PIERRE DIVE

Rotations internes des astres fluides

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__115__1_0>

Série A n° 1243
N° d'ordre :
2112

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Pierre DIVE

1re THÈSE — ROTATIONS INTERNES DES ASTRES FLUIDES.

2e THÈSE — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 1930 devant la Commission d'examen

MM. CARTAN . . . . *Président.*
CHAZY. . . . . } *Examinateurs.*
DENJOY . . . . }

PARIS (Ve)
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD
3 et 3bis, place de la Sorbonne
—
1930

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
Prof. honoraires	A. JOANNIS.	
	H. LE CHATELIER.	
	H. LEBESGUE.	
	A. FERNBACH.	
	A. LEDUC.	
	E. HÉROUARD.	
Professeurs	Emile PICARD	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET	Electrotechnique générale.
	F. WALLERANT	Minéralogie
	P. PAINLEVÉ	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN	Chimie générale.
	Emile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM	Physique.
	M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
	E. CARTAN	Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE	Physiologie générale.
	E. VESSIOT	Théorie des fonctions et théories des transformations.
	A. COTTON	Physique générale.
	J. DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	Paul MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	A. MAILHE	Etude des combustibles.
	L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène BLOCH	Physique théorique et physique céleste.
	Henri VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. JACOB	Géologie.
	P. PASCAL	Chimie minérale.
	Léon BRILLOUIN	Théories physiques.
	V. AUGER	Chimie appliquée.
	E. ESCLANGON	Astronomie.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseigt P. C. N.).	L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. GUILLET	Physique	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
C. MAUGUIN	Minéralogie.	F. PICARD	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
L. BLARINGHEM	Botanique.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. DEREIMS	Géologie	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY	Calcul différ. et intégral.	A. DEBIERNE	Radioactivité.
H. BÉNARD	Physique (P. C. N.)	M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physique mathémat.
E. DARMOIS	Physique.		
G. BRUHAT	Physique.		
H. MOUTON	Chimie physique.		

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

A LA MÉMOIRE
DE MON PÈRE

PREMIÈRE THÈSE

ROTATIONS INTERNES DES ASTRES FLUIDES

INTRODUCTION

Envisagées du point de vue de la Mécanique céleste, les études que nous allons exposer, sur les rotations internes d'une masse fluide hétérogène, peuvent être rattachées aux problèmes classiques sur les figures d'équilibre des planètes.

L'origine de ces recherches remonte à Newton, mais c'est Mac-Laurin qui montra le premier qu'une masse fluide homogène, tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme et dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de l'attraction universelle, pouvait affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Jacobi généralisa ensuite cette proposition en faisant voir qu'elle s'étendait aux ellipsoïdes à trois axes inégaux, résultat qui parut alors assez surprenant.

Plus tard Poincaré et Liapounoff établiront qu'il existe, en outre des ellipsoïdes, une infinité de séries de figures d'équilibre et que, parmi ces séries de figures, une seule est stable (1).

L'intérêt théorique des résultats précédents est considérable ; mais il est certain qu'ils ne constituent qu'une première approximation trop éloignée encore de la réalité ; les aplatissements de quelques planètes, ainsi calculés dans l'hypothèse de l'homogénéité, s'étant, en effet, trouvés tous supérieurs aux valeurs observées ou mesurées, en particulier sur Jupiter, Saturne et la

(1) *Acta mathematica*, t. VII ; voir aussi APPELL, *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation*, *Traité de Mécanique rationnelle*, Tome IV.

Terre, il devint évident qu'on ne pouvait, dans cette recherche, faire abstraction de l'hétérogénéité des corps célestes [1].

Déjà Clairaut s'était attaqué à cette difficulté et avait prouvé, dans son ouvrage intitulé *Figure de la Terre tirée des principes de l'Hydrostatique,* qu'un état d'équilibre était possible pour une masse fluide constituée de couches ellipsoïdales homogènes dont la densité croît avec la profondeur, pourvu que la vitesse de rotation de cette masse soit assez faible.

Laplace reprit, mais avec plus de généralité, le problème que s'était posé Clairaut et démontra qu'un sphéroïde fluide hétérogène, tournant lentement d'un mouvement d'ensemble, ne pouvait être stratifié qu'en couches ellipsoïdales.

Ces résultats supposent qu'on puisse négliger le carré de l'aplatissement des couches. Il résulte, en effet, des travaux de MM. Hamy, Volterra et Véronnet qu'en toute rigueur un équilibre relatif est impossible pour un fluide formé de couches ellipsoïdales homogènes. Et, dans son mémoire sur la *Théorie de la Figure des planètes*, M. O. Callandreau a montré qu'en seconde approximation, les surfaces de niveau sont assimilables à des ellipsoïdes de révolution faiblement déprimés entre le pôle et l'équateur.

Pour les mouvements de rotation d'ensemble à vitesse quelconque, M. Wavre a donné une importante relation, strictement géométrique, à laquelle satisfont nécessairement les surfaces d'égale densité. Enfin, tout récemment, il a retrouvé les résultats d'approximation précédents par une voie plus simple et en satisfaisant à un desideratum de convergence formulé par Tisserand à propos d'une série utilisée par Laplace.

Clairaut et Laplace n'avaient envisagé que le cas d'une rotation en bloc. Il est évident que cette hypothèse ne s'impose pas *a priori* pour les astres fluides. Et, en fait, l'observation prouve bien que sur le Soleil, Saturne ou Jupiter les calottes polaires et l'équateur sont animés de rotations différentes.

D'autre part, l'idée de l'existence, à l'intérieur de la Terre, de courants du fluide visqueux dans lequel plongent les continents s'est accréditée de plus en plus chez les géologues depuis que M. Wegener a fait connaître son audacieuse théorie des translations continentales [2].

---

[1] Cf. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 91 et 94.

[2] Wegener, *Genèse des Continents et des Océans*, traduit de l'allemand par M. Reichel Blanchard, édit. Paris.

Nous présentons dans ce mémoire une théorie générale et nouvelle de la masse fluide hétérogène en rotation.

Sans faire aucune supposition sur la définition géométrique des surfaces à densité constante, nous calculons l'expression du carré de la vitesse angulaire dont doit être animée une molécule quelconque du fluide pour qu'il se maintienne dans sa stratification initiale. Nous parvenons ainsi à une condition à laquelle satisfait toute masse fluide en état de rotation permanente.

Dans tous nos calculs nous n'avons tenu aucun compte de la viscosité du fluide étudié ; nous devions donc réserver un paragraphe aux divers arguments qui permettent de considérer les propriétés de nos mouvements comme suffisamment adéquates à la réalité durant une période plus ou moins longue de la vie d'un astre fluide.

Dans le cas particulier où la densité ne dépend que de la pression, nous établissons la forme que doit nécessairement affecter le potentiel newtonien de l'attraction de la masse tournante. Et nous montrons qu'un mouvement irrotationnel permanent ne peut subsister que dans des stratifications limitées par des volumes ayant la connexion du tore.

Nous revenons ensuite au cas général pour donner une extension d'un important théorème de Mécanique céleste dû à Stokes ; puis, poursuivant une analyse assez longue, mais qui nous donne l'occasion de faire quelques remarques intéressantes, nous démontrons que le potentiel de l'attraction d'une planète en un point extérieur est entièrement déterminé par la pesanteur sur sa surface libre et la configuration géométrique de celle-ci.

Signalons aussi la généralisation d'une condition de H. Poincaré, entre la vitesse angulaire du fluide et sa densité moyenne, qui donne lieu pour la Terre à une vérification numérique précise, et l'établissement de deux formules utiles pour la Géodésie.

Dans la deuxième partie nous étudions spécialement les fluides constitués de couches ellipsoidales homogènes infiniment minces. Après nous être assurés qu'il existe des stratifications pouvant être douées de rotations permanentes (quelle que soit la loi de variation de la densité supposée toutefois croissante de la surface au centre), nous faisons une discussion aussi complète que possible des variations de la vitesse angulaire à l'intérieur de la masse.

Le cas des couches ellipsoïdales homothétiques paraissant le mieux convenir à la Terre, nous lui avons consacré un développement important. Ce cas est en outre intéressant du point de vue purement analytique.

Nous dirons, en particulier, à la fin de l'ouvrage, comment, en adoptant la conception des géophysiciens modernes, nous avons été amené à établir un rapprochement entre certains problèmes que pose la théorie des dérives continentales de M. Wegener et les résultats de notre étude sur l'ellipsoïde fluide.

***

Il m'est agréable d'exprimer ici ma gratitude à M. Haag et à M. Rolin Wavre qui, depuis longtemps déjà, se sont intéressés à mes recherches.

Que M. Henri Lebesgue, qui a eu la bienveillance d'encourager ce travail, et M. Chazy, dont les suggestions m'ont été précieuses, veuillent bien croire également à ma vive reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE

ROTATIONS PERMANENTES D'UN FLUIDE HÉTÉROGÈNE

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS ET FORMULES GÉNÉRALES

Nous envisagerons, dans cette étude, le problème de la masse fluide hétérogène en rotation d'un point de vue plus général que celui des travaux publiés depuis Laplace sur cette question.

On avait supposé jusqu'ici que la condition d'orthogonalité du champ de la pesanteur et des surfaces à densité constante, établie par Laplace dans le cas d'une rotation d'ensemble de la masse (1) était nécessaire même lorsqu'on admet la possibilité de mouvements internes.

Nous montrerons au contraire que, si l'on ne s'impose pas, *a priori*, une relation $\rho = f(p)$ entre la densité et la pression, les équations fondamentales de l'Hydrodynamique permettent de définir un mouvement de rotation permanent pour un fluide ne satisfaisant pas nécessairement à la condition restrictive précédente.

Tous les corps naturels étant plus ou moins compressibles et dilatables, nous ne préjugerons rien ni sur la distribution des températures à l'intérieur de la masse, ni sur son degré de compressibilité ; dans le cas général, il existera

---

(1) *Traité de Mécanique céleste* (*Œuvres*, t. II, 1re partie, livre III, p. 74.)

une relation de la forme $\rho = f(p, \tau, \lambda)$ entre la densité ρ, la pression p, la température τ et le paramètre λ dont la valeur dépend de la nature chimique de l'élément du fluide situé au point considéré.

§ I. — Les couches de densité constante doivent être de révolution

1. En toute hypothèse, nous nous donnerons la loi de répartition des densités. Il est presque évident que le mouvement des molécules sur leur trajectoire ne peut être uniforme que si les couches de densité constante sont de révolution ; cela résulte d'ailleurs d'une application simple de l'équation de continuité.

Soient, en effet, x, y, z les coordonnées d'un élément de volume de densité ρ ; u, v, w les composantes suivant les axes de sa vitesse ; t désignant le temps, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \tag{1}$$

Mais, ici, le mouvement étant permanent, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est nul. Prenons oz comme axe de rotation, la composante w de la vitesse sera identiquement nulle, et il viendra :

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \tag{2}$$

Appelons ω la vitesse angulaire de l'élément considéré ; en tenant compte des égalités :

$$u = -\omega y, \qquad v = \omega x, \qquad w = 0$$

le coefficient de dilatation cubique

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

$\frac{\partial l^2}{\partial x}$

s'écrira :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{D(l^2, \omega)}{D(x, y)} \tag{4}$$

$\frac{\partial \omega}{\partial y}$

l^2 étant mis pour $x^2 + y^2$.

Si le fluide envisagé est incompressible, cette expression est identiquement nulle et, par suite, ω ne dépend de x et y que par l'intermédiaire de l ; le mouvement de rotation de l'élément est donc nécessairement uniforme. Inversement, si l'on suppose que la rotation des molécules est uniforme, le coefficient de dilatation cubique est nul, mais cela n'exige pas que le fluide soit incompressible.

De toute façon, l'équation de continuité (2) se réduit à :

$$\omega \frac{D(l^2, \rho)}{D(x, y)} = 0;$$

ω n'étant pas nul, elle exprime que la densité ρ de la masse tournante ne peut être qu'une fonction de l^2 et de z ; et cela revient à dire que les surfaces à densité constante sont de révolution autour de l'axe de rotation.

2. Pour une masse hétérogène douée de mouvements internes, il n'existera donc aucune figure permanente qui ne soit de révolution.

Nous supposerons les couches d'égale densité continues et convexes ; de plus, nous admettrons que leur densité croît avec la profondeur ; cette dernière condition est d'ailleurs nécessaire pour la stabilité des mouvements.

§ 2. — Formules générales

3. Soit U la fonction des forces dues à l'attraction mutuelle des masses ; selon la coutume nous appellerons aussi cette fonction le *potentiel newtonien*, bien que l'expression soit impropre ; et désignons toujours par ρ, p et ω la densité, la pression et la vitesse angulaire en un point du fluide.

Les équations générales de l'Hydrodynamique appliquées aux mouvements de rotation uniforme s'écrivent :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

Elles expriment que les paramètres directeurs $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ de la normale au point (x, y, z) à une surface d'égale pression sont proportionnels aux composantes

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \\ g_y &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \\ g_z &= \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

du vecteur pesanteur $\vec{g}$, résultante de l'attraction et de la force centrifuge. en ce point. On en déduit immédiatement cette propriété générale :

Le champ de la pesanteur est orthogonal aux surfaces d'égale pression.

En particulier, si la surface-limite du fluide supporte une pression uniforme, le vecteur $\vec{g}$ est normal à cette surface en chacun de ses points.

4. Montrons maintenant comment on peut calculer la rotation ω, à partir des équations (5), lorsqu'on suppose connue la répartition des masses en couches d'égale densité.

La stratification étant de révolution autour de l'axe de rotation oz, U, ω, p, ρ, ne dépendent que du carré l^2 et de la cote z du point considéré ; de sorte que le système (5) se réduit aux deux équations indépendantes :

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial l^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}, \tag{8}$$

Multiplions la première équation par dl^2, la seconde par dz et ajoutons-les, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial l^2}\,dl^2 + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right)dl^2 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\,dz. \tag{9}$$

Le mouvement étant supposé permanent, la quantité entre parenthèses du premier membre n'est autre que la différentielle totale exacte de p, et l'on peut encore écrire :

$$dp = \rho\left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right)dl^2 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\,dz\right]. \tag{10}$$

La densité ρ doit donc être un facteur intégrant de l'expression différentielle entre crochets ; ce qui s'exprime par la condition nécessaire et suffisante :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial l^2}\left(\rho\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right). \tag{11}$$

En tenant compte de l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2}\right) = \frac{\partial}{\partial l^2}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)\ [1]$$

---

[1] Ces dérivées partielles sont continues à l'intérieur de la masses ; cf. TISSERAND, *loc. cit.* t. II, p. 21.

elle se réduit à l'équation aux dérivées partielles :

$$2\,\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega^2) \tag{12}$$

que doit satisfaire ω^2 pour définir un régime permanent de rotations.

On remarquera que ρ et U ne dépendent que de la répartition des densités et que, par suite, le déterminant fonctionnel est connu. Dès lors une simple intégration par rapport à z donnera $\rho\omega^2$ à une fonction additive de l^2 près.

5. Pour déterminer cette fonction nous devons faire intervenir une nouvelle hypothèse.

Nous nous placerons dans le cas des corps célestes en exprimant que la masse fluide baigne dans une atmosphère à pression constante.

Soit S $(l^2, z) = o$ l'équation de la surface limite ; elle définit une fonction $z(l^2)$ que nous désignerons par z_e.

En convenant de substituer z_e à z dans les expressions affectées de l'indice e, l'intégration de l'équation (12) donne :

$$\rho\,\frac{\omega^2}{2} = \rho_e\,\frac{\omega_e^2}{2} - \int_z^{z_e} \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)}\,dz. \tag{13}$$

L'intégrale du second membre est déterminée par la stratification ; seule la vitesse angulaire superficielle ω_e reste à calculer.

A cet effet, nous traduirons analytiquement l'hypothèse précédente au moyen du système des deux équations simultanées :

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\rho_e\left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_e + \rho_e\,\frac{\omega_e^2}{2}\right] dl^2 + \rho_e\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_e dz = 0, \\ &\qquad\left(\frac{\partial S}{\partial l^2}\right)_e dl^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_e dz = 0, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

qui doivent être satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de dl^2 et dz ; pour cela il faut et il suffit que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \rho_e\left(\dfrac{\partial U}{\partial l^2}\right)_e + \rho_e\,\dfrac{\omega_e^2}{2} & \rho_e\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)_e \\ \left(\dfrac{\partial S}{\partial l^2}\right)_e & \left(\dfrac{\partial S}{\partial z}\right)_e \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

soit égal à zéro.

On tire de cette condition :

$$\rho_e \cdot \frac{\omega_e^2}{2} = \frac{\rho_e}{\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(S, U)}{D(l^2, z)}\right]_e ; \tag{16}$$

et, en portant cette expression dans la relation (13), on obtient :

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho} \left\{ \frac{\rho_e}{\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(S, U)}{D(l^2, z)}\right]_e - \int_z^{z_e} \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)} dz \right\}. \tag{17}$$

Telle est la *formule fondamentale* qui régit les rotations internes d'une masse fluide hétérogène.

6. Lorsque la rotation d'une masse fluide s'effectue en bloc, les surfaces d'égale densité devant coïncider avec les surfaces d'égale pression, il est nécessaire que la couche superficielle ait une densité constante.

Dans le cas d'un astre fluide doué de mouvements relatifs, cette condition n'est plus impliquée par les équations fondamentales de l'hydrodynamique, mais physiquement, il est vraisemblable de la considérer encore comme réalisée.

On conçoit, en effet, que les diverses substances composant la nébuleuse originelle aient dû se séparer suivant leur nature chimique et se condenser successivement lorsque, pour chacune d'elles, les conditions requises de température et de pression se sont trouvées réalisées. La couche superficielle doit par suite être un mélange sensiblement homogène des dernières vapeurs qui se sont simultanément précipitées ; et comme, d'autre part, cette couche supporte une pression nulle ou la pression uniforme d'une atmosphère gazeuse, on pensera sans doute que notre supposition est fort naturelle.

7. Elle s'exprime par le système des deux équations :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial l^2}\right)_e dl^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_e dz = 0 \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial l^2}\right)_e dl^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_e dz = 0 ; \end{cases} \tag{18}$$

ces équations devant être satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de dl^2 et dz, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\left[\frac{\partial S}{\partial l^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial l^2}\right]_e = 0 ;$$

en tenant compte de cette relation, l'équation (17) s'écrira :

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho}\left\{ \frac{\rho_e}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)}\right]_e - \int_z^{z_e} \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)}\, dz \right\}. \tag{19}$$

Si donc on pose :

$$\Omega = \frac{2}{\frac{\partial \rho}{\partial z}} \cdot \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)}, \tag{20}$$

il vient :

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_z^{z_e} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z}\, dz\right) \tag{21}$$

ou encore, en intégrant par parties :

$$\omega^2 = \Omega + \frac{1}{\rho}\int_z^{z_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial z}\, dz. \tag{22}$$

8. Il est intéressant de remarquer que Ω *est précisément l'expression que l'on obtiendrait pour le carré de la vitesse angulaire dans le cas où le champ de la pesanteur serait normal aux couches de densité constante.*

Pour s'en assurer il suffira de répéter, pour une surface d'égale densité quelconque, le raisonnement (n° 5) qui nous a permis de calculer ω^2 sur la couche superficielle, ρ prenant ici la place de S.

M. Wavre, qui s'est spécialement occupé de la recherche des stratifications susceptibles de satisfaire à la condition ci-dessus, a donné de Ω un développement en série nouveau procédant suivant les puissances du cosinus de l'angle des rayons vecteurs du point potentié et d'un point potentiant.

— Ces calculs et les résultats négatifs que nous rappellerons dans la deuxième partie de ce mémoire permettent de penser que *les stratifications cherchées sont en nombre très restreint* (1).

9. En prenant comme variables indépendantes l^2 et ρ au lieu de l^2 et z les équations (21) et (22) prennent la forme plus élégante :

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_\rho^{\rho_e} \Omega\, d\rho\right), \tag{23}$$

$$\omega^2 = \Omega + \frac{1}{\rho}\int_\rho^{\rho_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\, d\rho. \tag{24}$$

---

(1) Cf. R. Wavre, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **184**, 1927, p. 739 et P. Dive t. **184**, 1927, p. 371.

On établira d'ailleurs sans difficulté que, dans le système de variables indépendantes actuel l'expression (20) de Ω prend la forme simple :

$$(25) \qquad - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_{\rho = \text{const.}} \text{ (1)}$$

De sorte qu'en faisant apparaître le potentiel U les formules (23) et (24) deviennent :

$$(26) \qquad \omega^2 = \frac{2}{\rho} \left[\int_\rho^{\rho_e} \frac{\partial U}{\partial l^2} d\rho - \rho_e \left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_{\rho = \rho_e} \right],$$

$$(27) \qquad \omega^2 = - 2 \left[\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{1}{\rho} \int_\rho^{\rho_e} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial l^2} d\rho \right].$$

Sur la couche superficielle :

$$(27') \qquad \omega_e^2 = - 2 \frac{dU_e}{dl^2}.$$

10. Si au lieu de prendre comme variables l^2 et ρ on prend l^2 et p, l'expression de ω^2 affecte une forme plus comprimée encore.

