KINJIRO KUNUGUI

Sur la théorie du nombre de dimensions

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__111__1_0>

N° D'ORDRE :
2129
Série A.
N° de Série 1260.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. KINJIRO KUNUGUI
(Université de Hokkaido, Japon)

1re THÈSE. — SUR LA THÉORIE DU NOMBRE DE DIMENSIONS.
2e THÈSE. — LA FONCTION MODULAIRE ET LE THÉORÈME DE M. PICARD.

Soutenues le juin 1930, devant la Commission d'examen

MM. CARTAN, *Président.*
JULIA, FRÉCHET *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1930

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen.................. C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Doyens honoraires..... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires. A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, E. HÉROURAD.

Professeurs............

ÉMILE PICARD........	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS.............	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT...........	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET.	Electrotechnique générale.
WALLERANT........	Minéralogie.
PAINLEVÉ...........	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE........	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY..........	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN...........	Chimie générale.
ÉMILE BOREL.........	Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS.........	Aviation.
JEAN PERRIN...... ...	Chimie physique.
REMY PERRIER......	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
ABRAHAM...........	Physique.
MOLLIARD..........	Physiologie végétale.
CARTAN......	Géométrie supérieure.
LAPICQUE...........	Physiologie générale.
VESSIOT............	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
COTTON.............	Physique générale.
DRACH..............	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY............	Physique.
CHARLES PÉREZ......	Zoologie.
LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et Géologie régionale.
LESPIEAU...........	Théories chimiques.
RABAUD	Biologie expérimentale.
PORTIER............	Physiologie comparée.
É. BLAISE.......	Chimie organique.
DANGEARD......	Botanique.
PAUL MONTEL........	Mécanique rationnelle.
WINTREBERT	Anatomie et Histologie comparées.
DUBOSCQ............	Biologie maritime.
G. JULIA............	Mathématiques générales.
A. MAILHE...........	Étude des combustibles.
L. LUTAUD..........	Géographie physique.
EUGÈNE BLOCH.......	Physique théorique et physique céleste.
HENRI VILLAT.......	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB...........	Géologie.
P. PASCAL...........	Chimie minérale.
LEON BRILLOUIN.....	Théories physiques.
V. AUGER...........	Chimie appliquée.
ESCLANGON.........	Astronomie.

PÉCHARD.......	Chimie (Enseigt P. C. N.).	MOUTON.........	Chimie physique.
GUICHARD	Chimie minérale.	JOLEAUD.......	Paléontologie.
GUILLET........	Physique.	JAVILLIER.......	Chimie biologique.
MAUGUIN........	Minéralogie.	DUFOUR..... .. .	Physique (P. C. N.).
BLARINGHEM....	Botanique.	PICARD.........	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
MICHEL-LEVY...	Pétrographie.	ROBERT-LÉVY..	Zoologie.
DEREIMS........	Géologie.	DUNOYER.......	Optique appliquée.
DENJOY.........	Calcul différentiel et intégral.	GUILLIERMOND.	Botanique (P. C. N.).
BENARD.........	Physique (P. C. N.).	DEBIERNE......	Radioactivité.
DARMOIS........	Physique.	FRECHET.......	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
BRUHAT.........	Physique.		

Secrétaire.............. A. PACAUD.

PREMIÈRE THÈSE

SUR

LA THÉORIE DU NOMBRE DE DIMENSIONS

INTRODUCTION.

La notion des dimensions était très difficile à définir avec précision. On s'est contenté longtemps de laisser intact ce problème, en considérant ce qu'on appelle « la variété » (c'est-à-dire le nombre des paramètres indépendants entre lesquels a lieu l'équation locale de la figure géométrique). Mais Cantor a prouvé que tout point d'un plan, tout point de l'espace usuel peut être bien déterminé par un seul nombre. En outre, nous rencontrons souvent aujourd'hui des figures géométriques munies de hautes singularités (par exemple des ensembles connexes et en même temps discontinus), pour lesquels on ne connaît pas le moyen d'en trouver l'équation analytique. Ainsi, d'une part, du point de vue de l'intérêt mathématique et, d'autre part, de celui de la philosophie, nous avions besoin de trouver une définition de dimensions indépendante de la notion de coordonnées.

C'est M. Fréchet qui a premièrement donné en 1909 une réponse à cette question [1]. Sa méthode se base sur la notion de correspondance biunivoque et bicontinue et, par conséquent, cette définition nous fournit un moyen très intéressant pour l'étude topologique des ensembles de points.

H. Poincaré a eu longtemps son attention attirée sur l'idée de

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, p. 1152, puis *Math. Annal.*, 1910, Bd 68.

dimensions surtout par l'intérêt philosophique, et enfin il a conclu qu'on peut la définir par la notion de coupure, dans un article intitulé : *Pourquoi l'espace a trois dimensions* (*Revue de Métaphysique et Morale*, 1912).

Cette méthode de la définition par récurrence de Poincaré a l'« avantage » d'être plus intuitive que celle de M. Fréchet. Seulement, la nature des publications où il a exprimé ces idées l'obligeait à éliminer le langage technique et à se contenter d'une forme peu précise. M. Brouwer a repris cette définition pour la préciser et lui donner une forme nette. Mais il nous a fallu attendre l'année 1922 où, en employant les notions acquises par le progrès de la théorie des ensembles, M. Menger (1) (en février) et Urysohn (2) (en septembre) ont donné à la définition de H. Poincaré de nouvelles formes qui sont équivalentes et tout à fait satisfaisantes, mais qui ne se prêtent pas à l'étude topologique des champs fonctionnels les plus importants.

Avant d'aller plus loin, j'esquisserai les traits principaux de ces deux méthodes (dans le Chapitre I); cela nous servira en même temps à préciser la plupart des termes qui nous seront nécessaires, spécialement dans la suite.

Mais, jusqu'aujourd'hui, nous n'avons pas assez étudié les espaces de dimensions infinies, bien que ces espaces acquièrent de plus en plus d'importance dans l'analyse. La première partie de cette Thèse sera donc consacrée à l'étude des dimensions de ces espaces (dans le Chapitre II). Pour cela, je suis obligé de rappeler (dans le Chapitre I) les principes de la théorie des ensembles abstraits, fondée par M. Fréchet et les progrès ultérieurs dus à MM. Hausdorff, F. Riesz, Tietze et Urysohn. Car dans les espaces de dimensions infinies et dans l'espace cartésien à nombre de dimensions finies, les circonstances sont très différentes (3).

Ensuite, j'ai introduit une nouvelle définition des dimensions : la classe d'ensembles, qui s'applique dans ces espaces, ainsi que dans les espaces à dimensions finies (dans le Chapitre III). Et avec cette

---

(1) Menger, *Monatsheften für Math. und Physik.*

(2) Urysohn. *C. R. Acad. Sc.*, t. 175.

(3) Par exemple, on ne peut pas admettre le principe de Weierstrass-Bolzano (*voir* p. 25).

idée, j'ai recherché les relations entre la définition de M. Fréchet (dans le Chapitre III) et celles de MM. Poincaré, Brouwer, Menger et Urysohn (dans le Chapitre IV). Cette nouvelle définition lie ces deux idées classiques comme un pont jeté entre deux terres et elle nous permet de voir les différentes définitions dans un même rang.

Les résultats auxquels j'attache le plus de prix sont ceux qu'on trouvera : § 12, p. 33 (I); § 13, p. 38 (I); § 14, p. 44 (IV); § 16, p. 49 (II).

J'ai été dans l'obligation d'introduire quelques termes nouveaux : ensemble réfléchi (p. 31), somme simple (p. 20), classe de dimensions (p. 41). Pour le reste, ma terminologie est en général conforme à celle dont on trouvera un index à la fin (p. 289) de l'Ouvrage de M. Fréchet, *Les espaces abstraits*.

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSE SUR L'ESPACE. DÉFINITIONS CLASSIQUES DES DIMENSIONS.

1. *Opérations sur les ensembles.* — Dans ce Mémoire, comme dans la plupart des ouvrages sur la topologie, nous nous occuperons principalement de trois choses : les points d'un espace, les ensembles de ces points et les familles de ces ensembles. Mais nous ne distinguons pas essentiellement les deux premières et nous considérons souvent le point d'un espace comme l'ensemble qui ne contient qu'un point.

Quand tous les points d'un ensemble A appartiennent à un ensemble B, nous disons que A est un *sous-ensemble* de B, A est une *partie* de B ou B contient A et nous l'exprimons par $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Un ensemble A peut être un sous-ensemble de A lui-même. Si pour un sous-ensemble A d'un ensemble B, B contient au moins un point qui n'appartient pas à A, nous disons que A est une *vraie partie* de B.

Nous considérons aussi conventionnellement un ensemble qui ne contient aucun élément et que nous appelons l'*ensemble vide* (0). Nous l'excluons de tous les autres comme ensemble exceptionnel, et dans ce cas tous les autres s'appellent *non vides*. Le point considéré comme ensemble ne contient pas une vraie partie non vide.

Étant donnés deux ensembles A et B, nous supposons qu'on peut trouver deux ensembles qui s'appellent *la somme* de A et de B et la différence entre A et B : la somme $A+B$ est l'ensemble de tous les points de A ou de B et de ces points seuls; la différence $A \sim B$ est l'ensemble de tous les points de A qui n'appartiennent pas à B, et de tous les points de B qui n'appartiennent pas à A et de ces points seuls. Quand $A \subset B$, la différence entre A et B s'appelle l'ensemble complémentaire de A par rapport à B (ou le complément de A dans B), $B - A$ et si de plus B est l'espace, elle est appelée le complément de A : CA. La différence $A \sim B$ entre deux ensembles A et B est une partie de la somme $A+B$. Le complément de $A \sim B$ dans $A+B$ s'appelle le *produit* $A.B$ de deux ensembles A et B. Donc le produit de A et de B contient tous les points qui appartiennent à A et à B en même temps et ces points seuls. Pour trois ensembles A, B et C, la différence de deux différences $A \sim C$ et $B \sim C$ est égale à $A \sim B$

$$(A \sim C) \sim (B \sim C) = A \sim B.$$

Par suite comme cas particulier

$$A \sim (B \sim A) = B.$$

Une fonction $\varphi(p)$ de points p variables dans l'espace donné s'appelle *la fonction caractéristique* $\varphi_E(p)$ d'un ensemble E, quand elle prend les valeurs 1 ou 0 suivant que p appartient à E ou non. La correspondance entre les ensembles et leur fonction caractéristique est biunivoque, et les opérations définies plus haut se traduisent comme suit :

$$\varphi_{A+B}(p) = \text{maximum} \{ \varphi_A(p), \varphi_B(p) \},$$
$$\varphi_{A \sim B}(p) = | \varphi_A(p) - \varphi_B(p) |,$$
$$\varphi_{A.B}(p) = \varphi_A(p)\, \varphi_B(p).$$

Nous disons qu'une suite d'ensembles $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ tend vers sa limite A (au sens de M. Borel) quand la suite de fonctions caractéristiques $\varphi_{A_k}(p) (k = 1, 2, 3, \ldots)$ tend vers la fonction $\varphi_A(p)$. Pour qu'une suite d'ensembles $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ tende vers un ensemble A, il faut et il suffit que la suite des différences $A_k \sim A$ tende vers l'ensemble vide (0).

Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensemble E, nous supposons qu'on peut trouver la somme et le produit des ensembles qui appartiennent à cette famille. La somme $\sum_{\mathcal{F}} E$ est l'ensemble de tous les points qui appartiennent à un des ensembles de $\mathcal{F}$ et de ces points seuls. Le produit $\prod_{\mathcal{F}} E$ est l'ensemble de tous les points qui appartiennent à tous les ensembles de $\mathcal{F}$ et de ces points seuls.

2. *Espaces, transformations continues, types de dimensions de M. Fréchet.* — Considérons un ensemble R d'éléments quelconques. Nous appelons R *un espace* et ses éléments, *des points* de cet espace, si, non seulement nous avons les opérations, la somme, la différence, etc. sur les sous-ensembles de R, mais encore nous pouvons passer d'un sous-ensemble E à un autre E' par une autre opération qui s'appelle *la dérivation*. E' est *l'ensemble dérivé* ou la *dérivée* de E. C'est-à-dire pour un point p et chaque ensemble E de l'espace R, on peut dire que p est *un point limite* de E ou non, en appelant ainsi un point de la dérivée de E.

Donc on suppose que :

0. *Aucun ensemble de l'espace* R *ne possède un élément limite hors de* R.

D'après cette hypothèse, nous ne pouvons pas regarder un ensemble quelconque A de R comme un espace. Pour cela il faut que tous les sous-ensembles E de A possèdent leur dérivée E' qui est un sous-ensemble de A. Pour cela il nous suffit de prendre E'.A comme la *dérivée* de E dans A (ou sur A). Ainsi nous avons pu introduire l'*idée relative*. Nous le distinguons en ajoutant toujours le mot « dans » ou « sur ».

Étant donnés deux ensembles A et B, si l'on fait correspondre à chaque point de A des points de B, cette correspondance est *une transformation ponctuelle* T de A à B. Cette transformation T est *univoque* si, à chaque point a de A il ne correspond qu'un point b de B ([1]). La transformation univoque admet *une transformation inverse* T^{-1} de T,

---

([1]) Nous supposons que b parcourt dans B, image de A.

en regardant des points a comme images d'un point b fixé. La transformation T est *biunivoque* si cette transformation inverse est aussi univoque.

La transformation ponctuelle d'un ensemble A en un ensemble B est *continue sur un point p de* A, si chaque sous-ensemble A_1 de A tel que $A'_1 \supset p$ est transformé en un sous-ensemble B_1 de B tel que $B'_1 \supset q$ pour tous les points q transformés de p. La transformation de A en B est *continue* si elle est continue sur tous les points de A. La transformation univoque T de A à B s'appelle *bicontinue* si T et sa transformation inverse T^{-1} sont en même temps continues.

Deux ensembles A et B d'un ou de deux espaces s'appellent *homéomorphes* s'il existe au moins une transformation biunivoque et bicontinue entre A et B. Les propriétés d'ensembles communes à tous les ensembles homéomorphes s'appellent des *propriétés topologiques invariantes*. Deux ensembles homéomorphes sont appelés aussi deux ensembles *équivalents*. La branche de la géométrie qui s'occupe de traiter ces propriétés topologiques est la *topologie*.

Pour deux ensembles A et B, on dit que A *contient* B *topologiquement* si B est homéomorphe à un sous-ensemble de A. Cette idée nous permet de définir avec M. Fréchet le *type de dimensions* d'un ensemble : A chaque ensemble A correspond son type de dimensions dA. Le type de dimensions d'un ensemble A est supérieur ou au moins égal à celui d'un ensemble B, si A contient B topologiquement. Nous représentons une telle circonstance par la notation

$$dA \geqq dB \quad \text{ou} \quad dB \leqq dA.$$

Le type de dimensions de A est *égal* à celui de B, ou $dA = dB$ si l'on a en même temps $dA \geqq dB$ et $dA \leqq dB$. Le type de dimensions de A est *supérieur* à celui de B, ou $dA > dB$ si l'on a $dA \geqq dB$ et s'il est impossible d'établir la relation $dA \leqq dB$. Les trois relations que nous avons introduites jouissent de toutes les propriétés d'égalité et d'inégalité des nombres réels. Quand l'une a lieu les types de dimensions sont dits comparables entre eux. Si pour deux ensembles A et B, il n'est possible d'établir ni $dA \geqq dB$, ni $dA \leqq dB$, on dit que le type de A et celui de B sont *incomparables*.

Comme l'idée du type de dimensions est liée étroitement avec l'homéomorphie, les recherches sur ces types donnent des résultats importants pour la topologie.

3. *Connexité; nombre de dimensions de M. Brouwer.* — Nous allons d'abord chercher quelques propriétés topologiques d'ensembles. Nous disons qu'un ensemble A est *fermé* si A contient son ensemble dérivé A' : $A \supset A'$. Aussi nous disons qu'un sous-ensemble B d'un ensemble A est fermé dans A si $B \supset B'.A$. La propriété d'être un ensemble fermé n'est pas topologique. Mais celle d'être un ensemble fermé dans un ensemble qui le contient est topologique.

En effet, supposons qu'un ensemble A_1 est homéomorphe à A par la transformation biunivoque et bicontinue $A_1 = T(A)$. Posons $B_1 = T(B)$; soit p_1 un point de $A_1 B'_1$; comme $p_1 \subset B'_1$, $p = T^{-1}(p_1)$ est contenu dans B' et par suite dans $A.B'$; comme $AB' \subset B$, $p \subset B$, par suite $p_1 \subset B_1$. D'où $A_1 B'_1 \subset B_1$. C. Q. F. D.

Une des notions les plus importantes de la dérivation est la compacité d'un ensemble. Un ensemble s'appelle *compact* s'il ne contient aucun sous-ensemble infini qui ne possède pas un point limite. Un ensemble A s'appelle *compact en soi* s'il ne contient aucun sous-ensemble infini de A qui n'a pas un point limite dans A. Comme cas particulier nous considérons qu'un point forme un ensemble compact et compact en soi. La propriété d'être un ensemble compact n'est pas invariant topologique, mais celle de compacité en soi est topologique.

Un ensemble A s'appelle *connexe* s'il contient au moins deux points et s'il est impossible de le décomposer en deux parties distinctes A_1 et A_2 non vides qui sont fermées dans la somme A; c'est-à-dire s'il n'existe aucune paire de sous-ensembles A_1 et A_2 non vides tels que $A = A_1 + A_2$ et que $A_1 A'_2 + A'_1 A_2 = (o)$. La connexité est une propriété topologique. Un ensemble s'appelle *continu* s'il est en même temps connexe et compact en soi. Un ensemble s'appelle *discontinu* s'il ne contient aucun sous-ensemble continu.

Soient π, A et B trois sous-ensembles distincts d'un ensemble E de R dont les deux derniers sont fermés dans E. On dit que A *et* B *sont séparés par* π si tous les sous-ensembles de E connexes qui lient (¹) A_1 et A_2 rencontrent π.

(¹) Qui a points communs avec A_1 et A_2.

Un ensemble A est *de dimensions au plus égales à n* nombre entier positif, *au sens de M. Brouwer*, si, pour tout couple de sous-ensembles A_1 et A_2 distincts et fermés dans A, il existe un sous-ensemble π qui sépare A_1 et A_2 et qui est de dimensions au plus égales à $n-1$. Les ensembles discontinus et eux seuls sont de dimension (au plus) égale à zéro. L'ensemble de dimensions au plus égales à n et qui n'est pas de dimensions au plus égales à $n-1$ s'appelle *de dimensions égales à n*.

4. *Hypothèse pour la dérivation; localité.* — Revenons à l'espace R abstrait et introduisons les criteria pour qu'un ensemble E de R possède un point p comme un de ses points limites.

Supposons d'abord avec M. F. Riesz (1) que :

I. *Pour qu'un ensemble* E *possède un point p comme un de ses points limites, il suffit qu'il existe un sous-ensemble* F *de* E *qui possède p comme un de ses points limites.*

II. *Si l'on partage* E *en deux parties* E_1 *et* E_2, $E = E_1 + E_2$, *pour chaque point limite p de* E, *il faut qu'au moins l'une des deux possède p comme un de ses points limites.*

Étant donnés un ensemble A et un des points p de A', les points q du produit $\Pi(E + E')$ de tous les sous-ensembles E de A tel que $E' \supset p$ s'appellent des *points conjugués de p* sur A.

III. *Aucun point p de* R *n'a de point conjugué autre que lui-même sur chaque ensemble* A (tel que $A' \supset p$).

Par suite si l'ensemble (p) d'un seul point p a sa dérivée non vide $(p)'$, elle est égale à (p); et, d'après I et II, si la dérivée A' d'un ensemble A, qui contient un point p, contient un autre point distinct q, on peut trouver un sous-ensemble A_1 de A tel que $A'_1 \supset p$ et $A'_1 . q = (0)$.

On voit que les trois axiomes I, II et III sont des moyens de passer d'un ensemble possédant un point p comme un de ses points limites à un de ses sous-ensembles de la même nature.

---

(1) F. Riesz, *Atti del IV Congresso internationale dei Matematici*, Roma, vol. II, p. 18.

Ici il y aura deux cas possibles : ou bien pour tous les sous-ensembles E d'un ensemble A tels que $E' \supset p$, E' contient d'autres points que p, ou bien il existe un sous-ensemble E tel que E' ne contient que le point p. Le dernier cas aura lieu d'après l'hypothèse III, s'il existe un ensemble E dont tous les sous-ensembles infinis possèdent p comme un de ses points limites. Considérons, comme un des tels ensembles les plus simples, une suite de points distincts

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_k, \quad \ldots$$

telle qu'elle possède un point p comme un de ses points limites, ainsi que toutes ses suites partielles infinies. Nous disons qu'une telle suite de points *tend vers le point p*.

