GAY

Mouvement lent varié d'un solide en liquide visqueux indéfini et incompressible

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__114__1_0>

N° D'ORDRE :
2145
Série A.
N° de Série 1276.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. GAY

1^re THÈSE. — MOUVEMENT LENT VARIÉ D'UN SOLIDE EN LIQUIDE VISQUEUX INDÉFINI ET INCOMPRESSIBLE.

2^e THÈSE. — SUR QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS CONCERNANT LES TOURBILLONS DANS LES FLUIDES VISQUEUX.

Soutenues le octobre 1930, devant la Commission d'examen

MM. VILLAT, *Président.*
CHAZY, BEGHIN } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1930

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

Doyen	C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires	A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, E. HÉROUARD.

Professeurs

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	Chimie générale.
ÉMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
E. CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie générale.
VESSIOT	Théorie des fonctions, théorie des transformations.
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY	Physique.
CH. PÉREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND	Géologie structurale et Géologie appliquée.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. MAILHE	Étude des combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique et géologie dynamique.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	Géologie.
P. PASCAL	Chimie minérale.
LÉON BRILLOUIN	Théories physiques.
V. AUGER	Chimie appliquée.
E. ESCLANGON	Astronomie.

E. PÉCHARD	Chimie (Enseignnt P.C.N.).	L. JOLEAUD	Paléontologie.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	M. JAVILLIER	Chimie biologique.
A. GUILLET	Physique.	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
G. MAUGUIN	Minéralogie.	F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
L. BLARINGHEM	Botanique.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. DEREIMS	Géologie.	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	A. DEBIERNE	Radioactivité.
H. BÉNARD	Mécanique expérle des fluides.	M. FRÉCHET	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. DARMOIS	Physique.	Mme RAMART-LUCAS	Chimie organique.
G. BRUHAT	Physique.		
H. MOUTON	Chimie physique.		

Secrétaire A. PACAUD.

89818 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MON PÈRE

PREMIÈRE THÈSE

MOUVEMENT LENT VARIÉ D'UN SOLIDE

EN

LIQUIDE VISQUEUX INDÉFINI ET INCOMPRESSIBLE

INTRODUCTION.

Le mouvement d'un liquide visqueux indéfini et incompressible, au sein duquel se déplace un solide, a été étudié dans des cas particuliers où la forme et le mouvement du solide sont simples; le mouvement est, dans ces cas, soit une translation rectiligne, soit une rotation autour d'un axe fixe. On désignera toujours par ρ la densité constante du liquide, par μ son coefficient de viscosité consideré comme constant et par ν le coefficient de viscosite cinématique de Reynolds.

Stokes (¹), dès 1851, etudie le cas d'une sphère ou d'un cylindre de révolution anime au sein d'un liquide visqueux, indéfini d'un mouvement de translation rectiligne periodique (cette translation, dans le cas du cylindre, est perpendiculaire à son axe). Stokes trouve que la résistance D que le liquide exerce sur la sphère ou sur le cylindre de hauteur unité a la forme

$$D = \alpha.\xi + \beta\frac{d\xi}{dt},$$

où $\xi(t)$ désigne la vitesse du solide à l'instant t, α et β deux constantes qui dépendent du rayon de la sphère ou du cylindre, de la densité du liquide, de son coefficient de viscosité et de la période du mouvement.

Boussinesq en 1885 reprend l'étude du problème, la vitesse du

(¹) STOKES. *Memoire sur le Pendule.*

solide étant une fonction quelconque du temps; ses résultats sont contenus dans les deux notes suivantes :

1° Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini visqueux en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables ;

2° Résistance qu'éprouve un cylindre circulaire indéfini plongé dans un fluide, à se mouvoir dans une direction perpendiculaire à son axe ([1]).

Ces résultats ont été développés par Boussinesq dans sa théorie de la Chaleur.

Crudéli en 1916 étudie l'équation générale dont dépend la translation lente, le long de son axe, d'un solide de révolution qui se meut au sein d'un liquide visqueux indéfini; dans le cas de la sphère il retrouve les résultats de Boussinesq.

J'analyse ici rapidement les travaux de Boussinesq. Dans le Tome II de sa *Théorie de la Chaleur*, au début de la troisième partie de la note II il établit les équations générales de l'écoulement d'un liquide visqueux indéfini au sein duquel se déplace, d'un mouvement lent, un solide de forme quelconque. Le mouvement du solide est une translation, définie à tout instant par les projections de sa vitesse sur trois axes fixes. Le liquide est sollicité dans toute sa masse par une force de profondeur donnée, fonction seulement du temps.

Le mouvement d'une molécule liquide est défini par sa vitesse relative par rapport au solide, à l'aide des projections de cette vitesse sur trois axes liés au solide et parallèles aux axes fixes.

Le mouvement du solide est supposé « bien continu et assez lent pour qu'on puisse négliger les carrés et les produits des projections ou des dérivées de ces vitesses dans les équations du mouvement ».

Ces équations prennent alors la forme linéaire.

L'auteur montre, comme première conséquence de cette forme linéaire, que les valeurs de la pression et des projections de la vitesse

---

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 100, avril 1885, p. 935 et 974.

s'obtiennent par simple superposition des valeurs qu'on obtient dans les trois hypothèses où l'on annule deux des composantes de la vitesse du solide, en même temps que les deux composantes correspondantes de la force donnée; il en est de même pour les trois composantes de la résistance que le liquide oppose au mouvement du solide.

Boussinesq établit ensuite l'équation des forces vives; dans cette équation figure l'intégrale de surface

$$\int_{\Sigma} p \cdot \mathrm{V}_n \, ds,$$

étendue à la surface d'une sphère Σ qui a pour centre le centre de gravité du solide en mouvement et dont le rayon R est assez grand pour qu'elle soit tout entière intérieure au liquide. Dans cette intégrale p désigne la pression en un point de Σ, V_n la composante sur la normale extérieure à Σ de la vitesse relative d'une molécule qui à l'instant t est située sur Σ.

Pour démontrer que, le mouvement de translation du solide étant donné, la détermination du mouvement du liquide est unique, l'auteur est amené à faire l'une des deux hypothèses suivantes : ou bien admettre que lorsque R devient infini l'intégrale précédente a une limite nulle, ou bien que cette limite est positive ce qui revient, pour R infini, ou bien à négliger l'influence du liquide extérieur à Σ, ou bien à supposer que le liquide extérieur à Σ tend à réagir contre sa mise en mouvement. La première hypothèse a été confirmée par l'auteur dans le cas particulier de la sphère en translation (1).

Dans le cas particulier d'une sphère animée d'une translation rectiligne en supposant essentiellement que l'instant initial est $t_0 = -\infty$, Boussinesq (2) réussit à intégrer complètement les équations du mouvement du liquide. Il rapporte maintenant le mouvement absolu du fluide à trois axes, ayant pour origine le centre de la sphère mobile et parallèles à trois axes fixes. Il réussit, en l'absence de toute force extérieure, à vérifier les équations générales en exprimant les composantes de la vitesse et la pression à l'aide d'une seule fonction φ de R

(1) Boussinesq, *Annales de l'École Normale*, 1912.

(2) Boussinesq, *loc. cit.*, p. 2.

et de t

$$u = \Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad v = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z},$$

$$p = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\,\Delta\varphi\right).$$

Les conditions à la surface, qui expriment l'adhérence du liquide à la sphère, s'écrivent

$$u = \xi(t), \qquad v = w = 0,$$

où $\xi(t)$ est la vitesse de la sphère; ces conditions définissent les dérivées premières et secondes de φ, par rapport à R pour toute valeur de t et pour $R = a$, a étant le rayon de la sphère. Boussinesq montre que le problème est ramené à trouver une solution de l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2},$$

qui régit le mouvement de la chaleur dans un fil, la valeur de cette solution à l'origine du fil étant une fonction connue du temps. $\Phi(R, t)$ est liée à $\varphi(R, t)$ par

$$\Phi(Rt) = R\varphi - a\varphi_0 + \frac{3}{3}\nu x_1(t),$$

où $x_1(t)$ est l'abscisse de la sphère par rapport aux axes fixes.

Crudéli [1] définit simplement la vitesse d'une molécule M; si Ox est la trajectoire du centre de la sphère et si R et α sont les coordonnées polaires de M dans le plan méridien xOM, les composantes V_r et V_α de la vitesse sur le rayon vecteur et l'axe perpendiculaire sont données par les expressions

$$V_r = \frac{2\cos\alpha}{R}F'_R, \qquad V_\alpha = \frac{-\sin\alpha}{R}\frac{d}{dR}(R.F'_R),$$

où F doit vérifier

$$\nu\,\Delta^4 F = \frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 F.$$

---

[1] Crudéli, *Mouvement d'un solide dans un liquide visqueux* (*Rendiconti della Real. Accad. dei Lincei*, 1916).

Crudéli pose

$$F_R = \frac{a^3}{2R^2}\xi(t) + \frac{1}{R^2}\int_a^R \lambda\, g(\lambda, t)\, d\lambda,$$

où la fonction $g(\lambda, t)$ vérifie l'équation (C), d'où

$$g(\lambda, t) = g_1(\lambda, t) + \frac{3a(\lambda - a)}{4\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \xi(\theta)\, e^{-\frac{(\lambda-a)^2}{4\nu(t-\theta)}}(t-\theta)^{-\frac{3}{2}}\, d\theta.$$

Dans ces formules a désigne le rayon de la sphère, $\xi(t)$ la vitesse de la sphère et $g_1(\lambda, t)$ une fonction indépendante de ξ et qui s'annule pour $\xi(o) = o$.

Boussinesq pour la pression trouve

$$p = \rho a\, A(t)\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x},$$

où $A(t)$ est une fonction de t seulement; et pour la résistance D que le liquide oppose au mouvement de la sphère

$$D = \frac{M}{2}\xi'(t) + 6\pi\mu a\,\xi(t) + 6a^2\sqrt{\pi\mu\rho}\int_{-\infty}^{t}\frac{\xi'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}}\, d\theta,$$

où M est la masse liquide déplacée par la sphère.

Au sujet de cette résistance Boussinesq fait la remarque suivante :

« Les frottements intérieurs, dont la présence est manifestée, dans cette formule, par leur coefficient μ ont donc pour effet d'introduire dans l'impulsion où la resistance, en premier lieu, un terme en $\xi(t)$ produit de 3μ par le contour $2\pi a$ de la section maxima de la sphère et par cette vitesse actuelle $\xi(t)$; en deuxième lieu un terme proportionnel à a ou à la section maxima et où entre linéairement tous les accroissements antérieurs $\xi'(\theta)d\theta$ qu'a éprouvés la vitesse depuis le temps primitif, mais avec des coefficients d'importance inverse de la racine carrée de leur éloignement $t - \theta$ à l'époque actuelle, les plus anciens n'ayant ainsi qu'une influence indefiniment atténuée. La résistance actuelle du solide garde donc, comme l'état actuel du fluide ambiant, quelque trace de toute la suite des mouvements relatifs antérieurement réalisés. »

La méthode de calcul qui avait réussi dans le cas de la sphère a été appliquée par Boussinesq ([1]) au cas du cylindre de révolution indéfini animé au sein d'un liquide indéfini d'une translation rectiligne suivant un axe Ox perpendiculaire à l'axe du cylindre.

La pression a la forme

$$p = \rho A(t) \frac{\partial \log R}{\partial x},$$

où R est la distance de la molécule liquide à l'axe du cylindre. La résistance D est

$$D = M\xi'(t) + 4\mu\pi \int_0^\infty X\left(t - \frac{\rho a^2}{2\mu\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha \, d\alpha,$$

où a est le rayon du cylindre, M la masse liquide déplacée par le cylindre de hauteur unité et X une fonction définie par

$$\int_0^\infty X\left(t - \frac{\rho a^2}{2\mu\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha} = \xi'(t).$$

Boussinesq applique en particulier les résultats obtenus pour la sphère ou le cylindre dans le cas où la translation est périodique ou est devenue depuis longtemps uniforme.

Dans le cas de la translation il faut signaler le cas où le solide est une plaque plane indéfinie, d'épaisseur négligeable qui se meut dans son plan $x = 0$ d'une translation rectiligne de vitesse $\xi(t)$ entre les plans parallèles $x = \pm h$; la vitesse V du liquide est

$$V = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n\pi\nu}{h} \sin\frac{n\pi x}{h} \int_0^t \xi(\theta)\, e^{-\frac{n^2\pi^2\nu(t-\theta)}{h^2}} d\theta.$$

On en déduit le frottement

$$D = 2\mu\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$$

par unité de surface de la plaque sur ses deux faces

$$D = \frac{4\pi^2\mu^2}{\rho h^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \int_0^t \xi(\theta)\, e^{\frac{n^2\pi^2\nu(t-\theta)}{h^2}} d\theta \quad ([2]).$$

([1]) BOUSSINESQ, *loc. cit.*, p. 2.

([2]) HAVELOCKE, *Sur une equation integrale du problème des fluides visqueux* (*Philo. Mag.*, II, 1921).

Basset [1] a étudié la rotation lente d'une sphère autour d'un diamètre fixe, au sein d'un liquide visqueux indéfini; la molecule étant définie dans le plan meridien passant par l'axe de rotation par ses coordonnees polaires R et α, la composante v de la vitesse suivant le parallèle, qui seule intervient dans le calcul du couple de frottement a pour expression

$$v = \frac{-a^3 \sin\alpha}{R\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t d\theta \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{R} + \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{a} \right) \frac{e^{-\frac{R-a+\beta}{4\nu(t-\theta)}}}{\sqrt{t-\theta}} r(\theta)\, d\beta,$$

où a est le rayon de la sphère, r la vitesse angulaire de la sphère. On en déduit le couple de frottement

$$-\frac{8}{3}\pi\nu\rho a^4 \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{v}{R\sin\alpha}\right)_{R=a}.$$

Havelocke [2] étudie la rotation autour de son axe d'un cylindre creux rempli d'un liquide visqueux; si r est la vitesse angulaire du cylindre de rayon a, celle ω de la molécule qui est la distance R de l'axe est

$$\omega = \int_0^t r'(\theta) \left[1 + 2 \sum \frac{a\, J_1\left(\frac{\beta_n R}{a}\right)}{n R J_1(\beta_n)} e^{-\nu\frac{\beta_n^2(t-\theta)}{a^2}} \right] d\theta,$$

le Σ étant étendu aux racines positives β_n de l'équation de Bessel :

$$J_1(x) = 0.$$

On en déduit le couple de frottement

$$2\pi\mu a \left(\frac{\partial\omega}{\partial R}\right)_a.$$

Plus récemment le problème de la sphère a été traité par M. Oseen [3] dans deux Memoires parus en 1910-1919. M. Oseen cherche, d'une façon générale, une solution des équations du mouvement lent qui

---

(1) Basset, *Rotation d'une sphere dans un liquide visqueux indefini a mouvement lent* (*Phylos Trans of, London*, 179, A, 1888).

(2) Havelocke, *loc. cit.*, p. 7.

(3) Oseen, *Hydrodynamique de la sphere* (*Arkiv for Math. Astro. och Physik*, Bd 6, H. 1, 1910. et Bd 14, H. 1 et 2, 1919).

s'annule à l'instant origine, qui, quel que soit t, s'annule à l'infini et pour laquelle les composantes de la vitesse sur la sphère $R = a$ sont trois fonctions données du temps. M. Oseen retrouve en particulier les résultats obtenus par Boussinesq.

Dans une courte note, M. Odqvist (1) a esquissé une méthode générale pour résoudre le problème du mouvement lent d'un solide de forme quelconque en liquide visqueux indefini et incompressible. M. Odqvist élimine la pression des équations différentielles par l'introduction d'une fonction auxiliaire qui généralise le potentiel des vitesses de l'Hydrodynamique classique; il ramène le problème à l'etude de certaines équations intégrales.

L'integration de l'equation de la chute verticale d'une sphère pesante au sein d'un liquide visqueux indefini, effectuée d'abord par Picciati, a été reprise par Basset (2) qui écrit l'équation sous la forme

$$\xi'(t) + \lambda\xi(t) + p\int_0^t \frac{\xi'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}}\,d\theta = f,$$

où λ, p, f sont trois constantes. C'est une équation de Volterra de deuxième espèce en $\xi'(t)$ car

$$\xi(t) = \int_0^t \xi'(\theta)\,d\theta + \xi_0$$

que Basset ramène à une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre à coefficients constants.

Havelocke (3) en utilisant une méthode développée par M. Whittaker (4) étudie l'equation de chute de la plaque plane entre deux plans parallèles; c'est une équation de deuxième espèce de Volterra en $\xi'(t)$ dont le noyau est une série de Dirichlet en $t - 0$. En liquide indéfini

---

(1) ODQVIST, *Sur une méthode permettant de résoudre les problèmes d'hydrodynamique et d'elasticite correspondant à des conditions aux limites données* (*Arkiv for Math. Asro. och Physik*. Bd 19, H. 4, 1927).

(2) BASSET, *Intégration de l'équation de la chute d'une sphère en liquide visqueux* (*Quart. Journ. of Mathem.*, 1910).

(3) HAVELOCKE, *loc. cit.*. p. 7.

(4) WHITTAKER, *Étude pratique de l'équation du type d'Abel ou de Poisson* (*Proc. Lond. Roy. Soc.*, 1918).

cette équation se réduit à celle de Basset où l'on fait $\lambda = o$. Havelocké étudie de même l'équation de la rotation autour d'un diamètre, d'une sphère en liquide visqueux indéfini et celle de la rotation autour de son axe d'un cylindre de révolution creux rempli de liquide.

En résumé, dans les cas simples, où l'on peut étudier complètement le problème, on trouve que l'équation du mouvement est une équation de Volterra de deuxième espèce en $\xi'(t)$, ξ étant la vitesse de translation ou de rotation du solide dont le noyau est fonction de $t - \theta$ seulement.

Signalons enfin que Boussinesq dans sa *Théorie de la Chaleur*, tome II, note I, étudie la translation lente d'un solide en liquide parfait; il montre par une méthode directe que les trois composantes du dyname D des efforts que le liquide exerce sur le solide sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées des trois composantes de translation, les coefficients ne dépendant que de la forme du solide; il montre que le déterminant de ces coefficients est symétrique et en conclut l'existence d'une fonction potentielle de résistance; il étudie enfin l'influence des dimensions du solide sur le dyname des efforts. L'auteur développe en particulier les calculs dans le cas de la translation d'une sphère, d'un cylindre de révolution ou d'un ellipsoide qui se déplace parallèlement à un de ses axes.

Je me suis proposé dans ce travail d'étudier le mouvement général d'un solide de forme quelconque qui se meut au sein d'un liquide visqueux incompressible et indefini; le mouvement du liquide est supposé continu et lent. Je me suis borné, pour simplifier, au cas du mouvement plan, le solide étant un cylindre indéfini dont la section droite est un contour fermé σ sans singularité.

Le premier Chapitre est consacré aux équations générales; le mouvement du solide étant défini par un torseur des rotations instantanées, je forme les équations donnant les projections de la vitesse absolue d'une molecule liquide sur les axes liés au solide en négligeant la force de profondeur agissant sur le liquide. En supposant que les mouvements du solide et du liquide sont lents, je montre que les équations sont celles qui définissent le mouvement lent du liquide par rapport à des axes fixes; les composantes ξ, η, r du torseur T qui définit le mouvement du solide n'intervenant que dans les conditions aux limites. Il en résulte d'abord un théorème de superposition des petits mouvements analogue à celui qu'on demontre en Élasticité. Je suis amené pour continuer à faire une hypothèse analogue à la première hypothèse de Boussinesq. En désignant par Σ un cercle qui a pour centre le centre de gravité de σ, et dont le rayon R est assez grand pour que Σ soit tout entier intérieur au liquide, je considère l'intégrale

$$\int_\Sigma p\, V_n\, ds,$$

où p désigne la pression en un point de Σ et V_n la composante de la vitesse absolue sur la normale extérieure à Σ.

Je suppose, et cette hypothèse est vérifiee au Chapitre III, n° 8, que cette intégrale tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{R}$. J'établis alors l'équation qui traduit le théorème de la force vive d'où je déduis l'unicité de la solution du problème posé. Je remarque qu'il existe un théorème de réciprocité entre les deux mouvements liquides correspondant à deux torseurs donnés, theorème analogue à celui qu'on démontre en Elasticité.

Je montre que les derniers resultats subsistent dans le cas où le plan du mouvement étant vertical, on tient compte de la pesanteur du liquide.

Je termine ce chapitre en étudiant le changement brusque que produit dans l'état des vitesses la mise en mouvement du solide à l'instant initial.

Dans le Chapitre II j'étudie par une méthode directe le mouvement lent quelconque d'un solide en liquide parfait, en determinant la pression p en tout point par le problème de Neumann; je montre que la fonction harmonique p est régulière à l'infini. On étend immédiatement pour le mouvement quelconque les resultats obtenus par Boussinesq dans le cas de la translation; symétrie des coefficients du dyname D des efforts, existence d'une fonction potentielle de résistance. J'ai formé les equations du mouvement du solide dans les deux cas où le plan du mouvement est horizontal ou vertical et j'ai indiqué les conditions pour que le mouvement reste lent En suivant la methode de calcul utilisée par Boussinesq pour le cas de l'ellipsoide en translation, j'ai déterminé pour un cylindre elliptique animé d'un mouvement plan quelconque, le dyname des efforts. Ce chapitre se termine par le calcul de la variation infinitésimale des coefficients de D correspondant à une variation très petite du contour du solide, calcul analogue à celui qu'a fait M. Hadamard dans ses Leçons sur le Calcul des Variations, pour étudier la variation infinitésimale des fonctions de Green et de Neumann.

Dans le Chapitre III commence l'étude du mouvement lent en liquide visqueux. La vitesse V d'une molécule liquide dépend d'une vitesse résiduelle V_0, de la pression p et d'une fonction q liée au tourbillon.

Les composantes de V_0 sont definies par l'equation de la chaleur (C) et se réduisent pour $t = 0$ à celles de la vitesse initiale V_0 du liquide. Je montre que $\overline{V}_0$ est à l'infini d'ordre supérieur à 2 en $\frac{1}{R}$ et que sa valeur asymptotique pour t infini est nulle. La fonction q vérifie (C); p et q sont definies à l'aide de deux densités superficielles a et b, fonction de t et de l'abscisse curviligne s d'un point du contour σ du solide. Ces densités a et b sont solutions d'un système integral qui appartient à la fois au type de Volterra et de Fredholm. J'ai montre que p est régulière à l'infini et que q est à l'infini d'ordre supérieur à deux en $\frac{1}{R}$.

