de l'hélice, constituant en même temps la caractéristique du groupe motopropulseur, par rapport à la polaire de l'avion.

Comme exemple d'application, nous prendrons un biplan de 30 m2, pesant 1.250 kg. et muni d'un moteur de 320 CV à 1 800 t/m

La figure 102 comprend le tracé sur un fond des diagrammes logarithmiques des hélices de Rith :

a) du réseau nmpq (n, nombre de t/m. ou puissance et V, vitesse de l'avion), représentant la caractéristique du moteur ;

b) du faisceau obtenu en déplaçant le diagramme $P_m/n^3D^5 = f(V\ nD)$ de l'hélice (courbe β) parallèlement à l'échelle des P_m/n^3D^5 vers le haut d'une longueur $l = \frac{f(h)}{\delta\ \delta_0}$, mesurée sur cette échelle ; f(h) est la loi de variation du couple moteur en fonction de l'altitude (nous admettrons que f(h) est égale au rapport des pressions de l'air); $\delta\ \delta_0$ est le rapport des poids spécifiques.

La superposition du faisceau (altitudes) de l'hélice au réseau (n, V), du moteur détermine, par simple lecture, toutes les conditions du fonctionnement du groupe motopropulseur à pleine admission.

c) Si à partir de chaque point de la courbe β (fonctionnement au sol), on porte un segment l_1, mesurant sur l'échelle des rendements ρ le rendement de l'hélice indiqué en ce point, on obtient une courbe γ, qui représente dans le réseau (n ou P_m et V) du moteur, la caractéristique du groupe motopropulseur, c'est-à-dire la relation entre P — la puissance utile et la vitesse.

---

(1) *Review of Aeronautical Works*, 1919, nos 2-3, p. 42.
(2) *Review of Aeronautical Works*, 1919, nos 2-3, p. 50.

En faisant glisser la courbe γ, parallèlement à l'échelle (n) des nombres de tours, d'une longueur $l_2 = f(h)$, mesurée sur cette échelle, on obtient un faisceau (h).

On trace ensuite un faisceau (V, vitesse) en faisant coïncider le point O du graphique auxiliaire W avec différents points de la courbe γ, en orientant Oh parallèlement à l'échelle des n et en cherchant les intersections des droites h = 2.000, 4.000 avec les iso-h. correspondantes.

Les deux faisceaux forment un réseau représentant le fonctionnement du groupe motopropulseur en ce qui concerne les variations de la puissance utile en fonction de la vitesse et de l'altitude.

d) On trace (1) les axes R_x, P, et R_y, Q (le 1er est parallèle à l'échelle des n et les modules de ces axes sont les mêmes que ceux des échelles n et n') de façon à faire passer la droite (V = 100 km h) par le point Q = 1250 Kg (poids de l'avion) de l'axe R_y, P, la puissance utile en ce point de la droite (V) étant de 20 chevaux, valeur indiquée à l'origine de l'échelle des R_x, P.

Au moyen des valeurs des R_x, R_y données par l'essai du modèle on trace la polaire (en traits pleins) de l'avion.

La superposition de la polaire et du réseau (h, V) *permet la détermination de toutes les performances de l'avion.*

Les vitesses en palier à pleine admission aux différentes altitudes sont directement lues aux points d'intersection de la polaire avec le réseau ; on a ainsi :

Altitude	0	2.000	4.000	6.000	6.200 (plafond).
Vitesse	213	204	192	160	150 km./h.

Les vitesses en palier à admission réduite ou en montée pour une incidence donnée, sont lues aux intersections du même réseau avec la parallèle à l'axe des R_x, passant par le point donné de la polaire.

Ainsi à 5°, les vitesses, lues sur la droite CC'' seront de 132 km./h. au sol et de 160 km./h. à 4.000 mètres.

On trouver p. 65, de mon ouvrage *Les Hélicoptères* une application de la même méthode à l'étude des performances d'un hélicoptère, constitué par des hélices sustentatrices et propulsives.

J'ai enfin étudié dans la *Review of Aeronautical Works* (n° 10-11, p. 40), le vol en palier et en montée d'un avion muni d'un moteur suralimenté avec hélice à pales orientables, ou hélice à pales orientables de diamètre variable, ou encore avec hélices à pales orientables avec dispositif de changement de vitesse de rotation.

La fig. 102 représente une application de la même méthode à la détermination de l'influence du souffle de l'hélice. Voir mon travail : *Correction des résultats des essais d'un modèle d'avion, due au souffle de l'hélice.* (Premier Congrès International de la Navigation Aérienne, Paris 1921, tome I p. 18).

J'ai montré dans ce mémoire, que pour tenir compte du souffle de l'hélice en vol en palier, il suffisait de transformer la polaire donnée par l'essai du modèle en une autre polaire, que j'ai appelée *polaire-palier*. Pour le vol en montée, il faut considérer des *polaires-montée*, différant suivant l'admission des gaz au moteur et l'altitude du vol. C'est le premier travail dans lequel les performances des avions ont été déterminées en tenant compte du souffle de l'hélice.

---

(1) Au lieu de tracer pour chaque cas les axes R_x et R_y, ainsi que le réseau nmpq, on peut utiliser deux transparents, dont l'un portant les axes R_x, R_y viendrait se placer sur le transparent pour l'étude du fonctionnement des groupes moto- propulseurs décrit p. 106 (v. fig. 82'''). La méthode de graphique devient nomographique.

« Étude des régimes de vol d'un avion en tenant compte du souffle de l'hélice »

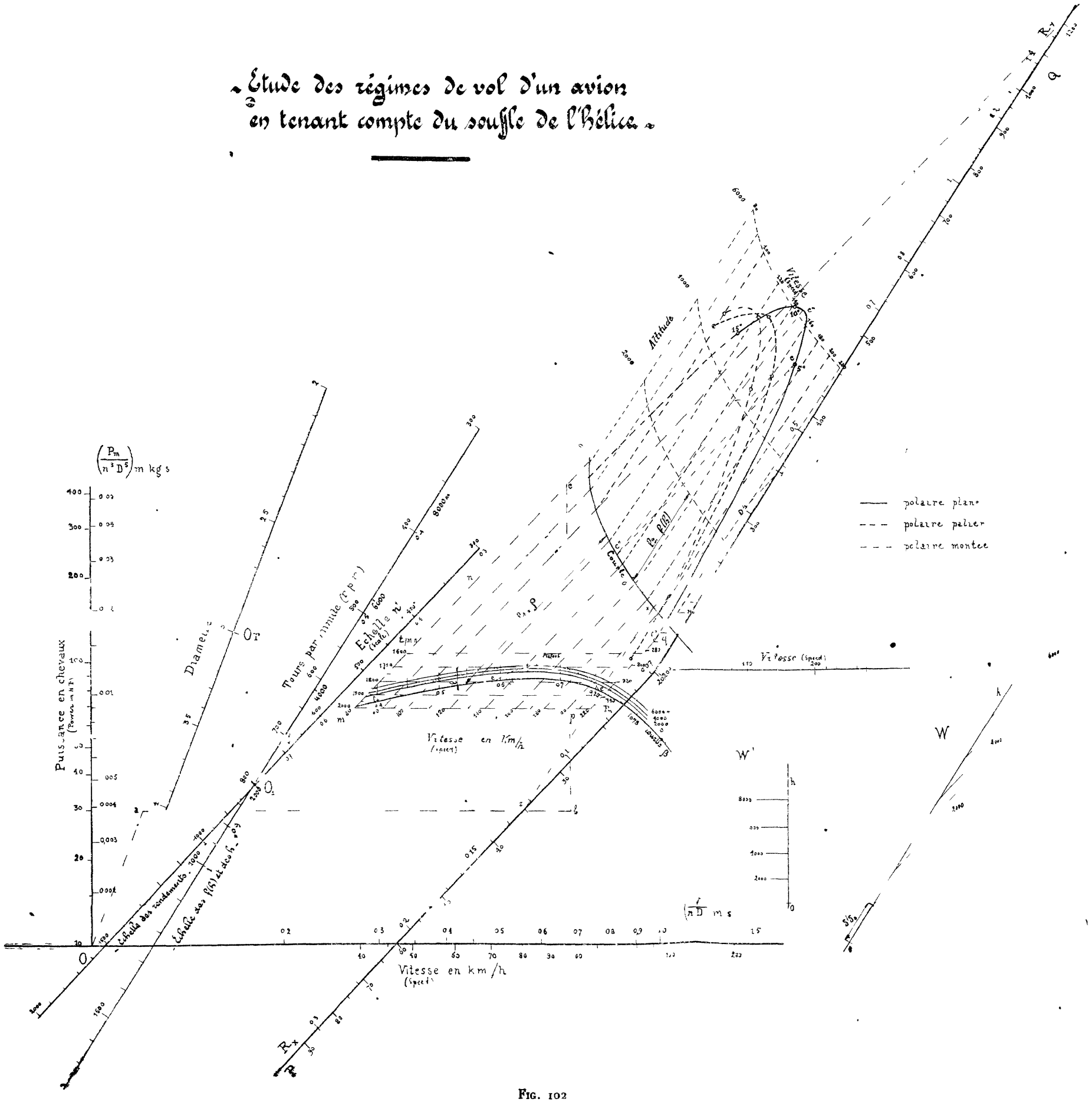


Fig. 102

§ 8. — Les polaires réduites.

1°. — Abaque pour la détermination des performances des avions type 1918. (Publié dans le *Résumé des Travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire d'Auteuil*, p. 150).

L'abaque (fig. 100) représente les performances en vol et les poids utiles d'une *classe* d'avions, c'est-à-dire d'appareils volant tous au même point de la polaire et emportant tous du combustible pour le même parcours.

Dans l'ouvrage cité ci-dessus, j'ai donné un abaque (fig. 103) représentant les performances en vol, non pas d'une classe ; mais d'une *famille* d'avions, c'est-à-dire d'appareils possédant tous la même *polaire réduite*, mais pouvant voler aux différents points de cette polaire, la question du poids du combustible et du poids utile étant laissée de côté.

C'est un abaque à entrecroisement comprenant le tracé dans le réseau de droites $\left(\frac{Q}{S}, \frac{P_m}{Q}, \text{charges par m}^2 \text{ et par ch.}\right)$ des faisceaux des vitesses et des plafonds.

Un troisième faisceau de droites (Δ) permet la détermination des vitesses à toutes les altitudes en tenant compte du fait que la puissance utile diminue plus rapidement que la densité de l'air. On a admis que le rendement de l'hélice à la vitesse maximum au sol était de 0,75.

Au point de vue nomographique, l'intérêt de cet abaque consiste dans la facilité de son tracé. Ainsi le faisceau (V) s'obtient en déplaçant parallèlement à elle même la polaire réduite du type considéré d'avions (la courbe V = 150 km./h. est graduée en K_v et K_v); les autres systèmes sont des faisceaux de droites parallèles.

Un second abaque à entrecroisement (fig 104) donne les valeurs des temps de montée à l'altitude d'utilisation (2.000 m. sous le plafond) en fonction de Q/S et Q/P_m.

Emploi de l'Abaque.

L'exemple qui sera traité ci-dessous, est relatif à l'avion Bréguet, type 14 A_2 : $Q = 1462$ kg, $S = 47{,}5^{m2}$, $P_m = 326^{ch}$, d'où $Q/S = 30{,}8$ kg m² et $Q/P_m = 4{,}49$ kg/ch.

1° *Vitesse maximum en palier au sol.* — On la lit sur le faisceau (V) au droit du point coté Q S et Q P_m. Ainsi au point b', V = 197 km/h.

2° *Plafond.* — La hauteur du plafond est lue sur le faisceau (H) au droit du point coté Q S et Q P_m. On lit au point b', $H = 6800^m$.

3° *Vitesse maximum en palier aux différentes altitudes.* — Elles sont lues sur le faisceau des (V) en suivant la droite Δ passant par le point coté Q S, Q P_m, jusqu'à son intersection avec la droite (H). H étant égal à la différence entre la hauteur du plafond et l'altitude donnée.

On lit sur la droite $b'b^v$ au point b'', $V_{2000} = 189$ km h.; en b^v, la vitesse au plafond = 145 km h.

4° *Vitesse en palier à admission réduite.* — Cette vitesse pour un point déterminé de la polaire et une altitude donnée sera lue sur le faisceau (V) au point d'intersection de la droite (H) passant par le point donné de la courbe (V = 150 km h) avec la droite (Q/S) tracée par le point de la droite Δ (passant par le point Q S, Q P_m) qui correspond à l'altitude donnée.

On lira ainsi la *vitesse minimum au sol* et la *vitesse minimum en montée au sol.* La première sera lue au point c_1; elle sera de 78 km h; la deuxième sera lue au point (c) d'intersection de la droite ($H = 0^m$), passant par le point de $K_v^{3/2} K_v$ maximum, avec la droite (Q S); elle est de 100 km/h.

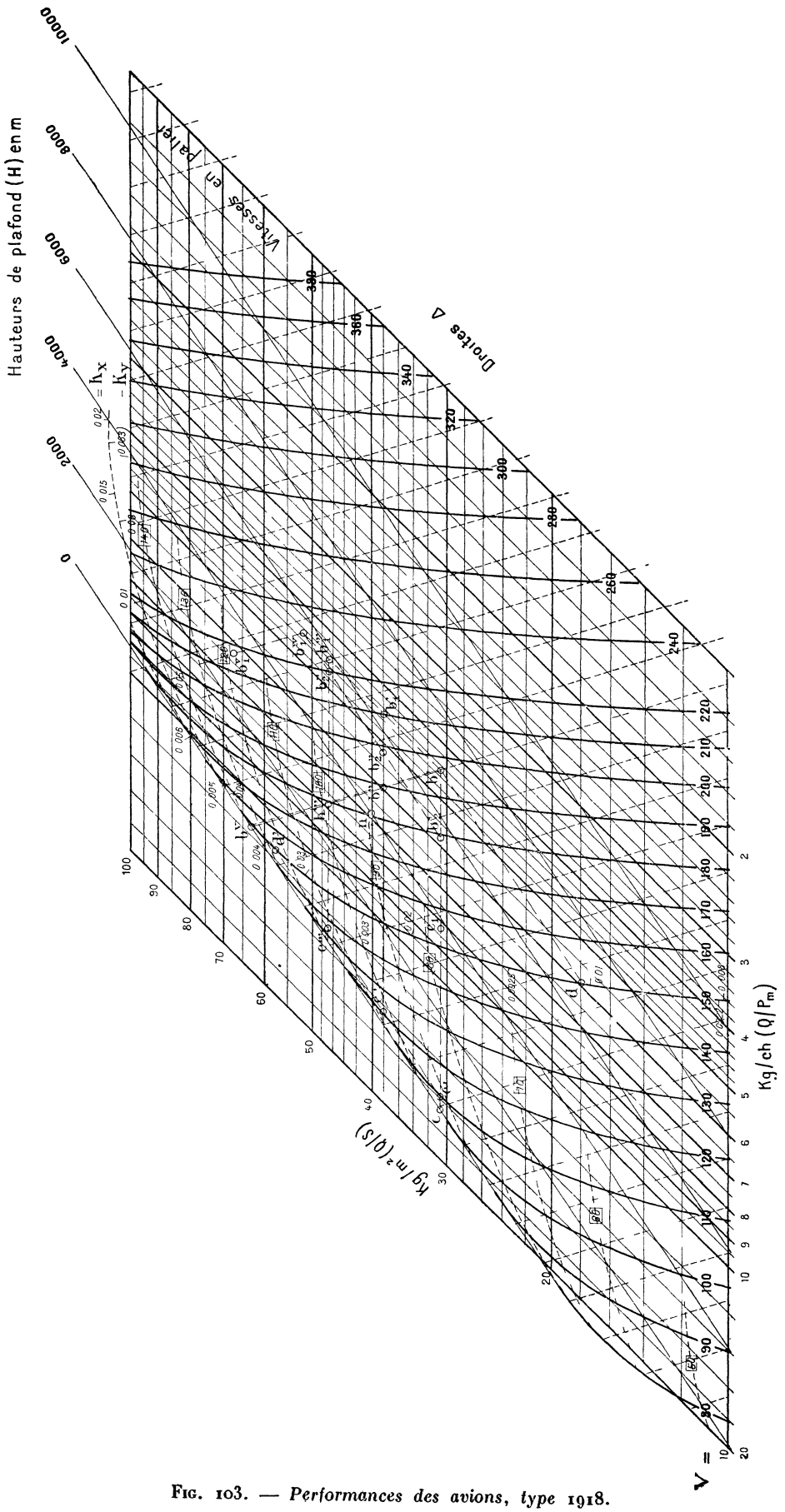


FIG. 103. — *Performances des avions, type 1918.*

5° *Puissance utile minimum nécessaire pour le vol en palier au sol.* — Cette puissance est déterminée en lisant la valeur de Q/P_m au point (c); elle est de 17 kg/ch, d'où P = 64,5 ch.

6° *Vitesses maximum en palier aux différentes altitudes d'un avion muni d'un moteur suralimenté.* — Dans le cas d'une *hélice à pales orientables*, assurant la constance de la puissance utile, les vitesses seront lues sur le faisceau (V) en suivant, à partir du point coté Q S, Q/P_m, une droite Δ' parallèle aux droites (Q P_m), jusqu'a l'intersection de cette droite avec la droite (Q/S) passant par le point de la droite Δ (tracée par le même point Q S, Q/P_m) correspondant à l'altitude envisagée. Ainsi en suivant la droite $b' b_1^{IV}$, on lira au point b_1'' que la vitesse à 2000m est de 210 km/h.

Dans le cas d'une *hélice rigide*, il faudra suivre la droite Δ'' parallèle aux droites (H).

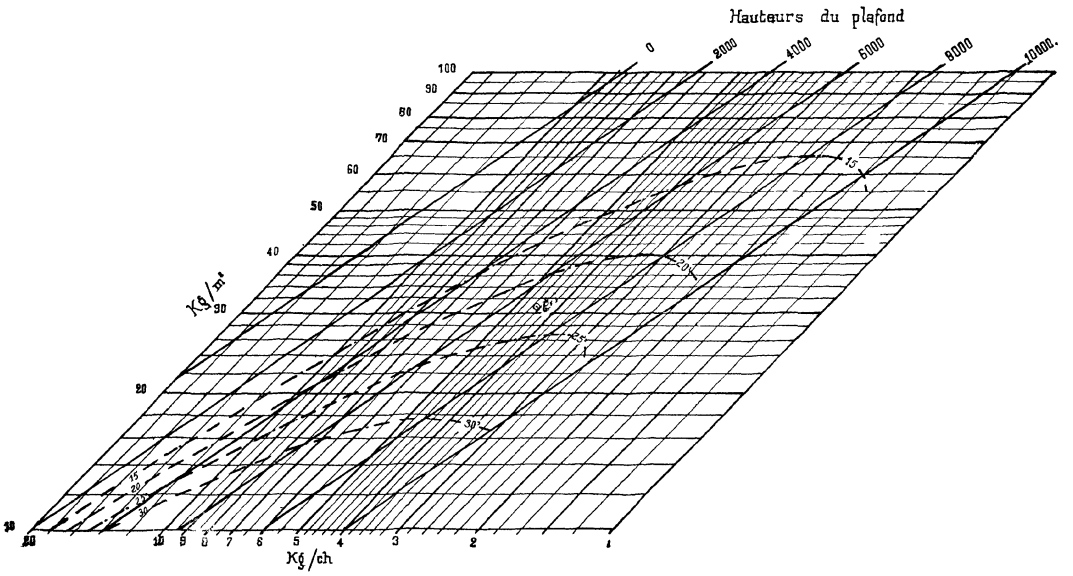


FIG 104. — *Temps de montée des avions, type 1918.*

Cette droite passera par le point coté Q/S, Q/P_m, où P_m est égale à la puissance normale du moteur, multipliée par la racine carrée du rapport des poids spécifiques de l'air à l'altitude h' (δ_h) et au sol (δ_0), h' étant l'altitude jusqu'à laquelle est assurée la constance du couple.

Pour h' = 5000 m, $\sqrt{\delta_h \ \delta_0} = 0,77$; le point b'_2 correspond à Q S = 30,8 kg/m² et Q P_m = 5,83 kg ch.

La droite $b'_2 b_1^{IV}$ permet de lire à 4000m (point b'''_2), V = 220 km h. A 5000m au point b_1^{IV}, la vitesse sera la même que dans le premier cas (hélices à pales orientables), c'est-à-dire de 232 km h. A partir de 5000m les vitesses seront déterminées d'après la la droite Δ, $b^{IV}_1 b^{V}_1$.

2°. — POLAIRES RÉDUITES, TYPE 1913 à 1929

Les notions de la *polaire réduite* et de la *polaire réduite type*, que j'ai introduites en 1916 au Laboratoire Eiffel (v. p. 140 du *Résumé des Travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire d'Auteuil*) permettent la comparaison des pro-

priétés aérodynamique des avions de la même époque et offrent la possibilité de caractériser et de comparer ces propriétrs entre les avions de différentes époques.

Nous avons réuni sur la fig. 105 les polaires réduites des avions de 1913, 1915, 1918 et 1920, ainsi que les polaires réduites de l'avion *Ryan* de la traversée de l'Atlantique 1927 et de l'avion *Fairey* des tentatives du record de distance effectuées en 1929. Trois autres points correspondent aux vitesses maximum réalisées depuis 1924 par les avions *Bernard*, *Macchi* et *Supermarine*. Ce diagramme résume d'une façon très simple les progrès considérables accomplis par l'aviation depuis 1913.

Note. — Les polaires réduites tracées sur la fig. 105 sont des *polaires-palier*,

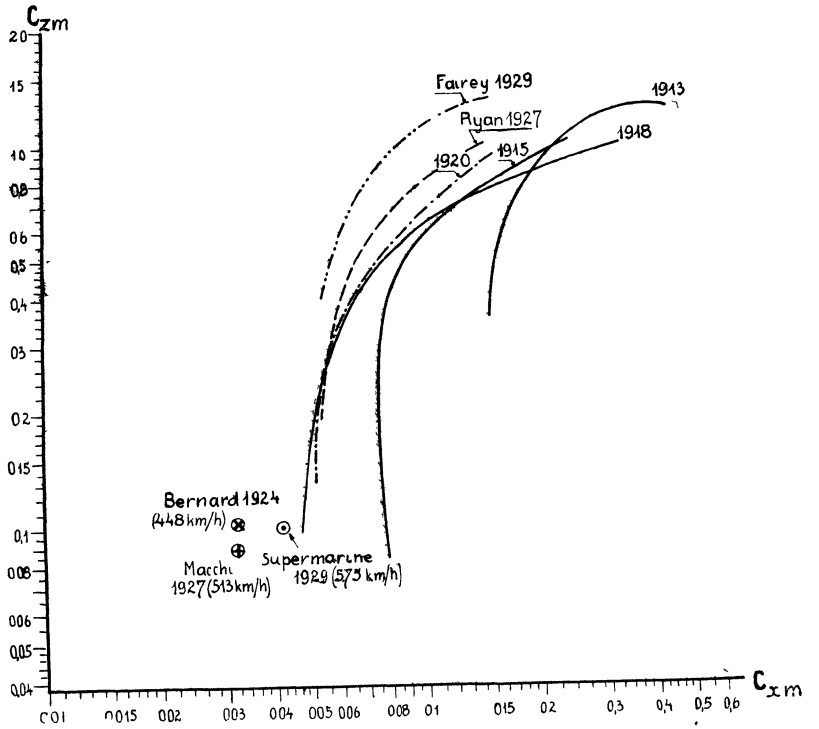


Fig. 105. — *Polaires réduites des avions de* 1913 *à* 1929.

appartenant à la classe des polaires des *puissances motrices ;* voici à ce sujet la p. 148.

§ 9. — Le vol oblique.

1°. — La méthode Joukowski-Margoulis.

Le principe de cette méthode de *Calcul par le trait*, que j'ai établie avec le professeur Joukowski, a été publié pour la première fois dans le *Cours d'Aéronautique* professé par le professeur Joukowski à l'Ecole supérieure technique de Moscou, en 1909-1910.

Une application à l'étude des régimes du vol de l'avion Blériot avec moteur fonctionnant à pleine admission, a paru dans les *Nouvelles recherches sur la résistance de l'air et l'aviation, effectuées au Laboratoire d'Auteuil*, Paris 1914, p. 81-83.

La fig 106 tirée de mon ouvrage *Les Helicopteres* (p 72), représente une autre application de cette methode a l'examen du vol de l'avion L E , dans laquelle j ai particulièrement etudie le vol avec moteur coupe entraine par l'helice fonctionnant en moulinet, et le vol avec moteur coupe et helice calee (1)

La methode Joukowski-Margoulis consiste a representer en partant de la polaire de l'avion ou preferablement de sa *polaire reduite* (polaire ramenee à l'unite de surface), et de la caracteristique du groupe motopropulseur, les conditions *dynamiques* du vol c est a dire les forces en grandeur et en direction agissant sur l avion et ses conditions *cinematiques* autrement dit les valeurs de la vitesse representees en grandeur et direction On arrive ainsi a un diagramme vectoriel tel que chaque regime de vol est figure par un triangle (Oab par exemple) dont les sommets sont le point fixe O origine des axes des coordonnees K_x, K_y, polaire reduite AB de l avion et une courbe, dite *courbe α* correspondant a la caracteristique du groupe motopropulseur

Les *cotes* de ce triangle sont

Oa — la resultante de l action de l air sur l avion ramenee a la vitesse de 1 m/sec

ab — la poussee divisee par le carre de la vitesse de l avion suivant la trajectoire $\left(\frac{F}{V^2}\right)$, elle fait avec l'axe des K_x, un angle egal à l'incidence i, indiquee au point b, plus l'angle de l'axe de l'hélice avec la corde de l'helice.

bO — le poids de l'avion divisé par le carre de la vitesse $\left(\frac{Q}{V^2}\right)$, ce vecteur fait avec l'axe des K_y de la polaire un angle egal a l'angle de la trajectoire avec l'horizontale.

Etant donne qu il est inversement proportionnel au carre de la vitesse, il *sert a mesurer celle ci*

Dans le cas du vol avec moteur *marchant à pleine admission*, la courbe CD represente le lieu geometrique des sommets b du triangle Oab Cette courbe permet la lecture immediate des valeurs correlatives de la vitesse de l'avion, de l angle de la trajectoire avec l horizontale et de l incidence de vol

La *vitesse* est lue a l intersection de la courbe CD avec le faisceau des circonferences tracees en traits pointilles et correspondant chacune a une valeur particulière de la vitesse Ainsi pour le point b, V = 1/12 kmh

L'angle α du vecteur Ob avec l'axe des K_y est egal a l angle de la trajectoire avec l horizontale *il faut donc considerer l axe des K_y comme horizontale.*

On lit cet angle sur l'echelle des α il est de 12° pour le point b de la courbe CD

Enfin, en suivant le vecteur ab parallèle a l'axe de l helice, on lit sur la polaire *l'angle d'attaque de l aile*, qui est de 3°

La courbe C'D' represente le *vol plané avec helice tournant en moulinet*, et la courbe C''D' correspond au *vol plane avec helice calee*

2° — ABAQUE POUR L'ETUDE DU VOL OBLIQUE DES AVIONS-HÉLICOPTÈRES (*Review of Aeronautical Works*, N° 3/4 1920 et *Les Hélicoptères* p 83)

Les avions helicopteres devraient pouvoir s'élever verticalement et stationner dans l espace Cette premiere condition conduit a de grosses complications constructives, telles que l orientation des helices et leur fixation en dehors de la cellule

---

(1) J'ai etabli cette etude en 1917 pour la Section technique de l'Aeronautique française, afin de montrer l'influence de la resistance de l'helice sur les vitesses en vol pique d'avions très fins, fait qu on ignorait alors.