Supposons que, pour qu'un ensemble E possède un point p comme un de ses points limites, il faut que E contienne au moins une suite de points qui tend vers p. Alors en considérant de plus la suite de points non distincts qui tend vers ce point, nous serons arrivés, avec les axiomes I, II et III, à un espace ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet (1).

Dans un espace R le plus général du paragraphe 2, un ensemble V de R s'appelle *un voisinage* $V(p)$ *d'un point p* si tous les ensembles E possédant p comme un de ses points ou comme un de ses points limites ont au moins un point commun avec V. Aussi, pour un point p d'un ensemble A de R, nous appelons l'ensemble $V_A(p)$ *un voisinage du point p sur* A, si tous les sous-ensembles E de A qui possèdent p comme un de ses points ou comme un de ses points limites ont au moins un point commun avec $V_A(p)$.

THÉORÈME I. — *Par la transformation* T *biunivoque et bicontinue d'un ensemble* A *en un ensemble* B, *le voisinage* $V_A(p)$ *du point p de* A *sur* A *se transforme en un voisinage* $V_B(q)$ *du point q, transformé du point p, sur* B.

Posons $V = T[V_A(p)]$ et démontrons que V est un voisinage de q sur B. En effet, soit B_1 un sous-ensemble de B tel que $B_1 \supset q$ ou $B'_1 \supset q$; comme la transformation inverse $T^{-1}(B)$ est continue sur le point q, $A_1 = T^{-1}(B_1)$ possède le point p comme un de ses points ou un de ses

(1) M. FRÉCHET, *Rendic. Palermo*, t. 22, 1906, p. 5.

points limites. Donc $A_1 V_A(p)$ n'est pas vide. Par suite $B_1 V$ n'est pas vide (par la biunivocité de T). C. Q. F. D.

Nous disons que l'espace R est *un espace* (v) de M. Fréchet si :

I*. Pour chaque point p de R, il existe un système de voisinages de p : $\{V(p)\}$ de sorte que, pour que p soit un point limite d'un ensemble E, il suffit que E ait au moins un point commun *distinct* de p avec chaque voisinage de ce système.

Chaque voisinage d'un point p contient au moins un voisinage du système $\{V(p)\}$ de voisinages de p.

Soit M un ensemble d'un espace R. Le produit de M et un voisinage d'un point p de M est un voisinage de p sur M. Pour chaque voisinage $V_M(p)$ d'un point p de M sur M, il existe au moins un voisinage $W(p)$ de p (sur R) tel que $V_M(p) \supset M.W(p)$.

La méthode de voisinage nous donne aussi une généralisation de la théorie de limite qui se développe parallèlement à celle de la dérivation que nous avons introduite plus haut. En effet, on peut supposer de plus :

II*. Pour tout point p, le produit de deux voisinages quelconques du point p contient au moins un voisinage de p.

III*. Pour deux points distincts p et q, il existe au moins un voisinage $V(p)$ de p qui est distinct du point q.

Aussi nous pouvons profiter de l'idée de voisinage pour chercher un critère pour qu'une suite tende vers un point.

Théorème II. — *Pour qu'une suite de points distincts tende vers un point p, il faut et il suffit qu'ils soient contenus presque tous* [1] *dans chaque voisinage du système* $\{V(p)\}$.

En effet si, pour un voisinage $V(p)$, il existe une suite partielle infinie de la suite qui n'est pas contenue dans $V(p)$, alors cette suite ne tendrait pas vers p; donc la condition est nécessaire. Ensuite, chaque suite partielle infinie a presque tous ses points et par suite au moins un de ses points, distinct de p, contenus dans chaque voisinage

(1) C'est-à-dire tous les points de la suite sauf un nombre fini.

du système $\{V(p)\}$ et d'après I* elle possède le point p comme un de ses points limites. Donc la condition est suffisante.

Nous disons qu'une suite de voisinages d'un point

$$V_1(p), \quad V_2(p), \quad V_3(p), \quad \ldots, \quad V_k(p), \quad \ldots$$

tend vers un point p si chaque suite de points

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_k, \quad \ldots$$

des voisinages de la suite $a_k \subset V_k(p)$, $a_k \neq p$ tend vers p. Si, pour un point p, il existe une suite de voisinages de p : $V_k(p)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) qui tend vers p, on peut choisir une suite partielle $V_{k_\nu}(p)$ qui satisfait à la condition

$$V_{k_1}(p) \supset V_{k_2}(p) \supset V_{k_3}(p) \supset \ldots \supset V_{k_\nu}(p) \supset \ldots.$$

Remarque. — Si nous associons à chaque ensemble A, l'ensemble A′ de tous les points de condensation (¹) de A comme sa dérivée, l'espace ainsi obtenu satisfait aux axiomes I, II et III; mais il n'y a aucune suite de points qui tend vers un point.

Aussi pour montrer la différence de ces deux idées nous citons un exemple, intéressant à former, des systèmes de voisinages.

Considérons la famille $\mathcal{R}$ de tous les ensembles de points du plan. Nous avons donné (p. 4) une définition d'une suite d'ensembles qui tend vers un ensemble. A la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, associons la famille $\mathcal{F}'$ de tous les ensembles E qui possèdent au moins une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ et tendant vers E. L'espace $\mathcal{R}$ ainsi obtenu satisfait à I, II et III. Pour chaque point p du plan, construisons deux familles d'ensembles $\Phi(p)$ et $\Psi(p)$: $\Phi(p)$ contient tous les ensembles qui contiennent le point p et eux seuls; $\Psi(p)$ contient tous les ensembles qui sont distincts de p et eux seuls. Alors étant donnés un ensemble E de points du plan et un point quelconque du plan, on peut déterminer un voisinage de E à savoir $\Phi(p)$ ou $\Psi(p)$ suivant que E contient p ou non. En variant p dans tout le plan, on a un système de voisinage $\{V(E)\}$ de E. Or il est facile de voir que, pour qu'une suite d'ensembles

(1) $$E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \ldots, \quad E_k, \quad \ldots$$

(¹) *Voir* Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 174. — Hansdorff, *loc. cit.*, p. 219.

tende vers E, il faut et il suffit que tous les voisinages V(E) de E de ce système $\{V(E)\}$ contiennent presque tous les termes de la suite (1).

Pour deux ensembles E_1 et E_2, il existe deux voisinages $V(E_1)$ et $V(E_2)$ de E_1 et de E_2 respectivement dans le système $\{V(E)\}$ qui n'ont pas un élément commun.

Pour un point p d'un espace R on dit que ce point p a une propriété dans son voisinage ou qu'un phénomène a lieu sur ce point si l'on peut trouver, dans chaque voisinage $V(p)$ de p, un voisinage $W(p)$ qui satisfait à la propriété correspondante. Ce phénomène s'appelle *local*. On peut introduire l'idée de localité dans les types de dimensions de M. Fréchet [1] et aussi dans les nombres de dimensions au sens de M. Brouwer [2]. Tandis que ceux de MM. Menger et Urysohn se rattachent directement à l'idée de localité, et il dépend en même temps de la notion de frontière que nous allons examiner maintenant.

5. *Hypothèse pour la fermeture; nombre de dimensions de MM. Menger et Urysohn.* — L'idée de la frontière se rattache à la *fermeture* d'une part et à l'*ouverture* d'autre part. Commençons par la première.

Le produit de tous les ensembles fermés qui contient un ensemble E s'appelle la *fermeture* de cet ensemble E, et nous le désignons par $\overline{E}$. D'après les axiomes I et II on a immédiatement

$$\overline{E} \supset E + E'. \tag{1}$$

Mais avec I, II et III on ne peut pas dire que $\overline{E} = E + E'$. Par exemple, dans l'espace $\mathcal{R}$ de la Remarque du paragraphe 4, prenons la famille E de tous les ensembles fermés. Alors $\overline{E}$ est la famille de tous les ensembles de Borel, tandis que $E + E'$ ne contient que les ensembles F_σ. Envisageons à chercher le cas où l'on a $E = E + E'$. Ceci aura lieu si l'on suppose de plus.

IV. *Tous les ensembles dérivés sont fermés.*

En effet, d'après IV, on a $E'' = (E')' \subset E'$; par suite d'après I et II, $(E + E')' = E' + E'' = E'$; ceci veut dire que $E + E'$ contient $(E + E')'$;

---

(1) FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, p. 111 (Paris, 1928).

(2) BROUWER, *Journal f. d. reine u. angew. Mathem.*, t. 142, 1913, p. 146.

$E + E'$, étant ainsi fermé, sera contenu dans $\overline{E}$; avec (1), on a enfin $\overline{E} = E + E'$.

Ou IV*. Pour chaque point p, les voisinages de p du système $\{V(p)\}$ de I* satisfont à la condition suivante : tous les points q de $V(p)$ ont au moins un voisinage $W(q)$ de q qui est contenu dans $V(p)$.

Soit p un point d'un ensemble A, on dit que p est *un point intérieur* de A, si A contient au moins un voisinage de p. L'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble A s'appelle l'intérieur de A et nous le désignons par In A.

Un ensemble A s'appelle *ouvert*, si tous les points p de A sont des points intérieurs de A. Étant donné un ensemble A, la somme de tous les ensembles ouverts qui sont contenus dans A s'appelle l'*ouverture* de l'ensemble A et nous la désignons par $\underline{A}$. $\underline{A}$ lui-même est ouvert; donc

$$\text{In}\,A \supset \underline{A}. \tag{2}$$

Mais on ne peut pas dire avec les trois axiomes I*, II* et III* que $\text{In}\,A = \underline{A}$ (¹).

Soit E un ensemble non vide d'un espace R qui n'est pas égal à R. Alors le complément CE est ouvert si E est fermé, et, d'après I*, CE est fermé si E est ouvert. D'après O l'espace R lui-même est fermé. Nous considérons aussi, en tenant compte (III), que la dérivée de l'ensemble vide est aussi vide (²). Et l'espace R lui-même est un voisinage de tous ses points; R est ouvert. Aussi conventionnellement nous supposons que l'ensemble vide est ouvert (³). La fermeture d'un ensemble E est le complément de l'ouverture de complément de E et vice versa. Ainsi, d'après I*, l'intérieur du complément CE d'un ensemble E est égal à $C(E + E')$. Et par suite si l'on a I*, II*, III* et IV on peut dire que, pour un ensemble quelconque E, $\text{In}\,E = \underline{E}$.

Ici aussi nous pouvons introduire l'idée relative. Pour un sous-

---

(¹) On peut trouver facilement un tel ensemble A tel que $\text{In}\,A \neq \underline{A}$ dans l'espace des fonctions réelles au plus de deuxième classe de Baire.

(²) Donc (O) est fermé; les axiomes I et II permettent de supposer que (O)' est non vide.

(³) Le complément d'un ensemble fermé est ouvert; et le complément d'un ensemble ouvert est fermé sans exception.

ensemble E d'un ensemble A de l'espace R, nous avons défini l'expression que E est fermé dans l'ensemble A (p. 7).

Si E est fermé dans l'ensemble A, E est le produit de $E + E'$ et de A; par suite, d'après IV, il est le produit d'un ensemble fermé et de A. Aussi d'après I si E est un produit d'un ensemble fermé et de A, E est fermé dans A. D'après I, on peut dire encore que, pour trois ensembles A, B et C tels que $A \supset B \supset C$, si C est fermé dans B et si B est fermé dans A, alors C est fermé dans A.

Pour un sous-ensemble E d'un ensemble A de l'espace R, on dit que E est *ouvert dans* A si pour chaque point p de E, il existe au moins un voisinage $V_A(p)$ de p sur A qui est contenu dans E. Le produit d'un ensemble ouvert et de A est ouvert dans A; et aussi d'après I* et IV*, si E est ouvert dans A, il existe au moins un ensemble ouvert dont la partie commune avec A est égale à E. D'après I*, II* et IV*, pour trois ensembles A, B et C tels que $A \supset B \supset C$, si C est ouvert dans B et si B est ouvert dans A, alors C est ouvert dans A.

Nous appelons la *frontière* d'un ensemble A, la différence entre sa fermeture et son ouverture, nous la désignons par front A

$$\text{front } A = \overline{A} - \underline{A}.$$

Dans l'espace où l'on a I*, II*, III* et IV*

$$\text{front } A = (A + A') - \text{In } A.$$

Théorème III. — *Dans un espace où l'on a* I, II et III, *pour chaque ensemble* A, *la frontière de* A *est égale à la frontière de son complément*

$$\text{front } A = \text{front } CA.$$

En effet on a

$$\overline{A} = C(\underline{CA}) \qquad \text{et} \qquad \underline{A} = C(\overline{CA});$$

on peut écrire

$$\text{front } A = (R - \overline{CA}) - (R - \overline{CA});$$

d'après la relation établie dans la page 4 du paragraphe 1, ceci est égal à $\overline{CA} - \underline{CA}$, c'est-à-dire à front CA.

Étant donnés un ensemble ouvert E et un ensemble A, nous voyons que la frontière de E.A sur A est le produit de la frontière de E et de A (dans un espace où l'on a les axiomes I*, II*, III* et IV*).

Maintenant nous allons définir les nombres de dimensions au sens de MM. Menger et Urysohn. Conventionnellement on part de la dimension -1 : l'ensemble vide et lui seul est de dimension -1. Pour un point p d'un ensemble A, nous disons que A est de dimensions au plus égales à n, nombre entier positif ou nul, sur ce point p, si l'on peut trouver, dans chaque voisinage de p sur A, au moins un voisinage de p sur A, dont la frontière sur A est de dimensions au plus égales à $n-1$ sur tous les points [1]. L'ensemble A qui est de dimensions au plus égales à n sur tous ses points s'appelle brièvement l'ensemble de dimensions au plus égales à n. L'ensemble A qui est de dimensions au plus égales à n et qui n'est pas de dimensions au plus égales à $n-1$ s'appelle l'ensemble de dimensions égales à n.

Ainsi d'après cette définition de récurrence, nous avons défini les ensembles de dimensions égales à

$$-1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad n,\quad \ldots.$$

Tous les autres ensembles s'appellent des ensembles de dimensions infinies.

6. *Espace distancié.* — Un espace R s'appelle *distancié* si pour chaque paire (x, y) de deux points x et y de cet espace, on peut correspondre un nombre réel non négatif $\rho(x, y)$ *distance* entre ces deux points, qui satisfait aux trois conditions suivantes :

1° $\rho(x, y) = 0$ lorsque x coïncide avec y et dans ce cas seul;
2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3° Quels que soient les trois points x, y et z,

$$\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

de sorte que, pour qu'un ensemble A de R possède un point p comme un de ses points limites, il faut et il suffit que A contienne une suite de points distincts

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_k,\quad \ldots,$$

---

(1) M. Tumarkin a étendu cette définition pour les points de A − A′ (*voir* p. 71).

dont les distances $\rho_k = \rho(a_k, p)$ tendent vers zéro quand k s'accroît indéfiniment.

On voit que cette définition de la dérivation satisfait aux axiomes I, II, III et IV. Quant au système de voisinages d'un point p de R, nous prenons tantôt les sphères $S(p, r)$ du centre p et du rayon r, nombre réel positif quelconque, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points x de R tels que

$$\rho(x, p) < r$$

ou tantôt les ensembles ouverts contenant p et contenus dans ces sphères $S(p, r)$. En choisissant les rayons qui tendent vers zéro, on voit qu'ici les axiomes I*, II*, III* et IV* sont vérifiés.

Dans un espace distancié, un ensemble s'appelle *borné* quand il est contenu dans une sphère.

Nous allons voir maintenant des propriétés essentielles de l'espace distancié concernant la séparation. D'abord III_1^*. Pour deux points distincts x_1 et x_2, il existe au moins deux voisinages $V(x_1)$ et $V(x_2)$ de x_1 et de x_2 respectivement qui sont distincts l'un l'autre.

L'espace qui satisfait à la fois aux I*, II*, III_1^* et IV* est identique à *l'espace topologique* de M. Hausdorff. Nous pouvons renvoyer au sujet de cet espace à l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* (Hausdorff, Leipzig, 1914).

Dans un espace R quelconque, on dit qu'un sous-ensemble B d'un ensemble A est *intérieur dans A* si tous les points de B sont des points intérieurs de A. Nous disons aussi B est *complètement intérieur* dans A, ou bien A *contient complètement* B si le noyau ouvert de A contient $B + B'$, et nous le désignons par $A)) B$ ou $B ((A$. Les ensembles fermés sont contenus complètement dans les ensembles ouverts qui les contiennent.

Dans un espace distancié, on peut dire encore que III_2^*. Pour tout voisinage $V(p)$ d'un point p de l'espace R, il existe un autre voisinage $W(p)$ de p contenu complètement dans celui-là.

Dans un espace où l'on a I*, II* et III_1^*, pour deux points p et q distincts, il existe deux ensembles A et B disjoints dans lesquels p et q sont complètement intérieurs. Dans un espace où l'on a I*, II* et III_3^*, pour un point p et un ensemble fermé F tel que $F.p = (0)$, il existe deux ensembles A et B distincts dans lesquels p et F sont complètement intérieurs (respectivement). L'espace satisfaisant à la fois aux axiomes $I^\star$, $II^\star$, $III_2^\star$ et $IV^\star$ s'appelle un espace *régulier*.

De la même manière on peut considérer une propriété de l'espace distancié.

$III_3^\star$. Pour deux ensembles fermés distincts F_1 et F_2 il existe deux ensembles distincts A et B dans lesquels F_1 et F_2 sont complètement intérieurs.

L'espace satisfaisant à la fois aux axiomes $I^\star$, $II^\star$, $III_3^\star$ et $IV^\star$ s'appelle un *espace normal*.

Il y a une notion topologique très importante que l'espace distancié en général ne possède pas. C'est la séparabilité d'un espace qui, malgré la similitude de mots, n'a aucun rapport avec la séparation définie page 7.

V. Un espace R quelconque s'appelle *séparable* quand il existe un sous-ensemble R_1 dénombrable tel que tous les points de R sont un des points de R_1 ou un des points limites de R_1 : $R = R_1 + R'_1$.

Ceci correspond au deuxième axiome de dénombrabilité de M. Hausdorff qui n'est pas tout à fait équivalent.

$V^\star$. Un espace R s'appelle *parfaitement séparable* s'il existe une famille $\mathfrak{F}$ d'un nombre dénombrable d'ensembles tels que pour chaque point p de R on peut choisir un système de voisinage $\{V(p)\}$ de $I^\star$ qui est une sous-famille de $\mathfrak{F}$.

Pour un espace distancié, V et $V^\star$ sont équivalents.

Le fameux théorème d'Urysohn sur la métrisation dit qu'un espace normal et parfaitement séparable est un espace distancié (¹); mais M. Tychonoff a démontré que tout espace régulier et parfaitement séparable est normal. Donc l'espace régulier et parfaitement séparable est un espace distancié.

Dans un espace distancié, on dit qu'une suite de points

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_k, \quad \ldots$$

est *une suite fondamentale*, si pour chaque nombre réel positif $\varepsilon > 0$,

(¹) Urysohn, *Math. Ann.*, t. 94, 1925, p. 309. — Tychonoff, *Math. Ann.*, t. 95, 1925, p. 139.

on peut associer un indice m de sorte que les distances entre les points a_i et a_j soient plus petites que ε : $\rho(a_i, a_j) < \varepsilon$ pour tous les indices i et j tels que $i \geqq m$ et $j \geqq m$. On voit que toutes les suites qui tendent vers un point d'un espace distancié sont des suites fondamentales.

Soit P une partie distanciée d'un espace R ; si une suite fondamentale de P tend vers un point p qui n'appartient pas à P, on peut définir les distances entre le point p et les points de P. En effet, soit $a_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ la suite fondamentale qui tend vers le point p; alors la distance $\rho(\alpha, p)$ entre un point quelconque α de P et le point p peut être définie par

$$\rho(\alpha, p) = \lim_{k=\infty} \rho(\alpha, a_k).$$

On voit facilement que les distances ainsi définies satisfont aux trois axiomes de la distance.

L'espace distancié où toutes les suites fondamentales tendent vers leur limite s'appelle *un espace complet*. Un théorème important que nous utiliserons plus tard sans démonstration est le suivant :

THEORÈME. — *Dans un espace complet, si une suite d'ensembles fermés, bornés, non vides est monotone non croissante :*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots,$$

alors ΠA_k *possède au moins un point, si le diamètre de* A_k *tend vers zéro avec* $\frac{1}{k}$ (1).

La plupart de nos résultats s'établissent dans l'espace distancié. Donc prenons comme base cette catégorie d'espaces et nous disons simplement un *espace* ce qu'on entend par là un espace distancié, dans ce qui suit (2).

---

(1) Pour la démonstration, *voir* HAUSDORFF, *loc. cit.*, p. 318; la borne supérieure des distances de toutes les couples de points d'un ensemble s'appelle le diamètre de cet ensemble.