Le Chapitre IV est consacré à la résolution des équations en a et b où j'introduis un paramètre λ; le développement de la solution en séries en λ depend uniquement du problème de Neumann. J'obtiens en particulier les densités a et b en fonction des composantes du torseur T' dérivee par rapport au temps du torseur T des rotations instantanées et je montre que les series obtenues sont uniformement convergentes quel que soit λ si les composantes de T sont supposees bornées.

De la forme des densites superficielles je deduis dans le Chapitre V les expressions de p et q en fonction des composantes de T'. Ces expressions montrent que l'etat du liquide à l'instant actuel dépend de toute l'histoire du mouvement depuis l'instant initial jusqu'a l'instant actuel. Il y a hérédite linéaire verifiant le principe du cycle fermé. J'indique ensuite la forme des trois composantes du dyname D des efforts que le liquide exerce sur le solide et j'examine les deux cas particuliers où le solide a un axe de symétrie ou deux axes de symétrie rectangulaires.

Le Chapitre VI traite des équations du mouvement du solide, soit dans le cas du mouvement horizontal, soit dans le cas du mouvement vertical. Dans ce dernier cas on est amené à etudier une équation intégro-différentielle qui géneralise celle du pendule simple, en tenant compte de l'héredité Dans le cas où il n'y a pas de force de profondeur, j'ai calcule la dérivee par rapport au temps de la dissipation d'energie et j'en ai deduit le mouvement asymptotique du solide.

L'étude du cas particulier où le cylindre est de revolution fait l'objet du Chapitre VII. Je forme d'abord la vitesse $\overline{V}_0$.

Dans le cas de la translation en negligeant $\overline{V}_0$, je montre directement que le mouvement depend d'une equation B de Volterra de première espèce obtenue par Boussinesq, equation qu'on peut integrer par la méthode de Whittaker. Cette integration une fois effectuée, je montre que le mouvement du cylindre dans un plan vertical tend vers une chute verticale uniforme et je donne la forme de la vitesse limite. Dans le cas de la rotation on est amené sans aucune approximation à considérer une équation B′ analogue á B, et qui s'etudie comme cette dernière. A la fin de ce chapitre, j'applique les méthodes des Chapitres III et IV au cas particulier où le cylindre est animé d'une translation périodique.

Dans un dernier chapitre j'ai signale quelques généralisations et quelques cas particuliers.

Je tiens à remercier ici M. Émile Cotton, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, et M. Henri Villat, directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris, dont les conseils et les bienveillants encouragements m'ont guidé et soutenu au cours de l'étude de ce travail.

CHAPITRE I.

EQUATIONS GENERALES. THEORÈME DE LA FORCE VIVE. IMPULSION INITIALE.

1. Au sein d'un liquide visqueux indéfini se déplace d'un mouvement lent un cylindre indéfini; on suppose que ce cylindre se deplace normalement à la direction de ses génératrices et qu'il en est de même

pour chaque molecule liquide; on suppose en un mot que le mouvement est plan.

Si Ox et Oy sont deux axes liés à une section droite du cylindre, qu'on désignera par σ, le mouvement de ces axes mobiles est défini à l'instant t, par rapport à deux axes fixes, par les trois composantes ξ, η, r d'un torseur T des rotations instantanées; ces trois composantes sont trois fonctions du temps qui constituent les inconnues du problème. Nous designerons dans la suite par T' le torseur qui est la dérivée de T par rapport au temps et qui a pour composantes ξ', η', r'. Nous supposerons aussi que le point O est centre de gravité de l'aire σ. On désigne par x et y les coordonnées relatives à l'instant t d'une molécule liquide quelconque M; par u et v les composantes sur les axes mobiles de la vitesse V de cette molécule et par p la pression en M; u, v, p sont trois fonctions de M et de t.

On suppose d'abord, pour simplifier, qu'aucune force de profondeur n'agit sur le liquide et que celui-ci est incompressible. On suppose enfin essentiellement que le mouvement absolu du liquide est assez lent pour que les vitesses restent continues et assez faibles pour qu'on puisse négliger les carres et les produits des projections de ces vitesses et des dérivees partielles par rapport à x et y de ces projections. Tout ce qu'on dira dans ce chapitre s'appliquera en particulier au cas du liquide parfait.

2. Les équations du mouvement du liquide visqueux par rapport à des axes fixes sont les équations de Navier [1] :

$$\text{(1)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\,\Delta u + J_x = 0,\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\,\Delta v + J_y = 0, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut adjoindre l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

[1] Appell, *Mécanique rationnelle*, t. III, edition 1909, p. 555.

J_x et J_y sont les projections sur les axes de l'accéleration de la molécule liquide M.

Pour obtenir les équations du mouvement par rapport aux axes mobiles, remplaçons dans les equations (1) J_x et J_y par leurs expressions tirees de la formule de Bour :

$$J_x = \frac{du}{dt} - rv.$$

$$J_y = \frac{dv}{dt} + ru.$$

La première equation (1) devient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\Delta u + \frac{du}{dt} - rv = 0,$$

à laquelle il faut adjoindre une expression analogue.

Ces équations se transforment en tenant compte de ce que le mouvement absolu du liquide est lent.

Si u_r et v_r sont les projections sur les axes mobiles de la vitesse relative de la molecule on a :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_r\frac{\partial u}{\partial x} + v_r\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Mais si u_e et v_e sont les projections sur les axes mobiles de la vitesse d'entraînement de la molecule, comme :

$$u = u_e + u_r,$$

l'expression de $\frac{du}{dt}$ devient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \left(u_e\frac{\partial u}{\partial x} + v_e\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Le mouvement absolu du liquide étant supposé lent, on peut dans l'expression precedente negliger la quantite

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y},$$

et si l'on pose :

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{u} = u_e \dfrac{\partial u}{\partial x} + v_e \dfrac{\partial u}{\partial y} + rv, \\ \bar{v} = u_e \dfrac{\partial v}{\partial x} + v_e \dfrac{\partial v}{\partial y} - ru, \end{cases}$$

les équations du mouvement s'écrivent :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = \bar{u}, \\ \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = \bar{v}. \end{cases}$$

L'équation de continuité, ne renfermant pas de dérivées partielles par rapport au temps, conserve sa forme :

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Les équations (3) et (4) sont les équations générales du problème.

3. Pour donner une interprétation du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ d'origine M et de projections $\bar{u}$ et $\bar{v}$ définies par les équations (2), considérons le vecteur $\overrightarrow{MR}$, produit vectoriel du vecteur vitesse relative $\overrightarrow{MV}$, et du vecteur vitesse d'entraînement $\overrightarrow{MV_e}$. On voit immédiatement que $\overrightarrow{MQ}$ est le double du tourbillon du vecteur $\overrightarrow{MR}$.

On peut donc dire en resume :

Si l'on néglige la force extérieure agissant sur le liquide, les équations générales qui définissent le mouvement lent absolu du liquide par rapport à des axes mobiles se déduisent des équations générales qui définissent le mouvement lent absolu par rapport à des axes fixes en prenant comme force extérieure rapportée à l'unité de masse agissant sur le liquide le double du tourbillon du produit vectoriel V, V_e.

4. Si l'on admet qu'il y a adhérence du liquide visqueux sur la surface du cylindre qui se déplace, c'est qu'en tout point x, y de la sec-

tion droite σ de ce cylindre la vitesse relative du liquide est nulle. Les composantes u et v de la vitesse absolue du liquide prennent donc sur σ les valeurs

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_\sigma = \xi - ry, \\ v_\sigma = \eta + rx. \end{array} \right.$$

A l'instant initial, c'est-à-dire à l'instant où l'on commence à s'occuper du problème, le mouvement du liquide est supposé connu et pour $t = 0$, u et v se réduisent à deux fonctions données u_0 et v_0 du point M; u_0 et v_0 doivent vérifier l'équation de continuité et aussi, en général, les conditions (5) où ξ, η, r sont remplacés par leurs valeurs initiales ξ_0, η_0, r_0.

Il faut de plus que les fonctions u, v, p de M et de t s'annulent quel que soit t, lorsque M s'éloigne à l'infini de σ, en d'autres termes u, v, p doivent s'annuler avec $\frac{1}{R}$ si R désigne la distance OM. On suppose qu'il en est ainsi pour u_0 et v_0.

Il est évident, d'après (3), qu'on pourrait ajouter à p une constante ou une fonction arbitraire de t, de façon que p soit en tout point positive; cette fonction de t n'aurait d'ailleurs aucune influence dans la suite.

5. Dans les équations (3) $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont négligeables. En effet, le mouvement du solide est défini par le torseur T; on supposera que ce mouvement est lent, ce qui revient à dire que les trois fonctions du temps ξ, η, r et leurs dérivées sont très petites en valeur absolue. Désignons par ε le module maximum des composantes de T et de leurs dérivées premières. On verra dans la suite que, si l'on résout le problème posé en négligeant $\bar{u}$ et $\bar{v}$ dans les équations (3), la première approximation correspondante u, v et p est du premier ordre en ε, de plus que p s'annule à l'infini comme $\frac{1}{R}$, u et v comme $\frac{1}{R^2}$. Pour cette première approximation les termes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont du deuxième ordre en ε, et ils s'annulent à l'infini comme $\frac{1}{R^2}$.

Pour obtenir une première approximation du problème on annulera donc les seconds membres de (3) et les équations générales seront :

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} - \nu\,\Delta u + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - \nu\,\Delta v + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0. \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

6. L'état du liquide est défini a tout instant et en tout point si l'on connaît à tout instant le torseur T ainsi que le vecteur vitesse absolue initiale V_0 en tout point. Soit uvp la solution qui est définie par un premier torseur $T(\xi\eta r)$ et une première vitesse initiale $V_0(u_0 v_0)$ et soit de même $u'v'p'$ la solution qui est definie par un deuxième torseur $T'(\xi'\eta' r')$ et une deuxième vitesse initiale $V_0(u_0 v_0)$.

L'ensemble des trois fonctions

$$u_1 = u + u', \qquad v_1 = v + v', \qquad p_1 = p + p'$$

constitue une solution des équations générales (A), qui sont linéaires à coefficients constants. Cette solution vérifie les conditions aux limites correspondant au torseur somme des deux torseurs T et T' et à l'instant initial, les fonctions u_1 et v_1 ont pour valeurs les composantes de la vitesse $V_0 + V'_0$.

On peut énoncer le résultat suivant :

Si un premier mouvement du liquide est produit à l'instant t par un premier torseur des rotations instantanées et un premier système de vitesses initiales; si un deuxième mouvement est produit par un deuxième torseur de rotations instantanees et un deuxième système de vitesses initiales, le mouvement produit par l'ensemble des deux torseurs et des deux systemes de vitesses initiales est a tout instant la superposition des deux premiers mouvements.

Ce resultat est analogue au theorème de la superposition des déformations en Élasticité.

7. On supposera dans toute la suite que le contour σ est sans singularité, c'est-à-dire qu'il a en tout point une tangente et un rayon de courbure bien déterminés, de plus le sens de l'angle xOy formé par

les deux axes liés à σ est le sens positif habituellement adopté. Cela posé, la tangente Ms en un point M de σ est prise dans le sens direct par rapport à l'espace ω occupé par le liquide, et la normale Mn à σ se déduit de Ms par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif, cette normale est donc interieure à l'espace liquide ω.

8. Je signale en passant deux moyennes relatives à la pression. La fonction $p(\mathrm{M}t)$ est harmonique dans tout le liquide; si cette fonction reste finie ainsi que ses derivées première et seconde, elle vérifie d'après l'équation de Green la condition

$$\int_{\sigma'+\Sigma} \frac{dp}{dn}\,ds = 0,$$

Σ désignant un cercle de centre O et de rayon R assez grand pour qu'il soit tout entier intérieur au liquide, σ' un contour fermé compris tout entier entre Σ et la section droite σ du cylindre, $\frac{dp}{dn}$ la dérivée de p prise suivant la normale à la frontière $\sigma'+\Sigma$ intérieure à l'espace liquide limité par ce contour.

L'intégrale le long de Σ tend vers zéro comme $\frac{1}{\mathrm{R}}$ puisque p est régulière à l'infini et il reste

$$\int_{\sigma'} \frac{dp}{dn}\,ds = 0.$$

Supposons en particulier que σ' soit un cercle de centre O et de rayon r; comme $\frac{d\sigma'}{\sigma'}$ est indépendant de r, l'équation précédente s'écrit

$$\int_{\sigma'} \frac{dp}{dr}\,\frac{ds}{s} = \frac{d}{dr}\int_{\sigma'} p\,\frac{ds}{s} = 0.$$

L'intégrale

$$\int_{\sigma'} p\,\frac{ds}{s}$$

est la pression moyenne sur le cercle σ' à l'instant t.

La pression moyenne à l'instant t, sur le cercle de centre O et de rayon r est constante.

Cette constante est égale à la pression à l'infini, elle est donc nulle.

Ce résultat se vérifie en particulier dans le cas du cylindre de révolution en translation rectiligne, d'après l'expression de p indiquée dans l'Introduction page 6.

9. Les hypothèses étant les mêmes que précédemment, la deuxième formule de Green donne, si l'on pose avec Lamé,

$$\Delta_1 p^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2,$$

$$(6) \qquad \int_{\sigma+\Sigma} p \frac{\partial p}{\partial n} ds + \int_{\omega} \Delta_1 p^2 \, d\omega = 0.$$

Sur Σ, $\frac{dp}{dn}$ se confond avec $-\frac{dp}{dR}$, et l'intégrale

$$\int_{\Sigma} p \frac{dp}{\partial R} ds$$

tend vers zéro comme $\frac{1}{R^2}$ et, en raisonnant comme au n° 8, on voit que l'équation (6) entraîne l'inégalité

$$\frac{d}{dr}\int_{\sigma'} p^2 \frac{ds}{s} < 0.$$

Le moyen carré de la pression à l'instant t, sur le cercle de centre O et de rayon r, va en décroissant lorsque r augmente. Sa limite pour r infini est évidemment nulle.

Ce résultat se vérifie en particulier dans le cas du cylindre de révolution en translation; on trouve pour le moyen carré de la pression

$$\frac{\pi \rho^2}{r^2} A^2(t).$$

10. Pour établir le théorème de la force vive multiplions les équations générales (A) respectivement par ρu et ρv, ajoutons membre à membre et après avoir multiplié l'équation obtenue par $d\omega$, intégrons dans tout l'espace liquide ω limité par σ et Σ, on obtient

$$(7) \quad \int_{\omega}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) d\omega + \rho\int_{\omega}\left(u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t}\right) d\omega - \mu\int_{\omega}(u\,\Delta u + v\,\Delta v)\, d\omega = 0.$$

D'après l'équation de continuité on a

$$u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y},$$

et d'après la première formule de Green, la première intégrale de (7) s'écrit

$$-\int_{\sigma+\Sigma} p\,V_n\,ds,$$

où V_n désigne la composante de V sur la normale intérieure à l'espace ω. L'intégrale le long de Σ tend vers zéro comme $\frac{1}{R^2}$.

En désignant par dm la masse $\rho\,d\omega$ de l'élement liquide, la deuxième intégrale de (7) s'écrit à la limite :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\omega} V^2\,dm \quad (^1).$$

Cette intégrale représente la force vive absolue de la masse liquide entière lorsque R augmente indefiniment.

La troisième integrale de (7) s'ecrit d'après la formule de Green

$$-\mu\int_{\omega}(\Delta_1 u^2+\Delta_1 v^2)\,d\omega+\frac{\mu}{2}\int_{\sigma+\Sigma}\frac{dV^2}{dn}\,ds,$$

et l'intégrale le long de Σ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

L'équation (7) devient pour R infini

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega} V^2\,dm=\frac{\mu}{2}\int_{\sigma}\frac{dV^2}{dn}\,ds-\mu\int_{\omega}(\Delta_1 u^2+\Delta_1 v^2)\,d\omega+\int_{\sigma} p\,V_n\,ds.$$

Cette équation traduit le théorème de la force vive :

Le premier membre de (8) est la derivée par rapport au temps de la demi-force vive absolue totale du liquide; la somme des deux premiers termes du second membre qui contiennent μ en facteur représente la puissance perdue par les frottements intérieurs; le dernier terme représente la puissance exercée par le cylindre de hauteur unité contre les poussées interieures du liquide (2).

---

(1) Ce resultat decoule de la formule connue :

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega} V^2\,d\omega=\int_{\omega}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,d\omega+\int_{\sigma+\Sigma} V^2\,V_n\,ds,$$

où l'intégrale le long de σ est nulle et l'intégrale le long de Σ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

(2) BOUSSINESQ, *Théorie de la Chaleur*, t. II, Note II.

11. Supposons qu'il puisse exister deux solutions du problème correspondant à un torseur T des rotations instantanées et à un système donné de vitesses initiales.

La différence de ces deux solutions serait définie par trois fonctions p, u, v vérifiant les équations générales.

A l'instant initial u et v seraient nuls; en tout point du contour σ on aurait $u_\sigma = v_\sigma = 0$; enfin à l'infini p s'annulerait comme $\frac{1}{R}$, u et v comme $\frac{1}{R^2}$.

On peut appliquer à cette solution particulière l'équation générale (8); dans cette équation les deux intégrales de surface sont nulles et il reste

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\omega V^2 dm = -\mu\int_\omega (\Delta_1 u^2 + \Delta_1 v^2)\, d\omega.$$

Intégrons cette équation par rapport au temps entre 0 et t où t est positif et remarquons que, pour $t = 0$, la force vive du liquide est nulle; on a

$$\frac{1}{2}\int V^2 dm = -\mu\int_0^t d\theta \int_\omega (\Delta_1 u^2 + \Delta_1 v^2)\, d\omega. \tag{9}$$

Le premier membre de cette équation est positif; le second membre est négatif; l'égalité (9) n'est possible que si les deux membres sont nuls, ce qui exige que V^2 soit nul à tout instant et en tout point du liquide. Dès lors u et v sont nuls.

Si donc le problème a une solution, il n'en a qu'une.

12. Considérons les deux solutions du problème qui correspondent à deux torseurs distincts pour les rotations instantanées. En tenant compte de l'équation de continuité et en raisonnant comme on l'a fait pour établir l'équation (8) de la force vive, on établit

$$\rho\int_\omega \sum\left(u'\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u'}{\partial t}\right) d\omega = \mu\int_\sigma \sum\left(u'\frac{du}{dn} - u\frac{du'}{dn}\right) ds - \int_\sigma (pV'_n - p'V_n)\, ds.$$

équation qui établit une relation de réciprocité entre les deux solutions uvp et $u'v'p'$ qui correspondent à deux torseurs distincts.

13. Remarquons que si le plan xOy reste dans un plan vertical fixe et si le liquide est pesant, en designant par α l'angle que fait Ox avec la verticale ascendante, les seconds membres de (A) deviendront

$$-g\cos\alpha \quad \text{et} \quad -g\sin\alpha$$

et il faudra, dans ce qui précède, ajouter à la pression p la pression hydrostatique

$$p_g = \rho g(x\cos\alpha + y\sin\alpha).$$

Ainsi dans le théorème de la force vive, le terme

$$\int_\sigma p\,V_n\,ds$$

s'accroît de

$$\int_{\sigma_1} p_g V_n\,ds,$$

quantité qui se transforme par la première formule de Green et devient, en supposant que le point O soit centre de gravité de la surface ω_1 intérieure à σ,

$$Mg\eta_1,$$

où η_1 désigne la composante verticale ascendante de la vitesse du point O, et M la masse liquide deplacée par le cylindre de hauteur unite.

Le théorème d'unicité subsiste dans ce cas car

$$\int_\sigma p_g V_n\,ds$$

s'annule si $V_n = 0$.

14. Disons maintenant un mot d'un problème traité par Stekloff (¹).

Stekloff a étudie la détermination des vitesses au sein d'un liquide parfait remplissant un vase anime d'un mouvement connu, connaissant le tourbillon en tout point du liquide.

Sa solution s'applique au liquide exterieur au contour σ; le mouvement étant plan, en tout point de σ la composante normale du tourbillon est nulle; c'est le premier cas etudie par Stekloff.

(¹) STEKLOFF, *Annales de la Faculte de Toulouse*, 1908.

Désignons par $\zeta_{M'}$ (1) le tourbillon supposé connu au point M′ du liquide et par δ la distance MM′.

Si l'on pose

$$Q(M, t) = \frac{1}{\pi}\int_\omega \zeta_{M'} \log\delta \, d\omega_{M'}$$

et

$$\varphi(M, t) = \eta x - \xi y + \frac{1}{2} r(x^2 + y^2),$$

x et y étant les coordonnées de M; la solution de Stekloff est définie par

$$u = \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x},$$
$$v = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y},$$

où P est une fonction harmonique dont la derivée normale est

$$\frac{dP}{dn} = \frac{d(\varphi + Q)}{ds} = f.$$

Le tourbillon $\zeta_{M'}$ est à l'infini d'ordre 3 en $\frac{1}{R}$ et l'intégrale Q a un sens. La valeur de $Q + \varphi$ sur σ est uniforme et

$$\int_\sigma f \, ds = 0,$$

le problème de Neumann qui definit P a une solution et P est régulière à l'infini, elle y est d'ordre 1 en $\frac{1}{R}$ (2).

Nous serons conduits, dès le Chapitre III, à des calculs un peu analogues au précédent.

15. Terminons ce chapitre par l'étude de l'impulsion initiale. Supposons tout d'abord σ immobile et désignons par u'_0 et v'_0 les composantes de la vitesse primitive V_0 en tout point M du liquide; V'_0 s'annule sur σ.

---

(1) $2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ definit le tourbillon absolu.

(2) GOURSAT, *Anal. Math.*, t. III, p. 516-518.

Mettons brusquement le solide en mouvement; ce mouvement initial étant défini par un torseur T_0 dont les composantes ξ_0, η_0, r_0 sont supposees faibles; il en résulte en tout point du liquide un changement brusque de la vitesse.