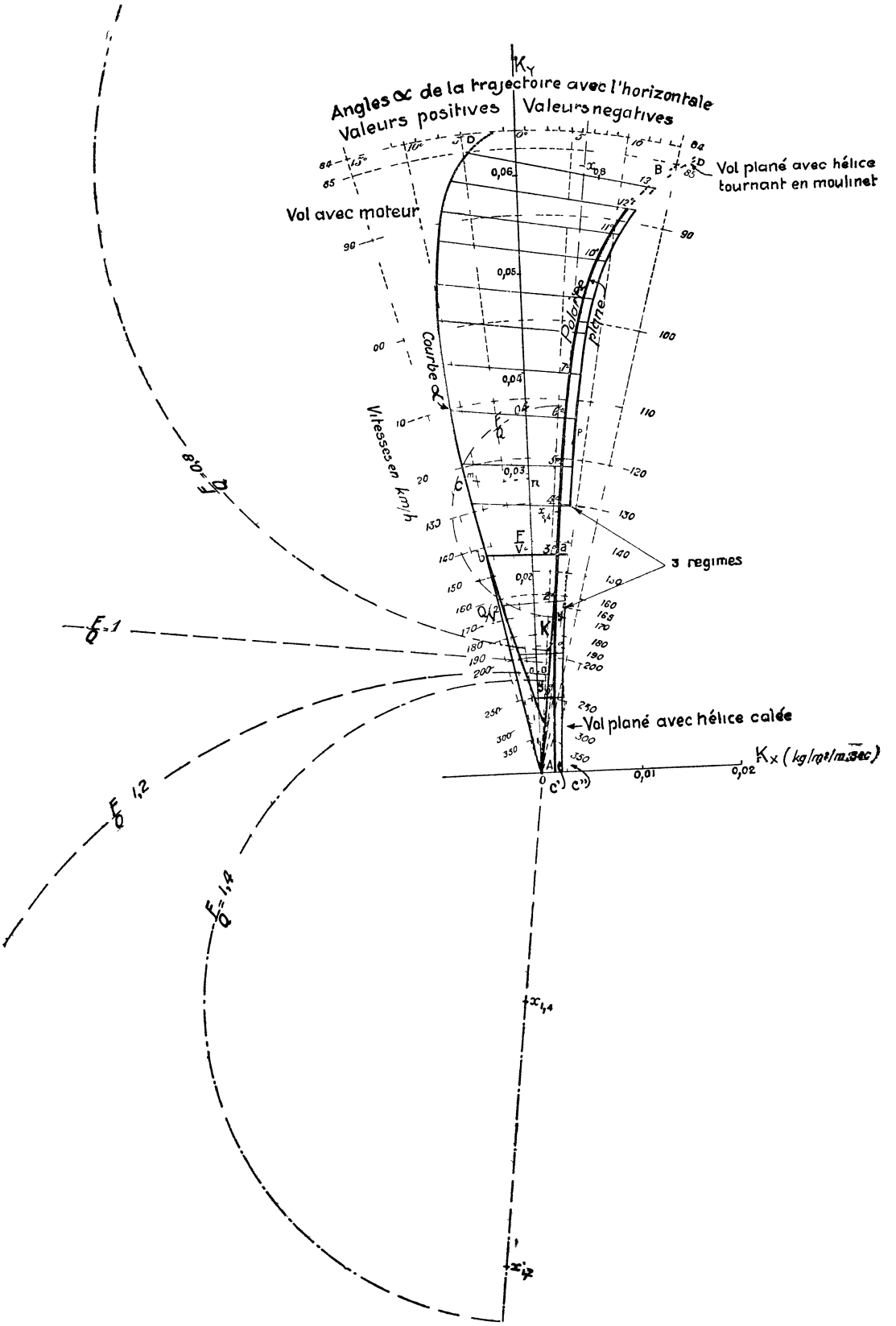


FIG 106. — *Etude du vol oblique de l'avion L. E.*

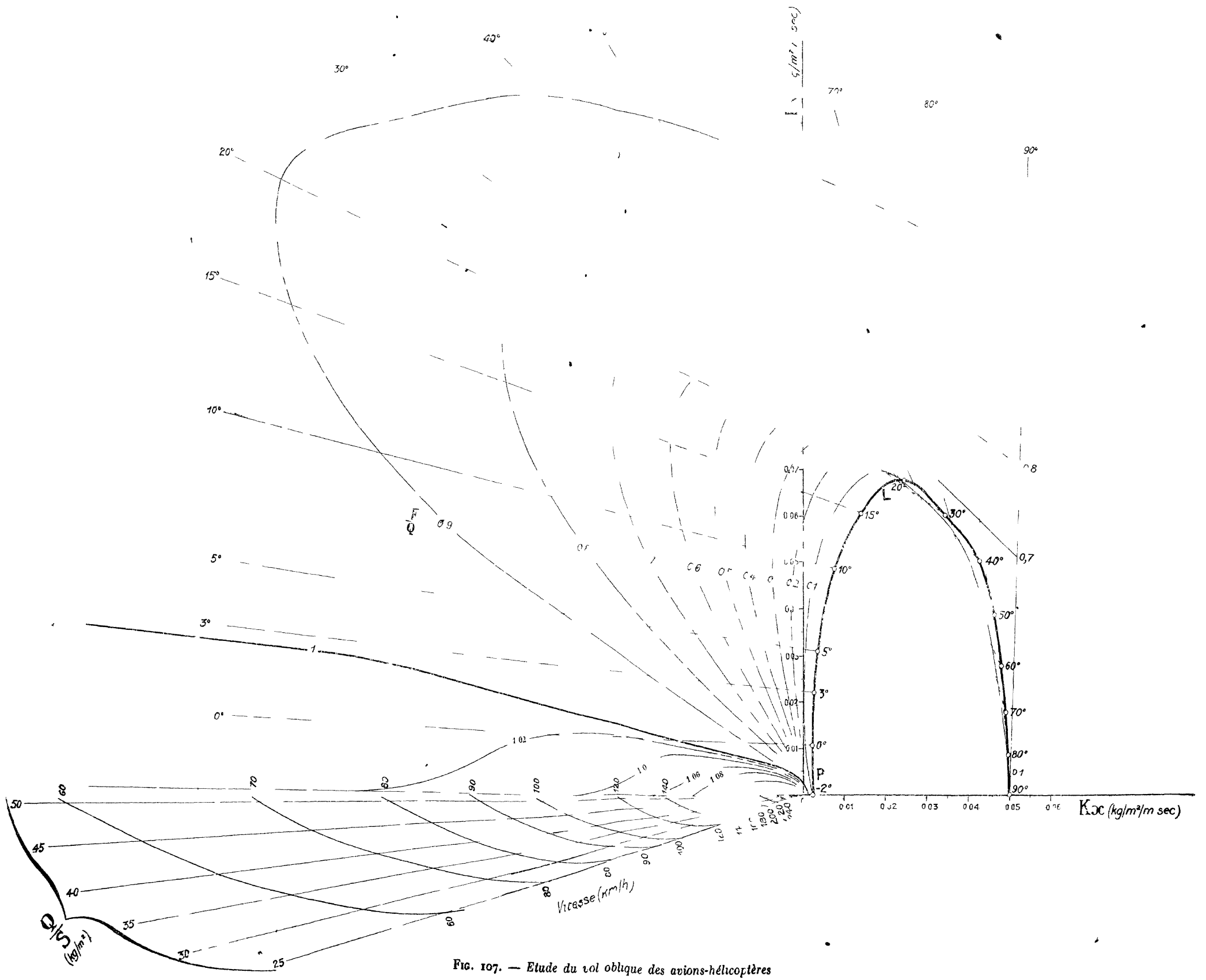


Fig. 107. — *Etude du vol oblique des avions-hélicoptères*

Mais si l'on ne se pose pas les conditions d'envole et d'atterrissage vertical, on peut réaliser en vol des trajectoires verticales avec un avion ordinaire à grand excédent de puissance.

Il s'agit donc de savoir quelles sont les trajectoires que peut réaliser un avion pour différentes valeurs de l'excédent de puissance ou plutôt pour différentes valeurs de $\frac{F}{Q}$ rapport de la poussée au poids.

L'abaque (fig. 107) que nous allons décrire, a été établi dans ce but. Il comprend la polaire réduite type 1920 P.L. tracée dans un système d'axes K_x, K_y.

Pour donner une idée de l'allure des phénomènes pour de très grands angles d'attaque, nous avons tracé la polaire pour $i = 2°$ à $90°$. Nous avons admis que l'angle de l'axe de l'hélice avec la corde de l'aile était de 2° et nous avons tracé, au moyen de la méthode Joukowski-Margoulis décrite ci-dessus, le faisceau $\left(\frac{F}{Q}\right)$ depuis $\frac{F}{Q} = 0,1$ jusqu'à $\frac{F}{Q} = 1,1$.

Pour la détermination du faisceau (V), constitué ainsi qu'on l'a vu, par des cercles concentriques, ayant l'origine O comme centre, nous avons accolé à l'axe K_x une échelle binaire $\left(\frac{Q}{S}, V\right)$, qui donne la valeur du rayon de la courbe (V) pour différentes valeurs de la charge par mètre carré. Ainsi pour tracer le faisceau (V) pour une charge par mètre carré donnée, on tracera des cercles, ayant le point O comme centre, et passant par les points $\left(\frac{Q}{S}, V\right)$ de l'échelle binaire.

L'examen du faisceau $\frac{F}{Q}$ montre pour $\frac{F}{Q} > 1$, l'existence des régimes A et H dont le premier est le régime habituel des avions et le second un *régime nouveau inconnu jusqu'à présent* et qui possède différentes particularités intéressantes, que j'ai indiquées en détail dans *les Hélicoptères*.

Remarque. — Cet abaque constitue le complément de l'abaque (fig. 103) pour la détermination des performances des avions type 1918, ce dernier s'appliquant surtout *au vol en palier*, alors que le nouvel abaque considère principalement *le vol oblique*.

3°. — NORMALISATION DES MODES GRAPHIQUES DE REPRÉSENTATION DES POLAIRES. LES QUATRE CLASSES DE POLAIRES D'UN AVION (1).

Ces polaires peuvent être représentées au moyen de *la méthode d'étude du vol oblique* décrite ci-dessus.

a) Si l'on place un modèle d'avion avec hélice tournante sur la balance, si l'on mesure pour chaque valeur de l'angle d'attaque et du coefficient de vitesse $V/\omega R$ de l'hélice l'effort parallèle F_x et normal F_z à la trajectoire et si l'on divise ces efforts par $0,5\rho SV^2$, on obtient des valeurs de C_x et C_z qui, portées dans le système d'axes (C_x, C_z) de la figure 108, donnent le faisceau [1] des POLAIRES DES PERFORMANCES. ρ est la densité, S la surface, V la vitesse, ω la vitesse angulaire et R le rayon de l'hélice.

Chaque vecteur réunissant l'origine O à un point quelconque de la polaire

(1) W. Margoulis. *Les coefficients caractéristiques des turbo-machines et des machines volantes* (Travaux du Cercle d'Etudes aérotechniques, publiés par le Centre de Documentation Aéronautique Internationale, fasc. I, 1928).

représente la grandeur $P/0{,}5\rho SV^2$, P étant le poids de l'avion, de sorte que l'angle ψ de ce vecteur avec l'axe C_z est égal à l'angle de la trajectoire avec l'horizontale. *Chaque polaire constitue, par conséquent, un diagramme vectoriel des performances de l'avion en vol,* tout vecteur Ob étant inversement proportionnel au carré de la vitesse et parallèle à sa direction, l'axe C_z étant considéré comme une horizontale.

Ces polaires peuvent être également déterminées par les essais en vol de l'avion, puisqu'il suffit de tracer, pour chaque valeur de i et V ωR, le vecteur $Ob = P/0{,}5\rho SV^2$, l'angle ψ étant déterminé par le rapport de la vitesse verticale à la vitesse suivant la trajectoire.

b) Supposons que nous ayons mesuré, au cours de nos essais (au moyen d'un moyeu dynamométrique, s'il s'agit d'essais en vol), la poussée F de l'hélice ;

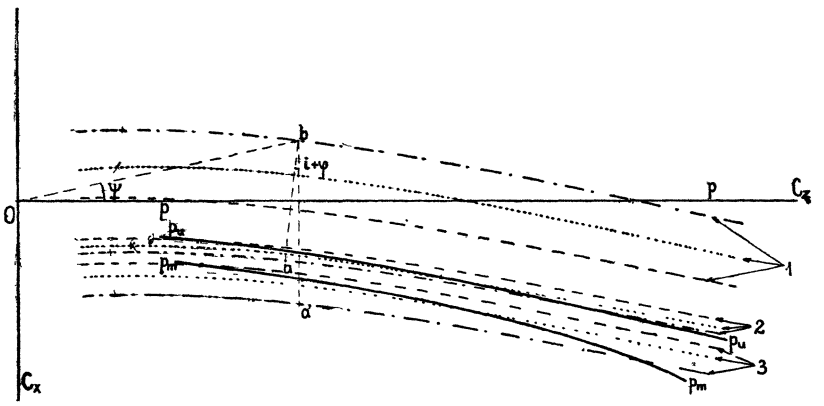


FIG. 108. — *Les quatre classes de polaires d'un avion.*

portons à partir de chaque point *b* un vecteur $ba = F/0{,}5\rho SV^2$ faisant avec l'axe C_x l'angle $(i+\varphi)$, φ étant l'angle de l'axe de l'hélice avec la corde de l'aile. Nous obtiendrons ainsi le faisceau [2] des POLAIRES DES PUISSANCES UTILES.

S'il n'y avait pas d'interaction entre l'hélice et le planeur, toutes les polaires de puissance utile se confondraient avec la polaire de la maquette essayée sans hélice ou avec la polaire de l'avion en vol plané corrigée de l'influence de l'hélice calée (1).

c) Portons à partir de chaque point b le vecteur ba′ parallèle à la trajectoire et égal à $\Pi_m\, 0{,}5\,\rho\, SV^3$, Π_m étant la puissance motrice ; nous obtiendrons un troisième faisceau de polaires [3], les POLAIRES DES PUISSANCES MOTRICES, dont les coordonnées seront :

$$C_{xm} = \frac{\Pi_m}{0{,}5\,\rho\, SV^3} - \frac{F_x}{0{,}5\,\rho\, SV^2}; \quad C_{zm} = \frac{F_z}{0{,}5\,\rho\, SV^2}.$$

Ces polaires peuvent être tracées d'après les essais en vol de l'avion sans moyeu dynamométrique et, d'une façon plus générale, d'après les essais en vol ou les essais au laboratoire de *n'importe quelle machine volante :* hélicoptère, autogyre, ornithoptère..., dont elles permettent la comparaison et l'appréciation (voir p. 111).

(1) Dans une communication, *Correction due au souffle de l'hélice des résultats des essais d'un modèle d'avion*, présentée au premier Congrès International de Navigation aérienne (Paris, 1921), j'ai indiqué une méthode qui permet de tracer les polaires des puissances utiles et déterminer ainsi les performances de l'avion, au moyen des résultats d'essais du modèle isolé (voir ci-dessus, p. 140).

Jusqu'à présent, nous n'avons pas fait intervenir le poids de l'avion, la caractéristique du moteur et la densité du fluide. Par conséquent, dans les limites, entre lesquelles les efforts sont proportionnels au carré de la vitesse, à la surface et à la densité (ce qui demande évidemment la rigidité de l'avion et de l'hélice), *les différentes polaires sont complètement indépendantes du poids de l'avion, de l'admission du moteur, du rapport de réduction entre le moteur et l'hélice et de l'altitude à laquelle on a procédé aux essais.*

Au lieu d'envisager, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici, les polaires correspondant à des valeurs constantes du coefficient de vitesse $V/\omega R$, on peut considérer les polaires correspondant à des angles constants de montée ou de descente, et tout particulièrement les POLAIRES-PALIER, correspondant au vol horizontal.

Elles sont indiquées sur la figure 108 par les courbes pp, $p_u p_u$ et $p_m p_m$.

d) Les coordonnées des *polaires des consommations sont :*

$$C_z' = \frac{F_z}{0{,}5\,\rho\,SV^2} \quad \text{et } C_c = \frac{C_1}{0{,}5\,\rho\,SV^3},$$

où C_1 est la consommation du moteur en kg/sec Voir à ce sujet le § suivant.

§ 10. — Rayon d'action et durée de vol des avions et des dirigeables. Les polaires des consommations.

(Travaux publiés dans la *Review of Aeronautical Works*, Nos 7-8, 1920 et dans *l'Air*, Nos 32, 36, 1921 et Nos 24, 27 1928).

1° — DESCRIPTION DE L'ABAQUE

L'abaque (fig. 109 et 109′) représente la relation :

$$\frac{c'l}{\eta} \cdot \frac{\Pi_u}{W} = \cos\varphi + \sqrt{\frac{V^2}{W^2} - \sin\varphi}$$

où c′ est la consommation spécifique du moteur, η — le rendement de l'hélice, l — le kilométrage spécifique, en kilomètres par kg de combustible, Π_u — la puissance utile, W — la vitesse du vent, V — la vitesse de l'avion, φ — l'angle du vent avec la direction de la route.

J'ai tracé sur le fond, qui est le fond habituel des polaires logarithmiques de *Rith*, deux polaires-palier d'un avion : la polaire (p_u p_u) des puissances utiles et la polaire (p_m p_m) des puissances motrices Les coordonnées de ces polaires sont :

$$R_x = \frac{F_x}{V^2} = \frac{\Pi_u}{V^3}, \quad R_z = \frac{F_z}{V^2}$$

pour la polaire des puissances utiles, et

$$R_{xm} = \frac{\Pi_m}{V^3}, \quad R_z = \frac{F_z}{V^2}$$

pour la polaire des puissances motrices.

D'après la propriété fondamentale des polaires logarithmiques, toute ligne brisée composée de 3 segments, correspondant aux valeurs de la puissance utile (ou motrice), du poids et de la vitesse, représente un régime de vol de l'avion.

Le segment *qr* parallèle à l'axe des abscisses et limité par les deux polaires, représente le rendement de l'hélice aux points *r*, *q*, *des polaires.*

J'introduirai à présent la notion des POLAIRES DES CONSOMMATIONS ; leurs coordonnées sont :

$$R_c = \frac{C}{V^3}, \quad R_z = \frac{F_z}{V^2}$$

où C est la consommation horaire du moteur (en kg./h.). Si la consommation spécifique (c' en kg./ch./h.) du moteur était constante, quel que soit le régime du moteur, chaque avion n'aurait qu'une seule polaire des consommations puisque : $R_c = C/V^3 = H_m c'/V^3$ Mais la consommation spécifique est variable. Il faudra donc envisager pour chaque avion un faisceau de polaires des consommations (p_c p_c) correspondant chacune à un poids déterminé de l'avion en vol.

Les polaires des consommations jouissent des mêmes propriétés que les polaires des puissances utiles et des puissances motrices : toute ligne brisée constituée par trois segments correspondant aux valeurs de la consommation horaire (mesurée sur l'échelle des H_u et H_m) du poids et de la vitesse représente un régime de l'avion. Ainsi la ligne brisée Omnp correspond à C = 100 kg/h ; P = 2.280 kgs et V = 226 km/h. ; les segments pq = 0,25 kg/ch./h. et qr = 0,75 représentent la consommation spécifique et le rendement.

Le tracé des polaires (p_m p_m) des puissances motrices et (p_c p_c) des consommations, d'après les essais de l'avion en vol, est excessivement simple.

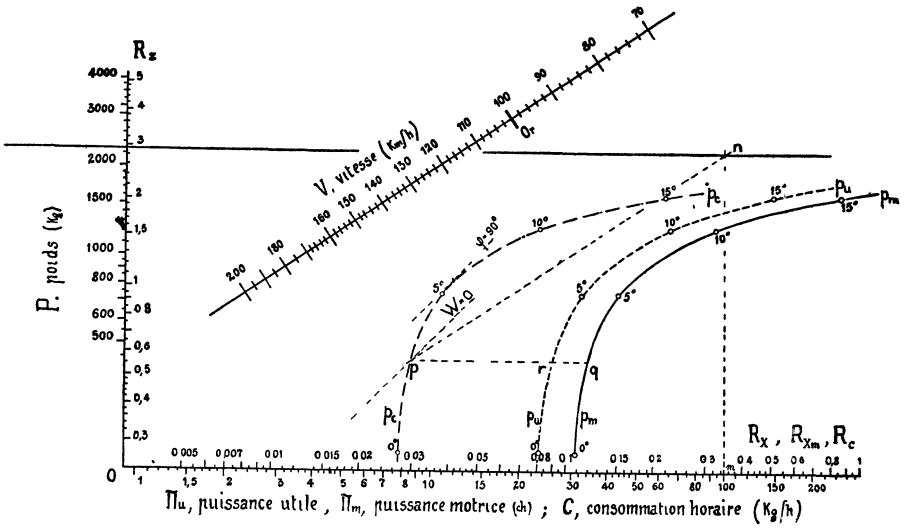
La puissance du moteur sera déterminée au banc d'essais en fonction du nombre de tours pour deux ou trois positions de la manette des gaz, ce qui facilitera la détermination de la partie supérieure de la polaire. On effectuera des vols en palier avec charge variable en notant les vitesses, les consommations horaires, les vitesses de rotation et la position des manettes. On aura alors tous les éléments pour le tracé des polaires des puissances motrices (qui doivent se confondre en une courbe unique) et des polaires des consommations correspondant aux différentes charges.

La connaissance de la polaire des puissances motrices n'est pas indispensable pour la détermination du rayon d'action : les polaires des consommations suffisent à cet effet ; on peut donc se borner à noter pendant les essais de consommation les vitesses de l'avion.

2°. — MODE D'EMPLOI DE L'ABAQUE. — On trace par le point (P) de l'échelle du poids du fond, correspondant à la valeur donnée (P) du poids de l'avion, une parallèle à l'axe des abscisses. On fait glisser le long de cette droite la droite (W) du réseau (W, l) du transparent, correspondant à la valeur donnée de la vitesse (W) du vent, jusqu'à ce que la courbe φ (angle du vent avec la direction du parcours) vienne à passer par le point considéré de la polaire des consommations correspondant au poids P.

On lira sur le réseau (W, l), au droit du point (P), la valeur de l, égale au *kilométrage spécifique*, c'est-à-dire à la longueur du parcours (en kms) par kilogr. de combustible ; l est également égale à l'inverse de C_{km}, *consommation kilométrique* (kg/km.).

Le problème pratiquement le plus important est celui de la détermination du régime optimum et du point correspondant de la polaire, assurant le parcours maximum avec une consommation minimum. Ce problème se résout très simplement : il suffit de faire glisser le transparent, les droites (P) et (W) étant toujours en coïncidence, jusqu'à ce que la courbe (φ) du transparent vienne tangenter la polaire des consommations ; le point de tangence indiquera l'incidence optima, on lira au droit du point (P) du fond, la valeur correspondante de l.



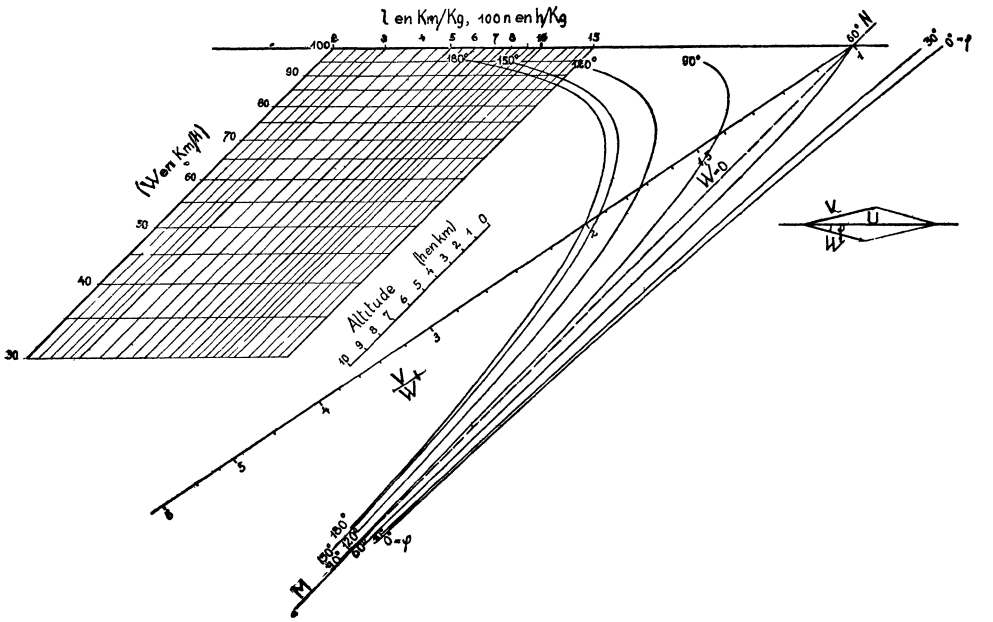


Fig. 109 et 109′. — *Rayon d'action et durée de vol des avions et dirigeables.*

Exemples. Déterminer le kilométrage spécifique par vent nul pour le point p de la polaire, ainsi que le kilométrage spécifique maximum par vent de 50 km./h., $\varphi = 90°$; le poids de l'avion est de 2.280 kgs.

Nous avons porté sur la fig. 109 les traces de la droite MN, correspondant à $W = 0$ et la courbe $\varphi = 90°$; dans le premier cas, on a lu sur le transparent $l = 2,37$ km/kg; dans le deuxième cas. l'angle optimun est d'environ 6° et $l = 3$ km/kg.

La valeur de la *durée* du parcours dépend de la consommation horaire C, ou de sa valeur inverse · le *temps spécifique* (n en h/kg). On peut déterminer la première en traçant le segment V jusqu'à son intersection avec la droite P = 2 280 kg. Ainsi, pour le point p, C = 100 kg/h, d'où n = 0,01 h/kg. On peut également lire la valeur de n au moyen du transparent en glissant l'échelle 100 n du transparent le long de la droite P du fond jusqu'à ce que l'échelle V/W du transparent passe par le point considéré de la polaire ; n est lu sur l'échelle 100 n du transparent au droit du point P de l'échelle des poids du fond. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, la valeur maximum de n est de 0,02 h/kg.

DÉTERMINATION DU RAYON D'ACTION ET DE LA DURÉE DU PARCOURS.

Avec des moteurs convenablement réglés, les consommations spécifiques ne varient pas sensiblement, de sorte qu'on pourra tracer une polaire moyenne des consommations. D'autre part, si le vent est nul ou si le vent est constant, le régime optimum ne variera pas (il faudra seulement gagner en altitude pour conserver à l avion sa vitesse propre). Dans ces conditions, on pourra calculer la *longueur du parcours* au moyen de la formule *Dorand-Quittner*, écrite sous la forme suivante ·

$$L_{(km)} = P.l.\ln \frac{1}{1 - p_c/P}, \qquad (1)$$

où p_c est le poids du combustible et l le kilométrage spécifique pour le poids P. Si le vent est nul (1) :

$$Pl = \frac{C_z}{1000\, C_c} = 270 \frac{R_z}{R_c} = f_c.$$

En d'autres termes, si le vent est nul : *la finesse de la polaire des consommations à l'incidence de vol est égale au nombre de kilomètres que pourrait parcourir l'avion (sans tenir compte du délestage) avec un poids de combustible égal à son poids total.*

La finesse maxima de la polaire des consommations, obtenue (pour un vent nul) en traçant une tangente inclinée à 45°, constitue un coefficient caractéristique important, au même titre que la finesse de la polaire des puissances utiles ou motrices.

Quand le vent n'est pas nul, Pl représent encore le parcours de l'avion consommant un poids de combustible P et peut être considéré comme une valeur *fictive* de la finesse.

La *durée* d'un parcours est indépendante de la vitesse du vent. Si le voyage

---

(1) Je rappelle que $C_z = \frac{F_z}{0,5\,\rho\, SV^2}$ et $C_c = \frac{C_1}{0,5\,\rho\, SV^2}$, où C_1 est la consommation du moteur en kg/sec.

est effectué à un angle d'attaque constant (c' restant sensiblement constant) le temps sera donné par la formule :

$$N_{(h)} = Pn \left[2 \sqrt{\frac{1}{1 - p_c P}} - 2 \right] = \frac{1}{3,6} \frac{C_z^{3/2}}{1000\, C_c} \sqrt{\frac{\rho}{2} \frac{S}{P}} \left[2 \sqrt{\frac{1}{1 - p_c/P}} - 2 \right],$$

où n est le temps spécifique pour le poids P au départ.

Pn est égal au nombre d'heures que pourrait voler l'avion (sans tenir compte du délestage), avec un poids de combustible égal à son poids total.

Pn est proportionnel au coefficient $C_z^{3/2}$ 1000 C_c de la polaire des consommations (analogue à la *qualité sustentatrice* $C_z^{3/2}/C_{xm}$ des polaires des puissances utiles ou motrices). La valeur maximum du coefficient $C_z^{3/2}$ / 1000 C_c, correspondant au point de tangence d'une droite parallèle à l'échelle V, caractérise l'aptitude de l'avion aux vols de longue durée.

En résumé, s'il s'agit de déterminer le rayon d'action ou le temps de vol dans les conditions de vol définies ci-dessus, il suffira de multiplier les valeurs du kilométrage et du temps spécifique par le poids de l'avion et par une fonction de p_c/P donnée ci-dessous :

p_c/P	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Rayon d'action	0,105	0,22	0,355	0,508	0,694	0,92	1,2
Temps de vol	0,105	0,24	0,394	0,58	0,83	1,16	1,65

3°. — Application de la méthode a l'avion Ryan de Lindbergh.