En effet, si l'on imagine un déplacement élémentaire s'effectuant sur une surface d'égale pression, l'équation (10) donne, en désignant par $(\partial U)_p$ une variation à p constant :

$$(\partial U)_p \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_p dl^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_p dz = - \frac{\omega^2}{2} dl^2,$$

d'où l'on tire :

$$(28) \qquad \omega^2 = - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_{p = \text{const.}}$$

Mais cette formule n'exprime pas directement ω en fonction de la stratification.

§ 3. — Conditions auxquelles doit satisfaire la stratification

11. Remarquons tout d'abord que, la masse fluide étant située toute entière à distance finie, il existe deux valeurs de z_e, z_e' et z_e'' correspondant

---

(1) Pour simplifier l'écriture nous supprimerons dorénavant les parenthèses et l'indication $\rho = \text{const.}$; il sera entendu, sauf avis contraire, qu'il s'agit d'une dérivée partielle prise dans le système de variables l^2 et ρ.

à un même point intérieur ; ce couple de valeurs est d'ailleurs unique puisque la surface limite du fluide est supposée convexe. Mais ω^2 devant être parfaitement défini en chaque point, on doit avoir (22) :

$$\omega^2 = \Omega + \frac{1}{\rho} \int_z^{z'_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz = \Omega + \frac{1}{\rho} \int_z^{z''_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz.$$

Or, ρ et U sont des fonctions *uniformes* de l^2 et z et il en est, par suite, de même de Ω. Il faut donc qu'on ait l'identité :

$$\int_{z'_e}^{z''_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz \equiv 0 \tag{29}$$

pour toute valeur de l^2. On peut encore l'écrire

$$\int_A^B \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial l^2} d\rho \equiv 0 \tag{30}$$

l'intégration étant faite suivant une parallèle à l'axe de rotation menée par un point intérieur quelconque, et A et B désignant les points d'intersection de cette parallèle avec la surface limite.

12. Il est évident que la condition exprimée par les identités (29) et (30) est certainement satisfaite lorsque les couches d'égale densité sont symétriques par rapport à un plan équatorial.

Dans le cas des équilibres relatifs M. Lichtenstein [1] et M. Plancherel ont démontré la nécessité de l'existence de ce plan.

Ainsi que l'a fait observer M. Wavre leur démonstration s'étend d'elle-même au cas où l'on admet la possibilité de rotations internes tout en supposant encore que le champ de la pesanteur est normal aux couches d'égale densité.

13. Nous allons montrer que, dans le cas des mouvements de rotation les plus généraux, on se retrouve encore dans les conditions de validité de cette démonstration *lorsque la vitesse angulaire* ω *a la même valeur en deux points* A *et* B, *appartenant à une même couche* ρ, *et situés à la même distance* l *de l'axe*, ce qui exige que $\omega(\rho, l^2)$ soit une fonction uniforme de ρ et l^2.

---

[1] *Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung, Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der HimmelsKörper*, p. 69 ; et *Mathematische Zeitschrift* B. 28, H. 4, p. 635 à 640, 1928.

Remarquons alors que, dans ce système de variables, l'équation (12) devient :

$$(31) \qquad -2\frac{\partial U}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\omega^2),$$

et sous cette forme il est visible qu'elle implique l'uniformité de la dérivée $\frac{\partial U}{\partial l^2}$; de sorte qu'en désignant par U_A et U_B les valeurs de U en A et B, on a :

$$U_A = U_B + \chi(\rho),$$

la fonction χ ne pouvant dépendre que de ρ. Mais cette fonction est nécessairement nulle, car, sur le parallèle de contact de la couche ρ et des tangentes parallèles à l'axe, on a évidemment $U_A = U_B$, puisque U est une fonction uniforme de z et l^2. On a donc bien pour toute valeur de l :

$$(32) \qquad U_A = U_B.$$

C'est sur cette égalité que repose l'élégante démonstration de MM. Lichtenstein et Plancherel à laquelle nous prions le lecteur de se reporter. Bornons-nous à dire ici que ces auteurs utilisent la notion de points d'accumulation des bornes supérieures des milieux des cordes A B.

14. Dans ce qui suit, *nous ne considérerons que des stratifications possédant un plan équatorial de symétrie*. En le prenant comme plan oxy, il suffira d'étudier les mouvements internes des éléments de cote positive. On pourra aussi prendre comme variables indépendantes l^2 et z^2 au lieu de l^2 et z ; les formules (19), (21) et (22) se transformeront en celles qu'on obtient en y substituant simplement z^2 à z, z_e^2 à z_e.

On aura, par exemple :

$$(33) \qquad \omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2\right).$$

15. Observons maintenant que la vitesse angulaire devant être réelle, *le second membre de l'équation précédente doit être essentiellement positif*. On en déduit que seules les stratifications associées à une expression de Ω vérifiant l'inégalité :

$$(34) \qquad \rho_e \Omega_e > \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2$$

peuvent être douées de rotations internes permanentes.

Sur la couche superficielle l'intégrale du second membre s'annule ; *par* *suite, Ω_e doit être positif*, et comme $\left(\frac{\partial \rho}{\partial z^2}\right)_e$ est négatif, en vertu de notre hypothèse sur la croissance de la densité avec la profondeur, la formule :

$$\Omega_e = \frac{2}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial z^2}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}\right]_e$$

montre que le déterminant $\left[\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}\right]_e$ doit être négatif, c'est-à-dire que l'on a :

$$- \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial l^2}\right)_e}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial z^2}\right)_e} > - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_e}{\left(\frac{\partial U}{\partial z^2}\right)_e}. \tag{35}$$

Cette condition exprime que les surfaces équipotentielles du champ d'attraction newtonien (U = const.) coupant la couche extérieure sont moins aplaties que cette dernière.

On voit que si cette propriété s'étend à toutes les couches d'égale densité, Ω est positif dans tout le domaine du fluide ; l'inégalité (34) est alors certainement satisfaite et l'on est assuré de l'existence d'un régime permanent de rotations.

16. Si la masse est constituée de couches sphériques, le jacobien

$$\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}$$

est évidemment nul pour toute loi de variation de la densité ; Ω et ω sont identiquement nuls ; le fluide ne peut être qu'au repos absolu.

17. Enfin, on peut se demander si pour toutes les stratifications soumises aux restrictions énoncées la pression p, déduite des équations fondamentales, est positive en tout point du fluide.

Il suffirait de montrer que p est positif en tout point situé au-dessus du plan de symétrie $z = 0$.

Or cela résulte très simplement de l'équation :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}; \tag{5}$$

en effet, en se souvenant que la densité croît constamment avec la profondeur, il est presque intuitif que la composante de l'attraction, parallèle à oz, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ est négative en tout point M de cote positive ; il en est alors de même de $\frac{\partial p}{\partial z}$, et comme la pression p_e est positive (ou nulle) sur la surface limite elle l'est *a fortiori* au point M.

Mais on peut établir analytiquement cette proposition de la manière suivante :

Ecrivons l'équation (5) sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(\iiint \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial c} \, d\tau + \rho_e \iint \frac{\gamma}{r} \, d\sigma \right), \tag{36}$$

en utilisant une relation connue de la théorie du potentiel newtonien [1] dans laquelle c désigne la cote d'un point potentiant, q sa densité, r la distance du point potentié à un point potentiant, et γ le cosinus directeur par rapport à oz de la normale *extérieure* à la surface libre.

Effectuons les intégrations en groupant deux à deux les points potentiants symétriques par rapport au plan xoy ; soient P un de ces points de cote positive c, P′ son symétrique de cote $c' = -c$. On a pour ces points :

$$\left(\frac{\partial q}{\partial c}\right)_{c'} = -\frac{\partial q}{\partial c} \tag{37}$$

et, sur la surface $(\gamma)_{c'_e} = -\gamma_e$; de sorte que l'équation (36) deviendra, en appelant r et r' les distances MP et MP′ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left[\iiint \frac{\partial q}{\partial c} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) d\tau - \rho_e \iint \gamma_e \left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r'_e} \right) d\sigma \right]. \tag{38}$$

Par hypothèse $\frac{\partial q}{\partial c}$ est négatif, tandis que γ est positif puisque la couche superficielle est convexe ; d'autre part, on a visiblement $r < r'$ et $r_e < r'_e$. $\frac{\partial p}{\partial z}$ est donc bien négatif en tout point M de cote positive.

Il faut en conclure que la pression est positive dans tout le domaine du fluide sauf, éventuellement, sur sa surface où elle peut s'annuler.

---

[1] Cf. par ex. P. Appell et S. Dautheville, *Précis de Mécanique*, 2e éd., p. 582.

§ 4. — Conditions supplémentaires

18. Lorsque le fluide est compressible, on doit introduire une nouvelle condition qui relie entre elles la pression, la densité et la température.

Si le fluide est hétérogène, au sens chimique, cette relation devra, *en chaque point*, se réduire à l'équation caractéristique de la substance du fluide au point considéré [1].

Une telle relation serait de la forme :

$$f(\rho, p, \tau, x^2, z^2) = 0; \tag{39}$$

nous pourrions l'appeler *équation caractéristique généralisée*.

Or, nous avons établi, dans la première partie, qu'il suffit de se donner la stratification $\rho(x^2, z^2)$ pour déterminer complètement l'expression de ω^2, puis, par l'équation aux différentielles totales,

$$dp = \rho\left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{2}\right) dx^2 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z^2}\, dz^2\right], \tag{10'}$$

la pression, quand on s'impose une pression superficielle constante.

La physique empêchera, sans doute, que les couches d'égale densité ne s'écartent trop des couches de même nature chimique.

Quoi qu'il en soit, les fonctions $\rho(x^2, z^2)$ et $p(x^2, z^2)$ une fois connues, l'équation (39) donnera la fonction $\tau(x^2, z^2)$ qui permettra de tracer dans le fluide les surfaces isothermes.

Mais il faut bien remarquer que *ces surfaces ne correspondent pas nécessairement à une distribution des températures en équilibre*.

Il serait cependant naturel de s'imposer cette condition. On devrait alors ajouter aux équations du problème une équation de la chaleur pour un corps hétérogène. Le problème, se compliquerait considérablement. Nous ne l'aborderons que dans le cas où la température de la masse est uniforme et dans les deux hypothèses suivantes :

1° Le fluide est hétérogène et pratiquement incompressible.

---

[1] Ce pourrait être, par exemple, une équation à 4 paramètres du type de Clausius :

$$\left[p + \frac{a}{\tau\left(\frac{1}{\rho} + b\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\rho} - \varphi\right) = \mathrm{R}\tau.$$

où τ désigne la température, a, b, φ, R des constantes caractéristiques.

2° Le fluide est chimiquement homogène, compressible et, par suite, doué d'une équation caractéristique unique.

§ 5. — Variations de la vitesse angulaire

19. Pour faire l'étude des variations de la vitesse angulaire à l'intérieur de la masse il sera souvent commode de prendre comme variables indépendantes l^2 et ρ. La densité étant une fonction monotone de l^2 et z^2 et les couches étant supposées convexes, ce choix ne peut prêter à aucune ambiguïté.

Des formules (26) et (27) on déduit immédiatement les suivantes :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \frac{\partial \Omega_e}{\partial l^2} - \int_\rho^{\rho_e} \frac{\partial \Omega}{\partial l^2}\, d\rho\right) \tag{40}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^{\rho_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\, d\rho \tag{41}$$

ou, en fonction du potentiel U :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2} = \frac{2}{\rho}\left[\int_\rho^{\rho_e} \frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial l^2}\, d\rho - \rho_e\left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial l^2}\right)_{\rho=\rho_e}\right] \tag{42}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho^2}\int_\rho^{\rho_e} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial \rho}\, d\rho. \tag{43}$$

Ces relations permettent de discuter les variations de la vitesse angulaire en latitude (42), sur une surface à densité constante, et en profondeur (43), suivant une parallèle à l'axe de rotation.

20. *En particulier*, dans la couche mince qui enveloppe le fluide, les mouvements relatifs sont régis par les deux équations :

$$\frac{d\omega_e^2}{dl^2} = -2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial l^2}\right)_e, \tag{44}$$

$$\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho}\right)_e = 0. \tag{45}$$

La dérivée seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial l^2}$ n'est pas nécessairement nulle pour $\rho = \rho_e$ et *il peut exister sur la couche superficielle des variations de vitesse angulaire du pôle à l'équateur.*

De telles variations sont observables sur des astres fluides à haute température comme le Soleil, Saturne ou Jupiter. Par exemple, on sait que, sur le Soleil, la rotation diminue de l'équateur au pôle et que sa variation est à peu près proportionnelle à la latitude ; tandis que la zone équatoriale fait un tour en 25 jours, les calottes polaires n'effectuent leur révolution complète qu'en 28 jours environ.

Quant à l'équation (45) elle exprime que, pour toutes les stratifications assurant un régime permanent, *les surfaces d'égale vitesse coupent la couche superficielle parallèlement à l'axe de rotation.*

21. Lorsque la couche superficielle tourne d'un seul bloc, la dérivée $\frac{d\omega_e^2}{dl^2}$ est identiquement nulle et l'équation (44) prouve que le potentiel superficiel U_e est de la forme :

$$U_e = -\frac{\omega_e^2}{2} l^2 + C, \tag{46}$$

C étant une constante que l'on peut calculer — ainsi que nous le montrerons plus loin, — en fonction de la masse totale du fluide.

22. Pour que chaque couche tourne d'une pièce, il faut et il suffit, en vertu de la relation (42), que l'on ait en tout point intérieur :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \, \partial l^2} = 0 \tag{47}$$

d'où, pour le potentiel, l'expression :

$$U = -\frac{\omega^2(\rho)}{2} l^2 + P(\rho) \tag{48}$$

où *ω et p ne dépendent que de ρ.*

23. Une dernière particularisation nous conduit à la forme que doit nécessairement affecter le potentiel d'une masse fluide hétérogène en équilibre relatif :

$$U = -\frac{\omega^2}{2} l^2 + P(\rho), \tag{49}$$

ω étant, cette fois, complètement invariable.

On remarquera que *la fonction* $P(\rho)$ *des formules précédentes n'est autre que le potentiel sur l'axe polaire.*

Ce dernier cas est celui des astres refroidis dans lesquels les forces de frottement, développées par la viscosité du fluide, ont absorbé, à la longue, tous les mouvements internes.

§ 6. — Viscosité des astres fluides

24. Dans tous les calculs que nous venons d'exposer, nous n'avons considéré que des fluides parfaits dénués de viscosité. Cette hypothèse simplificatrice nous éloigne de la réalité.

On peut cependant se demander dans quelle mesure les résultats de l'étude précédente sont susceptibles de représenter *qualitativement* les propriétés des mouvements internes des astres fluides.

D'après la théorie de la viscosité, les forces de frottement s'exerçant entre deux couches de molécules sont proportionnelles au gradient de la vitesse dans la direction normale à ces couches (1). On conçoit, dès lors, que pour des fluides doués de mouvements relatifs assez lents, les effets de la viscosité puissent être inappréciables. Ce sera le cas des astres peu aplatis.

De plus, si l'on songe que, dans les équations régissant les mouvements internes réels, les forces de viscosité doivent être comparées aux forces de gravitation, bien plus considérables, on peut penser, avec vraisemblance, que l'hypothèse de la fluidité parfaite constitue une première approximation, au moins durant une période suffisamment courte de l'évolution d'une planète fluide. On connaît d'ailleurs cette proposition d'Helmoltz suivant laquelle l'effet du frottement intérieur est d'autant plus lent à se faire sentir que la masse en mouvement est plus étendue; on sait aussi, d'après les équations de Navier et de Duhem (2), que l'influence de la viscosité est en raison inverse de la densité.

Rappelons enfin que les récentes études de MM. Jeans et Eddington sur le rayonnement stellaire conduisent à admettre que, dans les astres à haute température comme le Soleil et les grosses étoiles, la viscosité peut être considérée comme tout à fait négligeable.

A ce propos, M. Wavre a fait la remarque suivante :

« S'il y avait une viscosité dont il fallût tenir compte, il y a longtemps que le Soleil, Saturne et Jupiter tourneraient d'un seul bloc, le frottement aurait rendu imperceptible le mouvement des zones les unes par rapport aux autres. A-t-on jamais observé un ralentissement des mouvementxs relatifs

---

(1) Cela suppose que les vitesses de déplacement sont faibles par rapport à la vitesse d'agitation thermique.

(2) Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamiqué*, 1e et 2e séries, 1903, 1904.

des zones parallèles ? La viscosité est donc très faible et il ne semble pas qu'il y ait lieu de la faire intervenir en première approximation. » (1).

Dans le cas du Soleil et des grosses étoiles il se pourrait que la correction relativiste due à la courbure de l'Espace-Temps soit comparable à la correction de viscosité.

Nous croyons que ces quelques remarques prouvent assez l'intérêt concret des résultats d'une étude théorique sur la masse fluide hétérogène sans viscosité.

Parmi ces résultats, celui de la variation de la vitesse angulaire sur la couche superficielle est susceptible d'être contrôlé par l'observation. Il expliquerait, en particulier, l'existence des bandes parallèles de Saturne.

---

(1) Wavre, *Archives des Sciences physiques et naturelles*, vol. 8, 1926, v. 332.

CHAPITRE II

REMARQUES SUR LE CAS PARTICULIER OU LA DENSITÉ NE DÉPEND QUE DE LA PRESSION

25. *Physiquement*, ce cas serait réalisé par un fluide compressible, chimiquement homogène, et dans lequel chaque couche de densité constante aurait une température uniforme.

En effet, dans l'équation caractéristique du corps

$$f(\rho,\ p,\ \vartheta) = 0,$$

la température ϑ devient une fonction de ρ, de sorte qu'en définitive la densité ne dépend plus que de la pression. Comme cas particulier, ϑ pourrait être constant dans toute la masse.

— Il en serait de même pour un mélange de gaz parfaits et de vapeurs, saturantes ou non, pourvu que les lois de Dalton soient applicables aux fluides animés de rotations permanentes. Cette hypothèse paraît vraisemblable ; il s'agirait de savoir comment la diffusion qui se produit entre deux couches de molécules est influencée par leur mouvement relatif. Mais cela relève de la Théorie cinétique.

— Si la masse est en état d'*équilibre relatif*, ω est constant ; le second membre de l'équation

$$\frac{dp}{\rho} = \left(\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right) dl^2 + \frac{\partial U}{\partial z^2}\, dz^2,$$

déduite des équations fondamentales de l'hydrodynamique, est une différentielle totale exacte ; et ceci exige encore — *indépendemment de toute équation caractéristique — que la densité ne dépende que de la pression.*

26. Dans tous les cas, les surfaces à pression constante coïncident avec les surfaces d'égale densité.

Or, nous avons vu (n° 3) que, en toute hypothèse, les équations fondamentales de l'Hydrodynamique impliquent l'orthogonalité du champ de la pesanteur et des sufaces d'égale pression (*surfaces de niveau*).

Il faut en conclure, d'une manière générale, que, lorsqu'il existe une relation $\rho = f(p)$ *entre la densité et la pression seule, les lignes de force de la pesanteur et les couches d'égale densité forment deux systèmes orthogonaux.*

§ I. — Distribution des vitesses

27. Ainsi que nous l'avons déjà fait observer (n° 8) il résulte de cette propriété que l'expression de ω^2 doit se réduire à celle de Ω.

Les formules (41) et (24) montrent alors, que l'on a les identités équivalentes :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \equiv 0, \qquad \frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \equiv 0. \tag{50}$$

On en déduit que tous les éléments du fluide situés à la même distance de l'axe de rotation sont animés de la même vitesse angulaire.

Ce théorème apparaît, ici, comme une conséquence immédiate de nos formules générales. On sait qu'il a été énoncé par Henri Poincaré dans sa *Théorie des Tourbillons* [1] et que M. Wavre l'a signalé récemment en faisant la critique des travaux déjà publiés sur la rotation de l'ellipsoïde hétérogène [2].

28. On peut encore parvenir à ce résultat par une autre voie qui conduit à des formules intéressantes applicables au cas général.

Eliminons U entre les équations :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}. \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z^2}, \tag{3'}$$

$$2 \cdot \frac{\mathrm{D}(\rho, \mathrm{U})}{\mathrm{D}(l^2, z^2)} = \frac{\partial}{\partial z^2}(\rho\omega^2), \tag{12'}$$

on obtient la relation :

$$2 \cdot \frac{\mathrm{D}(\rho, p)}{\mathrm{D}(l^2, z^2)} = \rho^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial z^2}, \tag{51}$$

---

[1] Carré, édit. 1893, p. 178.