Le phenomène est instantané; le déplacement de la molécule M est négligeable et les axes lies à σ peuvent être regardes comme fixes pendant la duree infiniment petite du changement. Il faut déterminer la vitesse V_0 de composantes u_0 et v_0 à la fin du phenomene. Multiplions les équations (A) par dt, intégrons de o à t et faisons tendre t vers zéro.

Les termes en ν sont négligeables, car le déplacement de M défini par

$$\int_0^t u\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^t v\,dt$$

est négligeable. La viscosite du liquide n'a ici aucune influence et tout se passe donc comme pour un liquide parfait. Si l'on pose

$$P_0 = \frac{1}{\rho}\int_0^t p\,dt,$$

on a

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} u_0 - u'_0 = -\dfrac{\partial P_0}{\partial x} \quad (^1), \\[2ex] v_0 - v'_0 = -\dfrac{\partial P_0}{\partial y}. \end{cases}$$

L'équation de continuité étant vérifiée, P_0 est harmonique et pour la définir on écrira comme pour les liquides parfaits qu'en tout point M de σ la composante normale de la vitesse liquide est égale à celle du contour; d'où

$$\text{(12)} \qquad \frac{dP_0}{dn} = -\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0,$$

P_0 est, comme au n° 14, définie par le problème de Neumann extérieur, elle est régulière à l'infini et d'ordre 1 en $\frac{1}{R}$ et ses dérivées partielles en x et y sont d'ordre 2 en $\frac{1}{R}$.

---

(1) *Voir* LAMB, *Hydrodynamics*, edition 1895, p. 12, n° **12**, où la question est exposée dans le cas du liquide parfait.

Nous supposerons que V'_0 est d'ordre au moins égal à 2 en $\frac{1}{R}$, il en sera alors de même pour V_0. Si le liquide est initialement au repos, V'_0 est nulle. C'est la vitesse V_0 ainsi déterminée qu'on pourra prendre, dans la suite, comme vitesse initiale du liquide; elle vérifie sur σ la condition

$$V_{0n} - V'_{0n} = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0.$$

Remarquons que le tourbillon ζ_0 dû à V_0 est identique au tourbillon ζ'_0 dû à V'_0. Ce dernier est nul en particulier si le liquide est primitivement au repos.

Remarquons aussi que si le torseur T_0 se change en un torseur opposé $-T_0$, V_0 ne se change pas en $-V_0$ en général; cela n'a lieu que si V'_0 est nulle.

Remarquons enfin que P_0 est de l'ordre de grandeur du torseur T_0 et que par suite la vitesse V_0 reste faible s'il en est ainsi de T_0 et V'_0.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT LENT EN LIQUIDE PARFAIT. DYNAME D DES EFFORTS. CAS DE L'ELLIPSE. VARIATION INFINITESIMALE DES COEFFICIENTS DE D.

1. On sait que Kirchhoff a traité le problème du mouvement quelconque d'un solide en liquide parfait en regardant l'ensemble du solide et du liquide comme formant un système dynamique et en partant de la forme, *a priori*, du potentiel des vitesses (¹).

Nous suivrons ici la méthode directe indiquée par Boussinesq pour étudier la translation lente d'un solide en liquide parfait; cette méthode, convenablement généralisée, nous permettra d'étudier le cas du liquide visqueux.

2. Dans les équations (A), Chapitre I, n° 4, les termes en ν dispa-

---

(¹) LAMB, *loc. cit.*, Chap. VI.

raissent et pour vérifier ces équations on pose

$$(1)\qquad \begin{cases} u = u_0 - \dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ v = v_0 - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \end{cases}$$

où

$$P = \frac{1}{\rho}\int_0^t p\,dt,$$

u_0 et v_0 étant les composantes de la vitesse absolue V_0 du liquide à l'instant initial; V_0 peut être la vitesse déterminée au n° 15 du Chapitre I. Les conditions initiales sont verifiees car $P = 0$ pour $t = 0$. Comme V_0 verifie l'equation de continuite, il faut que P et par suite p soit harmonique. La condition aux limites s'écrit

$$\frac{dP}{dn} = V_{0n} - \frac{d\varphi}{ds} \qquad \text{où } \varphi = \eta x - \xi y + \frac{1}{2} r(x^2 + y^2).$$

V_{0n} est la projection de V_0 sur la normale à σ intérieure à l'espace liquide ω, $\frac{dP}{dn}$ est la derivee de P suivant cette même normale. La fonction harmonique p vérifie puisque V_{0n} est indépendante du temps la condition

$$(2)\qquad \frac{dp}{dn} = -\rho\frac{d\varphi'}{ds} \qquad \text{ou } \varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

et p est encore définie à l'aide d'un problème de Neumann extérieur; on voit comme au n° 14 du Chapitre I que ce problème a une solution unique, que p est régulière à l'infini et d'ordre 1 en $\frac{1}{R}$. Les composantes u et v de V sont donc d'ordre 2 en $\frac{1}{R}$ à l'infini.

3. Comme $\frac{d\varphi'}{ds}$ est linéaire et homogène en ξ', η', r' il en est de même de p. On peut poser

$$p = \xi' p_1 + \eta' p_2 + r' p_3,$$

où p_1, p_2, p_3 sont trois fonctions harmoniques, dont les dérivées suivant la normale extérieure à σ sont respectivement

$$-\rho\alpha, \quad -\rho\beta, \quad -\rho(\beta x - \alpha y).$$

On posera avec Boussinesq

$$(3)\qquad A_{ik} = \int_\sigma \frac{dp_i}{dn} p_k \, ds, \qquad \text{où } i, k = 1, 2, 3.$$

Appliquons à deux fonctions p_i et p_k la deuxième formule de Green à l'aire ω limitée par σ et par le cercle Σ de rayon R. Si l'on fait tendre R vers l'infini, les intégrales le long de Σ s'annulent et il en résulte que

$$(4)\qquad A_{ik} = A_{ki} \qquad \text{pour } i \neq k.$$

Appliquée à une fonction p_i la première formule de Green montre que

$$A_{ii} \text{ est négatif.}$$

Les neuf coefficients A_{ik} qui ne dépendent que du contour et non de son mouvement se réduisent à six seulement.

4. Cela posé le dyname D des efforts que le liquide exerce sur le solide se compose d'une force et d'un couple situés dans xOy; on désignera par D_1, D_2, D_3 les trois composantes de D. Elles sont définies par

$$(5)\quad D_1 = -\int \alpha p \, ds, \qquad D_2 = -\int_\sigma \beta p \, ds, \qquad D_2 = -\int_\sigma (\beta x - \alpha y) p \, ds \quad (^1),$$

et l'on voit immédiatement que ces trois composantes s'obtiennent en multipliant les colonnes du déterminant des A_{ik} respectivement par

$$\frac{\xi'}{\rho}, \quad \frac{\eta'}{\rho}, \quad \frac{r'}{\rho},$$

et en ajoutant par lignes.

D'après l'égalité (4) ce déterminant est symétrique par rapport à sa grande diagonale, il en résulte que les trois composantes du dyname D sont les trois dérivées partielles en ξ', η', r' d'une forme quadratique homogène en ξ', η', r' et si l'on pose

$$(6)\quad \rho W(x, y, z) = \frac{1}{2}(A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2) + A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}xz,$$

(1) Appell, *loc. cit.*, t. III, Chap. XXX.

on a

$$D_1 = \frac{\partial W}{\partial \xi'}, \qquad D_2 = \frac{\partial W}{\partial \eta'}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial r'}. \tag{7}$$

5. Le travail $d\mathfrak{T}$ effectué par le liquide pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt a pour expression

$$d\mathfrak{T} = dt(\xi D_1 + \eta D_2 + r D_3)$$

qui s'écrit, puisque $W(x, y, z)$ est homogène,

$$d\mathfrak{T} = dt\left(\xi' \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial W}{\partial \eta} + r' \frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

ou encore

$$d\mathfrak{T} = d\,W(\xi, \eta, r).$$

Le travail effectué par le liquide dans un intervalle de temps fini est égal à la variation de la fonction $W(\xi, \eta, r)$ dans ce même intervalle de temps, et $W(\xi, \eta, r)$ est la fonction potentielle de resistance.

On etablit ainsi directement, dans le cas du mouvement lent, un résultat analogue à celui etabli, *a priori*, pour un deplacement quelconque en un liquide parfait.

6. En raisonnant comme on le fait dans la théorie générale de l'Élasticité (¹), on peut donner une interprétation géometrique des formules (7). Designons par Oz l'axe perpendiculaire en O au plan xOy et appelons quadrique directrice la quadrique Q qui a pour equation

$$2W(x, y, z) = \pm 1,$$

dans laquelle par une rotation des axes autour de Oz on peut toujours annuler le coefficient A_{12}.

Désignons par OT′ le vecteur qui a pour projections ξ', η', r' et par Q le point où la demi-droite OT′ perce la quadrique directrice; par OD le vecteur de projections D_1, D_2, D_3, on reconnait aussitôt :

1° Que OD est perpendiculaire au plan diamétral de la direction OT′ dans la quatrique directrice;

(¹) Appell, *loc. cit.*, t. III, Chap. XXX.

2° Que la valeur algébrique D_n de la projection de OD sur l'axe OT' a pour expression

$$D_n = \pm \frac{T'}{\overline{OQ}^2}.$$

On définit ainsi D à l'aide de T' et de la quatrième directrice. Le vecteur OD est perpendiculaire à OT' si ce vecteur est une génératrice de Q. Les deux vecteurs OD et OT' ont la même direction si OT' est porté par un des axes principaux de la quadrique Q; les trois dynames correspondants peuvent être appelés les trois dynames principaux.

7. Examinons rapidement les cas ou le contour σ admet deux formes particulières.

Forme I. — Lorsque σ admet un axe de symétrie qu'on peut prendre pour Ox, le plan xOz est un plan de symétrie pour la quadrique Q et il en résulte que

$$A_{12} = A_{23} = 0.$$

Forme II. — Si la section admet Ox et Oy comme axes de symétrie les trois coefficients A_{ik} où $i \neq k$ sont nuls; ces résultats decoulent d'ailleurs des formules (3).

Ce dernier cas se presente en particulier si le contour σ est un cercle.

Remarquons maintenant que si le plan xOy est vertical il faut ajouter à la pression p la pression hydrostatique, ce qui revient d'après (5) à ajouter au dyname D la poussée d'Archimède.

8. Désignons par M_1 la masse du cylindre de hauteur unité

$$M_1 = \omega_1 \rho_1,$$

où ρ_1 est la densité du solide, par I_1 son moment d'inertie par rapport au point O, et par X, Y, N le dyname des forces donnees appliqué au solide et rapporte aux axes mobiles. Les projections sur ces axes de l'accélération du point O sont

$$\xi' - r\eta \quad \text{et} \quad \eta' + r\xi.$$

Le mouvement du solide étant supposé lent, ces projections sont équivalentes à ξ' et à η'.

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$
(\mathrm{M}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
M_1\,\xi' &= D_1 + X,\\
M_1\,\eta' &= D_2 + Y,\\
I_1\,r' &= D_3 + N.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous distinguerons deux cas suivant que le plan xOy est horizontal ou vertical.

Si le mouvement est horizontal et si la seule force donnée est le poids du solide on a

$$X = Y = N = 0;$$

les équations du mouvement sont linéaires et homogènes en ξ', η', r'. Le mouvement de σ est un mouvement uniforme défini par le torseur initial et le mouvement est lent si ce torseur initial a des composantes faibles. Dans ce cas p est nul et le mouvement du liquide d'après (1) est un mouvement permanent.

Si le mouvement est vertical et si l'on designe par Π le poids apparent dans le liquide du cylindre de hauteur unité

$$\Pi = M_1 g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right),$$

dans ce cas

$$X = -\Pi\cos\alpha, \qquad Y = -\pi\sin\alpha, \qquad N = 0,$$

où α désigne l'angle de Ox avec la verticale ascendante. En éliminant ξ' et η' entre les trois équations (M) on forme d'abord une équation définissant $\alpha(t)$ et les deux premières équations donnent ensuite ξ' et η'.

L'équation en $\alpha(t)$ prend la forme

$$r' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = A\sin(\alpha - \varphi),$$

où φ désigne un angle constant; en changeant $\alpha - \varphi$ en α ou en $\pi + \alpha$ on voit que cette équation peut s'ecrire

$$
(\mathrm{P}) \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = A\sin\alpha,
$$

où A est une constante negative.

Cette constante A contient Π en facteur et en intégrant une fois les équations en ξ', η', r', on voit immédiatement que le mouvement du solide reste lent si le torseur initial ξ_0, η_0, r_0 est faible et si Π est faible, c'est-à-dire si les deux densités ρ et ρ_1 sont peu différentes.

Remarquons enfin que l'équation en $\alpha(t)$ intégrée deux fois s'écrit sous la forme

$$\alpha(t) = \lambda \int_0^t (t-\theta) \sin \alpha(\theta)\, d\theta + r_0 t + \alpha_0.$$

C'est une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, non linéaire ([1]). La méthode d'approximations successives s'y applique car si α et β désignent deux arcs quelconques on a toujours

$$|\sin \alpha - \sin \beta| < |\alpha - \beta|.$$

Remarquons que dans le cas où le contour a la forme particulière II (n° 7), l'équation en $\alpha(t)$ est la même que dans le cas du mouvement horizontal; le cylindre tourne autour de O avec une vitesse angulaire constante r_0 et l'on reconnaît que le mouvement absolu du point O résulte alors de la composition du mouvement parabolique du point pesant et d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire égale à $2r_0$.

9. Notons en passant l'influence des dimensions de σ sur le dyname D. Le liquide étant parfait et incompressible, on sait qu'on peut prendre entre les dimensions L, M, T des longueur, masse et temps le groupe de relations

$$M = L^2, \qquad T = L^{\frac{1}{2}}.$$

La dimension d'une pression est alors L; il en est de même pour p_1 et p_2, mais p_3 a pour dimensions L^2. Il en résulte que les dimensions des coefficients sont L^2 pour A_{11}, A_{22} et A_{12}; L^3 pour A_{13} et A_{23}; et L^4 pour A_{33}.

10. Étudions à titre d'exemple le dyname des efforts qu'un liquide parfait exerce sur un cylindre elliptique. On suivra une méthode analogue à celle qu'a suivie Boussinesq dans le cas d'un ellipsoïde qui se

([1]) Volterra, *Équations intégrales*, 1913, Chap. II, p. 89, n° 4.

déplace, d'un mouvement de translation parallèle à un de ses axes, dans un liquide parfait (1).

Le contour σ admet deux axes de symetrie et il n'y a que trois coefficients à calculer. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'equation de σ; les ellipses homofocales sont définies par

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0,$$

où λ varie de zero à l'infini dans les couches liquides enveloppantes de plus en plus éloignees.

On posera avec Boussinesq

$$H=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2},$$

$$K=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}.$$

Calculons d'abord A_{11}. On sait que :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_1}{dn}=\alpha,$$

mais α étant proportionnel à x posons

$$-\frac{1}{\rho}p_1=-x\varphi_1(\lambda),$$

et déterminons $\varphi_1(\lambda)$. Les équations générales deviennent :

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{ll} \Delta(x\varphi_1)=0 & \text{quel que soit } \lambda, \\ \dfrac{x}{a^2+\lambda}\dfrac{\partial(x\varphi_1)}{\partial x}+\dfrac{y}{b^2+\lambda}\dfrac{\partial(x\varphi_1)}{\partial y}=\dfrac{x}{a^2+\lambda} & \text{pour } \lambda=0, \\ x\varphi_1(\lambda)=0 & \text{pour } \lambda \text{ infini.} \end{array}\right.$$

La première équation définit $\varphi_1(\lambda)$

$$2\varphi_1''(\lambda)+\varphi_1(\lambda)\left[\frac{3}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\right]=0,$$

(1) Boussinesq, *Theorie de la Chaleur*, p. 216.

d'où

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{1}{A_1}\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},$$

de façon à vérifier la condition à l'infini.

La deuxième equation se reduit à

$$2a^2\varphi_1(o) + \varphi_1(o) = -1,$$

d'où pour A_1

$$A_1 = \frac{2}{ab} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},$$

et l'on trouve finalement, en posant $k = \frac{b}{a}$,

$$\varphi(\lambda) = \frac{k}{1-k}\left[1 - \sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right]$$

et

$$\varphi_1(o) = k..$$

Mais le coefficient A_{11} a pour expression

$$A_{11} = -\rho\,\varphi_1(o)\int_\sigma \alpha x\,ds,$$

Si donc on désigne par M la masse liquide déplacée par le cylindre de hauteur unité on a

$$A_{11} = -Mk.$$

On aurait de même

$$A_{22} = -\frac{M}{k}.$$

Les nombres $M.k$ et $\frac{M}{k}$ sont les masses des cylindres de révolution liquide, de hauteur unite et qui ont pour rayons respectivement b et a.

Dans le cas d'un cylindre elliptique animé d'une translation rectiligne parallèle à un axe de la section droite, le volume de la poupe et de la proue liquide qui accompagnent le cylindre est egal au volume du cylindre de revolution qui a pour diametre l'axe de la section droite perpendiculaire à la translation.

Dans le cas d'un cylindre de revolution, $k=1$ et l'on retrouve le resultat connu de Du Buat.

Pour calculer A_3, comme

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_3}{dn}=\beta x-\alpha y,$$

on pose

$$-\frac{1}{\rho}p_3=xy\,\varphi_3(\lambda),$$

et les équations générales s'écrivent

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{ll}\Delta(xy\varphi_3)=0 & \text{quel que soit } \lambda,\\ \dfrac{x}{a^2+\lambda}\dfrac{\partial(xy\,\varphi_3)}{\partial x}+\dfrac{y}{b^2+\lambda}\dfrac{\partial(xy\varphi_3)}{\partial y}=\dfrac{c^2xy}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} & \text{pour } \lambda=0,\\ xy\,\varphi_3(\lambda)=0 & \text{pour } \lambda \text{ infini.}\end{array}\right.$$

On trouve, pour les dérivées partielles de $-\frac{1}{\rho}\cdot p_3$,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_3}{\partial x}=y\,\varphi_3(\lambda)+\frac{2x^2y}{(a^2+\lambda)\mathrm{H}}\varphi'_3(\lambda),$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2}=\varphi'_3(\lambda)\frac{2xy}{(a^2+\lambda)\mathrm{H}}\left[3-\frac{x}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}-\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right]+\frac{4x^2y^2}{(a^2+\lambda)^2\mathrm{H}^2}\varphi''_3(\lambda),$$

et pour les dérivées partielles par rapport à y des expressions analogues. En remarquant que

$$\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}=-2\mathrm{K},$$

on obtient pour $\varphi_3(\lambda)$ l'équation

$$2\varphi''_3(\lambda)+3\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\right)\varphi'_3(\lambda)=0,$$

d'où

$$\varphi'_3(\lambda)=\frac{1}{\mathrm{A}_3}\,\frac{1}{[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)]^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\varphi_3(\lambda)=\frac{1}{\mathrm{A}_3}\int_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La deuxième condition (9) entraîne

$$(a^2+b^2)\,\varphi_3(0)+2a^2b^2\,\varphi'_3(0)=c^2,$$

d'où

$$A_3 = \frac{2}{abc^2} + \frac{a^2+b^2}{c^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)]^{\frac{3}{2}}},$$

et intégrant

$$\varphi_3(\lambda) = \frac{-ab(a+b)^2}{2c^2(a^2+b^2+ab)}\left[2 - \frac{a^2+b^2+2\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}\right]$$

et

$$\varphi_3(o) = \frac{1}{2}\,\frac{1-k^2}{1+k+k^2}.$$

Le coefficient A_{33} a pour expression

$$A_{33} = \rho\,\varphi_3(o)\int_\sigma xy(\beta x - \alpha y)\,ds = \varphi_3(o)\,(I_y - I_x),$$

I_x et I_y étant les moments d'inertie par rapport à ses plans de symétrie du cylindre de hauteur unite suppose rempli de liquide

$$I_y - I_x = \frac{M}{4}c^2$$

et

$$A_{33} = \frac{Mc^2}{8}\,\frac{1-k^2}{1+k+k^2}.$$

Dans le cas du cercle, $k=1$ et $A_{33}=o$.

On peut donc dire que la resistance que le liquide oppose à la rotation du cylindre elliptique autour de son axe a pour effet d'augmenter le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe du moment d'inertie d'un cylindre de révolution liquide ayant pour rayon

$$\frac{c^2}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}.$$

On voit facilement que pour une valeur donnee de a il existe un cylindre elliptique pour lequel A_{33} passe par un maximum; pour ce cylindre k est racine de

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1 = o$$

et k est très voisin de $\frac{7}{20}$.

11. En suivant la methode utilisée par M. Hadamard [1] pour etudier la variation infinitesimale des fonctions de Green et de Neumann, on peut calculer la variation des coefficients du dyname D. Ces coefficients sont bien determines lorsque le contour σ est fixe, mais ils varient si σ se deforme; ces coefficients sont des fonctionnelles de σ.

Calculons par exemple la variation du premier coefficient A_{11} lorsque le contour σ est remplacé par un contour voisin σ'. On désignera, pour simplifier, ce coefficient par A :

$$A = \int_\sigma p_M \frac{dp}{dn_M} ds$$

avec

$$\Delta p = 0$$

et

$$\frac{dp}{dn_M} = -\rho\alpha_M.$$

Le coefficient A defini à l'aide de σ' est de même

$$A' = \int_\sigma p_M \frac{dp'}{dn_M} ds'$$

avec

$$\Delta p' = 0$$

et

$$\frac{dp'}{dn_{M'}} = -\rho\alpha_{M'}.$$

En désignant par M' le point de σ' qui est situe sur la normale en M à σ et par p' la fonction harmonique définie à l'aide de σ' comme p l'est à l'aide de σ La variation à evaluer est

$$\begin{aligned} \delta A = A' - A &= \int_\sigma p' \frac{dp'}{dn_M} ds' - \int_\sigma p \frac{dp}{dn_M} ds \\ &= \rho \int_\sigma \alpha_M p_M \quad ds - \rho \int_\sigma \alpha'_{M'} p_{M'} ds'. \end{aligned}$$

Designons la distance normale infiniment petite de σ à σ' par $\delta n = \varepsilon . \lambda$ où ε est un infiniment petit. On a d'abord entre les deux arcs

---

[1] HADAMARD, *Calcul des Variations*, t I, p. 303 a 312.

infiniment petits correspondants ds' et ds la relation

$$ds' = ds\left(1 - \frac{\delta n}{R}\right) = ds\left(1 - \frac{\varepsilon\lambda}{R}\right),$$

R étant le rayon de courbure en M à σ. Pour calculer α'_M on a le développement

$$\alpha'_M = \alpha_M + \varepsilon\lambda \frac{d\alpha_M}{dn_M} + \ldots,$$

et comme

$$\frac{d\alpha}{dn_M} = 0, \qquad \text{on a} \qquad \alpha'_{M'} = \alpha_M$$

aux infiniment petits du second ordre en ε près.