M. Hall, ingénieur en chef des avions Ryan, a publié (1) une étude très complète sur l'avion de la traversée New-York-Paris, étude qui nous donne tous les éléments nécessaires pour l'application de notre méthode.

Nous avons tracé sur la fig. 110 trois polaires des consommations correspondant au poids de 2.325 kgs de l'avion au départ (polaire g), au poids de 1.708 kgs (m) et au poids de 1.095 kgs (p). La polaire à droite est la polaire des puissances motrices.

On peut réaliser d'une façon très simple un diagramme permettant la lecture directe, au cours du voyage, de la vitesse de l'avion et du nombre de tours de l'hélice pour un point quelconque de la polaire et pour un poids donné de l'avion.

Il suffit de tracer à cet effet : 1° le faisceau (P) de droites horizontales passant par les cotes correspondantes de l'échelle des poids.

2° Le faisceau (V), en déplaçant la polaire des puissances motrices parallèlement à l'échelle des vitesses, le déplacement étant mesuré sur cette échelle à partir du point Or en sens inverse de la graduation.

3° Le faisceau des vitesses de rotation de l'hélice (en t/m) ; ce tracé a été effectué de la façon suivante. D'après les chiffres indiqués par M. Hall nous avons tracé dans le réseau (V,P) la courbe correspondant à 1.600 t/m. Si les valeurs de $V/\omega R$ pour chaque point de la polaire étaient constantes les courbes correspondant aux autres valeurs de la vitesse de rotation pourraient être tracées de la même façon que les courbes du faisceau (V), c'est-à-dire en déplaçant la courbe (1.600 t/m) parallèlement à l'échelle des vitesses. C'est ainsi que nous avons procédé sur la fig. 110.

Les conditions de l'impression nous ont obligé à réduire sensiblement les

(1) A. Hall : *Technical preparation of the airplane « Spirit of Saint-Louis »* (U. S. N. A. C. A., T. N., N° 257).

dimensions de la fig. 110. Mais on peut employer au bureau d'études, et même emporter en voyage, un abaque de plus grandes dimensions, donnant toute la précision voulue.

Exemples. 1°. — Déterminer le régime optimum pour un vent contraire de 60 km. h. ($\varphi = 180°$), l'avion pesant 1.095 kg.

En faisant coïncider la droite P = 1 095 kg. du fond avec la droite W = 60 km/h du transparent, on constate que la courbe $\varphi = 180°$ est tangente à la polaire (p) au point a ; l = 4,15 km /kg.

On lit au point a', V = 127 km /h., n = 1.280 t /m.

2°. — Déterminer le rayon d'action maximum par vent nul, pour $p_c/P = 1129/2324 = 0,528$.

Pour W = O et P = 2.324 kg on lit (au moyen de la polaire m) l max. = 3,96 km/kg,

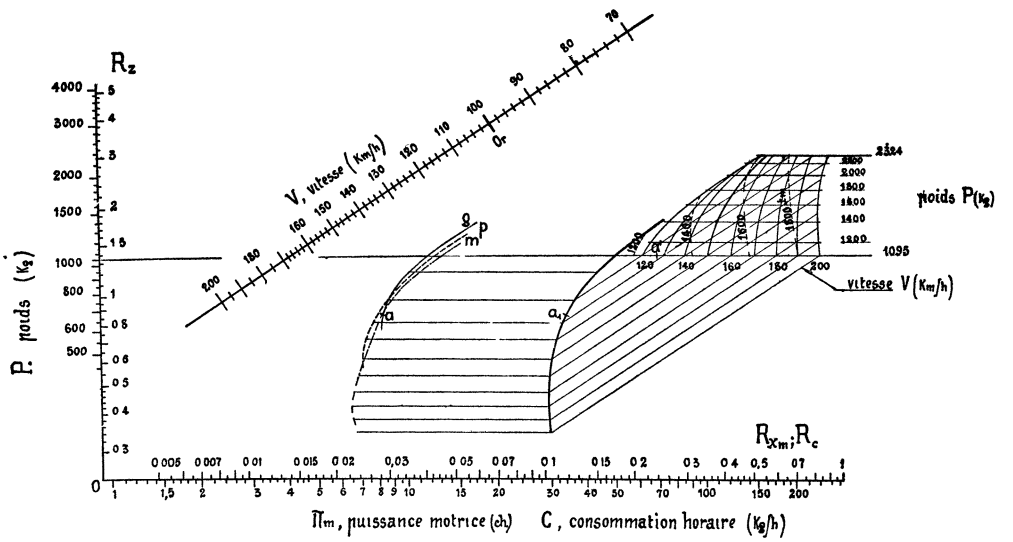


FIG. 110. — *Rayon d'action de l'avion Ryan.*

d'où, d'après la formule (1), $L = 3,96 \cdot 2,324 \ln \frac{1}{1 - p_c/P} = 9.200 \cdot 0,75 = 6.900$ km.

M. Hall indique 6 730 km ; on voit que la méthode approchée est très suffisamment exacte.

Le grand intérêt de l'abaque consiste dans *la possibilité de déterminer en cours de route le régime optimum, quelles que soient la direction et l'intensité du vent* alors que les méthodes graphiques proposées jusqu'à présent demandent dans chaque cas un tracé spécial.

D'autre part, on remplace par un diagramme *unique* l'ensemble des 5 graphiques, utilisés par M. Hall ; le tracé de ce diagramme demande peu de temps puisque, par exemple, les faisceaux V et n (nombre de tours-minutes) sont obtenus en déplacant deux courbes, dont la première est tout simplement la polaire.

Enfin, j'estime que le fait d'utiliser uniquement des polaires dans le tracé, permet de se rendre beaucoup mieux compte du sens mécanique des résultats des

essais, car on peut constater immédiatement une erreur d'expériences ou mettre en évidence un désaccord avec la loi du carré de la vitesse.

Remarque. — Dans tout ce qui précède, nous avons envisagé uniquement le vol au sol, car jusqu'à présent tous les records ont été effectués à faible altitude. Dans mon article de 1921, j'ai étudié en détail le vol à haute altitude ; je demanderais au lecteur que la question intéresse de s'y reporter. Je signalerai cependant ici, que le vol en altitude permet d'atteindre un kilométrage spécifique plus élevé, seulement s'il y a du vent et qu'il suffit à cet effet de faire glisser les polaires des consommations parallèlement à l'échelle des altitudes du transparent.

§ 11. — Stabilité longitudinale des avions.

1°. — J'avais imaginé en 1915 (voir *Résumé des pricipaux travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire Eiffel*, p. 123) une NOUVELLE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE POUR L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ LONGITUDINALE DES AVIONS. Cette représentation condensait en une seule figure les résultats d'essais de la maquette à la soufflerie, permettait une discussion rapide et facile de la stabilité longitudinale statique et supprimait les longs essais, que nécessitait la détermination des éléments de la résultante, dont la connaissance était indispensable pour le tracé du faisceau des résultantes, méthode employée jusqu'alors.

La fig. 111 montre les résultats d'essais d'un modèle au 1/10 de l'avion Hanriot.

La méthode consiste à tracer dans le plan vertical de symétrie de l'appareil les courbes des déplacements des centres de poussée pour différentes positions du gouvernail de profondeur. Les expériences, que j'ai effectuées au laboratoire Eiffel sur de très nombreux modèles d'avion, ont montré que les courbes ainsi obtenues *avaient toujours la même allure* et se composaient de deux branches correspondant respectivement aux portances positives et négatives. Quand la branche en portances positives indiquait la stabilité, celle correspondant aux portances négatives comprenait une zone instable et inversement. La position du centre de gravité par rapport à ces courbes permettait de voir immédiatement si l'avion était stable ou instable.

Ainsi, on voit sur la fig 111 que l'appareil en question serait stable, si le centre de gravité était placé à 4 cm. (soit 40 cm. pour l'avion) en arrière de la droite AB.

J'ai pu ainsi mettre en évidence plusieurs faits généralement ignorés à cette époque, et notamment l'indépendance de la stabilité statique du profil de l'aile, la possibilité de rendre stable tout avion rien que par le déplacement en avant du centre de gravité (1) et l'inutilité (au point de vue de la stabilité) du V longitudinal entre les cordes des ailes et la partie fixe de l'empennage horizontal.

2° — NOTE SUR L'ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA STABILITÉ STATIQUE ET DYNAMIQUE DES AVIONS. — Quand dans un problème technique on parvient à expliciter l'inconnue par une formule comprenant de nombreux termes, mais établie de façon à pouvoir suivre facilement l'influence des différentes variables, il peut être préférable de discuter la question analytiquement que par un abaque nécessitant de nombreuses opérations.

C'est la méthode que j'ai employée pour la discussion quantitative de la

---

(1) Pour montrer comment ces notions étaient peu connues, il me suffira de citer les paroles d'un directeur technique d'une grande maison d'avions qui me disait alors : « *mon avion est instable ; eh bien, je recule le centre de gravité* » ; en effet la partie fixe de son empennage étant mal réglée, son pilote lui avait dit : « *l'avion tend à piquer* ».

stabilité longitudinale statique et dynamique des avions dans mon article : *Les courbes de poussée et les portances maxima des ailes* (Aéronautique, n°s 49 et 50, 1923 (1).

Pour étudier ces questions j'ai employé pour les expressions du moment lon-

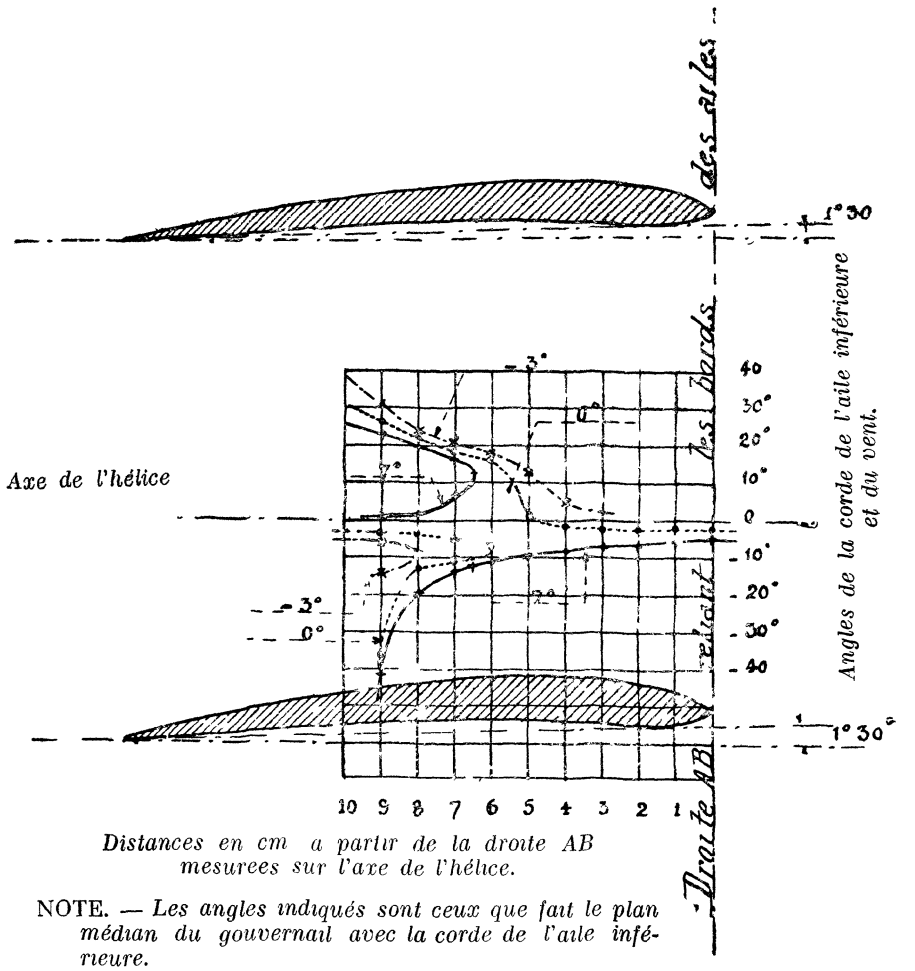


FIG. 111. — *Etude de la stabilité longitudinale statique des avions au moyen des courbes des centres de poussée.*

gitudinal (2), de la portance et de la déviation de l'air par les ailes et l'hélice des formules théoriques corrigées par des coefficients expérimentaux.

(1) Le manque de place m'avait forcé à être très concis et de ne donner dans mon article que les résultats, sans indiquer les démonstrations. Depuis cette lacune a été comblée par les travaux de MM. Toussaint et Bréguet qui ont largement développé ces démonstrations.

(2) J'ai montré dans mon travail que la formule théorique du moment donnée par le professeur Joukowski peut se simplifier considérablement et qu'elle est parfaitement confirmée par l'expérience. Ma formule, $C_m = 0{,}25\, C_z + m\gamma$, est actuellement universellement adoptée.

En effet, ainsi que je l'ai dit dans mon article, pour les angles pratiques de vol et tant qu'il n'y a pas de décollements, les formules théoriques sont aussi exactes que les résultats des essais aux faibles nombres de Reynolds d'un modèle au laboratoire. En dehors de ces angles : « le laboratoire n'est pas beaucoup plus avancé que la théorie dans la prévision des résultats en grandeur, car si la théorie est impuissante à prévoir le mode d'écoulement, le laboratoire est incapable de le réaliser ».

Je commence par montrer que pour les angles normaux de vol, la condition de stabilité statique et dynamique exige que la dérivée dC_m/dC_z, que j'ai appelée *coefficient de stabilité*, soit positive.

J'attire particulièrement l'attention sur la simplicité de cette condition, surtout en ce qui concerne la stabilité dynamique, et qui n'avait pas été signalée jusqu'à présent.

En effet la discussion de la stabilité dynamique par la méthode des petites perturbations a toujours conduit les auteurs à des conditions extrêmement compliquées qui ne permettaient pas de voir l'influence des différents facteurs (1). Or en me basant également sur cette méthode, mais en employant les formules, dont j'ai parlé plus haut, je suis arrivé à des résultats beaucoup plus simples et faciles à discuter.

Je montre ensuite la relation qui existe d'une part entre la stabilité avec équilibreur fixe et la variation de l'incidence de cet équilibreur et d'autre part entre la stabilité avec équilibreur libre et la variation de l'effort sur le manche

Je donne les formules qui permettent de calculer le coefficient de stabilité dynamique et les efforts sur le manche et je discute l'influence du profil sur leurs valeurs.

---

(1) Ainsi M. Hunsaker, un spécialiste de cette question, n'a pas craint d'affirmer qu'il était plus rapide de construire et de faire voler un avion, que d'effectuer les essais en soufflerie et les calculs de stabilité.

CHAPITRE III

Aviation *(Suite)*. — Questions diverses

§ 1. — Choix et appréciation des montants pour avions.

(Abaque établi en 1916, inédit)

Dans le mémoire accompagnant l'abaque (v. fig. 112 et 112'), j'ai montré que la résistance totale (1) à l'avancement d'un montant, exposé au vent et supportant un effort de compression déterminé, était :

$$R = \sqrt[4]{\frac{n}{\pi^2 E}} \cdot \frac{K}{\sqrt[4]{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^4}} \cdot V^2 \cdot L^{3/2} \sqrt[4]{F}$$

$$\frac{\Delta (R_x R_y)}{\sqrt[4]{\frac{\pi^2 E}{n}}} \cdot \frac{b}{\sqrt{c_1}} \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot L \cdot F.$$

Cette équation comprend :

1° Les variables caractérisant le *profil* : K, c_1, b_1, où K est le coefficient de résistance aérodynamique, b_1 et c_1 — les coefficients des formules $S = b_1 d^2$, $I = c_1 d^4$, S étant la surface de la section pleine de profil, I le moment d'inertie et d le diamètre du montant.

2° Les variables caractérisant la *matière* constituant le montant (Δ — poids spécifique et E — module d'elasticité), la façon de *fixer les extrémités* du montant (coefficient π^2 de la formule d'Euler), le coefficient de *sécurité* (n) et la *finesse* $R_x R_y$ de l'avion.

3° Les variables représentant l'*effort de compression* (F) et la *longueur* (L) du montant.

4° Les variables représentant l'évidement (x) du montant et la vitesse (V) de l'avion.

La légende inscrite sur l'abaque explique son mode d'emploi.

Cet abaque constitue un exemple d'une combinaison de méthodes de calcul par le trait et des méthodes nomographiques, permettant la solution d'une équation à 10 variables.

---

(1) C'est à ma connaissance pour la première fois que le choix d'un organe d'avion exposé au vent était effectué non seulement d'après sa résistance aérodynamique, mais en tenant compte de la résistance de la voilure nécessaire pour porter son poids.

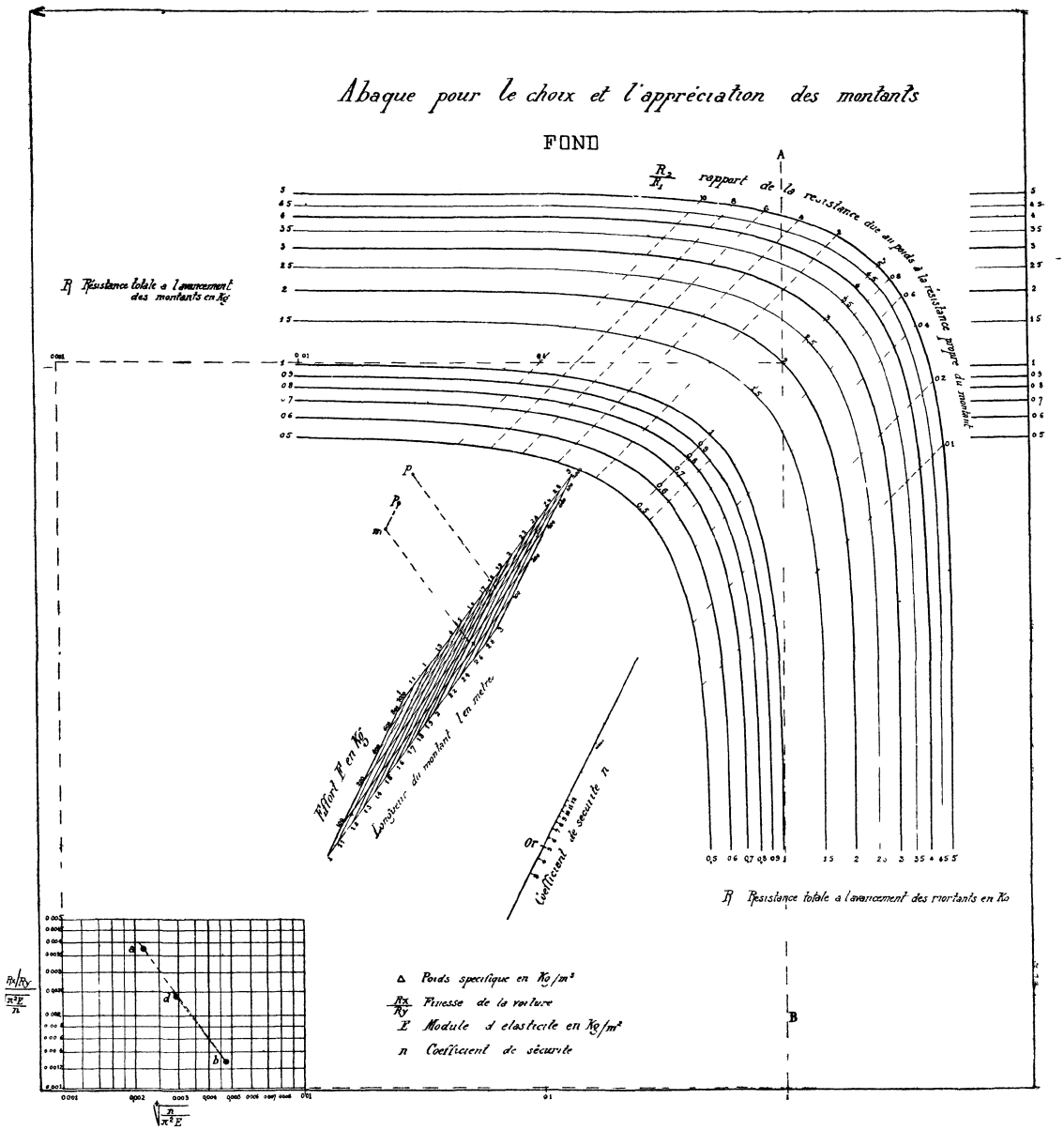


FIG. 112. — *Choix et appréciation des montants.*

Note. — La légende inscrite sur le transparent doit être complétée comme suit :

a) L'orientation du transparent est realise par le parallelisme des droites $K/\sqrt[4]{c_1}$ (et non par $b_1/\sqrt{c_1}$) à la droite AB.

b) Dans le reseau $(K/\sqrt[4]{c_1}, b_1/\sqrt{c_1})$ chaque montant est designe par deux points : le point $(K/\sqrt[4]{c_1}, b_1/\sqrt{c_1})$ et le point $(0{,}1/\sqrt[4]{c_1}, b_1/\sqrt{c_1})$. Ce dernier point (appele point a l'encre rouge dans la legende) est généralement situe à droite du premier point.

c) Le poids du montant (en Kg/10) est lu à l'intersection de la droite $b_1/\sqrt{c_1}$ avec l'échelle verticale placee à droite du fond.

d) Dans l'exemple de la légende, la vitesse est de 40 m/s.

§ 2. — Radiateurs pour avions.

J'ai établi cet abaque en 1916 pour la Section Technique de l'Aéronautique Française, qui commençait en ce moment ses essais de radiateurs au laboratoire d'Auteuil.

Soient :

Q — la quantité de chaleur évacuée par 1″ par le radiateur.

t_i et θ_e — les températures d'entrée de l'eau et de l'air dans le radiateur.

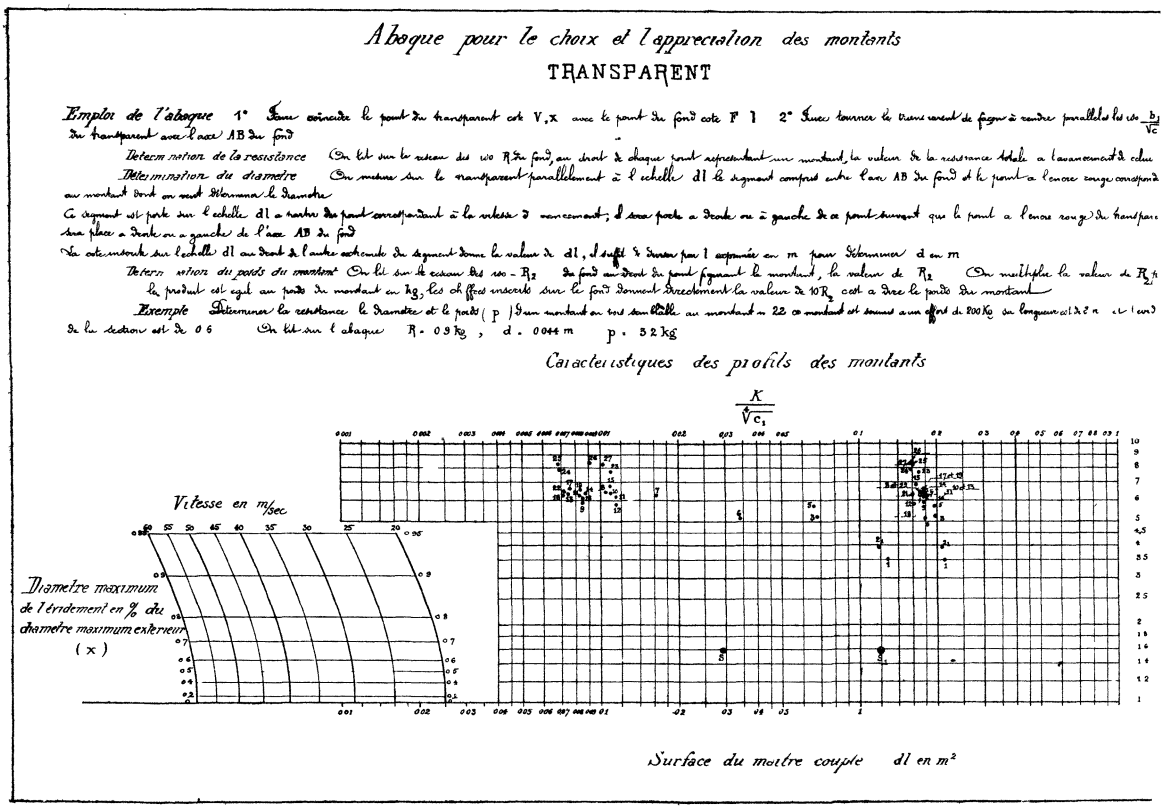


FIG. 112′.

α — le rapport de la surface radiante à la surface du maître couple du radiateur.

K — le coefficient de transmission de chaleur de l'eau à l'air.

β — le rapport de la section de passage de l'air à la section du maître couple du radiateur.

m — le coefficient de contraction.

c — la chaleur spécifique de l'air

S — la surface du maître couple du radiateur (m^2)

V — la vitesse de translation du radiateur (m/s).

D — le débit d'eau (kg/1″).

J'ai montré dans mon étude que la relation entre ces différentes variables s'exprimait par la relation :

$$Q = \frac{t_e - \theta_e}{\frac{1}{\alpha KS} + \frac{1}{2\beta mcSV} - \frac{1}{2D}} = \frac{t_e - \theta_e}{\frac{Z}{S} + \frac{1}{2D}},$$

où Z est une valeur qui pour chaque type de radiateur ne dépend que de la vitesse.

J'ai appelé, *caractéristique* d'un radiateur, la courbe Z = f (V).

L'abaque, à transparent orienté, représentant l'équation ci-dessus, est constitué par :

un *fond* (fig 113), portant l'échelle ($t_e - \theta_e$), le faisceau (Z) et un réseau (Z. V) dans lequel on trace les caractéristiques des radiateurs examinés ;

un *transparent* (fig. 113′), portant l'échelle (Q), le réseau (S, D) et le faisceau ($t_e - t_s$, différences des t° de l'eau à l'entrée et à la sortie du radiateur).

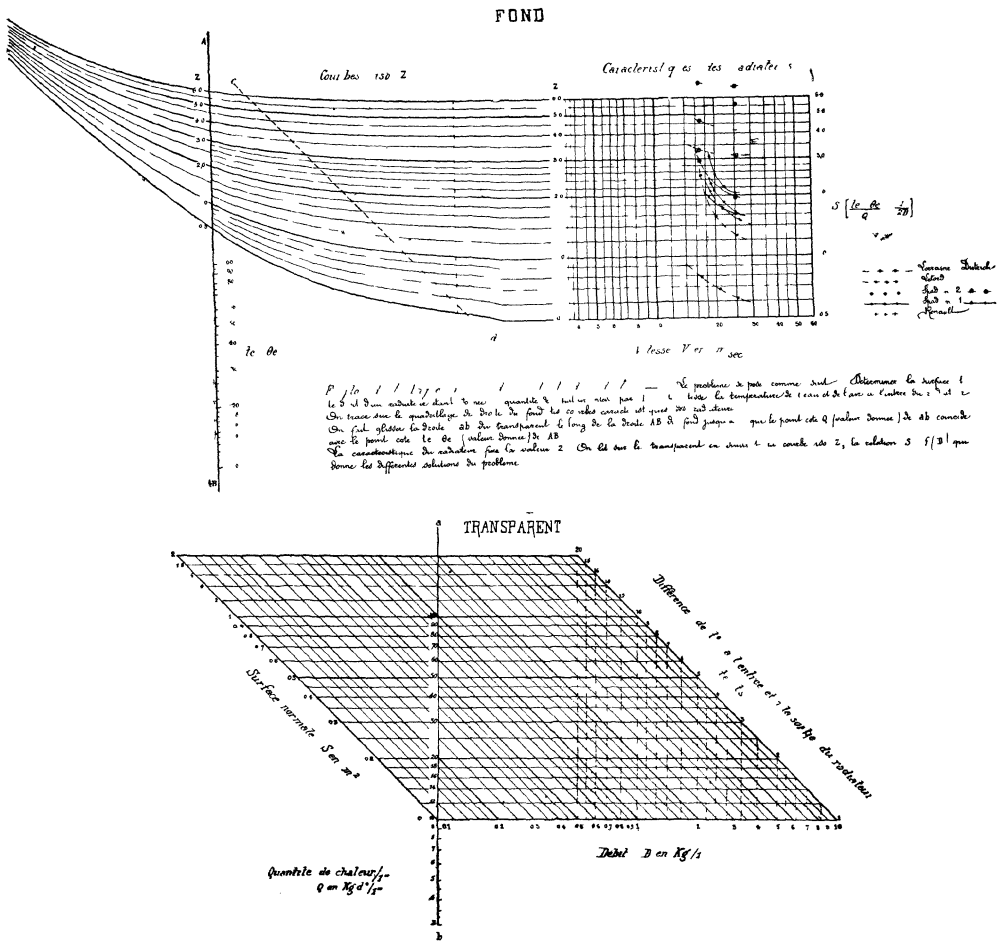


FIG. 113 et 113′.