[2] *Archives des Sciences physiques et naturelles*, 5e période, vol. 8, p. 330.

que l'on peut aussi écrire, dans le système de variables l^2 et ρ :

(52)
$$2\frac{\partial p}{\partial l^2} + \rho^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = 0.$$

Elle exprime que si, sur une couche d'égale densité, la pression décroît avec la distance à l'axe, la rotation croît avec la profondeur, et inversement.

En particulier, si la pression demeure constante la rotation ne varie pas en profondeur (C. Q. F. D).

§ 2. — Potentiel et Stratification

29. Dans l'équation $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0$, remplaçons Ω par son expression (25) en fonction de U ; il vient :

(53)
$$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial \rho} = 0.$$

A l'intérieur de la masse tournante le potentiel newtonien U *des forces d'attraction doit, par suite, être de la forme*

(54)
$$Q(l^2) + P(\rho).$$

où Q ne dépend que de l^2 et P que de ρ.

La propriété précédente impose donc une condition restrictive à la stratification.

Nous avons pu prouver que le potentiel d'une masse hétérogène, formée de couches ellipsoïdales concentriques homogènes, ne pouvait pas être identifié à l'expression (54) ; mais il est plus rapide et plus élégant de démontrer, indirectement, cette impossibilité par le procédé que nous exposerons au chapitre IV de la deuxième partie.

D'ailleurs, on sait que, dans l'hypothèse d'une rotation en bloc, le potentiel de l'attraction doit affecter la forme particulière (49) :

$$-\frac{\omega^2}{2} l^2 + P(\rho).$$

Poursuivant l'analyse de ce cas classique M. Wavre a obtenu par une méthode très élégante, une relation purement géométrique à laquelle satisfait la stratification de toute figure d'équilibre [1].

---

[1] *Commentarii Mathematici Helvetici*, volume 1, 1929, fascicule premier, p. 3.

§ 3. — Tourbillons

30. Les composantes du vecteur tourbillon suivant les axes ox, oy, oz sont données par les formules :

$$
(55) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

en tenant compte des égalités $u = -\omega y$, $v = +\omega x$, $w = 0$, il vient :

$$
(56) \qquad \xi = -\frac{x}{2}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z},
$$

$$
(57) \qquad \eta = -\frac{y}{2}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z},
$$

$$
(58) \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(2\omega + x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y}\right).
$$

Or, on a vu que, dans l'hypothèse actuelle, ω satisfait à l'identité $\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \equiv 0$ ou à l'identité équivalente $\frac{\partial \omega}{\partial z} \equiv 0$. On en déduit les deux propositions :

1° *En tous les points situés à la même distance de l'axe de rotation, le vecteur tourbillon a la même valeur.*

2° *Les surfaces de tourbillons sont des cylindres de révolution autour de cet axe.*

31. Cherchons à quelle condition doit satisfaire la stratification pour que le mouvement soit irrotationnel.

La composante ζ du tourbillon devrait être aussi identiquement nulle.

En introduisant la distance à l'axe l, cette condition s'exprime par l'équation :

$$
(59) \qquad \omega + l^2 \frac{d\omega}{dl^2} = 0
$$

d'où, en intégrant et en élevant au carré :

$$
(60) \qquad \omega^2 l^4 = \text{const.}
$$

Remarquons que :

$$\omega^2 = \Omega = -2\frac{\partial U}{\partial l^2}$$

et désignons par A une constante, l'équation (60) donne

$$\frac{\partial U}{\partial l^2} = \frac{A}{l^4}$$

et, par suite

$$\int \frac{\partial U}{\partial l^2} dl^2 = A\int \frac{dl^2}{l^4} + P(\rho)$$

$P(\rho)$ *étant exclusivement une fonction de* ρ ; elle n'est autre que celle de la formule (54).

On obtient ainsi la *forme générale que doit affecter le potentiel newtonien des stratifications douées de mouvements internes irrotationnels.*

$$U = P(\rho) - \frac{A}{l^2}. \tag{61}$$

32. On peut, en particulier, supposer que l'on a simplement

$$P(\rho) = h\cdot\rho \tag{62}$$

h étant une constante. Cela revient à admettre que la pression est une fonction linéaire du carré de la densité.

En effet, en prenant comme variables indépendantes l^2 et ρ l'équation :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial z^2}.$$

devient

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Or, dans notre hypothèse, $\frac{\partial U}{\partial \rho} = h$, et l'on a bien

$$p = \frac{h}{2}\rho^2 + B \tag{63}$$

où B est une constante.

Un fluide compressible doué d'une équation caractéristique de cette forme résisterait donc d'autant mieux à la compression qu'il serait déjà plus comprimé.

Dans sa *Mécanique céleste* [1], Laplace admet qu'à l'origine le fluide ter-

---

[1] T. V, 1856, livre onzième, p. 18 et 19.

restre était constitué d'une substance compressible unique, et il cherche à satisfaire aux données de la Géodésie en utilisant une relation telle que (63).

Avec cette loi de variation, la formule (61) donne l'équation intégrale de Fredholm à trois variables :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho(x^2+y^2, z^2) \\ &\qquad = \iiint_V \rho(a^2+b^2, c^2)\frac{da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} + \frac{A}{x^2+y^2}, \end{aligned}\right.$$

dont la solution en ρ fait connaître la stratification quand on se donne le domaine d'intégration V.

33. Remarquons enfin que, quelle que soit la loi qui relie entre elles la pression et la densité, la force centrifuge est donnée par la relation :

$$(65)\qquad \omega^2 l = \frac{A}{l^3}.$$

Sur un axe voisin de l'axe de rotation la force centrifuge serait donc infiniment grande. Comme il ne peut exister aucun corps matériel de dimensions finies produisant, en un point, un champ d'attraction infini susceptible de se composer avec cette force, il faut en conclure que la masse tournante ne peut avoir aucun point commun avec l'axe. D'où cette proposition :

Un mouvement irrotationnel ne peut exister que dans des stratifications limitées par des volumes ayant la connexion du tore.

La forme ellipsoïdale des corps célestes fluides prouve donc que leurs mouvements internes ne sauraient être irrotationnels [1]

---

[1] Les recherches de Maxwel, de Henri Poincaré et de Mme de Kowalewska ont prouvé que l'anneau de Saturne ne pouvait être assimilé à un fluide et qu'il devait être constitué de grains de poussière cosmique n'exerçant aucune pression les uns sur les autres ; cf. TISSERAND, *loc. cit.*, t. II, p. 171.

CHAPITRE III

QUELQUES PROPOSITIONS RELATIVES AUX MOUVEMENTS GÉNERAUX

Avant d'aborder l'étude spéciale des stratifications ellipsoïdales, nous établirons quelques théorèmes intéressant la Mécanique céleste ou la Géodésie.

Nous allons montrer, en particulier, comment certaines propositions connues, relatives au cas de l'équilibre relatif, peuvent être étendues aux mouvements généraux dont nous venons de prouver l'existence.

§ I. — Généralisation du théorème de Stokes sur les figures d'équilibre

34. On doit à Stokes et à Henri Poincaré cet important théorème :

Lorsque la surface libre d'une planète est orthogonale au champ de la pesanteur, le potentiel de l'attraction qu'elle exerce sur un point extérieur ne dépend que de sa masse totale, de sa vitesse de rotation et de sa forme géométrique [1].

La démonstration *suppose* que la planète *tourne en bloc* autour de l'axe de rotation. Or, comme nous l'avons déjà remarqué, cette condition ne s'impose pas *a priori* pour les astres fluides tels que le Soleil ou Jupiter.

En admettant encore que dans ces astres les surfaces à densité constante soient *en tout point* horizontales, M. Rolin Wavre a obtenu une première géné-

---

(1) Cf. F. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 324, et Henri Poincaré, *Figures d'une masse fluide*, 1902, p. 97.

ralisation du théorème de Stokes par un procédé très nouveau ; son raisonnement utilise cette propriété, mise en évidence par lui-même, que, dans l'hypothèse actuelle, les surfaces d'égale vitesse sont cylindriques [1].

Nous avons vu (n° 27) que ces mouvements de rotation peuvent être considérés comme un cas particulier de mouvements plus généraux que nous avons pu définir en nous libérant, sauf sur la couche superficielle, de la condition restrictive d'orthogonalité du champ de la pesanteur et des couches de densité constante [2]. Montrons qu'il est possible d'obtenir pour ces mouvements généraux une nouvelle extension du théorème de Stokes.

35. Soient, sur la surface limite S_e du fluide, $U_e(l^2)$ le potentiel de l'attraction et $\omega_e(l^2)$ la vitesse angulaire en un point dont la distance à l'axe est l ; nous avons établi la formule :

$$\omega_e^2(l^2) = -2\frac{dU_e}{dl^2}; \tag{27'}$$

Si la fonction $\omega_e(l^2)$ est connue, cette équation donne U_e à une constante additive C près :

$$U_e = \Phi_e(l^2) + C, \tag{66}$$

$\Phi_e(l^2)$ désignant une primitive de $-\frac{\omega_e^2(l^2)}{2}$.

Le potentiel U_E à l'extérieur étant harmonique et nul à l'infini est alors fourni, en fonction du paramètre C encore inconnu, par la solution du problème extérieur de Dirichlet pour la surface S_e et la fonction U_e. Cela acquis, on démontrerait par les procédés classiques [3] que la constante C est déterminée par la masse totale M.

36. Mais nous préférons la méthode suivante qui conduit à une proposition intéressante et prouve, en outre, que le calcul de C est effectivement toujours possible.

Désignons par P un point fixe extérieur, par P′ un point variable en convenant d'affecter P ou P′ de l'indice e lorsque le point correspondant sera pris sur S_e, et soient, d'autre part, $\Phi(P'_e)$ la fonction de point définie sur S_e, égale à $\Phi_e(l^2)$, et G (P, P′) la fonction de Green relative à la surface limite S_e [4].

---

[1] R. WAVRE, *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1113 et 184, 1927, p. 277.

[2] *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 371.

[3] Cf. par exemple F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, 2, 1891, p. 324.

[4] Nous adoptons pour cette fonction la même définition que M. Goursat dans son *Cours d'Analyse*, t. III, 3e éd., 1923, p. 270.

En indiquant par dn' un déplacement élémentaire de P′ suivant la normale extérieure à S_e et utilisant l'expression (28) de U_e, la solution du problème de Dirichlet est donnée par la formule :

$$(67) \quad U_E(P, C) = \frac{1}{4\pi}\left[\iint_{S_e} \Phi(P'_e)\frac{d}{dn'}G(P, P')\,d\sigma' + C\iint_{S_e}\frac{d}{dn'}G(P, P')\,d\sigma'\right]$$

dont le second membre est de la forme :

$$(68) \qquad H(P) + CK(P),$$

H(P) et K(P) étant deux fonctions du point P.

Portons cette expression de U_E dans la formule de Gauss :

$$(69) \qquad \iint_{S_e}\frac{dU_E}{dn}\,d\sigma = -4\pi M;$$

dn étant ici un déplacement élémentaire de P suivant la normale extérieure à S_e, il vient :

$$(70) \qquad \iint_{S_e}\frac{d}{dn}H(P)\,d\sigma + C\iint_{S_e}\frac{d}{dn}K(P)\,d\sigma = -4\pi M$$

ou encore en explicitant H(P) et K(P) :

$$(71) \quad \left\{\begin{aligned} &\iint_{S_e} d\sigma \iint_{S_e}\Phi(P'_e)\frac{d^2}{dn\,dn'}G(P, P')\,d\sigma' \\ &\quad + C\iint_{S_e} d\sigma\iint_{S_e}\frac{d^2}{dn\,dn'}G(P, P')\,d\sigma' = -16\pi^2 M.\end{aligned}\right.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, C dépend linéairement de la masse totale; par suite, cette constante est unique et son calcul toujours possible par la relation (71).

On en déduit cette proposition :

Le potentiel de l'attraction newtonienne d'une planète en un point extérieur est une fonction linéaire de sa masse totale.

Et le théorème de Stokes est ainsi complètement généralisé.

§ 2. — EXPRESSIONS DU POTENTIEL EXTÉRIEUR ET DE LA MASSE TOTALE EN FONCTION DE LA PESANTEUR SUPERFICIELLE

37. Exprimons qu'en un point de la surface libre l'accélération de la pesanteur g_e est égale à la somme des projections sur la normale des vecteurs représentant l'attraction des masses et la force centrifuge ; on aura :

$$g_e = -\left(\frac{dU_E}{dn}\right)_e - \omega_e^2 l \frac{dl}{dn}, \tag{72}$$

dn désignant toujours un déplacement élémentaire suivant la normale *extérieure.*

Appelons, d'autre part, r la distance du point fixe P au point variable P′, et convenons d'affecter d'un accent les fonctions qui dépendent de P′ seulement ; une formule connue de la théorie des fonctions harmoniques nous donne [1]

$$U_E = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e}\left[U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{dU'_E}{dn'}\right] d\sigma'. \tag{73}$$

Sur S_e, $\frac{dU'_E}{dn'}$ est fourni par la relation (72), d'où

$$U_E = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e}\left[U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(g'_e + \frac{\omega_e'^2}{1}\frac{dl'^2}{dn'}\right)\right] d\sigma'. \tag{74}$$

38. Supposons maintenant que le point P vienne en P_e sur S_e ; la valeur U_e du potentiel en P_e peut être considéré comme la limite vers laquelle tend la valeur de $U_E(P)$ lorsque P se rapproche indéfiniment de P_e :

$$U_e = \lim_{P \to P_e} \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e}\left[U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(g'_e + \frac{\omega_e'^2}{2}\frac{dl'^2}{dn'}\right)\right] d\sigma'. \tag{75}$$

Le second terme :

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_e}\frac{1}{r}\left(g'_e + \frac{\omega'_e}{2}\frac{dl'^2}{dn'}\right) d\sigma'$$

représente un *potentiel de simple couche* ; par suite, ce terme est continu dans

---

[1] Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III, 3e éd., p. 253, form. (14) et p. 257. Remarque du n° 529.

tout l'espace et il suffit pour obtenir sa limite d'y faire r égal à la distance $P_e P'_e$. Il n'en est pas de même pour le premier terme :

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_e} U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma'$$

qui est un *potentiel de double couche* discontinu sur S_e. D'après la théorie de cette fonction [1] on doit écrire en effet :

$$\lim_{P \to P_e} \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e} U'_e \frac{1}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e} U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' + \frac{U_e}{2} \tag{76}$$

r étant égal à la distance $P_e P'_e$ dans le second membre. On obtient alors :

$$U_e = \frac{1}{2\pi}\iint_{S_e} U'_e \frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' + \frac{1}{2\pi}\iint_{S_e} \frac{1}{r} \cdot \frac{\omega_e'^2}{2}\frac{dl'^2}{dn'} d\sigma' + \frac{1}{2\pi}\iint_{S_e} \frac{g'_e}{r} d\sigma'. \tag{77}$$

Transformons l'intégrale :

$$I = \iint_{S_e} \frac{1}{r}\frac{\omega_e'^2}{2}\frac{dl'^2}{dn'} d\sigma', \tag{78}$$

en faisant apparaître le potentiel superficiel U'_e, on a d'abord :

$$I = -\iint_{S_e} \frac{1}{r} \cdot \frac{dU'_e}{dl'^2} \cdot \frac{dl'^2}{dn'} d\sigma', \tag{79}$$

La relation (77) devient ainsi une *équation fonctionnelle en* U_e ; nous allons montrer qu'on peut en ramener la résolution à celle d'une équation intégrale de Fredholm.

39. Soient γ' l'angle aigu de la normale extérieure en un point de S_e avec la direction de l'axe polaire oz, $d\Sigma'$ la projection de l'élément de surface $d\sigma'$ sur le plan équatorial, r_1 et r_2 un couple de valeurs de r correspondant à deux points P_{e1} et P_{e2} de S_e, symétriques par rapport à ce plan, et d'azimut φ' ; on a :

$$\frac{dl'}{dn'} = \sin\gamma', \qquad d\sigma' = \frac{d\Sigma'}{\cos\gamma'}, \qquad d\Sigma' = l\,dl'\,d\varphi', \tag{80}$$

et en prenant comme nouvelle fonction inconnue Φ_e l'une des primitives :

$$\int -\frac{\omega_e^2}{2}\,dl^2$$

---

[1] Cf. GOURSAT, *loc. cit.*, p. 251.

liée à U_e par la relation $U_e = \Phi_e + C$, ou C est une constante, il vient :

$$I = -\iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) l' \operatorname{tg} \gamma' \frac{d\Phi'_e}{dl'} dl' d\varphi' \tag{81}$$

l'intégration s'étendant maintenant à la surface du cercle équatorial Σ.

Ensuite, en utilisant la formule de Green, on aura

$$I = \iint_{\Sigma} \Phi'_e \frac{d}{dl'} \left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) l' \operatorname{tg} \gamma'\right] dl' d\varphi' - \int_{\Gamma} \Phi'_e \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) l' \operatorname{tg} \gamma' d\varphi' \tag{82}$$

l'intégrale curviligne étant prise le long du contour Γ de Σ.

Sur Γ, $\operatorname{tg} \gamma'$ est infini ; cependant, I représentant un potentiel de simple couche (78), continu dans tout l'espace, *le second membre de la relation précédente a un sens, même lorsque les fonctions sous le signe somme deviennent infinies sur* Γ ; sa vraie valeur, égale à I, est la limite vers laquelle il tend lorsque le cercle d'intégration Σ_1 intérieur à Σ se rapproche indéfiniment de ce dernier.

Prenons, en particulier, comme primitive Φ'_e la fonction

$$\int_a^{l'^2} - \frac{\omega_e'^2}{2} dl'^2 \tag{83}$$

qui s'annule sur la circonférence équatoriale Γ de rayon a, de sorte que

$$\begin{aligned} U'_e(l') &= \Phi'_e(l') + U_e(a), \\ C &= U_e(a). \end{aligned} \tag{84}$$

Quand l' tend vers a, la fonction sous le signe de somme de l'intégrale curviligne prend alors la forme illusoire $0 \times \infty$; pour connaître sa vraie valeur décomposons la en un produit de 2 facteurs :

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) l' \qquad \text{et} \qquad \sin \gamma' \cdot \frac{\Phi'_e}{\cos \gamma'} \tag{85}$$

le premier a pour limite $\frac{2a}{r_\Gamma}$, r_Γ étant, sur Γ, la valeur commune de r_1 et r_2 ; le second affecte la forme illusoire $\frac{0}{0}$; sa limite, si elle existe, est la même que celle du rapport

$$-\frac{\dfrac{d\Phi'_e}{ds'}}{\dfrac{d\gamma'}{ds'}}$$

où s' est l'abscisse curviligne du point P'_e suivant la méridienne d'azimut φ'.

Or, sur l'équateur, $\frac{d\Phi'_e}{ds'} = \frac{dU'}{dz'}$ est nul, par suite de la symétrie de la stratification ; mais la dérivée $\frac{d\gamma'}{ds'}$ a pour limite la courbure équatoriale $\frac{1}{R_{eq}}$ de la méridienne du fluide. Montrons que R_{eq} ne peut pas être infini.

On a vu que, sur la couche superficielle, le carré de la vitesse angulaire était donné par la formule :

$$\omega_e^2 = \frac{2}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial z^2}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}\right]_e$$

qu'on peut encore écrire :

$$\omega_e^2 l = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_e}{\left(\frac{dl}{dz}\right)_e} - \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_e, \tag{86}$$

Sur l'équateur, le premier terme prend la forme $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur est la même que celle du rapport des dérivées :

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial z}\right)_e}{\left(\frac{dl^2}{dz\, dz}\right)_e};$$

et l'on remarque que $\lim_{z=0} \left(\frac{d^2 l}{dz\, dz}\right)_e$ est précisément égal à $-\frac{1}{R_{eq}}$; d'autre part, en appelant g_{eq} l'accélération de la pesanteur équatoriale, on a :

$$g_{eq} = -\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_e - \omega_e^2 l. \tag{87}$$

La relation (86) nous donne alors :

$$R_{eq} = -\frac{g_{eq}}{\lim_{z=0} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial z}\right)_e}. \tag{88}$$

Tout revient à prouver que la dérivée $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial z}\right)_e$ n'est pas nulle sur l'équateur.

Utilisons pour cela la formule bien connue de la théorie du potentiel newtonien :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial z} = -\iint_{S_e} \frac{z' - c}{r^3} \rho_e \cos \gamma' d\sigma' + \iiint_{V_e} \frac{z' - c}{r^3} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial z'} d\tau' \quad [1].$$

où V_e désigne le volume total du fluide.

---

[1] Cf. Paul Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 1928, p. 76.