On aura de même

$$p_M = p_M - \varepsilon\lambda \frac{dp_M}{dn_M} + \ldots = p'_M + \rho\varepsilon\lambda\alpha'_{M'} + \ldots;$$

d'où

$$p'_{M'} = p_M - \rho\varepsilon\lambda\alpha_M$$

car

$$\frac{dp'_{M'}}{dn'} = -\rho\alpha'_{M'} = -\rho\alpha_M$$

aux infiniment petits du second ordre.

En remplaçant dans δA, α_M, p_M, ds' par les quantités équivalentes on a, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\delta A = \rho\int_\sigma \alpha(p_M - p_M)\, ds + \rho\int_\sigma \left(\rho\alpha^2 + \frac{\alpha p_M}{R}\right)\delta n\, ds.$$

Dans la deuxième intégrale p_M est équivalente à p_M lorsque ε est infiniment petit. Pour calculer la première intégrale, remarquons que p et p' étant deux fonctions harmoniques, la deuxième identite de Green appliquée à l'espace ω donne

$$\int_{\sigma+\Sigma} \left(p'_M \frac{dp_M}{dn} - p_M \frac{dp_M}{dn}\right) ds = 0,$$

mais p et p' étant à l'infini d'ordre 1 en $\frac{1}{R}$, l'intégrale étendue à Σ s'annule comme $\frac{1}{R^2}$ pour R infini et il reste

$$\int_\sigma \left(p_M \frac{dp_M}{dn} - p_M \frac{dp_M}{dn}\right) ds = 0$$

ou, puisque $\frac{dp_M}{dn} = -\rho\alpha_M$,

$$\int_\sigma \left(\rho\alpha_M p_M + p_M \frac{dp_M}{dn}\right) ds = 0.$$

Le premier terme de δA devient en tenant compte de cette dernière équation

$$\int_\sigma p_M \left(\frac{dp_M}{dn} + \rho\alpha\right) ds.$$

Pour calculer $\frac{dp_M}{dn}$ écrivons (¹):

$$\frac{dp'}{dn_M} = \left(\frac{dp'}{dn_M} - \frac{dp'}{dn_M}\right) + \left(\frac{dp'}{dn_M} - \frac{dp'}{dn_M}\right) + \frac{dp'}{dn_{M'}},$$

où

$$\frac{dp'}{dn_M} = -\rho\alpha_M = -\rho\alpha \qquad \text{au } 2^e \text{ ordre près},$$

$$\frac{dp'}{dn_M} - \frac{dp'}{dn_M} = -\varepsilon\lambda \frac{d^2p'}{dn'^2_M} + \ldots = -\varepsilon\lambda \frac{d^2p}{dn^2_M} \qquad \text{au } 2^e \text{ ordre près},$$

$$\frac{dp'}{dn_M} - \frac{dp'}{dn_M} = \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \frac{dp'}{ds} + \ldots = \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \frac{dp}{ds_M} \qquad \text{au } 2^e \text{ ordre près},$$

et il vient

$$\frac{dp'}{dn_M} + \rho\alpha = \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \frac{dp}{ds_M} - \varepsilon\lambda \frac{d^2p}{dn^2_M}.$$

Le premier terme de δA s'écrit

$$\int_\sigma p \left[\frac{dp}{ds} d(\delta n) - \frac{d^2p}{dn^2} \delta n \, ds\right]$$

ou en intégrant par parties le long de σ et en remarquant que p est une fonction harmonique, uniforme sur σ, ce terme devient

$$-\int_\sigma \left| \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 - \rho \frac{\alpha}{R} p \right| \delta n \, ds,$$

car

$$\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{d^2p}{dn^2} = \frac{1}{R} \frac{dp}{dn} \quad (^2)$$

(¹) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 308 et 309.

(²) Paul LÉVY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, p. 237.

et finalement

$$\delta A_{11} = \int_\sigma \left[\rho^2\alpha^2 + \rho\frac{\alpha}{R}p - \left(\frac{dp}{ds}\right)^2\right]\delta n\, ds.$$

Un calcul analogue s'applique aux autres coefficients de D. En particulier pour obtenir δA_{33} il suffit de changer dans δA_{11}, α en $\beta x - \alpha y$; on reconnaît en effet immédiatement que

$$(\beta' x' - \alpha' y')_{M'} = (\beta x - \alpha y)_M$$

aux infiniment petits du second ordre près en ε.

12. Terminons par deux remarques simples :

1° Supposons que σ subisse une légère déformation δ_1 en relief en un point où la tangente est parallèle à Ox : il faut faire dans δA_{11}, $\delta n > 0$ et $\alpha = 0$ et il reste

$$\delta A_{11} = -\int_\sigma \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 \delta n\, ds.$$

qui est essentiellement négatif; le coefficient A_{11} a augmenté en valeur absolue et par suite, si le mouvement de σ est une translation parallèle à Ox de vitesse $\xi(t)$, l'accroissement de la résistance due à δ_1 a le signe de $-\xi'(t)$.

2° Supposons que σ subisse une légère déformation δ_2 en relief en un point de σ où la normale passe par le point O; en un tel point $\beta . x - \alpha . y = 0$ et l'accroissement de A_{33} est négatif; si le mouvement de σ est une simple rotation autour de O de vitesse angulaire $r(t)$, l'accroissement du couple résistant dû à δ_2 a le signe de $-r'(t)$.

Ces deux remarques paraissent physiquement évidentes.

13. Le calcul des δA_{ii} permet d'etudier l'influence sur le mouvement du cylindre des petites variations que peut subir le contour σ. Si avant déformation, σ possède en tout point une normale bien determinée et une courbure finie, d'après l'expression des δA_{ik} et les équations (M) du mouvement, on voit que les variations de ξ', η', r' sont de l'ordre de ε et par suite sont negligeables en première approximation. Ceci ne

suppose rien relativement au champ des normales et à la courbure de la section déformée σ' laquelle peut présenter des points singuliers.

Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus par M. Bouligand (1) au sujet du mouvement d'un liquide parfait soit en vase clos, soit en bassin ouvert, lorsque la surface de la masse liquide se déforme.

CHAPITRE III.

CAS DU LIQUIDE VISQUEUX. VITESSE RESIDUELLE. ÉQUATIONS AUX DENSITES SUPERFICIELLES DE LA PRESSION ET DU TOURBILLON. ORDRE A L'INFINI DE LA PRESSION ET DU TOURBILLON.

1. Pour résoudre le système général (A) (Chap. I, n° 5) et pour satisfaire aux conditions aux limites et initiales du Chapitre I, n° 4, posons, en généralisant les équations (1) du Chapitre II, n° 2 :

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \overline{u}_0 - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\ v = \overline{v}_0 - \dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \end{cases}$$

$\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$, P et Q étant des fonctions de t et du point M.

En portant ces expressions dans les deux premières équations (A) on voit qu'elles sont vérifiées si l'on pose

$$p = \rho \frac{\partial P}{\partial t},$$

et si les fonctions $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$, Q de M et t vérifient l'équation de la chaleur :

$$(C)\qquad \frac{\partial F}{\partial t} - \nu\, \Delta F = 0.$$

$\overline{u}_0$ et $\overline{v}_0$ sont les composantes d'une vitesse $\overline{V}_0$ qui vérifie l'équation de continuité et P est harmonique. Les conditions initiales seront satisfaites si P et Q s'annulent pour $t = 0$ et si $\overline{V}_0$ se réduit à la vitesse initiale V_0 du liquide.

---

(1) Bouligand, *Continuité et approximation en hydrodynamique* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 26e cahier, 1927).

Les conditions au contour, projetées sur la tangente et sur la normale extérieure à σ, s'écrivent :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{dn} + \frac{dQ}{ds} &= \overline{V}_{0n} - \frac{d\varphi}{ds}, \\ \frac{dP}{ds} - \frac{dQ}{dn} &= \overline{V}_{0s} + \frac{d\varphi}{dn}. \end{aligned} \right.$$

Aux premiers membres de ces équations figurent les dérivées de P et Q sur la tangente et la normale à σ qui est intérieure à l'espace liquide ω; φ désigne toujours la même fonction qu'au Chapitre II, n° 2, et $\overline{V}_{0s}$ et V_{0n} sont les projections tangentielle et normale de la vitesse $\overline{V}_0$. Il faut enfin que la vitesse V de projection u et v s'annule à l'infini.

2. Nous supposerons que la vitesse initiale V_0 du liquide de projections u_0 et v_0 est définie comme au Chapitre I, n° 15; le liquide ayant une vitesse primitive V'_0 et le solide ayant ete mis brusquement en mouvement. Si V'_0 est à l'infini d'ordre 2 en $\frac{1}{R}$, nous savons qu'il en est de même de V_0.

Pour que les fonctions $\overline{u}_0$ et $\overline{v}_0$ des formules (1), vérifient l'équation (C) et se réduisent pour $t = 0$ respectivement à u_0 et v_0, on sait qu'il suffit de poser [1] :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{u}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)}\, u_0\left(x + 2a\sqrt{\nu t},\, y + 2b\sqrt{\nu t}\right) da\, db, \\ \overline{v}_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)}\, v_0\left(x + 2a\sqrt{\nu t},\, y + 2b\sqrt{\nu t}\right) da\, db. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)}\, da\, db$$

étant égale à 1, les formules (3) montrent d'abord que V_0 est à tout instant de l'ordre de grandeur de la vitesse initiale V_0; la vitesse $\overline{V}_0$ est donc très petite en même temps que V'_0 et T_0.

[1] GOURSAT, *loc. cit.*, n° 486, p. 107.

On peut démontrer que $\overline{V}_0$ est, lorsque M s'éloigne à l'infini, d'ordre $\frac{1}{R^2}$ comme V_0, en designant par R la distance OM.

Étudions par exemple la première équation (3); si le point M et l'instant t sont donnes, on peut determiner un cercle C_1 de centre o et de rayon ρ_1 assez grand pour que la partie correspondante de la première integrale (3) soit en valeur absolue, aussi petite qu'on veut et inferieure à $\frac{\varepsilon}{R^2}$ lorsque le point $M_0(a, b)$ se déplace à l'exterieur de C_1. Le point M_0 étant maintenant interieur à C_1, designons par M' le point de coordonnées $x + 2a\sqrt{\nu t}$ et $y + 2b\sqrt{\nu t}$, par M_1 le point de coordonnées $x + 2\theta a\sqrt{\nu t}$ et y, par M_2 le point de coordonnées x et $y + 2\theta b\sqrt{\nu t}$ où $o < \theta < 1$ et posons

$$R' = OM', \qquad R_1 = OM_1, \qquad R_2 = OM_2.$$

La formule des accroissements finis donne

$$\frac{1}{R'^2} = \frac{1}{R^2} - 4\sqrt{\nu t}\,\frac{1}{R_1^2}\,\frac{x_1}{R_1}\,a - 4\sqrt{\nu t}\,\frac{1}{R_2^2}\,\frac{y_2}{R_2}\,b,$$

où $\left|\frac{x_1}{R_1}\right|$ et $\left|\frac{y_2}{R_2}\right|$ sont inferieurs à 1 et où, si R est très grand, les longueurs R, R_1 et R_2 sont équivalentes. Pour M_0 interieur à C_1, la partie correspondante de la première integrale (3) est donc inferieure en valeur absolue à une quantite de la forme

$$\frac{h}{R^2} + \frac{k\sqrt{\nu t}}{R^3}\,I,$$

où h et k sont deux nombres positifs bornés et où I est une intégrale inferieure à

$$2\int_0^\infty \rho^2 e^{-\rho^2}\,d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La vitesse $\overline{V}_0$ est comme V_0 d'ordre $\frac{1}{R^2}$ à l'infini.

Cette vitesse V_0 verifie, comme $\overline{V}_0$, l'equation de continuité et si l'on désigne par Σ un cercle de centre o et de rayon R assez grand pour que Σ enveloppe σ, on a

$$\int_{\sigma+\Sigma} \overline{V}_{0n}\,ds = 0.$$

Mais pour R infini, l'intégrale le long de Σ s'annule comme $\frac{1}{R}$ et il reste

$$(4) \qquad \int_\sigma \overline{V}_{0n}\, ds = 0.$$

Le point M etant fixe, étudions la limite asymptotique de $\overline{V}_0$ pour t infini; la première integrale (3) peut alors s'ecrire :

$$(3') \qquad \overline{u}_0 = \frac{1}{4\pi\nu t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{4\nu t}}\, u_0(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Mais pour $x > 0$ on a l'inégalité

$$\sqrt{x}\, e^{-x} < \frac{1}{\sqrt{2e}},$$

et par suite

$$|\overline{u}_0| < \frac{1}{2\pi\sqrt{2e\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u_0(x', y')|}{|(x'-x)^2+(y'-y)^2|^{\frac{1}{2}}}\, dx'\, dy'.$$

L'intégrale a un sens et les projections de $\overline{V}_0$ sont pour t infini, asymptotiques à 0 au moins comme $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et celles de $\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial t}$ au moins comme $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.

3. Revenant aux équations (1) faisons d'abord deux remarques simples.

Si l'on désigne par ψ la fonction de courant qui correspond à la vitesse $\overline{V}_0$, par R la fonction harmonique conjuguée de P et si l'on pose :

$$F = \psi + R + Q,$$

les équations (1) s'écrivent:

$$u = \frac{\partial F}{\partial y},$$
$$v = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

et l'équation des lignes de courant relatives à l'instant t est

$$\varphi + F = h,$$

où h est une constante arbitraire.

Si l'on designe par ζ et $\overline{\zeta_0}$ les tourbillons dus respectivement aux vitesses V et $\overline{V_0}$, on déduit de (1) :

$$2(\overline{\zeta}_0 - \zeta) = \Delta Q = \frac{1}{\nu}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

On posera dans la suite

$$q = \rho \frac{\partial Q}{\partial t},$$

et l'on aura

$$q = 2\mu(\zeta_0 - \zeta).$$

Cette fonction q définit l'excès du tourbillon actuel sur le tourbillon résiduel; elle s'annule pour $t = 0$ et vérifie comme Q l'equation (C).

4. Pour definir la fonction harmonique p nous prendrons un potentiel logarithmique de simple couche

(5)
$$p = \rho \int_\sigma V(\delta)\, a(s', t)\, ds',$$

où

$$V(\delta) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\delta}$$

δ est la distance d'un point M intérieur à ω à un point P de σ d'abscisse curviligne s' et $a(s', t)$ est la densité superficielle en P à l'instant t.

Nous prendrons pour q la solution connue de (C) analogue à (3') :

(6)
$$q = \rho \int_0^t d\theta \int_\sigma U(\delta, \tau)\, b(s', \theta)\, ds',$$

où

$$U = \frac{1}{\pi\tau} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}$$

et

$$\tau = \nu(t - \theta)$$

et où $b(s', t)$ est une densité superficielle étalée sur σ.

Ces deux densités a et b sont définies par les équations (2) qui, dérivées par rapport à t, s'écrivent :

$$
(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dn} + \dfrac{dq}{ds} = \rho \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}_{0n} - \dfrac{d\varphi}{ds}\right), \\[2mm] \dfrac{dp}{ds} - \dfrac{dq}{dn} = \rho \dfrac{\partial}{\partial t}\left(V_{0s} + \dfrac{d\varphi}{dn}\right). \end{cases}
$$

En particulier dans ces équations la dérivée tangentielle de p a pour expression

$$
\frac{dp}{ds} = -\frac{\rho}{\pi}\int_\sigma \frac{\sin\psi}{\delta} a(s')\, ds',
$$

où ψ désigne l'angle que fait MP avec la normale extérieure à σ en M. On sait que cette intégrale n'a de sens que si le second membre de cette égalité designe la valeur principale de l'intégrale au sens de Cauchy, c'est-à-dire si pour la definir on part sur le contour σ d'un arc infiniment petit dont les extremites restent symetriques par rapport au point M considere sur σ. Ce resultat suppose de plus que la densité $a(s, t)$ admet une derivee continue en s, que le rayon de courbure à σ reste supérieur à un nombre fixe et admet une derivée ([1]).

La discontinuité de $\dfrac{dp}{dn}$ à travers le contour σ est connue; il reste à étudier celle de $\dfrac{dq}{dn}$.

Pour un déplacement infinitésimal dn du point M sur la normale extérieure $M_0 n$ à σ en un point M_0 de ce contour, la dérivée $\dfrac{dq}{dn}$ a pour expression

$$
(8) \qquad \frac{dq}{dn} = \frac{\rho}{2\pi}\int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2}\int_\sigma b(s', \theta)\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\delta \cos\psi\, ds'.
$$

Il faut chercher la limite de $\dfrac{dq}{dn}$ lorsque M, en décrivant la normale $M_0 n$, tend vers le pied M_0 de cette normale.

A cet effet considérons sur σ un arc $\overset{\frown}{mn}$ renfermant le point M_0 à son intérieur; cet arc $\overset{\frown}{mn}$ est infiniment petit, mais fixe pour l'instant.

([1]) Picard, *Leçons sur les equations aux dérivées partielles*, n° 5, p. 86.

L'expression (8) devient alors une somme de deux termes :

$$(8')\qquad \frac{dq}{dn} = \frac{\rho}{2\pi}\int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2}\left\{\int_{\widehat{m\sigma n}} b(s',\theta)\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\,\delta\cos\psi\, ds' + \int_{\widehat{nm}} b(s',\theta)\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\,\delta\cos\psi\, ds'\right\}$$

et il faut chercher la limite de chacun de ces deux termes, M tendant vers M_0 le long de MM_0, m et n tendant vers M_0 le long de σ.

5. La limite du terme correspondant à la première intégrale curviligne, limite qu'on designera par $\frac{dq}{dn_0}$, s'écrit :

$$(9)\qquad \frac{dq}{dn_0} = \frac{\rho}{2\pi}\int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2}\int_\sigma b(s',\theta)\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\,\delta\cos\psi\, ds',$$

où δ désigne la distance M_0P.

Cette intégrale a un sens. En effet :

Si l'on considère d'abord un arc élémentaire ds', quelconque de σ, il faut montrer que

$$ds'\frac{\rho}{2\pi}\,\delta\cos\psi\int_0^t \frac{b(s',\theta)}{\tau^2}\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\, d\theta$$

tend vers zéro en même temps que ds'. Si la fonction b de θ est continue dans l'intervalle

$$0 < \theta < t$$

on peut, en utilisant la première formule de la moyenne, écrire le terme precédent sous la forme

$$(10)\qquad ds'\frac{\rho}{2\pi}\,\frac{\cos\psi}{\delta}\, b(s', t_1)\int_0^t \frac{\delta^2}{\tau^2}\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\, d\theta,$$

où t_1 est compris entre 0 et t. Mais

$$(11)\qquad I = \int_0^t \frac{\delta^2}{\tau^2}\, e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\, d\theta = \frac{4}{\nu}\, e^{-\frac{\delta^2}{4\nu t}},$$

et le terme (10) tend vers zero, en même temps que ds'.

Si l'on considère maintenant un arc elémentaire ds', d'origine M_0, dans l'expression (10) δ est un infiniment petit; dès lors I est équivalent à $\frac{4}{\nu}$ et $\frac{\cos\psi}{\delta}$ à $\frac{1}{2R_0}$ où R_0 désigne le rayon de courbure à σ en M_0 et (10) est équivalent à

$$ds' \frac{\rho}{2\pi} \frac{1}{2R_0} b(s, t_1) \frac{4}{\nu},$$

où s est l'abscisse de M_0. Ce terme tend vers zéro en même temps que ds'. Il faut remarquer que le résultat subsiste si M_0 est un point d'inflexion du contour σ.

6. Il reste à étudier la limite du terme correspondant à la deuxième intégrale curviligne de (8').

La fonction b étant continue en s', ce terme est équivalent à

$$(12) \qquad \frac{\rho}{2\pi} \int_0^t b(s, \theta) \frac{d\theta}{\tau^2} \int_{\widehat{nm}} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}} \delta \cos\psi \, ds',$$

mais on peut écrire :

$$(13) \qquad b(s, \theta) = b(s, t) + |b(s, \theta) - b(s, t)|$$

et (12) devient une somme de deux termes.

Le premier terme de (12) s'écrit :

$$(14) \qquad \frac{\rho}{2\pi} b(s, t) \int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2} \int_{\widehat{nm}} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}} \delta \cos\psi \, ds'.$$

Le contour σ étant sans singularité, on peut assimiler l'arc infinitésimal $\widehat{nm}$ à un petit segment de droite normal à M_0M; alors $\delta\cos\psi$ est équivalent à $-d$, ou d désigne la distance M_0M; si l'on pose $y = \overline{M_0P}$ on a

$$\delta^2 = d^2 + y^2$$

et (14) peut s'écrire :

$$-\frac{\rho}{2\pi} b(s, t) \int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2} \int_{\overline{nm}} e^{-\frac{d^2+y^2}{4\tau}} (d^2 + y^2) \frac{d}{d^2 + y^2} dy.$$

En intégrant d'abord par rapport à θ, on obtient, en tenant compte de (11) :

$$-\frac{\rho}{2\pi}b(s,t)\frac{4}{\nu}\int_{\overline{nm}} e^{-\frac{d^2+y^2}{4\nu t}}\frac{d}{d^2+y^2}dy.$$

Lorsque $|y|$ croît, l'exponentielle est positive et décroissante, et en utilisant la deuxième formule de la moyenne, le terme précédent devient

$$-\frac{2\rho}{\pi\nu}b(s,t)e^{-\frac{d^2}{4\nu t}}\int_{\overline{n'm'}}\frac{d}{d^2+y^2}dy,$$

où n' est un point compris entre n et M_0 et m' un point compris entre M_0 et m. Dans le dernier terme l'intégrale représente l'angle sous lequel, du point M, on voit le segment $\overline{n'm'}$; lorsque d tend vers zéro, cet angle tend vers π et l'exponentielle vers 1 et (14) a pour limite

$$(15)\qquad -\frac{2\rho}{\nu}b(s,t),$$

et l'on peut faire tendre m et n vers M_0.