Mode d'emploi. — On donne les valeurs de Q (quantité de chaleur en cal 1″, égale à 0,1 à 0,13 cal par cheval), de $(t_e - \theta_e)$, de $(t_e - t_s)$ et de V Il faut déterminer les valeurs de la surface du maître couple et du débit pour les différents radiateurs dont les caractéristiques sont tracées sur le fond de l'abaque.

A cet effet on fait coïncider les échelles ab et AB du transparent et de l'abaque, ainsi que les points (Q) et $(t_e - \theta_e)$ de ces échelles. On lit sur le transparent les valeurs de S et D à l'intersection de la droite $(t_e - t_s)$ du transparent avec la courbe (Z) du fond, la valeur de Z étant lue sur le réseau (Z, V) du fond, à l'intersection de la caractéristique avec la droite (V).

Note I. — J'avais fait remarquer dans mon étude que les valeurs de 1/2D étaient généralement très faibles en comparaison des valeurs de Z/S, de sorte que pour les débits usuels on pouvait négliger les premières et admettre l'indépendance de la quantité de chaleur radiee du débit. L'allure des courbes Z, asymptotiques aux droites (S) montre bien ce fait. Aussi ai-je tracé sur le fond la droite cd, à droite de laquelle une augmentation infinie du débit ne diminue pas la surface de plus de 10 %. L'expérience a confirmé cette prévision.

J'avais également fait remarquer que d'après des essais antérieurs la relation entre Z et la vitesse pouvait s'exprimer par la relation $1\ Z = a + bV$, ou $a + b\sqrt{V}$.

Note II. — Dans leur « Etude Expérimentale sur les radiateurs d'avions » (Bulletin de la S. T. Aé., 1918) MM. Hirchauer et Tayssier représentent les résultats de leurs nombreux essais au laboratoire d'Auteuil par des graphiques donnant en fonction de la vitesse les valeurs de la quantité (q) de chaleur radiée par minute, par dm2 de maître couple et pour une différence de 65° entre la t° moyenne de l'eau (1) et la t° de l'air. Il est facile de voir que :

$$q = \frac{39}{Z} \cdot \frac{(t_e - \theta_e)}{\left(\frac{t_e + t_s}{2} - \theta_e\right)} = \frac{39}{Z} \cdot$$

Les auteurs admettent d'après leurs essais que q = a + bV, fait que les résultats des premiers essais figurés sur le fond ne permettaient pas de prévoir.

§ 3. — Souffleries aérodynamiques.

L'abaque (fig. 114) a été publié dans le « Résumé des principaux travaux exécutés pendant la guerre au Laboratoire Eiffel » ; l'abaque (fig. 115) est inédit ; l'abaque (fig. 116) a paru dans l'*Aérophile* de janvier 1921.

Les 3 abaques que j'ai tracés pour l'étude des souffleries, montrent comment de simples abaques à entrecroisement peuvent représenter clairement des formules assez compliquées et même peuvent à ce point de vue être préférables à des abaques nomographiquement plus intéressants.

---

(1) On ne s'explique pas pourquoi les auteurs considèrent la t° moyenne de l'eau, qui n'est pas une variable indépendante, mais qui est fixée par la t° d'entrée de l'eau et la différence des t° de l'eau à l'entrée et à la sortie du radiateur.

Rigoureusement, il faudrait introduire la différence logarithmique des t° moyennes, ainsi que nous l'avons fait dans notre abaque pour la détermination des éléments de construction et de fonctionnement des réchauffeurs d'air « Roubaix » (v. 1re partie, p. 42). Si l'on adopte une formule approchée il est préférable de prendre la différence des t° d'entrée. Il serait intéressant d'établir pour les radiateurs une étude rigoureuse, analogue à celle que nous avons effectuée pour les réchauffeurs d'air et qui permettrait certainement un calcul plus précis de ces appareils.

1°. — La théorie « hydraulique » des souffleries aérodynamiques (1), que j'ai établie en 1918, m'a conduit à l'expression suivante du COEFFICIENT D'UTILISATION D'UNE BUSE (je rappelle que j'ai appelé coefficient d'utilisation d'une buse le rapport de la puissance utile du courant d'air dans la chambre d'expériences à la puissance utile fournie par le ventilateur.

$$\rho_b = \frac{1}{\frac{8\,K_f}{\sin\frac{\alpha_c}{2}} \cdot \left(\frac{n^2_c - 1}{n^2_c}\right) \quad 64\,K_f m + \frac{8\,K_f}{\sin\frac{\alpha_d}{2}}\left(\frac{n^2_d - 1}{n^2_d}\right) - \sin\alpha_d\left(\frac{n_d - 1}{n_d}\right)^2 + \frac{1}{n^2_d}},$$

où α_c est l'angle du collecteur, n_c est le rapport des sections d'entrée et de sortie du collecteur, m est le rapport de la longueur de la chambre d'expérience à son diamètre d, α_d et n_d sont l'angle du diffuseur et le rapport des sections de sortie et d'entrée de celui-ci, K_f est le coefficient de frottement dans la chambre d'expériences.

Nous avons admis dans les diagrammes de la fig. 114 : $\alpha_c = 35°$, $n_c = 4$, $m = 1,5$.

Les courbes L_d d donnent les valeurs du rapport de la longueur du diffuseur au diamètre de la chambre d'expérience ; les courbes C_n indiquent le maximum de ρ_b, quand on se donne la valeur de n_d et les courbes C_L indiquent le maximum de ρ_b, quand on se donne la valeur de L_d.

Mode d'emploi. — On commence par déterminer sur le diagramme supérieur la valeur de K_f correspondant aux valeurs données de d et de v. On détermine ensuite sur le diagramme inférieur, correspondant à la valeur de K_f la plus proche de celle qu'on vient de déterminer, la valeur de α_d donnant le maximum de ρ_b, en suivant soit la droite (n_d) jusqu'à la courbe C_n si l'on est limité par le diamètre de la sortie de la buse, soit la courbe L_d d jusqu'à la courbe C_L si l'on est limité par la longueur de la buse.

Exemple. — Déterminer la valeur de α_d donnant le maximum de ρ_b pour une soufflerie, pour laquelle v = 63 m sec, d = 4 m et $L_d = 28$ m, d'où $\frac{L_d}{d} = 7$.

On trouve d'après le diagramme supérieur que K_f est sensiblement égal à 0,0001. On se servira donc du premier des graphiques inférieurs, sur lequel on lira : $\alpha_d = 8°30'$, $\rho_b = 5,9$.

L'expression ci-dessus de ρ_b, ainsi que le graphique supérieur de la fig. 114, sont basés sur la formule du coefficient de frottement de *Fritzsche*, qui n'est pas en accord avec la loi de similitude de Reynolds.

2°. — Dans un Mémoire inédit j'ai établi en 1922 UNE NOUVELLE EXPRESSION DE ρ_b basée sur la formule suivante du coefficient de frottement

$$K_f = \frac{4}{10^4}\,D^{-0,2} \cdot V^{-0,2}.$$

---

(2) Voir ma note sur *Le calcul des coefficients d'utilisation des buses pour souffleries aérodynamiques* (Laboratoire Eiffel, 1918). J'appelle cette théorie « hydraulique », car elle se base sur des résultats d'expériences sur les pertes de charge dans les conduites cylindriques et coniques ; la théorie « hydrodynamique » des souffleries reste encore à établir.

Cependant aussi imparfaite que soit la théorie « hydraulique », il y a lieu de rappeler que, quand elle fut créée en 1918, il n'existait aucune théorie du fonctionnement des souffleries et qu'elle a été depuis lors employée utilement par de nombreux auteurs.

Je viens de terminer une série de recherches expérimentales et théoriques sur l'écoulement des fluides dans les diffuseurs ; ces recherches seront prochainement publiées et constitueront une contribution nouvelle à la théorie des souffleries.

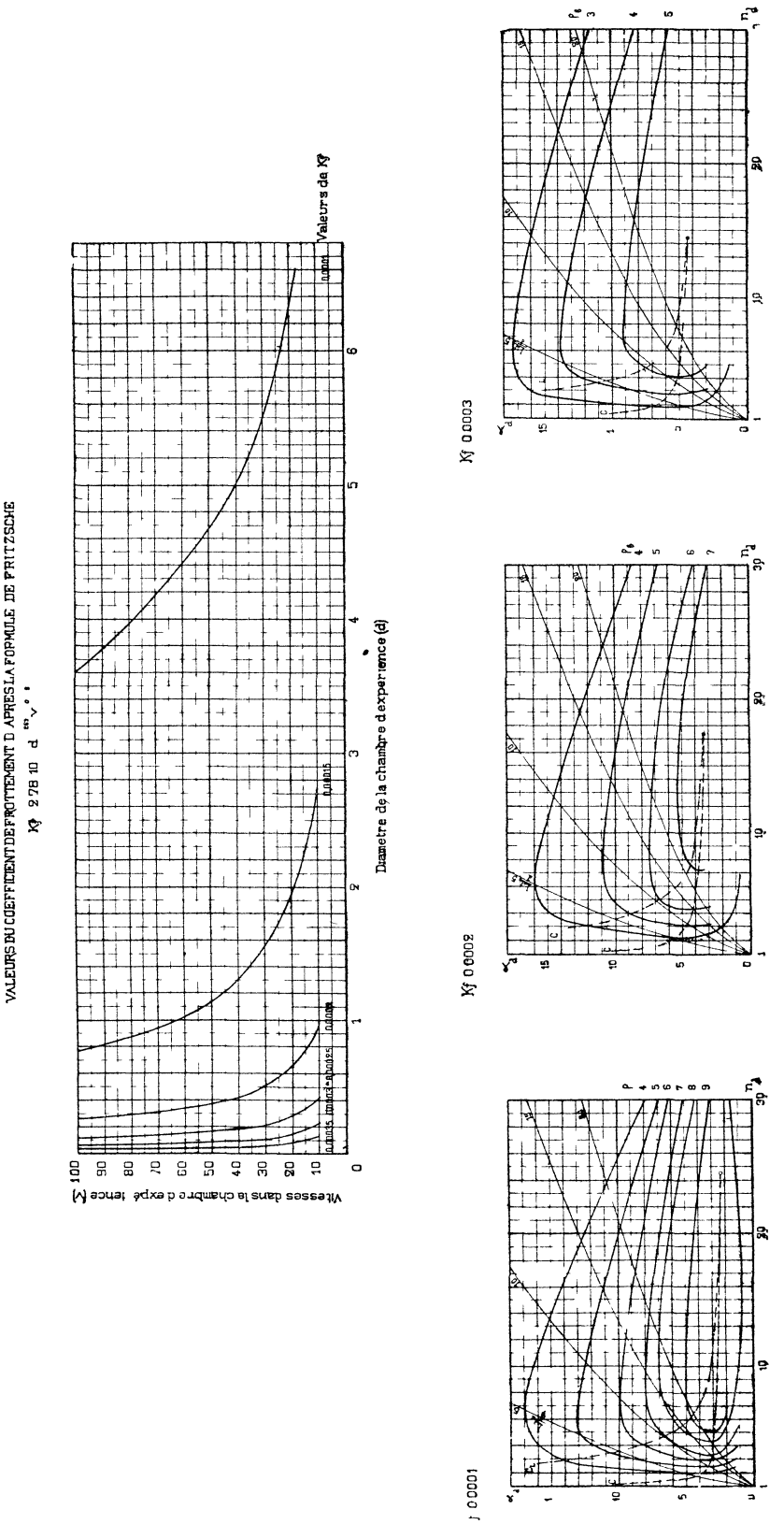


Fig 114 — *Coefficients d'utilisation des buses pour souffleries aerodynamiques* Coefficients de frottement d'après la formule de Fritzsche.

On a alors :

$$\rho_b = \frac{1}{\dfrac{8{,}42\,K_f}{\sin\frac{\alpha_c}{2}}\left(\dfrac{n_c^{1,9}-1}{n_c^{1,9}}\right) + 64\,K_f m + \dfrac{8{,}42\,K_f}{\sin\frac{\alpha_d}{2}}\left(\dfrac{n_d^{1,9}-1}{n_d^{1,9}}\right) + \sin\alpha_d\left(\dfrac{n_d-1}{n_d}\right)^2 + \dfrac{1}{n_d^2}}.$$

J'ai tracé pour cette formule un abaque à points alignés représenté sur la fig. 115, dans lequel

$$A = \frac{8{,}42}{\sin\frac{\alpha_c}{2}}\left(\frac{n_c^{1,9}-1}{n_c^{1,9}}\right) + 64\,m = a + 64\,m.$$

Les valeurs de K_f en fonction de la vitesse et du diamètre de la chambre d'expériences, ainsi que celles de a en fonction de α_c et n_c sont données par des tableaux à 2 entrées, que nous ne reproduisons pas ici.

Description et emploi de l'abaque. — L'abaque comprend de gauche à droite : une échelle (K_f), un réseau (α_d, n_d) et un réseau (A, ρ_b). La valeur de ρ_b correspondant à des valeurs données de K_f, α_d, n_d et A, est lue à l'intersection de la *droite* passant par les points (K_f) et (α_d, n_d), avec la droite (A) du réseau (A, ρ_b).

Exemple.— Données : $K_f = 0{,}0002$; $\alpha_d = 4°$, $n_d = 4$; $A = 100$; on trouve $\rho_b = 5{,}96$.

Détermination des caractéristiques du diffuseur assurant la valeur maximum de ρ_b. — Deux cas peuvent se présenter dans la pratique : on peut être limité soit par la hauteur du bâtiment, soit par sa longueur. Dans le premier cas la valeur de n_d sera donnée et on cherchera à déterminer la valeur de α_d correspondant à ρ_b maximum. Dans le deuxième cas, c'est la valeur de L_d/d, rapport de la longueur du diffuseur qui sera fixée et on cherchera les valeurs de α_d, n_d assurant ρ_b maximum.

On procédera de la façon suivante : on déterminera au moyen des tableaux la valeur de K_f et de A, correspondant aux valeurs données de v, d et de α_c, n_c et m.

Dans le premier cas, on obtiendra le maximum de ρ_b en faisant tangenter la droite passant par le point K_f de l'échelle (K_f) à la courbe n_d du réseau (α_d, n_d); dans le deuxième cas cette droite doit être tangente à la courbe L_d/d du faisceau des courbes (L_d d), que nous avons tracée sur le réseau (α_d, n_d) au moyen de la relation :

$$n_d = \left(1 + 2\,\frac{L_d}{d}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_d}{2}\right)^2.$$

Exemple. — Données : $v = 63$ m/sec, $d = 4$ m, $m = 1{,}5$; $\alpha_c = 35°$; $n_c = 4$. On demande de déterminer la valeur α_d, donnant le maximum de ρ_b, pour $L_d = 40$ m, d'où $L_d/d = 10$.

Le tableau I du Mémoire mentionné ci-dessus donne pour $v = 63$, $d = 4$, $K_f = 1{,}33.10^{-4}$; le tableau II donne $a = 26$, d'où $A = 26 + 64 \,.\, 1{,}5 = 122$.

La courbe passant par $K_f = 1{,}33 \,.\, 10^{-4}$ et tangente à la courbe ($L_d/d = 10$) coupe la courbe ($A = 122$) au point $\rho_b = 6{,}4$; le point de tangence indique $\alpha_d = 6°7$, $n_d = 4{,}7$.

Quoique l'abaque de la figure 115 comprenne deux variables (K_f, A) en plus de celui de la fig. 114, nous estimons cependant que ce dernier parle mieux à l'esprit.

3°. — L'abaque de la fig. 116 représente le fonctionnement d'une SOUFFLERIE A AIR COMPRIMÉ OU RAREFIÉ, que j'ai proposée en 1920, pour pouvoir satisfaire aux lois de similitude de Reynolds et de Booth-Bairstow, dont l'inobservation dans

les laboratoires aérodynamiques actuels conduit à des erreurs très importantes dans la prévision des performances des avions et dirigeables en vol.

C'est un abaque à entrecroisement de 4 faisceaux : N (nombre de Reynolds du modèle), V (vitesse du courant d'air dans la chambre d'expériences), P_m (puissance motrice du ventilateur de la soufflerie) et p (pression de l'air dans la soufflerie)

Le champ de fonctionnement d'une soufflerie de 2 m. de diamètre est représenté par la *surface* abcd limitée par les droites ab et cd de pression maximum et minimum et par la droite bc de puissance maximum (1). Les *droites* terminées par

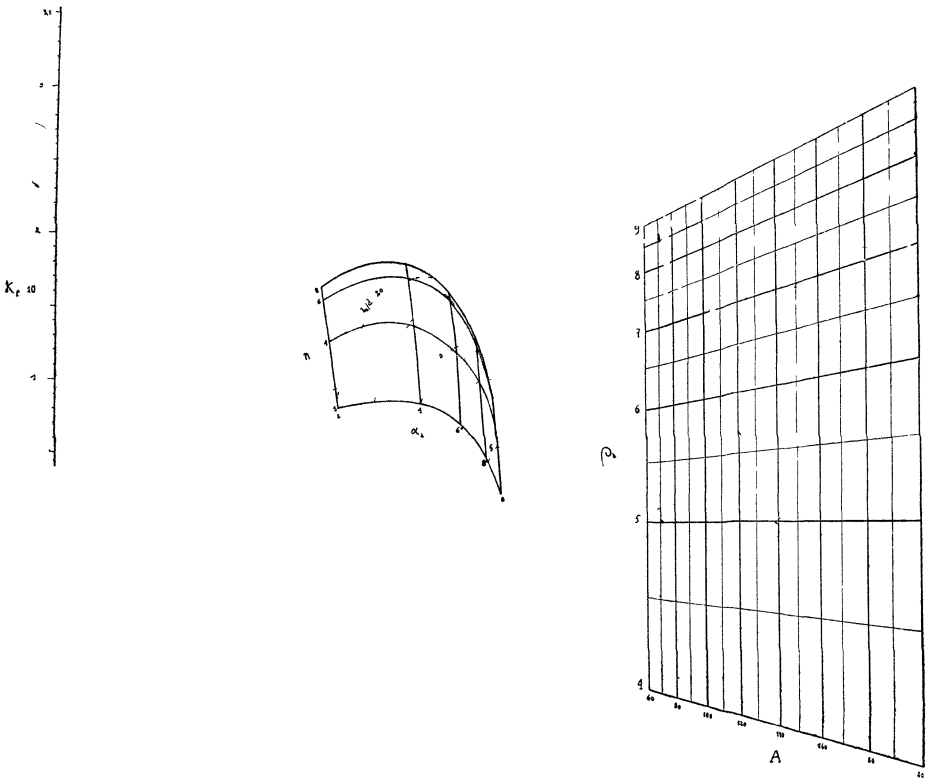


Fig. 115. — *Coefficients d'utilisation des buses.* Nouvelle formule du coefficient de frottement.

une + représentent le fonctionnement de la plupart des souffleries existantes à pression constante Enfin les points A... D . H... indiqués sur l'abaque représentent les valeurs de N et V des avions, dirigeables et hélices en grandeur existants en 1920.

L'abaque montre d'une façon très suggestive la possibilité de satisfaire au moyen de mon système aux lois de similitude et sa supériorité à ce point de vue aux systèmes existants de souffleries (2).

---

(1) La surface ABCD représente le champ de fonctionnement de la même soufflerie travaillant avec de l'acide carbonique.

(2) Une soufflerie de mon système a été construite par le U. S. N A. C. A. dans son laboratoire aérodynamique de Langley Field ; une autre est en construction au National Physical Laboratory à Teddington.

Depuis 10 ans les dimensions et les vitesses des avions ont considérablement augmenté ; à l'heure actuelle les nombres de Reynolds sont de 97.10^6 pour les avions de course (point A'_1), de 60 10^6 pour les avions de chasse (point A'_2) et de 180.10^6 pour les grands avions de transport (point A'_4) Ma soufflerie de 1920 ne pouvant pas réaliser ces chiffres j'ai établi en 1929 un autre projet de soufflerie de section ovale de 1 m 70 sur 0 m. 90 utilisant de l'air à 70 kg/cm2 et pouvant réaliser avec une puissance de 2 400 ch le champ de fonctionnement représenté par la surface A'B'C'D' (1)

J'ai proposé en 1920 une autre solution réalisant des valeurs élevées du nombre de Reynolds et consistant dans l'établissement de *supersoufflerie*s pour essais d'avions en grandeur La droite M_1 représente le fonctionnement de la souffferie

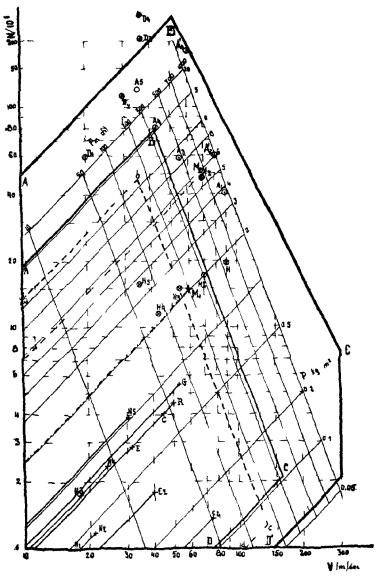


FIG. 116. — *Fonctionnement d'une soufflerie système Margoulis.*

proposée en 1920 : 6m de diamètre, 60 m/s de vitesse, 1.500 ch de puissance motrice (2). En 1929 j'ai établi un autre projet de supersoufflerie, dont les caractéristiques sont : section 15 m sur 7 m, vitessse 72 m/s, puissance 6 000 ch ; son fonctionnement est représenté par la droite M_2

§ 4. — Bombardement aérien. — Trajectoires des bombes.

(*Abaques établis en* 1916-17 *et* 1924-25, *inédits*)

1°. — J'ai tracé en 1916 un abaque pour LA DÉTERMINATION DE LA VITESSE ET DU TEMPS DE CHUTE VERTICALE D'UN CORPS.

---

(1) Une disposition brevetée des parois assure une sécurité parfaite, malgré la valeur élevée de la pression.

(2) W. Margoulis : *Value of Model Tests* (*Aviation* 1921, p. 40). Ces caractéristiques sont à peu près celles qui viennent d'être réalisées récemment par le N. A. C A. dans sa grande soufflerie de Langley Field.

Soient : q — la vitesse limite du corps en chute verticale, égale à $\sqrt{P/R}$, où P est le poids du corps en kg et R la résistance de l'air, supposée *proportionnelle au carré de la vitesse* et ramenée à la vitesse de 1 ms, z est la hauteur de chute en m à partir du point de lancement, t — le temps de chute et V — la vitesse à la hauteur z.

On sait que :

$$\frac{zg}{q^2} = \ln \operatorname{ch}\left(\frac{gt}{q}\right) \quad \text{et } V = q\sqrt{1 - e^{\frac{2gz}{q^2}}} = q \operatorname{th}\left(\frac{gt}{q}\right)$$

L'abaque à entrecroisement (fig. 117) représente ces deux équations. Il comporte quatre faisceaux (z, q, V et t). Grâce à l'adoption d'échelles logarithmiques pour les valeurs de z et de q, il a été possible de constituer les faisceaux (V et t) par des lignes métriquement espacées, facilitant le tracé de l'abaque, puisqu'il suffisait de tracer l'une de ces courbes et puis de la déplacer parallèlement à elle-même.

Le mode d'emploi est inscrit sur l'abaque.

2°. — En 1917, j'ai établi un premier abaque pour la DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES DES BOMBES LANCÉES D'UN AVION (1).

Soient : V_0 — la vitesse horizontale de l'avion, $Q = 0{,}5\,(q/V_0)^2$, θ — l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizontale et $f(\theta) = \int_0^t \frac{d\theta}{\cos^3\theta}$, une fonction de t donnée par les tables de Siacci.

x et z étant les coordonnées du corps, l'origine étant au point de lancement, la théorie d'Euler, appliquée au cas de la proportionnalité de la résistance de l'air au carré de vitesse, donne les formules suivantes :

$$\frac{2g}{q^2} \cdot x = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,[Q - f(\theta)]}$$

$$\frac{2g}{q^2} \cdot z = \int_0^\theta \frac{\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta\,[Q - f(\theta)]}$$

$$\sqrt{\frac{2g}{q^2}} \cdot t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,\sqrt{Q - f(\theta)}}$$

Mon abaque à transparent orienté (fig. 118 et 118′) représente les deux premières équations.

Il est constitué :

1° par un *fond* portant un faisceau (Q) et une échelle (q) ;

2° par un *transparent* portant un point de repère O′ placé sur la droite O′X et un réseau (z, x). Pour utiliser l'abaque on fait glisser la droite O′X le long de l'échelle (q), de façon à faire coïncider les points (O′) et (q). La trace sur le transparent de la courbe (Q) du fond donne la trajectoire de la bombe.

---

(1) Cet abaque ainsi que le précédent ont servi pendant la guerre à la graduation des viseurs Bory et des viseurs des avions de bombardement Bréguet-Michelin.

3°. — En 1919 MM. Chrétien et Poircuitte publiaient un abaque pour la détermination des trajectoires des bombes, basé sur les équations suivantes :

$$x = \frac{V_0 q}{g} \text{Gd}^{1)} \left(\frac{gt}{q}\right); \quad z = \frac{q_2}{g} \ln \text{ch} \left(\frac{gt}{q}\right); \quad V_z = q \, \text{th} \left(\frac{gt}{q}\right),$$

obtenues en admettant dans les équations différentielles du mouvement, que la composante verticale (V_z) de la vitesse du corps était égale à cette vitesse (V).

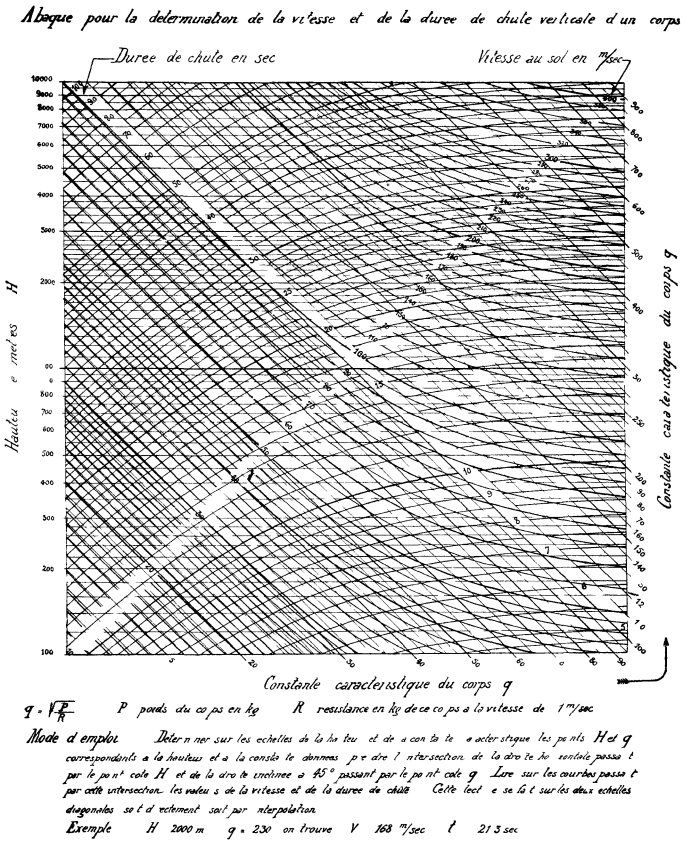


FIG. 117.

L'abaque à points alignés à charnière de ces auteurs nécessite deux opérations pour la détermination de la déviation à chaque altitude.

Mon SECOND ABAQUE A TRANSPARENT ORIENTÉ (établi en 1924) ne demande qu'*une opération pour le tracé de la trajectoire entière.*

Cet abaque est constitué par un *fond* (fig 119) et le *transparent* (fig 118′) du premier abaque.

Le fond porte le réseau (q, V_0) et un index $I_{x,z}$ Le mode d'emploi est le

(1) Gd désigne le gudermanien de $\left(\frac{gt}{q}\right)$.

suivant : on fait coïncider le point O″ du transparent avec le point (q, V_0) du fond et on oriente le transparent de façon à rendre parallèles les droites (z) du transparent et les droites (q) du fond. On calque sur le transparent l'index $I_{x,z}$ du fond, qui donne ainsi la trajectoire de la bombe.

Cet abaque est évidemment beaucoup plus simple que le premier, puisque d'abord je suis parvenu à séparer les variables q et V_0 et qu'ensuite il ne nécessite pas l'interpolation, toujours délicate, entre les courbes (Q), remplacées par l'index unique $I_{x,z}$.