On observe que, le point envisagé étant sur l'équateur, sa cote c est nulle, et, de plus, que nos hypothèses sur la concavité de la couche superficielle, la croissance de la densité avec la profondeur et la symétrie de la stratification exigent que les produits

$$-z' \cos \gamma' \qquad \text{et} \qquad z' \frac{\partial \rho'}{\partial z'}$$

soient négatifs en tout point de leur champ de variation.

La dérivée $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z}\right)_e$ est donc certainement négative sur l'équateur et ne peut s'y annuler en aucun point (C. Q. F. D.).

Il résulte de là que la fonction sous le signe somme de l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \Phi'_e \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) l' \operatorname{tg} \gamma' \, d\varphi'$$

est constamment nulle. Cette intégrale disparaît donc de l'expression de I.

En reprenant la notation des intégrales de surface on a simplement

$$\text{(89)} \qquad I = \iint_{S_e} \Phi'_e \frac{\cos \gamma'}{l'} \frac{d}{dl'} \left(\frac{l'}{r} \operatorname{tg} \gamma'\right) d\sigma'.$$

Portons cette expression de I dans la formule (77), où nous remplaçons U_e et U'_e respectivement par $\Phi_e + U_e(a)$ et $\Phi'_e + U_e(a)$; si l'on tient compte de l'égalité :

$$\text{(90)} \qquad \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} [\Phi'_e + U_e(a)] \frac{d}{dn'} \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} \Phi' \frac{d}{dn'} \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma' - U_e(a)$$

on parvient à la relation :

$$\text{(91)} \qquad \Phi_e + 2U_e(a) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} \left[\frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\cos \gamma'}{l'} \cdot \frac{d}{dl'}\left(\frac{l'}{r} \operatorname{tg} \gamma'\right)\right] \Phi'_e d\sigma + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_e} \frac{g'_e}{r} d\sigma'.$$

Pour abréger l'écriture, posons :

$$\text{(92)} \qquad \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{d}{dn'} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\cos \gamma'}{l'} \frac{d}{dl'} \left(\frac{l'}{r} \operatorname{tg} \gamma'\right)\right] = K(P_e, P'_e)$$

$$\text{(93)} \qquad \frac{1}{2\pi} \iint \frac{g'_e}{r} d\sigma' = f(P_e).$$

Lorsque P_e coïncide avec un point P_{eq} de l'équateur, $\Phi(P_{eq})$ est nul, d'où :

$$\text{(94)} \qquad 2U_e(a) = \iint_{S_e} K(P_{eq}, P'_e) \Phi(P'_e) d\sigma' + f(P_{eq})$$

et, en remplaçant $2U_e(a)$ par cette expression dans (91) :

$$\text{(95)} \quad \Phi(P_e) = \iint_{S_e} [K(P_e, P'_e) - K(P_{eq}, P'_e)]\Phi(P'_e)\,d\sigma' + f(P_e) - f(P_{eq}).$$

$\Phi(P_e)$ est donc la *solution unique* d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

40. On en conclut que *cette fonction est complètement déterminée par la configuration géométrique de la surface libre du fluide et par l'accélération de la pesanteur superficielle.*

Il en est, par suite, de même de la rotation superficielle ω_e *qui en dérive par la relation* :

$$\text{(27'')} \qquad \omega_e^2 = -2\frac{d\Phi_e(l^2)}{dl^2}.$$

Dans le cas où ω_e est constant, cette dernière propriété peut s'établir directement, à partir de l'équation (77), au moyen d'une dérivation par rapport à l^2.

41. Le potentiel superficiel U_e se déduit de Φ_e par addition de la constante $U_e(a)$ donnée par (94). De sorte qu'en remplaçant dans l'équation (77) U'_e et ω'_e par leurs expressions en fonction de g'_e on exprime le potentiel extérieur au moyen de cette seule donnée.

On obtient ainsi le théorème général suivant qui est à rapprocher du théorème de Stokes.

Lorsque la surface libre d'une planète, tournant en bloc ou animée de mouvements internes, est orthogonale au champ de la pesanteur, le potentiel de l'attraction qu'elle exerce sur un point extérieur ne dépend que de la pesanteur sur sa surface et de la configuration géométrique de celle-ci.

On voit l'intérêt des formules précédentes dans l'étude des mouvements des satellites et spécialement dans la théorie de la Lune.

42. — Remarque. — Quand la rotation de la couche superficielle s'effectue en bloc, le potentiel superficiel U_e est de la forme $-\frac{\omega_e^2}{2}l^2 + C$, où C est le potentiel au pôle. De la formule (74) on tire alors :

$$\text{(96)} \qquad U_E = -\frac{\omega_e^2}{8\pi}\iint_{S_e}\left[l'^2\frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{dl'^2}{dn'}\right]d\sigma' + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_e}\frac{g'_e}{r}\,d\sigma',$$

et, dans le cas particulier du repos absolu, *on retrouve la formule connue de la théorie des couches de niveau* :

$$\text{(97)} \qquad U_E = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{g'_e}{r} \, d\sigma'$$

dans laquelle g_e' *se réduit à l'attraction superficielle* [1].

43. Quant à la masse totale, elle s'exprime très aisément en fonction de g_e au moyen de la formule de Gauss :

$$\text{(69)} \qquad 4\pi M = - \iint_{S_e} \left(\frac{dU_E}{dn}\right)_e d\sigma,$$

dans laquelle on remplace $-\left(\frac{dU_E}{dn}\right)_e$ par $\frac{\omega_e^2}{2} \cdot \frac{dl^2}{dn} + g_e$, en substituant à ω_e^2 son expression en g_e.

On peut donc formuler pour M *un théorème tout à fait semblable au théorème précédent relatif à* U_1.

§ 3. — Généralisation d'une condition de H. Poincaré

45. De la formule [2] :

$$\text{(98)} \qquad 4\pi f M = \iint_{S_e} \left(g_e + \frac{\omega_e^2}{2} \cdot \frac{dl^2}{dn}\right) d\sigma,$$

noús allons déduire deux conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les vitesses angulaires et les pesanteurs maxima et minima à la surface d'un fluide en état de rotation permanente.

Soient, en effet, $g_{max.}$ le maximum de g_e sur la surface libre S_e, $g_{min.}$ son minimum, $\omega_{max.}$ le maximum de ω_e sur S_e et $\omega_{min.}$ son minimum. On a évidemment les deux inégalités :

$$\text{(99)} \qquad 4\pi f M < g_{max.} \iint_{S_e} d\sigma + \omega^2_{max.} \iint_{S_e} l \frac{dl}{dn} \, d\sigma,$$

$$\text{(100)} \qquad 4\pi f M > g_{min.} \iint_{S_e} d\sigma + \omega^2_{min.} \iint_{S_e} l \frac{dl}{dn} \, d\sigma.$$

L'intégrale $\iint_{S_e} d\sigma$ est égale à l'aire S de la surface limite.

[1] V. le *Traité de Mécanique céleste*, t. II, de Tisserand.
[2] f est la constante de la gravitation universelle.

D'autre part, en désignant par γ l'angle aigu de la normale à S_e avec oz, par φ l'azimut de l'élément $d\sigma$, par s son abcisse curviligne suivant la méridienne et par z sa cote, on a :

$$\frac{dl}{dn} = \sin\gamma, \qquad d\sigma = l\,d\varphi\,ds, \qquad dz = \sin\gamma\,ds \tag{101}$$

de sorte que

$$l\,\frac{dl}{dn}\,d\sigma = l^2\,dz\,d\varphi \tag{102}$$

et, par suite :

$$\iint_{S_e} l\,\frac{dl}{dn}\,d\sigma = 2\pi \int_{-b}^{+b} l^2\,dz \tag{103}$$

b désignant le demi-axe polaire ; cette intégrale représente donc le double du volume V du fluide.

On déduit alors des conditions (99) et (100) la double inégalité :

$$2\omega^2_{\text{min.}} + g_{\text{min.}}\left(\frac{S}{V}\right) < 4\pi f \rho_{\text{moy.}} < 2\omega^2_{\text{max.}} + g_{\text{max.}}\left(\frac{S}{V}\right) \text{ [1]}. \tag{104}$$

46. Nous avons pu vérifier ces conditions pour la Terre.

Avec les données suivantes [2] :

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{min.}} = \omega_{\text{max.}} &= 727 + 10^{-7} + \text{c. g. s,}\\
\rho_{\text{moy.}} &= 5{,}52,\\
g_{\text{min.}} &= 978{,}03,\\
g_{\text{max.}} &= 983{,}216,\\
S &= 510\,101 \times 10^{13}\ \text{cm}^2,\\
V &= 1\,083\,320 \times 10^{21}\ \text{cm}^3\\
f &= 6{,}67 \times 10^{-8}.
\end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
2\omega^2_{\text{min.}} + g_{\text{min.}}\left(\frac{S}{V}\right) &= 4\,596\,741 \times 10^{-12},\\
4\pi f \rho_{\text{moy.}} &= 4\,616\,177 \times 10^{-12},\\
2\omega^2_{\text{max.}} + g_{\text{max.}}\left(\frac{S}{V}\right) &= 4\,621\,115 \times 10^{-12}.
\end{aligned}$$

---

[1] ρ moy : densité moyenne.

[2] Tirées de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour l'an 1929.

47. Un calcul semblable effectué avec les données relatives au Soleil, en tenant compte de la variation en latitude de la vitesse angulaire, nous a conduit à des nombres très voisins ; à cause de notre incertitude sur les dimensions exactes du Soleil, nous ne croyons pas que ces nombres puissent constituer une vérification suffisante.

48. Les inégalités précédentes généralisent le théorème de H. Poincaré sur la condition de possibilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation [1]. En effet, si l'on suppose seulement que la couche superficielle tourne d'une pièce on doit avoir :

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho_{\text{moy.}} f} < 1. \tag{105}$$

§ 4. — Sur deux formules géodésiques

49. La recherche d'une surface enveloppant la Terre, et qui serait orthogonale au champ de la pesanteur, constitue, comme on sait, un des problèmes les plus importants de la Géodésie.

Cette surface, appelée *Géoïde de référence* coïnciderait avec celle de l'Océan si ce dernier pouvait pénétrer à l'intérieur des masses continentales [2], comme cela aurait lieu si celles-ci étaient poreuses.

Une intéressante formule, due à Heinrich Bruns [3] donne un moyen de calculer le rayon de courbure C_e du Géoïde au moyen du gradient $\left(\frac{dg}{dn}\right)_e$ de la pesanteur, de la pesanteur g_e elle-même, de la densité superficielle ρ_e et de la rotation ω_e ; on a, en effet :

$$2g_e C_e = \left(\frac{dg}{dn}\right)_e + 4\pi f\rho_e - 2\omega_e^2. \tag{106}$$

En supposant seulement que la densité ne dépend que de la pression, M. Wavre a donné récemment une démonstration très élégante de cette formule [4]. Nous allons montrer qu'on peut encore établir une formule analogue,

---

(1) *Bulletin astronomique*, t. II, p. 117.

(2) Cf. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 327 et 328.

(3) Heinrich Bruns, *Figùr der Erde*. (1878)

(4) *Commentarii Mathematici Helvetici*, volumen 1, MCMXXIX, fasculus primus.

mais applicable au cas général où les surfaces d'égale densité ne coïncident pas nécessairement avec les surfaces d'égale pression.

59. Nous partirons des formules donnant les composantes g_x, g_y, g_z de la pesanteur $\vec{g}$ suivant les axes de référence :

$$(5') \qquad \left\{ \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \\ g_y &= \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \\ g_z &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Dérivons les deux membres de ces relations respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons-les ; on obtient l'équation :

$$(107) \qquad \text{Div.}\ \vec{g} = \Delta_2 U + x \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + y \frac{\partial \omega^2}{\partial y} + 2\omega^2$$

où Δ_2 désigne le second paramètre différentiel de Lamé.

La densité s'introduit immédiatement en utilisant la relation de Poisson :

$$\Delta_2 U = -4\pi f \rho$$

f étant toujours la constante de la gravitation universelle.

Soient, d'autre part, α, β, γ les cosinus directeurs de la pesanteur $\vec{g}$ par rapport aux axes de référence ; on a :

$$(108) \qquad g_x = \alpha g, \qquad g_y = \beta g, \qquad g_z = \gamma g$$

et, par suite :

$$(108') \qquad \text{Div.}\ \vec{g} = g\ \text{Div.}\ (\alpha, \beta, \gamma) + \alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Mettons en évidence la signification remarquable du terme Div. (α, β, γ).

Pour cela, considérons la famille des surfaces orthogonales au champ de la pesanteur. Nous avons vu que ces surfaces coïncident avec les surfaces à pression constante ; de sorte que C désignant la courbure moyenne [1] de l'une de celles-ci au point envisagé, une relation importante de la théorie des surfaces, nous donne :

$$(109) \qquad \text{Div.}\ (\alpha, \beta, \gamma) = -2C \quad [2].$$

---

[1] Nous appelons ainsi la moyenne des courbures des sections principales.

[2] La relation (109) nous a été indiquée, sous cette forme symétrique, par M. Wavre qui l'a obtenue directement. *(suite de la note page suivante).*

Quant au terme :

$$\alpha \frac{\partial g}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial y} + \gamma \frac{\partial g}{\partial z},$$

il est précisément égal à la dérivée $\frac{dg}{dn}$ de g dans la direction de la normale *intérieure* à la surface d'égale pression passant au point $(x, y, z.)$.

Enfin, ω^2 ne dépendant que de la cote z et du carré $l^2 = x^2 + y^2$ de la distance à l'axe de rotation, on a :

$$x \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + y \frac{\partial \omega^2}{\partial y} + z \frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 2 l^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}. \tag{110}$$

Si l'on porte alors les expressions obtenues dans l'équation (107), il vient :

$$2 g \mathrm{C} = \frac{dg}{dn} + 4\pi \rho f - 2 l^2 \frac{\partial \omega^2}{\partial l^2} - 2\omega^2 \tag{111}$$

ou encore, en faisant apparaître la vitesse linéaire $\mathrm{V} = \omega l$:

$$2 g \mathrm{C} = \frac{dg}{dn} + 4\pi \rho f - 2 \frac{\partial \mathrm{V}^2}{\partial l^2}. \tag{111'}$$

Telle est l'équation générale que nous voulions établir.

51. Elle s'applique, en particulier, à la surface libre du fluide qui, selon notre hypothèse, est la limite des surfaces à pression constante.

Nous avons ainsi le moyen de calculer la valeur exacte de la variation normale de la pesanteur à la surface d'une planète, en fonction des éléments superficiels C_e, g_e, ρ_e, ω_e directement observables.

Dans son *Cours d'Analyse infinitésimale*, p. 431, M. Ch. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN établit la relation :

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = -2\mathrm{C}.$$

On peut en déduire aisément la formule (109). En effet, en remarquant que, sur une surface d'égale pression, z est une fonction de x et y, on peut écrire :

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x};$$

et il suffit de montrer que l'on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Or cette égalité s'obtient en dérivant la relation $\gamma^2 = 1 - (\alpha^2 + \beta^2)$ par rapport à z et en remplaçant ensuite α et β par leur expression en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ et γ.

Lorsque la couche superficielle tourne en bloc, condition qui peut être considérée comme très sensiblement réalisée sur la Terre, ω_e est une constante et l'on a :

$$d\omega_e^2 \equiv \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}\right)_e dl^2 + \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2}\right)_e dz^2 = 0.$$

Or, nous avons vu que la dérivée $\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2}$ était constamment nulle sur la surface libre ; $\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2}\right)_e$ est donc aussi nul, et l'équation (111) devient :

$$\text{(112)} \qquad C_e = \frac{1}{2g_e}\left[\left(\frac{dg}{dn}\right)_e + 4\pi f \rho_e - 2\omega_e^2\right].$$

On peut expérimentalement mesurer la valeur de $\left(\frac{dg}{dn}\right)_e$; il suffit pour cela de comparer les nombres d'oscillations effectuées, pendant une même durée, par un pendule de longueur déterminée placé successivement à l'origine et au fond d'un puits de mine. Cette expérience a été effectuée en 1854, par Airy, dans un des puits de la mine de Harton, dont la profondeur atteignait 385 mètres. Dès lors, on voit tout l'intérêt que présente la relation (112) pour la détermination de la forme d'équilibre du géoïde terrestre [1].

La formule (111) est à rapprocher de celle de Saigey [2] :

$$\frac{dg}{da} = 4\pi f\left(\rho - \frac{2}{a^3}\int_0^a \rho a^2\, da\right)$$

qui donne, une valeur approximative [3] de la variation de g en fonction de la distance au centre a et de la densité ρ, dans un sphéroïde hétérogène.

Notre formule (111) à l'avantage d'être rigoureuse, plus générale et d'introduire un élément géométrique important.

52. Nous allons établir maintenant une formule très simple donnant l'accélération de la pesanteur superficielle g_e en fonction du gradient $\left(\frac{d\rho}{dn}\right)_e$ de la densité.

---

(1) Cf. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 327 et 328.

(2) Saigey, *Petite Physique du globe*, t. II.

(3) La formule de Saigey est rigoureuse pour une masse hétérogène immobile stratifiée en couches sphériques.

En prenant ici les dérivées suivant la normale intérieure, l'expression (72) de g_e devient :

$$g_e = \frac{dU}{dn} + \frac{\omega_e^2}{2}\frac{dl^2}{dn}. \tag{72'}$$

où U désigne le potentiel intérieur.

Supposons U exprimé en fonction de ρ et l^2 ; on aura :

$$\frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{dn} + \frac{\partial U}{\partial l^2} \cdot \frac{dl^2}{dn}. \tag{113}$$

Or, sur la couche superficielle, on a précisément :

$$\frac{\omega_e^2}{2}\frac{dl^2}{dn} = -\frac{\partial U}{\partial l^2} \cdot \frac{dl^2}{dn} \tag{114}$$

de sorte qu'il reste :

$$g_e = \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_{\rho_e} \cdot \left(\frac{d\rho}{dn}\right)_e \tag{115}$$

53. Un cas particulier important est celui où $\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_{\rho_e}$ demeure invariable ; pour cela il faut et il suffit qu'on ait identiquement :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial l^2}\right)_e = 0.$$

Montrons que cette condition entraîne la suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial \rho \partial \rho}\right)_e = 0 ; \tag{116}$$

en effet, en dérivant par rapport à ρ l'équation (v. n° 19).

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho^2}\int_\rho^{\rho_e} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \partial \rho}\, d\rho \tag{41}$$

il vient, pour $\rho = \rho_e$:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial \rho \partial \rho}\right)_e = -\frac{2}{\rho_e} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial l^2}\right)_{\rho_e} \tag{117}$$

Alors, $\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho}\right)_e$ étant déjà nécessairement nul, on voit qu'au voisinage de la surface libre ω^2 doit être encore égal à ω_e^2 en seconde approximation.

Par exemple, il suffirait, pour que cela ait lieu, que la densité dépende de la seule pression dans une couche d'épaisseur finie ou encore que cette couche soit animée d'une rotation d'ensemble. On peut admettre que cette condition est satisfaite par la couche superficielle du fluide terrestre.

S'il en est ainsi on peut énoncer cette proposition : *La pesanteur varie à la surface d'une planète proportionnellement au gradient de la densité des couches superficielles.*

54. Supposons qu'au voisinage de la surface libre les couches d'égale densité soient réparties sur une famille d'ellipsoïdes dont l'aplatissement varie très peu. On a :

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\partial \rho}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dn} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}; \tag{118}$$

$\frac{dl}{dn}$ et $\frac{dz}{dn}$ s'expriment en fonction de la latitude φ du lieu considéré [1] au moyen des relations :

$$dl = -\cos\varphi \cdot dn, \qquad dz = -\sin\varphi \cdot dn.$$

D'autre part, soient β le demi-axe polaire d'une couche d'égale densité, τ le carré du rapport de l'axe focal à l'axe polaire ; l'équation générale de la famille des méridiennes des couches homogènes au voisinage de la couche superficielle s'écrira :

$$\frac{l^2}{1+\tau^2} + z^2 = \beta^2 \tag{119}$$

où τ et β sont des fonctions de la seule variable ρ. On tire de cette équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial l} = \frac{1}{1+\tau^2} \cdot \frac{2l}{\frac{l^2}{(1+\tau^2)^2} \cdot \frac{d\tau^2}{d\rho} + \frac{d\beta^2}{d\rho}}. \tag{120}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{2z}{\frac{l^2}{(1+\tau^2)^2} \cdot \frac{d\tau^2}{d\rho} + \frac{d\beta^2}{d\rho}}. \tag{121}$$

Si l'aplatissement est très peu variable on peut admettre que $\frac{d\tau^2}{d\rho}$ est nul. Posons $\frac{d\rho}{d\beta^2} = -m$ et tenons compte des relations suivantes :

$$l = \frac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \qquad z = \frac{b^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \tag{122}$$

qui donnent les coordonnées l et z d'un point de la surface libre en fonction des demi-axes a et b de cette surface et de latitude φ.