(2) Quand une proposition sera reconnue comme valable dans un espace plus général, nous le specifierons dans l'énoncé.

CHAPITRE II.

COMPOSITION DES ESPACES.
TYPES DE DIMENSIONS DANS UN ESPACE A UNE INFINITÉ DE VARIÉTÉS.

7. *La somme simple.* — Étant donnés un ensemble R et ses parties distanciées, peut-on prolonger ces parties en R entier de sorte que R devienne un espace distancié et comment?

Nous allons nous occuper de ce problème au commencement de ce chapitre, mais nous nous contentons de traiter seulement deux cas spéciaux : la somme simple et la composition des espaces.

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ une suite finie ou infinie dénombrable d'espaces distanciés (disjoints). On peut alors construire un nouvel espace A distancié, en faisant correspondre biunivoquement les points de A et ceux de la somme de tous les A_k, de telle sorte que la distance entre deux points correspondant aux points de même A_k soit égale à la distance entre ceux-ci, tandis que la distance entre deux points correspondant aux points de différents A_k, A_i et $A_j (i<j)$ par exemple soit plus grande qu'un nombre réel positif $\varepsilon_i > 0$ déterminé par i, indice inférieur.

Pour effectuer cette opération, il y aura plusieurs moyens. Choisissons, par exemple, un point a_k représentatif de chaque A_k (d'après l'axiome de choix de Zermelo), et définissons d'abord $\rho(a_i, a_j)$ de sorte que les trois axiomes de la distance soient vérifiés pour cette suite des a_k et que

$$\rho(a_i, a_j) \geqq \varepsilon_i.$$

ε_i étant un nombre réel positif. On peut supposer par exemple

$$\rho(a_i, a_j) = |i-j|.$$

Et posons maintenant

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha, a_i) + \rho(\beta, a_j) + \rho(a_i, a_j) \qquad (i \neq j),$$

où α et β sont des points quelconques de A_i et A_j respectivement. On voit facilement que les trois axiomes de la distance sont vérifiés ici pour toutes les paires de points de ΣA_k.

Nous appelons ce nouvel espace A la *somme simple* des espaces A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Nous désignons la partie de A correspondant à A_k par le même A_k si l'ambiguïté n'a lieu.

(I). *Toutes les sommes simples de la même suite des espaces sont homéomorphes.*

En effet, elles correspondent biunivoquement; et cette correspondance est aussi bicontinue, car si une suite de points tend vers un point α_i de A_i dans une somme simple, alors presque tous les points de cette suite appartiennent à A_i, et c'est la même chose pour ses images.

(II). *Chaque* A_k *est ouvert et fermé dans la somme simple.*

On peut exprimer cette proposition en disant que chaque A_k est *isolé* dans la somme simple.

8. *Composition des espaces.* — Étant donnée une famille d'espaces $A(m)$ qui correspondent biunivoquement aux éléments m d'un ensemble M, nous pouvons construire un nouvel ensemble R dont les éléments sont des combinaisons de tous les points de $A(m)$. Si l'on définit la distance entre chacun des deux éléments de cet ensemble R, l'espace ainsi obtenu s'appelle l'*espace composé* de $A(m)$, $m \subset M$. Nous allons voir comment on peut définir cette distance. Seulement nous nous contentons pour fixer les idées de traiter le cas où l'ensemble M est dénombrable. Dans ce cas les points a de cet espace R peuvent être représentés sous la forme

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots),$$

où $a_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ est un point de l'espace A_k qui correspond au $k^{\text{ième}}$ élément de M.

a_k s'appelle $k^{\text{ième}}$ coordonnée du point a, ou bien la *projection* de a sur l'ensemble A_k. La partie de l'espace R dont les points p sont représentés par

$$p = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots),$$

où x_k est le point variable de A_k et tous les autres $a_i (i \neq k)$ sont points fixés de A_i, peut être transformée en A_k biunivoquement. *Envisageons de définir la distance de sorte que cette partie soit homéomorphe à* A_k.

Étant donnés deux points a et b de l'espace R

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots),$$
$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, \ldots),$$

définissons la distance $\rho(a, b)$ entre ces deux points assujettie aux trois conditions suivantes :

(1). $\rho(a, b)$ est une fonction des $r_k = \rho(a_k, b_k)$; on peut poser

$$\rho(a, b) = f(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k, \ldots);$$

(2). $\rho(a, b)$ est une fonction monotome des $r_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$, c'est-à-dire $r'_k \geqq r''_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ entraîne

$$f(r'_1, r'_2, r'_3, \ldots, r'_k, \ldots) \geqq f(r''_1, r''_2, r''_3, \ldots, r''_k, \ldots);$$

(3). $f(0, 0, 0, \ldots, 0, r_k, 0, \ldots)$ est une fonction continue sur le point $r_k = 0$ pour chaque k :

$$\lim_{r_k = 0} f(0, 0, 0, \ldots, 0, r_k, 0, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 1, 3, \ldots).$$

Ces trois conditions ne sont pas en contradiction aux trois axiomes de la distance. Pour le voir, cherchons des exemples de telles distances.

Supposons que tous les espaces A_k sont des espaces linéaires R_1; alors les coordonnées a_k d'un point a de R sont tous des nombres réels.

1*. M. Hilbert a considéré un des tels espaces dont la distance entre deux points a et b a la forme

$$\rho^2(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2,$$

à condition que la série soit convergente.

2*. M. Fréchet a défini la distance entre deux points a et b comme suit :

$$\rho(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Tous les deux points, alors, ont leur distance finie.

Nous désignons cet espace par E_ω.

3*. Comme distance définie par la série on peut citer aussi celle des espaces R^p_ω (*voir* p. 24)

$$\rho^p(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^p \qquad (p \geqq 1);$$

en particulier si $p = 1$

$$\rho(a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|,$$

à condition que ces séries soient convergentes.

4*. Comme une définition qui s'applique au cas où le nombre des espaces composants $A(m)$ n'est pas dénombrable, on peut considérer

$$\rho(a, b) = \text{borne supérieure de } |a_k - b_k|$$

ou

$$\rho(a, b) = \text{borne supérieure de } \rho[a(m), b(m)].$$

quand le nombre des espaces composantes est fini, on peut le regarder comme cas limite de 3* pour $p = \infty$ (¹).

Nous allons maintenant voir les propriétés communes des espaces composés d'une infinité d'espaces, où deux points ont une distance soumise aux trois conditions données plus haut.

(I). Si une suite de points

$$a^\nu = (a^\nu_1, a^\nu_2, a^\nu_3, \ldots, a^\nu_k, \ldots) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

tend vers une limite $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots)$, alors chaque coordonnée a^ν_k tend vers $p_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

En effet, s'il y a une suite de points a^ν_k pour une coordonnée k, qui ne tend pas vers p_k, on peut extraire une suite partielle a^{μ_ν} dont les $k^{\text{ièmes}}$ coordonnées satisfont à $\rho(a^{\mu_\nu}_k, p) \geqq q_k > 0$, q_k étant un nombre

(¹) Quand ce nombre est infini, il existe des paires de points dont les distances ne sont pas la limite de celle de 3* par exemple la distance entre deux points $o = (0, 0, 0, \ldots)$ et $a = (1, 1, 1, \ldots)$ ou bien

$$b = \left(\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 3}, \frac{1}{\log 4}, \ldots, \frac{1}{\log(1+k)}, \ldots\right).$$

positif. Par suite nous avons, en posant $0 < \rho(p, q) < q_k$,

$$q = (p_1, p_2, p_3, \dots p_{k-1}, q, p_{k+1}, \dots),$$
$$\rho(a^{\mu_\nu}, p) \geqq \rho(p, q) > 0,$$

d'après (2).

(II). Dans un ensemble compact en soi, une suite de points a^ν tend vers une limite p si toutes les coordonnées a_k^ν tendent vers une limite p_k; $p = p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots)$ (¹).

En effet, comme cet ensemble est compact en soi, on peut extraire une suite partielle a^{μ_ν} de a^ν, qui tend vers une limite

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots).$$

D'après (I) $a_k = \lim\limits_\nu a_k^{\mu_\nu} = p_k$, donc $a = p$; chaque suite partielle de a^ν possède le point p comme un de ses points; donc a^ν tend vers p.

(III). La partie de l'espace R de tous les points p tels que

$$p = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots),$$

où $a_i (i \neq k)$ sont des points fixés de A_i et x_k est un point variable de A_k, est homéomorphe à A_k.

En effet si nous faisons correspondre le point p de cette partie au point x_k de l'espace A_k, cette correspondance est biunivoque. Si une suite de point x_k^ν de A_k tend vers le point x_k, la suite de points correspondants p^ν tend vers le point p car d'après (3)

$$\rho(p^\nu, p) = f[0, 0, 0, \dots, \rho(x_k^\nu, x_k), 0, \dots]$$

tend vers zéro, quand $\rho(x_k^\nu, x_k)$ tend vers zéro. D'après (I) la réciproque est aussi vraie et cette correspondance est biunivoque.

(IV). Une suite de points $a^\nu (\nu = 1, 2, 3, \dots)$ tend vers un point $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots)$ si toutes les coordonnées

$$a_i^\nu \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

tendent vers p_i et si de plus, pour toutes les autres,

$$a_j^\nu = p_j \qquad (j = k+1, k+2, k+3, \dots).$$

(¹) Remarquons que nous ne pouvons pas conclure que $\lim\limits_\nu a_\nu^k = p_k$ pour tous les k) entraîne $\lim\limits_\nu a^\nu = p$, en général.

9. *Espaces linéaires.* — L'espace R qui est plongé dans l'ensemble E composé à partir d'une infinité dénombrable des espaces cartésiens linéaires R_1 s'appelle *un espace linéaire* quand :

1° Il contient l'origine O, point dont toutes les coordonnées sont nulles;

2° Avec deux points de R,

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$$

et

$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, \ldots),$$

il contient le point $a + b$ représenté par

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_k + b_k, \ldots);$$

3° Avec un point $a = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$ de R, il contient tous les points p représentés par

$$p = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3, \ldots, \lambda_k a_k, \ldots) \qquad |\lambda_k| < \lambda,$$

où λ est un nombre réel quelconque positif.

Cherchons les exemples d'espaces linéaires à une infinité de variétés :

1° La partie de E dont les points possèdent la distance au sens de M. Hilbert finie de l'origine s'appelle l'espace hilbertien de dimensions infinies et il est désigné par Ω. Ω est un espace linéaire.

2° L'espace E_ω de M. Fréchet (*voir* p. 22) est linéaire.

3° Si l'on emploie la troisième définition de la distance, on a l'espace linéaire R_ω^p.

4° Si l'on emploie la quatrième, on a l'espace (D_ω) et si l'on ajoute encore une condition $\lim\limits_{k} a_k = 0$ pour chaque point

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots),$$

on a un espace (Δ_ω) plongé dans (D_ω). (D_ω) et (Δ_ω) sont linéaires.

Dans l'ensemble E, les points dont les coordonnées sont toutes égales à zéro à partir du rang $k + 1$ forment une partie que nous désignons par (E_k). Cette partie est contenue dans les espaces Ω, E_ω, R_ω^p et (Δ_ω). Quand on la regarde comme une partie de Ω, elle peut être considérée identique à l'espace cartésien R_k et elle s'appelle l'*espace cartésien à variétés k plongé dans l'espace hilbertien* Ω.

D'après (I) et (IV) du paragraphe 8, dans tous les cas, cette partie (E_k) est homéorphe à R_k

La somme de toutes ces parties

$$(A) = (E_1) + (E_2) + (E_3) + \ldots + (E_k) + \ldots$$

est de dimensions infinies. Nous la désignons par (ω) quand il s'agit de Ω et par (R) quand il s'agit de E_ω. (ω) et (R) sont aussi des ensembles linéaires [1].

La distance entre deux points des espaces Ω, E_ω, R_ω^p et Δ_ω satisfait non seulement aux trois conditions du paragraphe 8, mais encore aux deux suivantes :

(4). Soit $\rho(a, b) = f(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k, \ldots)$ la distance entre deux points de E dont un, a, appartient à un espace R plongé dans E. Posons

$$\rho_k = f(0, 0, \ldots, 0, r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots).$$

Pour que b appartienne aussi à cet espace R, il faut et il suffit que $\lim\limits_k \rho_k = 0$.

(5). Pour deux points a et b de E tel que $r_k = |a_k - b_k|$, posons

$$\sigma_k = f(r_1, r_2, \ldots, r_k, 0, 0, 0, \ldots).$$

Alors si σ_k tend vers une limite, $\rho(a, b)$ existe et elle est égale à cette limite.

Cherchons maintenant les propriétés de tous les espaces linéaires vérifiant (1), (2), (3), (4) et (5).

D'abord remarquons que :

(I). La sphère fermée : l'ensemble de tous les points qui sont situés à une distance inférieure ou égale à un nombre positif est borné et fermé, mais il n'est pas compact en général.

Dans E_ω ainsi que dans Ω, il existe une suite divergente, c'est-à-dire une suite de points sans aucun point limite, dans toute sphère fermée [2].

---

[1] Mais dans ces ensembles, la condition (4) formulée plus loin n'est pas suffisante.

[2] Par exemple, considérons dans E_ω un point $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ et une

(II). Pour chaque point $a=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$ de cet espace, l'ensemble de tous les points $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots)$ tels que $|x_k| \leqq t|a_k|$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, où t est une constante positive indépendante de k, est compact en soi.

En effet, soit

$$x^\nu=(x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu, \ldots, x_k^\nu, \ldots)$$

une suite de points tels que $|x_k^\nu \leqq t|a_k|$. Comme x_k^ν est borné (pour ν) il nous donne une suite partielle qui tend vers un nombre; par suite nous pouvons voir facilement (par l'opération diagonale) qu'il existe une suite partielle y^ν de x^ν

$$y^\nu=(y_1^\nu, y_2^\nu, y_3^\nu, \ldots, y_k^\nu, \ldots)$$

telle que y_k^ν tend vers une limite p_k quand ν s'accroît indéfiniment. Or le point

$$b=(2ta_1, 2ta_2, 2ta_3, \ldots, 2ta_k, \ldots)$$

appartenant à cet espace, si l'on pose

$$c_k=(0, 0, 0, \ldots, 0, 2ta_k, 2ta_{k+1}, \ldots),$$

alors, d'après (4), étant donné un nombre positif $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut déterminer un indice m tel que $\rho(c_k, 0) < \varepsilon$ pour tout k dès que $k \geqq m$. Posons encore

$$z^\nu=(y_1^\nu, y_2^\nu, y_3^\nu, \ldots, y_{m-1}^\nu, p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots),$$

alors comme

$$|p_k| \leqq t|a_k|, \qquad |p_k - y_k^\nu| \leqq 2t|a_k|,$$

et par suite

$$\rho(z^\nu, y^\nu) \leqq \rho(c_m, 0) < \varepsilon.$$

D'après (IV) (§ 8),

$$\lim_\nu z^\nu = p,$$

puisque

$$\lim_\nu y_i^\nu = p_i \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, m-1),$$

---

double suite

$$a(\nu, k)=(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k-1}, p_{k+\nu}, p_{k+1}, \ldots) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, \nu=1, 2, 3, \ldots),$$

qui tend vers p uniformément quand k s'accroît indéfiniment. Cette suite est divergente si k reste fixé.

tandis que les autres coordonnées sont fixées. Par suite, on peut trouver un indice m_1 tel que $\rho(z^\nu, p) < \varepsilon$ pour tout ν dès que $\nu \geqq m_1$. Alors on a

$$\rho(y^\nu, p) \leqq \rho(y^\nu, z^\nu) + \rho(z^\nu, p) < 2\varepsilon,$$

dès que ν dépasse un nombre fixé. Donc la suite y^ν tend vers p et ce point appartenant à notre ensemble, celui-ci est compact en soi.

(III). Si une suite de points $a^\nu (\nu = 1, 2, 3, \dots)$,

$$a^\nu = (a_1^\nu, a_2^\nu, a_3^\nu, \dots, a_k^\nu, \dots),$$

est fondamentale, alors toutes suites $a_k^\nu (\nu = 1, 2, 3, \dots)$ de coordonnées sont aussi des suites fondamentales.

En effet, si pour un indice k la suite n'est pas fondamentale, il existe un nombre réel positif $\delta_k > 0$, et une suite de paire de nombres $a_k^{\mu(\nu)}$ et $a_k^{\mu'(\nu)}$ telles que $|a_k^{\mu(\nu)} - a_k^{\mu'(\nu)}| \geqq \delta_k$ pour tout ν.

Prenons un point tel que

$$b = (0, 0, 0, \dots, 0, \delta_k, 0, 0, \dots)$$

et posons $\nu(b, 0) = \varepsilon > 0$ la distance entre b et l'origine.

On voit que d'après (1) et (2) du paragraphe 8,

$$\rho(a^{\mu(\nu)}, a^{\mu'(\nu)}) \geqq \rho(b, 0) = \varepsilon.$$

La suite a^ν ne peut pas être fondamentale.

(IV). Notre espace linéaire est complet.

En effet, soit $a^\nu = (a_1^\nu, a_2^\nu, a_3^\nu, \dots, a_k^\nu, \dots)$ une suite fondamentale.

D'après (III), la suite de coordonnées α_k^ν est fondamentale et par suite, elle tend vers un nombre p_k. Posons

$$q_N = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_N, 0, 0, 0, \dots),$$
$$b(iN) = (a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots, a_N^i, 0, 0, 0, \dots),$$

q_N et $b(i, N)$ appartiennent à cet espace. Comme $a^i (i = 1, 2, 3, \dots)$ est une suite fondamentale, étant donné un nombre positif arbitraire $\delta > 0$, on peut déterminer un indice m tel que

$$\rho[b(i, N), b(j, N)] \leqq \rho(a^i, a^j) < \delta \qquad (\text{dès que } i, j \geqq m).$$

D'après (IV) (§ 8), on a

$$\lim b(j, N) = qN.$$

D'où

$$\rho[b(i, N), q_N] \leqq \delta \qquad (\text{dès que } i \geqq m).$$

Il faut remarquer ici que l'indice m est indépendant de N.

D'autre part, a^i étant un point de cet espace, d'après (4),

$$\rho_k = f(0, 0, 0, \ldots, 0, |a^i_{k+1}|, |a^i_{k+2}|, |a^i_{k+3}|, \ldots)$$

tend vers zéro; par suite $\rho_N = \rho\ [b(i, N), a^i]$ tend vers zéro ; étant donné un nombre positif $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut déterminer un indice l tel que

$$\rho[b(iN), a^i] < \varepsilon \qquad (\text{dès que } N \geqq l),$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho(a^i, q_N) \leqq \rho[a^i, b(iN)] + \rho[b(iN), q_N] < \delta + \varepsilon \\ \qquad\qquad (\text{dès que } i \geqq m \text{ et } N \geqq l). \end{cases}$$

Pour deux nombres entiers N et N′ tels que $N, N' \geqq l$,

$$\rho(q_N, q_{N'}) \leqq \rho(a^i, q_N) + \rho(a^i, q_{N'}) < 2(\delta + \varepsilon).$$

Ainsi

$$\sigma_{N\,N'} = \rho(q_N, q_{N'}) = f(0, 0, 0, \ldots, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots, p_{N'}, 0, 0, \ldots)$$
$$(N' = 1, 2, 3, \ldots)$$

est une suite bornée et non décroissante ; elle tend vers une limite σ_N ; et d'après (5) ceci est égal à $\rho(p, q_N)$.

Donc $\rho(p, q_N) \leqq 2(\varepsilon + \delta)$ dès que $N \geqq l$. Ceci veut dire que σ_N tend vers zéro; et d'après (4) p appartient à cet espace.

(1) nous donne aussi

$$\rho(a^i, p) \leqq \rho(a^i, q_N) + \rho(q_N, p) < 3(\varepsilon + \delta) \qquad (i \geqq m;\ N \geqq l);$$

a^i tend ainsi vers p, C. Q. F. D.

(V). Si une suite de sphères (ouvertes ou fermées) monotone décroissante

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_k \supset \ldots$$

ont leur diamètre qui tend vers zéro, alors elle tend vers un point p, c'est-à-dire toutes les suites de points a^ν tels que $a^\nu \subset S_k$ tend vers ce point [1].

D'ailleurs

$$p = \prod_k \overline{S}_k.$$

(VI) Notre espace est séparable.

Nous avons vu que (E_k) est séparable, parce qu'il est homéomorphe à R_k. Donc $(A) = \Sigma(E_k)$ est aussi séparable. (A) est dense partout dans notre espace, car le point

$$p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k \ldots)$$

est la limite d'une suite de points $p^k = (p_1, p_2, p_3, \ldots\ p_k, 0, 0 \ldots)$ de (E_k) d'après (4). Donc l'espace est séparable.