4°. — Pour comparer les résultats donnés par la méthode rigoureuse (premier abaque) et la méthode approchée (deuxième abaque), j'ai tracé en traits pointillés sur le fond (fig. 118) du premier abaque le faisceau (Q) correspondant aux équations approchées de MM. Chrétien et Poircuitte.

On voit que pour les faibles valeurs de Q (< 10) les déviations vraies sont

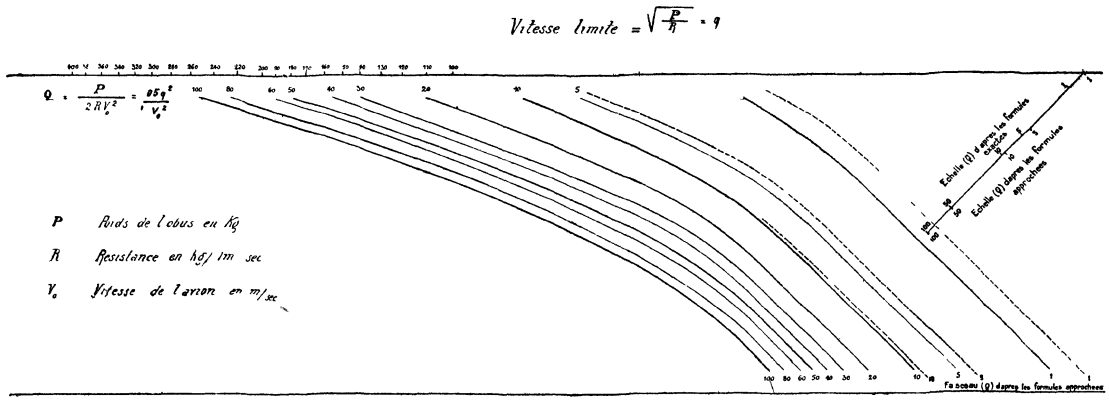


Fig. 118. — *Trajectoires des obus lancés d'un avion.* Premier abaque

sensiblement plus petites que les déviations déterminées par les équations approchées.

Mais en même temps j'ai constaté que le faisceau rigoureux (Q) du premier abaque est constitué par des courbes métriquement espacées suivant une direction parallèle au faisceau (q) du fond du deuxième abaque.

Ceci m'a conduit à établir en 1925 un TROISIÈME ABAQUE (fig. 120) dont le fond diffère du fond du deuxième abaque seulement par le faisceau (V_0).

Le tracé de ce faisceau, a été établi expérimentalement, d'après le faisceau rigoureux (Q) du premier abaque. Le transparent et le mode d'emploi de cet abaque sont exactement les mêmes que ceux du deuxième abaque.

Le troisième abaque constitue un cas intéressant de simplification expérimentale d'un abaque et peut servir à l'établissement de formules simples, mais d'une grande précision, pour les valeurs de x et z.

Remarque I. — La théorie montre que les temps de chute d'une bombe lancée avec une certaine vitesse horizontale ne diffèrent pas sensiblement de ceux d'une

bombe tombant verticalement sans vitesse initiale. On pourra donc utiliser dans tous les cas à cet effet l'abaque à entrecroisement (fig. 117).

En graduant l'index $I_{x,z}$ (des fig 119 et 120) en valeurs de gt/q, on peut déterminer les temps de chute en multipliant les chiffres lus sur cet index par le facteur $q/g = 0,1029$.

Remarque II. — Mes deux derniers abaques (fig. 119 et 120) permettent la détermination des trajectoires en tenant compte de la variation de la densité de l'air avec l'altitude d'une façon beaucoup plus simple que celle indiquée par MM. Chrétien et Poncuitte A cet effet il faut diviser la hauteur de chute en plusieurs tronçons de densités différentes et déterminer les trajectoires pour chacun

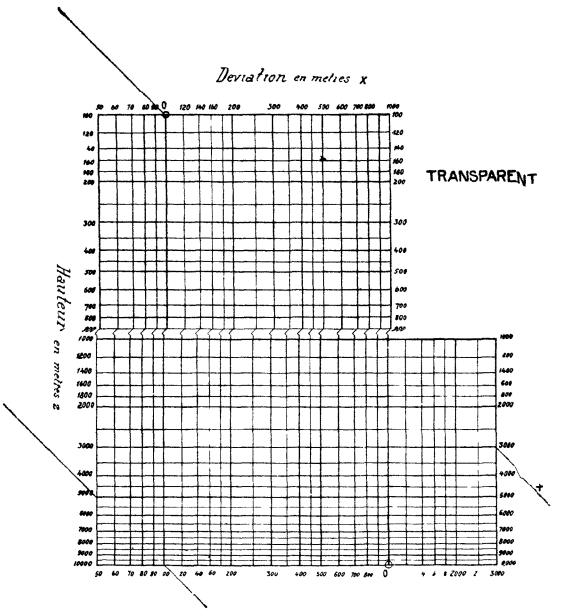


FIG. 118'. — *Transparent des abaques représentés sur les fig.* 118, 119 *et* 120.

de ces tronçons de telle façon que les vitesses et les angles θ soient les mêmes aux extrémités contigues des tronçons.

§ 5. — Les moteurs à combustion interne.

1°. — PRESSION MOYENNE DES MOTEURS D'AVIATION.

(Publié dans la *Review of Aeronautical Works*, N° 7-8, 1920).

Cet abaque présente un exemple des possibilités offertes par la méthode du transparent orienté, pour reunir sur un seul réseau deux variables reliées par une relation expérimentale.

L'équation est :

$$pe^{M\left(\frac{3\,000}{Nc}\right)^2} \cdot \frac{(n-1)}{n(n^{0,4}-1)} = 1 - \left(\frac{Nc}{30.000}\right)^2 \cdot \frac{Z}{M},$$

où p — est la pression moyenne en kg/cm2, n — le degré de compression, c —

la course du piston en mm, N — le nombre de tours/min., M et Z — deux constantes caractérisant le type de moteur.

Le problème pratique consiste dans la détermination, d'après deux essais au banc fixant deux groupes de valeurs (p, N), de la caractéristique complète, p = f(N), du moteur, ainsi que des valeurs des constantes M, Z.

L'abaque (fig. 121 et 121') permet la solution instantanée du problème, puisqu'il suffit de faire glisser le point d, correspondant aux valeurs connues de n et c, le long de l'échelle (M), jusqu'à ce que les points a et b donnés par l'essai au banc se placent sur l'une des courbes (Z) ; celle-ci (pq) calquée sur le transparent représente la caractéristique du moteur.

Notons que deux méthodes de calcul (publiées dans l'*Automobile Engineer*,

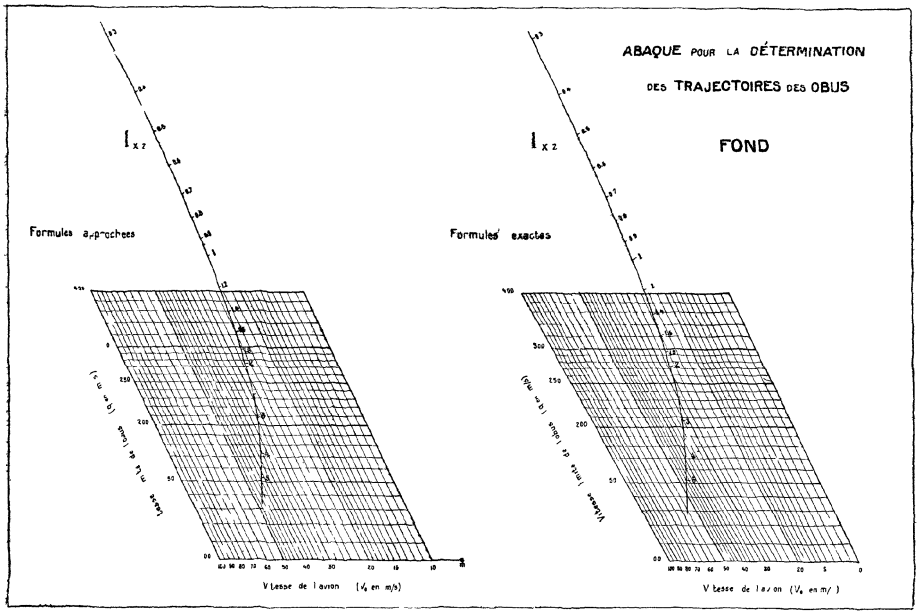


FIG. 119 et 120. — *Deuxième et troisième abaques pour la détermination des trajectoires d'obus lancés d'un avion.*

1919 et dans la *Technique Automobile*, N° 105) avaient été proposées pour résoudre l'équation ci-dessus ; chacune demandait à un calculateur certainement une demi journée de travail.

2°. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU COEFFICIENT DE RÉGULARITÉ DES MOTEURS D'AVIATION. — Bien qu'il ne s'agisse plus de représentation plane, je veux encore citer ici un travail, que j'ai présenté au Congrès Aéronautique de 1912 sur *Le coefficient de régularité des groupes motopropulseurs*, (Travaux de la Section de Physique de la Société des Amis des Sciences Naturelles de Moscou, 1912, t. 16, fasc. 1, et U. S. N. A. C. A. Technical Notes n° 19), et dans lequel j'ai démontré que, contrairement à l'étude de M. Lecornu (Comptes-Rendus, 1909), l'expression du coefficient de régularité (r_h) d'un groupe motopropulseur à moment résistant *proportionnel au carré de la vitesse de rotation* différait fort peu de l'expression de ce coefficient dans le cas habituel du moment résistant *constant* (r_a). En effet $r^2_h = r^2_a + r'^2_h$, où r'_h est le coefficient de régularité du même groupe propulseur dans lequel

les masses des organes en mouvement, et notamment celle de l'hélice, seraient nulles. Or la valeur de r'_h/r_a est très faible : 0,000165 pour un moteur à 7 cylindres ; on peut donc dire que $r_h = r_a$.

Pour représenter la variation de r_h sur un avion, j'ai établi l'abaque à 3 di-

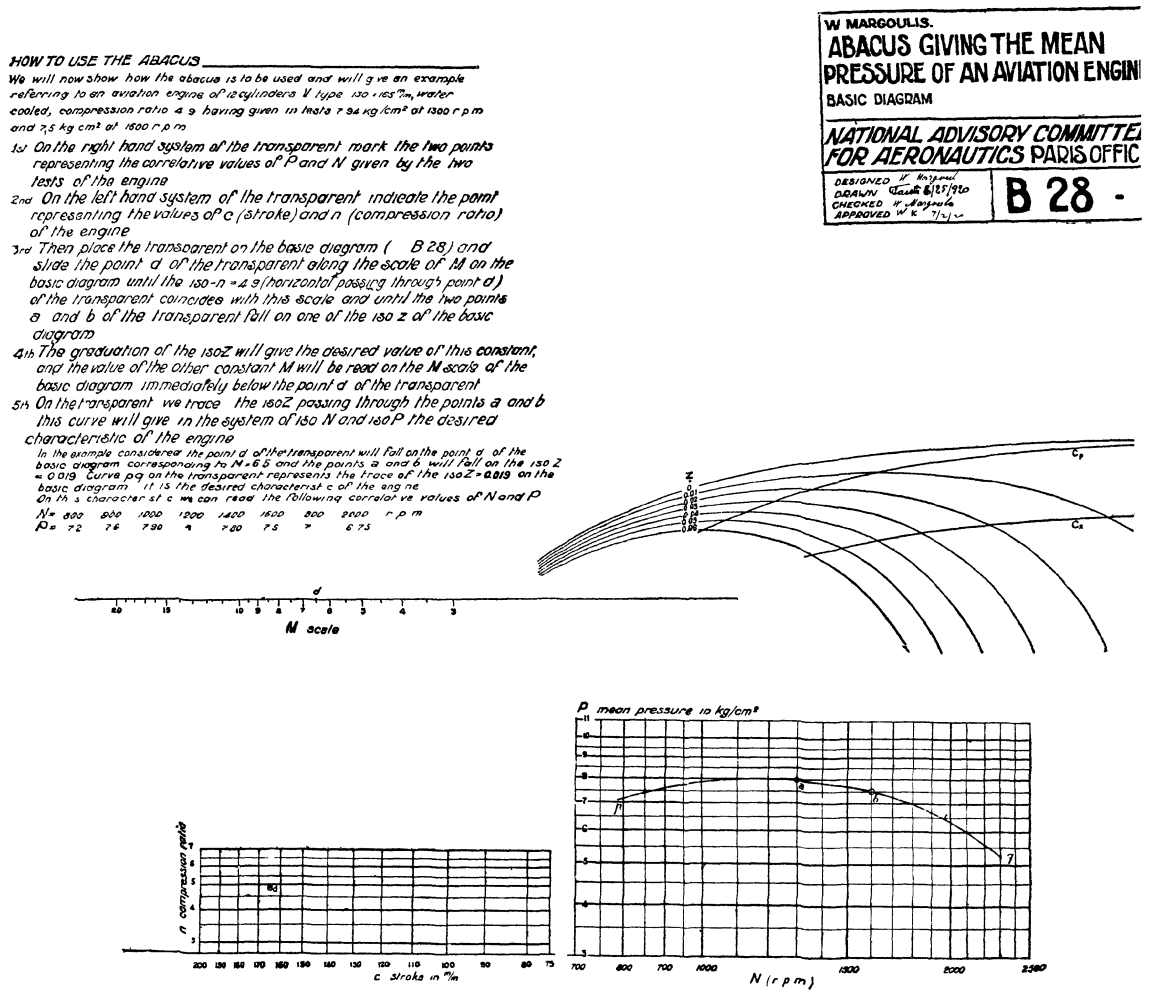


FIG. 121 et 121'. — *Pression moyenne des moteurs d'aviation.*

mensions (fig. 122) qui donne les valeurs de $r_h = r_a$ en fonction du nombre de tours/minutes et des puissances *indiquées* (π) pour un moteur à 5 cylindres en étoile de 60 CV à 1.200 t/m (nous étions en 1912). En traçant sur le plan (π, t./1') les courbes $\pi = f(t/1', V)$ de l'hélice, on peut étudier la variation de r_h sur un avion en vol.

3°. — DIAGRAMME POUR L'ÉTUDE DES CYCLES THERMODYNAMIQUES DES MOTEURS.

L'étude du fonctionnement des moteurs demande souvent la transformation du diagramme pression-volume fourni par l'indicateur en diagramme température-en-

tropie, appelée généralement diagramme entropique. Ce dernier diagramme permet notamment l'étude des échanges de chaleur à travers les parois.

Il existe plusieurs méthodes graphiques pour effectuer cette transformation : celles de Ancona et de Schröder entre autres. Elles sont assez fastidieuses, car elles demandent un grand nombre de constructions géométriques.

J'ai imaginé en 1912 (1) une méthode graphique qui réalise très rapidement cette transformation ; dans certains cas elle la rend même inutile, car le cycle du moteur est tracé en même temps en coordonnées *pression-volume* et *température-entropie*.

a) Tracé des réseaux $\left(\frac{p}{p_0}, \frac{v}{v_0}\right)$ *et* $\left(\frac{T}{T_0}, S\right)$ *sur le diagramme.* — La fig. 123 porte un premier réseau de droites orthogonales, dont l'origine est en O et qui a été tracé avec les coordonnées

$$x = n \log \frac{v}{v_0}, \quad y = n \log \frac{p}{p_0},$$

v et p étant les volumes spécifiques et les pressions du gaz à un moment quelconque

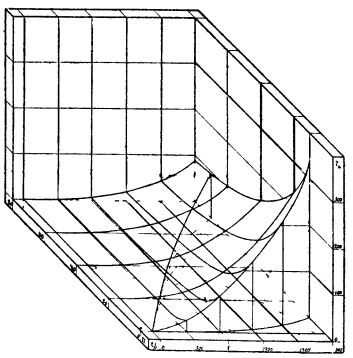


FIG. 122. — *Coefficient de régularité d'un moteur d'aviation.*

du cycle ; v_0 et p_0 — les volumes et les pressions au commencement de l'aspiration ; n — est le module (en mm) des échelles logarithmiques, log 10 = 1 = n.

Les volumes spécifiques sont exprimés en m^3 par kilogramme-molécule (kgmol). On sait qu'un kgmol est un volume de gaz dont le poids en kg. est égal au poids moléculaire du gaz. L'emploi du kgmol est justifié par la simplification des formules due à ce que, quel que soit le gaz, un kgmol occupe toujours le même volume.

Il s'ensuit que dans l'équation caractéristique du gaz

$$pv = RT$$

R a une valeur constante, égale à 848 ; p est en kg/m^2, T — en° absolus.

La même équation montre que le faisceau (T/T_0) sera représenté par un faisceau de droites inclinées à 45°, dont la graduation coïncide avec celle du faisceau p p_0 T et T_0 — sont les températures absolues du gaz à un moment quelconque du cycle et au commencement de l'aspiration.

(1) Présenté en 1912 à l'Ecole Supérieure Technique de Moscou, ce diagramme est resté inédit jusqu'à présent.

Les faisceaux $\frac{p}{p_0}$, $\frac{v}{v_0}$ et $\frac{T}{T_0}$ constituent le diagramme proprement dit (1), le faisceau (S — entropie) ou faisceau d'*adiabatiques* doit être tracé chaque fois à

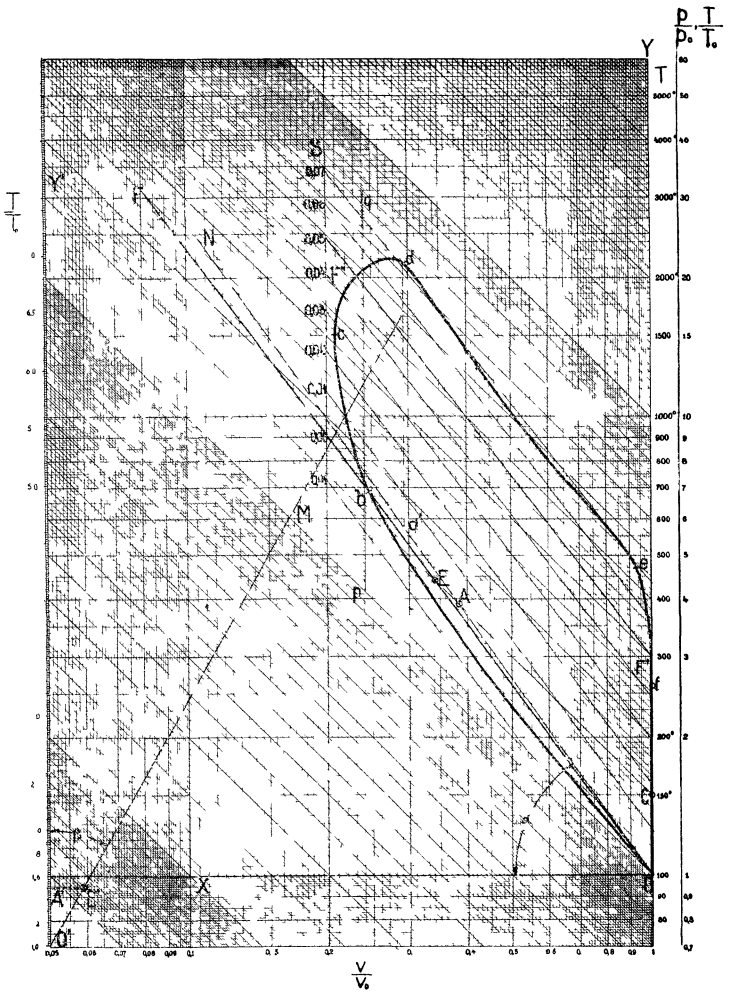


Fig 123 — *Diagramme pour l'etude des cycles thermodynamiques des moteurs.*

nouveau de la façon suivante On sait que la valeur de l'accroissement (S) de l'entropie est exprimée par la relation

$$S = AR \ln \frac{v}{v_0} + a \ln \frac{T}{T_0} + b(T - T_0) \qquad (1)$$

(1) La fig 123 est la reproduction d'un diagramme établi en 1914 à ma demande par la maison Schleicher et Schull de Duren, qui s'est spécialisée dans les papiers à divisions logarithmiques

En multipliant chaque terme par $\frac{\sec 45^\circ}{2{,}302\,AR}$ on obtient :

$$(2) \qquad \frac{S \sec 45^\circ}{2{,}303\,AR} = \sec 45^\circ \log \frac{v}{v_0} + \frac{a \sec 45^\circ}{AR} \log \frac{T}{T_0} + \frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right).$$

Dans ces expressions :

S — est l'entropie en cal/kgmol/°abs.

A — l'équivalent calorifique du travail : A = 1/427.

R — la constante des gaz, égale à 848.

a et b sont les coefficients de l'expression $C_v = a + bT$, où C_v est la chaleur spécifique à volume constant (en cal/kgmol).

L'équation de l'adiabatique, passant par le point ($p/p_0 = v/v_0 = 1$), et pour laquelle S = O, est :

$$(3) \qquad -\sec 45^\circ \log \frac{v}{v_0} = \frac{a \sec 45^\circ}{AR} \log \frac{T}{T_0} + \frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right).$$

Traçons la droite ON faisant avec l'axe OX un angle $\alpha = \text{arc tg}\left(1 + \frac{AR}{a}\right)$; à partir d'un point quelconque (A) de cette droite portons sur l'isotherme AC passant par ce point un segment (AE) égal à $\frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right)$, où $\frac{T}{T_0}$ est la cote de l'isotherme L'équation (3) montre que E est un point de l'adiabatique S = O. En effet :

$$AC = \frac{a \sec 45^\circ}{AR} \log \frac{T}{T_0}\,;\ AE = \frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right);\ CE = \sec 45^\circ \log \frac{v}{v_0}.$$

Pour déterminer rapidement les segments AE, le diagramme porte une échelle métrique T/T_0, dont le module est 1 mm.

Les abcisses de la droite O'M faisant avec O'Y' l'angle :

$$\beta = \text{arc tg}\,\frac{n}{l} \cdot \frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}$$

sont évidemment égaux à

$$\frac{b \sec 45^\circ T_0}{2{,}302\,AR}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right),$$

c'est-à-dire aux segments AE.

L'adiabatique OEF a été tracée sur la fig. 123, en admettant A = 4,67 ; b = 0,0011 ; ces chiffres correspondent à l'état des gaz au commencement de l'admission quand ils sont constitués par 1 kgmol d'air et 0,095 kgmol de gaz brûlés, pour lesquels a = 5,17 et b = 0,00152.

Dans l'original du diagramme, dont la fig 123 représente une réduction aux 3/10, le module des échelles logarithmiques est n = 200 mm., le module de l'échelle T/T_0 est l = 50 mm. ; enfin T_0 = 415°. Les valeurs de $tg\alpha$ et de $tg\beta$ sont par conséquent les suivantes :

$$tg\,\alpha = 1 + \frac{AR}{a} = 1 + \frac{848}{427.4{,}67} = 1{,}425\,;\ tg\,\beta = \frac{200}{50}\,\frac{0{,}0011.1{,}414.415.427}{2{,}302.848} = 0{,}566.$$

L'équation (2) montre que pour tracer une adiabatique correspondant à une

valeur positive donnée de S (en cal/kgmol/° abs), il faut faire glisser la courbe OF parallèlement aux isothermes d'une longueur égale à

$$S \cdot \frac{n \cdot \sec 45^\circ}{2{,}302\, AR} \text{ mm.}$$

Il est préférable d'exprimer la valeur de S en kilogrammètre/°abs pour le poids de gaz contenu dans un cylindre du moteur.

Si W est le volume (en m^3) du cylindre, y compris la chambre de combustion, le nombre de kgmol contenu dans ce cylindre au commencement de l'aspiration est $\frac{W p_0}{R T_0}$.

Par conséquent l'adiabatique correspondant à S (en kgm/°abs) sera obtenue en faisant glisser la courbe OF d'une longueur égale à

$$S \cdot n \frac{\sec 45^\circ}{2{,}302} \frac{T_0}{\cdot W p_0}.$$

Dans l'exemple considéré le moteur était un 5 cylindres de 85 × 95 mm., dont le degré de compression était de 4,81. Le volume d'un cylindre était par conséquent de 0,000681 m^3. Pour ΔS = 0,01 kgm/°abs, la distance séparant les adiabatiques sur le diagramme original était de :

$$0{,}01 \cdot \frac{200 \cdot 1{,}414 \cdot 415}{2{,}302\ 0{,}000641 \cdot 10000} = 75 \text{ mm.}$$

Remarque I. — Pour tracer le faisceau (S) depuis S = — 0,01, jusqu'à S = 0,07 il faudrait prolonger la courbe OF en dehors des limites de la figure. Il est préférable d'arrêter la courbe OF au point F, puis de recommencer le tracé en un point F′ situé sur la même isotherme FF′, le segment FF′ correspondant à une valeur ronde de S, 0,04 par exemple.

II. — Les adiabatiques sont sensiblement des droites, de sorte que pour les tracer il suffit de graduer quelques isothermes en valeurs de S et de réunir les points par des droites L'origine des graduations est évidemment l'adiabatique OF, F′F″.

Le diagramme est à présent prêt à recevoir le tracé du cycle réalisé dans le moteur.

La fig. 124, représente un diagramme d'indicateur relevé sur un moteur d'aviation à 5 cylindres en éventail de 85 mm. d'alésage et de 95 mm. de course Le tracé sur la fig. 123 se fera par points ; ainsi le point b_0 de la fig. 124, pour lequel p ≐ 6,87 kg/cm² et v/v_0 = 0,247, viendra en b sur la fig. 123.

On obtient ainsi la courbe Obcdef.

Pour lire rapidement les valeurs des températures, nous avons coté une fois pour toutes l'axe OY de la fig. 123 en valeurs de T, 100° abs. correspondant à p/p_0 = 1 ; la droite pq passant par le point (p) d'intersection de l'isotherme T/T_0 = 1 avec l'isobare p/p_0 = 415/100 (T_0 = 415°), sert à la lecture des températures. A cet effet il suffit de suivre l'isotherme passant par le point considéré du cycle jusqu'à son intersection avec pq ; la cote de la droite horizontale passant par cette intersection, lue sur l'échelle (T), indique la valeur du T.

Ainsi la température au point b est de 700°.

Enfin la valeur de l'entropie en ce même point est nulle.

b) Tracé du cycle en coordonnées métriques (S, T).

Si l'on veut tracer le cycle dans un système de coordonnées cartésiennes (S, T) à échelles métriques, ainsi que cela se fait habituellement, on peut d'abord tracer sur le diagramme (fig. 123) l'adiabatique OF. La distance, mesurée le long des isothermes, entre OF et les différents points du cycle, est égale à la valeur de l'entropie, l'échelle étant :

$$1 \text{ mm} = \frac{2{,}302}{n \sec 45^\circ} \cdot \frac{W p_0}{T_0} = 0{,}0001335 \text{ (kgm °abs)},$$

cette valeur numérique correspondant aux échelles du diagramme original et au moteur considéré ci-dessus.

Si l'échelle des températures absolues est m, de sorte que

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{m} \text{ (°abs)},$$

on aura

$$1 \text{ mm}^2 = \frac{2{,}302}{m n \sec 45^\circ} \frac{W p_0}{T_0} \text{ (kgm)}.$$

En planimétrant la surface du cycle, on pourra déterminer le travail fourni par un cylindre tous les deux tours (moteur à 4 temps).

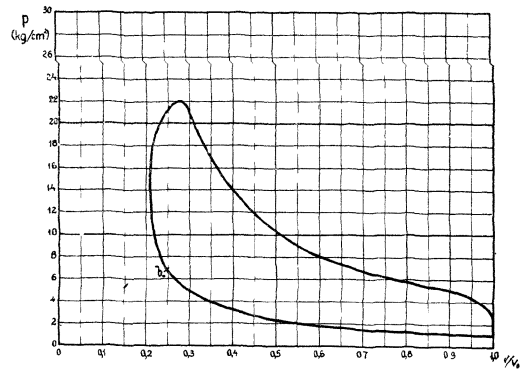


FIG. 124a. — *Diagramme pression-volume d'un moteur d'aviation.*

Mais, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, l'adiabatique OF sort des limites de la figure. Il est plus expéditif de procéder de la façon suivante.

On trace le cycle du moteur sur le diagramme de la fig. 123. Sur ce diagramme on trace la droite ON, faisant avec l'axe OX l'angle $\alpha = \text{arctg}\left(1 \quad \frac{AR}{a}\right)$.

Dans un système d'axes rectangulaires TOS (voir fig. 124b) on cote l'axe TO en valeurs de T, le module étant m (dans l'original, m = 0,1 mm). On trace la droite OP faisant avec OT l'angle

$$\gamma = \text{arc tg} \frac{b}{2{,}302\, a} \cdot \frac{n}{m} = \text{arctg} \frac{0{,}0011}{2{,}305\ 4{,}67} \cdot \frac{200}{0{,}1} = 0{,}2043,$$

la cote du point o étant égale à la température au commencement de l'aspiration (415°).