---

[1] φ est l'angle aigu que fait la direction de la pesanteur avec le plan équatorial.

La formule (118) donne :

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right)_{\epsilon} = 2\,\frac{mb^2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}}. \tag{123}$$

Le facteur $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ est plus petit que 1 ; on peut développer le second membre en série convergente suivant les puissances croissantes de $\sin^2\varphi$, et, si l'aplatissement de la couche superficielle est suffisamment petit, se limiter au premier terme. On obtient ainsi :

$$\left(\frac{d\rho}{dn}\right)_{\epsilon} = \frac{2\,mb^2}{a}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2 \varphi\right). \tag{124}$$

Alors, $\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_e$ étant une constante, en désignant par g_{eq} l'accélération de la pesanteur à l'équateur, l'équation (124) peut s'écrire :

$$g_e = g_{eq}\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2 \varphi\right). \tag{125}$$

Nous retrouvons donc, dans un cas plus général, la formule de Clairaut, classique en Géodésie.

DEUXIÈME PARTIE

DES STRATIFICATIONS ELLIPSOÏDALES

55. Dans leurs recherches sur les mouvements internes des fluides hétérogènes stratifiés en couches ellipsoïdales, MM. Hamy et Véronnet ont admis, *a priori*, que la résultante en un point (pesanteur) de l'attraction des masses et de la force centrifuge devait être normale à la surface à densité constante passant en ce point.

Nous avons vu qu'indépendemment de toute supposition sur le degré de compressibilité du fluide, cette hypothèse impliquait l'existence d'une relation $\rho = f(p)$ entre la densité et la pression et que, par suite, ainsi que l'a fait observer M. Rolin Wavre, toutes les molécules situées à la même distance de l'axe devaient être animées de la même vitesse angulaire (1).

Cette condition avait été oubliée jusqu'ici et il importait de se demander si elle pouvait être réalisée dans un fluide hétérogène à stratification ellipsoïdale.

Dans le cas d'une rotation d'ensemble (fluide tournant en bloc) M. Hamy a déjà obtenu un important théorème sur l'impossibilité d'une telle répartition des masses pour un fluide constitué d'un nombre *fini* de couches de densités différentes ; M. Véronnet a établi ensuite dans sa thèse que cette impossibilité ne disparaît pas lorsque la densité varie d'une façon continue d'une couche à une autre. On sait d'ailleurs que, pour Clairaut, ce n'est qu'en première approximation, en négligeant le carré des ellipticités, qu'une masse fluide hétérogène peut être stratifiée suivant des ellipsoïdes.

Nous montrerons au paragraphe 4 comment, *même dans le cas où l'on*

---

(1) R. Wavre, *Comptes rendus*, t. **184**, 1926, p. 277.

admet la possibilité d'un mouvement relatif des molécules, nous avons réussi à prouver l'incompatibilité de la condition d'invariance de la vitesse angulaire sur une parallèle à l'axe de rotation et de l'hypothèse d'une stratification ellipsoïdale.

Mais si l'on ne se place pas dans le cas particulier où le champ de la pesanteur est orthogonal aux couches d'égale densité, nous pouvons définir, au moyen des formules générales établies dans la première partie, un régime permanent de rotations pour un fluide possédant une telle stratification.

C'est ce que nous commencerons par démontrer.

CHAPITRE PREMIER

CALCULS PRÉLIMINAIRES

56. Considérons un fluide hétérogène constitué de couches ellipsoïdales homogènes, infiniment minces, dont la densité croît avec la profondeur.

Les mouvements de rotation internes nécessaires pour maintenir cette masse dans sa stratification sont régis par la formule (1).

$$(1) \qquad \omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2}\, dz^2\right)$$

dans laquelle Ω désigne la fonction

$$\frac{2}{\frac{\partial \rho}{\partial z^2}} \cdot \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}, \qquad \text{(v. n}^o\text{ 7, 1}^{re}\text{ partie)}$$

dont la valeur dépend des composantes $\frac{\partial U}{\partial l}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$ de l'attraction des masses dans un plan méridien.

Nous devons donc calculer tout d'abord les expressions de ces composantes.

§ 1. — Les composantes de l'attraction newtonienne

57. Cette attraction est la résultante des actions de toutes les couches minces sur le point matériel considéré. Pour l'obtenir nous calculerons l'action différentielle d'une couche ellipsoïdale mince homogène, puis nous sommerons les actions de toutes les couches.

Considérons d'abord une couche homogène (E) d'épaisseur finie, de densité q, comprise entre deux ellipsoïdes (E_1) et (E_2) concentriques et semblablement

(1) V. nos 7 et 14.

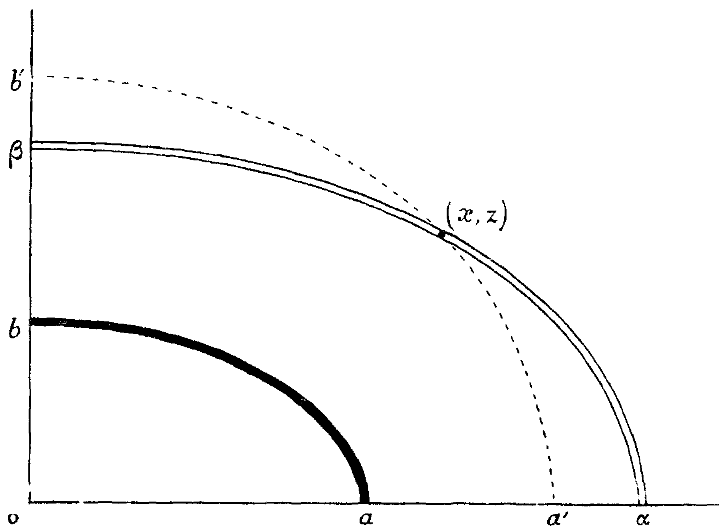
orientés. Son action en un point est égale à la différence des actions des deux ellipsoïdes (E_1) et (E_2) supposés remplis d'une matière homogène de densité q.

Les composantes $\underset{\mathrm{I}}{X}$ et $\underset{\mathrm{I}}{Z}$ de l'attraction d'un ellipsoïde homogène en un point (x, z) *intérieur*, dans le plan méridien $y = 0$, sont données par les formules [1] :

(2) $$\underset{\mathrm{I}}{X} = -2\pi q f \frac{1 + k^2}{k^3}\left(\operatorname{arctg} k - \frac{k}{1 + k^2}\right) x,$$

(3) $$\underset{\mathrm{I}}{Z} = -4\pi q f \frac{1 + k^2}{k^3}(k - \operatorname{arctg} k) z,$$

où k désigne le rapport $\frac{c}{b}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ relatif à la méridienne de l'ellipsoïde de demi-axes a et $b\,(a > b)$, f étant toujours la constante de la gravitation universelle.



Pour un point *extérieur* les composantes $\underset{\mathrm{E}}{X}$ et $\underset{\mathrm{E}}{Z}$ de l'attraction ont des expressions analoges :

(4) $$\underset{\mathrm{E}}{X} = -2\pi q f \frac{1 + k^2}{k^3}\left(\operatorname{arctg} s - \frac{s}{1 + s^2}\right) x,$$

(5) $$\underset{\mathrm{E}}{Z} = -4\pi q f \frac{1 + k^2}{k^3}(s - \operatorname{arctg} s) z;$$

[1] Cf. par exemple, TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II.

mais, dans celles-ci, s est le rapport $\frac{c}{b'}$ relatif à la méridienne de l'ellipsoïde de demi-axes a' et b' passant au point (x, z) et homofocal de l'ellipsoïde massif ; s est donc une fonction de b, x et z.

Nous poserons, pour abréger l'écriture :

$$j = \frac{1 + k^2}{k^3}, \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(t) &= 2\pi f \left(\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1 + t^2} \right), \\ \Psi(t) &= 4\pi f (t - \operatorname{arctg} t). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Les composantes de l'attraction de la couche $(\Delta E) = (E_1) - (E_2)$ en un *point intérieur* s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{\text{I}}{\Delta X} &\equiv \underset{\text{I}}{X_1} - \underset{\text{I}}{X_2} = q[j_2\Phi_2(k) - j_1\Phi_1(k)]x = q \cdot \Delta_1^2[j\Phi(k)]x, \\ \underset{\text{I}}{\Delta Z} &\equiv \underset{\text{I}}{Z_1} - \underset{\text{I}}{Z_2} = q[j_2\Psi_2(k) - j_1\Psi_1(k)]z = q \cdot \Delta_1^2[j\Psi(k)]z. \end{aligned} \right. \tag{I}$$

Le symbole Δ indiquant un accroissement fini.

Si le point agi est *extérieur* on aura de même :

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{\text{E}}{\Delta X} &\equiv q \cdot \Delta_1^2[j\Phi(s)]x \\ \underset{\text{E}}{\Delta Z} &\equiv q \cdot \Delta_1^2[j\Psi(s)]z, \end{aligned} \right. \tag{E}$$

58. Pour passer au cas d'une couche infiniment mince, il suffit de remplacer, dans les formules précédentes, Δ par le symbole différentiel d ; les composantes de l'attraction deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{\text{I}}{dX} &= qd[j\Phi(k)] \cdot x, \\ \underset{\text{I}}{dZ} &= qd[j\Psi(k)] \cdot z. \end{aligned} \right. \tag{I'}$$

en un *point intérieur*, et

$$\left\{ \begin{aligned} \underset{\text{E}}{dX} &= qd[j\Phi(s)] \cdot x, \\ \underset{\text{E}}{dZ} &= qd[j\Psi(s)] \cdot z. \end{aligned} \right. \tag{E'}$$

en un *point extérieur*.

59. Cela posé, pour obtenir les composantes de l'attraction totale de l'ellipsoïde hétérogène en un point de sa masse, nous remarquerons qu'en vertu de nos hypothèses une seule couche passe en un point déterminé et que, par suite, l'ensemble des méridiennes des diverses couches constitue une famille de courbes dépendant d'un seul paramètre. A *priori* le choix de ce paramètre est indifférent. Par exemple, il peut paraître simple, à première vue, d'adopter le paramètre k qui figure seul dans les formules (I′) et (E′) ; nous ne le ferons pas car, sans hypothèse supplémentaire, nous ignorons si ce paramètre varie toujours dans le même sens quand on passe d'une couche à la suivante en s'enfonçant à l'intérieur du fluide, et parce que nous ne savons pas non plus si ce paramètre a une limite quand on s'approche du centre. Nous éviterons aussi de choisir le grand axe des ellipses méridiennes puisque, dans ces conditions, nous ne connaissons pas la limite vers laquelle il tend ; les ellipsoïdes étant aplatis, cette limite peut-être nulle ou différente de o.

Le choix de l'axe polaire b pour caractériser une ellipse de la famille ne présente aucune de ces difficultés ; nous nous y arrêterons. Dès lors, le grand axe a, le rapport k et tous les éléments de cette ellipse sont des fonctions de b :

$$a = a(b), \qquad c = c(b), \qquad k = k(b), \qquad q = q(b)\ldots \tag{8}$$

60. Considérons alors un point (x, z) situé à l'intérieur du fluide sur une couche (β) d'axe polaire β.

Les composantes de l'attraction totale en ce point s'obtiendront en faisant séparément, suivant les axes ox et oz, la somme des composantes des actions élémentaires de toutes les couches tant intérieures qu'extérieures à la couche (β).

Les composantes totales cherchées seront donc données par les formules :

$$X_\beta = \left\{ \int_{b_e}^{\beta} q\,d[j\Phi(k)] + \int_{\beta}^{0} q\,d[j\Phi(s)] \right\} x \tag{9}$$

$$Z_\beta = \left\{ \int_{b_e}^{\beta} q\,d[j\Psi(k)] + \int_{\beta}^{0} q\,d[j\Psi(s)] \right\} z \tag{10}$$

b_e désignant le demi-axe polaire de la couche superficielle.

§ 2. — Expression de Ω

61. En prenant comme variables x et z et en remplaçant $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ respectivement par X_β et Z_β l'expression (20) — n° 7, 1re partie — de Ω devient, dans le plan méridien $y = 0$:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\dfrac{\partial\rho}{\partial x}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial z}} Z_\beta - X_\beta\right). \tag{11}$$

Or, en exprimant que la densité ρ est invariable sur la méridienne de la couche (β) (de demi-axes α et β) d'équation :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \tag{12}$$

on obtient l'égalité :

$$\frac{\dfrac{\partial\rho}{\partial x}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial z}} = \frac{x}{z}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}; \tag{13}$$

de sorte que l'on peut écrire, en posant $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = 1 + \tau^2$:

$$\Omega = \frac{1}{xz}\left(\frac{1}{1+\tau^2} xZ_\beta - zX_\beta\right); \tag{14}$$

et, en substituant à X_β et Z_β leurs expressions (9) et (10) on a :

$$\Omega = \int_{b_e}^{\beta} q\,d\left\{ j\left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k)\right]\right\} + \int_{\beta}^{0} q\,d\left\{ j\left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s)\right]\right\}. \tag{15}$$

Le deuxième membre ne contient x et z que par l'intermédiaire de s ; x et z sont d'ailleurs liés entre eux et à β par la relation (12), α étant fonction de β ($\alpha^2 > x^2$).

62. Transformons la formule (15) en intégrant par parties les deux intégrales du deuxième membre :

$$\left\{\begin{aligned} \int_{b_e}^{\beta} q\,d\left\{ j\left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k)\right]\right\} = {} & \left\{ qj\left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k)\right]\right\}_{b=\beta} \\ & - \left\{ qj\left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k)\right]\right\}_{b=b_e} \\ & - \int_{b_e}^{\beta} j\left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k)\right]\frac{dq}{db}\,db \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\beta}^{0} q\, d \left\{ j \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \right\} = & \left\{ qj \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=0} \\ & - \left\{ qj \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=\beta} \\ & - \int_{\beta}^{0} j \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \frac{dq}{db}\, db. \end{aligned} \right.$$

63. Le terme :

$$(18)\qquad \left\{ qj \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=0}$$

est nul. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les produits $qj\Psi(s)z$ et $qj\Phi(s)x$ sont, au signe près, les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène de densité q et que, par suite, ces produits doivent s'annuler lorsque, b tendant vers zéro, le volume, la masse, et partant l'action exercée par cet ellipsoïde, tendent simultanément vers zéro.

64. *Analytiquement*, on peut le démontrer de la manière suivante :

Lorsque b tend vers o, nous distinguerons deux cas, suivant que $c\,(c^2 = a^2 - b^2)$ tend ou ne tend pas vers o.

Dans le premier cas, sans rien préjuger de la loi de variation de l'aplatissement, on est sûr, puisque b' ne s'annule pas, que le rapport $s = \frac{c}{b}$, a pour limite o. On peut donc, pour trouver la limite des produits $j\Psi(s)$ et $j\Phi(s)$ remplacer $\Psi(s)$ et $\Phi(s)$ par leur infiniment petit équivalent commun :

$$\frac{4}{3}\pi f s^3 = \frac{4}{3}\pi f \cdot \frac{c^3}{b'^3};$$

en tenant compte des égalités $j = \frac{1+k^3}{k^3} = \frac{a^2 b}{c^3}$, on obtient ainsi l'expression :

$$\frac{4}{3}\pi f \frac{a^2}{b'^3} \cdot b$$

qui visiblement s'annule pour $b = 0$.

Lorsque c ne tend pas vers zéro, il tend vers une *limite déterminée*. En effet, l'égalité $c^2 = a^2 - b^2$ montre que, pour $b = 0$, a et c se comportent de la même façon. Or a^2 étant essentiellement > 0 et décroissant constamment en même temps que b (cela en raison de la signification physique des grandeurs a et b) a certainement une limite a_0^2 ; c'est aussi la limite de c^2, elle est différente de o en vertu de l'hypothèse faite. Il en résulte que $k = \frac{c}{b}$ augmente indéfiniment, tandis que le rapport j tend vers zéro. Quant aux fonctions croissantes $\Psi(s)$ et $\Phi(s)$, elles sont bornées, puisque $s = \frac{c}{b'}$, reste fini ; et cela suffit pour que les produits $j\Psi(s)$ et $j\Phi(s)$ aient encore pour limite zéro.

La densité $q(b)$ ne pouvant être infinie, on peut donc affirmer que le terme considéré est toujours nul pour $b = 0$. (C. Q. F. D.)

65. Revenons aux formules (16) et (17) ; et remarquons que la valeur de s pour $b = \beta$ est précisément égale au rapport :

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}, \tag{19}$$

en posant $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, et que, par suite :

$$\left\{ qj \left[\frac{\Psi(s)}{1+\tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=\beta} = \left\{ qj \left[\frac{\Psi(k)}{1+\tau^2} - \Phi(k) \right] \right\}_{b=\beta} \tag{20}$$

De sorte qu'en désignant par $\Upsilon(t, \tau)$ la fonction

$$\Phi(t) - \frac{\Psi(t)}{1+\tau^2} \tag{21}$$

la formule (15) s'écrira simplement :

$$\Omega = \rho_e j_e \Upsilon(k_e, \tau) - \int_0^\beta j\Upsilon(s, \tau) \frac{dq}{db}\, db - \int_\beta^{b_e} j\Upsilon(k, \tau) \frac{dq}{db}\, db \tag{22}$$

une variable affectée de l'indice e représentant la valeur de cette variable sur la couche superficielle pour $b = b_e$.

66. L'expression cherchée du carré ω^2 de la vitesse angulaire s'obtient alors en remplaçant Ω par son expression précédente (22) dans l'équation (1). On remarquera d'ailleurs qu'on peut donner à celle-ci la forme :

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho} \left(\rho_e \Omega_e - \int_\beta^{b_e} \Omega \frac{d\rho}{d\beta}\, d\beta \right) \tag{23}$$

en prenant comme variables indépendantes x^2 et β au lieu de x^2 et z^2.

CHAPITRE II

EXISTENCE D'UN RÉGIME PERMANENT DE ROTATIONS DANS UN FLUIDE HÉTÉROGÈNE A STRATIFICATION ELLIPSOÏDALE

67. Conditions indépendantes de la loi de variation de la densité. — On voit tout de suite que les rotations permanentes, définies par l'équation (23), ne sont réelles que si les fonctions $\Omega(x^2, \beta)$ et $\rho(\beta)$ satisfont à la condition nécessaire et suffisante :

$$\rho_e \Omega_e > \int_{\beta}^{b_e} \Omega \frac{d\rho}{d\beta} d\beta. \tag{24}$$

Cherchons s'il existe des stratifications ellipsoïdales vérifiant cette condition *pour toute loi de variation de la densité*, en supposant, toutefois, que celle-ci est toujours décroissante du centre vers la surface.

Il est évident, sur les formules (22) et (23), qu'il suffit, pour que l'expression de ω^2 soit positive, que les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ dans les intégrales :

$$\int_{0}^{\beta} j\Upsilon(s, \tau) \frac{dq}{db} db \qquad \text{et} \qquad \int_{\beta}^{b_e} j\Upsilon(k, \tau) \frac{dq}{db} db \tag{25}$$

soient positives en tout point du domaine du fluide.

68. Nous sommes donc ainsi amenés à faire une étude approfondie du signe de la fonction $\Upsilon(t, \tau)$ pour les valeurs positives de t.

Commençons par établir quelques lemmes.

Substituons à $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ leurs expressions (7) ; on a :

$$\Upsilon(t, \tau) = 2\pi f \left[\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1 + t^2} - \frac{2}{1 + \tau^2}(t - \operatorname{arctg} t)\right] \tag{26}$$

par suite, en posant :

$$H(t) = \frac{2(t - \operatorname{arctg} t)}{\operatorname{arctg} t - \dfrac{t}{1 + t^2}} \tag{27}$$

et

$$h(t) = \frac{H(t)}{1 + t^2} \tag{28}$$

les inégalités :

$$\Upsilon(t, \tau) \gtreqless 0 \tag{29}$$

sont équivalentes aux inégalités :

$$1 + \tau^2 \gtreqless H(t) \qquad \text{ou} \qquad 1 + \tau^2 \gtreqless (1 + t^2)\, h(t). \tag{30}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours $t > 0$; dès lors, les rapports $H(t)$ et $h(t)$ ont les propriétés suivantes :

1° *Le rapport* $H(t)$ *est une fonction croissante de* t.