Étudions maintenant le deuxième terme de (12); il s'écrit :

$$(16)\qquad \frac{\rho}{2\pi}\int_0^t |b(s,\theta)-b(s,t)|\frac{d\theta}{\tau^2}\int_{\widehat{nm}} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\delta\cos\psi\, ds'.$$

Si la fonction b de la variable θ vérifie la condition de Lipschitz dans l'intervalle $0<\theta<t$ il est facile de montrer que (16) tend vers zéro; en effet cela revient à montrer que l'expression

$$\int_0^t\frac{d\theta}{t-\theta}\int_{\widehat{nm}} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}\delta\cos\psi\, ds'$$

tend vers zéro. Mais

$$|\delta\cos\psi| = d$$

et

$$e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}} < e^{-\frac{d^2}{4\tau}},$$

et il suffit que

$$\widehat{nm}\int_0^t\frac{d\, e^{-\frac{d^2}{4\tau}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{t-\theta}\, d\theta$$

tende vers zéro.

La dernière quantité est inférieure à

$$\widehat{nm}\sqrt{t}\int_0^t \frac{d\, e^{-\frac{d^2}{4\tau}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta,$$

où l'intégrale a pour limite $2.\sqrt{\nu\pi}$ lorsque d tend vers zéro ([1]).

L'expression (16) tend donc vers zéro avec $\widehat{mn}$ et l'on a finalement

$$\frac{dq_e}{dn} = \frac{dq}{dn_0} - \frac{2\rho}{\nu} b(s,\, t), \tag{17}$$

$\dfrac{dq_e}{dn}$ étant la limite de $\dfrac{dq}{dn}$ lorsque M tend vers M_0 en restant extérieur à σ. On aurait de même

$$\frac{dq_i}{dn} = \frac{dq}{dn_0} + \frac{2\rho}{\nu} b(s,\, t). \tag{17'}$$

7. On peut maintenant écrire les équations intégrales qui définissent les densités $a(s,t)$ et $b(s,t)$; ce sont les équations (7). Nous désignerons par $S_1(s,s')$ et $N_1(s,s')$ les dérivées tangentielle et normale de $V = \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\delta}$ prises en M d'abscisse s et par $S_2(ss'\tau)$ et $N_2(ss'\tau)$ les dérivées de $U = \frac{1}{\pi\tau} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}$. Les équations sont

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} &-a(s,t)+\int_\sigma N_1(s,s')a(s',t)ds'+\int_0^t d\theta\int_\sigma S_2(s,s',\tau)b(s',\theta)ds' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}_{0n}-\frac{d\varphi}{ds}\right),\\ &\frac{2\rho}{\nu}\cdot b(s,t)+\int_{\overline{\sigma}} S_1(s,s')a(s',t)ds'-\int_0^t d\theta\int_\sigma N_2(s,s',\tau)b(s',\theta)ds' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}_{0s}+\frac{d\varphi}{dn}\right).\end{aligned}\right.$$

8. Il faut étudier l'ordre à l'infini de p et de q. Multiplions la première équation (S) par ds et intégrons le long de σ; en tenant compte de l'équation (4) on a puisque q et φ' sont uniformes le long du contour

$$\int_{\overline{\sigma}} a(s,\, t)\, ds = 0$$

et $p(\mathrm{M},\, t)$ est régulière à l'infini.

([1]) Goursat, *loc. cit.*, n° 544, p. 308.

La fonction $q(\mathrm{M}, t)$ est donnée par une intégrale double en θ et s qui est definie dans le domaine (Δ) suivant :

$$(\Delta) \qquad o < \theta < t \qquad \text{avec } o < s < \sigma.$$

Si $b(s, t)$ reste bornée quels que soient s et t, comme

$$\frac{1}{\pi\tau} e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}$$

reste positive dans (Δ) on peut appliquer la formule de la moyenne pour les intégrales doubles et l'on a

$$q(\mathrm{M}, t) = \frac{\rho}{\pi} b(s', t')\mathrm{J},$$

où $o < t' < t$, où s' définit un point de σ et ou

$$\mathrm{J} = \int_0^t d\theta \int_\sigma \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4\tau}}}{\tau} ds'$$

ou en posant $u = \frac{\delta^2}{4\tau}$,

$$\mathrm{J} = \frac{1}{\nu} \int_{\frac{\delta^2}{4\nu t}}^{+\infty} \int_\sigma \frac{e^{-u}}{u} du\, ds'.$$

Si δ' est la plus courte distance de M à σ, pour une valeur de t on a

$$\frac{1}{u} < \frac{4\nu t}{\delta'^2}$$

et

$$\mathrm{J} < \frac{4\sigma t}{\delta'^2} e^{-\frac{\delta'^2}{4\nu t}},$$

et q est à l'infini d'ordre supérieur à deux qu $\frac{1}{\mathrm{R}}$. Les composantes de V sont donc d'ordre deux en $\frac{1}{\mathrm{R}}$ lorsque M s'eloigne à l'infini.

CHAPITRE IV.

CALCUL DES DENSITES SUPERFICIELLES DE LA PRESSION ET DU TOURBILLON.

1. On utilisera pour resoudre le système (S) (Ch. III, n° 7) la méthode classique des approximations successives. Multiplions par exemple les

intégrales doubles qui figurent dans ce système par λ et cherchons une solution de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} a(s,\,t) = a_0(s,\,t) + \lambda\, a_1(s,\,t) + \ldots + \lambda^n a_n(s,\,t) + \ldots, \\ b(s,\,t) = b_0(s,\,t) + \lambda\, b_1(s,\,t) + \ldots + \lambda^n b_n(s,\,t) + \ldots. \end{cases}$$

On montrera ensuite que ces deux séries sont uniformément convergentes quels que soient les valeurs de λ, de t et de s compris entre o et σ, où σ désigne la longueur du contour ; en y faisant $\lambda = 1$ on aura alors la solution unique du système (S).

Nous désignerons, pour simplifier l'écriture, à l'aide de simples produits ou puissances, des compositions de seconde espèce. Les systèmes enchaînes qui definissent les densités a et b successives s'écrivent alors :

$$(2)\qquad \begin{cases} a_0 - N_1 a_0 = f(s,\,t), \\ -\dfrac{2\rho}{\nu}\, b_0 = S_1 a_0 + g(s,\,t), \end{cases}$$

où

$$(2')\qquad \begin{cases} f(s,\,t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}_{0n} - \dfrac{d\varphi}{ds}\right), \\ g(s,\,t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{V}_{0s} + \dfrac{d\varphi'}{dn}\right); \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} a_n - N_1 a_n = \displaystyle\int_0^t S_2 b_{n-1}\, d\theta, \\ -\dfrac{2\rho}{\nu}\, b_n = S_1 a_n - \displaystyle\int_0^t N_2 b_{n-1}\, d\theta. \end{cases}$$

Les densités $a_0 \ldots a_n$ sont définies par une équation de Fredholm (F)

$$(\mathrm{F})\qquad a - N_1 a = F$$

qui a toujours le même noyau N_1 ; leur détermination revient en somme à résoudre constamment le problème de Neumann pour le domaine extérieur à σ; chacun de ces problèmes admet une solution unique et régulière à l'infini d'après l'equation (4) du Chapitre III car les fonctions φ et U sont toutes deux uniformes sur le contour. Les densités a_n et b_{n-1} etant connues, on en deduit chaque fois la valeur de b_n.

Toutes les intégrales $S_1 a_0 \ldots S_1 a_n \ldots$ sont calculees comme il a éte dit au n° 4 du Chapitre III.

2. Désignons par K le noyau résolvant de l'équation (F). Ce noyau K, ainsi que ses dérivées par rapport à s, restent bornés car on sait que l'équation

$$a - \lambda N_1 a = F$$

n'admet pas $\lambda = 1$ comme constante caractéristique. On a d'abord

$$(3) \qquad \begin{cases} a_0 = f + Kf, \\ -\dfrac{2\rho}{\nu} b_0 = S_1 a_0 + g. \end{cases}$$

Si le contour σ admet en tout point une tangente et un rayon de courbure déterminés, le terme f a un sens et admet une dérivée en s; comme il en est de même pour K la densite $a_0(s)$ admet une dérivée et le terme $S_1 a_0$ a un sens. Il en est de même pour $S_1 a_1$ ... On a en général

$$(3') \qquad \begin{cases} a_n = \displaystyle\int_0^t A_1 b_{n-1}\, d\theta, \\ b_n = \displaystyle\int_0^t B_1 b_{n-1}\, d\theta, \end{cases}$$

où A_1 et B_1 désignent deux fonctions de t-θ, de s et de s' définies par

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 = + \ (S_2 + KS_2), \\ B_1 = \dfrac{\nu}{2\rho}(N_2 - S_1 A_1). \end{cases}$$

Les noyaux S_2 et K admettent des dérivées par rapport à s qui restent bornées, $A_1(s)$ admet donc une derivée et le terme $S_1 A_1$ a un sens.

On obtient ainsi des équations récurrentes (3), (3′) qui définissent les deux densités a_n et b_n dès que l'on connait la densité tourbillonnaire b_{n-1}.

Pour interpréter les formules qui définissent A_1 et B_1 il suffit de les comparer à celles qui donnent a_0 et b_0; aux seconds membres de a_0 et b_0 on remplacera f par S_2 et g par N_2.

Les équations (3) qui définissent a_0 et b_0 donnent donc immédiatement les formules d'inversion suivantes :

$$(4') \qquad \begin{cases} + S_2 = \qquad - A_1 \ N_1 A_1, \\ + N_2 = + \dfrac{2\rho}{\nu} B_1 + S_1 A_1. \end{cases}$$

Remarquons de suite que les fonctions A_1 et B_1 ne dépendent que de la forme du contour σ; elles sont indépendantes du choix des axes de coordonnées et aussi évidemment du mouvement du solide.

3. Définissons, avant d'aller plus loin, ce qu'on pourra appeler une composition double.

Soit $F(s, t)$ une fonction définie par l'intégrale

$$F(s, t) = \int_0^t f(s, \tau)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

où τ désigne la différence t-θ; formons maintenant la fonction

$$G(s, t) = \int_0^t d\theta \int_\sigma C(s, s', \tau)\,F(s', \theta)\,ds',$$

C étant une fonction quelconque de s, s' et τ. En remplaçant $F(s', \theta)$ par sa valeur, et en utilisant la formule de Dirichlet, il vient

$$G(s, t) = \int_0^t g(s, \tau)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

où

$$g(s, \tau) = \int_\sigma ds' \left[\int_0^\tau C(s, s', \tau - u)\,f(s', u)\,du \right] \quad [1],$$

$G(st)$ a donc la même forme que $F(st)$.

L'intégrale qui définit la fonction $g(s, \tau)$ peut être considérée comme une composition double, formée d'une composition de deuxième espèce superposée à une composition de première espèce. On désignera désormais par de simples produits, soit des compositions de deuxième espèce, soit des compositions doubles.

Comme chaque composition simple, soit de première, soit de seconde espèce, est à la fois associative et distributive, il en est de même de la composition double.

4. Nous pouvons maintenant écrire facilement les expressions des densités a et b en fonction des composantes ξ', η', r' du torseur T'.

---

[1] Volterra et Pérès, *Leçons sur la Composition*, n° 9, p. 9.

Supposons d'abord, pour simplifier, que le mouvement de σ soit une simple translation, parallèle à Ox et de vitesse $\xi(t)$.

Les densités a_0 et b_0 sont évidemment de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} a_0 = \xi'(t)\, a_{11}(s), \\ b_0 = \xi'(t)\, b_{11}(s), \end{cases}$$

où a_{11} et b_{11} sont définis par

$$(6)\quad \begin{cases} a_{11} = -\alpha - K\alpha. \\ b_{11} = -\dfrac{\nu}{2\rho}(-\beta + S_1 a_{11}). \end{cases}$$

D'après les formules (3) qui donnent a_n et b_n, on a ensuite

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 = \displaystyle\int_0^t A_1 b_0\, d\theta = \int_0^t A_1 b_{11}\, \xi'(\theta)\, d\theta, \\ b_1 = \displaystyle\int_0^t B_1 b_0\, d\theta = \int_0^t B_1 b_{11}\, \xi'(\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Et, d'une façon générale, en utilisant le symbole de la composition double,

$$(7')\quad \begin{cases} a_n = \displaystyle\int_0^t A_1 B_1^{n-1} b_{11}\, \xi'(\theta)\, d\theta, \\ b_n = \displaystyle\int_0^t B_1^n\; b_{11}\, \xi'(\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Définissons maintenant deux fonctions A_2 et B_2 de s, s' et τ par les égalités

$$(8)\quad \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 + \lambda^2 A_1 B_1 + \ldots + \lambda^n A_1 B_1^{n-1} + \ldots, \\ B_2 = \lambda B_1 + \lambda^2 B_1^2 + \ldots + \lambda^n B_1^n + \ldots. \end{cases}$$

La composition double étant distributive, on peut écrire

$$A_2 = \lambda A_1 (1 + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^n B_1^n + \ldots),$$
$$B_2 = \lambda B_1 (1 + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^n B_1^n + \ldots),$$

ou, en posant encore symboliquement,

$$(8')\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda B_1} = 1 + \lambda B_1 + \ldots, \\ A_2 = \dfrac{\lambda A_1}{1-\lambda B_1}, \\ B_2 = \dfrac{\lambda B_1}{1-\lambda B_1}. \end{cases}$$

Et l'on a finalement les expressions condensées suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \xi'(t)a_{11} + \int_0^t A_2 b_{11}\,\xi'(\theta)\,d\theta, \\ b &= \xi'(t)b_{11} + \int_0^t B_2 b_{11}\,\xi'(\theta)\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Les deux noyaux résolvants A_2 et B_2 sont, comme A_1 et B_1, indépendants du choix des axes et du mouvement de σ; ils ne dépendent que de la forme du contour.

5. Notons en passant les relations qui relient les quatre noyaux $N_1 S_1 N_2 S_2$ des equations (S) aux deux noyaux résolvants A_2 et B_2.

Nous démontrerons bientôt que les séries qui définissent a et b sont uniformement convergentes, quels que soient s, t et λ. On peut donc porter dans les équations (S) les expressions trouvées pour a et b; les sêconds membres de (S) étant alors respectivement

$$-\alpha\,\xi'(t) \quad \text{et} \quad -\beta\,\xi'(t).$$

Mais les premiers termes de a et b verifient les équations (2) avec ces mêmes seconds membres, et la première equation (S) se réduit à

$$\int_0^t [(1-N_1)A_2 + \lambda S_2(1+B_2)]\,b_{11}\,\xi'(\theta)\,d\theta = 0$$

qui a lieu quels que soient b_{11} qui dépend des axes, et ξ' qui dépend du mouvement; il faut donc qu'on ait identiquement

$$(10)\qquad (1-N_1)A_2 - \lambda S_2(1+B_2) = 0.$$

En raisonnant de la même façon sur la deuxième équation (S), on a aussi

$$+\frac{\lambda\rho}{\nu}B_2 + S_1 A_2 - \lambda N_2(1+B_2) = 0 \quad (^1).$$

6. La forme de la solution générale est facile à écrire. Désignons par a_{12} et b_{12} la solution de (2) où les seconds membres sont $-\beta$ et $-\alpha$; par a_{13} et b_{13} la solution correspondant à

$$-(\beta x - \alpha y) \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y,$$

(1) En résolvant la premiere equation (3) on a immediatement l'egalité $A_1 = \dfrac{S_2}{1-N_1}$ d'ou l'on tire la première relation (4) si l'on tient compte de l'équation $K = N_1 + N_1 K$ entre N_1 et K. On verifie de même la deuxieme relation (4), les relations (4') et aussi, en tenant compte de (8'), la relation (10).

et posons

(11) $$\begin{cases} a' = a_{11}\,\xi'(t) + a_{12}\,\eta'(t) + a_{13}\,r'(t), \\ b' = b_{11}\,\xi'(t) + b_{12}\,\eta'(t) + b_{13}\,r'(t). \end{cases}$$

La solution générale pour un torseur quelconque s'écrit

(12) $$\begin{cases} a = a_{10} + a' + \displaystyle\int_0^t \mathrm{A}_2\, b'\, d\theta, \\ b = b_{10} + b' + \displaystyle\int_0^t \mathrm{B}_2\, b'\, d\theta, \end{cases}$$

où les termes a_{10} et b_{10} sont dus à $\overline{\mathrm{V}}_0$; ce sont des fonctions connues de t qui s'annulent pour $\nu = 0$.

7. Le mouvement du solide étant supposé lent, les composantes de T' sont bornées; soit ε la limite supérieure des modules de ξ', η', r'. Dans f et g, les coefficients de ξ', η', r' sont bornés d'après leur signification géométrique même, et les equations (3) montrent que a_0 et b_0 sont aussi bornes; designons par $h.\varepsilon$ la limite superieure de leurs modules. Les noyaux S_2 et N_2 étant bornés, il en est de même pour A_1 et B_1, d'après les formules (4); nous désignerons par l la limite supérieure de leurs modules, et, par suite, si σ designe la longueur du contour, les équations récurrentes (3') montrent de proche en proche que $|a_n|$ et $|b_n|$ sont inférieurs à

$$h\varepsilon \frac{(l\sigma t)^n}{n!}.$$

Il en résulte que les séries (I) qui définissent les densités a et b sont uniformément convergentes quels que soient λ, t et s compris entre o et σ. En faisant $\lambda = 1$ dans ces séries, on a donc la solution unique du système (S) du Chapitre III.

On verrait d'une façon analogue que les séries (8) qui définissent A_2 et B_2 sont holomorphes en λ quels que soient s, s' et τ.

CHAPITRE V.

PRESSION ET TOURBILLON. DYNAME DES EFFORTS. HEREDITE. CAS PARTICULIERS.

1. Les densités a et b etant déterminées, on a vu au Chapitre III, n° 3, que la pression p est définie par

(1) $$p = \rho \mathrm{V} a$$

et la fonction q par

(2)
$$q = \rho \int_0^t \mathrm{U}\, b\, d\theta.$$

Les produits représentent les compositions de deuxième espèce et les fonctions V et U sont définies au Chapitre III, n° 4. D'après les expressions de a et b en fonction des composantes du tenseur, obtenues au Chapitre IV, n° 6, on voit qu'on peut mettre p et q sous la forme

(3)
$$\left\{\begin{aligned} p &= p_1\xi'(t) + p_2\eta'(t) + p_3 r'(t) \\ &\quad + \int_0^t [\pi_1\xi'(\theta) + \pi_2\eta'(\theta) + \pi_3 r'(\theta)]\, d\theta + p_0, \\ q &= \int_0^t [k_1\xi'(\theta) + k_2\eta'(\theta) + k_3 r'(\theta)]\, d\theta + q_0. \end{aligned}\right.$$

Les termes p_0 et q_0 sont indépendants du mouvement, ils sont dus à $\overline{\mathrm{V}}_0$ et s'annulent pour $\nu = 0$.

Les fonctions p_i $(i = 1, 2, 3)$ sont celles qui ont été définies au Chapitre II, n° 3, dans le cas des liquides parfaits. Les coefficients π_i et k_i sont des fonctions de M et de τ; ils sont définis par les compositions

$$\pi_i = \rho \mathrm{V} \mathrm{A}_2 b_{1i},$$
$$k_i = \rho \mathrm{U} \mathrm{B}_2 b_{1i}.$$

A_2 et B_2 étant données par les formules (8) (Chap. IV, n° 4).

Ces coefficients sont indépendants du mouvement du solide mais ils dépendent du choix des axes.

En remarquant que p est harmonique et que q vérifie l'équation (C), on en conclut immédiatement que chaque coefficient π est harmonique et que chaque coefficient k satisfait à l'équation de la chaleur et que $k = 0$ pour $\theta = t$.

2. Calculons en passant l'intensité tourbillonnaire au sein de la masse liquide. La formule de Green et l'équation (C) donnent

$$-\int_\sigma \frac{dq}{dn}\, ds = \int_\omega \Delta q\, d\omega = \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega q\, d\omega,$$

car l'intégrale curviligne sur le cercle Σ s'annule avec $\frac{1}{\mathrm{R}}$. Mais en tenant compte de la deuxième des conditions (7) (Chap. III, n° 4), il vient

$$-\int \frac{dq}{dn}\,ds = +\,\rho \int_\sigma \frac{d\varphi'}{dn}\,ds + \rho \int_\sigma \overline{V}'_{0s}\,ds = +\,2\rho\,\omega_1\,r' + \rho \int_\sigma \overline{V}'_{0s}\,ds.$$

où ω_1 représente l'aire intérieure à σ. On en déduit, puisque $q = 2\mu(\overline{\zeta}_0 - \zeta)$,

$$(4)\qquad \int_\omega q\,d\omega = +\,2\mu\omega_1(r - r_0) + \mu \int_\sigma (\overline{V}_{0s} - V_{0s})\,ds = 2\mu \int_\sigma (\overline{\zeta}_0 - \zeta)\,ds.$$

Équation qui s'écrit aussi, en remarquant que

$$\int_\sigma (\overline{V}_{0s} - V_{0s})\,ds = 2 \int_\sigma (\overline{\zeta}_0 - \zeta_0)\,ds,$$

sous la forme

$$(4')\qquad \int_\omega (\zeta - \zeta_0)\,d\omega = \omega_1 (r_0 - r).$$

3. Les expressions (3) de p et q nous permettent maintenant de faire quelques remarques relatives à la pression et au tourbillon en un point M de la masse liquide et à l'instant t considéré. La pression est une somme de trois termes : le terme p_0 est dû à $\overline{V}_0$ et il s'annule pour $\nu = 0$; le terme

$$\xi' p_1 + \eta' p_2 + r' p_3$$

n'est pas autre chose que la pression calculée en regardant le liquide comme parfait; ce terme ne dépend que du mouvement actuel du solide. Le troisième terme est une intégrale par rapport au temps d'une expression linéaire et homogène en $\xi' \eta' r'$ dont les coefficients sont des fonctions de M et de τ. Ce terme dépend de toutes les valeurs que prennent de l'instant initial à l'instant actuel les trois composantes du torseur $T'(\xi', \eta', r')$; il s'annule pour $\nu = 0$; il est dû essentiellement à la viscosité du liquide.