A partir d'un point quelconque (d, par exemple) du cycle tracé sur la fig. 123 on mesure avec un compas la longueur dd' qui le sépare de la droite ON ; cette longueur est mesurée parallèlement à l'axe OY. On lit la température au point d Elle est de 2,610° et l'on trace sur la fig 124b l'horizontale d''d''', passant par le point coté 2,610° de l'échelle du T. On porte d''d''' = dd' et l'on obtient le point d''' du diagramme entropique correspondant au point d

On procède ainsi pour différents points et on obtient sur la fig 124b le tracé obcd'''ef, — cherché.

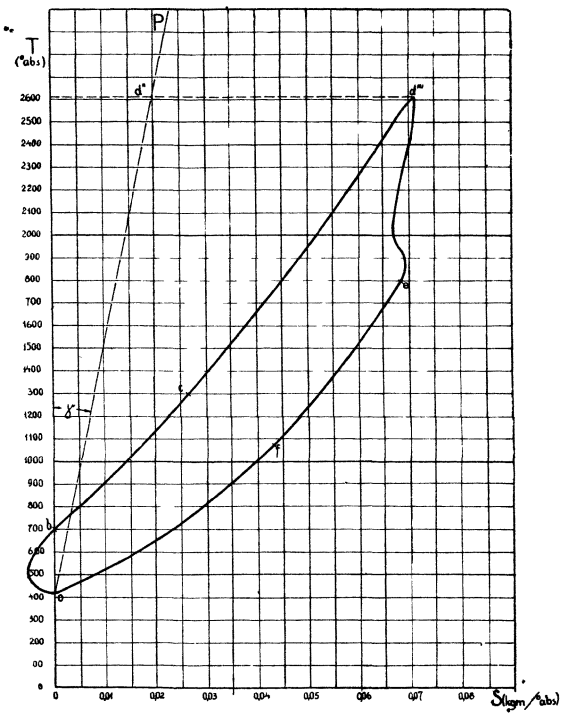


Fig. 124b. — *Diagramme temperature entropie d'un moteur d'aviation.*

La construction ci-dessus dérive directement de l'équation

$$(4) \qquad \frac{S}{2{,}302\,a} = \lg \frac{p}{p_0} \quad \left(1 \quad \frac{AR}{a}\right) \lg \frac{v}{v_0} \quad \frac{2{,}302\,a}{b}\,(T - T_0)$$

obtenue en divisant les termes de l'équation (1) par 2,302a et en remplaçant $\frac{T}{T_0}$ par $\frac{p\,v}{p_0\,v_0}$

L'échelle de S (en kgm/°abs pour le poids de gaz contenu dans le cylindre au commencement de l'admission), sera :

$$1\ \text{mm} = \frac{2{,}302\,a}{nA}\ \frac{W\,p_0}{R\,T_0} = 0{,}000446\ \text{kgm °abs.},$$

la valeur numérique se rapportant au tracé original.

Nous avons gradué l'axe OS d'après le module correspondant, qui est de 2245 mm.

Si l'on veut planimétrer la surface ob. . f. on notera que 1 mm^2 = 0,00446 kgm.

Dans le diagramme en p — v de la fig. 124, les modules des échelles (en kg et en m) se déduisent des valeurs de la course c (en m) et de l'alésage d (en cm) du piston.

Soient : q — le module (en mm.) de l'échelle des v/v_0 et r — le module (en mm) de l'échelle des p.

On aura alors :

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{q}\left(\frac{v}{v_0}\right) = \frac{c}{0{,}792\, q}\ 0{,}0006 \text{ m, où } 0{,}792 = 1 - \frac{1}{\varepsilon},$$

ε étant le degré de compression.

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{r}\,(\text{kg cm}^2) = \frac{0{,}785\, d^2}{r} = 11{,}35 \text{ kg.}$$

$$1 \text{ mm}^2 = 0{,}00675 \text{ kgm.}$$

Remarque. — Dans ce qui précède, nous avons admis que le nombre de kgmol, ainsi que les valeurs des coefficients a et b restaient constants pendant la combustion du mélange. Or cela n'est pas vrai : le nombre de kgmol et les coefficients a et b augmentent.

Pour le moteur considéré travaillant avec un mélange air/essence égal à 12,4, le nombre de kgmol qui est de 1,095 au commencement de l'aspiration (dont 1 kgmol d'air et 0,095 kgmol de gaz brûlés) devient égal à 1,221 kgmol après la combustion D'autre part les valeurs de a et b pour les gaz brûlés sont respectivement de 5,17 et 0,00157.

Si l'on voulait tenir compte de ces variations, il faudrait connaître exactement en chaque point de la partie du diagramme relative à la combustion, la proportion des gaz brûlés, qui est certainement très difficile à mesurer.

CHAPITRE IV

Les groupes vaporisateurs

L'établissement d'un projet thermique d'un groupe vaporisateur comprend la détermination des surfaces de chauffe et des rendements des différentes parties d'une chaudière : chambre de combustion, faisceau tubulaire, économiseur et réchauffeur d'air, ainsi que des conditions de fonctionnement de la nouvelle installation.

Je vais décrire ci-dessous deux abaques traitant la question de la transmission de la chaleur dans les *chambres de combustion* et les *rechauffairs*.

Le premier travail fait partie d'un *abaque général pour l'établissement d'un projet thermique d'une chaudière*, qui m'avait été demandé par la Société des Etablissements Delaunay-Belleville et qui comprenait en plus l'étude des *faisceaux tubulaires* et des *économiseurs*.

Dans deux autres abaques, j'ai examiné les problèmes des *conduites calorifugées* et de la *circulation d'eau* dans les tubes d'eau , on trouvera ci-dessous l'étude nomographique de cette dernière question.

§ 1. — Transmission de la chaleur par rayonnement dans les chambres de combustion.

(*Étude établie en 1927 à la demande des Établissements Delaunay-Belleville*).

1°. — Equations de la combustion.

Soient :

1 nm^3 (un mètre^3 normal) = 1 m^3 à 0° et 760 mm,

θ_c ou T_c - la température dans la chambre de combustion (°C, ou °absolus),

T_0 — la température des parois de la chambre de combustion (°absolus),

t_1 — la température de l'air de combustion (°C),

S_1 — la surface des parois de la chambre de combustion par 1.000 kg/h de combustible brûlé (m^2),

H_i — le pouvoir calorifique inférieur du combustible (cal/kg),

H_1 — la chaleur rayonnée par kg de combustible (cal),

H_c — la chaleur totale (à partir du O absolu) emportée par les fumées par kg de combustible (cal),

$\eta_1 = H_1/H_i$ — le rendement de la chambre de combustion,

I — la chaleur totale (à partir du O absolu) des fumées à la température θ_c (cal/nm^3),

I_0 — la chaleur totale (à partir du O absolu) de l'air à la température t_1 (cal nm^3),

n — le coefficient d'excès d'air,

V_0 — le volume des fumées par kg de combustible pour n = 1 (nm^3),

L_0 — le volume d'air par kg de combustible pour n = 1(nm^3),

W — le volume des fumées par kg de combustible pour la valeur n de l'excès d'air (nm^3).

L'équation de la combustion exprime le fait que le pouvoir calorifique du combustible (H_i) plus la chaleur apportée par l'air (nL_0I_0) est égale à la chaleur rayonnée (H_r) plus la chaleur emportée par les fumées (H_c) :

$$H_i + n L_0 T_0 = H_r + H_c. \tag{1}$$

La chaleur (q) transmise par rayonnement d'un corps chaud, de température T_2 à un corps froid de température T_1 et de surface S, est régie par la loi de Stefan-Boltzmann, d'après laquelle :

$$q = C\varphi S (T_2^4 - T_1^4),$$

où C est un coefficient dépendant de la nature des surfaces des deux corps et φ, un autre coefficient dépendant de la disposition des surfaces.

Dans les cas relativement simples, où la température des deux corps est constante, cette loi se vérifie rigoureusement.

En ce qui concerne la transmission de la chaleur dans une chambre de combustion, la difficulté consiste dans le fait que la température de la flamme dans la chambre n'est pas constante, mais varie sensiblement d'un point à un autre.

On peut cependant appliquer la loi Stefan-Boltzmann sous la forme suivante :

$$H_r = \frac{a S_r}{1000} \left[\left(\frac{T_e}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_0}{100}\right)^4 \right]. \tag{2}$$

Dans cette formule, la température T_e, appelée ci-dessus température de la chambre de combustion, est plus exactement la température correspondant à la valeur moyenne I de la chaleur totale des fumées à la sortie de la chambre de combustion ; a, est un coefficient dépendant de la nature de la flamme et de la disposition de la chambre de combustion. Nous admettrons a = 3,5, valeur indiquée par Schulte (VDI — Zt du 1er janvier 1927) pour la flamme du charbon pulvérisé.

Nous admettrons également que la température T_0 des parois est constante et égale à 523° absolue (250° C). La valeur de T_e n'étant généralement pas inférieure à 1.300°. il est évident que même une variation sensible de T_0 n'a pas d'influence sur la valeur de H_r.

La combinaison des équations (1) et (2) donne:

$$H_i + n L_0 I_0 = 3{,}5 \frac{S_r}{1000} \left[\left(\frac{\theta_e + 273}{100}\right)^4 - 750 \right] + IW. \tag{3}$$

Une remarque faite par Rosin (VDI — Zt du 19 mars 1927) permet de simplifier sensiblement cette expression.

Rosin a constaté que pour tous les combustibles solides, quelle que soit la composition du combustible, les valeurs de V_0 et L_0 sont des fonctions linéaires du pouvoir calorifique inférieur (H_i) du combustible :

$$V_0 = 0{,}915 \frac{H_i}{1000} + 1{,}5, \tag{4}$$

$$L_0 = 1{,}01 \frac{H_i}{1000} + 0{,}5, \tag{5}$$

d'où

$$W = V_0 + (n-1) L_0 = 0{,}915 \frac{H_i}{1000} + 1{,}5 + (n-1) \left(1{,}01 \frac{H_i}{1000} + 0{,}5\right). \tag{6}$$

Il s'ensuit que dans l'équation (3), les termes H_i, nL_0 et W sont seulement des fonctions de H_i et n (excès d'air).

Cette simplification est très importante, car elle permet de ne pas tenir compte de la composition chimique du combustibe pour déterminer les valeurs de V_0 et L_0.

D'autre part, Rosin a fait remarquer que dans la limite de la précision industrielle, la chaleur totale I des fumées, quel que soit le combustible solide employé, est une fonction de la température θ_e et de la teneur v_i des fumées en air, où

$$v_i = \frac{(n-1)\,L_0}{V_0 + (n-1)\,L_0}; \tag{7}$$

v_i est donc également une fonction du pouvoir calorifique (H_i) et de l'excès d'air (n).

Dans son travail, Rosin donne un diagramme I — T qui comprend un faisceau de lignes correspondant aux différentes valeurs de v_i; un graphique auxiliaire permet de déterminer les valeurs de v_i en fonction de H_i et n.

Le diagramme I — T de Rosin tient compte de la dissociation d'après les indications de Menzel. Celle-ci ne devient importante que pour $T > 1.600°$ absolus.

Nous verrons plus loin, lors de la description de l'abaque, établi pour résoudre les équations de la combustion, comment ce diagramme s'introduit directement dans l'abaque.

Pour l'expression de I_0 (chaleur totale de l'air) en fonction de t_a, nous utilisons la relation :

$$I_0 = 0{,}32\,(273 - t_a). \tag{8}$$

En remplaçant dans l'équation (3) les valeurs de L_0, I_0 et W par leurs expressions, tirées des équations (4), (5), (6) et (8), on obtient l'*équation* de la *combustion* sous la forme suivante :

$$H_i + 0{,}32\,n\left(1{,}01\,\frac{H_i}{1000} + 0{,}5\right)(273 + t_a) = \frac{3{,}5\,S_i}{1000}\left[\left(\frac{\theta_e + 273}{100}\right)^4 - 750\right] + \\ + I\left[0{,}915\,\frac{H_i}{1000} + 1{,}5 + (n-1)\left(1{,}01\,\frac{H_i}{1000} + 0{,}5\right)\right]. \tag{9}$$

2°. — Description et mode d'emploi de l'abaque.

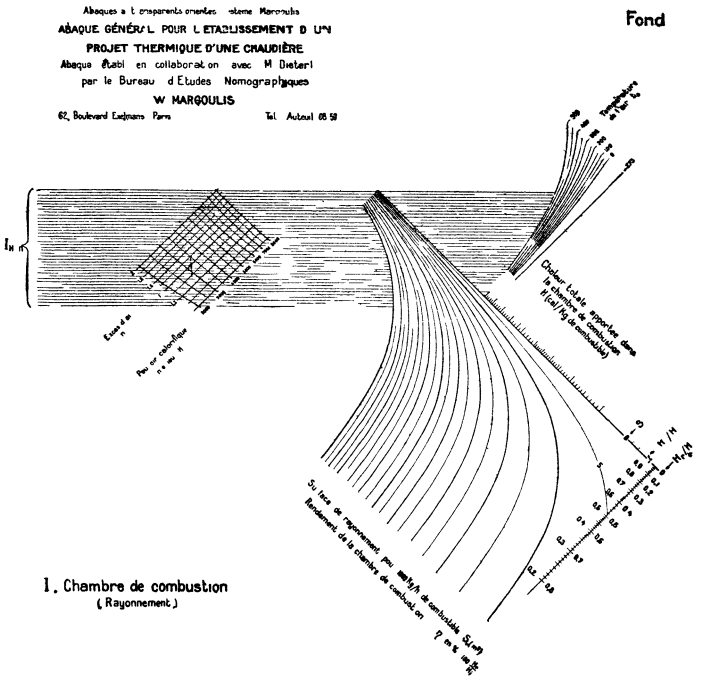
Celui-ci est du système à *transparent orienté*. Il comprend un fond (fig. 125) portant :

un réseau (H_i, n), traversé par un faisceau de droites d'orientation ($I_{H_i,n}$);
un faisceau (t_a);
un faisceau (S_i), qui constitue en même temps le faisceau (η_i);
une échelle (H);
une échelle (H_i H) et (H_e/H).

Et un *transparent* (fig. 125') portant :

un index (ligne non cotée) $I_{H_i,n}$;
un réseau (H_i, n);
un réseau (θ_e, I), *constituant un diagramme* I — T, et portant un faisceau (v_a), tracé d'après les chiffres indiqués par Rosin;
un index I_H (1).

(1) Les fig. 125 et 125' représentent un schéma de l'abaque, celui-ci constituant la propriété des Etablissements Delaunay-Belleville.



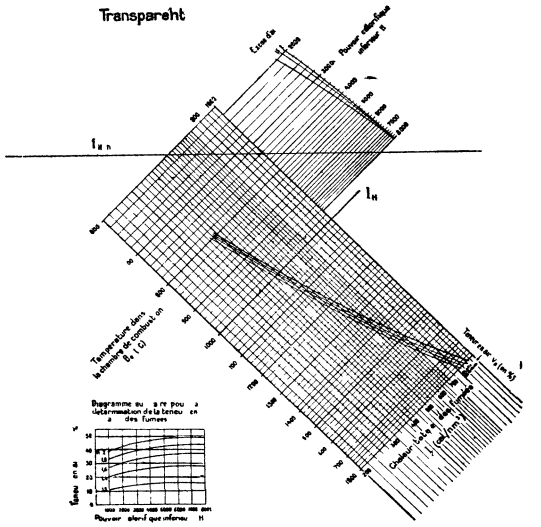


FIG. 125 et 125′.

Les droites (H_i) du réseau (H_i, n) et les droites (I) du réseau (I, θ_c) sont prolongées en dehors des réseaux et servent, les premières, à la détermination de η_1, et les deuxièmes à la détermination de H_i H et de H_c H.

Un graphique auxiliaire donne les valeurs de v_i (teneur en air des fumées) en fonction de H_i et de n.

Le *problème fondamental* consiste à déterminer les valeurs de la température de combustion (θ_c) et du rendement de la chambre de combustion (η_1) en fonction du pouvoir calorifique du combustible (H_i), de l'excès d'air (n), de la température de l'air (t_i) et de la surface rayonnée (S) par 1000 kg de combustible. On pourra en même temps, déterminer les valeurs de I, H, H_i H et H_c H, d'où l'on tirera les valeurs de H_i et H_c.

Mode d'emploi :

a) On détermine sur le diagramme auxiliaire du transparent la valeur de v_a, correspondant aux valeurs données de H_i et n.

b) On fait passer l'index $I_{H_i,n}$ du transparent par le point (H_i,n) du réseau (H_i,n) du fond et on oriente le transparent de façon à rendre parallèle l'index $I_{H_i,n}$ du transparent et les droites d'orientation ($I_{H_i,n}$) du fond.

c) On fait glisser le transparent parallèlement aux droites ($I_{H_i,n}$) du fond, (l'index $I_{H_i,n}$) passant toujours par le point (H_i, n), jusqu'à ce que le point (H_i, n) du réseau (H_i, n) du transparent vienne au droit de la ligne (t_i) du faisceau (t_i) du fond.

d) On lit la valeur de θ_c et I sur le réseau (θ_c, I) du transparent, au point d'intersection de la courbe (v_i) du transparent avec la courbe (S_i) du fond.

e) On lit la valeur de η_1 sur le faisceau (η_1) du fond au droit du point d'intersection de la droite (H_i) avec la droite (I) du transparent.

f) On lit la valeur de H sur l'échelle (H) du fond au point d'intersection de cette échelle avec l'index I_H du transparent.

g) On lit les valeurs de H_i H et H_c H sur les échelles correspondantes du fond, au point de leur intersection avec la droite (I) du transparent.

3°. — Réchauffage de l'air et température de combustion.

Notre travail comprenait une étude nomographique complète de la transmission de la chaleur dans les chambres de combustion. Nous en détachons le texte ci-dessous.

Le réchauffage de l'air constitue le moyen le plus efficace d'augmenter la chaleur absorbée dans la chambre de combustion. En effet, en augmentant convenablement la surface rayonnée de façon à conserver la température de combustion minima, on parvient à absorber dans la chambre de combustion toute la chaleur de l'air de combustion et de diminuer sensiblement la surface du faisceau tubulaire ainsi que la surface de chauffe totale.

L'intérêt principal du réchauffage de l'air consiste donc dans la diminution de la surface de chauffe, et non pas dans l'augmentation de la température de combustion, qui doit rester la plus basse possible (1), tout en assurant un allumage facile et une bonne combustion à faible allure.

La question de savoir quelle est la *relation entre l'augmentation de la température de combustion et l'augmentation de la température de l'air* présente cependant de l'intérêt, surtout au point de vue du *fonctionnement* d'une chaudière. Dans chaque cas particulier notre abaque permet de répondre instantanément à cette

(1) Afin que la température de l'air puisse s'en rapprocher le plus possible, auquel cas on pourrait absorber dans la chambre de combustion (avec une surface de chauffe très faible) la totalité du pouvoir calorifique du combustible.

question ; le même abaque permet également de mettre en évidence quelques règles générales.

Il faut en premier lieu préciser les conditions dans lesquelles nous allons comparer les températures de combustion et de l'air. Il nous semble que le seul cas pratiquement intéressant est celui d'une même chaudière fonctionnant, avec le même combustible et sensiblement le même excès d'air, à des allures différentes. Nous ferons donc varier la quantité horaire de combustible brûlé et nous examinerons pour chaque allure l'influence du réchauffage de l'air sur la température de combustion.

Etudions un exemple, relatif à un combustible, de 7.000 cal/kg de pouvoir calorifique, brûlant avec un excès d'air de 1,155, correspondant à 16 % de CO_2.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus au moyen de l'abaque.

	Température de l'air t_a	30°	200°	400°
	Augmentation de t_a.	0°	170°	370°
1	Température de combustion θ_e. .	875°	900°	930°
	Augmentation de θ_e.	0°	25°	55°
2	θ_e.	1280°	1315°	1360°
	$\Delta\theta_e$.	0°	35°	80°
3	θ_e.	1430°	1480°	1540°
	$\Delta\theta_e$.	0°	50°	110°

Note. — 1 correspond à une allure 100.000, 2 à 500.000, 3 à 1.000.000 cal/h/m2 libérées.

Nous voyons que, contrairement à l'opinion de certains auteurs, l'*augmentation de la température de combustion due à un réchauffage déterminé de l'air est d'autant plus grande, que l'allure est plus élevée et que la température de combustion est plus grande* (1).

Ceci est un *fait général* qui s'explique d'ailleurs très simplement : quand l'allure et la température de combustion sont très élevées, le rendement de rayonnement est très faible, il tend vers O, quand l'allure tend vers l'infini. La quantité de chaleur rayonnée devient par conséquent relativement de plus en plus faible, toute la chaleur apportée par l'air passe dans les produits de la combustion et élève par conséquent leur température.

Par contre, quand l'allure est faible, le rendement de rayonnement augmente, la chaleur apportée par l'air est rayonnée en grande partie et le reste n'augmente que faiblement la température des produits de combustion (2).

La démonstration de ce que nous venons de dire peut être également effectuée nomographiquement, au moyen de l'abaque. Il suffit de remarquer qu'un accroissement de t_a correspond à un glissement horizontal du transparent d'une certaine longueur. Or ce glissement correspond à une augmentation de la température θ_e, d'autant plus grand que θ_e est plus grand (à cause de la graduation de l'échelle

(1) On constate ainsi que c'est à faible allure, c'est-à-dire dans le cas où l'accroissement de la t° de combustion présente le plus d'intérêt, que le réchauffage de l'air se montre le moins efficace.

(2) Quand l'allure est faible, la variation de la température dans le foyer est très prononcée, car la flamme ne remplit pas la chambre. Mais notre raisonnement reste sensiblement juste en ce qui concerne la température des produits de la combustion à la sortie de la chambre. Voilà pourquoi il serait rationnel de remplacer la notion de la t° de combustion. impossible de définir, par celle de la t° des produits de la combustion à la sortie du foyer.

θ_e), que la courbe se rapproche plus de $S_1 = 0$ et que $dI/d\theta_c$ (c'est-à-dire la chaleur spécifique) est plus faible. Les deux premières conditions sont remplies pour l'allure la plus élevée, l'augmentation de la chaleur spécifique pour l'allure la plus élevée tend à diminuer l'accroissement de la température, mais son influence est négligeable.

§ 2. — Réchauffairs à plaques.

En 1926 j'ai établi, à la demande de la Société des Foyers automatiques, un abaque pour la détermination des éléments de construction et de fonctionnement des rechauffeurs d'air « Roubaix » (1). Cet abaque a rendu les plus grands services à la Société ; la meilleure preuve en est que le Service des Ventes seul consomme régulièrement chaque année une trentaine d'exemplaires pour l'établissement de ses devis.

Je vais décrire ci-dessous un nouvel abaque établi en 1928, complètement différent de l'ancien et marquant un gros progrès sur celui-ci.

On connaît le principe des réchauffairs à plaques, ils sont constitués (v. fig. 126) par la juxtaposition, en plus ou moins grand nombre, suivant la surface d'échange à obtenir, d'éléments formés par des canaux plats en tôle L'air et les

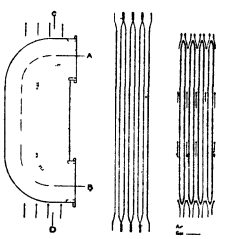


Fig. 126. — *Schéma d'un réchauffair à plaques.*

fumées circulent en sens inverse de façon à obtenir le maximum de rechauffage de l'air de combustion.

On trouvera au § précédent une note sur l'intérêt que présente ce réchauffage utilisé actuellement dans tous les groupes vaporisateurs.

Le mouvement des fumées s'effectue sous l'action du ventilateur qui assure la circulation générale des fumées à travers la chaudière ; le mouvement de l'air est obtenu par un ventilateur séparé.

L'abaque relie les quatre variables de *construction* : n'a (nombre d'éléments pour 10.000 kg h de fumées x la profondeur de l'élément), b (longueur), e_1 et e_2 (écartement des parois) aux sept variables de *fonctionnement* : $\rho = \frac{\theta_e - \theta_s}{\theta_e - t_e}$ (coefficient d'utilisation), T_{m1} et T_{m2} (températures absolues moyennes des fumées et de l'air), P_1 (poids horaire des fumées), P_1 P_2 (P_2 — poids horaire de l'air), $\Delta = \Delta_1$ Δ_2 (pertes de charge des fumées et de l'air).

t_e, t_s et θ_e, θ_s sont les températures d'entrée et de sortie de l'air et des fumées.

---

(1) Dans la 1re partie nous avons décrit deux abaques pour la *détermination des températures de l'air et des fumées dans un réchauffair* (voir fig. 36 et 37) que nous avions établis à la même époque.

Les équations représentées par l'abaque sont :

$$(1) \qquad 1{,}02 \frac{P_f}{P_a} (\theta_e - \theta_s) = t_s - t_e.$$

Cette expression traduit l'égalité entre la chaleur abandonnée par les fumées et celle reçue par l'air.

$$(2) \qquad \frac{2\,nabK}{P_f c_f} = \frac{1}{1-m} \ln \frac{1-m\rho}{1-\rho} = C,$$

C — est la *caractéristique* du réchauffair, K — le coefficient de transmission de chaleur, d'après la formule de Latzko. C_f — la chaleur spécifique des fumées, $m = P_f/P_a$.

$$(3) \qquad \Delta = \Delta_f + \Delta_a,$$

où Δ_f et Δ_a sont les pertes de charge comprenant des termes dus au frottement (formule de Blasius) et d'autres dus aux accidents de route.

La valeur de Δ — perte de charge totale — peut être avantageusement remplacée par la valeur de la puissance utile ou motrice absorbée par les ventilateurs.

Le *schéma* (fig. 127) reproduit d'une façon rigoureuse, sauf en ce qui concerne les cotes des différents éléments géométriques, l'abaque définitif.

Des flèches pour chaque variable indiquent le sens dans lequel cette variable augmente.

Tel quel, ce schéma suffit, pour une discussion qualitative complète du problème des réchauffairs. Il constitue un exemple très intéressant de l'application des nouvelles méthodes nomographiques à la discussion qualitative d'un problème assez compliqué au moyen d'un *schéma*, dont *l'établissement ne demande que très peu de temps.*

1°. — Description de l'abaque.

Le *fond* porte :

une échelle binaire (ρ, P_a/P_f),

deux autres échelles binaires (P_a/P_f, T_{ma}/T_{mf} et (P_a/P_f, e_a/e_f),

un réseau (Δ — perte de charge totale, C — caractéristique).

Le *transparent* I porte :

un réseau (T_{mf}, e_1).

un réseau (n'ab) sur lequel est tracé le faisceau (n'ab — *surface de chauffe*).

2°. — Détermination des éléments de construction.

Mode d'emploi. — On connaît les températures d'entrée et de sortie des fumées et de l'air, les valeurs de P_f et P_a et la valeur limite de la perte de charge totale.

Il s'agit de déterminer les valeurs de (n'a) et (b) pour des valeurs données de e_a et e_1.

a) On calcule les valeurs de $\rho = \frac{\theta_e - \theta_s}{\theta_e - t_e}$, T_{mf}, T_{ma}, T_{ma}/T_{mf}, P_a/P_f et e_a/e_f.

b) L'échelle binaire (e_a/e_1, P_a/P_f) donne le point a ; l'échelle binaire (T_{ma}/T_{mf}, P_a/P_f) donne le point b ; l'intersection des lignes à 2 cotes passant par les points a et b donne le point c.

c) L'intersection de la ligne à 2 cotes, passant par le point d de l'échelle binaire (ρ, P_a/P_f) avec la droite (Δ) donne le point e.

d) On fait coïncider la point c' du réseau (T_{mf}, e_1) du transparent I, correspondant aux valeurs données de T_{mf} et e_1, avec le point c du fond et on oriente le transparent

de façon à rendre parallèles les horizontales (e_f) du transparent I aux horizontales (C) du fond.

e) Au droit du point e, on lit sur le réseau (b, n'a) du transparent I, les valeurs de b et n'a (point e').

L'étude du *fonctionnement* d'un réchauffair sera effectuée en déterminant au moyen de l'abaque d'après les valeurs de P_a P_t et n'a, d'abord la valeur de ρ (d'ou l'on tire les températures de sortie) et ensuite la valeur de Δ.

3° — Voyons maintenant comment on résout au moyen du nouvel abaque le problème suivant : DÉTERMINER LES DIMENSIOS D'UN RECHAUFFAIR DE FAÇON A RÉALISER LES VALEURS MINIMA DE n'ab ET n, A CONDITION DE NE PAS DÉPASSER LA VALEUR LIMITE DE Δ.