En effet, sa dérivée :

$$\frac{d}{dt} H(t) = \frac{2t^2(3 + t^2)\left(\operatorname{arctg} t - \dfrac{3t}{3 + t^2}\right)}{(1 + t^2)^2 \left(\operatorname{arctg} t - \dfrac{t}{1 + t^2}\right)^2} \tag{31}$$

a le même signe que l'expression :

$$u(t) = \operatorname{arctg} t - \frac{3t}{3 + t^2} \tag{32}$$

dont la dérivée :

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{t^2(9 + t^2)}{(1 + t^2)(3 + t^2)^2} \tag{33}$$

est essentiellement positive. Or, pour $t = 0$, $u = 0$; donc $u(t)$ est positif pour toute valeur positive de t ; et il en est de même de $\dfrac{dH}{dt}$.

Pour $t = 0$, le rapport $H(t)$ prend la forme illusoire $\dfrac{0}{0}$. Développons ses deux termes en série par rapport aux puissances croissantes de t ; on aura :

$$\lim_{t=0} H(t) = \lim_{t=0} \frac{2\dfrac{t^3}{3} \cdots}{2\dfrac{t^3}{3} \cdots} = 1$$

par suite,

2° *Le rapport* $H(t)$ *est constamment supérieur à* 1.

3° *Le rapport $h(t)$ est compris entre* o *et* 1.

Ceci résulte de ce que la différence :

$$[(1 + t^2) \operatorname{arctg} t - t] - 2(t - \operatorname{arctg} t) = (3 + t^2) u(t) \tag{34}$$

est toujours positive.

69. Nous pouvons maintenant chercher dans quelles hypothèses sur la loi de variation de l'aplatissement des couches homogènes les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$, prises respectivement dans les intervalles $(0, \beta)$ et (β, b_e), sont positives quels que soient β et $x^2 (< \alpha^2)$. Envisageons les cinq cas suivants :

Premier cas. — *L'aplatissement des couches croît du centre à la surface.* — On a évidemment $\tau > s$, donc aussi $1 + \tau^2 > 1 + s^2$ et, *a fortiori*, en vertu du lemme 3°, $1 + \tau^2 > (1 + s^2) h(s)$ ou $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(s)$. Par suite $\Upsilon(s, \tau)$ est nécessairement positive.

D'autre part, comme on a, dans l'intervalle (β, b_e), $\tau < k$, on a aussi $1 + \tau^2 < 1 + k^2$; de sorte que la condition $1 + \tau^2 > (1 + k^2) h(k)$ ou $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(k)$ n'est pas certainement satisfaite en tout point du fluide ; pour qu'elle le soit il faut et il suffit qu'on ait :

$$1 + k_0^2 > \mathrm{H}(k_e) \tag{35}$$

k_0 et k_e désignant les valeurs du rapport k au centre et à la surface.

Deuxième cas. — *Les couches sont homothétiques.* — On a toujours $\tau > s$ et $\Upsilon(s, \tau)$ est encore constamment positive.

Dans l'intervalle (β, b_e), on a, quelque soit β, $\tau = k$ d'où $1 + \tau^2 = 1 + k^2$ et, en vertu du lemme 3°, $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(k)$.

La fonction $\Upsilon(k, \tau)$ est donc aussi nécessairement positive.

Troisième cas. — *L'aplatissement décroît du centre à la surface moins vite que si les couches étaient homofocales.* — Dans l'intervalle $(0, \beta)$ on a encore $\tau > s$, dans (β, b_e) on a $\tau > k$. Les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont encore positives.

Quatrième cas. — *Les couches sont homofocales.* — Dans ce cas $\tau = s$ dans $(0, \beta)$ et $\tau > k$ dans (β, b_e). Les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont donc toujours positives.

Cinquième cas. — *L'aplatissement décroît du centre à la surface plus vite que si les couches étaient homofocales.* — Cette fois $\tau < s$ dans $(0, \beta)$ et $\tau > k$

dans (β, b_e). La fonction $\Upsilon(k, \tau)$ est positive dans tout le domaine du fluide ; mais il n'est pas certain qu'il en soit de même pour la fonction $\Upsilon(s, \tau)$.

Toutefois, en raison de la continuité de cette fonction par rapport à ses arguments, on peut prévoir qu'elle sera encore positive pour toute loi de variation de l'aplatissement assez voisine de celle des couches homofocales.

70. Ainsi donc les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont certainement positives dans les deuxième, troisième et quatrième cas. *Quelle que soit la loi de variation de la densité* $\left(\frac{dq}{db} < 0\right)$ il en est, par suite, de même des expressions (22) et (23) de Ω et de ω^2 *et l'on est assuré, dans chacun de ces cas, de l'existence d'un régime permanent de rotations.*

71. Nous pouvons obtenir une conclusion plus générale.

Pour cela examinons comment varie la fonction $\Upsilon(s, \tau)$ par rapport aux variables x^2 et b^2 dont elle dépend par l'intermédiaire de s.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial b^2} \Upsilon(s, \tau) = \frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial b^2}. \tag{36}$$

On calculera aisément $\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau)$ au moyen de la relation :

$$\Upsilon(s, \tau) = 2\pi f \left[\operatorname{arctg} s - \frac{s}{1 + s^2} - \frac{2}{1 + \tau^2} (s - \operatorname{arctg} s) \right]; \tag{37}$$

on trouve :

$$\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) = 4\pi f \xi^2 \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} (\tau^2 - s^2), \tag{38}$$

ξ^2 désignant par abréviation le rapport $\frac{1}{1 + \tau^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Pour calculer $\frac{\partial s}{\partial b^2}$ nous chercherons une relation entre s, β et z^2.

On a d'abord les deux équations :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \tag{12}$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{z^2}{b'^2} = 1 \tag{39}$$

où a' et b' représentent les demi-axes de l'ellipse (b') homofocale de l'ellipse (b) et passant au point (x, z). En posant, comme précédemment,

$$1 + \tau^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \qquad 1 + s^2 = \frac{a'^2}{b'^2}$$

et en remarquant que $b' = \frac{c}{s}$, ces équations s'écrivent :

$$\frac{x^2}{1+\tau^2} + z^2 = \beta^2 \tag{40}$$

$$\frac{x^2}{1+s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2} \tag{41}$$

d'où, par élimination de x^2 :

$$z^2 s^4 - (z^2\tau^2 - \alpha^2 + c^2)s^2 - c^2 = 0; \tag{42}$$

c'est bien la relation cherchée puisque c est fonction de b tandis que α et τ sont des fonctions de β. De cette relation on tire :

$$\frac{\partial s}{\partial b^2} = \frac{s(1+s^2)}{2(s^4 z^2 + c^2)} \cdot \frac{dc^2}{db^2}. \tag{43}$$

Pour abréger l'écriture posons :

$$G^2(b^2) = \frac{s^2(1+s^2)}{s^4 z^2 + c^2}, \tag{44}$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial b^2}(\tau^2 - s^2) = -2s\frac{\partial s}{\partial b^2} = -G^2\frac{dc^2}{db^2}, \tag{45}$$

intégrons par rapport à b^2, en observant que s est égal à τ pour $b = \beta$:

$$\tau^2 - s^2 = \int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2}\, db^2. \tag{46}$$

En portant alors les expressions calculées dans les formules (38) et (36) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial b^2}\Upsilon(s,\tau) = 2\pi f \xi^2 \frac{s}{(1+s^2)^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2} \cdot \int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2}\, db^2 \tag{47}$$

et il est visible sur cette formule qu'il faut et il suffit que c^2 soit une fonction monotone de b^2 pour que la dérivée de $\Upsilon(s,\tau)$ par rapport à b^2 ne puisse être que positive ou nulle.

Cette condition est réalisée dans les cinq cas précédents ; on a, en effet :

$$\frac{dc^2}{db^2} > \frac{c^2}{b^2} > 0 \qquad \text{dans le premier cas.}$$

$$\frac{dc^2}{db^2} = \frac{c^2}{b^2} > 0 \qquad \text{dans le second.}$$

$$0 < \frac{dc^2}{db^2} < \frac{c^2}{b^2} \qquad \text{dans le troisième.}$$

$$\frac{dc^2}{db^2} = 0 \qquad \text{dans le quatrième.}$$

$$\frac{dc^2}{db^2} < 0 \qquad \text{dans le cinquième.}$$

Prenons maintenant la dérivée de $\Upsilon(s, \tau)$ par rapport à x^2 ; en remarquant que cette fonction ne dépend encore de b^2 que par l'intermédiaire de s, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\Upsilon(s, \tau) = \frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2}. \tag{48}$$

Nous connaissons déjà l'expression de $\frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau)$. Le calcul de $\frac{\partial s}{\partial x^2}$ se fera au moyen de la relation :

$$s^4(\alpha^2 - x^2) + s^2[\tau^2 x^2 + \alpha^2 - c^2(1 + \tau^2)] - c^2(1 + \tau^2) = 0 \tag{49}$$

qu'on obtient en éliminant z^2 entre les deux équations (40) et (41) ; on a :

$$\frac{\partial s}{\partial x^2} = -\xi^2 \cdot \frac{s^3(\tau^2 - s^2)}{2(s^4 z^2 + c^2)}. \tag{50}$$

Et, en tenant compte de la formule (46), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\Upsilon(s, \tau) = -2\pi f \xi^4 \frac{s^5}{(1 + s^2)^2 (s^4 z^2 + c^2)} \left(\int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2} db^2\right)^2 \tag{51}$$

Quel que soit le sens de la variation de c^2 en fonction de b^2, $\Upsilon(s, \tau)$ est donc essentiellement une fonction décroissante de x^2.

72. *De la discussion précédente il résulte que $\Upsilon(s, \tau)$ sera certainement positive, dans tout le domaine du fluide, si elle positive pour la valeur minimum* 0 *de b, et pour la valeur maximum α^2 de x^2.*

Soit a_0 le demi-axe équatorial de la couche centrale ; en appelant σ la valeur $\left(\frac{\alpha^2}{a_0^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ que prend s pour $b = 0$ et $x^2 = \alpha^2$ [1], il faudra donc que l'on ait :

$$1 + \tau^2 > H(\sigma) \tag{52}$$

ou encore, au moyen de l'expression (27) de H :

$$3 + \tau^2 > \frac{2\sigma^3}{\operatorname{arctg} \sigma - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2}}. \tag{53}$$

---

[1] a_0 peut d'ailleurs être nul et, en ce cas, $\sigma = 0$.

En résumé, si l'on forme sur le fluide hétérogène considéré les deux hypothèses suivantes :

1° La densité décroît constamment du centre à la surface ;

2° L'aplatissement et l'axe focal d'une couche sont des fonctions monotones de son axe polaire, on peut énoncer ce résultat global :

Pour toute loi de variation de l'aplatissement satisfaisant aux conditions (35) *et* (53) (dont l'une au moins est satisfaite en vertu de la deuxième hypothèse), *il existe*, QUELLE QUE SOIT LA LOI DE VARIATION DE LA DENSITÉ, *un régime permanent de rotations maintenant le fluide dans sa stratification initiale.*

CHAPITRE III

ANALYSE DES MOUVEMENTS INTERNES

73. Supposons que la distribution des vitesses des molécules du fluide soit réalisée de manière à conserver aux couches leur forme ellipsoïdale, et proposons nous maintenant d'étudier les variations de la vitesse angulaire ω à l'intérieur et sur la surface de la masse fluide.

Nous utiliserons pour cela les formules générales, établies dans la première partie de ce mémoire, donnant les dérivées partielles de ω^2 par rapport à la densité ρ et au carré l^2 de la distance à l'axe.

La stratification étant de révolution, nous pouvons, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, nous borner à discuter les variations de ω^2 dans le plan méridien $y = 0$; on a alors : $l^2 = x^2$.

Puisque la densité ρ d'une couche ne dépend que du demi-axe polaire β de cette couche, prenons comme variable indépendante β au lieu de ρ.

Dans le système de variables β et x^2, les formules (40) et (41) (1re partie) deviennent :

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \frac{\partial\Omega_e}{\partial x^2} - \int_\beta^{b_e} \frac{\partial\Omega}{\partial x^2} \cdot \frac{d\rho}{d\beta} \cdot d\beta\right). \tag{54}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial\beta} = -\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\beta} \int_\beta^{b_e} \rho \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \cdot d\beta. \tag{55}$$

La répartition des densités étant donnée, $\frac{d\rho}{d\beta}$ est une fonction connue de β ; par suite, la discussion des signes des dérivées $\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial\omega^2}{\partial\beta}$ se ramène à celle des signes de $\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}$.

§ 1. — Variation de la vitesse angulaire en latitude sur une couche de densité constante et en particulier sur la surface du fluide

74. Laissons β constant et étudions les variations de ω^2 en fonction de x^2.
En remarquant que l'expression Ω :

$$\rho_e j_e \Upsilon(k_e, \tau) - \int_0^\beta j\Upsilon(s, \tau)\frac{dq}{db}\,db - \int_\beta^{b_e} j\Upsilon(k, \tau)\frac{dq}{db}\,db \tag{22}$$

ne dépend de x^2 que par l'intermédiaire de s, on peut écrire :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^2} = -\int_0^\beta j\,\frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau)\cdot\frac{\partial s}{\partial x^2}\cdot\frac{dq}{db}\cdot db \tag{56}$$

ou, en remplaçant $\frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau)$ et $\frac{\partial s}{\partial x^2}$ par leurs expressions connues (38) et (50) :

$$\frac{1}{2\pi f}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial x^2} = \xi^4\int_0^\beta j\,\frac{s^5(\tau^2 - s^2)^2}{(1 + s^2)^2(s^4z^2 + c^2)}\cdot\frac{dq}{db}\cdot db. \tag{57}$$

La dérivée $\frac{dq}{db}$ étant négative par hypothèse, on voit que $\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}$ ne peut être que négatif, ou nul lorsque $\tau - s$ est identiquement nul ; et il en est de même en vertu de l'équation (54) de $\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2}$.

75. *Par conséquent, on peut affirmer que, sur une même couche, la vitesse angulaire croît constamment de l'équateur au pôle.*

Elle ne peut être constante que si $\tau - s$ est identiquement nul et ceci exige que les couches homogènes soient réparties sur une famille d'ellipsoïdes homofocaux.

Et, dans ce cas, chaque couche tourne d'un seul bloc.

§ 2. — Variation de la vitesse angulaire en profondeur sur une parallèle a l'axe de rotation

76. Pour obtenir une conclusion générale nous devons étudier les variations de la vitesse angulaire sur une parallèle *quelconque* à l'axe de rotation.

Sans préciser la valeur de la variable x^2 nous établirons donc l'expression générale de la dérivée de Ω par rapport à β.

Nous avons :

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega = \rho_e j_e\left[\Phi(k_e) - \frac{\Psi(k_e)}{1+\tau^2}\right] - \int_0^\beta j\left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1+\tau^2}\right]\frac{dq}{db}\,db \\ - \int_\beta^{b_e} j\left[\Phi(k) - \frac{\Psi(k)}{1+\tau^2}\right]\frac{dq}{db}\,db. \end{aligned}\right.$$

D'où, en différentiant sous le signe somme :

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = {} & \frac{\rho_e j_e \Psi(k_e)}{(1+\tau^2)^2}\cdot\frac{d\tau^2}{d\beta} - \left\{ j\left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1+\tau^2}\right]\frac{dq}{db}\right\}_{b=\beta} \\ & - \int_0^\beta j\left\{\frac{d}{ds}\left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1+\tau^2}\right]\frac{\partial s}{\partial\beta} + \frac{\Psi(s)}{(1+\tau^2)^2}\cdot\frac{d\tau^2}{d\beta}\right\}\frac{dq}{db}\,db \\ & + \left\{ j\left[\Phi(k) - \frac{\Psi(k)}{1+\tau^2}\right]\right\}_{b=\beta} - \int_\beta^{b_e} j\,\frac{\Psi(k)}{(1+\tau^2)^2}\cdot\frac{d\tau^2}{d\beta}\cdot\frac{dq}{db}\,db. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que :

$$\left\{ j\left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1+\tau^2}\right]\frac{dq}{db}\right\}_{b=\beta} = \left\{ j\left[\Phi(k) - \frac{\Psi(k)}{1+\tau^2}\right]\frac{dq}{db}\right\}_{b=\beta},$$

et tenons compte des formules :

$$\Psi = 4\pi f(t - \operatorname{arctg} t),$$

$$\xi^2 = \frac{1}{1+\tau^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

$$(38)\quad \frac{d}{ds}\left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1+\tau^2}\right] = \frac{d}{ds}\Upsilon(s,\tau) = 4\pi f\xi^2\,\frac{s^2}{(1+s^2)^2}\cdot(\tau^2 - s^2),$$

il vient :

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4\pi f}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = {} & \xi^4\left[\rho_e j_e(k_e - \operatorname{arctg} k_e) - \int_0^\beta j(s - \operatorname{arctg} s)\,\frac{dq}{db}\,db \right. \\ & \left. - \int_\beta^{b_e} j(k - \operatorname{arctg} k)\,\frac{dq}{db}\,db\right]\frac{d\tau^2}{d\beta} \\ & - \xi^2\int_0^\beta j\,\frac{s^2}{(1+s^2)^2}\cdot(\tau^2 - s^2)\cdot\frac{\partial s}{\partial\beta}\,\frac{dq}{db}\,db. \end{aligned}\right.$$

Or, on a (v. form. (16) et (17)) :

$$\rho_e j_e(k_e - \operatorname{arctg} k_e) - \int_0^\beta j(s - \operatorname{arctg} s)\frac{dq}{db}\,db - \int_\beta^{b_e} j(k - \operatorname{arctg} k)\frac{dq}{db}\,db$$

$$= -\frac{1}{4\pi f}\left[\int_{b_e}^\beta q\,d[j\Psi(k)] + \int_\beta^0 q\,d[j\Psi(s)]\right] = -\frac{1}{4\pi f}\cdot\frac{Z_\beta}{z},$$

Z_β étant la composante suivant oz de la résultante de l'attraction des masses au point considéré.

Si donc on pose :

$$Z_\beta = -4\pi f N z, \tag{61}$$

la quantité entre crochets de la formule (60) est précisément égale au coefficient N.

Finalement :

$$\frac{1}{4\pi f}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = \xi^4 N \frac{d\tau^2}{d\beta} - \xi^2 \int_0^\beta j\frac{s^2}{(1+s^2)^2}\cdot(\tau^2 - s^2)\frac{\partial s}{\partial\beta}\frac{dq}{db}\,db \tag{62}$$

N est essentiellement positif ; en effet, $\frac{dq}{db}$ est négatif par hypothèse, et la quantité $t - \operatorname{arctg} t$ est positive quel que soit $t > 0$.

D'autre part, en utilisant les équations :

$$\frac{x^2}{1+\tau^2} + z^2 = \beta^2,$$

$$\frac{x^2}{1+s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2},$$

on établira aisément que $\frac{\partial s}{\partial\beta}$ est toujours négatif.

Cette remarque est d'ailleurs évidente, si l'on songe à cette propriété des ellipsoïdes homofocaux d'être de moins en moins aplatis, au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de leur centre.

77. Cela posé, nous allons discuter le signe du deuxième membre de (62) dans les cinq cas précédemment distingués (n° 70).

PREMIER CAS. — *L'aplatissement des couches croît du centre à la surface.* — On a donc :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} > 0 \qquad \text{et} \qquad \tau > s.$$

Les deux termes du second membre de (62) ont des signes contraires ; une première analyse ne permet pas de connaître le signe de $\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$.

Le cas actuel comprend l'état d'équilibre approché défini par Clairaut.

DEUXIÈME CAS. — *Les couches sont homothétiques.* — On a alors :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \tau > s ;$$

$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$ et, par suite $\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta}$, sont négatifs.

La rotation décroît du centre à la surface.

TROISIÈME CAS. — *L'aplatissement décroît du centre à la surface moins vite que si les couches étaient homofocales.* — Cette fois :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0 \qquad \text{et} \qquad \tau > s$$

$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$ est donc négatif.

La rotation décroît du centre à la surface.

QUATRIÈME CAS. — *Les couches sont homofocales.* — On a encore :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0, \qquad \text{mais} \qquad \tau = s$$

La rotation décroît toujours du centre à la surface.

Nous savons d'ailleurs que, dans ce cas, chaque couche tourne d'un seul bloc.

CINQUIÈME CAS. — *L'aplatissement décroît du centre à la surface plus vite que si les couches étaient homofocales.* — Dans cette hypothèse :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0 \qquad \text{et} \qquad \tau < s.$$

Les deux termes du second membre de (62) ont des signes contraires ; une première analyse ne nous permet donc pas de connaître le signe de $\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$.

78. *En résumé*, le résultat global suivant se dégage de la discussion que nous venons de faire :

La vitesse angulaire décroît constamment du centre à la surface et du pôle à l'équateur sauf, peut être, dans deux cas extrêmes dont l'un comprend le cas particulier d'équilibre relatif approché de Clairaut.