Le tourbillon ζ est une somme de deux termes; le premier $\overline{\zeta}_0 - \dfrac{q_0}{2\mu}$ est le tourbillon dû au mouvement initial du liquide; pour $\nu = 0$ ce terme se réduit au tourbillon initial ζ_0. On a vu que ζ_0 est nul lorsque le liquide part du repos (Chap. I, n° 15). Le deuxième terme est analogue au deuxième terme de la pression. Le tourbillon n'a pas de terme dépendant uniquement du mouvement actuel.

En résumé l'etat du liquide en un point M et à l'instant t ne dépend pas seulement du mouvement actuel du solide mais de tout le mouvement que le solide a effectué depuis l'instant initial jusqu'à l'instant actuel. On peut dire que le pression p et le tourbillon ζ gardent à l'instant actuel quelque trace de toute l'histoire du vecteur T'. On est en présence d'un phénomène d'hérédité linéaire (¹) et les coefficients π_t et k_t peuvent s'appeler les coefficients d'herédité.

Ces coefficients ne dépendent de t et de θ que par la différence $t-\theta$. Cette hérédite verifie le Principe du Cycle fermé (²). Il en résulte immédiatement qu'il y a invariabilité de l'hérédité; en d'autres termes, si le torseur T qui définit le mouvement du solide est périodique, l'état du liquide au point M, caracterisé par p et q, est aussi périodique avec la même période que celle du torseur (³).

Rappelons enfin que tout phenomène héréditaire suppose le postulat de la dissipation de l'action héréditaire, ce qui signifie, dans le problème actuel, qu'on peut se contenter de calculer les termes héréditaires, dans un intervalle de temps $t-t_1$ assez grand, mais fixe (⁴). Ceci résulterait d'ailleurs de l'étude des coefficients π_t et k_t, considérés comme fonctions de τ.

4. Étudions maintenant les trois composantes du dyname D des efforts que le liquide exerce sur le solide en mouvement. On reconnaît immédiatement que les formules classiques sont ici applicables (⁵). La composante D_1 qui représente la résistance parallèle à Ox a pour expression

$$D_1 = -\int_\sigma \alpha p \, ds + \mu \int_\omega \Delta u \, d\omega.$$

L'intégrale de surface se transforme d'après la première équation (A)

(¹) Volterra, *Fonctions des Lignes*, Chap. VI, n° 5.
(²) Volterra, *loc. cit.*, p. 70; Chap. VII. p. 107, n° 6.
(³) Volterra, *loc. cit.*, p. 70; Chap. VII, p. 105, nos 4 et 5.
(⁴) Volterra, *loc. cit.*, p. 70; Chap. VII, p. 102, n° 2.
(⁵) Appell, *loc. cit.*, Chap. XXX et Chap. XXXVIII.

(Chap. I) et de la première équation (I) dû Chapitre III et l'on a

$$D_1 = -\int_\sigma \alpha p\, ds - \int_\omega \left(\frac{\partial q}{\partial y} + \rho \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t}\right) d\omega.$$

En tenant compte de l'ordre de q à l'infini, la première formule de Green donne finalement pour D_1

(D)

$$D_1 = -\int_\sigma (\alpha p - \beta q)\, ds - \rho \int_\omega \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t}\, d\omega.$$

On obtient de même :

$$D_2 = -\int (\beta p + \alpha q)\, ds - \rho \int_\omega \frac{\partial \overline{v}_0}{\partial t}\, d\omega,$$

$$D_3 = -\int_\sigma [(\beta x - \alpha y)p + (\alpha x + \beta y) q]\, ds - 2\int_\omega q\, d\omega$$
$$+ \rho \int_\omega \left(x \frac{\partial \overline{v}_0}{\partial t} - y \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t}\right) d\omega.$$

D'après le Chapitre III, n° 2, on voit que les intégrales doubles dépendant de $\overline{V}_0$ qui figurent dans D ont un sens.

Ces integrales peuvent se transformer en remarquant que les composantes de $\overline{V}_0$ verifient l'equation (C) de la chaleur et en utilisant la formule de Green. On obtient ainsi, en tenant compte de l'ordre de $\overline{V}_0$ à l'infini,

$$\int_\omega \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t}\, d\omega = \nu \int_\sigma \frac{d\overline{u}_0}{dn}\, ds,$$

$$\int_\omega \frac{\partial \overline{v}_0}{\partial t}\, d\omega = \nu \int_\sigma \frac{d\overline{v}_0}{dn}\, ds,$$

$$\int_\omega \left(x \frac{\partial \overline{v}_0}{\partial t} - y \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial t}\right) d\omega = \nu \int_\sigma \left(x \frac{d\overline{v}_0}{dn} - y \frac{d\overline{u}_0}{dn}\right) ds + 2\nu \int_\omega \zeta_0\, d\omega.$$

5. On peut donc dire que le dyname D est la superposition de trois dynames :

1° Un dyname D′ dû à la vitesse résiduelle $\overline{V}_0$ qui s'annule pour $\nu = 0$ et qui représente à l'instant t un residu d'effort dû à la vitesse initiale V_0 du liquide.

D'après l'étude de $\overline{V}_0$ (Chap. III, n° 2), on voit que la valeur asymptotique de ce dyname est zéro pour t infini.

2° Un dyname D'' dû à la première partie de la pression p et qui n'est autre que le dyname des liquides parfaits; on sait qu'il dérive d'une forme quadratique en ξ', η' et r'; il est dû au mouvement actuel du liquide.

3° Un dyname D''' dû au tourbillon et à la pression héréditaire; il est dû à la viscosité du liquide et il s'annule pour $\nu = 0$.

On voit que ces trois composantes sont, symboliquement, trois formes linéaires en ξ', η', r', dont les coefficients, fonctions de τ seulement, sont aisés à former.

Les trois composantes de $D'' + D'''$ ont donc des formes analogues à celles des composantes de l'induction et de la force magnétique dans l'hypothèse de l'herédité electromagnétique ([1]).

6. On peut écrire les trois composantes de $D'' + D'''$ plus brièvement en adoptant une notation de Volterra ([2]). Posons, en général,

$$D_{ik} f = A_{ik} f(t) + \int_0^t \alpha_{ik}(\tau) f(\theta)\, d\theta,$$

où les A sont des constantes et les α des fonctions de τ seulement. Les trois composantes de D s'ecrivent alors

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{\begin{aligned} D_1 &= D_{11}\xi' + D_{12}\eta' + D_{13}r' + D_{10}, \\ D_2 &= D_{21}\xi' + D_{22}\eta' + D_{23}r' + D_{20}, \\ D_3 &= D_{31}\xi' + D_{32}\eta' + D_{33}r' + D_{30}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces expressions, D_{10}, D_{20}, D_{30} sont les trois composantes de D'; les A_{ik} sont les six constantes définies au Chapitre II, n° 3; quant aux neuf fonctions $\alpha_{ik}(\tau)$, elles se forment aisément, par composition, à l'aide des coefficients des tableaux suivants :

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta x - \alpha y \\ -\beta & \alpha & \alpha x + \beta y \end{vmatrix}.$$

([1]) VOLTERRA, *loc. cit.*, p. 70; Chap. VII, p. 116, n° 11.

([2]) VOLTERRA, *loc. cit.*, p. 70; Chap. VIII, p. 121, n° 1.

Ces expressions conduisent à des remarques simples :

1° Les coefficients d'hérédité etant fonction de τ seulement, il y a invariabilité de l'hérédité, et en reprenant ce qui a été dit au n° 3, on voit que, si le torseur T est périodique, le dyname $D'' + D'''$ est aussi périodique et avec la même période que celle de T. Ce fait a été démontré directement par Boussinesq ([1]) dans le cas où le solide est une sphère ou un cylindre de révolution animé d'une translation périodique.

2° Il y a dissipation de l'action héréditaire; par suite, dans les termes intégraux de $D'' + D'''$, on peut prendre comme limite inférieure des intégrales $t - t_1$ où t_1 est assez grand, mais fixe.

3° Si l'on change le signe d'une composante de T, il faut dans D changer le signe du terme correspondant. Dans ce cas, le dyname D' varie, mais il ne se change en un dyname opposé que si le liquide part du repos (Chap. I, n° 15). Les dynames D correspondant à deux torseurs opposés ne sont donc pas opposés en géneral; ils ne le sont que lorsque le liquide est primitivement au repos.

7. Examinons le cas où le contour admet des symétries.

I. Supposons d'abord que le contour σ admette un seul axe de symétrie que nous prendrons pour axe Ox. Dans ce cas particulier, les composantes de D se simplifient.

Lorsque le mouvement est une simple translation parallèle à Ox de vitesse ξ, il est évident, par raison de symétrie, que le dyname $D'' + D'''$ se réduit à une simple résistance portée par Ox, et les deux termes $D_{21}.\xi'$ et $D_{31}.\xi'$ disparaissent. Ce premier résultat découle immédiatement des calculs des coefficients p_i, π_i et k_i; on verrait facilement qu'en deux points de σ, symétriques par rapport à Ox, les valeurs de p sont égales et que celles de q sont opposées. Si, maintenant, le mouvement de σ est une translation parallèle à Oy et de vitesse η, la résistance portée par Ox ne change pas évidemment si l'on change η en $-\eta$; or, $D_{12}.\eta'$ doit changer de signe; il faut donc que ce terme soit nul. On verrait que le même raisonnement, dans le cas de la rota-

([1]) Boussinesq, *Théorie de la Chaleur*, t. II, Note I.

tion r, autour de o, entraîne que $D_{13}r'$ est nul. En résumé, dans ce premier cas particulier, les composantes de D se réduisent à

$$D_1 = D_{11}\xi' + D_{10}, \qquad D_2 = D_{22}\eta' + D_{23} r' + D_{20}, \qquad D_3 = D_{32}\eta' + D_{33} r' + D_{30}.$$

II. D'une façon plus particulière, supposons que σ admette les deux axes rectangulaires Ox et Oy comme axes de symétrie; le raisonnement précédent s'applique à l'axe Oy comme à l'axe Ox, et, par suite, les termes $D_{23}r'$ et $D_{32}\eta'$ disparaissent.

Les composantes de D deviennent

$$D_1 = D_{11}\xi' + D_{10}, \qquad D_2 = D_{22}\eta' + D_{20}, \qquad D_3 = D_{33} r' + D_{30}.$$

On peut dire ici que les trois composantes de D sont indépendantes.

CHAPITRE VI.

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT. MOUVEMENT ASYMPTOTIQUE.

1. Les équations du mouvement lent du solide sont les équations (M) du Chapitre II, n° 8, mais où D_1, D_2, D_3 ont les expressions (D) établies au Chapitre V, n° 6. Elles s'écrivent sous la forme symbolique

$$(\mathrm{M}') \qquad \begin{cases} (D_{11} - M_1)\xi' + D_{12}\eta' + D_{13} r' = X - D_{10}, \\ D_{21}\xi' + (D_{22} - M_1)\eta' + D_{23} r' = Y - D_{20}, \\ D_{31}\xi' + D_{32}\eta' + (D_{33} - M_1) r' = N - D_{30}, \end{cases}$$

où X, Y, N sont les trois composantes du dyname $\mathcal{D}$ des forces appliquées au solide.

2. Si X, Y, N sont données en fonction du temps, les équations (M′) forment un système de trois équations intégrales lineaires de deuxième espèce du type de Volterra en $\xi'(t)$, $\eta'(t)$, $r'(t)$, car les trois composantes du dyname (D′) sont trois fonctions connues du temps.

Dans ces équations, les noyaux sont des fonctions de $t - \theta$ seulement; ce sont, par suite, des fonctions permutables de première espèce. On peut donc, dans tous les calculs, regarder les coefficients de ξ', η', r' pes équations (M′) comme de véritables coefficients algébriques et considérer leurs itérations et leurs compositions comme des opérations de multiplication [1]. En un mot, les équations (M′) se résolvent, dans ce cas, symboliquement à l'aide des formules de Cramer. On sait que la solution s'exprime à l'aide de séries qui sont toujours convergentes et très rapidement convergentes et qu'on peut les employer facilement dans la pratique [2]. Il peut arriver que le dyname appliqué $\mathcal{O}$ soit nul.

Ce cas se présente lorsque le mouvement de σ est horizontal, la seule force donnée étant le poids du cylindre; dans ce cas,

$$X = Y = N = 0.$$

On peut dire, avec Volterra, qu'il y a alors mouvement spontané.

Si la section σ a un axe de symétrie, forme particulière I, Chap. V, n° 7, la première équation (M′) définit $\xi(t)$; les deux dernières donnent, indépendamment de ξ, les composantes q et r.

Dans le cas où σ a deux axes de symétrie rectangulaires, forme II, les équations (M′) sont indépendantes. Ce sera, en particulier, le cas du cercle.

3. Supposons maintenant, que le plan du mouvement soit un plan vertical, le dyname appliqué $\mathcal{O}$ étant seulement le poids du solide.

Si $\alpha(t)$ désigne l'angle que fait Ox avec la verticale ascendante, dans les équations (M′) on a

$$X = -\Pi\cos\alpha, \qquad Y = -\Pi\sin\alpha, \qquad N = 0,$$

où

$$\Pi = M_1 g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

est le poids apparent, dans le liquide, du cylindre de hauteur unité. Dans ce cas, le système (M′) devient un système intégro-différentiel de Volterra qui n'est plus linéaire par rapport à α. Comme il est encore linéaire en ξ' et η', on peut, comme dans un système algébrique, éliminer ces deux fonctions et former ainsi l'équation en $\alpha(t)$.

---

[1] Volterra, *Leçons sur les fonctions de Lignes*, Chap. IX, nos 6 et 7.

[2] Volterra, *loc. cit.*, p. 76; Chap. IX, nos 8, 9 et 10.

On reconnaît aisément que cette équation peut se mettre sous la forme générale

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \int_0^t \mathrm{K}(\tau)\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}\,d\theta = \mathrm{A}\sin\alpha + \int_0^t [\mathrm{H}_1(\tau)\sin\alpha(\theta) + \mathrm{H}_2(\tau)\cos\alpha(\theta)]\,d\theta + f(t).$$

C'est l'équation du pendule, généralisée dans la théorie de l'hérédité. Cette équation, pour $\nu = 0$, doit redonner l'équation ordinaire du pendule (P) qui est celle des liquides parfaits; il faut donc que A soit une constante et que les noyaux K, H_1 et H_2 s'annulent pour $\nu = 0$, c'est-à-dire pour $\theta = t$.

En comparant les équations obtenues en dérivant par rapport à t les équations (P) et (P′), on verrait de même que K'_0 s'annule pour $\theta = t$. De même, pour $\nu = 0$, la fonction connue $f(t)$ doit aussi s'annuler, ce qu'on vérifie d'ailleurs en remarquant que $f(t)$ est due au dyname D′, lequel disparaît avec ν. Remarquons aussi que, d'après les expressions de X et Y, les quantités A, H_1 et H_2 contiennent en facteur le poids apparent et que, de plus, d'après l'origine de $f(t)$, cette fonction est de l'ordre des composantes du vecteur $\overline{\mathrm{V}}_0$, donc aussi de l'ordre de celles de V_0, ou bien de l'ordre de T_0 et de la vitesse primitive V'_0 (Chap. III, n° 2).

En un mot, le second membre de (P′) reste faible s'il en est ainsi pour Π et pour V_0.

4. On peut transformer un peu l'équation (P′); une intégration par parties donne d'abord, puisque $\mathrm{K}(0) = 0$,

$$\int_0^t \mathrm{K}(\tau)\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}\,d\theta = -r_0\mathrm{K}(t) - \nu\int_0^t \mathrm{K}'_0(\tau)r(\theta)\,d\theta.$$

En portant dans (P) et en intégrant cette équation de o à t, on obtient, d'après la formule de Dirichlet, une équation de la forme

$$(1)\ r(t) = \int_0^t \mathrm{K}_1(\tau)r(\theta)\,d\theta + \int_0^t [\mathrm{A}_1(\tau)\sin\alpha(\theta) + \mathrm{A}_2(\tau)\cos\alpha(\theta)]\,d\theta + g(t)$$

où

$$g(t) = \int_0^t [f(\theta) + r_0 K(\theta)]\, d\theta + r_0,$$

(I) est une équation intégro-différentielle de Volterra non linéaire [1]. Dans cette équation les noyaux A_1 et A_2 contiennent Π en facteur, et le module de $g(t)$ reste faible s'il en est ainsi de $|r_0|$ et des composantes de V_0.

On peut encore résoudre (I) par approximations successives en multipliant les intégrales qui figurent au second membre par λ et en posant

$$r(t) = r_0(t) + \lambda r_1(t) + \ldots + \lambda^n r_n(t) + \ldots.$$

Si les noyaux K_1, A_1, A_2 sont bornés, on reconnait, en raisonnant comme le fait Volterra [2], que la méthode des approximations successives s'applique ici, car les modules

$$|\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1| \quad \text{et} \quad |\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1|$$

sont tous deux inférieurs à $|\alpha_2 - \alpha_1|$ pour deux arcs quelconques α_1 et α_2; $r(t)$ une fois déterminée, ξ et η se déduiront des deux premières équations (M′) et l'on reconnaitra, d'après ce qui a été dit, que les trois composantes du torseur T restent faibles pourvu qu'il en soit ainsi pour le poids apparent Π, pour les composantes du torseur initial T_0 et pour celles de la vitesse initiale V_0 du liquide.

5. Si l'on admet que les oscillations peuvent rester faibles, on peut prendre

$$X = -\Pi, \qquad Y = -\Pi\alpha, \qquad N = 0,$$

et l'équation (P′) s'écrit plus simplement sous la forme

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \int_0^t K(\tau)\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}\, d\theta = A\alpha(t) + \int_0^t H(\tau)\alpha(\theta)\, d\theta + f(t). \tag{2}$$

---

(1) Volterra, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. II.
(2) Volterra, *loc. cit.*, Chap. II, n° 4, p. 89.

En transformant le terme

$$\int_0^t K(\tau)\frac{d^2\alpha}{d\theta^2}\,d\theta,$$

par deux intégrations par parties, en remarquant que la derivée $K'_\theta(\tau)$ s'annule pour $\theta = t$ et que A peut être regardé comme negative, l'equation (2) peut s'ecrire

$$(2') \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + m^2\left[\alpha(t) + \int_0^t \varphi(t-\theta)\alpha(\theta)\,d\theta\right] = f(t),$$

équation etudiée par Volterra (¹) dans le cas où il n'y a pas de second membre.

En suivant la methode de Volterra, integrons cette équation deux fois par rapport à t et designons par $F(t)$ la fonction qui s'annule, ainsi que sa derivee pour $t = 0$ et dont la dérivee seconde est égale à $f(t)$; l'equation (2′) devient

$$(2'') \qquad \alpha(t) + m^2\int_0^t \Phi(t-\theta)\alpha(\theta)\,d\theta = F(t) + r_0 t + \alpha_0$$

où

$$\Phi(t-\theta) = t-\theta + \int_0^t du\int_0^u \varphi(\theta'-\theta)\,d\theta'.$$

Si $S(t-\theta, m^2)$ est le noyau resolvant de l'equation integrale (2″), la solution de cette équation s'ecrit

$$\alpha(t) = \alpha_0 S_2(t) + r_0 S_1(t) + F(t) + \int_0^t S(t-\theta, m^2)F(\theta)\,d\theta,$$

en posant avec Volterra

$$S_1(t) = t + \int_0^t \theta S(t-\theta, m^2)\,d\theta,$$

$$S_2(t) = 1 + \int_0^t S(t-\theta, m^2)\,d\theta.$$

Mais

$$F(t) = \int_0^t (t-\theta)f(\theta)\,d\theta,$$

(¹) VOLTERRA, *Fonctions de lignes*, Chap. VI, nº 9, p. 96.

et d'après la formule de Dirichlet, on a

$$\int_0^t S(t-\theta)F(\theta)\,d\theta = \int_0^t f(\theta)\,d\theta \left[\int_0^{t-\theta} u S(t-\theta-u)\,du\right]$$

et finalement la solution s'écrit

$$\alpha(t) = \alpha_0 S_2(t, m^2) + r_0 S_1(t, m^2) + \int_0^t S_1(t-\theta, m^2) f(\theta)\,d\theta,$$

solution analogue à celle de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m^2\alpha(t) = f(t),$$

les fonctions S_1 et S_2 remplaçant respectivement $\frac{1}{m}\sin mt$ et $\cos mt$. Il va sans dire que l'équation (2) peut être traitée comme l'équation (P') au n° 4.

6. Remarquons enfin que si le contour σ a la forme particulière I, l'équation en $\alpha(t)$ a encore la forme (P'). Dans le cas II l'équation en r est la même que dans le cas du mouvement horizontal; les deux premières equations (M') définissent ensuite ξ et η.

Dans le cas tout particulier où σ est un cercle, on choisira des axes mobiles parallèles aux axes fixes, et le problème se traitera comme dans le cas du mouvement horizontal. Les trois équations du mouvement sont alors indépendantes.

7. Calculons la dérivée par rapport au temps de la dissipation d'énergie dans le cas d'un mouvement spontané.

Les équations générales du mouvement liquide peuvent s'écrire

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial y} = -\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} = -\rho\dfrac{\partial v}{\partial t}, \end{cases}$$

où N_1, N_2, T_3 sont les composantes de l'effort rapporté à l'unité de surface (¹). Considérons l'espace liquide ω limité par σ et par le

(¹) Appell. *loc. cit.*, Chap. XXX, n° 616, p. 130.

cercle Σ de centre O et de rayon R et désignons par E la dissipation d'énergie dans ω.

La dérivée de E par rapport au temps a pour expression

$$\frac{dE}{dt} = -\int_\omega \left[N_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + N_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t} + T_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} \right) \right] d\omega \quad (^1).$$

Cette expression s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \int_\omega \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) \right] d\omega \\ & - \int_\omega \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\partial u}{\partial t} + T \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_3 \frac{\partial u}{\partial t} + N_2 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] d\omega. \end{aligned}$$

La première ligne se transforme d'après les équations générales (3), et la seconde ligne à l'aide de la première formule de Green; si R devient infini on a

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\rho \int_\omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] d\omega \\ & - \int_\sigma \left[\alpha \left(N_1 \frac{\partial u}{\partial t} + T_3 \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \beta \left(T_3 \frac{\partial u}{\partial t} + N_2 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

où ω désigne maintenant toute la surface occupée par le liquide, car l'intégrale curviligne étendue à Σ tend vers zero avec $\frac{1}{R}$. Nous désignerons par J l'intégrale étendue à σ qui figure dans $\frac{dE}{dt}$; d'après les valeurs de u et v sur σ, l'intégrale J s'écrit

$$\begin{aligned} J = & \xi' \int_\sigma (\alpha N_1 + \beta T_3)\, ds + \eta' \int_\sigma (\alpha T_3 + \beta N_2)\, ds \\ & + r' \int_\sigma [\alpha(x T_3 - y N_1) + \beta(x N_2 - y T_3)]\, ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$J = -(\xi' D_1 + \eta' D_2 + r' D_3).$$

Supposons maintenant qu'aucune force donnée n'agisse sur le

---

(1) Lamb, *loc. cit.*, Chap. XI, n° 297, p. 537.

solide σ; d'après les équations (M'), J s'écrit

$$J = -M_1(\xi'^2 + \eta'^2) - I_1 r'^2$$

et

$$J = -2S,$$

S désignant l'énergie d'accélération du solide.

On voit en résumé que

$$-\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}$$

est égal à l'énergie d'accelération du système total, formé par l'ensemble du solide et de la masse liquide.

8. Par suite, si aucune force donnée n'agit sur le solide, c'est-à-dire si le mouvement est spontané, la derivée $\frac{dE}{dt}$ est constamment négative. La perte d'energie par frottement ne cesse de décroître que si, à la limite, on a

$$\xi' = \eta' = r' = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Le mouvement du solide tend à devenir uniforme, et celui du liquide à devenir permanent. Ce type de mouvement asymptotique est par consequent stable aussi bien qu'unique (¹).

Cherchons à determiner les limites ξ_1, η_1, r_1 de ξ, η, r pour t infini. Dans le dyname des efforts D les termes en ξ' ont alors la forme

$$a\xi'(t) + \int_0^t \varphi(t-\theta)\xi'(\theta)\,d\theta,$$

où a est une constante et où $\varphi(t-\theta)$ est un coefficient d'hérédité. Nous avons vu que la fonction $\varphi(t)$ s'annule pour $t = 0$; d'après le principe de la dissipation de l'heredité elle tend vers zéro pour t infini. Nous désignerons dans ce qui suit par t_1 une valeur fixe de t pour laquelle $\varphi(t_1)$ n'est pas nulle. Le terme precédent en ξ' s'ecrit, après

(¹) Lamb, *loc. cit.*, Chap. VI, nº 2, p. 537.

une intégration par parties,

$$a\xi'(t)+\varphi(0)\xi(t)-\xi_0\varphi(t)+\int_0^t \varphi'_\tau(\tau)\xi'(\theta)\,d\theta \qquad \text{où} \quad \tau=t-\theta.$$

D'après le principe de la dissipation de l'hérédité, on peut remplacer l'intégrale par l'intégrale équivalente

$$\int_{t-t_1}^{t} \varphi'_\tau(\tau)\xi(\theta)\,d'\theta,$$

où t_1 est l'instant défini précédemment.

Comme

$$\lim_{t=\infty}\xi'=0,$$

le terme en ξ' dans D se réduit à la limite à

$$\lim_{t=\infty}\int_{t-t_1}^{t} \varphi'_\tau(\tau)\xi(\theta)\,d\theta$$

ou en appliquant la deuxième formule de la moyenne

$$[\varphi(t_1)-\varphi(t-t')]\lim_{t=\infty}\xi(t-t_1)+[\varphi(t-t')-\varphi(0)]\lim_{t=\infty}\xi(t)$$

où t' désigne un instant compris entre 0 et t_1.

Mais

$$\lim\xi(t-t_1)=\lim\xi(t)=\xi_1$$

et il reste

$$\xi_1\varphi(t_1)$$

où $\varphi(t_1)$ n'est pas nulle.

Cela posé, on a vu au Chapitre V, n° 5, que la limite du dyname D' est nulle et par suite les équations (M') deviennent à la limite un système linéaire et homogène en ξ_1, η_1, r_1 dont le déterminant peut toujours être supposé différent de zéro et finalement on a

$$\xi_1=\eta_1=r_1=0.$$

Dans le cas du mouvement spontané, le solide tend donc à s'arrêter. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par Volterra (¹).

(¹) VOLTERRA, *Mecanique des phénomènes heréditaires* (*Journ. de Math.*, t. 7, fasc. 3, vol. 1, 1928).

CHAPITRE VII.

CAS DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

On sait qu'il suffit d'étudier le problème dans le cas où le mouvement du cercle est, soit une translation parallèle à un axe fixe, soit une rotation autour du centre. Nous désignerons encore dans ce chapitre par R la distance OM, O étant le centre du cercle, et par a le rayon.

1. Nous étudierons la vitesse $\overline{V}_0$ définie au Chapitre III, n° 2, en supposant que le liquide soit primitivement au repos et qu'il soit mis brusquement en mouvement.

Supposons, en premier lieu, que le mouvement initial de σ soit une translation parallèle à Ox et de vitesse ξ_0; la vitesse initiale V_0 du liquide est définie par les équations (11) et (12) du Chapitre I, n° 15. La fonction harmonique P_0 vérifie ici la condition

$$\frac{dP_0}{dn} = -\xi_0 \alpha,$$

où α est le cosinus de l'angle que fait le rayon du cercle avec Ox. On prend donc pour P_0

$$P_0 = -\xi_0 a^2 \frac{x}{R^2},$$

d'où, pour les composantes de la vitesse V_0,

$$u_0 = \frac{\xi_0 a^2}{R^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{R^2}\right),$$

$$v_0 = -2\xi_0 a^2 \frac{xy}{R^4}.$$

Formons maintenant le vecteur $\overline{V}_0$; sa composante u_0 a pour expression

$$\overline{u}_0 = \frac{\xi_0 a^2}{4\pi\nu t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\lambda')^2}{4\nu t}} \left|\frac{\lambda'^2-\lambda^2}{(\lambda^2+\lambda'^2)^2}\right| d\lambda\, d\lambda'$$

et l'expression de $\overline{v}_0$ est analogue.

On voit ainsi que $\overline{V}_0$ est négligeable si le temps t est très grand, c'est-à-dire si l'instant initial est $t_0 = -\infty$, ou bien si, t étant fini, le coefficient

$$\frac{\xi_0 a^2}{\nu}$$

est négligeable, ce qui revient à dire que la vitesse initiale du cylindre et son rayon sont faibles et que le liquide est très visqueux.

On supposera désormais que dans le cas de la translation on peut négliger le vecteur V_0.

Dans le cas où le mouvement initial du cercle σ est une rotation autour de son centre, comme $\beta x - \alpha y$ est nul en tout point de σ, la fonction harmonique P_0 est nulle et dans ce cas le vecteur $\overline{V}_0$ est nul.

2. Supposons que le mouvement du cercle soit d'abord une simple translation parallele à Ox et de vitesse $\xi(t)$. Les composantes de V sont donnees par les formules (1) du Chapitre III, n° 1. Prenons pour la fonction harmonique P une expression de la forme

$$P = \frac{x}{R^2}\alpha(t),$$

où $\alpha(t)$ est une fonction de t, qu'il faut déterminer. Prenons pour Q une forme analogue

$$Q = \frac{y}{R^2} Q_1(R, t),$$

Q devant satisfaire à l'équation (C) de la chaleur on doit avoir

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial Q_1}{\partial R} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial Q_1}{\partial t},$$

équation qui est satisfaite en posant

$$Q_1 = \int_0^t f(\theta) e^{-\frac{R^2}{4\nu\tau}} d\theta,$$

τ désignant, dans ce chapitre, la difference $t - \theta$.

En écrivant que sur le cercle on a $u = \xi(t)$ et $v = 0$, on obtient en negligeant $\overline{V}_0$ les deux conditions suivantes :

$$a\frac{\partial Q_1}{\partial R_{R=a}} - 2Q_1(a, t) - 2\alpha(t) = 0,$$

$$Q_1(a, t) + \alpha(t) = a^2\xi(t),$$

d'où l'on tire
$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_1}{\partial R_{R=a}} = 2a\xi(t), \\ \alpha(t) \quad = a^2\xi(t) - Q_1(a, t). \end{cases}$$

La première de ces deux dernières conditions definit $f(t)$ à l'aide d'une equation integrale de Volterra de première espèce

$$\text{(B)} \qquad \int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}}{\tau} f(\theta)\, d\theta = -4\nu\xi(t).$$

Le dyname D se réduit ici à $D_{11}\xi'$. Le terme dû à la pression a pour expression

$$-\pi a^2\xi'(t) + \pi\frac{\partial Q_1(a, t)}{\partial t}$$

et le terme dû au tourbillon s'ecrit, en tenant compte de l'équation en $Q_1(Rt)$, sous la forme simple

$$\pi\frac{\partial Q_1(a, t)}{\partial t}.$$

On trouve ainsi, pour la résistance que le liquide oppose au mouvement du cylindre,

$$\text{(D)} \qquad D = -M\xi'(t) + \frac{M}{2\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}}{\tau^2} f(\theta)\, d\theta,$$

où M désigne la masse du liquide deplacé par le cylindre de hauteur unité.

Pour $\nu = 0$ le deuxième terme de D s'annule et le premier est le terme de Du Buat (Chap. II, n° 10).

4. Si dans l'equation (B) et dans l'expression de D, on prend pour origine du temps $t = -\infty$ et si l'on pose

$$\tau = \frac{a^2}{2\alpha^2},$$

les équations précédentes (B) et (D) s'écrivent

$$\int_0^{\infty} f\left(t-\frac{a^2}{2\nu\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}=-2\nu\xi(t),$$

$$D=-M\xi'(t)+2\pi\int_0^{\infty} f\left(t-\frac{a^2}{2\nu\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha\,d\alpha.$$

Ce sont les résultats obtenus par Boussinesq (1).

5. Pour résoudre l'équation (B) du n° 2, on utilisera la méthode suivie par MM. Volterra et Pérès (2) pour établir la formule de Whittaker. Soit

$$F(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n,$$

un polynome entier en x et $\alpha_1\ldots\alpha_n$ ses n racines supposées distinctes. On a l'identité algébrique

$$\frac{1}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{F'(\alpha_i)(x-\alpha_i)},$$

ou en changeant x en $\frac{\lambda}{z}$

$$\frac{1}{b_0+b_1\frac{\lambda}{z}+\ldots+b_n\left(\frac{\lambda}{z}\right)^n}=\sum_1^n\frac{1}{\lambda F'(\alpha_i)}\frac{z}{1-\frac{\alpha_i}{\lambda}z}.$$

Passons au champ de la Composition de première espèce et remplaçons x par $\overset{*}{1}$; on a

$$\left[F\left(\overset{*}{1}{}^{-1}\right)\right]^{-1}=\left(b_0+b_1\lambda\overset{*}{1}{}^{-1}+\ldots+b_n\lambda^n\overset{*}{1}{}^{-n}\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_1^n\frac{1}{F'(\alpha_i)}\frac{\overset{*}{1}}{\overset{*}{1}{}^0-\frac{\alpha_i}{\lambda}\overset{*}{1}}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_1^n\frac{1}{F'(\alpha_i)}e^{\frac{\alpha_i}{\lambda}t}.$$

Mais l'équation (B) s'écrit en posant $\lambda=\frac{a^2}{4\nu}$, et en désignant tou-

(1) Boussinesq, *loc. cit.*, t. II, Note I, p. 199 à 264.

(2) Volterra et Pérès, *Leçons sur la Composition*, Chap. VII, p. 112 à 116.

jours $t - \theta$ par τ :

$$\int_0^t \frac{e^{-\frac{\lambda}{\tau}}}{\tau} f(\theta)\, d\theta = -4\nu\xi(t).$$

Développons le noyau

$$K(\tau) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\tau}}}{\tau}$$

en série

$$K(\tau) = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\lambda}{\tau} + \frac{\lambda^2}{2!\,\tau^2} - \frac{\lambda^3}{3!\,\tau^3} + \ldots\right),$$

il s'écrit

$$K(\tau) = \overset{*}{1}{}^0 + \frac{\lambda\, \overset{*}{1}{}^{-1}}{(1!)^2} + \frac{\lambda^2\, \overset{*}{1}{}^{-2}}{(2!)^2} + \frac{\lambda^3\, \overset{*}{1}{}^{-3}}{(3!)^2} + \ldots.$$

Le polynome $F(x)$ est donc remplacé ici par la série entière.

$$G(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \ldots$$

et la solution de (B) s'écrit symboliquement

$$f(t) = -4\nu\left[G\left(\overset{*}{1}{}^{-1}\right)\right]^{-1} . \overset{*}{\xi},$$

c'est-à-dire, en prenant la limite de $[F(\overset{*}{1}{}^{-1})]^{-1}$ pour n infini,

$$f(t) = -\left(\frac{4\nu}{a}\right)^2 \int_0^t H(\tau)\xi(\theta)\, d\theta,$$

où

$$H(\tau) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{4\nu}{a^2}\alpha_n \tau}}{G'(\alpha_n)},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant les racines de l'equation transcendante $G(x) = 0$. Mais

$$G(x) = J_0(2i\sqrt{x}),$$

J_0 étant la fonction de Bessel d'ordre 0 et si β_n désigne une des racines positives de $J_0(x) = 0$, on a $\alpha_n = -\frac{\beta_n^2}{4}$ et les nombres α_n sont donc réels, distincts et négatifs [1]. On a de plus

$$G'(\alpha_n) = -\frac{2}{\beta_n} J'_0(\beta_n)$$

et finalement

$$H(\tau) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta_n e^{-\frac{\nu\beta_n^2}{a^2}\tau}}{J'_0(\beta_n)},$$

β_n étant racine de $J_0(x) = 0$.

Les valeurs successives de $J'_0(\beta_n)$ sont alternées, la première valeur est negative, cela résulte en effet de ce que les racines des deux fonctions de Bessel d'ordres consécutifs sont entrelacées [2].

6. Il est facile de montrer maintenant qu'en supposant $\xi(t)$ bornée, la fonction $f(t)$, définie precedemment, a un sens. La série $H(\tau)$ est alternée; d'autre part pour n très grand

$$|J'_0(\beta_n)| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_n}} \quad [3]$$

et β_n croît indefiniment comme $n\pi - \frac{\pi}{4}$ pour n infini [4]. Pour une valeur donnee positive de τ, la valeur absolue du terme général de $H(\tau)$ tend vers zéro, si n devient infini, comme

$$n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2\nu}{a^2}\tau n^2}$$

et cette valeur absolue décroît dès que

$$n > \frac{a}{2\pi\sqrt{\nu\tau}},$$

$H(\tau)$ est donc uniformément convergente.

Si ξ est bornée il en est de même pour la série $H(\tau).\xi(\theta)$ et l'on peut l'integrer par rapport à t terme à terme. La première formule de la

(1) WATSON, *Theory of Bessel functions*, Chapitre XV.
(2) WATSON, *loc. cit.*, p. 479.
(3) WATSON, *loc. cit.*, p. 651.
(4) WATSON, *loc. cit.*, p. 503.

moyenne donne

$$f(t) = -\left(\frac{4\nu}{a}\right)^2 \xi(t') \int_0^t \mathrm{H}(\tau)\, d\theta$$

où

$$0 < t' < t.$$

Mais

$$\int_0^t \mathrm{H}(\tau)\, d\tau = -\frac{a^2}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\nu\beta_n^2}{a^2}t}}{\beta_n \mathrm{J}_0'(\beta_n)}.$$

La serie alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n \mathrm{J}_0'(\beta_n)};$$

est convergente; sa somme est connue et egale à -1 (1), et la Règle d'Abel montre que la serie qui definit $f(t)$ est convergente.

7. En portant l'expression de $f(t)$ dans celle de D du n° 3 on a

$$\mathrm{D} = -\mathrm{M}\xi'(t) + 4\pi\nu \int_0^t \mathrm{F}(\tau)\xi(\theta)\, d\theta$$

où

$$\mathrm{F}(\tau) = -2\int_0^\tau \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu(\tau-\tau')}}}{(\tau-\tau')^2} \mathrm{H}(\tau')\, d\tau'.$$

Le deuxième terme de D represente la resistance due à la viscosité du liquide et $\mathrm{F}(\tau)$ est le coefficient d'héredite. Dans l'integrale qui définit $\mathrm{F}(\tau)$ le premier facteur est positif.

D'autre part lorsque x varie de 0 à $+\infty$ la fonction $\frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu x}}}{x^2}$ passe par un maximum M. Cela pose on peut calculer $\mathrm{F}(\tau)$ en integrant terme à terme et en utilisant la premiere formule de la moyenne et le lemme d'Abel, on a

$$\mathrm{F}(\tau) = m\frac{a^2}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\nu\beta_n^2}{a^2}\tau}}{\beta_n \mathrm{J}_0(\beta_n)} \quad (\text{ou } 0 < m < \mathrm{M}).$$

(1) Watson, *loc. cit.*, p. 581.

Si l'on pose

$$\sigma_n = \frac{1}{\beta_n J_0'(\beta_n)} \qquad \text{et} \qquad \eta_n = e^{-\frac{\nu\beta_n^2}{a^2}\tau},$$

la série $\sigma = \Sigma\sigma_n$ est convergente et a pour somme -1; d'autre part τ étant positif et les β_n' allant en croissant, les nombres η_n sont positifs, décroissants, tous inférieurs à 1 et tendent vers zéro pour n infini. D'après le théorème d'Abel la série $\Sigma\sigma_n\eta_n$ est convergente et sa somme s vérifie l'inégalité $|s| < \eta_1 < 1$; par suite la série qui figure dans $F(\tau)$ a pour somme $-1-s$; elle est négative et le noyau $F(\tau)$ est négatif.

8. Le noyau $F(\tau)$ tend vers zéro lorsque τ devient infini. En effet si l'on désigne par $\varphi(\tau - \tau')$ le coefficient de $H(\tau')$ dans l'intégrale $F(\tau)$ on peut écrire

$$F(\tau) = -2\left[\int_0^{\tau_1} \varphi(\tau-\tau')H(\tau')\,d\tau' + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau-\tau')H(\tau')\,d\tau'\right].$$

Dans la deuxième intégrale on peut choisir τ_1 assez grand et fixe pour que $H(\tau')$ soit aussi petit qu'on veut et dans la première intégrale on peut supposer τ assez grand pour que $\varphi(\tau-\tau')$ soit aussi petit qu'on veut.

En résumé on peut prendre τ assez grand pour que $|F(\tau)|$ soit inférieure à toute quantité donnée à l'avance, aussi petite qu'on veut.

9. Étudions rapidement la nature de la trajectoire C que decrit, dans un plan vertical, le centre d'un disque pesant au sein d'un liquide visqueux. Nous savons que la rotation de ce disque n'intervient pas ici, puisque les trois équations du mouvement du disque sont indépendantes (Chap. VI, n° 6). Le problème est analogue à celui du mouvement, dans un plan vertical, d'un point pesant quand on tient compte d'une résistance portée par la tangente à la trajectoire, en sens contraire de la vitesse et proportionnelle à cette vitesse.

L'axe Ox est horizontal et Oy est une verticale dirigée vers le bas. Les densites du liquide et du solide étant respectivement ρ et ρ_1, les équations du mouvement s'ecrivent en première approximation, en supposant toujours $\frac{\xi_0' a^2}{\nu}$ très petit,

$$\xi'(t) = \frac{4\mu}{a^2} \frac{1}{\rho + \rho_1} \int_0^t F(\tau)\xi(\theta)\, d\theta.$$

$$\eta'(t) = g\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 + \rho} + 4\frac{\mu}{a^2} \frac{1}{\rho + \rho_1} \int_0^t F(\tau)\eta(\theta)\, d\theta.$$

Nous prendrons comme conditions initiales $\xi_0 > 0$ et $\eta_0 = 0$; si l'on suppose $\rho_1 > \rho$, d'après la deuxième équation, η_0' est > 0 et le disque commence par descendre. Le vecteur résistance D à l'instant t est la somme de vecteurs qui s'intègrent géométriquement dans l'intervalle o, t.

A un intervalle de temps infiniment petit $d\theta$, compris entre deux instants θ et $\theta + d\theta$ infiniment voisins et compris entre o et t, correspond une résistance résiduelle de projections

$$F(\tau)\xi(\theta)\, d\theta \qquad \text{et} \qquad F(\tau)\eta(\theta)\, d\theta;$$

ce résidu est donc tangent à la trajectoire en sens contraire de la vitesse puisque $F(\tau)$ est négatif et son module est proportionnel à celui de la vitesse correspondant à l'instant θ. Le vecteur accélération est donc situé au-dessous de la tangente à C et cette courbe tourne constamment sa concavité vers le bas. Par suite ξ et η sont constamment positives. On a vu, au chapitre précédent, que ξ tend vers zéro pour t infini.

On peut le voir directement. En effet $\xi'(t)$ reste négative et $\xi(t)$ décroît constamment à partir de ξ_0 en restant positive; $\xi(t)$ tend donc vers une limite ξ_1 qui est positive ou nulle et $\xi'(t)$ tend vers zéro.

Comme $F(\tau)$ est constamment négative et que ξ est supérieure à ξ_1 l'équation en ξ donne

$$|\xi'| > 4\frac{\mu}{a^2} \frac{1}{\rho + \rho_1} \xi_1 \left| \int_0^t F(\tau)\, d\theta \right|,$$

et pour que ξ' tende vers zéro il faut que ξ_1 soit nulle. On peut montrer maintenant que la limite asymptotique de x est finie. Soit t_1 un instant fixe, compris entre o et t, on a

$$\xi'(t) = 4\frac{\mu}{a^2} \frac{1}{\rho + \rho_1} \left[\int_0^{t-t_1} F(\tau)\xi(\theta)\, d\theta + \int_{t-t_1}^t F(\tau)\xi(\theta)\, d\theta \right].$$

Chacune de ces deux intégrales est négative et tend donc vers zéro pour t infini. Comme $\xi(t)$ est positive, la première formule de la moyenne permet d'écrire la deuxième intégrale sous la forme

$$k\int_{t-t_1}^{t}\xi(\theta)\,d\theta,$$

où k est bornée et non nulle; il faut donc que

$$\int_{t-t_1}^{t}\xi(\theta)\,d\theta$$

tende vers zéro pour t infini. Mais cette intégrale est la projection horizontale du déplacement du disque entre les instants $t-t_1$ et t; la courbe C a donc une asymptote verticale $x=x_1$.

On voit aussi immédiatement que η a une limite finie; en effet η reste positive et le terme intégral dans η' est négatif. Si η' devient négative, comme η reste positive, elle reste bornée. Si η' reste positive à partir d'un certain instant, η va en croissant à partir de cet instant, mais si η devenait infinie, on verrait par un raisonnement analogue à celui qui demontre l'existence de x_1 que η' finirait par devenir négative. η a donc une limite finie η_1.

Le mouvement asymptotique du disque est une chute verticale et uniforme.

10. On peut trouver la forme de x_1 et de η_1. Intégrons l'équation en $\xi(t)$ de o à t; elle s'écrit, en utilisant la formule de Dirichlet,

$$\xi(t)=\xi_0+4\frac{\mu}{a^2}\frac{1}{\rho+\rho_1}\int_0^t \mathrm{F}(u)\,du\left[\int_u^t \xi(\theta-u)\,d\theta\right].$$

La fonction

$$\varphi(u)=\int_u^t \xi(\theta-u)\,d\theta$$

est positive et sa dérivée

$$\varphi'(u)=-\xi(t-u)$$

est négative. La deuxième formule de la moyenne donne

$$\xi(t)=\xi_0+4\frac{\mu}{a^2}\frac{1}{\rho+\rho_1}\left[\int_0^t \xi(\theta)\,d\theta\right]\left[\int_0^{t_1}\mathrm{F}(u)\,du\right].$$

Pour t infini $\xi = 0$ et

$$\int_0^t \xi(\theta)\, d\theta = x_1,$$

et cette limite a la forme

$$x_1 = \mathrm{H}\frac{a^2}{\mu}(\rho + \rho_1)\xi_0.$$

En écrivant l'équation en η à la limite on a

$$\frac{g}{4}\frac{a^2}{\mu}(\rho_1 - \rho) = -\int_0^\infty \mathrm{F}(\tau)\eta(\theta)\, d\theta,$$

où η est positive et la deuxième formule de la moyenne donne

$$\eta_1 = \mathrm{K}\, g\frac{a^2}{\mu}(\rho_1 - \rho).$$

Les équations de dimensions montrent que dans ces formules H et K sont des coefficients numeriques. En resume :

1° x_1 est inversement proportionnel à μ, directement proportionnel à la vitesse initiale ξ_0 et à la masse du cylindre de hauteur unité, accompagne de sa proue ou poupe fictive.

2° η_1 est inversement proportionnel a μ et directement proportionnel au poids apparent du cylindre de hauteur unite. Remarquons aussi que η_1 a la même forme que la vitesse limite d'une sphère pesante tombant verticalement dans un liquide visqueux (¹).

11. On etudiera d'une façon analogue le cas du cercle en rotation.

Dans ce cas il est evident que les deux fonctions P et Q sont fonctions de R et de t seulement. La pression devant s'annuler a l'infini est identiquement nulle. La fonction Q doit verifier l'equation de la chaleur C; on posera donc

$$\mathrm{Q} = \int_0^t \frac{e^{-\frac{\mathrm{R}^2}{4\nu\tau}}}{\tau}\varphi(\theta)\, d\theta,$$

et la condition à la surface, qui s'ecrit

$$\frac{\partial \mathrm{Q}(\mathrm{R}, t)}{\partial \mathrm{R}_{\mathrm{R}=a}} = -\, ar(t),$$

(¹) Lamb, *loc. cit.*, p. 533.

donne sans aucune approximation pour définir la fonction $\varphi(t)$ l'équation suivante

$$\text{(B')} \qquad \int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,\varphi(\theta)\,d\theta = 2\nu r(t),$$

qui est analogue à celle de Boussinesq.

Si $\omega(R, t)$ est la vitesse angulaire du liquide, on a

$$\omega = -\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial R},$$

et le couple N de frottement est égal à

$$N = 2\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial\omega}{\partial R}\right)_{R=a}.$$

Il s'écrit, d'après l'expression de Q, sous la forme

$$N = -\frac{\pi a^2}{2}\,\frac{\rho}{\nu}\int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

et l'équation du mouvement est

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{\nu}\,\frac{\rho}{\rho_1}\int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,\varphi(\theta)\,d\theta.$$

La méthode utilisée pour resoudre (B) s'applique à (B').

Si $L(x)$ désigne la primitive s'annulant pour $x = 0$ de la fonction $G(x)$ du n° 5, on reconnait que le noyau de (B') s'écrit

$$-L\left(\overset{\star}{1}{}^{-1}\right).$$

et la solution est

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\nu}{a}\right)^2 \int_0^t K(\tau)\,r(\theta)\,d\theta,$$

en posant

$$K(\tau) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{4\nu}{a^2}\alpha_n\tau}}{L'(\alpha_n)},$$

α_n étant racine de $L(x) = 0$.

Mais comme

$$L\left(-\frac{z^2}{4}\right)=\frac{z}{2}J'_0(z),$$

on a finalement

$$K(\tau)=\Sigma-\frac{\beta'_n e^{-\frac{\nu\beta'^2_n}{a^2}\tau}}{J''_0(\beta'_n)},$$

β_n étant une racine positive de $J_0(z)=0$ ou $J_1(z)=0$ (¹). On peut remarquer que tout nombre β'_n est supérieur au nombre β_n de même indice, car les racines positives de $J_n(x)$ vont en croissant si n croît par valeurs positives (²). Les valeurs successives de $J''_0(\beta'_n)$ sont alternées et la première est positive. On pourrait refaire ici une etude analogue à celle faite dans le cas de la translation et montrer en particulier que dans le couple de frottement N, le coefficient d'hérédité est encore essentiellement negatif.

En raisonnant comme au n° 10 on montrerait aussi que le mouvement de rotation, supposé spontane, tend à s'arrêter et que l'angle α_1 dont le disque peut tourner a la forme

$$\alpha_1=L\frac{\rho_1 a^2}{\mu}r_0.$$

Cet angle est inversement proportionnel à μ et directement proportionnel à la vitesse initiale r_0 et à la masse du cylindre de hauteur unité.

12. Au lieu d'étudier le cas du cercle par une méthode particulière, on peut évidemment appliquer les equations (S) du Chapitre III. Le cercle étant anime d'une translation suivant Ox, de vitesse $\xi(t)$, si α désigne l'angle que fait Ox avec le rayon OM du cercle, on a pour déterminer la première approximation, en négligeant toujours $\overline{V}_0$:

$$a_0(s,t)+\frac{1}{2\pi a}\int_\sigma a_0(s',t)\,ds'=\xi'(t)\cos\alpha$$

$$-\frac{2\rho}{\nu}b_0(st)=\frac{1}{2\pi a}\int_\sigma \operatorname{tang}\psi\, a_0(s't)\,ds'+\xi'(t)\sin\alpha,$$

(¹) WATSON, *loc. cit.*, Chap. II, p. 18.
(²) WATSON, *loc. cit.*, Chap. XV, p. 507.

d'où l'on déduit immédiatement

$$a_0(s, t) = \cos\alpha \times \xi'(t)$$

et

$$b_0(s, t) = \sin\alpha \times \beta_0(t),$$

en posant

$$\beta_0(t) = -\frac{\nu}{\rho}\xi'(t).$$

En écrivant les équations en a_n et b_n, on obtient en général

$$a_n(s, t) = \cos\alpha \times \alpha_n(t)$$

avec

$$\alpha_n(t) = \int_0^t \mathrm{I}(\tau)\beta_{n-1}(\theta)\,d\theta$$

et

$$\mathrm{I}(\tau) = -\frac{a^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{a^2}{\tau}\cos^2\psi}}{\tau^2}\sin^2 2\psi\,d\psi,$$

et de même

$$b_n(st) = \sin\alpha \times \beta_n(t)$$

avec

$$\beta_n(t) = \int_0^t \mathrm{K}(\tau)\beta_{n-1}(\theta)\,d\theta$$

et

$$\mathrm{K}(\tau) = \frac{a^2\nu}{\pi\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{a^2}{\tau}\cos^2\psi}}{\tau^2}\sin^2\psi\,d\psi.$$

Utilisons ces résultats simplement dans le cas où

$$\xi(t) = \cos kt.$$

En posant, dans ce qui precède $t - \theta = \frac{\tau}{\nu}$ on reconnait de proche en proche que les fonctions $\alpha_n(t)$ et $\beta_n(t)$ sont chacune de la forme

$$c\cos kt + c'\sin kt,$$

où c et c' sont deux constantes. Il en résulte que les densites $a(s, t)$ et $b(s, t)$ peuvent s'écrire :

$$a(s, t) = \cos\alpha(a_1\cos kt + a_2\sin kt),$$
$$b(s, t) = \sin\alpha(b_1\cos kt + b_2\sin kt),$$

où les constantes a_1, a_2, b_1, b_2 sont déterminées en portant $a(s, t)$ et $b(s, t)$ dans les equations (S), et l'on obtient, pour calculer les quatre constantes, quatre équations linéaires qu'on peut écrire :

$$a_1 + i a_2 + b_1(\mathrm{A} + i\mathrm{B}) + b_2(\mathrm{A} - i\mathrm{B}) = 0,$$
$$\frac{2\rho}{\nu}(b_1 + i b_2) + a_1 + i a_2 - b_1(\mathrm{A}' + i\mathrm{B}') - b_2(\mathrm{A}' - i\mathrm{B}') = 0,$$

où

$$\mathrm{A} + i\mathrm{B} = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty \mathrm{I}(\tau) e^{\frac{ik\tau}{\nu}} d\tau,$$

$\mathrm{A}' + i\mathrm{B}'$ s'en déduit en remplaçant $\mathrm{I}(\tau)$ par

$$\mathrm{J}(\tau) = \frac{4a^2}{\pi\tau^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2}{\tau}\cos^2\psi} \sin^2\psi \cos 2\psi \, d\psi.$$

CHAPITRE VIII.

LE PROBLÈME GENERAL ET QUELQUES CAS PARTICULIERS.

1. La méthode exposée au Chapitre III s'applique évidemment à l'étude du mouvement lent d'une masse liquide visqueuse limitée par une frontière σ, reelle ou fictive, fixe, fermee, sans point singulier, lorsque l'on connaît la vitesse initiale V_0 en tout point du liquide et la vitesse V_σ à l'instant t en tout point du contour σ. Dans les equations (2) et (S) du Chapitre III il faut dans les seconds membres remplacer $\frac{d\varphi}{ds}$ par $\mathrm{V}_{\sigma n}$ et $\frac{d\omega}{dn}$ par $-\mathrm{V}_{\sigma s}$. Le liquide peut être soit intérieur à σ, soit extérieur et s'etendre alors à l'infini; comme P est harmonique, on doit avoir dans les deux cas la condition

$$\int_\sigma (\mathrm{V}_{0n} - \mathrm{V}_{\sigma n})\, ds = 0; \tag{1}$$

si le liquide s'etend à l'infini cette condition entraîne que la pression p est régulière à l'infini et dans ce cas la vitesse V du liquide s'annule à l'infini s'il en est ainsi pour V_0.

Une étude analogue à la precédente peut être faite, même dans le cas où σ est un contour déformable.

2. Ce qui précède s'applique en particulier lorsque la frontière σ est une droite indéfinie fixe qu'on peut prendre pour axe Oy; en désignant par $\overline{U}_0(y, t)$ et $\overline{V}_0(y, t)$ les composantes de $\overline{V}_0$ en un point de Oy, par $U(y, t)$ et $V(y, t)$ celles de V_σ et en remarquant que $N_1 = N_2 = 0$ sur Oy, les équations (S) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} -\pi a(yt) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \frac{d\theta}{\tau^2} \\ \quad \times \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y-\eta) e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4\tau}} b(\eta\theta)\, d\eta = \dfrac{\partial}{\partial t} \left| \overline{U}_0(yt) - U(yt) \right|, \\ -\dfrac{2\pi}{\nu} b(yt) - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\eta t)}{y-\eta}\, d\eta = \dfrac{\partial}{\partial t} \left| \overline{V}_0(yt) - V(yt) \right|, \end{cases}$$

qu'on résout par approximations successives.

La condition (1) devient ici

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \overline{U}_0(yt) - U(yt) \right| dy = 0.$$

3. Lorsque l'écoulement est laminaire et parallèle à Oy, une étude directe est immédiate. On a identiquement $u = \dfrac{dv}{dy} = 0$ et ce qui suit sera vrai, même si le mouvement n'est plus lent car $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ sans aucune approximation. Dans les equations (1) du Chapitre III, P et Q sont independantes de y et, comme $u = 0$, P ne depend que de t; si donc on veut que p soit nul à l'infini, on peut faire $P = 0$ et il reste

$$(3)\qquad v = \overline{v}_0 - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On peut toujours supposer que Oy est fixe et si l'on désigne par $f(t)$ la valeur de $\overline{v}_0(0, t)$ on est ramené a trouver une solution de (C) qui s'annule pour $t = 0$ et qui pour $x = 0$ se reduit à $f(t)$; cette solution est connue :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\nu}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{x e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\, d\theta$$

où

$$\tau = \nu(t - \theta),$$

$\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ s'annule pour x infini et pour qu'il en soit de même pour $v(xt)$ il faut que $\overline{v}_0(x, t) = 0$.

Le débit Δ à l'instant t, à travers Ox, a pour expression :

$$\Delta = \int_0^\infty v(xt)\, dx = \int_0^\infty \overline{v}_0(xt)\, dx - \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\tau}}.$$

Δ est fini si $f(t)$ est borné et si $\overline{v}_0(x, t)$ et par suite $v_0(x, t)$ est en $\frac{1}{x}$ d'ordre supérieur à 1 pour x infini.

Citons deux exemples simples :

Exemple I. — Soit $v_0(x) = x e^{-x^2}$, on trouve

$$\overline{v}_0(x, t) = \frac{x}{(1 + 4\nu t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{1+4\nu t}} \qquad \text{et} \qquad f(t) = 0,$$

et le mouvement est défini par

$$v(xt) = \overline{v}_0(xt) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\nu t}}.$$

Exemple II. — $v_0(x) = x e^{-x}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\overline{v}_0(xt) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x - 2\nu t)e^{\nu t - x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} e^{\nu t - x} \int_{-\infty}^{\infty+} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \\ &= (x - 2\nu t)e^{\nu t - x}\end{aligned}$$

et

$$f(t) = -2\nu t e^{\nu t}.$$

L'écoulement est ensuite défini par

$$v(xt) = (x - 2\nu t)e^{\nu t - x} + \frac{\nu^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \theta e^{\nu\theta} \frac{x e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}} d\theta.$$

Le deuxième terme de $v(xt)$ se transforme en posant

$$\frac{x^2}{4\tau} = \alpha^2$$

et il devient

$$\frac{4\nu e^{\nu t}}{\sqrt{\pi}}\left(t.\mathrm{I} - \frac{x^2}{4\nu} .\mathrm{J}\right),$$

où

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2-\frac{a^2}{4\alpha^2}}\,d\alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{J}=\int_{\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2-\frac{a^2}{4\alpha^2}}\,\frac{d\alpha}{\alpha^2}.$$

Pour $t=+\infty$ on a

$$\lim_{t=\infty} \mathrm{I}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x}$$

et

$$\lim \mathrm{J}=-4\lim\frac{d\mathrm{I}}{dx^2}=\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-x}}{x}.$$

Le deuxième terme de $v(xt)$ a donc pour valeur asymptotique :

$$e^{\nu t-x}(2\nu t-x)$$

et

$$\lim_{t=\infty} v(x,t)=0.$$

4. On étudiera de façon analogue l'écoulement laminaire dû au mouvement suivant de la paroi : dans l'intervalle de temps $0<t<\mathrm{T}$, où T est un instant fixe, l'axe Oy glisse sur lui-même avec une vitesse constante V_0 et redevient immobile pour $t>\mathrm{T}$. La vitesse $V(xt)$ est une solution de (C) qui est nulle pour $t=0$; pour $x=0$ on doit avoir $V(0,t)=V_0$ si $0<t<\mathrm{T}$ et $V(0,t)=0$ si $t>\mathrm{T}$; enfin $V(x,t)=0$ pour x infini quel que soit t.

Cette solution est connue [1] :

Pour $0<t<\mathrm{T}$, on a

$$V_1=\frac{V_0 x}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu\theta}}}{\theta^{\frac{3}{2}}}\,d\theta.$$

Pour $t>\mathrm{T}$,

$$V_2=\frac{V_0 x}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_{t-\mathrm{T}}^{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu\theta}}}{\theta^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=\frac{\nu V_0 x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta,$$

et pour T très petit,

$$V_3=\frac{V_0 \mathrm{T} x}{2\sqrt{\pi\nu}}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(1) Picard, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles*, 4e leçon.

Le lieu L des molécules qui sont sur Ox à l'instant initial est défini à l'instant t par

$$y = \int_0^t V(x, t)\, dt,$$

Ce lieu L est asymptote à Ox et en tenant compte de ce que $V(x, t)$ vérifie (C) on voit aisément que L tourne constamment sa concavité dans le sens de V_0.

5. La méthode du Chapitre III s'applique encore dans le cas où la masse liquide est limitée par plusieurs coutours, connaissant toujours la vitesse initiale V_0 en tout point du liquide et la vitesse V_σ à l'instant t en tout point de chaque contour. Considérons par exemple le cas de deux frontières σ_1 et σ_2 fixes, fermées. sans point singulier ni point commun et établissons entre les points de σ_1 et σ_2 une correspondance biunivoque; les points homologues P_1 et P_2 de cette correspondance sont définis par une seule abscisse curviligne s. Cela posé, l'état du liquide en tout point M, est à l'instant t défini par la pression $p = p_1 + p_2$ et la fonction $q = q_1 + q_2$; l'ensemble p_1, q_1 dû à σ_1 est défini par deux densités $a_1(st)$ et $b_1(s, t)$ étalées sur σ_1 et p_2, q_2 dû à σ_2 par deux densités $a_2(st)$ et $b_2(s, t)$ étalées sur σ_2. En écrivant les conditions aux limites relatives à σ_1 et à σ_2 on obtient 4 équations intégrales en a_1, a_2, b_1 et b_2. Dans les deux équations dues à σ_1 on peut tout d'abord négliger a_2 et b_2, ce qui revient à négliger l'influence de σ_2 et calculer, comme au Chapitre IV, une première approximation $a_{1,0}$ et $b_{1,0}$ pour les densités a_1 et b_1; puis dans les deux équations dues à σ_2 remplacer a_1 et b_1 par $a_{1,0}$ et $b_{1,0}$ et calculer une première approximation $a_{2,0}$.et $b_{2,0}$ pour a_2 et b_2 et ainsi de suite.

Cette méthode d'intégration est en somme celle qui a été utilisée par Bairstow [1] pour étudier le mouvement permanent et lent d'un liquide visqueux, limité par deux parois planes fixes et parallèles entre lesquelles un cylindre de révolution se déplace d'un mouvement de translation, parallèlement aux parois.

---

[1] BAIRSTOW, *Mouvement lent à deux dimensions d'un liquide visqueux* (*Proc. Roy. Soc.*, A, vol. 100, 1921 et 1922).

En particulier, en reprenant ce qui a été fait au n° 2, il est facile d'ecrire les quatre équations qui definissent l'écoulement entre deux droites parallèles à Oy, en prenant pour points homologues les points de même ordonnée.

6. L'écoulement laminaire entre deux paroisparallèles à Oy s'étudie directement. Soient $x=0$ et $x=a$ les équations des deux parois, $F(t)$ et $-G(t)$ les vitesses a l'instant t de ces parois; la vitesse $V(x, t)$ du liquide est une solution de (C) que nous écrirons sous la forme

$$V(x, t)=\frac{\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t xf(\theta)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta+\frac{\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (x-a)g(\theta)\frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta,$$

$V(x, t)$ s'annule pour $t=0$ et les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont définies par les conditions aux limites qui donnent :

$$f(t)-\frac{a\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t g(\theta)\frac{e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=F(t),$$

$$-g(t)+\frac{a\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\theta)\frac{e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=-G(t) \quad (^1).$$

La différence $u(t)=f(t)-g(t)$ est donnée par

$$u(t)+\frac{a\nu}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t u(\theta)\frac{e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\theta=F(t)-G(t).$$

La somme $v(t)=f(t)+g(t)$ vérifie l'équation obtenue en changeant dans la précedenle a en $-a$ et $G(t)$ en $-G(t)$.

Si les parois ont des vitesses opposees, l'equation en u devient homogène et $f(t)=g(t)$; dans ce cas on a $V\left(\frac{a}{2}, t\right)=0$, ce qui paraît évident.

Si les parois ont la même vitesse, l'équation en v devient homogène

(1) GOURSAT, *loc. cit.*, t. III, n° 547, p. 316.

et l'on a $f(t) = -g(t)$; dans ce cas on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_{x=\frac{a}{2}}} = 0.$$

Ce problème a reçu de M. Villat une solution simple et élégante (¹).

(¹) Villat, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, Chap. XI.

Montpellier, le 16 juillet 1930.

Vu et approuvé :

Paris, le 13 juin 1930.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 13 juin 1930.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLETY.

ERRATA AU CHAPITRE II.

Page 37, il faut lire :

$$\alpha'_{M'} = \alpha_M - \beta_M \frac{d(\delta n')}{ds},$$

au second ordre en ε pres.

Page 39, la valeur de δA_{11} s'accroît de

$$2\rho \int \beta p \, d(\delta n)$$

et l'on a finalement :

$$\delta A_{11} = \int_\sigma \left[\rho^2 \alpha^2 - 2\rho\beta \frac{dp}{ds} - \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 \right] \delta n \, ds.$$

Page 39, la remarque n° 12 est erronee.