Le minimum de n'ab et de n correspond au minimum du poids et de la main-d'œuvre.

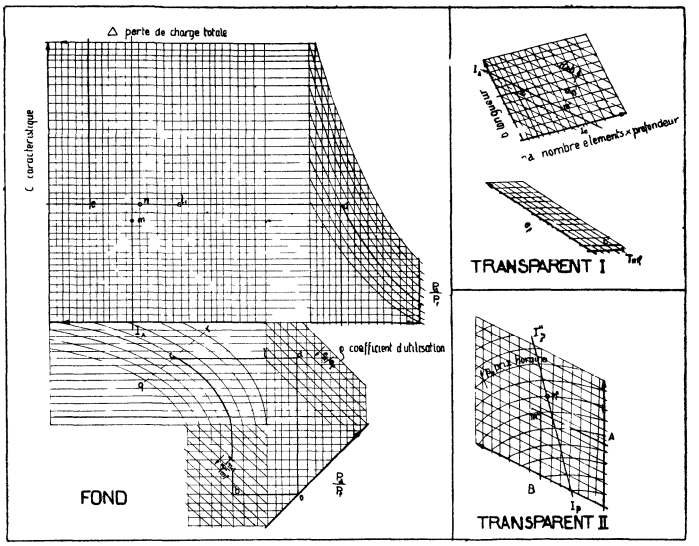


FIG. 127. — *Eléments de construction et de fonctionnement des réchauffairs à plaques.*

a) Le nouvel abaque montre d'une façon immédiate l'intérêt de l'augmentation de Δ, puisque pour des valeurs données de e_a et e_t, on lit directement les valeurs de n'ab et n'a en fonction de Δ; on constate que ces deux valeurs diminuent quand Δ augmente.

b) Pour voir l'influence de la variation de e_f, Δ et e_a/e_t étant donnés, il suffit de tracer sur le réseau (n'a, b) une droite parallèle aux droites (T_{mf}) du réseau (T_{mf}, e_t). On constate qu'une diminution de e_t, diminue la surface, mais augmente le nombre d'éléments.

Comme la diminution de la surface est très faible et comme il ne faut pas réduire le passage des fumées, *on adoptera une valeur plutôt élevée de* e_t, *en se basant également sur l'encombrement* $n[e_t(1 - e_a/e_f) + 6]$ mm *du réchauffair.*

c) L'abaque permet de constater un fait intéressant, à savoir *l'existance d'une valeur optima du rapport* e_a e_t *conduisant à une surface de chauffe minima et ne dépendant que des valeurs de* P_a P_t et T_{ma} T_{mt} La ligne qr du fond représente le lieu géométrique des points de tangence des droites parallèles au faisceau (n'a b) du trans-

parent I, aux courbes à 2 cotes (P_a/P_f, T_{ma}/T_{mf}). Les valeurs de e_a/e_f de l'échelle binaire (e_a/e_f, P_a P_f) correspondant aux différents points de la ligne qr sont celles qui conduisent au minimum de la surface de chauffe.

Ces considérations nous montrent comment on doit résoudre le problème énoncé ci-dessus :

a) On se fixe la valeur de e_f.

b) On fait coincider le point (e_f, T_{mf}) du transparent *tourné de 180°* avec le point (C, Δ) du fond.

c) Au droit du point d'intersection de la courbe à 2 cotes (P_a/P_f, T_{ma} T_{mf}) avec la ligne qr, on lit sur le transparent les valeurs de n'a et b. Comme aux environs de ce point n'ab varie très lentement, *on adoptera sur la courbe à 2 cotes un point un peu plus bas, donnant des valeurs plus élevées de* b *et de* e_a e_f *et moins élevées, et pour cela plus intéressantes. de* n'a.

4°. — Nous venons de voir que l'augmentation de la perte de charge conduisait à la diminution de la surface de chauffe.

Or il est évident, qu'en augmentant la puissance des ventilateurs, on augmente leur prix d'achat, ainsi que les dépenses nécessaires pour leur fonctionnement ; la diminution de la surface de chauffe doit donc avoir une limite. La question des valeurs optima des surfaces de chauffe et des pertes de charge se pose non seulement pour les réchauffairs, mais pour toutes les autres parties de la chaudière: faisceau tubulaire, surchauffeur et économiseur. Sauf erreur, ces problèmes ont été posés et résolus pour la première fois par Thoma dans son ouvrage « Hochleistungs Dampfkesseln ».

Pour un réchauffair le problème est le suivant : DÉTERMINER LE PRIX DE REVIENT HORAIRE MINIMUM, CELUI-CI ÉTANT ÉGAL AU PRIX HORAIRE DU RÉCHAUFFAIR PLUS LE PRIX HORAIRE DU VENTILATEUR.

Le prix annuel du réchauffair par m2 de surface de chauffe dépend des frais (par m2) de premier établissement, de la rémunération du capital et de l'amortissement ; on obtient le prix horaire en divisant par le nombre annuel d'heures de travail du réchauffair; soit A cette valeur.

Le prix horaire des ventilateurs par mm. de perte de charge est proportionnel au débit des fumées et de l'air et dépend d'une part du prix d'achat plus la rémunération du capital plus l'amortissement, supposés proportionnels à la puissance exigée. D'autre part ce prix dépend du cout du cheval/heure de la puissance motrice ; soit B la valeur du prix horaire du ventilateur par mm. de perte de charge.

Le prix horaire de revient de l'ensemble sera $p = Anab + B\Delta$.

Pour trouver rapidement les valeurs corrélatives de n'ab et Δ, correspondant soit à une valeur donnée de p, soit à la valeur minima de p, nous avons établi un *transparent* (II), portant :

un réseau (A, B), un faisceau (p), une droite I″ servant à la détermination du prix minimum.

Le problème de la détermination des dimensions d'un réchauffair sera résolu de la façon suivante :

On connait P_a, P_f, T_{ma} et T_{mf} ; on se donne e_f; la valeur de e_a e_f sera un peu supérieure à celle indiquée par l'intersection de la ligne qr avec la courbe à 2 cotes (P_a P_e, T_{ma}/T_{mf}); soit c ce point.

a) On fait coincider le point (e_f, T_{mf}) du transparent avec le point c; on oriente le transparent de façon à rendre parallèles les droites (e_f) à du transparent aux droites à 2 cotes (e_a/e_f, P_a P_f) du fond.

b) Le *transparent* I restant dans cette position on lui superpose le *transparent* II de façon à faire coïncider le point m″ correspondant aux valeurs connues de A et B avec l'intersection de l'index I'_A du *transparent* I et de l'index I_A du fond. Ce point d'intersection est indiqué par les points m et m′. On oriente le *transparent* II de façon à rendre parallèles les droites (A) aux droites (n′ab) du *transparent* I, ou bien les droites (B) du *transparent* II aux droites (Δ) du fond.

c) Au droit de la droite ed du fond, correspondant aux valeurs données de ρ et P_a P_1, on lit les valeurs corrélatives de b, n′a, n′a b (*transparent* I) et de p (*transparent* II).

d) On voit immédiatement que la valeur minima de p est indiquée par le point de tangence n″ de la droite (C) du fond à la courbe (p) du transparent II. La droite I''_p du *transparent* II réunit ces points de tangence.

Il suffit donc de prendre son intersection avec la droite C du fond pour déterminer les dimensions cherchées de n′a et b, conduisant au prix horaire minimum de revient.

Empressons-nous de dire que cette solution présente surtout de l'intérêt pour l'utilisateur : quant au constructeur des réchauffeurs, il peut être amené à une solution toute différente. Ainsi il peut adopter une surface plus grande pour vendre un matériel plus important ; il peut aussi proposer une surface plus faible, correspondant à un prix d'achat plus faible, que celui de ses concurrents, Ces solutions, tout en conduisant à des valeurs très différentes de n′ab et Δ, peuvent cependant correspondre à une valeur de p, peu différente de p optimum. Enfin, il n'est pas impossible que le constructeur puisse intéresser son client en lui présentant un calque du *transparent* II portant le faisceau (p), ainsi que la trace de la droite (C) du fond cotée en valeurs de la surface de chauffe et de la perte de charge, ou bien un tableau numérique résumant ces résultats, et en demandant au client de choisir lui-même la solution.

Quoi qu'il en soit, le constructeur a tout intérêt à être renseigné sur la solution optima, d'autant plus que la détermination de cette solution demande quelques minutes seulement.

§ 3. — Circulation d'eau dans les chaudières.

(*Vapeur et Force motrice*, N° 4, *Mai* 1927).

La connaissance de la vitesse et de la teneur en vapeur à la sortie des tubes d'eau, faisant partie soit du faisceau tubulaire, soit des murs d'eau du foyer, a une grande importance, car si leurs valeurs dépassent certaines limites fixées par la pratique, les tubes peuvent brûler.

Dans son ouvrage : « Die Leistungsteigerung von Grossdampfkesseln » (Berlin 1922), le Dr Münzinger a étudié d'une façon détaillée la circulation d'eau dans les chaudières. Cette étude est divisée en deux parties : dans la première, l'auteur établit la relation existant entre la vitesse de l'eau à l'entrée du tube de montée et la valeur du flux de chaleur traversant la paroi, ainsi que les dimensions et la disposition des tubes de montée et de descente. Il arrive à la conclusion, confirmée par la pratique, que la vitesse d'entrée, peu élevée pour les faibles valeurs du flux de chaleur, passe par un maximum quand ce flux augmente, puis diminue lentement. Nous admettrons que la variation de la vitesse en fonction du flux de chaleur est connue ; la deuxième partie de l'étude du Dr Münzinger permet alors de déterminer la vitesse et la teneur en vapeur à la sortie du tube en fonction de la vitesse à l'entrée, du flux de chaleur et des dimensions du tube.

1°. — Equations.

Soient :

v_1 — la vitesse d'entrée de l'eau dans le tube (en m/sec).
v_2 — la vitesse de sortie du mélange eau-vapeur du tube (en m/sec).
s_2 — la teneur volumétrique en vapeur du mélange à la sortie du tube.
L — la longueur du tube (en m.).
d — le diamètre intérieur du tube (en m.).
f — la surface extérieure du tube, traversée par le flux de chaleur ; pour un tube sans ailettes de diamètre extérieur d_a, $f = \pi d_a L$ (en m^2).
p — la pression absolue (en kg/cm^2).
γ_s — le poids spécifique de la vapeur (en kg/m^3).
γ_w — le poids spécifique de l'eau (en kg/m^3).
r — la chaleur de vaporisation (en cal/kg).
H — le flux de chaleur horaire traversant l'unité de surface de la paroi du tube (en $cal/m^2/h$).

Les relations établies par M. Münzinger peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(1) \qquad S_2 = 1 - \frac{1 - 0{,}000354 \frac{f}{d^2} \frac{H}{v_1} \frac{1}{r\gamma_w}}{1 + 0{,}000354 \frac{f}{d^2} \frac{H}{v_1} \left(\frac{1}{\gamma_s} - \frac{1}{\gamma_w}\right) \cdot \frac{1}{r}}$$

$$(2) \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1 + 0{,}000354 \frac{f}{d^2} \frac{H}{v_1} \left(\frac{1}{\gamma_s} - \frac{1}{\gamma_w}\right) \cdot \frac{1}{r}.$$

Ce sont ces équations que représente notre abaque, fig. 128 et 128'.

2°. — Description et mode d'emploi de l'abaque.

Cet abaque, du type à *transparent* guidé, comprend

un *fond* portant l'échelle $\frac{f}{d^2}$ (rapport de la surface de chauffe au carré du diamètre inférieur du tube) et le réseau p, s_2 (pression et teneur en vapeur) ;

un *transparent*, portant l'échelle H (flux traversant la paroi) et le réseau v_1, v_2 (vitesses à l'entrée et à la sortie du tube).

Mode d'emploi. — Ainsi que nous l'avons dit plus haut, il s'agit généralement de déterminer les valeurs de la vitesse (v_2) et de la teneur en vapeur (s_2) à la sortie du tube, les valeurs de la pression (p), du flux (H), de la surface de chauffe (f) et du diamètre intérieur (d) étant données. On commence par calculer la valeur de f/d^2.

On fait coïncider ensuite les échelles (H) du *transparent* et (f/d^2) du fond et on fait glisser une échelle sur l'autre jusqu'à ce que le point (H) vienne au droit du point (f/d^2), les cotes de ces points correspondant aux valeurs données de H et f/d^2.

Au droit de l'intersection de la droite (v_1) du *transparent* avec la courbe (p) du fond on lit, sur le fond la valeur de s_2 et sur le *transparent*, la valeur de v_2.

Exemples. — 1° Données : H = 60.000 $cal/m^2/h$; p = 20 kg/cm^2 ; d = 0,05 m. ; d = 0,057 m. (tube sans ailettes) ; L = 6 m. ; v_1 = 1,8 m/sec. d'où $f/d^2 = \pi d_a (L\ d^2) = 430$, et l'on trouve v_2 = 3,85 m/sec., s_2 = 0,53.

2° Même tube, mais p = 200 kg/cm^2. On trouve v_2 = 3,4 m/sec. et s_2 = 0,725.

Si l'on estime que la teneur en vapeur, ainsi obtenue pour un tube donné, est

trop élevée, on peut se poser le problème de la détermination de la valeur de f/d^2 (c'est-à-dire des dimensions du tube) pour ne pas dépasser avec des valeurs données de H et v_1, une certaine teneur (s_2) en vapeur.

Dans ce cas, on fera glisser l'échelle (H) le long de l'échelle (f/d^2), jusqu'à ce que la droite (v_1) du *transparent* passe par le point (s_2. p) du fond. Au droit du point (H), on lira la valeur cherchée de f/d^2.

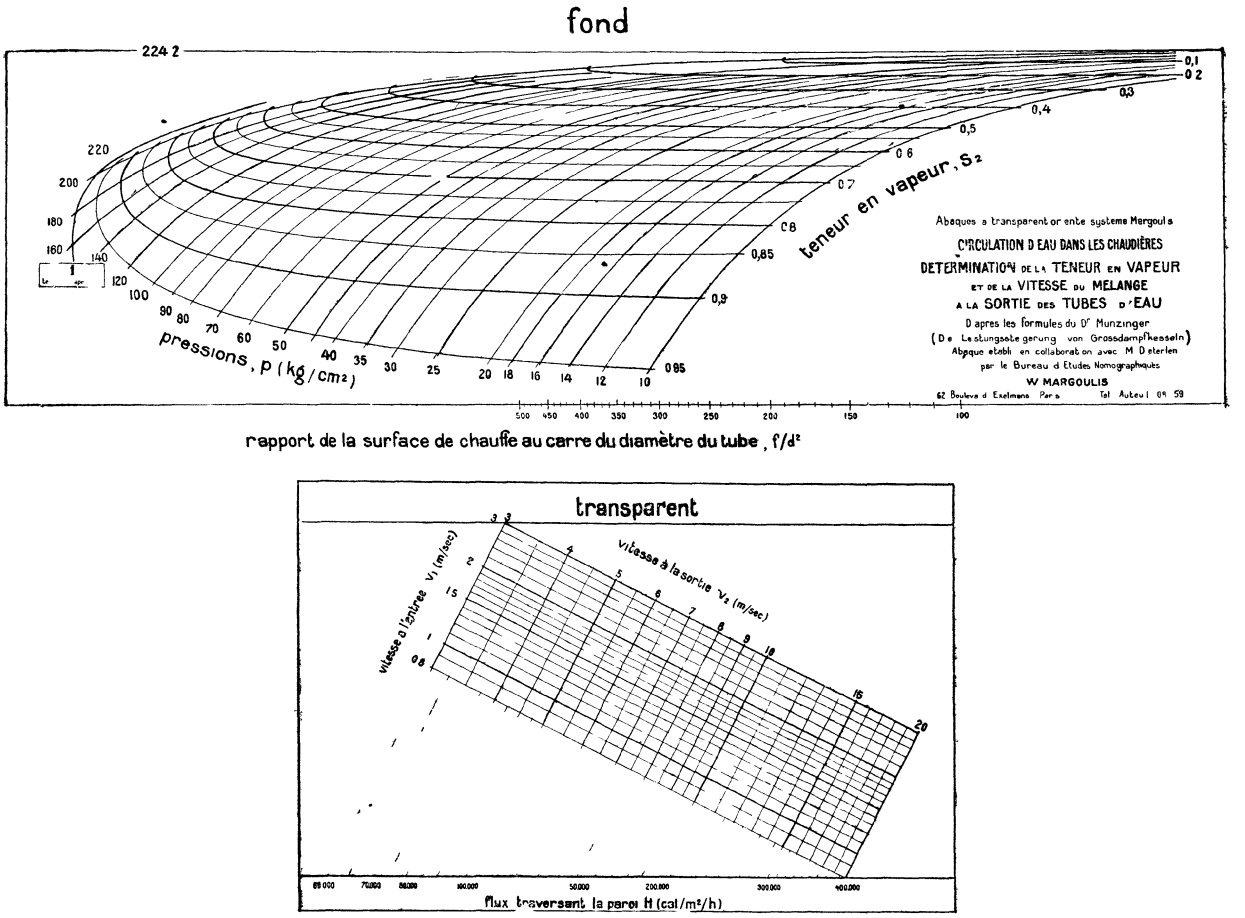


FIG. 128 et 128'.

3°. — ETUDE NOMOGRAPHIQUE DE LA CIRCULATION D'EAU DANS LES CHAUDIÈRES.

Sous la forme qui leur a été donnée, les relations (1) et (2) permettent de se rendre immédiatement compte, sans passer par l'abaque, de l'influence des valeurs de f, d, H et v_1, sur les valeurs de s_2 et v_2.

On voit notamment que, pour une valeur déterminée de la pression, la teneur en vapeur augmente quand la surface de chauffe et le flux augmentent et que le diamètre intérieur et la vitesse de l'entrée diminuent.

D'autre part, la vitesse à la sortie augmente quand la vitesse à l'entrée, la surface de chauffe et le flux augmentent et que le diamètre intérieur diminue.

Par contre, il est assez difficile de se rendre compte de l'influence de la pression, alors que l'abaque la met immédiatement en évidence.

C'est pourquoi on a tenu à faire figurer sur l'abaque les pressions depuis 10 jusqu'à 220 kg/cm² (la pression critique, correspondant à une chaleur de vaporisation nulle, étant de 224,2 kg/cm²).

Si l'on veut connaître la variation de la teneur et de la vitesse à la sortie en fonction de la pression, pour des valeurs déterminées de f, d^2, H et v_1, il suffit, le transparent étant mis en place, de suivre la droite v_1.

On constate alors le fait intéressant suivant : quand la pression augmente, la vitesse à la sortie diminue constamment, alors que la teneur en vapeur diminue d'abord, puis (pour une valeur assez élevée de la pression, généralement supérieure à 100 kg/cm²) passe par un minimum, augmente ensuite rapidement et devient égale à l'unité pour des pressions, généralement supérieures à 200, mais inférieures à 224,2 kg/cm².

Remarque. — L'espace du fond à gauche de la courbe $s_2 = 1$ correspond à des longueurs du tube telles que l'eau est complètement vaporisée, avant même de sortir du tube. Il suffirait dans ce cas de glisser le transparent vers la droite jusqu'à ce que le point (v_1, p) appartienne à la courbe $s_2 = 1$. La valeur correspondante de f indiquerait la longueur du tube à partir de laquelle l'eau est complètement vaporisée.

A la pression critique, l'eau est toujours complètement vaporisée ; en effet, la chaleur de vaporisation étant nulle, il suffit du moindre apport de chaleur pour transformer l'eau en vapeur et surchauffer celle-ci.

Il semble à première vue que pour des pressions inférieures à 100 kg/cm², l'augmentation de la pression diminue la teneur en vapeur et serait donc favorable à la conservation des tubes.

Mais il ne faut pas oublier que nous avons admis que la vitesse à l'entrée restait constante. Dans son ouvrage, cité plus haut, M. Münzinger a étudié l'influence de la pression sur la vitesse à l'entrée, mais seulement entre les limites assez restreintes de 10 à 20 kg/cm². Pour ces pressions, la vitesse à l'entrée ne variait pas sensiblement.

D'après une plus récente étude de M. Münzinger (Die Wärme, 11/3/27), la vitesse à l'entrée (dans un cas particulier) passe de 1,73 ms (10 kg/cm²) à 2,02 ms (27 kg/cm²), puis diminue : 1,66 ms à 100 kg/cm².

Quoi qu'il en soit, pratiquement ce sont les faibles pressions qui conduisent aux teneurs en vapeur les plus élevées. Si à ces pressions la vaporisation complète n'est, pour ainsi dire, jamais atteinte, par contre on atteint facilement des teneurs supérieures à 0,6, qui sont déjà excessives.

4°. — Détermination du fonctionnement d'un tube d'eau.

Il peut être utile de connaître les vitesses et les teneurs en vapeur à la sortie d'un faisceau tubulaire ou d'un écran d'eau existants, en fonction des allures de la chaudière.

Pour effectuer cette détermination, il faudra se donner la variation de la vitesse à l'entrée en fonction du flux. On pourra tracer la courbe correspondante sur le transparent, le réseau (v_1, v_2) constituant en même temps un réseau (H_1, v_1). On déterminera ensuite, comme dans l'exemple I, pour chaque groupe de valeurs de H et

v_1, les valeurs correspondantes de s_2 et v_2 et on les inscrira sur la courbe ($H - v_1$) du transparent. Le tableau ci-dessous résume les données numériques d'un exemple.

$p = 20$ kg/cm², $d = 0{,}05$ m, $d_a = 0{,}057$ m., $L = 6$ m, d'où $f/d^2 = 430$.

$H =$	60.000	100.000	200.000	300.000	400.000	cal/m²/h
$v_1 =$	1,8	1,9	1,92	1,83	1,72	m/sec.
$s_2 =$	0,530	0,645	0,785	0,855	0,898	
$v_2 =$	3,85	5,25	8,7	11,9	15,3	m/sec.

Remarque. — Les valeurs ci-dessus de H et v_1 sont celles qui ont été calculées par M. Münzinger au moyen de sa théorie de la circulation de l'eau. Mais elles doivent être corrigées, ainsi que le fait remarquer cet auteur, en tenant compte du fait que la circulation de l'eau ne commence que pour une certaine valeur de H, égale environ à 20.000 (alors que la théorie donne $v_1 = 0$ pour $H = 0$) et que d'une façon générale la vitesse réelle est inférieure à la vitesse calculée, car les bulles de vapeur montent plus rapidement que l'eau. Cette différence, pour les valeurs moyennes de H est de 0,2 à 0,4 m/sec. Pour $H < 20.000$, il n'y a pas de circulation d'eau, mais il y a dégagement de bulles de vapeur, la teneur en vapeur ne tend donc pas vers 0, comme l'indique le calcul, mais au contraire vers l'unité.

Ces corrections ne portent que sur la relation entre v_1 et H ; elles ne touchent pas les équations (1) et (2) qui sont rigoureuses, ainsi que l'abaque qui les représente.

En résumé, la teneur en vapeur passe par un minimum, mais pour les valeurs usuelles de H, les valeurs réelles de s_2 sont plus élevées que les valeurs calculées.

Par contre, la vitesse réelle à la sortie est inférieure à la vitesse calculée.

CHAPITRE V

Divers

§ 1. — Convoi remorqué par une locomotive.

(*Abaque établi en* 1922.)

Cet abaque (fig 31 et 31′) a été décrit d'une façon très détaillée dans la première partie de ce travail, p. 59 ; il montre d'une façon particulièrement frappante l'intérêt des nouvelles méthodes nomographiques. La formule qu'il représente, ainsi que le mode d'emploi, sont indiqués par la légende inscrite sur le fond.

§ 2. — Étude nomographique pour la détermination des coefficients d'utilisation dans les projets d'éclairage.

(*Revue Générale de l'Electricité*, N° du 22 septembre 1928.)

La comparaison, à laquelle nous avons procédé au moyen de l'abaque que nous allons décrire, et qui a porté sur trente-six cas différents, a montré un accord remarquable entre la théorie exposée par M. Dourgnon (1) et les expériences de MM. Harrison et Anderson La théorie de M Dourgnon peut donc être appliquée en toute confiance par la prédétermination des coefficients d'utilisation dans les cas les plus compliqués, nécessitant jusqu'à présent des expériences longues et coûteuses. Ainsi se trouve completement justifié l'établissement sur demande de la Société pour le Perfectionnement de l'Eclairage, d'un abaque, permettant la détermination quasi instantanée des coefficients d'utilisation, alors que le calcul serait tellement laborieux, que pratiquement il ne pourrait pas être envisagé d'une façon systématique. On trouvera d'autre part dans notre étude certaines considérations, qui constituent une contribution interessante à la méthode de M. Dourgnon, et notamment une méthode de détermination du flux direct utile et du flux direct atteignant le plafond, au moyen de *courbes caractéristiques de la source lumineuse et l'établissement de la notion du coeffisient caractéristique du local*

1°. — Résumé de la méthode de détermination des coefficients d'utilisation. La valeur du coefficient d'utilisation C est donnée par l'expression

$$(1) \qquad C = \frac{\Phi_u}{\Phi} = \varphi'_p K_p + (1 - \varphi'_u - \varphi'_p) K_m + \varphi'_u,$$

où Φ_u est le flux utile; Φ, le flux total; φ'_u, le rapport du flux utile direct atteignant le plan utile au flux total: φ'_p, celui du flux direct atteignant le plafond au flux total ; K_p et K_m, des fonctions des quatre variables suivantes : f_p, facteur de réflexion du pla-

(1) J. Dourgnon : Nouvelle methode de prédétermination des coefficients d'utilisation dans les projets d'éclairage d'espace clos. *Revue générale de l'Electricité*, 11 février 1928.

fond; f_m, facteur de réflexion des murs ; α' et β', rapport des côtés a et b du plan utile à la hauteur h' du plafond au-dessus du plan utile.

En résumé, le coefficient d'utilisation est une fonction de six variables, soit

$$C = f(\varphi'_u, \varphi'_p, f_p, f_m, \alpha', \beta').$$

2°. — Détermination des valeurs du flux utile direct et du flux atteignant le plafond: courbes caractéristiques d'une source lumineuse. — Considérons d'abord un plan utile rectangulaire avec une source lumineuse placée au droit du centre de ce plan. Le procédé indiqué par M. Dourgnon, et qui constitue un développement d'une méthode présentée par M. Cohu, conduit à l'expression suivante de la valeur du flux utile direct.

$$\varphi_u = \sum (2K_1 + 2K_2 - 1)\, 2\pi I_{\theta_1, \theta_2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

Pour déterminer φ'_u nous proposons la méthode suivante :

Posons

$$e_{1u} = \frac{a}{2h'} \quad \text{et} \quad e_{2u} = \frac{b}{2h'},$$

les rapports des côtés du plan utile au double de la hauteur de la source lumineuse au-dessus du plan utile ; K_1 et K_2 sont les valeurs correspondantes des coefficients d'utilisation partiels, données dans le travail de M. Cohu; I_{θ_1}, I_{θ_2}, est l'intensité lumineuse dans l'angle solide $\theta_1 - \theta_2$, et son quotient par Φ, l'intensité lumineuse relative. On calculera une fois pour toutes les valeurs de φ'_u pour différentes valeurs de e_{1u} ($e_{1u} < e_{2u}$) et pour différentes valeurs de $\frac{e_{1u}}{e_{2u}}$.

Nous avons tracé sur le fond de l'abaque (fig. 129) les courbes

$$\varphi'_u = f\left(e_{1u}, \frac{e_{1u}}{e_{2u}}\right)$$

pour la lampe nue de 100 w utilisée par MM. Harrison et Anderson, dans leurs expériences. Les valeurs de $\frac{e_{1u}}{e_{2u}}$ varient de 1 : 1 (local carré) à 1 : ∞ (local rectangulaire, d'un allongement infini), en passant par les valeurs intermédiaires de 1 2 et 1/3. Ces courbes étant assez resserrées, nous croyons que ces quatre valeurs du rapport ci-dessus suffisent pour tous les cas de la pratique et peuvent être adoptées comme valeurs normalisées.

Pour $e_{1u} = 0$, $\varphi'_u = 0$; quand e_{1u} augmente, φ'_u tend rapidement vers la valeur du flux rélatif émis par la source lumineuse au-dessous du plan horizontal.

Le même diagramme porte les courbes des valeurs du flux direct atteignant le plafond, $\varphi' = f\left(e_{1p}, \frac{e_{1p}}{e_{2p}}\right)$; le calcul de ces courbes s'effectue au moyen de la même méthode en introduisant les rapports $\frac{0{,}5\,a}{(h' - h)}$ et $\frac{0{,}5\,b}{(h' - h)}$, $h' - h$ étant la distance de la source au plafond. Ces courbes tendent également vers la valeur de φ'_p correspondant au flux relatif émis au-dessus du plan horizontal.

Dans le cas considéré, les valeurs limites sont $\varphi'_u = 0{,}526$ et $\varphi' = 0{,}474$. Les courbes φ'_u et φ'_p constituent les *courbes caractéristiques d'une source lumineuse.*

Toute la difficulté consiste dans le calcul de ces courbes, qui, même avec des feuilles de calcul préparées d'avance, est très long et fatigant ; je ne crois pas qu'un

calculateur puisse en faire plus de deux en une journée. Nous avons imaginé un abaque mécanique spécial, permettant la détermination plus rapide de ces courbes et surtout rendant le travail moins fatigant et moins sujet à erreur

Il serait désirable que les constructeurs fassent figurer dans leurs catalogues les courbes caractéristiques de leurs appareils, tracées suivant des règles conve nues (1), au même titre que les courbes photométriques qui y figurent déjà, mais dont l'utilisation n'est pas immédiate

On verra plus loin que dans la méthode de M Dourgnon, c'est la détermination de φ_u et de φ'_p, qui présente le plus de difficultés ; il y a donc tou. intérêt à faciliter la besogne de ceux qui se serviront de l'abaque en leur préparant d'avance les courbes caractéristiques pour toutes les sources lumineuses qu'ils auront à envisager.

3°. — Expressions de K_p et K_m. Coefficient caractéristique d'un local. — Les expressions de K_p et K_m données par M. Dourgnon dans son article precité sont

$$K_p = \frac{(1-\eta) f_p + \xi \eta \eta' f_p f_m}{1 - \xi \eta \eta' f_p f_m}; \tag{2}$$

$$K_m = \xi \eta' f_m \frac{(1-\eta) f_p - 1}{1 - \xi \eta \eta f_p f_m}, \tag{3}$$

où

$$\xi = \frac{1}{1-(1-2\eta') f_m}; \quad \eta = 1 - F_1(\alpha', \beta');$$

$$\eta' = \frac{\eta}{2\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\right)}$$

$$F_1(\alpha', \beta') = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\alpha'^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\beta'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}\right.$$

$$+ \sqrt{1+\frac{1}{\beta'^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\alpha'}{\sqrt{1+\beta'^2}} - \frac{1}{\alpha'}\,\mathrm{arc\,tg}\,\beta'$$

$$- \frac{1}{\beta'}\,\mathrm{arc\,tg}\,\alpha' + \frac{1}{2\alpha'\beta'}\log_e(1+a'^2)$$

$$\left. + \frac{1}{2\alpha'\beta'}\log_e(1+\beta'^2) - \frac{1}{2\alpha'\beta'}\log_e(1+\alpha'^2+\beta'^2)\right].$$

Dans ces formules, les diverses grandeurs sont définies plus haut, sauf η qui est le quotient de la portion du flux rayonné par le plafond atteignant les murs et η' qui est le quotient d'un flux rayonné par les murs atteignant le plafond, par ce flux lui-même.

En effectuant les calculs en vue de l'établissement de l'abaque, nous nous

(1) Ces règles pourraient être notamment celles que nous avons adoptées pour notre abaque et qui présentent l'avantage d'éviter la confusion des courbes φ'_u et φ'_p.

sommes aperçus que la fonction $F_1(\alpha', \beta')$ pouvait se réduire à l'expression remarquablement simple

$$F_1(\alpha', \beta') = \sqrt{1 + H^2} - H$$

où

$$H = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} = \frac{h'}{a} + \frac{h'}{b},$$

grandeur que nous avons appelée *coefficient caractéristique du local* et désignée par la lettre *H*, pour marquer que *le coefficient caractéristique est égal à la somme des rapports de la hauteur aux côtés.*

Les expressions de η et η' deviennent également très simples

$$\eta = 1 - F_1(\alpha', \beta') = 1 + H - \sqrt{1 + H^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{2H}.$$

Voici quelques valeurs particulièrement intéressantes de H, η et η'.

H	0	1	∞
η	0	0,586	1
η'	0,5	0,293	0

On arrive à cette conclusion importante, que les valeurs de η, η' et par conséquent de K_p et K_m ne dépendent pas des valeurs particulières des dimensions a, b, h' du local, mais d'une certaine fonction H de ces dimensions, telle que $H = \frac{h'}{a} + \frac{h'}{b}$.

La méthode de détermination des coefficients d'utilisation permet de remplacer par une notion scientifique et très simple les différentes formes empiriques de l'indice d'un local, qui avaient été proposées jusqu'à présent.

4°. — Description et mode d'emploi de l'abaque. — La simplification introduite par le coefficient caractéristique du local, réduit les équations (2) et (3) rapportées plus haut, aux expressions plus simples :

$$K_p = f_1(f_p, f_m, H) \quad \text{et} \quad K_m = f_2(f_p, f_m, H).$$

Nous allons montrer sur un exemple le mode d'emploi de l'abaque ; à cet effet nous avons indiqué sur la figure 129 représentant l'abaque les différents points correspondant à l'exemple suivant :

$$H = 2{,}4\,; \; f_p = 0{,}5\,;$$

$$f_m = 0{,}8\,; \quad \varphi'_p = 0{,}85\,; \quad \varphi'_u = 0{,}4.$$

a) On commence par déterminer au moyen de l'abaque à entrecroisement placé à gauche du fond le point K_p, K_m $\frac{\eta}{1 - \eta}$. A cet effet, on marque sur la verticale o — o le point a_1, intersection de cette verticale avec l'horizontale aa_1, passant par le point a de l'échelle binaire (H, f_m) correspondant aux valeurs données de H = 2,4 et f_m = 0,8.

De même, on marquera sur l'horizontale o — o.o5 le point b_1, intersection avec cette horizontale de la verticale passant par le point b de l'échelle binaire (H. f_p), correspondant auv valeurs données de H = 2.4, f_p = o.5 Le point c cherché se trouve à l'intersection des courbes à deux cotes (H, f_m) et (H, f_p) passant la première par le point a_1,

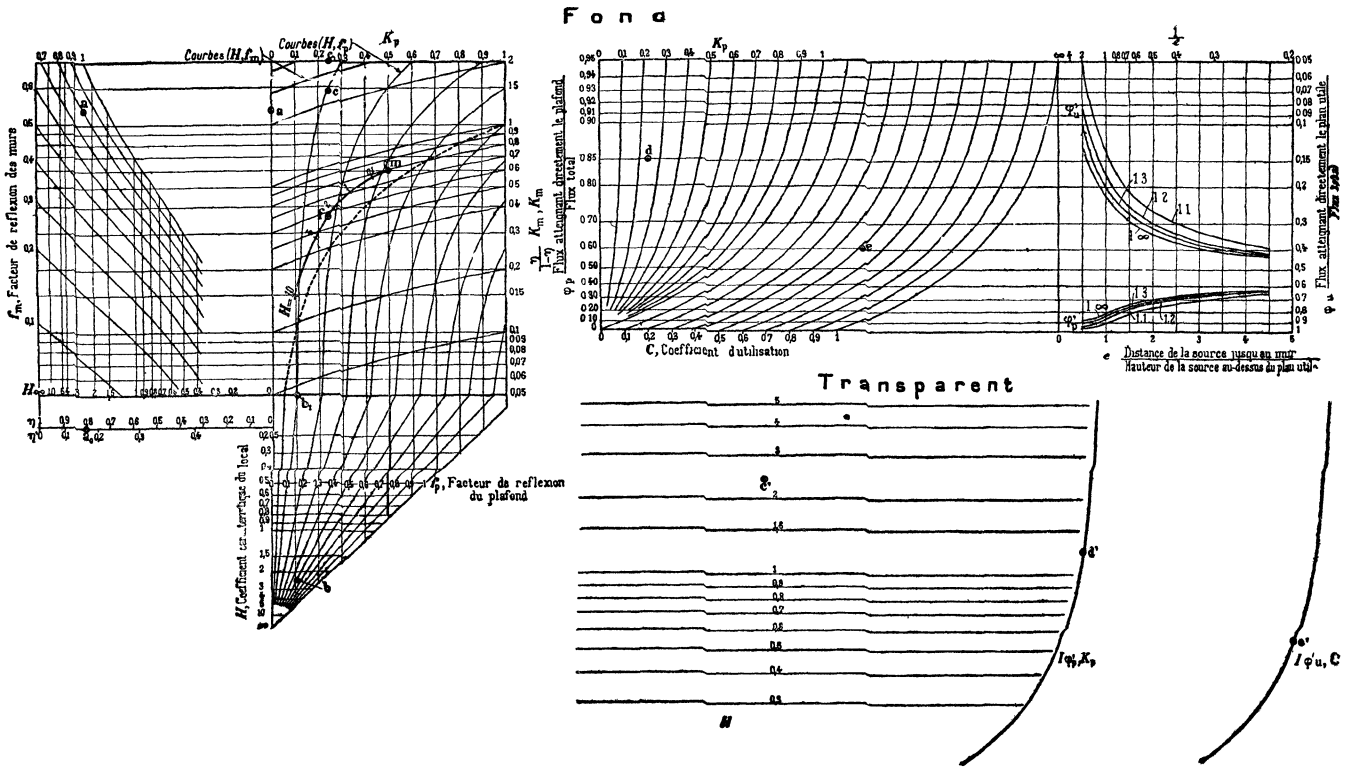


FIG. 129 et 129′. — *Coefficients d'éclairage.*

et la deuxième par le point b_1. On lit au point c_1, intersection de la verticale passant par le point c avec l'échelle K_p, la valeur de $K_p = 0,242$. On marque sur le réseau (K_p, φ'_p) placé à droite, le point d, correspondant à $K_p = 0,242$, $\varphi'_p = 0,85$.

b) On fait passer la droite ($H = 2,4$) du transparent par le point c et l'on fait tourner le transparent autour de ce point de façon à rendre parallèle cette droite aux horizontales de la figure. On fait alors glisser le transparent parallèlement à lui-même, la droite $H = 2,4$ passant toujours par le point c, jusqu'à ce que l'index $I_{\varphi'_p, K_p}$ du transparent passe par le point d du fond. On lit ensuite sur le réseau (C, φ') au droit du point d'intersection e de l'index $I_{\varphi_u, C}$ du transparent avec la droite ($\varphi_u = 0,4$) du fond, la valeur cherchée de $C = 0,52$.

§ 3. — Détermination de la participation de l'Etat aux bénéfices de la Société Pechelbronn.

(*Etabli en 1924 à la demande de la Société Pechelbronn*).

J'ai tenu à donner ici, quoiqu'il ne soit pas d'ordre technique, un exemple, tiré de la pratique de mon Bureau d'Etudes Nomographiques et relatif à une question financière.

Il s'agissait de déterminer chaque année le montant de la participation (P_n) de l'Etat aux bénéfices d'une Société, le rapport de cette participation au capital investi (C'_n) étant une fonction discontinue du rapport du superbénéfice (S_n) à ce même capital investi.

Le superbénéfice est la différence entre le bénéfice brut d'une part et la somme des amortissements, des dépenses d'exploitation et de l'intérêt réservé aux actionnaires, d'autre part. Les amortissements et l'intérêt réservé aux actionnaires dépendent des travaux complémentaires effectués pendant l'année considérée, du montant des travaux complémentaires effectués pendant les années précédentes, du taux de l'intérêt réservé aux actionnaires pendant la même année et de ces mêmes taux pendant les années précédentes.

En résumé, le *prélèvement* (P_n) dépend, d'une part, du bénéfice brut (B_n), du taux de l'intérêt (η_n), des travaux complémentaires (t_n) et des depenses d'exploitation (e_n) effectués pendant *l'année considérée* (indice n), et, d'autre part, du montant des travaux complémentaires (t_1, t_2, ..., t_{n-1}) et des taux de l'intérêt réservé (η_1, η_2, ..., η_{n-1}) pendant les *années précédentes*.

Le calcul du prélèvement de l'Etat est assez compliqué, il fallait, paraît-il, une demi-journée au bureau de comptabilité de la Société pour traiter un seul cas.

L'abaque à transparent orienté, que j'ai établi, est constitué par un *fond* portant trois faisceaux : P_n (prélèvement de l'Etat), C'_n (capital investi) et S_n (superbénéfice) et une échelle B_n (bénéfice brut). L'orientation et la graduation de celle-ci restent toujours les mêmes, mais son origine dépend des travaux complémentaires et du taux de l'intérêt réservé des années antérieures à l'année en exercice.

Le *transparent* porte deux réseaux (η_n — taux de l'intérêt, e_n — dépenses d'exploitation) et (η_n, t_n travaux complémentaires).

Le mode d'emploi de l'abaque, que nous ne reproduisons pas ici, est

$$P'(e_n, \eta_n) \vdash\!\dashv P(B_n), \quad x'_\infty \vdash\!\dashv 0, \quad P'(t_n, \eta_n) \vdash\!\dashv L(P_n, C'_n, S_n)$$

Remarque I. — L'intérêt pratique de l'abaque consiste surtout dans la rapidité avec laquelle on détermine pour l'année en exercice (c'est-à-dire un fois l'échelle B_n tracée) les valeurs corrélatives de B_n, C'_n, P_n et S_n. En effet, les valeurs du bénéfice brut (B_n), des dépenses d'exploitation (e_n) et des travaux complémentaires (t_n) ne sont pas intangibles : on peut les modifier dans certaines limites en transportant par

exemple une certaine partie des dépenses d'exploitation dans le chapitre des travaux complémentaires, etc., etc.

Au moment où il s'agit d'établir définitivement la balance des comptes d'une année, il est très important de pouvoir se rendre immédiatement compte de la répercussion que de semblables modifications peuvent apporter aux autres chapitres de la balance: prélèvement de l'Etat, superbénéfices... et il y a un double intérêt à ne pas confier ce travail aux bureaux de comptabilité.

Remarque II. — Quand on a adopté une solution quelconque, il est intéressant de conserver sa trace en la représentant sur le fond par un ligne brisée, dont les segments représentent les différentes données, la ligne brisée à gauche du segment représentant l'effet des années antérieures à l'année en exercice.

Une telle représentation parle bien à l'esprit et nous la voyons très bien pendant une Assemblée générale placée devant chacun des actionnaires, de même que nous voyons un Conseil d'administration discutant de la balance au moyen de l'abaque.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

PREMIERE PARTIE

Théorie générale de la représentation plane des équations.

Avant-Propos IX

Notes préliminaires.

A. — *Formes des équations représentables par des abaques* 1

B. — *Les contacts et la méthode de notation des abaques de M. d'Ocagne.*

§ 1. — Les éléments constitutifs des abaques 2
§ 2. — La notion du contact 4
§ 3. — Notation des abaques 5

CHAPITRE PREMIER.

Abaques à contacts ponctuels.

A. — *Représentation directe, sans dissociation des équations.*

§ 1. — Théorie.
1° Trois degrés de liberté : deux translations et une rotation 7
2° Deux degrés de liberté : une translation et une rotation 9
3° Deux degrés de liberté : deux translations 10
4° Un degré de liberté : une translation 11
5° Un degré de liberté : une rotation 11
6° Zéro degré de liberté : plan unique 12

§ 2. — Quelques exemples d'abaques comportant plusieurs opérations.
1° Trois degrés de liberté 12
2° Deux degrés de liberté 13
3° Un degré de liberté 14

§ 3. — Exemples :
1° Nouvel abaque à transparent tournant de la formule de la déviation du compas 14
2° Deuxième abaque pour la détermination des angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère 19

§ 4. — Enumération des abaques établis 20

B. — *Représentation au moyen d'une dissociation simple, double ou triple.*

§ 1. — Paramètres communs.
1° Dissociation simple 21
2° Dissociation double.
a) Deux translations : transparent orienté 22
b) Translation et rotation 23
3° Dissociation triple 24

§ 2. — Variables et paramètres communs.
1° Dissociation double : deux translations 25
2° Dissociation double : translation et rotation.

Pages.

a) La variable commune représente une translation 25
b) La variable commune représente une rotation 26
3° Dissociation triple : deux translations et une rotation 26
§ 3. — La théorie morphologique de M. d'Ocagne. Classification des abaques.. 29
§ 4. — Exemple. Convoi remorqué par une locomotive 33
§ 5. — Autres exemples de dissociations étudiées dans l'ouvrage 36

C. — *Systemes d'équations.*
§ 1. — Premier cas.
1° Abaque pour la détermination de la densité et de la pression de l'air.. 37
2° Enumération des abaques établis 40
§ 2. — Deuxième cas.
1° Premier exemple. Choix des hélices aériennes 40
2° Deuxième exemple. Emploi d'échelles binaires 41
3° Enumération des abaques établis 42
§ 3. — Systèmes d'équations et dissociation 42

D. — *Emploi de coordonnées polaires* 44

CHAPITRE II.

Abaques à contacts tangentiels.

A. — *Forme des équations* 48
B. — *Exemples.*
§ 1. — Abaque pour la détermination des caractéristiques d'un moulinet optimum 52
§ 2. — Abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère. 54
§ 3. — Les abaques à points alignés à contacts tangentiels 55

CHAPITRE III.

Méthode générale pour le tracé des abaques.

A. —*Cas général d'un abaque à 3 degrés de liberté.* 59
Remarque. — Réseaux de points à 2 cotes et échelles binaires 59
B. — *Exemple. — Abaques pour la détermination des temps de montée des avions*.... 60
Remarque. — Déplacements des origines des systèmes cotés ou non cotés 65
C. — *Méthode de calcul par le trait* 66

CHAPITRE IV.

Les abaques à points alignés de M. d'Ocagne.

A. — *La méthode des points alignés considérée comme un cas particulier de la théorie générale* 68
B. — *Quelques types d'abaques à transparent orienté pour formes canoniques d'équations représentables par la méthode des points alignés.*
§ 1. — Abaques à échelles graduées.
1° 3 variables 71
2° 4 variables 73
§ 2. — A propos des abaques à entrecroisement 73
§ 3. — Abaques à réseaux de points à 2 cotes..... 74

CHAPITRE V.

Les abaques de MM. Mehmke, Lallemand, Goodseels, Gercevannof et Luckey.

A. — *La méthode des images logarithmiques de M. Mehmke.*
§ 1. — Équation : $ax^m y^n + bx^p y^q + cx^r y^s + 1 = 0$ 75
§ 2. — Équation : $ax^m + bx^p + cx^r + y = 0$ 77
§ 3. — Équations : $x^m + ax^p + bx^q + cx^r + d = 0$ ..... } 78
$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ..... }
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ..... }

Pages.

B. — *Les abaques hexagonaux de M. Lallemand.*
Exemples. — Nouveaux abaques pour la détermination de l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique 80
C. — *Les abaques de M. Goodseels* 81
D. — *La méthode des points équidistants de MM. Gercevannof et Luckey* 82
Exemples : Diamètre d'un arbre travaillant à la flexion et à la torsion. Epaisseur des tôles des Foyers cylindriques 83

CHAPITRE VI.

Dissociation, disjonction, representation simple et composee et nombre des dimensions d'une representation plane.

§ 1. — Définitions donnees par M. d'Ocagne 85
§ 2. — Nos définitions de la dissociation et de la disjonction 86
Exemples :
1° Abaques à un seul plan 87
2° Abaques à points alignés 87
3° Abaques à éléments mobiles cotés 88
§ 3. — Représentation simple et composée 88
1° Les équations décomposées prises deux à deux ne contiennent pas la même variable 88
2° Les équations décomposées prises deux à deux contiennent des variables communes 90
§ 4. — Nombre des dimensions d'une représentation simple 91

DEUXIEME PARTIE

Applications à l'art de l'ingénieur

Résumé 92

CHAPITRE PREMIER.

Les turbo-machines a hélices.

§ 1. — Théorie générale 97
§ 2. — Premier abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices. Application aux hélices propulsives ou sustentatrices 99
§ 3. — Second abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices 101
§ 4. — Détermination des éléments de construction des hélices propulsives et des moulinets aériens d'après la théorie de Dizewiecki 102
§ 5. — Représentations graphiques des caractéristiques et méthodes de choix d'hélices propulsives et de moulinets. Etudes du fonctionnement des groupes motopropulseurs ou motosustentateurs et des groupes moulinets-génératrices 106
§ 6. — Angles d'attaque des hélices propulsives 107
§ 7. — Les hélices sustentatrices.
1° Représentation graphique des caractéristiques des hélices travaillant au point fixe 108
2° Polaires des sustentateurs 111
3° Angles d'attaque des hélices d'hélicoptères 112
4° Détermination des éléments de fonctionnement et de construction des hélices travaillant au point fixe 114
§ 8. — Les ventilateurs-hélices 115

CHAPITRE II.

Aviation. La mécanique nomographique de l'avion.

§ 1. — Pression et densité de l'air 121
§ 2. — Résistance induite des biplans 122

Pages.

§ 3. — **Montée d'un avion** 125
1er abaque : Moteur ordinaire et hélice rigide.
2e abaque : Moteur suralimenté et hélice rigide.
3e abaque : Moteur suralimenté et hélice à pales orientables.

§ 4. — Choix et détermination des dimensions des surfaces d'un avion. Représentation des régimes de vol. Comparaison des voilures.
1° Abaque 127
2° Exemple de comparaison des profils 128

§ 5. — Choix de la voilure d'un avion ou d'un hélicoptère 128

§ 6. — Abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère.
1° Description de l'abaque 130
2° Représentation de la solution adoptée 133
3° Préparation d'un concours d'avions 134

§ 7. — Fonctionnement du groupe avion-moteur-hélice.
1° Développements de la méthode des polaires logarithmiques de Rith. La courbe des performances 136
2° Nouvelle méthode graphique ou nomographique d'étude des performances d'un avion. Influence du souffle de l'hélice 138

§ 8. — Les polaires réduites.
1° Abaque pour la détermination des performances d'avions type 1918.... 141
2° Polaires réduites, type 1913 à 1929 143

§ 9. — Le vol oblique.
1° La méthode Joukowski-Margoulis. Etude du vol de l'avion L. E. 144
2° Abaque pour l'étude du vol des avions-hélicoptères 145
3° Normalisation des modes graphiques de représentation des polaires. Les quatre classes des polaires 147

§ 10. — Rayon d'action et durée de vol des avions et des dirigeables. Les polaires des consommations.
1° Description de l'abaque 149
2° Mode d'emploi de l'abaque 150
3° Application à l'avion Ryan de Lindbergh 152

§ 11. — Stabilité longitudinale des avions.
1° Nouvelle représentation graphique pour l'étude de la stabilité longitudinale des avions 155
2° Note sur l'étude analytique de la stabilité statique et dynamique 155

CHAPITRE III.

Aviation (suite). **Questions diverses.**

§ 1. — Choix et appréciation des montants pour avions 158
§ 2. — Radiateurs pour avions 160
§ 3. — Soufflerie aérodynamiques.
1° Abaque pour la détermination du coefficient d'utilisation d'après la formule de Fritszche 163
2° Nouvel abaque pour la détermination du coefficient d'utilisation 163
3° Représentation graphique du fonctionnement d'une soufflerie à pression variable système Margoulis 165

§ 4. — Bombardement aérien. — Trajectoires des bombes.
1° Abaque de la chute verticale d'un corps 167
2° 1er abaque pour la détermination des trajectoires 168
3° 2e abaque pour la détermination des trajectoires 169
4° 3e abaque pour la détermination des trajectoires 170

§ 5. — Les moteurs à combustion interne.
1°. — Pression moyenne des moteurs d'aviation 171
2°. — Coefficient de régularité des moteurs d'aviation..... 172
3°. — Diagramme pour l'étude des cycles thermodynamiques des moteurs 173

CHAPITRE IV.

Les groupes vaporisateurs.

Pages.

§ 1. — Transmission de la chaleur par rayonnement dans les chambres de combustion 181
§ 2. — Réchauffairs à plaques 187
§ 3. — Circulation d'eau dans les chaudières 191

CHAPITRE V.

Divers.

§ 1. — Convoi remorqué par une locomotive 196
§ 2. — Coefficients d'éclairage 196
§ 3. — Détermination de la participation de l'Etat aux bénéfices de la Société Pechelbronn 201

NOMENCLATURE DES ABAQUES

DEUXIEME PARTIE

Applications à l'art de l'Ingénieur

CHAPITRE PREMIER.

Les turbo-machines à hélices.

Premier abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices.

Application aux hélices propulsives ou sustentatrices ..... 77 et 77'
Deuxième abaque pour l'étude des turbo-machines à hélices ..... 78 et 78'

Abaques pour la détermination des hélices propulsives et des moulinets d'après la théorie de Drzewiecki.

Détermination des hélices propulsives aériennes d'après le coefficient $P_m n^2/V^5$ 79 et 79'
Détermination des moulinets propulsifs aériens d'après le coefficient $P_m n^2/V^5$.. 80
Variation de l'angle d'attaque d'un moulinet optimum 81
Diagramme logarithmique des hélices 82
Diagramme logarithmique des moulinets 83
Transparent pour le choix des hélices ..... 82'
Transparent pour le choix des moulinets et l'étude d'un groupe moulinet-génératrice ..... 83'
Transparent pour le choix des hélices et l'étude du groupe motopropulseur. 82''
Transparent pour l'étude d'un groupe motopropulseur ..... 82'''
Angles d'attaque des hélices propulsives ..... 84 et 84'
Représentation des caractéristiques des hélices au point fixe. Essais Durand-Lesley 85
Représentation des caractéristiques des hélices au point fixe. Essais Margoulis. 86
Angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère. 1er abaque..... 87 et 87'
Angles d'attaque d'une hélice d'hélicoptère. 2e abaque..... 88 et 88'
Poussée et puissance d'hélices travaillant au point fixe..... 89 et 89'
Choix d'un ventilateur et étude de son fonctionnement ..... 90 et 90'

CHAPITRE II.

Aviation. La mécanique nomographique de l'avion.

Pression et densité de l'air ..... 33 et 33'
Montée d'un avion : moteur ordinaire et hélice rigide..... 92 et 92'
— moteur suralimenté et hélice rigide 93
— moteur suralimenté et hélice à pales orientables 94
Détermination de la surface et choix du profil des ailes d'un avion..... 95 et 95'
Comparaison des profils 96
Choix de la voilure d'un avion ou d'un hélicoptère ..... 97 et 97'
Abaque général pour l'établissement d'un projet d'avion ou d'hélicoptère..... 98 et 98'

Pages.

Transparent pour la représentation des régimes de vol d'un avion ..... 98''
Etude des régimes de vol 99
Caractéristique d'une classe d'avions 100
Etude des régimes de vol d'un avion au moyen de la courbe des performances. 101
Etude des régimes de vol d'un avion en tenant compte du souffle de l'hélice. 102
Performances des avions, type 1918 103
Temps de montée des avions, type 1918 104
Polaires réduites des avions de 1913 à 1929 105
Etude du vol oblique de l'avion L.E. 106
Etude du vol oblique des avions-hélicoptères 107
Les quatre classes de polaires d'un avion 108
Rayon d'action et durée de vol des avions et dirigeables..... 109 et 109'
Rayon d'action de l'avion Ryan 110
Etude de la stabilité longitudinale statique des avions au moyen des courbes des centres de poussée 111

CHAPITRE III.

Aviation. Questions diverses.

Choix et appréciation des montants pour avions ..... 112 et 112'
Radiateurs pour avions ..... 113 et 113'
Coefficients d'utilisations des buses pour souffleries aérodynamiques (formule de Fritzsche) 114
Coefficients d'utilisations des buses pour souffleries aérodynamiques (nouvelle formule) 115
Fonctionnement d'une soufflerie système Margoulis 116
Vitesse et durée de chute verticale d'un corps 117
Trajectoires des bombes lancées d'un avion. 1er abaque..... 118 et 118'
Trajectoires des bombes lancées d'un avion. 2e abaque ..... 119 et 118'
Trajectoires des bombes lancées d'un avion. 3e abaque..... 120 et 118'
Pression moyenne des moteurs d'aviation ..... 121 et 121'
Coefficient de régularité d'un moteur d'aviation 122
Diagramme pour l'étude des cycles thermodynamiques des moteurs..... 123
Diagramme pour l'étude des cycles thermodynamiques des moteurs ..... 124_a et 124_b

CHAPITRE IV.

Les groupes vaporisateurs.

Abaque général pour l'établissement d'un projet thermique d'une chaudière. I. Chambre de combustion ..... 125 et 125'
Températures de l'air et des fumées dans un réchauffair. 1er abaque..... 36 et 36'
Températures de l'air et des fumées dans un réchauffair. 2e abaque..... 37 et 37'
Eléments de construction et de fonctionnement des réchauffairs à plaques.... 127
Vitesse et teneur en vapeur à la sortie des tubes d'eau ..... 128 et 128'

CHAPITRE V.

Divers.

Convoi remorqué par une locomotive ..... 31 et 31'
Coefficients d'éclairage ..... 129 et 129'