CHAPITRE IV

DE L'IMPOSSIBILITÉ D'UNE STRATIFICATION ELLIPSOÏDALE LORSQUE LE CHAMP DE LA PESANTEUR EST ORTHOGONAL AUX SURFACES A DENSITÉ CONSTANTE

79 Nous avons déjà remarqué que le champ de la pesanteur était orthogonal aux couches d'égale densité chaque fois que celles-ci coïncidaient avec les surfaces à pression constante (nº 25), et nous avons cité trois cas élémentaires où cette circonstance se trouve réalisée.

Quelle qu'en puisse être la nécessité physique, nous savons que les vitesses angulaires satisfont à une condition rigoureuse d'invariance sur toute parallèle à l'axe de rotation.

80. Cette condition s'exprime par l'identité (nº 27) :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \equiv 0 \tag{63}$$

qui doit être vérifiée dans le domaine du fluide quels que soient β et x^2 $\left(x^2 < \alpha^2\right.$ pour que le point (β, x^2) existe$\left.\right)$; en particulier, elle doit être satisfaite sur l'axe de rotation oz, pour $x^2 = 0$; car, si elle ne l'était pas, en raison de la continuité de Ω, elle ne le serait pas non plus sur un axe parallèle infiniment voisin et ne pourrait l'être éventuellement que sur un axe situé à distance finie ; on aurait, par suite, autour de l'axe de rotation tout un domaine cylindrique dans lequel la condition (63) ne serait pas vérifiée.

Il est donc bien nécessaire que l'on ait :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \equiv 0$$

pour $x^2 = 0$, comme pour toute valeur de $x^2 < \alpha^2$. Et ceci exige que l'identité :

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\beta\,\partial x^2} \equiv 0 \tag{64}$$

soit satisfaite d'une façon tout aussi générale.

Or on a :

(56) $$\frac{\partial \Omega}{\partial x^2} = -\int_0^\beta j \frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \cdot \frac{dq}{db} \cdot db$$

d'où, en différentiant sous le signe somme par rapport à β :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \, \partial x^2} = -\left[j \frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \cdot \frac{dq}{db} \right]_{b=\beta} - \int_0^\beta j \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \frac{\partial s}{\partial x^2} \right] \frac{dq}{db} \cdot db.$$

Mais, pour $b = \beta$, $s = \tau$ et les expressions (38) et (50) de $\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau)$ et $\frac{\partial s}{\partial x^2}$ sont nulles quel que soit $x^2 (< \alpha^2)$. De sorte que la condition (64) se réduit à l'identité :

(65) $$\int_0^\beta j \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right] \frac{dq}{db} \cdot db \equiv 0.$$

Supposons $x^2 = 0$, nous allons voir qu'elle ne peut pas être vérifiée.

En effet, si elle l'était, on aurait nécessairement :

$$\int_0^{\beta'} d\beta \int_0^\beta j \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right] \frac{dq}{db} \cdot db \equiv 0,$$

β' désignant une valeur quelconque de β.

Appliquons la transformation de Lejeune-Dirichlet à l'intégrale double précédente ; il vient :

$$\int_0^{\beta'} db \int_b^{\beta'} j \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right] \cdot \frac{dq}{db} \, d\beta \equiv 0$$

ou :

(66) $$\int_0^{\beta'} j \left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right]_{\beta=\beta'} \cdot \frac{dq}{db} \, db \equiv 0,$$

en observant, comme précédemment, que

$$\left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right]_{\beta=b}$$

est identiquement nul.

En tenant compte des expressions de $\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau)$ et de $\frac{\partial s}{\partial x^2}$, on peut écrire :

$$\left[\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial x^2} \right]_{\beta=\beta'} = -2\pi f \left[\xi^2 \frac{s^5 (\tau^2 - s^2)^2}{(1 + s^2)^2 [s^4 (x^2 - z^2) + c^2 (1 + \tau^2)]} \right]_{\beta=\beta'};$$

cette quantité est essentiellement négative quels que soient β' et $x^2 < \alpha^2$; dans le cas actuel $x^2 = 0$.

Dès lors, $\frac{dq}{db}$ étant négatif par hypothèse (ellipsoïde hétérogène), il résulte de cette remarque que l'identité (66) ne peut être satisfaite, quel que soit β', que si l'on a $\tau = s$, ce qui exigerait que les couches homogènes soient réparties sur une famille d'ellipsoïdes homofocaux. Mais, dans ce cas, la formule (56) donnerait $\frac{\partial \Omega}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} \equiv 0$; et comme cette identité devrait avoir lieu, quels que soient β et x^2, en même temps que l'identité $\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} \equiv 0$, le fluide serait ou immobile ou animé d'une rotation d'ensemble. Or la discussion précédente nous a appris que cela était irréalisable dans un fluide à stratification ellipsoïdale.

D'où la conclusion générale suivante :

Il est impossible de concevoir les planètes comme constituées de couches ellipsoïdales homogènes si l'on admet que la pesanteur est en tout point normale à ces couches [1].

---

[1] *Comptes rendus*, t. **184**, p. 371 (1927).

CHAPITRE V

STRATIFICATIONS ELLIPSOÏDALES HOMOTHÉTIQUES

81. Nous allons consacrer un développement spécial au cas des fluides stratifiés en couches ellipsoïdales homothétiques. Son étude donnera lieu à quelques remarques intéressantes au point de vue analytique. De plus, ce cas paraît convenir particulièrement au globe terrestre; car il résulte, en effet, de la théorie de la précession que l'aplatissement des couches ne peut être que très peu variable du centre à la surface [1]. Et, il est bon de rappeler ici que le coefficient de précession d'un sphéroïde liquide est très sensiblement le même que celui d'un sphéroïde solide [2].

§ I. — Vitesse angulaire

82. Donnons, tout de suite, l'expression du carré de la vitesse angulaire pour un fluide hétérogène stratifié en couches ellipsoïdales homothétiques.

---

[1] A et C étant respectivement les moments d'inertie de la masse tournante par rapport à un axe équatorial et à l'axe polaire la fraction $\frac{C - A}{A}$ est approximativement égale à l'aplatissement $\alpha = \frac{a_1 - b_1}{a_1}$; or, il résulte de la théorie de la précession que $\frac{C - A}{A} = \frac{1}{305}$ tandis que les mesures géodésiques donnent pour α un nombre voisin de $\frac{1}{297}$.

[2] G. H. Darwin, *On the Precession of a viscous sphéroïd*, *Philos. Trans.*, 1879.

S. Oppenheim, *Rotation ùnd Präcession eines flüssigen sphäroïds*, *Astron. Nachrichten*, n° 2701, 1885.

Cf. Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 481.

Dans la formule générale :

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2\right)$$

(1re partie n° 14), la fonction Ω :

$$\rho_e j_e \Upsilon(k_e, \tau) - \int_0^\beta j \Upsilon(s, \tau) \frac{dq}{db} db - \int_\beta^{b_e} j \Upsilon(k, \tau) \frac{dq}{db} db$$

se simplifie. En effet, les couches étant homothétiques, le paramètre k (mesurant le degré d'aplatissement) est constant ($\tau = k = k_e$) et l'on a :

$$\int_\beta^{b_e} j \Upsilon(k, \tau) \frac{dq}{db} db = j \Upsilon(k, k)(\rho_e - \rho) \tag{67}$$

de sorte que Ω se réduit à :

$$\rho j \Upsilon(k, k) - \int_0^\beta j \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db. \tag{68}$$

L'expression de ω^2 devient donc :

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 = \frac{1}{\rho}\Big\{ & \rho_e \left[\rho_e j \Upsilon(k, k) - \int_0^{b_e} j \Upsilon(s_e, k) \frac{dq}{db} db\right] \\ & - \int_{z^2}^{z_e^2} \left[\rho j \Upsilon(k, k) - \int_0^\beta j \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db\right] \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2 \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

s_e désignant la valeur s lorsque le point (x,z) se trouve sur la couche superficielle.

§ 2. — Masse fluide hétérogène en rotation a moment cinétique donné

83. Considérons un fluide hétérogène formé d'une infinité de couches homogènes dont les densités forment une suite continue.

Nous supposons que cette masse est seulement soumise à l'attraction de ses molécules et à une pression atmosphérique constante p_e.

Les seules forces extérieures existantes sont alors les pressions normales agissant sur chaque élément de la surface du fluide. On sait que ce système de forces est équivalent à zéro.

Il en résulte, d'après le théorème des moments cinétiques, que, quels que puissent être les mouvements relatifs des molécules et l'évolution des formes de la masse, le moment cinétique $\vec{\Gamma}$ pris par rapport à son centre de gravité, est un vecteur de grandeur et de direction constante.

84. Appliquons l'axe oz de notre trièdre de référence sur le vecteur $\vec{\Gamma}$; et supposons que les mouvements relatifs se réduisent à des rotations uniformes autour de oz.

Nous nous proposons d'établir qu'étant donnés une masse fluide hétérogène incompressible et un moment cinétique $\vec{M}$ quelconque, il existe toujours une répartition des densités en couches ellipsoïdales homothétiques et un régime permanent de rotations uniformes maintenant le fluide dans cette stratification.

Utilisons les notations habituelles ; le moment de la quantité de mouvement par rapport à oz d'un élément de masse $\rho dx\,dy\,dz$ a pour expression :

$$\rho\,\omega\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{70}$$

Le moment cinétique résultant Γ s'exprime donc par l'intégrale :

$$\iiint_V \rho\,\omega\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

étendue à tout le volume V du fluide.

Or, la stratification étant de révolution, cette intégrale peut encore s'écrire :

$$\pi \iint_S \rho\,\omega\, l^2\, dl^2\, dz, \qquad (l^2 = x^2 + y^2) \tag{71}$$

S désignant l'aire du plan des l^2 et z correspondant à une section méridienne.

Puisque le mouvement est supposé permanent, la rotation ω est donnée par l'équation (69). *Le moment cinétique est, par suite, une fonction continue de k.* Nous allons montrer que cette fonction augmente indéfiniment en même temps que k. Il nous suffira pour cela de prouver qu'elle est toujours supérieure à une fonction minorante qui tend vers l'infini avec k.

Nous savons que, dans une stratification en couches homothétiques, la vitesse angulaire croît constamment avec la profondeur, sur une même parallèle à l'axe de rotation. Pour une même valeur de x^2, on a donc toujours :

$$\omega_\rho^2 < \omega^2 ; \tag{72}$$

mais :

$$\omega_\rho^2 = \Omega_e = \rho_e j \Upsilon(k, k) - \int_0^{b_e} j \Upsilon(s_e, k) \frac{dq}{db}\, db ; \tag{73}$$

de sorte qu'on a *a fortiori* :

$$\omega^2 > \rho_e j \Upsilon(k, k) ; \tag{74}$$

et comme ρ est supérieur à ρ_e, on déduit de là l'inégalité :

$$\iint_S \rho \omega l^2 \, dl^2 \, dz > \iint_S \rho_e \sqrt{\rho_e j \Upsilon(k, k)} \, l^2 \, dl^2 \, dz, \tag{75}$$

Le produit $\rho_e \sqrt{\rho_e j \Upsilon(k, k)}$ ne dépend pas des variables d'intégration, et la fonction minorante peut encore s'écrire :

$$\rho_e^{\frac{3}{2}} \sqrt{j \Upsilon(k, k)} \iint_S l^2 \, dl^2 \, dz. \tag{76}$$

La stratification possédant un plan équatorial de symétrie, on a :

$$\iint_S l^2 \, dl^2 \, dz = 2 \int_0^{a_e^2(k)} l^2 \, dl^2 \int_0^{z_e(l^2, k)} dz ; \tag{77}$$

on tirera les limites d'intégration $a_e^2(k)$ et $z_e(l^2, k)$ des formules :

$$\frac{l^2}{1 + k^2} + z_e^2 = \frac{a_e^2}{1 + k^2}. \tag{78}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{a_e^3}{\sqrt{1 + k^2}}. \tag{79}$$

en observant que le volume V du fluide est une constante donnée ; il vient :

$$z_e = \frac{\sqrt{a_e^2 - l^2}}{\sqrt{1 + k^2}}, \tag{80}$$

$$a_e^2 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + k^2)^{\frac{1}{3}}. \tag{81}$$

Le calcul de l'intégrale double (77) s'effectue par les méthodes classiques. Et l'on établit facilement que la fonction minorante augmente indéfiniment en même temps que l'expression :

$$\frac{(1 + k^2)^2 (3 + k^2)^3}{k^9} \left(\operatorname{arctg} k - \frac{3k}{3 + k^2}\right), \tag{82}$$

lorsque k dépasse toute limite.

Le moment cinétique Γ croît donc indéfiniment avec k. Or pour $k = 0$, $\omega^2 = 0$, Γ est nul. Comme d'ailleurs cette fonction est continue, elle prend toutes les valeurs positives lorsque k varie de 0 à l'infini.

En particulier, il y a au moins une valeur de k, c'est-à-dire une stratification de la masse en ellipsoïdes homothétiques, pour laquelle le moment cinétique Γ *prend la valeur* M *donnée.*

Nous avons ainsi étendu à l'ellipsoïde fluide hétérogène une propriété connue des ellipsoïdes homogènes de Mac-Laurin et de Jacobi [1].

85. Il serait intéressant de savoir s'il existe plusieurs stratifications ellipsoïdales homothétiques possibles. Ce problème se ramenerait à la discussion du signe de la dérivée par rapport à k de l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{S}} \rho\omega\, l^2\, dl^2\, dz.$$

On aurait, en remarquant que le domaine d'intégration dépend de k :

$$\delta\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{S}} \delta(\rho\omega)\, l^2\, dl^2\, dz + \int_{\mathrm{C}} \rho\omega\, l^2 (\delta l^2\, dz - \delta z\, dl^2),$$

le symbole δ désignant un accroissement élémentaire, et C indiquant, dans le plan des l^2 et z, la transformée de la frontière du domaine d'intégration S.

§ 3. — Expression de la vitesse angulaire pour une répartition des densités conforme a la loi de Roche

86. Nous nous proposons de montrer qu'en adoptant la loi de variation de la densité que Roche a donnée pour le globe terrestre, on peut exprimer ω^2 sous forme d'une fraction rationnelle des carrés x^2 et z^2 des coordonnées du point considéré.

Reprenons l'expression (69) de ω^2 :

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega^2 = \frac{1}{\rho} \Big\{ & \rho_e \left[\rho_e j \Upsilon(k, k) - \int_0^{b_e} j \Upsilon(s_e, k) \frac{dq}{db}\, db \right] \\ & - \int_{z^2}^{z_e^2} \left[\rho j \Upsilon(k, k) - \int_0^{\beta} j \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db}\, db \right] \frac{\partial \rho}{\partial z^2}\, dz^2 \Big\}. \end{aligned} \right.$$

---

[1] Paul Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV, 1921, p. 70.

Nous avons à prendre les intégrales :

(83) $$\int_0^\beta \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db,$$

et

(84) $$\int_{z^2}^{z_i^2} \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2 \int_0^\beta \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db.$$

On peut calculer l'intégrale simple en utilisant l'artifice suivant : au lieu de b nous prendrons s comme variable d'intégration et nous exprimerons $\frac{dq}{db} db = dq$ en fonction de s et ds.

De l'équation :

(85) $$\frac{x^2}{1 + s^2} + z^2 = k^2 \frac{b^2(q)}{s^2} \qquad \left(b' = \frac{c}{s}\right)$$

on tire :

(86) $$dq = 2 \frac{dq}{db^2} \cdot \frac{s}{k^2} \cdot \left[\frac{x^2}{(1 + s^2)^2} + z^2\right] ds.$$

Une fois ce changement de variable opéré les limites de l'intégrale (83) sont 0 et k ; de sorte que l'on a :

(87) $$\int_0^\beta \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db = \frac{2}{k^2} \int_0^k \Upsilon(s, k) \left[\frac{x^2}{(1 + s^2)^2} + z^2\right] \frac{dq}{db^2} s\, ds.$$

87. Pour aller plus loin, nous devons faire une hypothèse sur la loi de variation des densités. La plus simple consisterait à admettre que $\frac{dq}{db^2}$ est une constante négative $\rho_0 m$. On aurait donc, ρ_0 étant la densité au centre :

(88) $$q = \rho_0(1 + mb^2),$$

ou la formule équivalente :

(89) $$\rho = \rho_0(1 + m\beta^2);$$

la densité d'une couche serait une fonction linéaire du carré de son axe polaire.

C'est précisément la loi de variation de la densité, en fonction de la distance au centre, donnée par Roche pour satisfaire aux conditions imposées par les phénomènes de précession et de nutation [1].

---

[1] Il est intéressant de rappeler à ce sujet quelques-unes des lois proposées par divers géodé-

88. Plaçons-nous dans cette hypothèse.

En tenant compte des formules (7) et (21), donnant les expressions de $\Upsilon(s, \tau)$, $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$, on établira sans difficulté que le calcul de l'intégrale :

$$\int_0^k \Upsilon(s, k)\left[\frac{x^2}{(1+s^2)^2} + z^2\right]\frac{dq}{db^2}\, s\, ds \tag{87'}$$

se ramène à celui des six intégrales définies :

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\int_0^k \operatorname{arctg} s \cdot \frac{s\,ds}{(1+s^2)^2}, & \displaystyle\int_0^k \operatorname{arctg} s\, ds, & \displaystyle\int_0^k \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\, ds, \\ \displaystyle\int_0^k \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\, ds, & \displaystyle\int_0^k \frac{s^2}{1+s^2}\, ds, & \displaystyle\int_0^k s^2\, ds, \end{array}\right. \tag{90}$$

qui s'expriment toutes par des combinaisons d'un nombre fini de symboles élémentaires, et dont la valeur ne dépend que du degré d'aplatissement k de l'ellipsoïde.

A′ et B′ désignant des fonctions de k, on aura donc :

$$\int_0^\beta \Upsilon(s, k)\frac{dq}{db}\, db = A'x^2 + B'z^2. \tag{91}$$

Quant à l'intégrale :

$$\int_0^{b_e} \Upsilon(s_e, k)\frac{dq}{db}\, db, \tag{92}$$

elle se déduit immédiatement de la précédente en y remplaçant z^2 par sa valeur sur la couche superficielle :

$$z_e^2 = b_e^2 - \frac{x^2}{1+k^2}; \tag{93}$$

---

siens ou mathématiciens :

$$\rho = G\frac{\sin na}{a} \qquad \text{(Legendre)}$$

(a = rayon de la couche, n et G : constantes),

$$\rho = \rho_0(1 - ha^\lambda) \qquad \text{(Lipschitz)}$$

$$\rho = \rho_0(1 - ha^\lambda)^{\mu-1}\left[1 - ha^\lambda\left(1 + \frac{\lambda\mu}{3}\right)\right] \qquad \text{(Maurice Lévy)}$$

(ρ_0 : densité au centre, h, λ, μ : constantes).

La loi de Roche n'est qu'un cas particulier des lois de Lipschitz et de Maurice Lévy.

on obtient un binome en x^2 :

$$C'x^2 + D'$$

dont les coefficients sont seulement fonctions de k.

Le calcul de l'intégrale double (84) se fera aisément à partir de l'intégrale simple ; on remarquera, en effet, qu'en vertu des formules (88) et (89) on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z^2} = \frac{d\rho}{d\beta^2} = \frac{dq}{db^2} = \rho_0 m; \tag{94}$$

de sorte qu'une fois z_e^2 remplacé par son expression (93) en fonction de x^2, il viendra :

$$\int_{z^2}^{z_e^2} \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2 \int_0^{\beta} \Upsilon(s, k) \frac{dq}{db} db = A''x^4 + B''x^2z^2 + C''z^4 + D''x^2 + E''z^2 + F'' \tag{95}$$

les quantités A'', B'', C'', D'', E'', F'' dépendant uniquement de k.

D'autre part, la relation (89) donne, en exprimant β^2 en fonction de x^2 et z^2 :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + m \left(\frac{x^2}{1 + k^2} + z^2 \right) \right] + Gx^2 + Hz^2 + K. \tag{96}$$

Portant alors les expressions calculées dans l'équation (69), on obtient, en définitive, pour ω^2 une expression de la forme :

$$\frac{Ax^4 + Bx^2z^2 + Cz^4 + Dx^2 + Ez^2 + F}{Gx^2 + Hz^2 + K} \tag{97}$$

où A, B, C, D, E, F, G, H, K ne dépendent que de k.

89. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Dans un fluide hétérogène, stratifié en couches ellipsoïdales homothétiques suivant la loi des densités de Roche, le carré de la vitesse angulaire d'une molécule est une fonction algébrique rationnelle des carrés des coordonnées cartésiennes de cette molécule.*

L'expression générale de ω^2 étant transcendante, la simplicité de ce résultat est remarquable.

90. Remarques. — On pourrait avec l'expression (97) précédente étudier la forme des surfaces d'égale vitesse et calculer le gradient de la vitesse dans la direction normale à ces surfaces.