10. *Composition des espaces au sens strict.* — L'espace composé

$$R = [A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots]$$

s'appelle *un espace composé au sens strict* si, pour qu'une suite de points.

$$a^\nu = (a_1^\nu, a_2^\nu, a_3^\nu, \ldots, a_k^\nu, \ldots) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

où a_k^ν est un point quelconque de A_k, tende vers un point

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots),$$

il faut et il suffit que

$$\lim_\nu a_k^\nu = a_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (IV) (§8), l'espace composé de deux espaces A et B, [A, B] et par suite l'espace composé d'un nombre fini d'espaces

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \qquad \text{et} \qquad A_n : [A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n]$$

sont des espaces composés au sens strict. L'espace E_ω de M. Fréchet aussi.

Nous allons voir les propriétés de la composition au sens strict.

---

[1] *Voir* la page 18.

(I). Si deux espaces A et B ou une suite d'espaces

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \ldots$$

sont compacts (en soi), $[A, B]$ ou $[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots]$ au sens strict est aussi compact (en soi).

(II). Soient A et B les sous-ensembles de C et D fermés dans C et D respectivement. Alors $[A, B]$ est un sous-ensemble de $[C, D]$ fermé dans $[C, D]$. De même, soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ les sous-ensembles de $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots$ fermés daus ceux-ci respectivement, alors $[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots]$ est un sous-ensemble de $[B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots]$ fermé dans celui-ci.

(III). Soient A, C et B, D deux paires d'ensembles qui sont respectivement homéomorphes. Alors $[A, B]$ et $[C, D]$ sont homéomorphes. De même soient A_k et B_l deux suites d'ensembles homéomorphes respectivement $k = 1, 2, 3, \ldots$. Alors

$$[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots] \quad \text{et} \quad [B_1, B_2, B_3, \ldots B_k, \ldots]$$

sont aussi homéomorphes.

(IV). Soit $V(\alpha, \beta)$ un voisinage d'un point (α, β) de l'espace $[A, B]$ résultant de la composition de deux espaces A et B, $\alpha \subset A$ et $\beta \subset B$. Alors il existe deux voisinages $V(\alpha)$ de α sur A et $V(\beta)$ de β sur B tels que

$$[V(\alpha), V(\beta)] \subset V(\alpha, \beta).$$

De même, soit $V(\alpha)$ un voisinage d'un point $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots]$, de l'espace $[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_l, \ldots]$ sur cet espace; $\alpha_k \subset A_l$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ Alors il existe une suite de voisinages $V(a_k)$ de a_k sur A_k tels que

$$[V(a_1), V(a_2), V(a_3), \ldots, V(a_k), \ldots] \subset V(a).$$

En effet, prenons pour chaque point a_l une suite de voisinages $V^\nu(a_k)$ de a_k sur A_k $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ qui tend vers ce point a_k Posons

$$F^\nu = [V^\nu(a_1), V^\nu(a_2), V^\nu(a_3), \ldots, V^\nu(a_k), \ldots].$$

Je dis que F^ν sont contenus dans $V(a)$ à partir du certain rang. Car si, pour une suite d'indices λ, il existe dans F^λ au moins un point α^λ distinct de $V(a)$,

$$\alpha^\lambda = (\alpha_1^\lambda,\ \alpha_2^\lambda,\ \alpha_3^\lambda,\ \ldots),$$

comme $\alpha_k^\lambda \subset V'(a_k)$, on a

$$\lim_\lambda \alpha_k^\lambda = a_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Donc

$$\lim_\lambda \alpha^\lambda = a;$$

α^λ doit appartenir à $V(a)$ à partir d'un certain rang. C. Q. F. D.

Nous pouvons énoncer comme théorème réciproque :

(V). Si *deux ensembles* A *et* B *sont ouverts sur* C *et sur* D $A \subset C$, $B \subset D$ *respectivement, alors* $[A, B]$ *est ouvert sur* $[C, D]$.

En effet, par

$$[C, D] = [A, B] + \{[(C - A), D] + [A, (D - B)]\},$$

$[C, D]$ se décompose en deux parties distinctes, et $C - A$ étant fermé dans C, $[(C - A), D]$ est fermé dans $[C, D]$ d'après (II). De même $[A, (D - B)]$ est fermé dans $[C, D]$ et par suite

$$\{[(C - A), D] + [A, (D - B)]\}$$

est fermé dans $[C, D]$; son complément est ouvert sur $[C, D]$.

Remarquons que ce théorème ne s'étend pas au cas de l'espace composé d'une infinité de composants. En effet, dans l'espace E_ω par exemple, l'ensemble

$$F = [V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k, \ldots],$$

où V_k est un ensemble ouvert formé de tous les nombres p_k tel que $|p_k| < 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, est composé d'une infinité d'ensembles ouverts. Il n'est pas ouvert, car il contient l'origine

$$p_k = 0 \ (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

mais pas un voisinage de l'origine sur E_ω.

11. *Ensembles réfléchis.* — Nous allons observer d'abord une catégorie d'ensembles denses en soi : un ensemble A s'appelle *réfléchi* s'il contient au moins deux points distincts et si dans tous les sous-

ensembles ouverts non vides, existe au moins une partie homéomorphe à A. Pour qu'un ensemble A soit réfléchi, il faut et il suffit qu'il contienne au moins deux points distincts et que le type de dimensions du voisinage de chaque point de A soit égal à celui de A.

L'ensemble réfléchi est dense en soi. Si l'ensemble réflechi n'est pas dénombrable, tous ses points sont des points de condensation.

(I). L'ensemble B homéomorphe à un ensemble A réfléchi est aussi réfléchi.

En effet, soit $V(b)$ un voisinage de point b de B sur B. Posons $B = T(A)$; $b = T(a)$. D'après le théorème du paragraphe 2, Chapitre I, $T^{-1}[V(b)]$ contient un voisinage $V(a)$ de a sur A. Celui-ci étant réfléchi, $V(a)$ contient une partie A_1 homéomorphe à A. Alors l'ensemble $B_1 = T(A_1)$ est contenu dans $V(b)$ et homéomorphe à A_1 par suite à A et enfin à B.

(II). Soit B un sous-ensemble non vide d'un ensemble A ouvert sur A. Si A est réfléchi, B l'est aussi.

En effet, comme B est ouvert sur A, dans chaque voisinage $V(b)$ du point b de B sur B, il existe un voisinage $W(b)$ de b sur A. $W(b)$ contient une partie A_1 homéomorphe à A; comme $B \subset A$, A_1 contient une partie homéomorphe à B.

(III). Si deux ensembles A et B sont réfléchis, $[A, B]$ est aussi réfléchi. Soit A_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ une suite d'ensembles réfléchis. Alors l'espace composé au sens strict $[A_1, A_2, A_3, \dots]$ est aussi réfléchi.

Nous allons voir la dernière partie du théorème. La première moitié se démontre de la même manière. Soit $V(a)$ un voisinage d'un point $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ de $F = [A_1, A_2, A_3, \dots]$. D'après (IV) (§ 10), on peut trouver une suite de voisinages $V(a_k)$ de a_k sur A_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ telle que $[V(a_1), V(a_2), V(a_3), \dots] \subset V(a)$, A_k étant réfléchi, $V(a_k)$ contient une partie B_k homéomorphe à A_k. Alors $F_1 = [B_1, B_2, B_3, \dots]$ est contenu dans $V(a)$ et homéomorphe à F d'après (III) (§ 10).

Exemples d'ensembles réfléchis. — La droite, espace cartésien R_1 à une variété, est réfléchie; ses segments et ses intervalles sont réfléchis; les espaces cartésiens R_n à variétés n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont réfléchis ; les domaines([1]) ouverts ou fermés dans R_n sont réfléchis. Les espaces à une infinité de variétés E_ω et Ω sont réfléchis.

L'ensemble C_n de tous les points de l'espace R_n dont toutes les n coordonnées sont rationnelles et l'ensemble H_n de tous les points de l'espace R_n dont toutes les n coordonnées sont irrationnelles sont réfléchis ; les ensembles $R_n - C_n$ et $R_n - H_n$ sont réfléchis. L'ensemble parfait et non dense de Cantor sur le segment $[0, 1]$ de R_1 est réfléchi.

12. *Le type infini et minimum de dimensions.* — Commençons par démontrer un théorème général :

(I). *Soit* A *la somme simple* (p. 20) *d'une suite d'ensembles réfléchis* A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *dont le type de dimensions satisfait à la condition* $dA_k \leqq dA_{k+1}$. *Alors pour tous les ensembles tels que* $dA_k \leqq dE$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *on a*

$$dA \leqq dE.$$

Démonstration. — $dA_k \leqq dE$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) veut dire que, pour chaque k, il existe un sous-ensemble B_k de E homéomorphe à A_k. La somme $B = \sum_k B_k$ étant une partie de E

$$d\left(\sum_k B_k\right) \leqq dE. \tag{1}$$

B_k est homéomorphe à A_k qui est réfléchi, B_k lui-même est réfléchi d'après (I) (§ 2). Pour un point b de B, $b \subset B_\nu$ par exemple, deux cas sont possibles : ou bien dans chaque sphère $S(b)$ du centre b sur B, il existe des points de B_k pour une infinité d'indices de k, ou bien il existe une sphère $S(b)$ de centre b sur B qui ne contient des points de B_k que pour un nombre fini d'indices de k, dont le plus grand est λ. λ étant un nombre entier positif qui diminue avec le rayon r de la sphère $S(b)$, il tend vers une limite $\lambda(b)$, lorsque r tend vers zéro. $\lambda(b)$ étant un nombre entier, il existe un rayon positif $r > 0$, pour lequel λ est égal à $\lambda(b)$. Donc dans le deuxième cas on peut dire que,

---

([1]) L'ensemble ouvert dans R_n s'appelle le domaine de R_n.

pour le point b il existe un indice $\lambda(b)$ et un rayon positif $r > 0$, tel que la sphère $S(b)$ de centre b et de rayon $\leqq r$ est distinct de $B_{\lambda(b)+1}$, $B_{\lambda(b)+2}$, $B_{\lambda(b)+3}$, ..., mais $B_{\lambda(b)}$ a au moins un point commun avec cette sphère.

1° *Cas où* B *contient au moins un point* p *de première espèce.* — Prenons un point p_1 de B distinct de p et posons $\rho_1 = \rho(p_1, p)$ la distance entre p_1 et p. Supposons que p_1 est un point de B_{μ_1}. La sphère $S(p_1)$ de centre p_1, et de rayon $\frac{\rho_1}{4}$ sur B_{μ_1}, contient une partie C_1 homéomorphe à B_{μ_1} et par suite à A_{μ_1}. D'autre part, la sphère $S(p)$ de centre p et de rayon $\frac{\rho_1}{4}$ sur B, contient des points de B_k pour une infinité d'indices k. Soit p_2 un point de cette sphère distincte de p et qui appartient à B_{μ_2} ($\mu_2 > \mu_1$). Posons $\rho_2 = \rho(p_2, p)$. La sphère $S(p_2)$ de centre p_2 et de rayon $\frac{\rho_2}{4}$ sur B_{μ_2} contient une partie C_2 homéomorphe à B_{μ_2} et par suite à A_{μ_2}. Continuons ainsi de suite; ainsi nous avons une suite d'ensembles C_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$), contenus dans B et tels que C_k est homéorphe à A_{μ_k} ($\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$), et isolé dans la somme ΣC_k. Comme $\mu_k \geqq k$, C_{μ_k} contient une partie D_k homéomorphe à A_k. D_k étant isolé dans la somme $D = \sum\limits_k D_k$, cette somme D est homéorphe à A.

Donc

$$dB \geqq dD = dA.$$

Avec (1) nous avons $dE \geqq dA$.

2° *Cas où* B *ne contient aucun point de première espèce.* — Prenons un point p_1 de B, et une sphère $S(p_1)$, de centre p_1 et de rayon $r_1 > 0$ qui correspond à l'indice $\lambda(p_1)$. Et prenons ensuite un point p_2 de $B_{\lambda(p_1)+1}$ et une sphère $S(p_2)$ de centre p_2 et de rayon $r_2 > 0$ qui correspond à l'indice $\lambda(p_2)$. Continuons ainsi de suite. Alors on voit que $S(p_k)$ ne contient aucun point de la suite $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3} \ldots$, ($k = 1, 2, 3 \ldots$).

Posons σ_k = minimum de k nombres $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{k-1}$ et r_k.

La sphère $S(p_k, \sigma_k)$ du centre p_k et du rayon σ_k ne contient aucun point de la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots$; par suite si l'on forme la suite de sphères $S_k = S\left(p_k, \frac{\sigma_k}{4}\right)$ de centre p_k et de rayon $\frac{\sigma_k}{4}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ chaque sphère de cette suite est isolée dans la somme $\sum_k S_k$. Or $S_k \cdot B_{k(p_k)}$ étant ouvert dans $B_{k(p_k)}$ réfléchi, S_k contient une partie C_k homéomorphe à $B_{k(p_k)}$ et par suite à $A_{k(p_k)}$. Comme $\lambda(p_k) \geqq k$, C_k contient une partie D_k homéomorphe à A_k. D_k étant isolé dans la somme $D = \sum_k D_k$, D est homéorphe à A.

Donc

$$dB \geqq dD = dA.$$

Avec (1) nous avons

$$dE \geqq dA. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(II). *Soit* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ *une suite d'ensembles réfléchis dont les types de dimensions satisfont à*

$$dA_1 < dA_2 < dA_3 < \ldots < dA_k < \ldots$$

Alors parmi les types de dimensions qui sont plus grands que tous les dA_k $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ *celui de la somme simple* A *de cette suite est le minimum* (¹).

En effet nous avons $dA \geqq dA_k$ pour chaque k et d'autre part $dA \leqq dA_{k+1}$ entraîne $dA_{k+1} < dA_k$ qui est absurde. Donc d'abord on a $dA > dA_k$. Deuxièmement pour chaque ensemble E tel que

$$dE \geqq dA_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

satisfait aussi à $dE \geqq dA$ d'après (I).

Ainsi ce minimum est réellement atteint par A. Comme un corollaire on peut dire que :

(III). *Parmi les tyes de dimensions qui sont plus grands que* R_n *pour tout entier n, celui de l'espace cartésien à variété* n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *il en existe un qui est le plus petit, c'est celui de la somme simple* (E) *de tous les* R_n.

(¹) Kunugui, *C. R. Acad. Sc.*, t. 187, 1928, p. 876. — *Voir* Sierpinski, *Fund. Math.*, t. XIII, 1929, p. 277.

M. Fréchet a démontré (¹) qu'il n'y a aucun type minimum de dimensions parmi ceux qui sont supérieurs à dR_1. Au cas des espaces connexes à type infini de dimensions (c'est-à-dire celui qui est plus grand que tous les dR_n), nous arrivons à un résultat semblable. En effet, prenons dans l'espace Ω deux suites F et G de sphères S_n disjointes les unes des autres et dont la $n^{\text{ième}}$ S_n est homéomorphe à R_n et isolée dans la somme. Joignons-les de deux manières différentes par des segments de droites : les sphères de la suite de F avec des droites issues d'un seul point commun O; les sphères de la suite consécutivement sans point commun; (F) et (G) ainsi obtenus sont des espaces connexes, aux types entre (E) et Ω, et incomparables entre eux :

$$d(E) < d(F) < d\Omega,$$
$$d(E) < d(G) < d\Omega.$$

Or s'il y a parmi les espaces connexes, un type infini et minimum de dimensions, une partie connexe de F contenant le point O avec une infinité de droites doit être homéomorphe à une partie de (G). Ceci est absurde, car par la biunivocité, il n'y a aucun point dans (G) qui soit l'image du point O de (F) (²).

13. *Type de dimensions localement infinies et inférieures à celui de l'espace hilbertien* Ω. — Nous avons vu que les types de dimensions des espaces (E), (F) et (G) du paragraphe 12 sont infinis et inférieurs à celui de l'espace Ω de M. Hilbert. Mais ces espaces ont les types de dimensions localement finis.

Nous allons voir maintenant qu'il existe des ensembles de types de dimensions localement infinis et inférieurs à celui de l'espace Ω.

Dans les espaces composés d'une infinité dénombrable de R_1 que nous avons considérés dans le paragraphe 11, la partie de tous les points p tels que

$$p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, 0, 0, 0, \ldots)$$

forment un ensemble (E_k) homéomorphe à R_k. Si l'on réunit tous les

---

(¹) M. Fréchet, *loc. cit.*, p. 48.

(²) Pourtant le type local de F sur O est égal à dR_2 (*voir* p. 68).

(E_k), on obtient un ensemble (A) : $(A) = \sum (E_k)$ dont le type de dimensions est non seulement infini mais encore localement infini.

En effet, soit $S(x, \rho)$ la sphère sur (A) de centre x point quelconque de (A), et de rayon ρ, nombre réel positif arbitrairement petit. Supposons que x est un point de (E_m)

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots).$$

Alors étant donné un nombre entier n arbitrairement grand, on peut trouver un point ξ de (E_n)

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m, \ldots, \xi_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

tel que $\rho_k = |\xi_k - x_k| > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ et tel que $\rho(\xi, x) < \rho$ car, d'après (IV) (§ 8), ξ tend vers x si ξ_k tend vers x_k.

D'après (2) (§ 8), tous les points $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n, 0, 0, 0, \ldots)$ de (E_n) tels que $|\eta_\nu - x_\nu| < |\xi_\nu - x_\nu| = \rho_\nu$; $\rho_\nu > 0$ forment un ensemble P contenu dans $S(x, \rho)$. P est homéomorphe à R_n car un point $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n)$ de R_n peut correspondre à η par

$$x_\nu - \eta_\nu = \frac{\rho_\nu \zeta_\nu}{1 + |\zeta_\nu|},$$

de sorte que cette correspondance soit biunivoque et bicontinue.

C. Q. F. D.

Donc (ω) et (R) (*voir* p. 25) sont des ensembles de type de dimensions localement infinies.

L'espace polynomial (P) est un ensemble de tous les polynomes à coefficients réels. Nous y considérons qu'une suite d'éléments Q_1, Q_2, Q_3, ... tend vers une limite Q, lorsque $Q_n(x)$ converge vers $Q(x)$ uniformément dans tout intervalle fini de x. Cet espace (P) est aussi du type de dimensions localement infini.

Nous démontrerons plus tard (p. 54) d'une manière très simple que les types de dimensions de ces ensembles sont inférieurs à celui de l'espace hilbertien Ω, en employant l'idée de classe de dimensions. Ici nous en donnons une démonstration plus longue mais plus élémentaire. Commençons par établir que :

Lemme. — *Étant donné un point* $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots)$ *de* (R) *dont la $n^{ième}$ coordonnée p_n n'est pas nulle, on peut trouver un voisinage $V(p)$ de p sur (R) dont tous les points ont leur $n^{ième}$ coordonnée plus grande qu'un nombre positif en valeur absolue.*

En effet, posons

$$\rho = \frac{1}{n!} \frac{|p_n|}{2 + |p_n|},$$

Alors *les points $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ de la sphère $S(p, \rho)$ de centre p et de rayon ρ ont leur $n^{ième}$ coordonnée plus grande que le nombre positif $\frac{|p_n|}{2}$ en valeur absolue.* Car, sinon on aura

$$|p_n - x_n| \geqq \frac{|p_n|}{2}$$

et par suite

$$\rho(x, p) \geqq \frac{1}{n!} \frac{|p_n - x_n|}{1 + |p_n - x_n|} \geqq \rho.$$

et doit être en dehors de la sphère.

(I). $dR < dE_\omega$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe une transformation biunivoque et bicontinue $E_\omega = T(P)$ entre E_ω entier et une partie P de (R) et nous allons l'amener à une contradiction.

Prenons un point $a^1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots, a_n^1, \ldots)$ de P distinct de l'origine, dont une coordonnée $\nu_1^{ième}$ par exemple n'est pas nulle. Il existe alors, d'après le lemme, un voisinage $V(a^1)$ de a^1 sur P dont tous les points ont leur $\nu_1^{ième}$ coordonnée plus grande qu'un nombre positif $\varepsilon_1 > 0$ en valeur absolue.

Transformons $V(a^1)$ dans E_ω, on aura $W_1 = T[V(a^1)]$; $b^1 = T(a^1)$. D'après le théorème I du paragraphe 4 (p. 9), W_1 contient un voisinage du point b^1 sur E_ω. Soit $S_1 = S(b^1, \delta_1)$ une sphère de centre b^1 et de rayon δ_1 sur E_ω qui est contenue dans W_1. E_ω étant réfléchi, S_1 ainsi que l'ensemble P_1 transformé de S_1 dans P par $T^{-1}(S_1)$ contient une partie homéomorphe à E_ω ; par suite il existe des points de P_1 qui ont des coordonnées non nulles pour l'indice ν_2 aussi grand que l'on veut.

Soit a^2 un point de P_1 dont $\nu_2^{ième}$ coordonnée n'est pas nulle $\nu_2 > \nu_1$.

$$a^2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2, \ldots) \qquad (a_{\nu_2} \neq 0).$$

Comme S_1 est ouvert dans E_ω, P_1 est ouvert dans P et par suite il existe, d'après le lemme, un voisinage $V(a^2)$ de a^2 sur P dont tous les points ont leur $\nu_2^{\text{ième}}$ coordonnée plus grande qu'un nombre positif $\varepsilon_2 > 0$ en valeur absolue, et qui est contenue dans P_1.

Transformons $V(a^2)$ dans E_ω, on aura $W_2 = T[V(a^2)]$, $b^2 = T(a^2)$. W_1 contient une sphère $S_2 = S(b^2, \delta_2)$ de centre b^2 et de rayon δ_2 sur E_ω ; celle-ci contenant une partie homéomorphe à sa transformée P_2 dans P par $T^{-1}(S_2)$ aussi. Par suite, P_2 contient des points qui ont une coordonnée non nulle pour l'indice ν_3 aussi grand que l'on veut.

Continuons ainsi de suite. Ainsi nous avons dans E_ω une suite de sphères S_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) de centre b^k et de rayon δ_k, telles que leur image P_k soit contenue dans l'ensemble $V(a^k)$ dont tous les points ont $\nu_k^{\text{ième}}$ coordonnée plus grande qu'un nombre $\varepsilon_l > 0$ en valeur absolue et

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_k \supset \ldots, \qquad \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots.$$

Les nombres δ_k peuvent tendre vers zéro quand k s'accroît indéfiniment et d'après (V) (§ 9), la suite b^k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) tend vers un point b de E_ω. Tandis que son image a^k forme une suite divergente dans R et par suite dans P. Car pour un point $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots)$ de R on a

$$\rho(a^k, a) \geqq \frac{1}{\nu_l!}\,\frac{\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k} > 0 \qquad (k > m).$$

C'est une contradiction. Ainsi notre théorème est démontré.

De la même manière, on peut voir :

(II). Soit E un espace quelconque qui admet une correspondance biunivoque entre lui et (R) telle que cette transformation $(R) = \tau(E)$ de E en (R) est continue et $\tau^{-1}(R)$ est continue dans chaque (E_n), (*voir* p. 25). Pour un tel espace E, il n'y a aucune homéomorphie entre E_ω et une partie de E.

Il est très facile de trouver une telle transformation entre (ω) et (R) ou entre (P) et (R). D'autre part, on a

$$d(\omega) \leqq dE_\omega \qquad \text{et} \qquad d(P) \leqq dE_\omega;$$

donc

$$d(\omega) < dE_\omega \qquad \text{et} \qquad d(P) < dE_\omega.$$

Il est très connu que

$$dE_\omega = d\Omega = d\Delta_\omega \quad (^1).$$

CHAPITRE III.

DÉFINITION DE LA CLASSE DE DIMENSIONS. RELATIONS ENTRE LA CLASSE ET LE TYPE DE DIMENSIONS.

La méthode de comparer deux ensembles par leur type ne réussit pas souvent même pour les ensembles assez simples. Considérons par exemple, dans le plan, une droite D, un cercle C et une figure F composée de deux droites qui se rencontrent à un point f. On voit immédiatement que $dC > dD$, $dF > dD$ et pourtant dC et dF sont incomparables. Même avec l'idée de localité [2] ces difficultés, bien qu'elles s'affaiblissent, ne disparaissent pas entièrement.

En effet, considérons, au lieu d'un cercle, une suite S de cercles concentriques qui tend vers un point p, celui-ci y inclus. Alors on a

$$d_p S > dD, \qquad d_f F > dD;$$

pourtant $d_p S$ et $d_f F$ sont incomparables.

Nous avons vu aussi que la définition de type de dimensions est applicable aux espaces fonctionnels et surtout aux espaces à une infinité de dimensions, et qu'elle nous donne des résultats assez intéressants. Tandis que la définition par récurrence de Poincaré, Brouwer, Menger et Urysohn ne s'applique pas directement à ces espaces; et de la définition négative de la page 15 on ne pourrait pas tirer beaucoup de choses. On peut se demander alors : *N'y a-t-il pas une autre définition de dimensions qui classe les ensembles semblables dans une même catégorie, et aussi qui s'applique aux espaces fonctionnels, surtout aux espaces à une infinité de variétés?*

La méthode de type de dimensions de M. Fréchet et celle de nombre

---

(1) FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, p. 84.
(2) *Voir* FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, p. 111.

de dimensions de Poincaré, Brouwer, Menger et Urysohn sont assez différentes.

Comme une question générale, M. Fréchet a demandé : *Y a-t-il quelques relations simples entre ces deux définitions de dimensions?*

Urysohn avait supposé qu'il n'y en avait aucune de très simple (1).

Nous consacrerons les deux derniers chapitres à ces deux questions.

14. *Définition de la classe de dimensions.* — Considérons une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles de l'espace R (2). Nous disons que $\mathfrak{F}$ est *une famille régulière* quand elle satisfait aux trois conditions suivantes :

(1). Avec un ensemble A de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ contient tous les sous-ensembles de A ;

(2). Avec un ensemble A de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ contient tous les ensembles de R homéomorphes à A ;

(3). Avec une suite d'ensembles de R

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_k, \quad \ldots$$

fini ou infini (dénombrable), $\mathfrak{F}$ contient la somme

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k + \ldots$$

si tous les $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont fermés dans la somme A.

On voit que la famille de tous les ensembles dénombrables finis et infinis est régulière; car d'abord tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable sont aussi dénombrables; les ensembles homéomorphes à un ensemble dénombrable sont aussi dénombrables; et enfin la somme d'un nombre fini ou infini dénombrable d'ensembles dénombrables est aussi dénombrable.

La famille de tous les ensembles, dans l'espace hilbertien Ω par exemple, qui sont de dimensions au plus égal à n au sens de Menger-

---

(1) Urysohn, *Fund. Math.*, t. VII, p. 77, note 1. — M. Fréchet a répondu par l'affirmative en montrant qu'on peut, sous certaines précautions, considérer le nombre de dimensions Poincaré-Menger-Urysohn comme la partie entière du type de dimensions (*Les espaces abstraits*, p. 110).

(2) L'espace vérifiant (I), (II), (III) et (IV) du Chapitre I.

Urysohn, est une famille régulière. Car d'abord tous les sous-ensembles d'un ensemble de dimensions au plus égales à n sont aussi de dimensions au plus égales à n [1]; le nombre de dimensions est un invariant topologique [2]; et enfin le théorème de l'addition [3] dit que la somme

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k + \ldots$$

d'une suite d'ensembles A_1, A_2, A_3, ..., A_k, ... de dimensions au plus égales à n est aussi de dimensions au plus égales à n si tous les A_k sont fermés dans la somme A. De même, les ensembles de dimensions rationnelles [4] au plus égales à n de M. Menger forment une famille régulière.

Aussi tous les ensembles discontinus forment une famille régulière (*voir* p. 74). Et, par suite, d'après un théorème général (*voir* p. 61), les ensembles de dimensions au plus égales à n au sens de Brouwer forment une famille régulière.

Il y aura plusieurs autres exemples de familles régulières, mais maintenant nous allons voir leurs propriétés.

(I). *Le produit de deux familles régulières est aussi une famille régulière.*

En effet, soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux familles regulieres. D'abord si B est un sous-ensemble d'un ensemble A du produit $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$, A appartenant à $\mathfrak{A}$, B appartient à $\mathfrak{A}$, et A appartient aussi à $\mathfrak{B}$, B appartient à $\mathfrak{B}$, par suite B appartient au produit $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$. De la même manière on voit facilement que si un ensemble B est homéomorphe à un ensemble A de $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$, B appartient à $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ et que si une suite d'ensembles A_1, A_2, A_3, ... appartiennent à $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$, leur somme $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ appartient aussi à $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ si tous les A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) sont aussi fermés dans la somme A.

Pour les utiliser plus tard (p. 44), nous allons citer quelques propriétés communes aux trois conditions que nous avons imposées à la famille régulière.

---

(1) MENGER (*Dimensionstheorie*), p. 81.
(2) MENGER. *D. T.*, p. 241.
(3) MENGER, *D. T.*, p. 92.
(4) MENGER. *D. T.*, p. 120.

(II). *Les trois conditions* (1), (2) *et* (3) *sont transitives;* c'est-à-dire :

(1°) Si un ensemble C est un sous-ensemble d'un ensemble B et si B est un sous-ensemble d'un ensemble A, alors C est un sous-ensemble de A;

(2°) Si un ensemble C est homéomorphe à un ensemble B et si B est homéomorphe à un ensemble A, alors C est homéomorphe à A;

(3°) Si, pour les suites $B^j_1, B^j_2, B^j_3, \ldots, B^j_k, \ldots$ tous les B^j_k sont fermés dans la somme $B^j = B^j_1 + B^j_2 + B^j_3 + \ldots + B^j_k + \ldots$ et si tous les $B^j (j = 1, 2, 3, \ldots)$ sont fermés dans la somme $B = B^1 + B^2 + B^3 + \ldots$, alors la somme de la suite $B^j_k (j = 1, 1, 3, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots)$ est égale à B et tous les B^j_k sont fermés dans la somme B.

Les deux premières propositions sont évidentes. La troisième est aussi vraie, car d'abord comme B^j_k est fermé dans B^j qui le contient, et B^j est fermé dans B qui le contient, B^j_k est fermé dans B (p. 14); et d'autre part la suite double $B^j_k (j = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots)$ peut être ordonnée de sorte qu'elle devienne une suite simple qui contient tous les termes.

(III). *Les trois conditions* (1), (2) *et* (3) *ont une sorte d'échangeabilité entre elles;* c'est-à-dire :

(4°) Si B_1 est un sous-ensemble d'un ensemble B qui est homéomorphe à un ensemble A, alors il existe un sous-ensemble A_1 de A qui est homéomorphe à B_1;

(5°) Si B est un sous-ensemble de la somme

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k + \ldots$$

d'une suite d'ensembles $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ dont tous les A_k sont fermés dans la somme A, alors il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots, B_k$ contenu dans A_k dont la somme est égale à B et tels que tous les B_k sont fermés dans la somme B.

(6°) Si B est un ensemble homéomorphe à la somme A d'une suite d'ensembles $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots$ qui sont fermés dans la somme A, alors il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, B_3, \ldots$ tels que B_k est homéomorphe à A_k, leur somme est égale à B, et tous les B_k sont fermés dans la somme B.

La proposition (4°) est évidente. Pour voir (5°) on n'a qu'à poser $B_k = B.A_k$. Pour démontrer (6°), posons $B_k = T(A_k)$, où T est la transformation homéomorphe entre A et B :

$B = T(A)$; on voit que tous les B_k sont fermés dans B, car ils le sont dans A.

Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ quelconque d'ensembles d'un espace R, on peut obtenir une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles de R, en appliquant l'opération (1) ou (2) de la page 41 à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ou (3) à toutes les suites d'ensembles de $\mathcal{F}$. Nous les désignons par les notations

$$\mathcal{G} = (1)\mathcal{F}, \qquad \mathcal{G} = (2)\mathcal{F} \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{G} = (3)\mathcal{F}.$$

La proposition (1°) dit que, si nous opérons l'opération (1) sur $\mathcal{F}$ pour obtenir $\mathcal{G}$ et ensuite si nous opérons (1) sur $\mathcal{G}$, nous n'obtenons que $\mathcal{G}$ elle-même. Nous pouvons l'exprimer par la notation

$$(1^\circ) \qquad (1)(1)\mathcal{F} = (1)\mathcal{F}.$$

De même

$$(2^\circ) \qquad (2)(2)\mathcal{F} = (2)\mathcal{F}$$

et

$$(3^\circ) \qquad (3)(3)\mathcal{F} = (3)\mathcal{F}.$$

La proposition (4°) dit que si nous opérons (2) sur $\mathcal{F}$ pour obtenir $\mathcal{G}$ et ensuite si nous opérons (1) sur $\mathcal{G}$, alors la famille d'ensembles ainsi obtenue est contenue dans la famille obtenue en opérant d'abord (1) et ensuite (2) sur $\mathcal{F}$. Nous pouvons l'exprimer par la notation

$$(4^\circ) \qquad (1)(2)\mathcal{F} \subset (2)(1)\mathcal{F}.$$

De même

$$(5^\circ) \qquad (1)(3)\mathcal{F} \subset (3)(1)\mathcal{F}$$

et

$$(6^\circ) \qquad (2)(3)\mathcal{F} \subset (3)(2)\mathcal{F}.$$

Maintenant nous allons démontrer que :

IV. *Étant donné un ensemble* M *de l'espace* R, *parmi les familles régulières qui contiennent* M, *il en existe une qui est la plus petite.*

Nous l'appelons *la famille régulière engendrée par l'ensemble* M et la désignons par $\mathcal{F}(M)$.

En effet, désignons par $\mathcal{M}$ la famille formée d'un seul ensemble M, et considérons la famille exprimée par $(3)(2)(1)\mathcal{M}$.

(α). Cette famille contient évidemment M.

(β). Et elle est aussi régulière. Car d'abord si un ensemble B est un sous-ensemble d'un ensemble A qui appartient à $(3)(2)(1)\mathcal{M}$, B est contenu dans $(1)(3)(2)(1)\mathcal{M}$.

Or, d'après (5°),

$$(1)(3)(2)(1)\mathcal{M} \subset (3)(1)(2)(1)\mathcal{M};$$

d'après (4°),

$$(3)(1)(2)(1)\mathcal{M} \subset (3)(2)(1)(1)\mathcal{M};$$

d'après (1°),

$$(3)(2)(1)(1)\mathcal{M} = (3)(2)(1)\mathcal{M}.$$

Donc B appartient à $(3)(2)(1)\mathcal{M}$; la première condition est ainsi satisfaite. Les deux autres conditions sont aussi vérifiées de la même manière.

(γ). La famille régulière $\mathcal{F}$ qui contient $\mathcal{M}$ contient nécessairement $(3)(2)(1)\mathcal{M}$; car la première condition imposée à la famille régulière dit que si une famille $\mathcal{G}$ est une sous-famille de la famille $\mathcal{F}$ régulière $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$, on a alors $\mathcal{F} \supset (1)\mathcal{G}$; la deuxième dit que $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ entraîne $\mathcal{F} \supset (2)\mathcal{G}$; la troisième déduit $\mathcal{F} \supset (3)\mathcal{G}$ de $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{F} \supset \mathcal{M}$ entraîne $\mathcal{F} \supset (1)\mathcal{M}$, ensuite $\mathcal{F} \supset (2)(1)\mathcal{M}$ et enfin $\mathcal{F} \supset (3)(2)(1)\mathcal{M}$.

(α), (β) et (γ) montrent que $\mathcal{F}(M) \equiv (3)(2)(1)\mathcal{M}$.

Ainsi l'existence de la famille régulière engendrée par un ensemble M est démontrée avec le moyen de l'obtenir.

Les éléments E de la famille $\mathcal{F}(M)$ régulière engendrée par un ensemble M satisfont à $\mathcal{F}(E) \subset \mathcal{F}(M)$.

Les éléments N de la famille $\mathcal{F}(M)$ régulière engendrée par un ensemble M qui satisfont à

$$\mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(M)$$

forment un noyau dans la famille $\mathcal{F}(M)$ que nous appelons la *classe de dimensions de l'ensemble* M et que nous désignons par ∂M.

Définition. — Étant donnés deux ensembles A et B, on dit que la classe de dimensions de A est égale, supérieure ou inférieure à celle de B, suivant que les familles régulières $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ engendrées par A et B coïncident, que $\mathcal{F}(B)$ est une vraie partie de $\mathcal{F}(A)$ ou que $\mathcal{F}(A)$ est une vraie partie de $\mathcal{F}(B)$ et nous les représentons par les notations $\partial A = \partial B$, $\partial A > \partial B$ ou $\partial A < \partial B$.

Si $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ ont au moins un des éléments qui n'appartiennent pas à l'autre, on dit que ∂A et ∂B sont incomparables. Les trois premiers cas sont appelés les cas comparables.

Ce dernier cas existe, ainsi que nous le démontrerons plus tard, mais ce sont des catégories d'ensembles très différentes.

Ces classes déterminées pour des ensembles dans l'espace R ne dépendent que des ensembles. C'est une propriété des ensembles et non pas de l'espace.

Étant donnés deux espaces R_1 et R_2, on peut comparer leur classe de dimensions en concevant un nouvel espace qui les contient : la somme simple de R_1 et R_2, par exemple.

Ces classes de dimensions peuvent être considérées comme une définition des dimensions qui sont intercalées dans celles de M. Brouwer ou celles de MM. Menger-Urysohn quand ces définitions-ci s'appliquent, et qui encadrent celles de M. Fréchet dans tous les cas, même dans les espaces fonctionnels ou les espaces à une infinité de variétés.

D'après la définition, on voit immédiatement que :

(V). *Pour deux ensembles* A *et* B *de* R, $A \subset B$ *entraîne* $\partial A \leqq \partial B$.

(VI). *L'égalité et l'inégalité entre les classes possèdent les mêmes règles que celles entre les nombres réels :*

$\partial A = \partial A$ pour tous les ensembles A ;

$\partial A \geqq \partial B$ et $\partial B \geqq \partial C$ entraînent $\partial A \geqq \partial C$ pour trois ensembles quelconques A, B et C ;

$\partial A = \partial B$ entraîne $\partial B = \partial A$ pour deux ensembles quelconques ;

$\partial A \geqq \partial B$ et $\partial B > \partial C$ entraînent $\partial A > \partial C$, etc.

15. *Comparaison avec les types de dimensions de M. Fréchet.* — Il y

aura plusieurs avantages à établir tout d'abord la relation entre les types de dimensions de M. Fréchet et nos classes de dimensions.

Les types de dimensions de M. Fréchet peuvent être définis comme suit :

Soit Φ une famille d'ensembles de l'espace R qui satisfait aux deux conditions suivantes :

(1). Avec un ensemble A de Φ, Φ contient aussi tous les sous-ensembles de A.

(2). Avec un ensemble A de Φ, Φ contient aussi tous les ensembles de R qui sont homéomorphes à A.

Pour chaque ensemble M de cet espace, il existe une famille d'ensembles $\Phi(M)$ qui est la plus petite parmi celles qui satisfont aux (1) et (2) et qui contiennent M. Pour deux ensembles A et B de l'espace R, le type de dimensions de A : dA et celui de B : dB satisfont à $dA = dB$, $dA > dB$ ou $dA < dB$ suivant que $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$ coïncident, que $\Phi(B)$ est une vraie partie de $\Phi(A)$ ou que $\Phi(A)$ est une vraie partie de $\Phi(B)$.

Donc on peut dire que :

(O). Pour que deux ensembles A et B satisfassent à la relation $dA \geq dB$, il faut et il suffit que B appartienne à la famille (2) (1) A.

Aussi pour que dA et dB soient incomparables, il faut et il suffit que $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$ contiennent au moins un de leurs éléments qui n'est pas contenu dans l'autre.

Si l'on observe l'ordre des types de dimensions avec la définition de M. Fréchet, on sera frappé par sa différence avec celui des nombres réels. Car les types de dimensions incomparables y entrent assez bizarrement. Mais avec la définition ci-dessus, nous voyons maintenant que l'ordre des types de dimensions n'est pas d'une nature nouvelle. Quand Dedekind a défini l'ordre des nombres réels, il a comparé les coupures [1], c'est-à-dire une partie de la famille des ensembles linéaires, de sorte que dans cette partie il n'y ait que des ensembles comparables ; quant aux types de M. Fréchet (ou à nos classes) comparer deux types

---

[1] L'ensemble de tous les nombres réels plus petits qu'un nombre.

dA et dB (ou deux classes δA et δB) revient à comparer deux familles $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$ [ou $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$]. Et parmi ces familles figurent les familles non comparables. L'ordre des types de dimensions, ainsi que celui des classes de dimensions sont des grandeurs de familles d'ensembles. Ce n'est pas extraordinaire qu'on ait des types ou des classes incomparables. Au contraire, ils montrent la différence de catégories des ensembles, conformément à l'intuition.

Revenons à la relation entre les types et les classes :

(I). Pour que deux ensembles A et B satisfassent à $\delta A \geqq \delta B$ il faut et il suffit qu'il existe une suite $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots$, dont la somme est égale à B : $B = \sum_k B_k$ et tels que tous les B_k sont fermés dans la somme B et tels que $dB_k \leqq dA$.

En effet, pour qu'on ait $\delta A \geqq \delta B$ il faut et il suffit que B appartienne à $\mathcal{F}(A) \equiv (3)(2)(1)\mathfrak{A}$ où $\mathfrak{A}$ est la famille d'un seul ensemble A. Donc pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots$ de $(2)(1)\mathfrak{A}$ dont la somme est égale à B et tels que tous les B_k sont fermés dans la somme B. D'après (O), on a $dB_k \leqq dA$.

C. Q. F. D.

Il est évident que :

(II). Pour deux ensembles A et B, $dA \leqq dB$ entraîne $\delta A \leqq \delta B$.

Corollaire. — *Pour deux ensembles* A *et* B, $\delta A < \delta B$ *entraîne* $dA < dB$ *si ces deux types de dimensions sont comparables.*

Considérons une droite D, un cercle C et une figure F composée de deux droites qui se rencontrent. D'après (II), nous avons $\delta D \leqq \delta C$, $\delta D \leqq \delta F$; soient a, b, c et d quatre points distincts rangés dans un sens sur le cercle. On peut regarder le cercle C comme la somme de deux arcs fermés $C_1 = (a, b, c)$ et $C_2 = (c, d, a)$, les extrémités a et c comprises. $C = C_1 + C_2$. C_1 et C_2 sont fermés dans C et $dC_1 = dC_2 = dD$, $\delta D \geqq \delta C$ d'après (I); et donc enfin $\delta C = \delta D$. De même, en considérant la figure F comme la somme de deux droites, on a aussi $\delta F = \delta D$.

$\delta F = \delta C$ montre que la réciproque de (II) n'est pas toujours vraie puisque F et C sont incomparables, mais nous verrons plus tard quelques cas où elle est aussi vraie (*voir* p. 49).

16. *Distribution des classes de dimensions.* — Nous allons déterminer les classes de dimensions, pour la plupart des figures géométriques que nous rencontrons, en général. Pour cela, nous ne risquerons pas de négliger beaucoup de cas importants si nous considérons les espaces séparables, et parmi eux surtout les ensembles de points de l'espace hilbertien Ω.

Il existe d'abord une classe de dimensions la plus petite. C'est la classe d'un point; nous le désignons par δR_0. δR_0 contient tous les ensembles dénombrables et ces ensembles seuls, car l'ensemble d'un point est fermé d'après l'axiome III (p. 8).

Tout ensemble A se décompose en deux parties disjointes A_1 et $A_2 (A = A_1 + A_2)$, de sorte que A_2 soit l'ensemble de tous les points de condensation de A qui appartiennent à A. D'après l'axiome IV*, A_2 est fermé dans A. Et d'autre part, dans un espace séparable, comme A_1 est un ensemble dénombrable, en appelant a_1, a_2, a_3, ... la suite de ces points, on peut écrire

$$A = A_2 + \sum_k a_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où A_2 et tous les a_k sont fermés dans A. Or, si A_2 est non vide

$$da_k \leqq dA_2;$$

donc, d'après (I) (§ 15), on a

$$\delta A \leqq \delta A_2.$$

Comme $A_2 \subset A$,

$$\delta A = \delta A_2.$$

(I). *La classe de dimensions d'un ensemble* A *non dénombrable d'un espace séparable est égale à celle de l'ensemble de tous les points de condensation de* A *qui appartiennent à* A.

Donc la recherche des classes de dimensions revient à celle des ensembles denses en soi (et à celle des ensembles parfaits quand il s'agit des ensembles fermés). Parmi les ensembles denses en soi, il y en a une catégorie simple et intéressante : ce sont les ensembles réfléchis (p. 31).

(II). *Pour un ensemble quelconque* A, $\delta A \geqq \delta B$ *entraîne* $dA \geqq dB$ *si l'ensemble* B *est réfléchi et complet.*

Démonstration. — $\delta A \geqq \delta B$ veut dire qu'on peut écrire

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

où tous les B_k sont fermés dans B et $dB_k \geqq dA$.

Or, si un B_k contient en moins un sous-ensemble V ouvert dans B, B étant réfléchi,

$$dV \geqq dB.$$

Par suite, avec $B_k \supset V$, $dB_k \geqq dV$, on a

$$dA \geqq dB.$$

Notre théorème est démontré dans ce cas. Supposons donc que, pour tous les indices k, B_k ne contient aucun sous-ensemble ouvert dans B. Soit b_0 un point de B. Dans un voisinage borné $V(b_0)$ de b_0 sur B, il existe un point b_1 (b_1 peut coïncider avec b_0) qui n'appartient pas à B_1. Comme B_1 est fermé, il existe un voisinage $V(b_1)$ de b_1 sur B qui est distinct de B_1 et qui est contenu complètement dans $V(b_0)$. Dans $V(b_1)$ il existe au moins un point b_2 (b_2 peut coïncider avec b_0 ou avec b_1) de B qui n'appartient pas à B_2. Comme B_2 est fermé dans B, il existe un voisinage $V(b_2)$ de b_2 sur B qui est distinct de B_2 et qui est contenu complètement dans $V(b_1)$. Continuons ainsi de suite. Nous aurons une suite de voisinages bornés sur B :

$$V(b_0), \quad V(b_1), \quad V(b_2), \quad \ldots$$

telle que

$$V(b_\nu) \supset V(b_{\nu+1}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous pouvons supposer que le diamètre de $V(b_\nu)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$.

D'après le théorème à la fin du paragraphe 6,

$$\prod_{\nu=0}^{(\infty)} V(b_\nu) = \prod_{\nu=0}^{(\infty)} \overline{V}(b_\nu)$$

n'est pas vide. Et, d'autre part, ce produit est disjoint de $\sum_{k=1}^{\nu} B_k$ pour tous les nombres ν; il est distinct de B. Ceci est une contradiction.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Pour un ensemble quelconque* A, $dA < dB$ *entraîne* $\delta A < \delta B$, *si l'ensemble* B *est réfléchi et complet.*

(III). Soit B une somme simple d'une suite d'ensembles

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \ldots, \quad E_k, \quad \ldots$$

tels que $\delta E_1 \leqq \delta E_2 \leqq \delta E_3 \leqq \ldots \leqq \delta E_k \leqq \ldots$. Si tous les ensembles E_k sont réfléchis et complets, alors $\delta A \geqq \delta B$ entraîne $dA \geqq dB$ pour l'ensemble A quelconque.

En effet, $B \supset E_k$ entraîne $\delta B \geqq \delta E_k$. Donc avec $\delta A \geqq \delta B$, on a

$$\delta A \geqq \delta E_k.$$

Comme E_k est réfléchi et complet, on en peut déduire

$$dA \geqq dE_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

d'après (II).

D'autre part, $\delta E_k \leqq \delta E_{k+1}$ entraîne aussi, d'après (II), $dE_k \leqq dE_{k+1}$. Ainsi toutes les hypothèses du théorème (I) (§ 12) étant satisfaites, celui-ci nous donne $dA \geqq dB$. C. Q. F. D.

Cherchons maintenant des exemples de classes de dimensions supérieures à celle des ensembles dénombrables.

D'après le corollaire de (II), il serait très désirable de chercher les types de dimensions différentes des ensembles réfléchis et complets (ou plus simplement compacts en soi).

Dans l'espace linéaire R_1 il n'y a que deux types de dimensions d'ensembles réfléchis et compacts en soi, à savoir celui de la droite dR_1 et celui de l'ensemble H_1 parfait et non dense de Cantor sur le segment $[0, 1]$: dH_1. D'après le corollaire du (II), on a

$$\delta R_0 < \delta H_1 < \delta R_1.$$

MM. Sierpinsky et Kuratowski ont pu prouver [1], en employant l'axiome de choix de Zermelo, que quel que soit l'ensemble E tel que $dE < dH_1$, il existe au moins un ensemble K dont le type de dimensions est intermédiaire entre ceux de E et de H_1. En prenant pour E un ensemble dénombrable dense partout sur la droite, on voit

[1] *Fund. Math.*, t. VIII, 1926, p. 193.

que K ne peut pas être dénombrable dans ce cas, donc

$$\delta R_0 < \delta K.$$

D'après le corollaire on a aussi $\delta K < \delta H_1$. Ainsi il y a des classes entre δR_0 et δH_1.

Dans le plan, considérons un ensemble H_2, ensemble composé de H_1 et R_1,

$$H_2 = [H_1, R_1].$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $p = (x, y)$ de R_2 dont les abscisses x appartiennent à H_1, tandis que y est arbitraire. Cet ensemble est réfléchi et complet. Il contient une infinité de droites parallèles qui s'approchent d'une droite qu'il contient. Donc

$$dR_1 < dH_2.$$

D'après le corollaire nous avons

$$\delta R_1 < \delta H_2.$$

Considérons maintenant un ensemble Δ_2 de points du plan, non dense et parfait construit de la manière suivante : on prend un carré, on le divise en neuf carrés égaux et supprime l'intérieur du carré central. On fait de même dans les carrés restants, et ainsi de suite. L'ensemble Δ_2 est formé par les points non exclus.

Δ_2 est compact en soi et localement connexe; donc c'est une courbe de Jordan (*voir* p. 57). Il est également réfléchi. M. Sierpinski a démontré [1] que le type de dimensions $d\Delta_2$ est égal à celui de l'ensemble formé de tous les points $p = (x, y)$ de R_2 dont une des deux coordonnées x ou y au moins est irrationnelle.

Je dis que $dH_2 < d\Delta_2$. En effet si l'ensemble Δ_2 entier est homéomorphe à une partie de H_2, Δ_2 étant connexe, il doit être homéomorphe à une partie d'une droite contenue dans H_2. Ceci est évidemment impossible, car on a

$$\Delta_2 \supset H_2$$

et d'où

$$d\Delta_2 \geqq dH_2 \geqq dR_1.$$

---

(1) *Fund. Math.*, t. III, 1922, p. 12.

D'après le corollaire, on a donc

$$\partial H_2 < \partial \Delta_2.$$

Le plan R_2 lui-même est un ensemble réfléchi et complet, donc $d\Delta_2 < dR_2$ entraîne $\partial\Delta_2 < \partial R_2$. En somme, nous avons vu qu'il existe au moins sept classes de dimensions dans le plan qui forment une suite croissante

$$\partial R_0 < \partial K < \partial H_1 < \partial R_1 < \partial H_2 < \partial \Delta_2 < \partial R_2.$$

Dans le plan, il existe un ensemble discontinu qui n'appartient pas à la famille régulière engendrée par R_1 (*voir* p. 75) et par suite il nous donne une classe de dimensions incomparables avec ∂R_1.

Naturellement pour la suite d'espaces cartésiens à variétés n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) nous avons d'après le corollaire

$$\partial R_1 < \partial R_2 < \partial R_3 < \ldots < \partial R_n < \ldots,$$

puisqu'ils sont réfléchis et complets. De la même manière que nous avons fait en haut, nous pouvons trouver les classes de dimensions entre ∂R_n et ∂R_{n+1}.

Passons maintenant aux classes infinies de dimensions.

(IV). La somme simple (E) des espaces cartésiens R_n à variétés $n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ est de la classe infinie de dimensions : $\partial R_n < \partial(E)$ et elle est aussi minimum parmi celle qui sont infinies.

En effet, soit A un ensemble qui a satisfait à $\partial R_n < \partial A$ pour tous les n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), R_n étant réfléchi et complet $\partial R_n < \partial A$ entraîne $dR_n < dA$. D'après (1) (§ 12), on aura

$$d(E) \leqq dA;$$

par suite

$$\partial E \leqq \partial A.$$

L'espace R de M. Fréchet, l'espace (ω), et polynomial (P) (*voir* p. 37) appartiennent à la même classe que (E), car ce sont des espaces qui se décomposent en (E_k) homéomorphes à l'espace cartésien R_k; aussi tous les (E_k) sont fermés dans ces espaces; donc d'après (I) (§ 15), $\partial(E) \geqq \partial(R)$, $\partial(\omega)$ et $\partial(P)$.

L'espace Ω de M. Hilbert (ou l'espace E_ω de M. Fréchet) est un espace réfléchi et complet [*voir* (IV), § 9, et (III), § 11]. D'autre part, (E) étant de type localement fini, $dE < d\Omega$; celui-ci entraine, d'après le corollaire, $\delta E < \delta\Omega$. En somme nous avons

$$\delta(E) = \delta(R) = \delta(\omega) = \delta(P) < \delta\Omega. \tag{1}$$

Application de la classe de dimensions à déterminer le type de dimensions. — Nous avons donné une démonstration pour $d(\omega) < d\Omega$. En employant les idées de la classe de dimensions on peut procéder également comme suit : $(\omega) \subset \Omega$; donc $d(\omega) \leqq d\Omega$. D'autre part, $d(\omega) \geqq d\Omega$ est absurde à (1), car cela entraine $\delta(\omega) \geqq \delta\Omega$ d'après (II) (§ 15). Donc $d(\omega) < d\Omega$.

17. *Les classes de dimensions des ensembles composés.* — L'opération de composer des classes de dimensions de deux ensembles est monotone comme celle du type de dimensions, c'est-à-dire :

(I). Pour deux paires d'ensembles A_1, B_1 et A_2, B_2 tels que $\delta A_1 \geqq \delta B_1$ et $\delta A_2 \geqq \delta B_2$, on a

$$\delta[A_1, A_2] \geqq \delta[B_1, B_2].$$

Démonstration. — $\delta A_1 \geqq \delta B_1$ et $\delta A_2 \geqq \delta B_2$ veulent dire qu'on peut écrire

$$B_1 = \sum_{n=1}^{(\infty)} B_n^1, \qquad B_2 = \sum_{m=1}^{(\infty)} B_m^2,$$

dont tous les B_n^1 et tous les B_m^2 sont fermés dans B_1 et B_2 respectivement, et tels que

$$dB_n^1 \leqq dA_1, \qquad dB_m^2 \leqq dA_2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Alors on peut écrire aussi

$$[B_1, B_2] = \left[\sum B_n^1 \sum B_m^2\right] = \sum_n \sum_m [B_n^1, B_m^2].$$

Donc $[B_1, B_2]$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles

$[B_n^1, B_m^2]$. D'abord comme B_n^1 et B_m^2 sont fermés dans B_1 et B_2 respectivement, $[B_n^1, B_m^2]$ est fermé dans $[B_1, B_2]$ d'après [II] (§ 10). Deuxièmement, comme B_n^1 et B_m^2 sont homéomorphes à une partie A_n^1 de A et à une partie A_m^2 de A_2 respectivement, $[B_n^1, B_m^2]$ est homéomorphe à $[A_n^1, A_m^2]$ qui est une partie de $[A_1, A_2]$ d'après (III) (§ 10). Ceci veut dire

$$d[B_n^1, B_m^2] \geqq d[A_1, A_2].$$

Donc d'après (I) (§ 15),

$$\delta[B_1, B_2] \leqq \delta[A_1, A_2]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Pour deux paires d'ensembles* A_1, B_1 *et* A_2, B_2 *telles que* $\delta A_1 = \delta B_1$ et $\delta A_2 = \delta B_2$, *on a*

$$\delta[A_1, A_2] = \delta[B_1, B_2].$$

Il serait intéressant de préciser le cas où $\delta A_1 > \delta B_1$ et $\delta A_2 > \delta B_2$ entraînent $\delta[A_1, A_2] > \delta[B_1, B_2]$ ou non.

Il faut remarquer ici que pour deux suites infinies d'ensembles

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_k, \quad \ldots \qquad \text{et} \qquad B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad \ldots, \quad B_k, \quad \ldots$$

la condition $dA_k \geqq dB_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) entraîne

$$d[A_1, A_2, A_3, \ldots] \geqq d[B_1, B_2, B_3, \ldots],$$

mais $\delta A_k \geqq \delta B_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) ne nous donne pas nécessairement

$$\delta[A_1, A_2, A_3, \ldots] \geqq \delta[B_1, B_2, B_3, \ldots],$$

où la composition s'entend au sens strict.

En effet, par exemple, soient A_k l'ensemble formé d'un seul point et B_k celui qui contient (au moins) deux points distincts. Alors $[A_1, A_2, A_3, \ldots]$ n'a qu'un point, tandis que $[B_1, B_2, B_3, \ldots]$ a la puissance non dénombrable, c'est-à-dire

$$\delta[A_1, A_2, A_3, \ldots] < \delta[B_1, B_2, B_3, \ldots],$$

bien que nous ayons $\delta A_k \geqq \delta B_k$ pour tous les k ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

CHAPITRE IV.

RELATIONS ENTRE LA CLASSE ET LE NOMBRE DE DIMENSIONS AU SENS DE POINCARÉ, BROUWER, MENGER ET URYSOHN.

La famille des ensembles de points d'un espace qui sont de même nombre de dimensions au sens de Poincaré, Brouwer, Menger et Urysohn se décompose en plusieurs sous-familles des ensembles des mêmes classes. Pourtant ces classes ont plusieurs propriétés communes avec le nombre de dimensions. Le but principal des recherches sur ce chapitre est de préciser les théorèmes sur le nombre de dimensions établies par ces créateurs de la théorie et leurs successeurs.

18. *Théorème de l'addition. Théorème d'Alexandroff et Tumarkin.* — Commençons par le théoreme de l'addition :

(I). *Soient une famille régulière et* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_l, \ldots$ *une suite d'ensembles de* $\mathcal{F}$. *Alors la somme* $A = \sum_{1 \leq}^{k=1} A_k$ *appartient aussi à* $\mathcal{F}$, *si tous les* A_k *sont fermés ou* F_σ (¹) *dans la somme* A.

En effet, si A_k sont fermés ou F_σ dans A, A_k est une somme d'un nombre dénombrable des ensembles A_k^m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ fermés dans A. Comme $A_k^m \subset A_k$, d'après (1), A_k^m appartient aussi à $\mathcal{F}$. Et par suite, d'après (3), la somme

$$A = \sum_k \sum_m A_k^m \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ m = 1, 2, 3, \ldots)$$

appartient aussi à $\mathcal{F}$.

Par conséquent en traduisant en classe :

(II). *La somme* A *d'un nombre dénombrable des ensembles* A_k

---

(¹) On dit qu'un ensemble est un F_σ (ou est un ensemble [F] au sens de M. Lebesgue) s'il est la somme d'un nombre dénombrable d'ensembles fermés.

($k = 1, 2, 3, \ldots$) *tels que* $\delta A_k \leqq \delta B$ *pour un ensemble* B, *satisfait aussi à* $\delta A \leqq \delta B$, *si chaque* A_k *est fermé ou un* F_σ *dans la somme* A.

Comme M. Hurewicz l'a montré [1], (I) nous donne les théorèmes :

(III). *La somme* A *de deux ensembles* A^* *et* A^{**} *d'une famille régulière* $\mathcal{F}$, *telle que* A^* *soit un* F_σ *et un* G_δ *dans la somme* A *en même temps, appartient à* $\mathcal{F}$.

(IV). *La somme* A *de deux ensembles* A^* *et* A^{**} *tels que* $\delta A^* \leqq \delta B$ *et* $\delta A^{**} \leqq \delta B$ *pour un ensemble* B *satisfait aussi* $\delta A \leqq \delta B$ *si* A^* *est un* F_σ *et un* G_δ *dans la somme en même temps.*

L'ensemble d'un seul point est un F_σ et un G_δ en même temps parce qu'il est fermé ; par suite :

(V). *La classe d'un ensemble* A : δA *ne change pas par l'addition d'un seul point à* A. *La classe d'un ensemble* A *qui contient plus de deux points distincts ne change pas par la suppression d'un seul point de* A.

Il faut remarquer ici que les théorèmes (I), (II), (III), (IV) et (V) n'exigent pas que l'espace dont il s'agit soit séparable.

Appliquons ce résultat à préciser le théorème d'Alexandroff et Tumarkin [2]. Il s'agit de prolonger un ensemble compact en soi en un continu jordanien sans en augmenter le nombre de dimensions. Un continu s'appelle jordanien s'il est une image d'un segment $[0 \ 1]$ de R_1 par une transformation univoque et continue.

Le théorème établi par ces deux auteurs est le suivant :

L'ensemble M *compact en soi dans l'espace séparable est contenu topologiquement dans un continu jordanien de mêmes dimensions au sens de Menger-Urysohn si le nombre de dimensions de* M *est au moins égal à* 1.

La forme plus précise que nous sommes parvenus à donner à ce théorème est la suivante :

(VI). L'ensemble M compact en soi dans l'espace séparable est con-

---

(1) Hurewicz, *Math. Ann.*, t. 96, 1927, p. 761.

(2) P. Alexandroff et L. Tumarkin, *Fund. Math.*, t. XI, 1928, p. 141. *Voir* aussi W. Stépanoff et L. Tumarkin, *Ueber eine Erweiterung abgeschlossener Mengen zu Iordanscher Kontinuum derselben Dimension* (*Fund. Math.*, t. XII, 1928, p. 43).

tenu topologiquement dans un continu jordanien de la même classe de dimensions δM, si $\delta M \geqq \delta R_1$ ou plutôt *en général dans un continu jordanien de la même famille régulière que* M *si cette famille contient* R_1.

Pour le voir, il nous suffira d'esquisser la démonstration de MM. Alexandroff et Tumarkin en modifiant seulement une ligne. L'ensemble est homéomorphe à une partie N du cadre fondamental (1) de l'espace hilbertien Ω. N est une image d'un ensemble fermé et non dense dans le segment $[0,1]$ de R_1 par une représentation univoque et continue. On peut ajouter alors sans changer la classe de dimensions de N les segments de droites dans l'espace Ω qui correspondent aux fermetures des intervalles complémentaires d'une manière biunivoque et bicontinue. C. Q. F. D.

Donnons un exemple pour montrer la différence entre ces deux théorèmes : prenons l'ensemble E, dans le plan R_2, de tous les points $p = (x, y)$ définis par

$$y = \sin \frac{1}{x}, \qquad \text{pour } 0 < x \leqq \frac{1}{2\pi}$$

et

$$-1 \leqq y \leqq 1, \qquad \text{pour } x = 0.$$

On voit facilement que $\delta E = \delta R_1$ et que E est compact en soi. E est connexe, mais il n'est pas localement connexe. D'après le théorème de Hahn-Mazurkiewicz (2), E n'est pas continu jordanien. Notre théorème dit qu'il existe un continu jordanien de la classe δR_1 qui couvre E.

En effet si l'on ajoute des segments parallèles à l'axe de x définis par

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{\text{arc} \sin y} \text{ de la } m^{\text{ième}} \text{ branche}, \qquad y = \pm \frac{k}{2^m},$$

où K sont tous les nombres entiers positifs inférieurs à 2^m qui ne sont

---

(1) Ensemble de tous les points $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots)$ de Ω tels que

$$0 \leqq p_k \leqq \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

(2) Hahn, *Jahresber. d. Deutch. Math. Ver.*, Bd 23, 1914, p. 318. — Mazurkiewicz, *Fund. Math.*, t. 1, 1920. p. 166.

pas divisibles par 2, alors on obtient un ensemble J compact en soi et localement connexe. D'après le théorème de Hahn-Mazurkiewicz, J est un continu jordanien. Le théorème de l'addition montre que $\partial J = \partial R$.

Tandis que le théorème d'Alexandroff et Tumarkin nous dit qu'il existe un continu jordanien du nombre de dimension 1 et qui contient E. Nous en avons plusieurs dont les classes de dimensions ne sont pas égales à ∂R_1. (On en obtient facilement un, en déformant l'ensemble Δ_2 du paragraphe 16.) L'approximation fournie par ce théorème est donc moins précise que la nôtre.

19. *Ensembles superposés*. — *Définition :* Étant donnée une famille $\mathfrak{F}$ d'ensemble des points d'un espace R, nous proposons de dire qu'un ensemble M dans l'espace R est *superposé* [1] à $\mathfrak{F}$, si pour tous les points p de M, il existe une suite de voisinages $V_k(p)$ de p sur M qui tend vers p, et dont les frontières sur M appartiennent à $\mathfrak{F}$.

M. Hurewicz a nommé une famille *normale*, quand elle satisfait à deux conditions (1) et (3) de la page 41 et il a démontré que, dans un espace séparable, les ensembles superposés à une famille normale forment aussi une famille normale. Un ensemble d'un seul point forme une famille normale; et en général tous les sous-ensembles d'un ensemble forment aussi une famille normale. Pour éviter ces cas triviaux, ajoutons-y la condition (2). Et considérons les ensembles superposés à la famille régulière. On verra (p. 61) que dans un espace séparable R, tous les ensembles superposés à la famille régulière $\mathfrak{F}^{(0)}$ forment aussi une famille régulière $\mathfrak{F}^{(1)}$. Par conséquent, on peut répéter k fois cette opération et l'on obtient une famille régulière $\mathfrak{F}^{(k)}$ d'ensembles de R superposés k fois à $\mathfrak{F}^{(0)}$.

La famille $\mathfrak{F}^{(k)}$ des ensembles superposés k fois à la plus petite classe ∂R_0 est celle d'ensemble de dimensions rationnelles de M. Menger au plus égales à k. Si l'on part de la famille régulière $\mathfrak{F}^{(0)}$ de tous les ensembles discontinus dont les classes sont inférieures à ∂R_1, nous obtenons comme $\mathfrak{F}^{(k)}$ une famille de tous les ensembles de dimensions au sens de Menger-Urysohn au plus égales à k. De même la plus grande famille régulière des ensembles discontinus,

---

(1) *Voir* Menger, *D. T.*, p. 123.

c'est-à-dire la famille de tous les ensembles discontinus nous donne, comme $\mathcal{F}^{(n)}$, la famille des ensembles de dimensions au plus égales à n au sens de M. Brouwer.

Pour exposer systématiquement la démonstration des théorèmes énoncés ci-dessus, nous répéterons ici sans démonstration quelques théorèmes dus à M. Hurewicz ([1]).

(I). *Tous les ensembles superposés à une famille $\mathcal{G}$ qui satisfait à la condition* (1) *de la page* 41 *forment aussi une famille $\mathcal{F}$ qui satisfait à cette condition* (1).

En effet, soit B un sous-ensemble d'un ensemble A de $\mathcal{F}$. Pour un point p de B il existe une suite de voisinages $V_k(p)$ de p sur A qui tend vers p et dont les frontières sur A appartiennent à $\mathcal{G}$. Or $B \cdot V_k(p)$ est un voisinage de p sur B dont la frontière sur B : $B \cdot \text{front}\, V(p)$ sur A est un sous-ensemble de front $V(p)$ sur A, par suite elle appartient à $\mathcal{G}$.

C. Q. F. D.

(II). *Tous les ensembles d'un espace* R *superposés à une famille $\mathcal{G}$ qui satisfait à la condition* (2) *forment aussi une famille $\mathcal{F}$ qui satisfait à la condition* (2).

En effet, soit B un ensemble homéomorphe à un ensemble A de $\mathcal{F}$. Posons $B = T(A)$ où T est une transformation biunivoque et bicontinue entre A et B. Pour un point β quelconque de B, il correspond un point α de A; et pour α il existe une suite de voisinages $W_k(\alpha)$ de α sur A ($k = 1, 2, 3, \ldots$) qui tend vers α et dont les frontières appartiennent à $\mathcal{G}$. Les images $T[W_k(\alpha)]$ de ces voisinages $W_k(\alpha)$ est une suite de voisinages de β sur B dont les frontières sur B sont les images des frontières de $W(\alpha)$ sur A. Donc celles-là appartiennent aussi à $\mathcal{G}$. Aussi on voit que $T[(W_k(\alpha)]$ tend vers α. C. Q. F. D.

(III). *Tous les ensembles* M, *dans un espace séparable qui est superposé à une famille normale $\mathcal{G}$, peuvent se décomposer en deux parties* M^* *et* M^{**} *disjointes telles que :*

1° M^* *soit de dimension nulle au sens de Menger-Urysohn;*

2° M^{**} *appartienne à $\mathcal{G}$* et il est un F_σ dans M).

([1]) Théorèmes (III), (IV) et (V) : Hurkvicz, *loc. cit.*, p. 754; *voir* Menger, *D. T.*, p. 123-124.

(IV). *Toutes les sommes* M *d'un ensemble* M^* *de dimension nulle au sens de Menger-Urysohn et d'un ensemble* M^{**} *de la famille normale* $\mathfrak{G}$ *sont des ensembles superposés à* $\mathfrak{G}$.

Donc, en employant le théorème de l'addition pour les ensembles de dimension nulle au sens de Menger-Urysohn on voit que :

(V). *Dans un espace séparable, la somme* A *d'une suite d'ensembles* $A_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ *superposés à une famille normale* $\mathfrak{G}$ *est aussi superposée à* $\mathfrak{G}$ *si chaque* A_k *est fermé dans la somme* A.

(I), (II) et (V) montrent que :

(VI). *Dans un espace séparable, les ensembles superposés à une famille régulière forment aussi une famille régulière.*

Aussi avec (III) et (IV) on peut dire :

(VII). *L'ensemble* M *séparable* $\mathfrak{F}^{(n)}$ *quelconque appartenant à la famille d'ensembles superposés* n *fois à la famille régulière* $\mathfrak{F}^{(0)}$ *peut se décomposer en* $n+1$ *parties disjointes* $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ *et* M_{p+1} *telles que :*

1° $\partial M_\nu \leqq \partial H_1 (\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$;
2° M_{n+1} *appartienne à* $\mathfrak{F}^{(0)}$.

(VIII). *Dans un espace séparable, la somme* M *de* $n+1$ *d'ensembles* $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ *et* M_{n+1} *tels que :*

1° $\partial M_\nu \geqq \partial H_1$;
2° M_{n+1} *appartienne à une famille régulière* $\mathfrak{F}^{(0)}$, *appartient à* $\mathfrak{F}^{(n)}$.

(IX). *La somme d'un ensemble de* $\mathfrak{F}^{(m)}$ *et d'un ensemble de* $\mathfrak{F}^{(n)}$ *appartient à* $\mathfrak{F}^{(m+n+1)}$ *si* $\mathfrak{F}^{(0)} \subset \mathfrak{F}(H_1)$.

(X). *La somme d'un nombre fini k d'ensembles* $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ *de* $\mathfrak{F}^{(n_1)}, \mathfrak{F}^{(n_2)}, \mathfrak{F}^{(n_3)}, \dots, \mathfrak{F}^{(n_k)}$ *respectivement appartient à*

$$\mathfrak{F}^{(n_1+n_3+n_3+\dots+n_k+k-1)}$$

si $\mathfrak{F}^{(0)} \subset \mathfrak{F}(H_1)$.

Revenons au cas général et démontrons un théorème. Un ensemble ouvert qui contient un ensemble fermé M le contient complètement, et il s'appelle un *voisinage de* M (*voir* p. 16).

(XI). *Dans un espace séparable, pour tous les sous-ensembles* M *fermés d'un ensemble* A *superposé à une famille régulière* $\mathfrak{F}$, *il existe dans chaque voisinage* Z *de* M *sur* A *un voisinage* W *de* M *sur* A *dont la frontière sur* A *appartient à* $\mathfrak{F}$.

Lemme 1. — *Étant donnée une suite d'ensembles ouverts*, W_1, W_2, W_3, ..., W_k, ..., *si l'on pose*

$$V_1 = W_1 \qquad V_k = W_k - W_k \sum_{i}^{k-1} \overline{W}_i \qquad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

alors

$$\sum_{i=1}^{k} V_i \supset \sum_{i=1}^{k} \overline{W}_i.$$

Lemme 2. — *Soient* M *un ensemble contenu dans la somme* $\sum_{k=1}^{\infty} W_k$ (du lemme 1) *et* $W^\star$ *la somme de tous les* V_i *dont les fermetures* $\overline{V}_i$ *contiennent au moins un point de* M. *Alors la fermeture* $\overline{W^\star}$ de $W^\star$ *contient tous les points de* M *dans son intérieur.*

En effet, soit p un point de M. Nous avons un W_s le premier ensemble ouvert de la suite qui contient p. Comme W_s est ouvert, il existe un voisinage de p qui appartient à W_s; soit V_{λ_1}, V_{λ_2}, V_{λ_3}, ..., V_{λ_n} les ensembles V_k de l'indice $k < s$ tels que $\overline{V}_k \supset p$; soit V_{μ_1}, V_{μ_2}, V_{μ_3}, ..., V_{μ_m} tous les autres V_k de l'indice $k < s$; $m + n = s - 1$. Il existe alors un voisinage $U(p)$ de p disjoint de $\Sigma\overline{V}_\mu$ et contenu dans W_s :

$$U(p) \sum \overline{V}_\mu = (0), \qquad W_s \supset U(p).$$

Or, $W^\star \supset \sum_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$ entraine $\overline{W^\star} \supset \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i}$. Donc, si $\sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i}$ contient un voisinage de p, notre lemme est démontré.

Dans le cas contraire, il existe une suite de points q_j ($j = 1, 2, 3, \dots$

de $U(p)$ qui tend vers p et qui est disjointe de $\sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i}$ et, par suite, de $\sum_{i=1}^{s-1} \overline{V}_i$,

$$(\alpha) \qquad q_j \sum_{i=1}^{s-1} \overline{V}_i = (0).$$

D'après le lemme 1,

$$V_s = W_s - W_s\left(\sum_{i}^{s-1} \overline{W}_i\right) \supset W_s - W_s \sum_{i=1}^{s-1} \overline{V}_i.$$

Par suite,

$$V_s U(p) \supset W_s U(p) - W_s U(p) \sum_{i=1}^{s-1} \overline{V}_i = U(p) - U(p) \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i}.$$

Donc,

$$U(p)\left(V_s + \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i}\right) \supset U(p);$$

c'est-à-dire

$$(\beta) \qquad V_s + \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i} \supset U(p).$$

D'autre part,

$$V_s q_i \supset W_s q_i - W_s \sum_{i=1}^{s-1} \overline{V}_i q_i = q_i,$$

d'après (α), donc $\overline{V}_s \supset p$; d'où $V_s \subset W^\star$. Comme

$$V_{\lambda_i} \subset W^\star \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

on a

$$W^\star \supset V_s + \sum_{1}^{n} \overline{V}_{\lambda_i};$$

celui-ci contient $U(p)$, d'après (β).

Dans ce cas aussi, notre lemme est démontré.

Lemme 3. — *Si, de plus,*

$$\text{front } W^\star \subset \sum_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i,$$

on peut dire aussi

$$\text{front } W^* \subset \sum_{i=1}^{\infty} \text{front } V_i \quad [1].$$

Démonstration du théorème XI. — Associons à chaque point p de A un voisinage $U(p)$ de p sur A, dont la frontière sur A appartient à $\mathcal{F}$, d'après la règle suivante : (α) si $p \subset M$, $U(p) \subset Z$; (β) si $p.M = (0)$, $\overline{U}(p).M = (0)$ (la fermeture prise sur A). Ceci est toujours possible, car M est fermé dans A.

Comme l'espace est séparable, de la famille d'ensembles $U(p)$ ouverts sur A ainsi obtenu, on peut extraire une suite dénombrable W_n dont la somme couvre $A (n = 1, 2, 3, \ldots)$. D'après la règle (α) et (β), tous les W_i tels que $\overline{W}_i . M \neq (0)$ sont contenus dans Z.

Posons maintenant

$$V_1 = W_1, \qquad V_k = W_k - W_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} \overline{W}_i \right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

tous les V_k tels que $\overline{V}_k . M \neq (0)$ sont aussi contenus dans Z. Désignons par W^* la somme de tous les tels V_k et posons

$$W = \overline{W}^* - \text{front}(\overline{W}^*),$$

où la fermeture et la frontière sont prises sur A.

Nous allons démontrer que W est un voisinage que nous cherchons. D'abord, il est ouvert dans A. D'après le lemme 2, il contient M. Troisièmement, $W^* \subset Z$ entraîne $\overline{W}^* \subset \overline{Z}$, par suite $W \subset Z$. Donc, il nous reste à démontrer que la frontière de W sur A appartient à $\mathcal{F}$. Or,

$$\text{front } W \subset \text{front}(\overline{W}^*) \subset \text{front } W^*.$$

D'autre part, $A \subset \sum W_i$ entraîne

$$\text{front } W^* \subset A = \sum \overline{W}_i.$$

D'après le lemme 3, on a

$$\text{front } W^* \subset \sum_{k=1}^{\infty} \text{front } V_k;$$

[1] *Voir* MENGER, *D. T.*, p. 108.

et finalement

$$\operatorname{front} V_k \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{front} W_i$$

nous donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{front} V_k \subset \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{front} W_k.$$

La frontière de W_k sur A appartient à $\mathcal{F}$ et elle est fermée dans A, et par suite, fermée dans la somme $\sum \operatorname{front} W_k$, donc celle-ci appartient à $\mathcal{F}$ et une de ses parties front W également (¹).

C. Q. F. D.

Définition. — Deux ensembles fermés et disjoints A et B dans un espace R s'appellent *séparés par un ensemble* C de R, si le complément de C : R — C est la somme de deux ensembles disjoints qui sont fermés dans la somme R — C et dont l'un contient A et l'autre B.

(XII). *Soit $\mathcal{F}$ une famille régulière. Pour qu'un espace séparable* R *soit superposé à $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que chaque deux ensembles disjoints et fermés de cet espace soient séparés par un ensemble de $\mathcal{F}$.*

20. *Structure de l'espace. Première méthode : classes locales de dimensions.*

(α) Étant donnés un espace R et un de ses points p, quelle structure locale cet espace R a-t-il au voisinage de p?

(β) Étant donnés un ensemble M d'un espace R et une structure locale, comment sont répandus les points de M où M est construit de la même structure ?

Pour traiter ces questions, nous suivons ici deux méthodes, l'une due à MM. Brouwer et Fréchet, l'autre à MM. Menger et Urysohn.

Commençons par la première et introduisons la *classe locale de dimensions :* Étant donnés deux ensembles A et B, et deux points a et b, de A et de B respectivement, la classe locale de dimensions *de* A *sur* a

---

(¹) Ici, j'ai suivi la marche de la démonstration dans *Dimensions theorie*, de M. Menger (p. 116), avec un peu de modification.

est inférieure où égale à celle de B sur b si pour tout voisinage $V(b)$ de b, il existe au moins un voisinage $V(a)$ de a tel que $\partial V(a) \leqq \partial V(b)$ et nous le représentons par la notation $\partial_a A \leqq \partial_b B$. De la même manière, nous pouvons définir ce qu'on représente par $\partial_a A = \partial_b B$, $\partial_a A < \partial_b B$, etc.

Mais au lieu de comparer les deux classes locales, effectuons plutôt cette comparaison entre une classe locale et une classe d'un ensemble; ceci est très commode en pratique.

Définition. — Étant donné un point a d'un ensemble A et un ensemble B, nous disons que la *classe locale de dimensions* $\partial_a A$ de A sur le point a est : 1° supérieure, 2° égale, 3° inférieure ou 4° incomparable à la classe de dimensions ∂B suivant qu'il existe un voisinage $W(a)$ de a sur A tel que, pour tous les voisinages $V(a)$ de a contenus dans $W(a)$; $\partial V(a)$ est : 1° supérieure, 2° égale, 3° inférieure ou 4° incomparable à ∂B respectivement, et nous représentons les trois premiers cas par les notations

$$1^\circ \quad \partial_a A > \partial B, \qquad 2^\circ \quad \partial_a A = \partial B \qquad \text{et} \qquad 3^\circ \quad \partial_a A < \partial B.$$

Pour que cette définition soit légitime, il nous faut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un point a d'un ensemble* A *et un ensemble* B, *il existe un voisinage* $W(a)$ *du point a sur* A, *pour lequel un des quatre cas de la définition plus haut a lieu et ce cas seul.*

Démonstration. — S'il existe un voisinage $W(a)$ de a sur A tel que $\partial W(a) < \partial B$, c'est le cas 3° et les autres cas n'ont pas lieu. S'il existe un voisinage $W(a)$ de a sur A tel que $\partial W(a) \leqq \partial B$ et s'il n'existe pas un voisinage $W_1(a)$ de a sur A tel que $\partial W_1(a) < \partial B$, c'est le cas 2° et les autres cas n'ont pas lieu.

Donc il nous suffit de considérer le cas où, pour tous les voisinages $V(a)$ de a sur A, ou bien $\partial V(a) > \partial B$, ou bien $\partial V(a)$ et ∂B sont incomparables. Or s'il existe un voisinage $W(a)$ tel que $\partial W(a)$ et ∂B sont incomparables, tous les voisinages $V(a)$ contenus dans $W(a)$ ont les classes incomparables à ∂B, car si un voisinage $V(a)$ contenu dans $W(a)$ est comparable à ∂B, on aurait $\partial V(a) > \partial B$ et, par suite,

$\partial W(a) > \partial B$; c'est le cas 4°. Et il nous reste le cas où, pour tous les voisinages $V(a)$ de a sur A, on a $\partial V(a) > \partial B$, c'est le cas 1°.

C. Q. F. D.

D'après ce théorème, la détermination d'un des quatre cas est toujours possible et unique.

De la définition on déduit immédiatement :

(I). Soient A, B et C trois ensembles et a, b les points de A et de B (respectivement); alors :

1° $A \supset B$ entraîne $\partial_a A \geqq \partial_b B$;
2° $\partial_a A \geqq \partial B$ et $\partial B \geqq \partial C$ entraînent $\partial_a A \geqq \partial C$;
3° $\partial_a A \geqq \partial B$ et $\partial C \geqq \partial_a A$ entraînent $\partial C \geqq \partial B$;
4° $\partial_a A \geqq \partial B$ et $\partial B > \partial C$ entraînent $\partial_a A > \partial C$, etc.

On aura la définition et les théorèmes correspondants pour les types locaux de dimensions en remplaçant $\partial_a A$, ∂B, $\partial W(a)$ et $\partial V(a)$ par $d_a A$, dB, $dW(a)$ et $dV(a)$. Mais pour montrer la différence entre les types locaux de dimensions et nos classes locales, nous donnons un exemple très simple : Prenons, dans un espace cartésien à trois variétés R_3, cinq points

$$\alpha = (0, 0, 0), \quad p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = (0, 1, 0), \quad p_3 = (0, 0, 1)$$
$$\beta = (1, 1, 1)$$

et joignons-les par dix segments de droites qui se terminent par ces cinq points; on obtient ainsi une figure P.

Le type de dimensions de P est entre celle de la droite et celle de l'espace : $dR_1 < dP < dR_3$ et il est incomparable à dR_2. En effet, d'abord évidemment, il est impossible d'établir $dP \geqq dR_2$. Mais aussi la proposition $dP \leqq dR_2$ est vicieuse. Supposons que P entier soit homéomorphe à une partie de R_2. Alors le triangle (p_1, p_2, p_3) serait transformé en une courbe C simple et fermée (et borné parce que le triangte est compact en soi), qui divise le plan en deux parties disjointes : la partie intérieure qui est bornée et la partie extérieure qui n'est pas bornée, d'après le théorème de Jordan. Considérons d'abord le cas où un des deux points α et β, α par exemple, est transformé en un point de la partie intérieure de la courbe C. Alors l'autre point β ne peut pas se placer dans la partie extérieure, car alors la courbe transformée du segment (α, β) aurait au moins un point commun avec la courbe C. D'autre part, on voit également, d'après le théorème de Jordan, que les trois courbes transformées des segments (α, p_1), (α, p_2) et (α, p_3) partagent la partie intérieure de la courbe C en trois parties disjointes pour lesquelles l'un des trois points p_1, p_2 et p_3 est situé dehors respectivement. Donc le point β ne peut pas se placer dans une de ces trois parties. De la même manière on peut traiter le cas où tous les deux points α et β sont situés dans la partie extérieure de la courbe C. C. Q. F. D.

Pourtant

$$dR_1 < d_{p_i} P = d_\alpha P = d_\beta P < dR_2 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et pour d'autres points p de P on a $d_p P = dR_1$. Tandis que $\partial P = \partial R_1$ et partout $\partial P_x = \partial R_1$ où x est un point quelconque de P.

Dans l'exemple que nous avons vu à la page 36, l'ensemble connexe (F) a le type local de dimensions fini.

En effet $d_p(F) = dR_n$ si $p \subset S_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; $d_p(F) = dR_1$ si p appartient à la droite, et enfin $d_p R_1 < d_0(F) < dR_2$.

Passons à la deuxième question et étudions la distribution des points d'un ensemble A sur lesquels A possède une classe locale de dimensions donnée. Étant donné un ensemble B on désigne par

$$A(\geqq \partial B), \quad A(\leqq \partial B), \quad A(> \partial B), \quad A(= \partial B) \quad \text{et} \quad A(< \partial B),$$

l'ensemble de tous les points a de A sur lesquels on a

$$\partial_a A \geqq \partial B, \quad \partial_a A \leqq \partial B, \quad \partial_a A > \partial B, \quad \partial_a A = \partial B \quad \text{et} \quad \partial_a A < \partial B,$$

respectivement.

(I). Pour l'ensemble B quelconque, $A(\geqq \partial B)$ et $A(> \partial B)$ sont fermés dans B,

En effet si une suite de points a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sur lesquels on a $\partial_{a_k} A \geqq \partial B$ tend vers un point a de A, chaque voisinage $V(a)$ de a sur A contient au moins un a_k avec un voisinage $W(a_k)$ de a_k tel que $\partial W(a_k) \geqq \partial B$, $V(a) \supset W(a_k)$ entraîne donc $\partial V(a) \geqq \partial B$; mais ceci a lieu pour tous les voisinages $V(a)$ de a; de là $\partial_a A \geqq \partial B$.

C. Q. F. D.

De la même manière on voit que $A(> \partial B)$ est fermé.

(II). Pour l'ensemble B quelconque, $A(\leqq \partial B)$ et $A(< \partial B)$ sont ouverts dans A.

En effet, soit a un point de $A(\leqq \partial B)$. Alors il y a un voisinage $V(a)$ de a sur A tel que $\partial V(a) \leqq \partial B$. Pour tous les points b de $V(a)$ il existe un voisinage $W(b)$ de b qui est contenu dans $V(a)$; de là $\partial W(b) \leqq \partial B$, d'après la définition $\partial_b A \leqq \partial B$, c'est-à-dire $V(a) \subset A(\leqq \partial B)$.

C. Q. F. D.

De la même manière on peut voir que $A(< \partial B)$ est ouvert.

Corollaire. — $A(= \partial B)$ *est un* F_σ *et un* G_δ *en même temps; car*

$$A(= \partial B) = A(\geqq \partial B) \cdot A(\leqq \partial B) = A(\geqq \partial B) - A(> \partial B) = A(\leqq \partial B) - A(< \partial B).$$

Remarquons encore que $A(\leqq \partial B) + A(> \partial B)$ n'est pas en général égal à A.

(III). Étant donnée une suite d'ensembles $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_l, \ldots$ tels que $\partial B_1 < \partial B_2 < \partial B_3 < \ldots < \partial B_k < \ldots$, l'ensemble M de tous les points p de A sur lesquels on a $\partial_p A > \partial B_k$ pour tous les k est fermé et l'ensemble N de tous les points p de A sur lesquels on a $\partial_p A < \partial B_k$ pour tous les k est ouvert.

Car

$$M = \prod_k A(\geqq \partial B_k) \qquad \text{et} \qquad N = \sum_k A(\leqq \partial B_k).$$

(IV). Soit A un ensemble *dans un espace séparable*. Pour l'ensemble B *quelconque*, la classe de $A(\leqq \partial B)$ est égale ou inférieure à ∂B.

En effet, à chaque point α de $A(\leqq \partial B)$, il existe un voisinage $V(\alpha)$ de α sur A, tel que $\partial V(\alpha) \leqq \partial B$; soit $W(\alpha)$ un voisinage de α sur A contenu complètement dans $V(\alpha)$: $W(\alpha) ((V(\alpha)$. Comme A est séparable, on peut en choisir une suite dénombrable $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_k, \ldots$, dont la somme couvre $A(\leqq \partial B)$, par suite

$$\sum_k \overline{W}_k \supset A(\leqq \partial B).$$

D'autre part, comme $\sum_k \overline{W}_k$ est contenu dans A, $\overline{W}_k$ est fermé dans la somme

$$\sum_k \overline{W}_k \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

D'après le théorème de l'addition

$$\partial \sum_k \overline{W}_k \leqq \partial B.$$

Ceci nous donne

$$\partial A (\leqq \partial B) \leqq \partial B. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(V). Soient A et B deux ensembles dans un espace séparable tels que $\partial B < \partial A$. Posons $A = P + Q$ où $P = A(\leqq \partial B)$ et $Q = A - P$. Alors il est impossible que l'on ait $\partial Q \leqq \partial B$.

En effet, supposons qu'on ait $\partial Q \leqq \partial B$. D'après (IV) $\partial P \leqq \partial B$; d'après (II), P est ouvert dans A, et par suite P est un G_δ et un F_σ dans A en même temps. Donc, d'après (IV) (§ 18), on a $\partial A \leqq \partial B$; ceci est contraire à l'hypothèse $\partial A > \partial B$. C. Q. F. D.

21. *Structure de l'espace. Deuxième méthode.* — La méthode de Menger et Urysohn, pour observer la structure dimensionnelle de l'ensemble, est de voir, étant donnés un point p d'un ensemble A de l'espace R et une famille régulière $\mathfrak{F}$ d'ensemble de R, s'il existe une suite de voisinages de p sur A qui tend vers p et dont les frontières sur A appartiennent à $\mathfrak{F}$, ou non. Si cela a lieu on dit que A *est superposé à* $\mathfrak{F}$ *sur ce point*. Nous avons étudie déjà (§ 19) les propriétés de l'ensemble qui est superposé à une famille régulière sur tous ces points. Dans ce paragraphe, traitons le cas général où A peut avoir des points sur lesquels il n'est pas superposé à $\mathfrak{F}$.

Désignons par $P = A(\mathfrak{F})$ l'ensemble de tous les points de A sur lesquels A est superposé à $\mathfrak{F}$, et posons aussi $Q = A - A(\mathfrak{F})$. Et étudions les relations entre P, Q et A.

(I). Soient A un ensemble d'un espace R et $\mathfrak{F}$ une famille régulière d'ensemble de R. Alors $P = A(\mathfrak{F})$ est un G_δ dans A et par suite $Q = A - A(\mathfrak{F})$ est un F_σ dans A.

Car, les points qui ont un voisinage dont le diamètre est $\leqq \frac{1}{n}$ et dont la frontière appartient à $\mathfrak{F}$ forment une partie P_n de A ouverte dans A;

et l'on a $P = \prod_n P_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. [Démonstration due à M. Tumarkin [1].]

La définition de l'ensemble superposé à une famille s'applique non seulement pour les points de A, mais encore pour les points de l'ensemble $A + A'$ [2].

(II). Soient A un ensemble d'un espace R et $\mathcal{F}$ une famille régulière d'ensembles de R. $\overline{A}(\mathcal{F})$ est un G_δ dans l'espace R et par suite $\overline{A} - A\mathcal{F}$ est un F_σ dans l'espace R.

Remarquons d'abord que le premier théorème fondamental de M. Menger sur la structure dimensionnelle de l'espace ne se généralise pas au cas où le nombre de dimensions est infini. Voici le théorème :

Dans un espace compact et séparable qui est de dimensions égales à n au sens de Menger-Urysohn, *la partie* R^n *des plus grandes dimensions :* ensemble de tous les points de R sur lesquels R est de dimensions égales à n, est de dimensions égales à n (n étant un nombre entier nul ou positif fini).

Prenons par exemple dans l'espace hilbertien une suite d'ensembles $A_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ des points

$$p = (0, 0, \ldots, 0; x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}, \ldots, x_{\nu+n}; 0, 0, \ldots),$$
$$\nu = \frac{n(n-1)}{2},$$

dont toutes les coordonnées sont nulles jusqu'à la $\nu^{\text{ième}}$ et après $(\nu + n + 1)^{\text{ième}}$, et les autres peuvent prendre les valeurs

$$0 \leqq x_{\nu+r} \leqq \frac{2}{n(n+1)} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Posons maintenant

$$E = \sum_n A_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots.$$

On voit que E est un ensemble compact en soi dont les dimensions au

---

(1) Tumarkin, *Fund. Math.*, t. 8, 1926, p. 360.

(2) Tumarkin, *Math. Ann.*, B. 98, 1928, p. 639.

sens de Menger-Urysohn sont infinies et qu'il n'y a qu'un point sur lequel E est de dimensions infinies.

M. Menger a nommé un ensemble R de *dimensions faibles* quand R est de dimensions égales à n et la partie R^n des plus grandes dimensions n'est pas de dimensions égales à n. Son second théorème fondamental [1] dit que cette partie est de dimensions au moins égale à $n-1$ dans un espace séparable (nécessairement non compact d'après le théorème premier). Cherchons un théorème correspondant pour la classe de dimensions; cela nous permettra de voir plus précisément la structure dimensionnelle des ensembles de dimensions faibles et des ensembles de dimensions infinies.

(III). Soient $\mathfrak{F}$ une famille régulière d'ensembles d'un espace séparable R et U un domaine ouvert dans R. Alors pour un ensemble quelconque A de R, $U\{A - A(\mathfrak{F})\} \subset \mathfrak{F}$ entraîne $U.A = U.A(\mathfrak{F})$.

Démonstration. — Suivons la marche de M. Menger. Pour tous les points p de $U.A(\mathfrak{F})$, il existe une suite de voisinages de p sur A contenus complètement dans U, qui tend vers p et dont les frontières appartiennent à $\mathfrak{F}$. Comme A est séparable, on peut choisir une suite dénombrable $V_m (m = 1, 2, 3 \ldots)$ de tels voisinages qui contient, pour tous les points p de $A(\mathfrak{F})$, une suite partielle qui tend vers ce point p. La somme B des frontières de ces voisinages V_m sur A est un F_σ dans A et appartient à $\mathfrak{F}$; nous avons donc

$$U.A = U.\{A - A(\mathfrak{F})\} + B + U.\{A(\mathfrak{F}) - A(\mathfrak{F}).B\}$$

dont les deux premiers termes sont F_σ et appartiennent à $\mathfrak{F}$, donc leur somme $U\{A - A(\mathfrak{F})\} + B$ appartient à $\mathfrak{F}$; tandis que le dernier terme $U.\{A(\mathfrak{F}) - A(\mathfrak{F}).B\}$ est de dimension nulle au sens de Menger-Urysohn. Donc, d'après (IV) (§ 18), U.A est superposé à $\mathfrak{F}$. Comme U.A est ouvert dans A, on a $U.A \subset A(\mathfrak{F})$. C. Q. F. D.

Étant donnés deux ensembles A et B dans un espace R, on désigne par $A(\partial B)$ l'ensemble de tous les points de A sur lesquels A est superposé à la famille régulière $\mathfrak{F}$ (B) engendrée par B.

---

[1] MENGER, *D. T.*, p. 135.

(IV). soient A et B deux ensembles dans un espace séparable R. Alors $\partial\{A - A(\partial B)\} \leqq \partial B$ entraîne $A = A(\partial B)$.

Ces résultats nous permettent de voir la construction des espaces de dimensions faibles; d'abord ils donnent la limitation supérieure des dimensions d'un ensemble A, quand on sait celle d'une certaine partie. En effet, on peut dire, par exemple :

(V). Si la partie des plus grandes dimensions R'', d'un espace séparable R est de dimensions au plus égales à $n - 1$, alors l'espace R lui-même est de dimensions rationnelles au plus égales à n.

Car, soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ deux familles d'ensembles de dimensions égales à $n - 2$ et de dimensions *rationnelles* au plus égales à $n - 1$ respectivement. Alors on a $R'' = R - R(\mathcal{G})$. Mais d'autre part $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ entraîne $R - R(\mathcal{F}) \subset R - R(\mathcal{G})$. Donc l'hypothèse $R'' \subset \mathcal{F}$ entraîne $R - R(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et d'après (III) on a $R = R(\mathcal{F})$.

C. Q. F. D.

Aussi ils donnent la limitation inférieure de la partie R'' quand on connaît celle de R.

Ces théorèmes (III) et (IV), qui s'appliquent pour l'espace à une infinité de variétés, nous donnent aussi le second théorème fondamental de M. Menger. On le voit facilement, en prenant comme $\mathcal{F}$ de (III) de la famille de tous les ensembles de dimensions au plus égales à $n - 2$.

Comme exemple nous voyons l'ensemble de dimensions faibles dû à M. Sierpinski [1] : Dans un plan complexe, prenons un carré C dont les quatre sommets sont des points $p + a + b$, $p - a + ib$, $p - a - ib$ et $p + a - ib$, où p est un nombre complexe et a, b sont deux nombres réels positifs ou nuls. Désignons par $E_1(C)$ la somme du point p et des rectangles F_n et $G_n (n = 0, 1, 2, 3)$, où F_n est le rectangle dont les quatre sommets sont

$$p + \frac{a}{2^{2n}} + ib, \quad p + \frac{a}{2^{2n-1}} + ib, \quad p + \frac{a}{2^{2n+1}}, \quad p + \frac{a}{2^{2n}},$$

et G_n est le rectangle situé symétrique de F_n par rapport au point p, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $\omega = 2p - z$, z étant un point de F_n :

$$E_1(C) = (p) + F_0 + G_0 + F_1 + G_1 + F_2 + G_2 + \ldots.$$

[1] SIERPENSKI. *Fund. math.*, t. 2, 1921, p. 81.

Soit R la somme d'un nombre dénombrable (des points et) des carrés R_n de la forme C : $R = \Sigma R_n$; et désignons par E(R) la somme $\Sigma E_1(R_n)$. Alors on peut définir l'ensemble S de dimensions faibles de M. Sierpinski comme suit :

E_0 est un carré C où $p = 0$, $a = 1$, $b = 1$.

$$E_1 = E(E_0); \quad E_2 = E(E_1); \quad E_3 = E(E_2); \quad \ldots; \quad E_k = E(E_{k-1}); \quad \ldots,$$

$$S = \prod_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 . E_2 . E_3 \ldots E_k \ldots .$$

S est de dimension 1 et il l'est seulement sur un nombre dénombrable de ses points (¹). Donc il est de dimension rationnelle égale à 1 [*voir* (V)]. S est discontinu parce qu'il est de dimension faible et égale à 1.

Nous allons finir nos études de la construction de l'espace en démontrant un théorème sur les ensembles discontinus :

(VI). *Les ensembles discontinus d'un espace* R *forment une famille régulière.*

En effet d'abord tous les sous-ensembles B d'un discontinu A sont discontinus, car si B contient un continu, A le contient. Deuxièmement tous les ensembles B homéomorphes à un discontinu A sont aussi discontinus, car si B contient un continu B_1, A contient une partie homéomorphe à B_1 et cette partie est un continu. Enfin, soit A_1, A_2, A_3, ..., A_k, ... une suite d'ensembles discontinus qui sont fermés dans la somme $A = \Sigma A_k$, alors cette somme A est discontinue. Car, si A contient un continu C on peut poser

$$C = C . A = C \sum_k A_k = \sum_k C . A_k = \sum_k C_k, \qquad \text{où} \qquad C_k = C . A_k.$$

Comme C_k est un sous-ensemble d'un discontinu A_k, il est aussi discontinu. Et comme A_k sont fermés dans A, C_k sont fermés dans C; mais C étant compact en soi, C_k sont aussi compacts en soi. Donc C_k sont non seulement discontinus mais encore de dimension nulle au

(¹) *Voir* aussi : MENGER, *D. T.*, p. 139.

sens de Menger-Urysohn (1). Donc la somme C est aussi de dimension nulle; elle ne peut pas être un discontinu. C. Q. F. D.

D'après ce théorème on peut dire que l'ensemble qui est de même classe de dimensions qu'un discontinu est aussi discontinu.

(VII). *La classe de dimensions de l'ensemble* S *discontinu de dimension faible égale à* 1 *de M. Sierpinski* (p. 73), *et celle de la droite* R_1 *sont incomparables.*

En effet d'abord, la famille régulière $\mathfrak{F}(S)$ d'ensembles du plan engendrée par l'ensemble S de M. Sierpinski ne contient que des ensembles discontinus; elle ne contient pas une droite. D'autre part, la famille régulière $\mathfrak{F}(R_1)$, engendrée par la droite R_1, ne contient pas S. Car si elle le contenait, on pourrait poser $S = \Sigma S_k$ où tous les ensembles S_k sont fermés dans S et $dS_k \leqq dR_1$. Or comme S_k est discontinu et homéomorphe à une partie de R_1, il est de dimension nulle au sens de Menger-Urysohn, par suite S serait de dimension nulle.

C. Q. F. D.

Donc, même la famille d'ensembles de dimensions rationnelle égale à 1 se décompose en plusieurs classes de dimensions. Ainsi, en introduisant la classe de dimensions, nous avons eu plusieurs théorèmes correspondant à ceux du nombre de dimensions au sens de Menger-Urysohn (2) qui nous permettent de voir plus minutieusement la construction de l'espace.

Il y a encore plusieurs théorèmes sur les dimensions au sens de Menger-Urysohn que nous avons laissés de côté. Il serait intéressant de voir si ces théorèmes s'étendent à la classe de dimension ou bien à la famille des ensembles superposés à une famille régulière, ou non.

M. Menger a pu démontrer, avec cinq axiomes pour les familles $\mathfrak{F}$ des ensembles :

(1), (2) et (3) de la page 41;

(4). Avec un ensemble A de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ contient au moins un ensemble compact en soi qui contient A topologiquement;

---

(1) Menger, *D. T.*, p. 213.

(2) *Voir* Menger, *Monat. f. Math. u. Physik*, Bd XXXVI, Heft 2, p. 1931; Kuratowski et Menger, *ibid.*, Bd XXXVII, Heft. 1, p. 169.

(5). $\mathcal{F}$ contient l'intervalle de l'espace cartésien R_n à dimensions n, que la famille minimum coïncide avec celle des ensembles de dimensions au plus égales à n au sens de Menger-Urysohn, pour les ensembles de points *du plan*. Il serait très intéressant de traiter les nombres de dimensions au sens de Menger-Urysohn avec cette méthode, pour les ensembles d'un espace *en général*.

Vu et approuvé :

Paris, le 7 mai 1930.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 7 mai 1930.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

RELATIONS ENTRE LA CLASSE ET LE NOMBRE DE DIMENSIONS AU SENS DE MM. POINCARÉ, BROUWER, MENGER ET URYSOHN.

89265-30 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.