Enfin, il serait également possible d'exprimer ω^2 en fonction de β et x^2 ; on obtiendrait encore une fraction rationnelle.

§ 4. — Cas des faibles aplatissements

91. Lorsque l'aplatissement des couches est faible (cas des sphéroïdes) on peut développer l'expression précédente (97) de ω^2 par rapport aux puissances croissantes de k. De sorte que, si l'on obtient une approximation suffisante en négligeant les termes contenant k^4 en facteur, ω^2 est donné par une formule approchée très simple que nous allons maintenant établir.

Pour cela nous devons expliciter les calculs que nous n'avons fait qu'indiquer dans le paragraphe précédent.

92. Nous avons à prendre l'intégrale

$$(87'')\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^k \Upsilon(s,\ k)\left[\frac{x^2}{(1+s^2)^2}+z^2\right]\frac{dq}{db^2}\,s\,ds \\ &\qquad = \rho_0 m\left[x^2\int_0^k \frac{\Upsilon(s,\ k)}{(1+s^2)^2}\,s\,ds + z^2\int_0^k \Upsilon(s,\ k)\,s\,ds\right]\end{aligned}\right.$$

Utilisons les formules (7) du n° 57, on aura :

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^k \frac{\Upsilon(s,\ k)}{(1+s^2)^2}\cdot s\cdot ds \\ &\quad = \frac{2\pi f}{1+k^2}\left\{(1+k^2)\left[\int_0^k \operatorname{arctg} s\cdot\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2} - \int_0^k \frac{s^2\,ds}{(1+s^2)^3}\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. - 2\int_0^k \frac{s^2\,ds}{(1+s^2)^2} + 2\int_0^k \operatorname{arctg} s\,\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2}\right\}\end{aligned}\right.$$

et

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^k \Upsilon(s,\ k)\,s\,ds \\ &\quad = \frac{2\pi f}{1+k^2}\left[(3+k^2)\int_0^k \operatorname{arctg} s\cdot s\,ds - (1+k^2)\int_0^k \frac{s^2\,ds}{1+s^2} - 2\int_0^k s^2\,ds\right]\end{aligned}\right.$$

Le calcul des six intégrales s'effectue par les procédés ordinaires. En limitant leur développement au terme en k^7, on trouve :

$$(100)\qquad (1+k^2)\int_0^k \operatorname{arctg} s\cdot\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2} = \frac{k^3}{3} - \frac{2}{15}k^5 + \frac{3}{35}k^7,$$

$$(101)\qquad (1+k^2)\int_0^k \frac{s^2\,ds}{(1+s^2)^3} = \frac{k^3}{3} - \frac{4}{15}k^5 + \frac{9}{35}k^7,$$

(102) $$2\int_0^k \frac{s^2\,ds}{(1+s^2)^2} = 2\,\frac{k^3}{3} - \frac{4}{5}\,k^5 + \frac{6}{7}\,k^7,$$

(103) $$\int_0^k \operatorname{arctg} s \cdot s\,ds = \frac{k^3}{3} - \frac{k^5}{15} + \frac{k^7}{35},$$

(104) $$\int_0^k \frac{s^2\,ds}{1+s^2} = \frac{k^3}{3} - \frac{k^5}{5} + \frac{k^7}{7},$$

(105) $$\int_0^k s^2\,ds = \frac{k^3}{3};$$

et, en portant ces expressions dans les formules (98) et (99), il vient :

(106) $$\int_0^k \frac{\Upsilon(s,\,k)}{(1+s^2)^2}\,s\,ds = \frac{8}{105}\cdot\frac{2\pi f}{1+k^2}\cdot k^7,$$

(107) $$\int_0^k \Upsilon(s,\,k)\cdot s\cdot ds = \frac{8}{105}\cdot\frac{2\pi f}{1+k^2}\cdot k^7;$$

d'où :

(108) $$\int_0^k \Upsilon(s,\,k)\left[\frac{x^2}{(1+s^2)^2} + z^2\right]\frac{dq}{db^2}\,s\,ds = \frac{16\,\rho_0\,m\,\pi f}{105(1+k^2)}\,k^7(x^2+z^2);$$

la relation (87) devient alors :

(109) $$\int_0^\beta j\,\Upsilon(s,\,k)\,\frac{dq}{db}\,db = \frac{32}{105}\,\rho_0\,m\,\pi f k^2(x^2+z^2)$$

d'où l'on tire, au moyen de la formule (93) ;

(110) $$\int_0^{b_e} j\,\Upsilon(s_e,\,k)\,\frac{dq}{db}\,db = \frac{32}{105}\,\rho_0\,m\,\pi f k^2\,b_e^2$$

en ne conservant que le terme en k^2.

93. Le calcul de l'intégrale double est maintenant aisé :

(111) $$\int_{z^2}^{z_e^2} \frac{\partial\rho}{\partial z^2}\,dz^2 \int_0^\beta j\,\Upsilon(s,\,k)\,\frac{dq}{db}\,db = \frac{32}{105}\,\pi f \rho_0^2 m^2 k^2 \int_{z^2}^{z_e^2}(x^2+z^2)\,dz^2;$$

or, si l'on pose $R^2 = x^2 + z^2$, on a :

(112) $$\int_{z^2}^{z_e^2}(x^2+z^2)\,dz^2 = \frac{1}{2}\,(b_e^4 - R^4)$$

et, par suite :

$$(113)\qquad \int_{z^2}^{z_e^2} \frac{\partial\rho}{\partial z^2}\, dz^2 \int_0^{\beta} j\Upsilon(s,\ k)\, \frac{dq}{db}\, db = \frac{16}{105}\, \pi f \rho_0^2 m^2 k^2 (\, b_e^2 - \mathrm{R}^4).$$

Enfin, en observant qu'on peut écrire, au degré de notre approximation :

$$(114)\qquad j\Upsilon(k,\ k) = \frac{8\pi f}{15}\, k^2$$

et

$$(115)\qquad \rho = \rho_0 \left[1 + m(x^2 + z^2) - \rho_0 m k^2 x^2 \right]$$

un calcul analogue nous donne :

$$(116)\qquad \int_{z^2}^{z_e^2} \rho j \Upsilon(k,\ k)\, \frac{\partial\rho}{\partial z^2}\, dz^2 = \frac{8\pi f}{15}\, \rho_0^2 m k^2 \left[b_e^2 - \mathrm{R}^2 + \frac{m}{2}\,(\, b_e^4 - \mathrm{R}^4) \right]$$

le terme en k^4 étant négligé.

94. Nous connaissons ainsi tous les éléments de la formule générale (69) (n° 86). En y introduisant les expressions que nous venons de calculer, on obtient :

$$(117)\qquad \omega^2 = \frac{8}{15}\, \pi f \rho_0 k^2 \left[1 + \frac{3}{14} \cdot \frac{m\, b_e^2 (2 + m b_e^2) + m^2 \mathrm{R}^4}{1 + m\mathrm{R}^2} \right]$$ (1).

Le deuxième membre ne dépend que de la distance R du point $(x,\ z)$ au centre du fluide. *On en conclut que les surfaces d'égale vitesse angulaire sont des sphères concentriques.*

Lorsqu'on connait la vitesse angulaire superficielle l'étude des variations de ω à l'intérieur du fluide peut se faire commodément au moyen de la formule suivante, déduite de (117) en mettant ω_e en évidence

$$(117')\qquad \omega^2 = \left[1 + \frac{3m^2}{2(3m + 7)} \cdot \frac{(1 - \mathrm{R}^2)^2}{1 + m\mathrm{R}^2} \right] \omega_e^2$$

où le demi-axe polaire b_e de l'ellipsoïde limite est pris pour unité.

95. *Dans le cas particulier d'une masse homogène*, $m = 0$, $\rho_e = \rho_0 = \rho$, et il reste :

$$(118)\qquad \omega^2 = \frac{8}{15}\, \pi f \rho k^2,$$

résultat connu.

(1) ρ_0 : densité au centre.

96. En remarquant que l'on a :

$$\rho = \rho_e \cdot \frac{1 + mb^2}{1 + mb_e^2}, \tag{119}$$

et

$$b_e^2 = \frac{x^2}{1 + k^2} + z_e^2 = x^2 + z_e^2 + \lambda k^2 = R_e^2 + \lambda k^2, \tag{120}$$

λ étant une quantité finie, on tire de la formule (117) l'expression du carré de la vitesse angulaire superficielle :

$$\omega_e^2 = \frac{8}{15} \pi f \rho_e k^2 \frac{1 + \frac{3}{7} mb_e^2}{1 + mb_e^2}. \tag{121}$$

97. En faisant apparaître la densité moyenne $\rho_{\text{moy.}}$ du fluide on parvient à une expression encore plus simple.

En effet, le volume compris à l'intérieur d'une couche de demi-axe polaire b et de densité ρ étant

$$\frac{4}{3} \pi (1 + k^2) b^3, \tag{122}$$

$\rho_{\text{moy.}}$ doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{4}{3} \pi (1 + k^2) b_e^3 \rho_{\text{moy.}} = \int_0^{b_e} \rho_e \frac{1 + mb^2}{1 + mb_e^2} \frac{d}{db} \left[\frac{4}{3} \pi (1 + k^2) b^3 \right] db \tag{123}$$

on en déduit la relation :

$$mb_e^2 = \frac{5\rho_{\text{moy.}} - 5\rho_e}{3\rho_e - 5\rho_{\text{moy.}}}; \tag{124}$$

de sorte qu'en remplaçant mb_e^2 par cette expression dans la formule (121) elle devient :

$$\omega_e^2 = \frac{8}{105} \pi f k^2 (10 \rho_{\text{moy.}} - 3\rho_e). \tag{125}$$

98. On a d'autre part :

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{4}{35} \pi f \rho_0 m k^2 \frac{R}{\omega} \left[1 - \frac{1 + mb_e^2(2 + mb_e^2)}{(1 + mR^2)^2} \right]. \tag{126}$$

et l'on vérifiera sans peine que la quantité entre crochets est nulle sur la surface libre. *La couche superficielle tourne donc tout d'une pièce.*

§ 5. — Application a la géodésie. — Dérives des continents

99. Aplatissement et densité superficielle. — Appliquons les résultats précédents aux données de la Géodésie.

En définissant, comme il est d'usage, l'aplatissement α par l'égalité :

$$\alpha = \frac{a - b}{a} \tag{127}$$

que l'on peut écrire :

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \tag{128}$$

et en prenant :

$$\omega_e = \frac{2\pi}{86\,400}, \qquad \rho_{\text{moy.}} = 5{,}52, \qquad f = 6{,}67 \times 10^{-8}$$

la formule (125) donne :

$$\alpha = \frac{1}{291{,}3} \qquad \text{pour} \qquad \rho_e = 2{,}4,$$

et

$$\alpha = \frac{1}{297} \qquad \text{pour} \qquad \rho_e = 2{,}1.$$

Les diverses valeurs de α proposées par les géodésiens sont précisément voisines de ces deux nombres.

L'aplatissement $\frac{1}{297}$, proposé par Hayford (1909), a été adopté, en 1911, par la *Conférence internationale des éphémérides astronomiques*.

100. Accélération de la pesanteur aux pôles et constante de la gravitation universelle. — Aux pôles, l'accélération de la pesanteur $g_{\text{max.}}$ se confond avec l'attraction de l'ellipsoïde terrestre.

On tire de la formule (10) (n° 60) :

$$g_{\text{max.}} = b_e \left[\rho_e f \Psi(k) - \int_0^{b_e} f \Psi(s_e) \frac{dq}{db}\, db \right].$$

En effectuant des calculs semblables à ceux qui nous ont conduit à l'expression (117) de ω^2, on trouve :

$$g_{\text{max.}} = \frac{4}{3}\pi f \rho_e b_e \left[1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{m b_e^2}{1 + m b_e^2} + \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{m b_e^2}{1 + m b_e^2} \right) k^2 \right]; \tag{129}$$

éliminons mb_e^2 et k^2 entre cette équation et les équations (121) et (124), il vient la *relation indépendante de* ρ_e :

$$g_{\text{max.}} = \frac{4}{3}\pi f \rho_{\text{moy.}} b_e + \omega_e^2 b_e \qquad (130)$$

On remarquera que le premier terme du second membre représente *l'attraction qu'exercerait une sphère homogène dont la densité serait égale à la densité moyenne de la Terre et qui aurait pour rayon son demi-axe polaire.*

Au moyen de la relation précédente, calculons la valeur de la constante de la gravitation universelle, avec les données :

$$\begin{aligned} \omega_e &= 727 \times 10^{-7}, \qquad \text{(c. g. s.)} \\ \rho_{\text{moy.}} &= 5{,}52, \\ g_{\text{max.}} &= 983{,}216, \\ b_e &= 6\,356 \times 10^5 ; \end{aligned}$$

on obtient :

$$f = 6{,}668 \times 10^{-8},$$

$6{,}67 \times 10^{-8}$ est la valeur de f admise comme la plus probable [1].

Je dois cette intéressante remarque à M. Henri Bellocq.

101. Dérives continentales. — Bien que négligeant la viscosité du *Sima* [2] fluide sur lequel flottent les continents [3], nous pensons que la formule (117′) peut néanmoins intéresser la Géodésie. Elle fournit, en effet, une limite supérieure de l'accroissement de la vitesse à la base des socles continentaux.

En faisant abstraction des continents et des mers dont l'épaisseur est très faible vis-à-vis du rayon terrestre, et en admettant avec M. Wegener que la densité superficielle de l'*ellipsoïde fluide* est égale à 3 [4], la formule (140) donne sous l'Equateur et à 100 kilomètres de profondeur un accroissement maximum de 5 cm, 3 par seconde. Il est évident, d'ailleurs, que l'accroissement est nul aux pôles.

On sait que l'étude attentive des plissements et des disjonctions de l'écorce terrestre a conduit M. Wegener à affirmer que les socles continentaux se déplacent sur le Sima en dérivant vers l'Ouest et en s'approchant de l'Equateur.

---

[1] V. Ch. Maurain, *Physique du Globe.*

[2] Sima : appellation due à Suess (*Si*licium – *Ma*gnésium).

[3] Cette idée, déjà ancienne, a été particulièrement défendue par Airy et Lippmann.

[4] Il est très naturel de penser que la substance du Sima n'est autre que celle des laves volcaniques, constituées principalement de basaltes, porphyrites, diorites dont la densité est toujours très voisine de 3; cf. Wegner, *loc. cit.* p. 28 à 30.

Un des problèmes important de la Géodésie moderne est celui de la recherche des forces capables de produire ces translations continentales.

Par un procédé élégant MM. Wavre et Berner ont montré dernièrement que la force translatrice vers l'Equateur, de nature hydrostatique, était comparable à la millionième partie du poids du continent déplacé.

Suivant M. Schweydar la dérive vers l'Ouest serait due à la précession de l'axe de rotation de la Terre sous l'influence combinée de l'attraction du Soleil et de la Lune.

Quoique ces tractions vers l'Equateur et vers l'Ouest se manifestent d'une manière très apparente, la variété des disjonctions et des formations du Goble oblige à penser que d'autres actions dont les effets paraissent moins systématiques sont intervenues dans l'établissement de son relief [2].

Certains auteurs, et notamment MM. Wegener et Schweydar les ont recherchées en faisant appel à des courants de Sima capable d'entraîner, de plisser ou de disloquer la lithosphère.

On ne s'est pas demandé, que nous sachions, quels éclaircissements fournirait, dans cette manière de voir, l'étude des mouvements internes d'une masse fluide hétérogène en rotation autour d'un axe.

Nous ne discuterons pas ici les arguments qui militent en faveur de la fluidité du Globe terrestre. Les anomalies de la pesanteur au voisinage des masses montagneuses, les déplacements continentaux, les migrations polaires et l'aplatissement du géoïde sont des faits d'observation sur lesquels M. Wegener s'appuie pour défendre la conception d'un globe visqueux. On songera aussi que la formidable pression, de 30.000 atmosphères environ, régnant à la base des socles continentaux et la température qui, au dire des géophysiciens, peut y dépasser 2.000 degrés, sont autant de circonstances favorables à la fluidité du Sima.

Malgré cela, il n'est pas douteux que la viscosité du Sima doit être élevées et qu'au premier abord, il peut paraître illégitime de comparer les mouvements internes de ce fluide avec les mouvements permanents d'un fluide parfait.

Cependant on doit remarquer que, par suite de son faible aplatissement, la Terre ne peut être douée que de mouvements relatifs excessivement lents et que, pour cette raison déjà, les forces développées par les frottements

---

(1) Wegener, *La Genèse des continents et des océans*, Paris, 1924.

(2) *Archives des Sciences Physiques et naturelles*, juillet-août 1926 et novembre-décembre 1927, p. 381.

intérieurs doivent être assez faibles. De plus, on ne doit pas oublier qu'il faut, dans cette question, tenir compte, non des valeurs absolues des forces de viscosité, mais de leur grandeur relativement aux forces de gravitation. Il résulte d'un calcul approximatif de M. Epstein que la traction vers l'Equateur agissant sur un continent, traction de l'ordre du millionième du poids du continent, serait capable d'équilibrer le force de frottement du Sima qui prendrait naissance par l'effet d'un déplacement de 33 mètres par an (1). Il s'agit certainement là d'une donnée extrême. L'écart de grandeur des forces de viscosité et des forces de gravitation est donc considérable.

Tout ce que nous avons besoin de requérir pour tenter une explication de certains déplacements continentaux, c'est qu'il soit possible d'admettre que les mouvements internes du Sima sont assez voisins des mouvements que nous avons analysés.

A la rigueur il suffirait que les mouvements relatifs du fluide terrestre s'effectuent dans le même sens que dans le fluide parfait. On reconnaîtra sans doute que c'est peu demander.

D'une façon générale nous envisagerons les continents comme soumis à deux forces antagonistes : l'attraction des corps célestes et la poussée des couches de Sima (2).

Les actions cosmiques, en provoquant les marées de l'Océan et celles de l'Ecorce, ont pour effet d'opposer une résistance à la rotation vers l'Est de la lithosphère ; elles se manifestent donc par une dérive générale des continents vers l'Ouest. On sait que M. Wegener voit dans ce déplacement la cause des surrections montagneuses occidentales des deux Amériques.

Mais il est évident que la tendance de la croûte terrestre à retarder vers l'Ouest ne peut à elle seule expliquer la création des fractures méridiennes telles que celles qui, selon M. Wegener, ont donné naissance au bassin atlantique ou aux fossés de l'Afrique orientale.

Nous avons cru pouvoir trouver dans le phénomène de l'accroissement en profondeur de la vitesse de rotation des couches de l'ellipsoïde terrestre une cause suffisante de ces disjonctions.

Par exemple, on rendrait compte de l'ouverture de l'Atlantique en admettant que l'Eurasie plonge dans le Sima des socles plus profonds que ceux de l'Amérique. A cause de la chaîne alpine, des hauts plissements du Caucase et de la gigantesque surrection himalayenne, cette hypothèse n'est pas in-

---

(1) Cf. Wegener, *La Genèse des constituants et des Océans*, p. 154.

(2) *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, juillet-août 1926, p. 175.

vraisemblable, surtout si l'on songe qu'en vertu du principe d'isostasie, la partie immergée d'un socle continental est égale à *vingt-neuf fois* sa partie émergente.

On comprend, dès lors, facilement que la dérive d'un continent vers l'Ouest, sous l'influence des actions luni-solaires, sera d'autant moins rapide que ce continent aura une superficie plus faible et sera plus lourdement chargé. Faut-il voir ici la raison de l'avance vers l'Est que prennent les petits socles montagneux par rapport aux grandes masses de la lithosphère ? On pourrait citer à l'appui de cette façon de voir, le Japon, l'Indochine, Ceylan, les îles de la Sonde, la Nouvelle-Zélande, les Antilles.

Le long système de fractures, que dessinent, dans l'Est-Africain, les lacs Nyassa, Tanganyka, Albert, peut encore être envisagé comme une amorce de rupture de continent ; sollicitée vers l'Ouest par les attractions cosmiques, l'Afrique tend à se détacher de ses compartiments orientaux, maintenus par la poussée du Sima sur les bases des lourds massifs du Kénia et du Kilima-Ndjaro. On sait, d'ailleurs, que de fréquents séismes affectent ces régions et témoignent de l'activité actuelle des forces de dislocation.

Le phénomène de la variation de la vitesse angulaire du Sima sur une couche de densité constante donne lieu également à des interprétations intéressantes. Un tel phénomène doit se manifester par une torsion vers l'Est des extrémités des continents voisins des pôles. En réalité, on observe un effet de ce genre sur les formes incurvées de la Novaïa Zemlia et de la Terre de Feu. On remarquera aussi l'orientation générale vers le Nord-Est des bords occidentaux et orientaux du continent Euro-Asiatique ; nous serions tenté d'y trouver un argument important en faveur de notre hypothèse.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 23 Octobre 1929.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES