THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JACQUES HERBRAND

Recherches sur la théorie de la démonstration

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__110__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT HENRI POINCARÉ

N° D'ORDRE 2121

SÉRIE A, N° DE SÉRIE 1252

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. Jacques HERBRAND

1re THÈSE

Recherches sur la théorie de la démonstration

2me THÈSE

Propositions données par la faculté

Soutenues le 1930 devant la commission d'examen

Président : M. VESSIOT

Examinateurs { MM. DENJOY, FRECHET

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES

CABINET DU DÉPARTEMENT
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen . . . . . C. Maurain, *Professeur*, Physique de globe.

Doyens honoraires . . P. Appell, M. Molliard.

Professeurs honoraires
- A. Joannis.
- H. le Chatelier.
- H. Lebesgue.
- A. Fernbach.
- A. Leduc.
- R. Dongier.
- E. Hérouard.

Professeurs . . . .

Emile Picard . .	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. Koenigs. . .	Mécanique physique et expérimentale.
E. Goursat. . .	Calcul différentiel et calcul intégral.
P. Janet. . . .	Electrotechnique générale.
F. Wallerant . .	Minéralogie.
P. Painlevé . .	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel Bertrand	Chimie biologique.
Mme P. Curie . .	Physique générale et radioactivité.
M. Caullery . .	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. Urbain . . .	Chimie Générale
Emile Borel . .	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
L. Marchis . .	Aviation.
Jean Perrin . .	Chimie physique.
Rémy Perrier .	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. Abraham . .	Physique
M. Molliard . .	Physiologie végétale.
E. Cartan . . .	Géométrie supérieure.
L. Lapicque . .	Physiologie générale.
E. Vessiot. . .	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. Cotton . . .	Physique générale.
J. Drach . . .	Application de l'analyse à la géométrie.
Charles Fabry .	Physique.
Charles Pérez .	Zoologie.
Léon Bertrand .	Géologie structurale et géologie appliquée.
R. Lespieau . .	Théories chimiques.
E. Rabaud. . .	Biologie expérimentale.
P. Portier. . .	Physiologie comparée.
E. Blaise . . .	Chimie organique.
P. A. Dangeard.	Botanique.
Paul Montel . .	Mécanique rationnelle.
P. Wintrebert .	Anatomie et histologie comparées.
O. Duboscq . .	Biologie maritime.
G. Julia . . .	Mathématiques générales.
A. Mailhe . . .	Etude des combustibles
L. Lutaud . . .	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène Bloch .	Physique théorique et physique céleste.
Henri Villat . .	Mécanique des fluides et applications.
Ch Jacob. . .	Géologie
P. Pascal . . .	Chimie minérale.
Léon Brillouin .	Théories physiques.
V. Auger . . .	Chimie appliquée.
E. Esclangon . .	Astronomie.

E. Péchard . .	Chimie (Enseig. P. C. N.).
M. Guichard . .	Chimie minérale.
A. Guillet. . .	Physique.
C. Mauguin . .	Minéralogie.
L. Blaringhem .	Botanique.
A. Michel-Lévy.	Pétrographie.
A. Dereims . .	Géologie.
A. Denjoy. . .	Calcul différentiel et intégral.
H. Bénard. . .	Physique (P. C. N.).
E. Darmois . .	Physique.
G. Bruhat. . .	Physique.
H. Mouton. . .	Chimie physique.
L. Joleaud . .	Paléontologie.
M. Javillier . .	Chimie biologique.
A. Dufour. . .	Physique (P. C. N.).
F. Picard . . .	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Robert-Lévy . .	Zoologie.
L. Dunoyer . .	Optique appliquée.
A. Guilliermond	Botanique (P. C. N.).
A. Debierne . .	Radioactivité.
M. Fréchet . .	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.

Secrétaire . . . . A. Pacaud.

PREMIÈRE THÈSE

Recherches sur la Théorie de la Démonstration

INTRODUCTION.

Ce fut un des grands mérites de Russsell et Whitehead dans leur ouvrage capital, les Principia Mathematica, d'avoir montré, en poursuivant la voie ouverte par les logisticiens de l'école de Peano, que toute proposition mathématique pouvait se traduire par les combinaisons d'un petit nombre de signes, et que les lois du raisonnement se ramenaient, en définitive, à quelques règles simples de combinaison de ces signes; ce qui fait qu'on peut, en un certain sens, considérer ce système de signes comme équivalent à l'ensemble des mathématiques.

On se servira dans ce but d'un certain nombre de signes qui traduiront, soit les opérations et les concepts logiques les plus simples (un signe signifiera „ou"; un autre, „non"; un autre „et", etc...), soit des relations déterminées entre certains objets. Nous étudierons ces signes en détail dès le début de ce travail. On donne un certain nombre de lois qui seront de deux sortes:

a) Les unes indiquent que certaines combinaisons de signes sont des propositions.

b) Les autres indiquent des procédés permettant, à partir d'un certain nombre de combinaisons de signes que l'on sait déjà être des propositions, de former d'autres combinaisons qui seront aussi des propositions.

En choisissant convenablement ces signes et ces lois, on réussit à traduire les propositions en signes. Il faut d'ailleurs remarquer que ce premier pas n'est que le moins important, car on peut considérer que l'énoncé d'une proposition en mots d'une langue déterminée, est un ensemble de signes représentant cette proposition. Notre symbolisme n'est, au fond, qu'une sténographie, permettant d'ailleurs de donner plus d'uniformité et plus de précision à l'énoncé des propositions mathématiques: c'était là le seul but des logisticiens.

Il faut maintenant étudier les lois du raisonnement. On constate alors qu'elles se réduisent, à l'intérieur de toute théorie mathématique, à quelques lois très simples, des deux sortes suivantes:

a) Les unes indiquent que certaines propositions seront considérées comme vraies.

b) Les autres indiquent des procédés permettant de déduire de certaines propositions dont on sait déjà qu'elles sont vraies, d'autres propositions qui seront elles aussi considérées comme vraies: ce sont „les règles de raisonnement".

L'énoncé de toutes ces règles est tel, comme on s'en rendra compte plus loin, que toute combinaison de signes appelée proposition, est effectivement la traduction d'une proposition du langage ordinaire, et qu'une suite de propositions qu'il faut considérer comme vraies d'après ces règles, correspond à une démonstration mathématique. Mais on peut encore se demander s'il n'y a pas des propositions que le système de signes ne saura traduire; ou des démonstrations qui échapperont à ses règles.

Il ne faut pas cacher que cela n'est qu'un résultat expérimental (dont la validité ne peut être que confirmée par une dialectique philosophique); sa preuve réside, en somme, dans le fait que Russell et Whitehead ont réussi, dans les trois tomes de Principia Mathematica, à reproduire tous les raisonnements des débuts des mathématiques et de la théorie des ensembles. On peut considérer comme un des faits les plus parfaitement vérifiés dans notre connaissance logique du monde, que tout raisonnement que peut actuellement faire un mathématicien raisonnable, trouve immédiatement sa traduction dans le système de signes étudié. Il est possible, quelque difficile que cela nous paraisse, que l'on pourra quelque jour faire éclater ces cadres;

on se convaincra peut-être par la compréhension plus précise de ce qu'est cette logique symbolique que, sans doute, même alors, il lui suffira de modifier quelque peu les règles initiales de l'emploi de ses signes, pour absorber ces nouvelles théories [1]).

Arrivés à ce point où l'on découvre un parallélisme absolu entre le raisonnement mathématique et les combinaisons des signes, il devient naturel d'étudier ce système de signes pour lui-même, et de se poser des problèmes à son sujet; et leur solution aura immédiatement un écho dans notre connaissance générale des Mathématiques (c'est ainsi que l'on peut démontrer la noncontradiction de certaines théories). Nous nous poserons des problèmes du genre suivant: Les propositions possèdent-elles telle propriété? ou: les propositions vraies possèdent-elles telle propriété? Nous pourrons également chercher un critère permettant de reconnaître sûrement si une proposition donnée est vraie dans une théorie déterminée: sa découverte dans un cas suffisamment général serait évidemment d'une importance théorique considérable.

Mais il nous faut trouver une méthode permettant d'aborder ces problèmes. On se convaincra peut-être assez facilement qu'il n'y en a qu'une qui n'offre pas d'objections: c'est celle qui est désignée habituellement sous le nom de méthode par récurrence.

Supposons, par exemple, que nous voulions démontrer que toute proposition vraie, dans une théorie donnée, possède une propriété A. Il nous faudra d'abord montrer que toutes les propositions que l'on a admises comme vraies au début de la théorie, possèdent cette propriété; puis, que si les propositions vraies possèdent cette propriété, il en est de même pour toute proposition que l'on en déduit en appliquant une des règles du raisonnement. On est alors certain que, pour toute démonstration réduite en signes que nous pourrons avoir devant les yeux, nous pourrons essayer de vérifier que la conclusion possède la propriété A, en répétant le raisonnement pour chaque pas de cette démonstration; et nous pourrons être sûrs d'avance que cette vérification se fera. C'est là une certitude de nature intuitive, expérimentale. C'est la conscience que nous avons de notre

---

[1]) Les logiques intuitionnistes, pour autant qu'on puisse fixer leur manière de raisonner, se bornent à interdire certains raisonnements; donc ne risquent pas de sortir des cadres de la théorie que nous considérons.

possibilité de raisonner qui nous permet de savoir que, dans chaque démonstration particulière, en répétant le raisonnement un nombre suffisant de fois, — un nombre de fois que l'on peut connaître d'avance en regardant la démonstration que nous considérons, — on arrive à vérifier la propriété A pour sa conclusion.

Cette récurrence qui „s'arrête dans le fini" a une certitude intuitive telle que l'esprit le plus rigoureux ne peut lui refuser son acquiescement; car un raisonnement qui s'appuie sur elle n'est au fond que la description d'opérations à effectuer dans chaque cas particulier: un manuel opératoire qui permettra de vérifier la propriété A pour la conclusion de toute démonstration traduite en signes que nous pourrons effectivement fabriquer.

Ce point de vue a été développé avec force pendant ces dernières années par Hilbert, qui, dans une série de mémoires, a indiqué ses bases et les résultats qu'il en a déduits (le plus important est la non-contradiction de l'arithmétique ordinaire) [1].

Les propriétés auxquelles nous appliquerons les raisonnements par récurrence, seront telles que l'on puisse toujours, sur une démonstration ou une proposition particuliere, reconnaitre si elles sont vérifiées ou non (par exemple, la propriété qui consiste à contenir, ou à ne pas contenir tel signe). Il est certain qu'on ne peut donner de critère permettant de reconnaître si une propriété satisfait à cette condition; mais on se convaincra aisément, dans chaque cas particulier, qu'il en est ainsi. Pour éviter cet appel à l'intuition, il faudrait faire pour cette logique un travail analogue à celui qui a permis de faire l'axiomatisation des Mathématiques ordinaires; mais cela est peut-être encore prématuré.

Le présent travail utilisera systématiquement la méthode de récurrence, et cela, de trois manières différentes:

1°. Pour démontrer que toute proposition possède telle propriété que nous appellerons A, nous montrerons successivement: a) que les ensembles de signes dont on indique explicitement que ce sont des propositions, dans les règles permettant de construire des propositions, ont la propriété A; b) que si des

---

[1]) Dans sa communication au congrès de Bologne en 1928, Hilbert a en effet rangé parmi les problèmes qui se posent actuellement certains des résultats qu'il avait annoncés précédemment (et qui correspondaient, semble-t-il, à la non-contradiction des Mathématiques ordinaires et de l'Hypothèse du continu).

propositions possèdent la propriété A, il en est de même de toutes celles que l'on peut en déduire en appliquant une des règles permettant de construire de nouvelles propositions à partir d'anciennes. On est alors sûr que toute proposition que l'on pourra fabriquer possédera la propriété A. Nous dirons qu'une telle démonstration procède par *récurrence sur la constructian de la proposition.*

2⁰. Pour montrer de même que toute proposition vraie dans une théorie possède une propriété A, nous montrerons successivement que les propositions que l'on admet comme vraies au début de la théorie, possèdent la propriété A; et que si des propositions vraies possèdent la propriété A, il en est de même pour celles que l'on peut en déduire, en appliquant une des règles du raisonnement. Un telle démonstration sera dite procéder *par récurrence sur la démonstration de la proposition.*

3⁰. Il nous arrivera aussi d'avoir à considérer des séries de propositions dont chacune se déduit de la précédente par une opération déterminée; ce qui fait qu'on peut numéroter ces propositions avec des chiffres. Supposons que nous ayons démontré que la première proposition de la série possède une propriété A; il en est de même de la suivante. Nous sommes alors certains que chaque fois que nous prendrons effectivement une proposition de la série, elle possèdera la propriété A (car il suffirait de répéter le raisonnement imaginé ci-dessus, à chacun des pas qui conduirait de la première proposition de la série, à celle que l'on envisage).

Il faut bien remarquer qu'il y a une certaine différence entre la manière dont nous employons ici le raisonnement par récurrence, et celle dont on l'emploie parfois en mathématiques. Ici, ce n'est jamais que l'indication, en une seule formule, d'un procédé qu'il faudra appliquer un certain nombre de fois dans chaque cas particulier. En mathématiques, au contraire, il arrive que l'on utilise ce raisonnement dans des cas où l'on considère des concepts qui n'ont pas de représentation matérielle possible, au contraire de nos signes, comme par exemple, l'ensemble des entiers; ou des nombres réels. C'est pourquoi ce ne sera pas une tautologie quand nous démontrerons plus loin que le raisonnement par récurrence, dans son emploi en Arithmétique, n'est pas contradictoire.

D'une maniere générale, on peut dire que beaucoup des obscurités et des discussions qui sont survenues à propos des fondements des Mathématiques, ont pour origine une confusion entre le sens „mathématique" des termes, et leur sens „métamathématique" (c'est le terme que Hilbert emploie pour désigner sa logique). On se sert du premier quand on *fait* un raisonnement mathématique; on se sert du second quand on *parle* du raisonnement mathématique. Ainsi s'éclaircissent facilement beaucoup des questions concernant le raisonnement par récurrence, le tiers exclus (dans le sens mathématique, c'est la possibilité de se servir dans un raisonnement du fait qu'une proposition est ou vraie ou fausse; dans le sens métamathématique, c'est la possibilité de pouvoir toujours démontrer dans une théorie donnée, la négation d'un théorème, à défaut de ce théorème lui-même), la question des objets que l'on peut effectivement construire (savoir si, étant donné un ensemble, on peut effectivement l'ordonner, c'est une question métamathématique; savoir si la proposition; „il existe une ordination" est vraie, c'est une question mathématique); le paradoxe de M. Borel sur les objets définissables par un nombre fini de mots (le paradoxe résulte de l'application illégitime d'un raisonnement mathématique dans une question métamathématique), etc... Il ne faut pas non plus oublier que l'étude du raisonnement métamathématique pourrait nous fournir une nouvelle théorie, dont celui-ci serait l'objet; et que cette échelle de métamathématiques de différents „types", peut être poursuivie indéfiniment; mais ces considérations débordent de beaupoup le cadre que nous nous sommes imposé.

On pourra, si l'on veut, dans la lecture de ce travail, dépouiller les signes employés de leur signification intuitive; et considérer que nous y étudions un certain système d'objets (qui seront les signes utilisés) que nous soumettons à certaines règles. L'étude d'un tel système devient alors aussi légitime que celle de n'importe quel autre, comme, par exemple, un groupe, un corps ou un anneau. Un tel point de vue sera peut-être de quelque utilité pour éviter des confusions entre les propriétés que l'on attribue instinctivement aux signes quand on se rappelle leur signification et celle que nous leur attribuons en réalité. Mais il ne sera pas sans intérêt de se souvenir, de temps à autre, de cette signification pour se rendre compte du chemin parcouru,

de la voie sur laquelle on est engagé et du but qu'il serait souhaitable d'atteindre.

Ce travail est divisé en trois parties, comprenant cinq chapitres. Dans la première partie (Chapitres 1 et 2) on indiquera le système de signes utilisé et les règles qui président à leur emploi. Nous avons adopté ici un système de règles qui diffère quelque peu de ceux jusqu'ici employés, mais qui s'apparente pourtant à une des méthodes de Russell et Whitehead (Voir Ch. 2). Les raisons qui nous ont fait l'adopter sont que, d'abord, c'est un de ceux où le nombre de propositions admises comme vraies est le plus petit; et qu'il nous permet mieux que tout autre d'étudier en détail les propriétés fondamentales des propositions, soit nécessaires, soit suffisantes pour leur vérité. Nous montrerons d'ailleurs en détail son équivalence avec les méthodes de Russell et Whitehead, comme il est nécessaire de la faire d'après les idées développées un peu plus haut.

Dans la deuxieme partie, qui comprend les chapitres 3 et 4, nous indiquons comment on fabriquera des systèmes de signes correspondant à une théorie mathématique; il faudra pour cela généraliser légérement le symbolisme des précédents chapitres. Le chapitre 4 est consacré à l'étude d'une théorie mathématique particulièrement simple, correspondant au début de l'Arithmétique classique, et pour laquelle une méthode nouvelle conduira à des résultats précis et intéressants.

Enfin la troisième partie est consacrée à une étude des conditions nécessaires et suffisantes pour la vérité d'une proposition. Elle commencera par l'étude de conditions suffisantes, puis continuera par la démonstration d'un théorème fondamental qui peut être considéré comme la base d'une méthode générale dans la théorie à laquelle ce travail est consacré. C'est ainsi qu'une de ses plus simples applications sera la non-contradiction des axiomes arithmétiques et des définitions par récurrence.

---

[1]) Les principaux résultats de ce mémoire ont été résumés dans trois notes aux „Comptes rendus de l'Académie des Sciences", tome 186, p. 1274, et tome 188, p. 303 et 1076.

BIBLIOGRAPHIE.

Nous indiquons ici, sans aucunement chercher à être complets, les ouvrages qui nous ont servi au cours de ce travail. On trouvera à l'ouvrage numéroté 2, une bibliographie complète.

1. Russell et Whitehead. Principia Mathematica, 3 volumes, Cambridge, 1910 sqq; 2ème édition du tome I, Cambridge, 1925 (Nous renvoyons à la premiere édition, et désignerons cet ouvrage par les initiales P. M.)

2. Hilbert et Ackermann. Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 1928 (Nous désignerons cet ouvrage par H. et A.).

3. Hilbert. a) Neubegründung der Mathematik (Abh. der Math. Sem. der Hamb. Univ., 1922),

b) Die logischen Grundlagen der Mathematik, (Math. Annalen, T. 88),

c) Über das Unendliche (Math. Annalen, T. 95; traduction Weil dans les Acta Mathematica, T. 48),

d) Die Grundlagen der Mathematik, (II), (Abh. der Math. Sem. der. Hamb. Univ., 1928).

4. Neumann. Zum Hilbertschen Beweistheorie, (Math. Zeitschrift, 1927, T. 26, p. 1).

5. Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Mathematische Annalen, T. 76, 1915.

TABLE DES MATIERES.

1ere PARTIE.

Chapitre 1. Théorie des identités de première espèce.

1. Les signes.
2. Les règles du raisonnement.
3. Conséquences.
4. La valeur logique.
5. Les deux formes normales d'une proposition.
6. Un critère algébrique.
7. Transformation des propositions primitives en règles.

Chapitre 2. Théorie des identités de deuxième espèce.

1. Les signes.
2. Les règles du raisonnement.
3. Conséquences.
4. Lien avec la théorie des identités de première espèce.
5. Suite.
6. Une autre méthode.
7. Les méthodes de Russell et Whitehead.
8. Les champs finis.
9. Applications.

2ème PARTIE.

Chapitre 3. Les théories mathématiques.

1. La notion générale de théorie mathématique.
2. Etude élémentaire des théories mathématiques.
3. Les descriptions incomplètes.

Chapitre 4. L'arithmétique.

1. L'arithmétique sans variables apparentes.
2. Un théorème de non-contradiction.
3. La forme canonique des propositions.
4. Un critère de vérité.
5. Introduction des variables apparentes.
6. Une condition nécessaire de vérité.
7. Un critère de vérité.
8. L'axiome d'induction totale.

3ème PARTIE.

Chapitre 5. Les propriétés des propositions vraies.

1. Etude approfondie des règles de passage.
2. La propriété *A*.
3. Les propriétés *B* et *C*.
4. Les champs infinis
5. Théorème fondamental.
6. Conséquences.

INDEX DE QUELQUES TERMES SOUVENT EMPLOYES.

Nous utilisons dans ce travail la numérotation décimale des paragraphes.

Dans l'index ci-dessous, les chiffres renvoient aux passages où l'on introduit la notion considérée; le premier chiffre est le numéro du chapitre; les suivants ceux du paragraphe. Les chiffres entre parenthèses dans le cours de l'ouvrage sont les numéros des paragraphes auxquels on renvoie; ils sont accompagnés du numéro du chapitre, toutes les fois que ce chapitre est différent de celui que l'on est en train de lire.

Nous indiquons ci-dessous où trouver les définitions de quelques termes souvent employés, et que l'on aurait peut-être quelque peine à retrouver dans l'ensemble de ce travail (ne figurerons pas en particulier presque tous les termes introduits au début des trois premiers chapitres).

Définition 1, 1.2
Elément 2, 8.3; 5, 3.1
Entscheidungsproblem 2, 2.1
Etendue 1, 1.4
„ minimum 5, 1.2

Equivalence 1, 3.2
Fonctions propositionnelles (de 1ere ou 2ème espèce) . . 2, 1.41
Forme normale. 2, 3.101
„ (conjonctive ou disjonctive) 1, 5.1
Identités propositionnelles 1, 2.1; 2, 2.1;
Individu 3, 1.13
Matrice 2, 3.1
Occurrence 1, 5.11; 2.301
Produit 1, 1.2; 1, 3.41
Proposition élément 1, 1.3; 2, 1; 3, 1.4
„ élémentaire 2, 1.1
Résolubilité 3, 2.1
Schème 5, 1.4
Somme. 1, 1.1; 1, 3,4
Substitution (règle de). 1, 3.1; 2, 5.1; 3, 1.4
Symbole (d'une variable apparente) 2, 1.2
Type (d'une variable) 3, 1.11
Valeur logique 1, 4.1; 2, 8.31
Variable (apparente ou réèlle) 2, 1.2
„ (dominante ou supérieure) 5, 1.3
„ (générale ou restreinte) 2, 3.101
„ (fictive) 2, 1.2

CHAPITRE I.

Théorie des identités de première espèce.

1. Les signes.

1.1. Dans ce chapitre [1]), chaque lettre sera dite une proposition et pourra, quand on le voudra, être remplacée par des groupes de lettres et de signes formant une proposition d'après les règles qui suivent:

Nous nous servirons des deux signes $\sim$ et v; $\sim p$ s'énonce: „non p" et est une nouvelle proposition qu'on appellera la *négation* de p. $p \, v \, q$ s'énonce „p ou q" et est une nouvelle proposition qui s'appellera la *disjonction* de p et de q. Nous disons aussi que c'est la *somme logique,* ou la *somme* de p et de q.

---

[1]) Voir pour les cinq premiers paragraphes de ce Chapitre *H* et *A*, Ch. I, où l'on développe cette théorie de manière analogue, et P. M. § 1—5.

1.2. A partir de ces signes, on en définit de nouveaux. Par exemple, pour utiliser une notation due à Russell et Whitehead:

$$p \supset q . = . \sim p . v q \qquad Df$$ [1])

définit le signe $\supset$ (c'est-à-dire chaque fois que l'on rencontrera, dans une expression, le premier membre, p et q étant des propositions déterminées, on devra le remplacer par le deuxième membre, pour avoir la signification de l'expression considérée); $p \supset q$ s'enonce: „p implique q" (c'est-à-dire si p est vrai, q est vrai).

$$p . q . = . \sim [\sim p v \sim q] \qquad Df$$

$p . q$ veut dire: „p et q sont vrais simultanément" et s'appelle le *produit logique* (ou simplement le *produit*) de p et de q.

$$p \equiv q . = . p \supset q . q \supset p \qquad Df$$

$p \equiv q$ veut dire: „p et q sont vrais simultanément ou faux simultanément", et s'énonce: p et q sont *identiques*.

1.3. Un assemblage de lettres, de signes et de points formé à partir des signes $\sim$ et v par les règles précédentes et par celles que l'on va voir en 1.4, est dit une *proposition*.

Les lettres qui y figurent seront appelées des *„propositions-éléments"* et l'expression sera dite une *„fonction propositionnelle"* des lettres qui y figurent.

1.4. Chaque signe figurant dans une proposition se rapportera à une ou deux parties de la proposition, dites ses *étendues*, qui seront délimitées par des points ou des groupes de points (c'est ainsi que l'étendue du signe $\sim$ dans $\sim p$, est p; et que dans $p v q$, $p . q$, $p \supset q$, $p \equiv q$, les étendues des signes v, $.$, $\supset$, $\equiv$, sont dans chaque cas p et q).

Les points seront considérés comme étant de trois espèces différentes, que l'on distingue par leur place dans la proposition: ceux de la première sorte seront ceux qui indiquent les produits logiques et joueront par conséquent un role différent des autres; ceux de la deuxième sorte seront ceux qui seront situés à droite du signe $\sim$; ceux de la troisième sorte seront à droite ou à gauche des autres signes. On dira que les points de la première sorte sont moins *forts* que ceux des deux autres sortes, et que ceux

[1]) Les lettres *Df* signifient: Définition.

de la deuxième sorte sont moins *forts* que ceux de la troisième. L'étendue du signe ∞, ou les étendues d'un des autres signes, seront limitées pas des groupes de points en nombre supérieur, ou bien de même nombre mais de force supérieure, à chaque groupe de points qui se trouve dans cette partie de la proposition. Toutefois, quand on a plusieurs signes ∞ se suivant, telle donc que l'étendue de chacun aille exactement aussi loin que celle de tous ceux qui sont situés à sa droite, on sous-entendra les points entre chacun de ces signes. Ajoutons encore qu'un groupe de points peut contenir 0 point. (Ces règles sont à peu près les mêmes que dans P. M. p. 9).

Par exemple, la proposition:

$$p \supset . q \vee r$$

signifie: p implique q ou r.

$$p \supset q . \vee r$$

signifie: ou bien p implique q; ou bien r.

$$\infty \infty . p . q . \supset r$$

signifie: la négation de la négation du produit $p . q$ implique r.

1.41. Nous ferons dans tout le cours de cet ouvrage la convention suivante qui est très importante: nous considérerons à chaque instant des propositions dans lesquelles les lettres représentent des propositions quelconques, qu'il faut remplacer dans chaque cas particulier par des propositions déterminées. Nous mettrons cependant les points comme si ces lettres représentaient des propositions éléments, étant bien entendu que quand on remplacera les lettres par des propositions déterminées, il faudra augmenter en conséquence la nombre des points, de manière que les étendues de tous les signes restent les mêmes.

Nous ferons la même convention, en général, quand on remplacera dans une proposition quelconque les propositions éléments par d'autres propositions.

C'est ainsi que la proposition $p \supset q$ durent quand on remplace p par $q \vee r$,

$$q \vee r . \supset q$$

Il faut faire la même convention quand on remplace un signe par sa définition, c'est ainsi que $p . p \equiv q$, n'est autre chose que

$$p : p \supset q . q \supset p .$$

1.42. **Remarques.** 1⁰. Un produit logique pourra donc, désormais, être désigné, non plus par un point, mais par un groupe de points; c'est ainsi qu'on écrira:

$$\infty\, p \vee p : p \supset q \,.\, \vee q$$

2⁰. Il est bien entendu que certains groupes de points, sauf pour les points de première sorte, peuvent ne pas contenir de points du tout, et que, pourtant, les mêmes règles que précédemment continuent à valoir. (Il y a des groupes de 0 point plus forts que d'autres).

3⁰. On peut mettre plus de points qu'il n'est nécessaire, quand on juge que cela est plus clair.

4⁰. Certains ensemles de signes peuvent n'avoir aucune signification, si les points ne sont pas mis manière convenable. C'est ainsi que:

$$p \vee q \supset p$$

ne veut rien dire; il faudrait écrire, par exemple:

$$p \vee . q \supset p$$

ou:

$$p \vee q . \supset p$$

2. Les règles de raisonnement.

2. Nous dirons que certaines propositions sont *vraies*, d'après les conventions suivantes [1]).

Nous considérerons d'abord comme vraies les cinq propositions suivantes (qui seront dites *primitives*, ce que l'on indique en les faisant suivre des lettres *Pp*), et toutes celles qu'on en déduit en remplaçant les lettres qui y figurent par d'autres lettres ou par des propositions non éléments (1.3):

1)	$p \vee p . \supset p$	*Pp*
2)	$q \supset . p \vee q$	*Pp*
3)	$p \vee q . \supset . q \vee p$	*Pp*
4)	$p \vee . q \vee r : \supset : q \vee . q \vee r$	*Pp*
5)	$q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$	*Pp*

[1]) Il sera bien entendu, que, quand nous dirons qu'une proposition p n'est pas vraie, cela ne voudra pas dire que $\infty\, p$ est vraie (C'est ainsi qu'une proposition élément ne sera jamais vraie).

Puis nous conviendrons que:

Règle d'Implication. *Si $p \supset q$ et p sont des propositions vraies, q en est une autre.*

Pour indiquer qu'une proposition est vraie, nous la ferons précéder, suivant Russell, du signe $\vdash$ (P. M. p. 8), suivi de points de deuxième sorte, l'étendue de ce signe étant toute la proposition vraie.

2.1. Une proposition vraie dans laquelle il n'y a que les signes jusqu'ici introduits (ou d'autres définis à partir de ceux-là) sera dite dans tout le cours de cet ouvrage, une *identité propositionnelle de première espèce* (ou, si on n'a pas d'ambiguité à craindre, une *identité*).

La série des propositions intermédiaires nécessaires à l'obtention d'une proposition vraie, est dite la *„démonstration"* de cette proposition.

2.11. Cette manière de présenter la théorie des indentités de première espèce est due à Russell et Whitehead (P. M. § 1).

Nous renverrons, dans les prochains paragraphes, aux P. M. pour vérifier qu'une proposition déterminée est vraie, sans en reproduire ici la démonstration.

2.2. Nicod [1]) a simplifié cette théorie. D'abord, il montre qu'on peut supprimer la proposition primitive 3, si l'on remplace la deuxième par:

$$\vdash . q \supset . q \vee p \qquad Pp$$

Mais on peut encore simplifier; partons, comme signe fondamental, du signe $|$. $p \mid q$ sera une proposition, et s'énoncera: „p et q sont incompatibles"; à partir de là, on définit les anciens signes:

$$\begin{array}{rll} ? & \infty p . = . p \mid p & Df \\ & p \vee q . = : \infty p \mid \infty q & Df \\ & p \supset q . = . p \mid \infty q & Df \\ & p . q . = . \infty . p \mid q & Df \end{array}$$

On a une proposition primitive:

$$\vdash :: . p \mid . q \mid r : \mid :: t \mid . t \mid t : \mid : . s \mid q . \mid : p \mid s . \mid . p s \qquad Pp$$

---

[1]) Proceedings Cambridge philosophical Society. Vol. 19, 1917.

[2]) $p \mid q$ se définit à partir des anciens signes par $\infty p \vee \infty q$.

et une règle: Si $p . | . q . r$ est vraie ainsi que p, il en est de même de r.

A partir de là, il démontre les cinq Propositions primitives de Russell et Whitehead et la règle d'implication [1]).

3. Conséquences.

Nous allons déduire quelques conséquences de cette théorie.

3.1. Soit $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une proposition vraie formée avec les propositions-éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Si l'on remplace* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *par d'autres propositions, cette proposition reste vraie.*

On obtiendrait en effet la démonstration de cette nouvelle proposition en remplaçant dans toute la démonstration de l'ancienne $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par leurs nouvelles valeurs.

Cette règle pour obtenir des propositions vraies est dite la *„règle de substitution"*.

3.2. Nous disons que deux propositions p et q sont *équivalentes* (ou *identiques*) si: $\vdash . p \equiv q$. Cette rélation est réciproque et transitive, car de: $\vdash . p \equiv q$ on déduit $\vdash . q \equiv p$ (P. M. 4.21 et 3.26) et de $\vdash . p \equiv q$ et $\vdash . q \equiv r$ on déduit $\vdash . p \equiv r$ (P. M. 4.22 et 3.26).

3.21. *Quand deux propositions sont équivalentes, la condition nécessaire et suffisante pour que l'une soit vraie, est que l'autre le soit.*

(car si $\vdash p$ et $\vdash . p \equiv q$, c'est-à-dire, d'après (1.2) $\vdash . p \supset q . q \supset p$ on déduit (d'après P. M. 3.26), $\vdash . p \supset q$ donc d'après la règle d'implication $\vdash q$ même; raisonnement en échangeant p et q).

3.22. Nous dirons que p *implique* q, si $\vdash . p \supset q$.

3.3. *Soit* $f(r)$ *une fonction propositionnelle* (1.3) *contenant* r *entre autres propositions-éléments; soient* p *et* q *deux propositions équivalentes, (pas forcément éléments). Alors* $f(p)$ *et* $f(q)$ *sont équivalentes.*

Nous allons trouver ici le premier exemple de raisonnement par récurrence sous la forme particulière dont nous avons parlé

---

[1]) Il convient de remarquer que l'on peut toujours réduire tout système de propositions primitives: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, à un système de deux propositions primitives, qui seraient avec les notations de 3.41: $\vdash . p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_n$ et $p . q . \supset p$.

dans l'introduction, où nous avons montré sa validité. Commençons par remarquer que si le théorème est vrai pour $f(r)$, il l'est pour $\sim . f(r)$. Ceci résulte du fait que si $\vdash . p \equiv q$ on a $\vdash . \sim p \equiv \sim q$ (d'après les théorèmes 4.11 et 3.26 de P. M. et la règle d'implication).

De même, si le théorème est vrai pour $f(r)$ et $\varphi(r)$, il l'est pour $f(r) \vee \varphi(r)$. En effet, si $\vdash . p \equiv q$ et $\vdash . p' \equiv q'$, on a aussi $\vdash . p \vee p' . \equiv . q \vee q'$ (P. M., 4.37).

Supposons alors que l'on ait devant soi une fonction propositionnelle $f(r)$; elle sera composée de propositions éléments combinées avec les signes $\sim$ et $\vee$; comme on a $\vdash . r \equiv r$ (P. M. 4.2) il suffira de répéter, autant de fois qu'il y a d'opérations à faire pour construire $f(r)$, l'une ou l'autre des deux démonstrations ci-dessus, pour en conclure le théorème énoncé.

3.31. En particulier, comme $\vdash . p \equiv . p \vee p$ (P. M. 4.25), on peut toujours remplacer dans une proposition vraie $p \vee p$ par p et réciproquement.

3.4. **Somme et produit généralisés.** On démontre que:

$$p \vee q . \equiv . q \vee p$$

$$p . \vee . q \vee r : \equiv : q . \vee . p \vee r \qquad \text{(P. M., 4.31, 4.33).}$$

Nous voyons donc qu'on peut toujours remplacer, dans une proposition, sans qu'elle cesse d'être vraie, $p \vee q$ par $q \vee p$ et $p . \vee . q \vee r$ par $q . \vee . p \vee r$. Ceci nous permettra désormais de généraliser l'emploi du signe de disjonction.

Posons:

$$p \vee q \vee r . = : p \vee . q \vee r \qquad Df$$

$$p \vee q \vee r \vee s . = : p \vee . p \vee r \vee s \qquad Df$$

et, d'une manière générale, définissons $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_2$ de proche en proche, comme suit:

$$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n . = : p_1 . \vee . p_2 \vee p_3 \ldots \vee p_n \qquad Df$$

Pour un nombre n bien déterminé, on aura ainsi la définition de $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$. Donc, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des propositions, $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ en sera une autre qui s'énoncera „p_1 ou p_2 ou ... ou p_n", et qu'on appellera *disjonction,* ou *somme logique* des premières (qui seront dites ses *termes*). On aura alors

le droit, dans une telle disjonction généralisée, de permuter à volonté l'ordre des termes; de plus, d'après ce qui précède, cette disjonction sera „associative"; c'est ainsi que:

$$\vdash :. p \vee q . \vee . r \vee s : \equiv . p \vee q \vee r \vee s .$$

3.41. Comme on a aussi:

$$\vdash : p . q . \equiv . q . p$$

$$\vdash :. p : q . r : \equiv : q : p . r \qquad \text{(P. M., 4.3, 4.32)}$$

on peut définir de la même manière un *produit généralisé* $p_1 . p_2 \ldots p_n$.

3.42. On peut donner une définition du produit généralisé, à partir de la somme généralisée.

On a, en effet:

$$\vdash : p_1 . p_2 \ldots p_n . \equiv . \infty . \infty p_1 \vee \infty p_2 \vee \ldots \vee \infty p_n \qquad (1)$$

Pour démontrer ceci pour une valeur de n déterminée, il suffit de le démontrer de proche en proche, en le supposant démontré pour n, et en le déduisant pour $n+1$.

Or $p_1 . p_2 \ldots . p_n$ est identique à $p_1 : p_2 \ldots . p_n$, donc à $\infty : \infty p_1 . \vee . \infty . p_2 \ldots . p_n$, par définition, ce qui donne le résultat en se rappelant que $\vdash . \infty \infty a . \equiv . a$ (P. M., 4.13).

On voit de plus que:

$$\vdash : \infty . p_1 . p_2 \ldots . p_n . \equiv . \infty p_1 \vee \infty p_2 \vee \ldots \vee \infty p_n \qquad (2)$$

(Ceci résulte de la formule de (1), et du résultat déjà rappelé

$$\vdash . p \equiv q . \supset . \infty p \equiv \infty q \qquad \text{(P. M., 4.11).}$$

En outre, si on substitue à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivement $\infty p_1, \infty p_2, \ldots, \infty p_n$ dans la formule (1), on obtient:

$$\vdash : \infty . p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n . \equiv . \infty p_1 . \infty p_2 \ldots . \infty p_n \qquad (3)$$

3.43. **Remarque 1.** De ce que

$$\vdash p . q . \supset p \qquad \text{(P. M., 3.26)}$$

et

$$\vdash p \supset : q \supset p . q \qquad \text{(P. M., 3.2)}$$

on en déduit aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que $p_1 . p_2 \ldots . p_n$ soit vrai, est que $p_1, p_2 \ldots . p_n$ le soient tous.

3.44. **Remarque 2.** Il nous arrivera, dans la suite, de parler de produits ou de sommes n'ayant qu'un seul terme p; nous

conviendrons que ce sera p lui-même; cette convention permet de se servir des formules (1), (2) et (3), même dans le cas $n = 1$

3.45. **Remarque 3.** Nous aurons besoin plus loin de la propriété suivante, que nous généraliserons dans 5.34:

La proposition $a_1 . a_2 \ldots . a_n . v . b_1 . b_2 \ldots b_p$ *est équivalente au produit de toutes les proposition* $a_i v b_\gamma$, *i et* γ *prenant toutes les valeurs possibles.*

On démontre d'abord ceci pour $p = 1$, par récurrence sur n; puis ensuite, par récurrence sur p, sans aucune difficulté si on se rappelle que $A . B . v C$ est équivalent à $A . C . v . B . C$ (P. M., 4.4).

4. La valeur logique.

4. Nous allons démontrer que la théorie développée jusqu'ici n'est pas contradictoire, c'est-à-dire qu'on ne peut trouver parmi les propositions vraies, à la fois une proposition et sa négation.

Supposons donc qu'on ait un raisonnement qui conduise à $\vdash p$ et à $\vdash . \sim p$.

4.1. Faisons correspondre à chaque lettre qui intervient dans ce raisonnement l'un ou l'autre de deux signes que l'on désignera, par exemple, par V et F. A toute proposition formée avec ces lettres et les signes v et $\sim$, on fera alors correspondre V ou F, de la manière que nous allons indiquer. Quand, à une proposition, correspond le signe V, nous dirons qu'elle a la *valeur logique „vrai"*; s'il lui correspond le signe F, la valeur logique *„faux"*.

Si à p correspond V, convenons qu'à $\sim p$ correspond F, et si à p correspond F, qu'à $\sim p$ correspond V.

Convenons qu'à $p v q$ correspondra F, si, et seulement si, à p et à q, correspond F.

En procédant comme dans un raisonnement déjà vu (3.3) on voit que ces deux règles suffisent à déterminer la valeur logique de toute proposition, et cela d'une manière univoque.

4.2. Démontrons que toute proposition vraie a la valeur logique „vrai" (la réciproque n'est évidemment pas exacte).

Or, toute proposition obtenue en remplaçant dans les propositions primitives (2) p, q, r par d'autres propositions, a la valeur logique „vrai"; on le vérifie directement en supposant

réalisé successivement chacun des huit cas possibles qu'on peut obtenir pour les valeurs logiques de p, q, r. Dans tous les cas, on voit que la valeur logique des propositions est le vrai.

D'autre part, si $p \supset q$ et p ont la valeur logique „vrai", q l'a aussi; car, sans cela, p ayant la valeur logique „vrai", et q, la valeur logique „faux", $p \supset q$ aurait, d'après sa définition, la valeur logique „faux".

Quand on a devant les yeux un raisonnement, celui-ci procédant à partir d'un certain nombre de propositions primitives, et employant un certain nombre de fois la règle d'implication, il suffit de répéter dans ce cas particulier notre raisonnement assez de fois, pour conclure que la conclusion du raisonnement a la valeur logique „vrai". (Ceci est le premier exemple de cette „récurrence sur la démonstration d'une proposition", dont on a parlé dans l'introduction).

4.3. En résumé, on a le

Théorème: *Pour qu'une proposition soit vraie, il est nécessaire que pour toute valeur logique de ses propositions éléments, elle ait la valeur logique „vrai".*

En particulier, p et $\sim p$ ne peuvent être vraies simultanément: ce qui justifie l'assertion de plus haut.

4.31. Un cas particulier du théorème est le suivant:

Si p et q sont équivalents, p et q ont même valeur logique, pour une valeur logique donné des propositions éléments. (Car ce n'est qu'à cette condition que $p \equiv q$, vu sa définition (1.2), a la valeur logique „vrai").

Nous allons montrer maintenant que cette condition est suffisante; nous nous permettrons d'abréger légèrement les raisonnements, qui se font tous sur le même modèle que les précédents, en ne montrant plus, dans chaque cas particulier, la validité du raisonnement par récurrence; on se convaincra facilement dans chaque cas de la légitimité de son emploi, en se rappelant ce qui a été dit dans l'introduction.

5. Les deux formes normales d'une proposition.

5. Nous dirons qu'une proposition est *simple*, si c'est une proposition élément, ou la négation d'une proposition élément.

5.1. *Etant donnée une proposition, nous allons donner un procédé permettant de trouver deux propositions qui lui soient équivalentes, et dont l'une soit une somme de produits de propositions simples (forme normale disjonctive), et l'autre un produit de sommes de propositions simples (forme normale conjonctive).*

Quand on appliquera ce procédé, on dira que l'on met la proposition sous forme normale (conjonctive ou disjonctive).

1. Une proposition élément est évidemment de l'une et de l'autre forme.

2. Si p peut être mis sous l'une de ces formes, ∞p peut être mis sous l'autre. Ceci résulte des trois faits suivants qui montrent que la négation d'une forme normale de p donne immédiatement une forme normale de ∞p.

a) La négation d'une disjonction est équivalente au produit des négations des termes de la première (3.42).

b) La négation d'un produit est équivalente à la disjonction des négations des termes du premier (3.42).

c) $\infty\infty . p$ est équivalent à p (P. M., 4.13).

3. Si p et q peuvent être mis sous la première forme, $p \vee q$ peut évidemment l'être aussi.

Si p et q peuvent être mis sous la deuxième forme, la remarque 3.45 permet immédiatement de mettre $p \vee q$ sous la deuxième forme.

En procédant de proche en proche, on peut donc mettre toute proposition sous l'une ou l'autre de ces deux formes.

C'est ainsi que:

$$p \vee \infty q . \infty p \vee q$$

est mis sous forme normale conjonctive,

$$p . \infty q . \vee . \infty p . q$$

sous forme normale disjonctive.

Remarquons enfin qu'une proposition peut être équivalente à plusieurs propositions normales.

C'est ainsi que: $p . q . r . \vee . p . q . \infty r$ et $p . q$ sont équivalentes.

5.11. **Remarque.** Nous aurons besoin dans la suite de la remarque suivante.

Nous appelons *occurrences* d'une proposition élément p dans une fonction propositionnelle $f(p)$, les places qu'occupe p

dans cette fonction propositionnelle. C'est ainsi que nous dirons que p a deux occurences dans la proposition $\infty p . v . p v q$.

Nous attribuons à chaque occurrence un des signes $+$ ou $-$, ce signe étant défini par récurrence de la manière suivante:

a) Dans la proposition p, le signe de l'occurrence de p est $+$.

b) Le signe change quand on passe de p à ∞p.

c) Le signe est le même dans p et dans $p v q$.

(En somme, le signe d'une occurrence dépend de la parité du nombre des signes ∞ dans l'étendue desquels elle se trouve). Nous dirons aussi qu'une occurrence est positive ou négative, selon qu'on lui aura attribué le signe $+$ ou le signe $-$. Ainsi, dans l'exemple précédent, une des occurrences de p est négative, l'autre est positive, celle de q est positive.

Supposons alors que dans une proposition P, toutes les occurrences de p aient même signe. On voit immédiatement que dans toutes les opérations indiquées en 5.1 qui permettent de fabriquer les formes normales, les signes des occurrences ne peuvent changer. Donc dans une au moins des formes normales de chaque sorte de P, p interviendra partout précédé ou non du signe ∞, selon que ses occurrences étaient négatives ou positives.

5.2. Considérons alors une proposition mise sous forme normale conjonctive; pour qu'elle soit vraie, il est nécessaire et suffisant que cette forme normale soit vraie (3.21), et donc que chacun des termes du produit soit vrai (3.43). Considérons un de ces termes: ou bien il y a une proposition élément qui y figure deux fois (au moins), une fois non précédée du signe ∞, l'autre fois, précédée du signe ∞; alors ce terme est une proposition vraie, car:

$$\vdash . p v \infty p \qquad \text{(P. M., 2.11)}$$

et si a est vrai, $a v b$ l'est (d'après la deuxième proposition primitive (2)).

Si donc cette circonstance est vérifiée pour tout terme du produit, la proposition considérée est une identité. Montrons que cette condition est nécessaire et suffisante pour la vérité de la proposition (elle fournira donc un critère pour reconnaitre si une proposition est vraie ou non).

Supposons donc cette condition non vérifiée pour un des termes du produit: une proposition élément, ou bien y figure partout non précédée du signe $\sim$, auquel cas, nous lui donnerons la valeur logique „faux"; ou bien y figure partout précédée du signe $\sim$, auquel cas nous lui donnerons la valeur logique „vrai"; ou bien n'y figure pas, auquel cas nous lui donnerons la valeur logique que nous voudrons. Alors, le terme considéré a la valeur logique „faux", et d'après 4.3, la proposition considérée ne peut être vraie.

5.21. Ce raisonnement nous montre en même temps que:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vraie, est qu'elle ait la valeur logique vraie, quelles que soient les valeurs logiques attribuées aux propositions éléments qui y figurent. Si la condition est vérifiée, nous avons indiqué dans ce qui précède un procédé pour démontrer la proposition.*

On remarquera de plus qu'à la simple inspection de la forme normale conjonctive, on voit si la proposition est une identité ou non.

5.22. En particulier, si une proposition est une disjonction de propositions simples (5), elle est sous forme canonique conjonctive on voit que, pour qu'elle soit vraie, il faut et il suffit qu'elle soit de forme

$$p \vee \sim p \vee A$$

A étant une autre proposition.

Conséquences.

5.31. a) Ce théorème permettrait de réduire à un type unique toutes les démonstrations de Russell et Whitehead dans la section A de la première partie des Principia Mathematica. *Aussi, dans la suite, ne renverrons-nous plus à cet ouvrage pour vérifier qu'une proposition est une identité de première espèce.*

5.32. b) Ce théorème donnerait aisément une nouvelle démonstration de l'axiome de substitution (3.1) et du Théorème énoncé en (3.3).

5.33. c) *La condition nécessaire et suffisante pour que deux propositions soient identiques, est qu'elles aient même va-*

leur logique, quelles que soient les valeurs logiques attribuées aux propositions éléments qui y figurent.

Car $p \equiv q$, qui n'est autre que $p \supset q . q \supset p$ (1.2) n'a la valeur logique vrai, comme on le voit aisément, que si p et q ont la même valeur logique.

5.34. d) *Distributivité des produits et sommes logiques.*

Une proposition qui est un produit de sommes logiques est équivalente à la somme de tous les produits obtenus en prenant un terme et un seul dans chaque terme du produit primitif.

(C'est une généralisation de 3.45). C'est ainsi que:

$$\vdash : p \vee q . r \vee s . \equiv . p . r . \vee . p . s . \vee . q . r . \vee . q s \ .$$

On voit en effet que, pour que la première proposition ait la valeur logique „vrai", il faut et il suffit qu'il y ait pour tout système possible de valeurs logiques, dans chaque terme du produit un terme de valeur logique vrai; et que c'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que la deuxième proposition ait la valeur logique vrai.

On vérifie de même, en cherchant quand les propositions ont la valeur logique „faux", que:

Une proposition qui est une somme de produits est équivalente au produit de toutes les sommes obtenues en prenant un terme et un seul dans chaque terme de la somme primitive.

C'est ainsi que:

$$\vdash : . p . q . \vee . r . s : \equiv : p \vee r . p \vee s . q \vee r . q \vee s \ .$$

Ces deux propositions permettent de passer directement d'une forme normale à l'autre.

5.35. e) *Loi de dualité.*

Si, dans une proposition vraie ne contenant que les signes v et ∞, on change $p \vee q$ en $p . q$, en tous les endroits où se présente le signe v, on obtient une autre proposition dont la négation est vraie.

Pour appliquer cette loi dans tous les cas, il faudra remplacer tous les signes par leurs définitions.

Cette transformation change donc:

$$\begin{array}{lcl} p \supset q & \text{en} & \infty . q \supset p \\ p . q & \text{en} & p \vee q \\ p \equiv q & \text{en} & \infty . q \equiv p \end{array}$$

Donnons, dans la proposition P et dans sa transformée $\overline{P}$, des valeurs logiques aux propositions éléments, de manière que la même proposition élément ait des valeurs logiques différentes dans P et dans $\overline{P}$; *Alors P et $\overline{P}$ auront des valeurs logiques différentes.* On démontre ceci par „récurrence sur la construction de P:"

a) Si c'est vrai pour P et $\overline{P}$, c'est vrai pour ∞P et $\infty \overline{P}$

b) Si c'est vrai pour P et $\overline{P}$, et pour Q et $\overline{Q}$, c'est vrai pour $P \vee Q$ et $\overline{P}.\overline{Q}$ (car $\overline{P}.\overline{Q}$ a même valeur logique que $\infty.\infty\overline{P} \vee \infty\overline{Q}$, donc que $\infty.P \vee Q$.

En particulier, si P et Q ont pour conjugués $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, de de $\vdash .P \equiv Q$ on déduit $\vdash .\overline{P} \equiv \overline{Q}$.

C'est ainsi que de la vérité de l'un des théorèmes énoncés en 5.34, on déduit la vérité de l'autre.

5.36. f) On peut toujours fabriquer comme on le voit aisément, une fonction propositionnelle, de l'une ou de l'autre des formes normales, des propositions éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$, telle que sa valeur logique soit une valeur logique donnée d'avance pour tout système de valeurs logiques des p_i.

C'est ainsi qu'étant donnée une fonction propositionnelle $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de propositions éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on peut construire une autre fonction propositionnelle $B(p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m})$ ne contenant plus certaines propositions éléments $p_{\beta_1}, p_{\beta_2}, \ldots p_{\beta_r}$ $p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \ldots, p_{\gamma_s}$, et telle que sa valeur logique soit la même que celle de la première quand ces dernières propositions éléments ont des valeurs logiques données d'avance: si cette valeur logique est le vrai pour les p_{β_i} et le faux pour p_{γ_i}, il suffit, pour obtenir B, de remplacer dans A chaque p_{β_i} par $r \vee \infty r$ et chaque p_{γ_i} par $r.\infty r$, r étant une des autres lettres; on pourrait aussi prendre pour r une nouvelle proposition élément: cela a l'avantage (que nous utiliserons plus tard) de ne pas changer le signe des occurrences d'un des p_i.

6. Un critère algébrique.

Au lieu des signes V et E, considérons dans ce paragraphe les deux signes 0 et 1; une lettre désignera l'un ou l'autre de ces deux signes; nous posons par définition:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & 0.0=0 \\ 0+1=1 & 0.1=0 \\ 1+0=1 & 1.0=0 \\ 1+1=0 & 1.1=1 \end{array}$$

a et b étant deux lettres, cela nous permet d'écrire les combinaisons: $a+b$ et $a.b$. Remarquons que ces règles de calcul sont les règles de calcul dans le corps des restes mod. 2 en arithmétique ordinaire, et que donc toutes les règles du calcul algébrique ordinaire, sont valables (nous emploierons aussi les mêmes termes qu'en algèbre).

Pour exprimer qu'un polynome $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est nul quelle que soit la valeur des lettres qui y figurent, nous employons la notation habituelle: $A(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ (mod. 2).

Remplaçons toute proposition par un polynome, en considérant que les lettres qui y figurent désignent 0 ou 1; que ∞p est mis à la place de $1+p$ et $p \vee q$ à la place de $p.q$. Alors, *pour qu'une proposition soit vraie, il faut et il suffit que le polynome correspondant soit toujours nul, quelles que soient les valeurs des lettres qui y figurent.*

En effet, il suffit de vérifier que, si l'on attribue des valeurs logiques aux propositions éléments d'une proposition, et que l'on remplace les lettres correspondantes par 0 et 1 selon que cette valeur logique est le vrai ou le faux, la valeur logique de la proposition est le vrai ou le faux selon que le polynome correspondant vaut 0 ou 1 pour ces valeurs. Or, cela se démontre immédiatement par récurrence sur la construction de la proposition, quand on se rappelle la définition de la valeur logique (4.1).

Comment reconnaître qu'un polynome est toujours nul mod. 2? Commençons, en utilisant la congruence $p^n = p$ (mod. 2), à le réduire à une somme de monomes ne contenant aucune puissance supérieure à la première. *Il faudra alors que les coefficients soient tous pairs* (et cela suffira évidemment).

Supposons, en effet, que ceci soit démontré pour un polynome à $n-1$ variables, et démontrons-le pour n variables; le polynome s'écrit:

$$a_1 \varphi_1(a_2, a_3 \ldots, a_n) + \varphi_2(a_2, a_3, \ldots a_n)$$

Pour un système de valeurs de $a_2, a_3 \ldots a_n$, donnons à a_1 les valeurs 0, puis 1; on voit qu'il faut que:

$$\varphi_1(a_2, a_3, \ldots, a_n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

et

$$\varphi_2(a_2, a_3, \ldots, a_n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

Ce qui démontre notre théorème (puisqu'il est évident pour un polynome de dégré 0).

Nous voyons donc que, pour vérifier si une proposition est vraie, on la remplace par un polynome et qu'on cherche à réduire ce polynome en utilisant les règles:

$$p^n \equiv p \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$1 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Cette méthode, qui donne une interprétation arithmétique de nos signes logiques, conduit à des calculs assez commodes. (On peut, par exemple, toujours changer un signe ou remplacer un nombre pair par 0).

Démontrons par exemple:

$$\vdash :. p \supset q . \supset : p \vee r . \supset . q \vee r \ .$$

On le remplace par: $[(1+p).q+1].(p.r+1).q.r$. Mais: $q[(1+p).q+1] \equiv (1+p).q^2+q \equiv q.(1+p+1) \equiv p.q$ (mod. 2) (puisque $q^2 \equiv q$ (mod. 2)). Il reste: $p\,q\,r(pr+1)$. Or: $pr(pr+1) \equiv p^2 r^2 + pr \equiv pr + pr \equiv 0$ (mod. 2).

7. Transformation des propositions primitives en règles.

7.1. Remarquons déjà sur le cas très simple que nous venons de traiter, que le choix des propositions primitives et des règles est très arbitraire; donnons un exemple où toutes les propositions primitives, sauf une, sont remplacées par des règles.

Dans ce qui suit, il est bien entendu que les lettres peuvent être remplacées par des fonctions propositionnelles quelconques.

On prend comme seule proposition primitive:

$$\vdash . p \vee \infty \vee \qquad Pp$$

et les quatre règles suivantes:

Règle 1. $\vee$ est associatif et commutatif.

Règle 2. Dans une identité propositionnelle, on peut remplacer $p \vee p$ par p, et inversement.

Règle 3. Si $\vdash . p$ alors: $\vdash . p \vee q$.

Règle 4. Si $\vdash . p \vee q$ et si $\vdash . r \vee \infty q$ alors $\vdash . p \vee r$.

Ces règles ne peuvent conduire à des propositions fausses, comme le montre la théorie de la valeur logique, et (3.3).

Mais, réciproquement, on peut déduire les propositions primitives et la règle d'implication de ces règles.

1. $\vdash : p \vee p . \supset p$ résulte, par la règle 2, de: $\vdash . p \supset p$ qui n'est autre chose que: $\vdash . \infty p \vee p$.

2. $\vdash : q \supset . p \vee q$ n'est autre chose que: $\vdash . \infty q . \vee . p \vee q$ qui résulte de notre proposition primitive et de la règle 3.

3. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ et $\vdash : . p . \vee . q \vee r : \supset : q . \vee . p \vee r$ résultent de la première règle et de la proposition primitive.

4. $\vdash : . q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ se démontre comme suit. On a: $\vdash : \infty . q \supset r . \vee . \infty q \vee r$ d'après la proposition primitive; $\vdash : \infty . p \vee q . \vee . p \vee q \vee r$ d'après la proposition primitive et la règle 3. Donc, d'après la règle 4: $\vdash : \infty . q \supset r . \vee . r . \vee . \infty . p \vee q . \vee . p \vee r$ d'où l'on déduit la proposition cherchée par la règle 2.

5. Si $\vdash . p \supset q$ et $\vdash p$, on a $\vdash q$.

En effet, on a alors: $\vdash . \infty p \vee q$ et $\vdash . p \vee q$ d'où $\vdash . q \vee q$, d'après la règle 4, et $\vdash . q$, d'après la règle 2.

On retrouve bien les méthodes de Russell et Whitehead à partir de cette nouvelle méthode.

7.2. On pourrait fonder toute la théorie exposée dans ce chapitre, en prenant comme définition de l'identité propositionnelle, la propriété exprimée par le théoreme 5.21. Cette méthode serait très rapide, mais a l'inconvénient, de ne pas permettre de démontrer que la théorie de Russell er Whitehead lui est équivalente.

CHAPITRE II.

Théorie des identités de deuxième espèce.

1. Les signes.

1. Nous nous servirons, dans ce chapitre, de deux sortes de lettres: Les premières (qui seront toujours des petites lettres de l'alphabet romain affectées ou non d'indices) seront dites des *variables;* nous considérerons désormais une même lettre affectée de deux indices différents, comme x_1 et x_2, comme étant en réalité deux lettres différentes. Les deuxièmes (qui seront, soit des

lettres grecques, soit des majuscules romaines, ou même des minuscules romaines quand il n'y aura pas d'ambiguité possible), seront toujours accompagnées d'un certain nombre de variables [1]); ces lettres seront dites des *fonctions propositionnelles éléments* des variables et les variables seront dites les *arguments* de la fonction; elles seront considérées comme des propositions: ce seront les *propositions-éléments* de la théorie que nous allons considérer.

Par exemple, un ensemble de signes tel que Φx sera une fonction propositionnelle élément de la variable x; un ensemble de signes tel que $\Psi x y$ sera une fonction propositionnelle élément des variables x et y.

Nous considérerons aussi des propositions sans variables que l'on peut considérer comme des fonctions propositionnelles à 0 argument. Qu'il soit désormais bien entendu que, quand nous écrirons une fonction propositionnelle Φx, elle pourra posséder d'autres variables réelles, qui seront sous-entendues (sauf indication formelle du contraire).

1.1. En combinant nos propositions-éléments avec les signes logiques $\sim$ et v selon les règles exposées au chapitre précédent, nous formerons, avec les propositions-éléments, d'autres propositions que nous appellerons *élémentaires;* par exemple:

$$\Phi x y \, v \, \Phi x z \sim \Phi x y \, v \, \Psi z$$

seront des propositions élémentaires.

1.2. Nous nous servirons de deux nouveaux signes logiques qui seront de la forme suivante: (x) et $(\exists x)$, x étant une variable. Nous allons indiquer leur emploi et leur signification dans un instant. Disons tout de suite que ces signes seront appelés *symboles* de variables apparentes, les variables d'une proposition contenues dans de tels signes étant dites *apparentes* et que les autres étant dites *réelles.* C'est ainsi que toutes les variables d'une proposition élémentaire sont réelles.

Dans ce qui suit le signe $\times$ désigne un groupe de points dont le nombre sera déterminé en 1.5.

1^0. Φx étant un ensemble de signes et de lettres constituant une proposition, où x est une des variables réelles

$$(x) \times \Phi x$$

[1]) Ce nombre sera toujours le même pour une lettre déterminée; il pourra d'ailleurs même être nul pour certaines lettres.

sera considéré comme étant une nouvelle proposition qui s'énoncera: *„quel que soit x, Φx"*.

2⁰. Φx étant un ensemble de signes et lettres constituant une proposition, où x est une des variables réelles

$$(\exists x) \times \Phi x$$

sera considéré comme étant une nouvelle proposition qui s'énoncera: *„il existe un x tel que Φx"*.

1.21. Pour plus de généralité, nous admettrons dans les deux règles précédentes, que Φx peut ne pas contenir x effectivement; x sera dit alors une *variable fictive*. (Il résulte de ce qui suivra que $(x).p$ ou $(\exists x).p$ est équivalent à p, si p est une proposition ne contenant pas effectivement x).

Au point de vue de la signification des signes introduits, quand on les considère comme traduisant des relations mathématiques, nous indiquons que Φx signifie que l'objet particulier (quoique peut-être indéterminé) x, a la propriété Φ, tandis que $(x) \times \Phi x$ signifie que tout objet x a la propriété Φ; et que $(\exists x) \times \Phi x$ signifie qu'il y en a (au moins un), ayant cette propriété.

1.3. Nous voyons donc que, désormais, une proposition sera fabriquée à partir des propositions-éléments en les combinant avec les signes ∞ et v selon les règles du chapitre précédent, et avec les signes de forme (x) et $(\exists x)$ selon les règles que nous venons d'indiquer. Donc, désormais, pour effectuer des démonstrations par récurrence sur la construction d'une proposition, il faudra tenir compte de ces quatre méthodes de formation; nous verrons cependant un peu plus loin deux modifications que peut subir cette méthode.

1.4. Une proposition sera dite une *fonction propositionnelle* de ses variables réelles. Désormais un ensemble de signes comme Φx représentera une fonction propositionnelle de x, pas forcément élément.

1.41. Une proposition contenant une proposition élément déterminée sera dite une *fonction propositionnelle* de cette proposition élément; si on remplace cette proposition élément par une autre proposition, on aura une fonction propositionnelle de cette autre proposition. Une fonction propositionnelle est de *première espèce*, si elle ne contient pas de symboles de varia-

bles apparentes; (si donc, elle est formée uniquement de lettres et des signes $\sim$ et v); sans cela, elle est dite de *deuxième espèce.*

Par exemple: $(x) . \Phi x y$ est une fonction propositionnelle de deuxième espèce de $\Phi x y$; $\Phi x y v \sim \Phi x y$ est une fonction propositionnelle de première espèce de $\Phi x y$.

On remarquera les deux sens des mots „fonction propositionnelle", selon qu'il s'agit de fonctions d'une variable ou d'une proposition. On définit de même les fonctions propositionnelles de plusieurs propositions. Nous désignerons une fonction propositionnelle des propositions $p_1, p_2, \ldots, p_n$, par une notation telle que $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

1.5. Comme au chapitre précédent, la partie d'une proposition à laquelle se rapporte un symbole de variable apparente[1]) sera dite *l'étendue* de ce signe; pour marquer cette étendue, nous utilisons les mêmes règles qu'au chapitre précédent, en considérant les points qui suivent ces signes comme étant *de deuxième force.* Toutefois, également comme à cet endroit, quand on a plusieurs symboles de variables apparentes ou signes $\sim$ se suivant, tels que l'étendue de chacun comprenne exactement l'étendue de tous ceux qui sont situés à sa droite, on sous-entendra les points entre chacun de ces signes. Par exemple:

$$(x)(\exists y) . \Phi x y v \sim \Psi x z$$

veut dire: quel que soit x, il existe un y tel que $\Phi x y$ ou que $\sim \Psi x z$.

(Dans cette proposition, x et y sont des variables apparentes; z est variable réelle selon la definition donnée en 1.2)

De même:

$$\sim (\exists x) . \Phi x$$

veut dire: il est faux qu'il existe un x tel que Φx.

Nous adopterons aussi les conventions suivantes:

a) nous écrirons parfois

$$(+x) \quad \text{au lieu de} \quad (x)$$
$$(-x) \quad \text{au lieu de} \quad (\exists x)$$

b) nous écrirons

$$(x y) . \Phi x y \quad \text{au lieu de} \quad (x)(y) . \Phi x y$$
$$(x y z) . \Phi x y z \quad \text{au lieu de} \quad (x y)(z) . \Phi x y z$$

etc...

---

[1]) C'est à dire Φx dans $(\exists x) \times \Phi x$ et $(x) \times \Phi x$.

$$(\exists x y) . \Phi x y \quad \text{au lieu de} \quad (\exists x)(\exists y) . \Phi x y$$

$$(\exists x y z) . \Phi x y z \quad \text{au lieu de} \quad (\exists x y)(\exists z) . \Phi x y z$$

etc...

c) Quand nous nous servirons de la notation $(+x)$ et $(-x)$, et que nous aurons plusieurs symboles qui se suivent dans les conditions où nous avons dit que l'on pouvait sous-entendre les points, nous sous-entendrons aussi les parenthèses intermédiaires; nous écrirons:

$$(+x-y) . \Phi x y \quad \text{au lieu de} \quad (+x)(-y) . \Phi x y$$

d) Il est bien entendu que la lettre qui désigne une variable peut être changée en une autre sans inconvénient (on peut, en particulier, employer n'importe quelle lettre pour une variable apparente), à condition toutefois que deux variables ne puissent être désignées par la même lettre, que dans le cas où elles sont toutes deux apparentes, et où leurs étendues n'ont aucun signe en commun. Ainsi nous écrirons:

$$(x) \Phi x \, v \, (\exists x) \infty \Phi x$$

(quel que soit x, Φx, ou il existe un x tel que $\infty \Phi x$), au lieu de:

$$(x) \Phi x \, v \, (\exists y) \infty \Phi y$$

e) Nous écrirons dans une proposition $(\pm x)$ quand on peut avoir $(+x)$ ou $(-x)$ selon les cas particuliers que l'on peut envisager.

2. Les règles du raisonnement.

2. On peut énoncer les règles du raisonnement de plusieurs manières différentes. Nous allons exposer dans ce paragraphe une de ces méthodes, et nous indiquerons un peu, plus loin d'autres méthodes en montrant leur équivalence avec la suivante.

On considérera certaines propositions comme vraies d'après les règles suivantes:

1°. *Les propositions élémentaires* (1.1) *qui, considérées comme des fonctions propositionnelles de première espèce* (1.41) *de leurs propositions éléments, sont des identités de première espèce, seront vraies.*

2⁰. **Règles de passage.** *Si l'on remplace à l'intérieur d'une proposition vraie* $\sim(x)\Phi x$ *par* $(\exists x)\sim\Phi x$, *ou* $\sim(\exists x)\Phi x$ *par* $(x)\sim\Phi x$, *ou inversement; ou* $(x)\Phi x . v p$ *par* $(x).\Phi x v p$, *ou* $(\exists x)\Phi x . v p$ *par* $(\exists x).\Phi x v p$, *ou inversement* (p *designant une proposition ne contenant* x, *et* Φx *une proposition pouvant contenir* x, *on obtient une autre proposition vraie*).

Voici, par exemple, un emploi fréquent de ces règles de passage: Si $(x).\Phi x \supset p$ c'est-à-dire $(x).\sim\Phi x v p$ est vraie, on en déduit que $(x).\sim\Phi x . v p$ puis $\sim:(\exists x).\Phi x : v p$ et enfin $(\exists x).\Phi x . \supset p$ sont vraies. De même si $(\exists x).\Phi x \supset p$ est vraie, on en déduit que $(x).\Phi x . \supset p$ est vraie.

3⁰. **Première règle de généralisation.** *Si une proposition* Φx *contenant, entre autres, la variable réelle* x, *est vraie, alors la proposition* $(x).\Phi x$ *est vraie.*

4⁰. **Deuxième règle de généralisation.** *Si la proposition* $\Phi x y$ *contenant, entre autres, les variables réelles* x *et* y, *est telle que* $\Phi x x$ *soit vraie, alors la proposition* $(\exists y).\Phi x y$ *est vraie.*

Voici le sens de ces deux règles de généralisation:

a) La première signifie qu'on peut rendre apparente une variable réelle x en mettant (x) devant la proposition.

b) La deuxième signifie qu'on peut, en certains des endroits où figure une variable réelle x dans la proposition, la changer en y, en mettant $(\exists y)$ devant la proposition.

5⁰. **Règle de simplification:** P désignant une proposition, si $P v P$ est vraie, P est vraie.

6⁰. **Règle d'implication:** P et Q désignant des propositions, si $P \supset Q$ et P sont vraies, Q est vraie.

Nous voyons que, dans cette méthode, les propositions primitives du chapitre précédent ne s'appliquent à priori qu'aux propositions élémentaires. Mais nous démontrerons un peu plus loin qu'il résulte des autres règles de raisonnement qu'elles s'appliquent à toute proposition sans exception.

2.1. Le problème fondamental de la logique mathématique consiste à trouver un procédé permettant toujours de reconnaître si une proposition est vraie ou non dans cette théorie. C'est ce que les Allemands appellent „*l'Entscheidungsproblem*". Ce problème a été résolu dans le cas particulier du premier Chapitre; nous verrons plus loin d'autres cas particuliers où il est résolu.

Nous indiquerons comme au Ch. 1, (2), qu'une proposition est vraie en la faisant précéder du signe $\vdash$; nous dirons que c'est une *identité propositionnelle* (que nous dirons de *deuxième espèce* si nous voulons faire remarquer qu'elle contient des variables apparentes), et plus brièvement, une *identité*.

L'équivalence des propositions s'y définit comme en cet endroit (Ch. 1, 3.2).

L'ensemble des opérations nécessaires pour montrer qu'une proposition est vraie, et des propositions vraies intermédiaires que cela conduit à introduire, sera appelé la *„démonstration"* de la proposition.

2.2. **Remarque 1.** Quand nous voudrons désormais démontrer les propriétés des propositions vraies, il nous faudra tenir compte de toutes les nouvelles règles de raisonnement: il faudra montrer que la propriété envisagée est vraie pour les identités propositionnelles portant sur des propositions élémentaires; et que si elle est vraie pour des propositions, elle l'est encore pour celles qu'on en déduit par application d'une quelconque des règles de raisonnement. Comme au chapitre précédent, nous serons alors sûrs que, dès que nous aurons devant les yeux une démonstration particulière, nous pourrons constater effectivement que sa conclusion possède la propriété énoncée.

2.3. **Remarque 2.** Nous conviendrons qu'on peut appliquer les règles de généralisation, même dans le cas où la proposition Φx ou $\Phi x y$ considérée ne contient pas effectivement une des variables.

C'est ainsi que, si p ne contient pas x, de $\vdash . p$, on déduit: $\vdash : (x) . p$ et $\vdash : (\exists x) . p$. Réciproquement, de $\vdash . p \supset p$, on déduit (en utilisant conjointement les règles de passage) $\vdash : (x) . p . \supset p$ et $\vdash : (\exists x) . p . \supset p$.

Remarque 3. Les règles précédentes entraînent la suivante qui constitue une *troisième règle de généralisation:* $\Phi x y z$ étant une proposition contenant, entre autres, les variables réelles x, y et z, si $\Phi y y z \vee \Phi z y z$ est une proposition vraie, il en est de même de $(\exists x) . \Phi x y z$.

En effet, de:

$$\vdash . \Phi y y z \vee \Phi z y z$$

on déduit aisément, en appliquant la deuxième règle de généralisation, et la règle de passage:

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x y z . v . (\exists x) . \Phi x y z$$

d'où $\vdash : (\exists x) . \Phi x y z$ par la règle de simplification.

On pourrait d'ailleurs démontrer que cette nouvelle règle peut remplacer la règle de simplification.

3. Conséquences.

3. Nous allons maintenant développer quelques conséquences de cette théorie.

3.1. 1°. Etant donnée une proposition, nous appellerons *matrice* de cette proposition (où nous supposerons que toutes les variables apparentes sont représentées par des lettres différentes) la proposition élémentaire obtenue en enlevant de celle-là tous les symboles de variables apparentes et les points qui les accompagnent. (On voit immédiatement que l'on obtient bien ainsi une proposition).

Par exemple la matrice de $(\exists x) . \Phi x . v . (y) . \sim \Phi y$ est $\Phi x . v . \sim \Phi y$.

Une proposition élémentaire est sa propre matrice. On vérifie aisément que la matrice d'une proposition ne change pas quand on transforme cette proposition par les règles de passage.

3.101. Une proposition sera dite *de forme normale*, si elle a la forme:

$$(\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_n) . M(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

$M(x_1 x_2 \ldots x_n)$ étant une proposition élémentaire (1.1) (qui est la matrice).

Par application des règles de passage, *on peut mettre une proposition sous forme normale (c'est-à-dire trouver une proposition équivalente de forme normale). On peut même en trouver une, qui sera dite „liée à P", telle que l'on rencontre les symboles de variables apparentes dans le même ordre quand on va de la gauche vers la droite, dans P et dans cette proposition.*

On démontre ceci par récurrence sur la construction de P; on voit immédiatement en effet, que si c'est vrai pour P, cela l'est pour $\sim P$; que si c'est vrai pour P et Q, cela l'est pour $P \vee Q$; et que si c'est vrai pour Φx, cela l'est pour $(\pm x) . \Phi x$.

Par exemple, la proposition de forme normale liée à la proposition ci-dessus est:

$$(\exists x) (y) . \Phi x \vee \sim \Phi y .$$

Une autre proposition de forme normale, qui lui est équivalente, est d'ailleurs:

$$(y)(\exists x).\Phi x \vee \infty \Phi y.$$

Une variable apparente est dite „**restreinte**" *dans une proposition p, si elle figure dans la proposition de forme normale liée à p dans un symbole* $(\exists x)$; *elle est dite* „**générale**", *si elle figure dans un symbole* (x).

3.102. Rappelons-nous la définition du signe des occurrences (au Ch. 1, 5.11); nous conserverons cette définition en la complétant comme suit: le signe d'une occurrence ne change pas quand on passe de Φx à $(\pm x).\Phi x$. On remarquera à ce sujet que si la variable apparente x figure dans un symbole (x), dans une occurrence positive, elle est générale (3.1); dans une occurrence négative, elle est restreinte; c'est le contraire si elle figure dans un symbole $(\exists x)$. (On le voit immédiatement par récurrence sur la construction de la proposition).

3.11. On voit que, pour construire une proposition normale, il suffit de partir d'une proposition élémentaire, et d'appliquer successivement uniquement les deux procédés de construction suivants:

1°. Passer de Φx à $(x).\Phi x$

2°. Passer de Φx à $(\exists x).\Phi x$

(à l'exclusion des procédés de construction du Chapitre I).

Ceci va nous permettre de simplifier des démonstrations par récurrence sur la construction d'une proposition.

3.12. **Remarque.** $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ étant une fonction propositionnelle de première espèce, on peut, par application des règles de passage, donner à $A((\pm x).\Phi x, p_2, \ldots, p_n)$ une forme normale telle que x soit la variable dont le symbole soit situé le plus à gauche. Ceci se démontre immédiatement par récurrence sur la construction de $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$).

3.2. Nous allons maintenant démontrer un théorème qui généralisera celui du Ch. 1 (3.3).

Théorème. *Soit* $F(p)$ *une fonction propositionnelle de la proposition p, dans laquelle p n'a que des occurrences de même signe* (3.102).

Si les occurrences de p sont positives dans $F(p)$, *on a:*

$$\vdash : p \supset q . \supset . F(p) \supset F(q) .$$

Si les occurrences de p sont négatives dans $F(p)$, *on a:*

$$\vdash : p \supset q . \supset . F(q) \supset F(p) .$$

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur la construction de $F(p)$, que nous supposons mis sous forme normale; les règles de passage conduisent alors immédiatement au cas général. Nous avons vu (3.11) que, pour construire cette fonction propositionnelle, nous pouvons procéder comme suit: partir d'une proposition élémentaire; puis effectuer des opérations comme la suivante: passer de Φx

$$(x) . \Phi x ;$$

ou à

$$(\exists x) . \Phi x .$$

Il suffit alors de démontrer les quatre points suivants:

1°. Le théorème est vrai pour les propositions éléments. Ceci est évident.

2°. Il est vrai pour les propositions élémentaires; car celles-ci se forment à partir des propositions éléments par combinaison avec les signes $\sim$ et v. Notre affirmation résulte alors des identités de première espèce:

$$\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$$

et

$$\vdash : . p \supset q . \supset : p \, v \, r . \supset . q \, v \, r .$$

3°. Si le théorème est vrai pour $F(p)$, $F(p)$ contenant la variable réelle x, il est vrai pour $(x) . F(p)$, car en utilisant les règles de généralisation et de passage, on a successivement:

$$\vdash : p \supset q . \supset . F(p) \supset F(q)$$

en supposant, pour fixer les idées, que l'occurrence de p est positive dans $F(p)$; puis:

$$\vdash : . p \supset q . \supset : (x) . F(p) . \supset F(q)$$

$$\vdash : . p \supset q . \supset : (x) . F(p) . \supset . (x) . F(q) .$$

On procède de même si l'occurrence de p est négative.

4°. On montre de même qu'il est vrai pour $(\exists x) . \Phi x$. Ce qui démontre le théorème.

4. Lien avec la théorie des identités de première espèce.

4. **Théorème.** *Si, dans une identité de première espèce, on remplace les lettres qui y figurent par des propositions non élémentaires, on obtient une identité de deuxième espèce.*

4.1. Nous allons démontrer ce théorème d'abord dans le cas particulier où chacune des propositions éléments de l'identité de première espèce, n'a qu'une occurrence de chaque signe au plus. Puis, nous en déduirons un certain nombre de conséquences, qui nous permettront de démontrer le cas général.

Soient donc $p_1, p_2, \ldots, p_n$ toutes les propositions éléments de l'identité propositionnelle de première espèce $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (chaque p_i n'ayant qu'une occurrence de chaque signe).

Remplaçons $p_2, p_3, \ldots, p_n$ par $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$ (qui peuvent être non élémentaires) et p_1 par $(\exists x) . \Phi_1 x$ ou $(x) . \Phi_1 x$, $\Phi_1 x$ étant une proposition contenant la variable réelle x.

Nous allons démontrer que la démonstration de la proposition ainsi obtenue se ramène à celle de la proposition obtenue en remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par $\Phi_1 x, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. Donc, dans chaque cas déterminé, on peut répéter un certain nombre de fois cette opération qui, à chaque fois, transforme une variable apparente en variable réelle, jusqu'à ce que l'on n'ait plus à remplacer $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que par des propositions sans variables apparentes, auquel cas la vérité de la proposition résulte de la règle de substitution (Ch. 1, 3.1).

Supposons, pour fixer les idées (l'autre cas se traitant exactement de même) que l'on remplace p_1 par $(\exists x) . \Phi_1 x$. Mettant en évidence les deux occurrences de $(\exists x) . \Phi_1 x$, la proposition à démontrer peut s'écrire:

$$A((\exists x) . \Phi_1 x,\ (\exists y) . \Phi_1 y,\ p_2, \ldots, p_n)$$

$(\exists x) . \Phi_1 x$ sera considéré comme étant dans l'occurrence positive, et $(\exists y) . \Phi_1 y$ dans l'occurrence négative); d'après 3.12, la démonstration de cette proposition revient à celle de:

$$(y)(\exists x) . A(\Phi_1 x, \Phi_1 y, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) .$$

Or, supposons démontré:

$$\vdash . A(\Phi_1 y, \Phi_1 y, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) .$$

On en déduit successivement:

$$\vdash : (\exists x) . A(\Phi_1 x, \Phi_1 y, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

par la deuxième règle de généralisation et

$$\vdash : (y)(\exists x) . A(\Phi_1 x, \Phi_1 y, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

par la première.

Nous avons donc démontré ce que nous voulions. Tirons quelques conséquences.

4.2. **Corollaire 1.** De $\vdash . p \equiv q$, on déduit

$$\vdash . F(p) \equiv F(q)$$

pour toute fonction propositionnelle F.

Désignons par $F(q, r)$ la proposition obtenue en remplaçant dans $F(p)$, p par q aux occurrences positives et par r aux occurrences négatives.

On a:

$$\vdash : p \supset q . \supset . F(p, p) \supset F(q, p)$$

$$\vdash : q \supset p . \supset . F(q, p) \supset F(q, q)$$

d'après (3.21). D'après l'identité de première espèce où chaque lettre n'a qu'une occurrence de chaque signe:

$$\vdash :: A \supset . B \supset C : \supset :. A' \supset . C \supset D : \supset : A . A' . \supset . B \supset D$$

où il faut remplacer B, C, D respectivement par $F(p, p)$, $F(q, p)$, $F(q, q)$, A par $p \supset q$ et A' par $q \supset p$, on déduit, grâce à l'emploi de la règle d'implication:

$$\vdash : p \equiv q . \supset . F(p, p) \supset F(q, q) .$$

On a donc $\vdash . F(p, p) \supset F(q, q)$; de même, on démontre que $\vdash . F(q, q) \supset F(p, p)$; en raisonnant comme au Corollaire 2, on en déduit: $\vdash . F(p, p) \equiv F(q, q)$.

4.3. **Corollaire 2.** On a (cette proposition n'ayant qu'une occurrence de chaque signe):

$$\vdash :. p \supset : q \supset . p . q$$

pour toutes les propositions p et q; donc de $\vdash . p$ et $\vdash . q$ on peut tirer $\vdash . p . q$. De même $\vdash : p . q . \supset p$; donc on peut de $\vdash . p . q$ tirer $\vdash . p$; on en ire de même $\vdash . q$.

4.4. **Corollaire 3.** On a de même:

$$\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$$

$$\vdash : q \vee p . \supset . p \vee q .$$

Donc (d'après corollaire 2):

$$\vdash : p \vee q . \equiv . q \vee p$$

On démontre de même que:

$$\vdash :. p . \vee . q \vee r : \equiv : q . \vee . p \vee r .$$

INSTITUT HENRI POINCARÉ

Ces résultats, joints au Corollaire 1, entraînent, comme au Ch. 1, (3.4), la légitimité de l'emploi de la disjonction généralisée; nous l'emploierons donc désormais: elle conserve toutes ses propriétés.

On justifierait de même l'emploi du produit généralisé.

4.5. **Corollaire 4.** Introduisons la notation suivante: n étant un chiffre (1, 2, 3, etc...), nP désignera la disjonction:

$$P \vee P \vee \ldots \vee P \qquad \text{(avec } n \text{ fois } P\text{)}.$$

On peut donc définir nP par récurrence de la manière suivante:

$$nP . =: (n-1)P . \vee . P \qquad Df$$

$$1P . =: P \qquad Df$$

Théorème. *De* $\vdash . nP$, *on peut déduire* $\vdash . P$.

Ceci constitue une règle de simplification généralisée. On la démontre par récurrence sur n: supposons donc démontré que de $\vdash . (n-1)P$, on peut déduire $\vdash . P$. De l'identité n'ayant qu'une occurrence de chaque signe:

$$A \vee B . A \supset P . B \supset Q . \supset . P \vee Q$$

on déduit, en remplaçant A par $(n-1)P$, B par P, Q par P, que de $\vdash . (n-1)P$, on peut conclure $\vdash . P \vee P$, (en effet $P \supset P$ est une identité avec une occurrence de chaque signe); et d'après la régle de simplification, on peut conclure $\vdash . P$.

On déduit comme en 2.4 de ce théorème et des règles de passage, la règle suivante, qui généralise la deuxième règle de généralisation: De

$$\vdash . \Phi x_1 x_1 x_2 \ldots x_n \vee \Phi x_2 x_1 x_2 \ldots x_n \vee \ldots \vee \Phi x_n x_1 x_2 \ldots x_n$$

on peut conclure:

$$\vdash : (\exists y) . \Phi y x_1 x_2 \ldots x_n .$$

4.6. **Corollaire 5.** Voici quelques autres conséquences des résultats précédents: De $\vdash . \Phi x y \supset \Phi x y$, on tire par les règles de généralisation et de passage:

$$\vdash : (\exists x)(y) . \Phi x y . \supset . (y)(\exists x) . \Phi x y .$$

En se servant en outre de 4.3 on trouve:

$$\vdash : (x y) . \Phi x y . \equiv . (y x) . \Phi x y$$

$$\vdash : (\exists x y) . \Phi x y . \equiv . (\exists y x) . \Phi x y .$$

On en déduit bien aisément, grâce à 4.2 et 3.2, qu'une proposition mise sous forme normale (3.1) est équivalente à celles obtenues en permutant deux symboles de variables générales, ou deux symboles de variables restreintes; et implique (Ch. 1, 3.22) celles obtenues en reculant vers la droite un symbole de variable restreinte, ou en avançant vers la gauche un symbole de variable générale.

4.7. **Corollaire 6.** *Il revient au même de démontrer* Φx *et* $(y)\Phi y$. Car: a) On passe du premier au deuxième par la première règle de généralisation.

b) On passe du deuxième au premier en remarquant que:

$$\Phi x \supset \Phi x$$

est une identité, vraie d'après 4.1; donc, on déduit d'après la deuxième règle de généralisation:

$$\vdash : (\exists y) . \Phi y \supset \Phi x$$

donc, d'après les règles de passage:

$$\vdash : (y) . \Phi y . \supset \Phi x .$$

5. Suite du paragraphe précédent.

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration complète du théorème du paragraphe précédent.

En prenant les même notations que plus haut, nous remplaçons dans $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivement par $(\exists x) . \Phi_1 x, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

(On raisonnerait de même si on remplaçait p par $(x) . \Phi_1 x$).

Nous allons montrer que la démonstration de la proposition ainsi obtenue se ramène à celle de la proposition obtenue en remplaçant, dans une autre identité de première espèce portant également sur n propositions éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ces propositions éléments par $\Phi_1 x, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$. Ce qui entraîne, pour la même raison que précédemment (4.1), la vérité du théorème étudié.

Supposons que p_1 ait α occurrences positives et β négatives, dans $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, que nous écrivons:

$$A(\underbrace{p_1, p_1, \ldots, p_1}_{\alpha \text{ fois}} ; \underbrace{p_1, p_1 \ldots, p_1}_{\beta \text{ fois}} ; p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

pour mettre en évidence ces occurrences (les α premiers p_1 provenant des occurrences positives; les β suivants des négatives).

Il faut démontrer:

$$\vdash . A[(\exists x_1) . \Phi_1 x_1, \ldots, (\exists x_\alpha) . \Phi_1 x_\alpha;$$
$$(\exists x_{\alpha+1}) . \Phi_1 x_{\alpha+1}, \ldots, (\exists x_{\alpha+\beta}) . \Phi_1 x_{\alpha+\beta}; \Phi_2, \ldots, \Phi_n)]$$

ou bien:

$$\vdash : (x_{\alpha+1} \ldots x_{\alpha+\beta}) (\exists x_1 \ldots x_\alpha) . A[\Phi_1 x_1, \ldots, \Phi_1 x_\alpha;$$
$$\Phi_1 x_{\alpha+1}, \ldots, \Phi_1 x_{\alpha+\beta}; \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$$

qui équivaut à la précédente par application des règles de passage, comme on peut le voir d'après 3.12; il suffit, d'après la première règle de généralisation, de démontrer que:

$$(\exists x_1 \ldots x_\alpha) A[\Phi_1 x_1, \ldots, \Phi_1 x_\alpha; \Phi_1 x_{\alpha+1}, \ldots, \Phi_1 x_{\alpha+\beta}; \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$$

ou même:

„la disjonction pour toutes les valeurs de i de $\alpha+1$ à β des propositions: $A[\Phi_1 x_i, \ldots, \Phi_1 x_i; \Phi_1 x_{\alpha+1} \ldots \Phi_1 x_\beta; \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$" sont des identités proportionnelles car il en est alors de même de la proposition précédente grâce à la deuxième règle de généralisation, et la règle généralisée de simplification (4.5).

Montrons que cette dernière une identité de première espèce.

Il suffit de montrer que:

„la disjonction pour toutes les valeurs de i de $\alpha+1$ à β des

$$A[a_i, \ldots, a_i; a_{\alpha+1}, \ldots, a_\beta; b_2, \ldots, b_n]"$$

est une identité de première espèce, sachant que:

$$A[a_1, \ldots, a_1; a_1 \ldots a_1; b_2 \ldots, b_n]$$

en est une autre.

Nous étudions pour cela la valeur logique de A. Donnons des valeurs logiques déterminées à toutes les propositions éléments $b_2, \ldots, b_n$. $A(c, \ldots, c; a_{\alpha+1}, \ldots, a_\beta; b_2, \ldots, b_n)$ devient alors équivalent à une proposition $B(c; a_{\alpha+1}, \ldots, a_\beta; r)$, obtenue suivant la méthode du Ch. 1, 5.36, en remplacant les b_i par $r \vee \sim r$ ou $r . \sim r$, r étant une nouvelle lettre. On sait que:

1⁰. Dans B, c n'a que des occurrences positives et les a_i, que des occurrences négatives.

2⁰. $B(c; c, \ldots, c; r)$ est une identité.

Il faut démontrer que, pour une valeur logique déterminée des a_i (et quelle que soit celle de r), en remplaçant c par $a_1, a_2, \ldots,$ ou a_n, un des B obtenus ait la valeur logique vrai.

Dans une forme normale conjonctive convenable de $B(c; a_1, a_2 \ldots a_n; r)$ chaque terme du produit est une disjonction

de propositions de forme $a_i, \infty c, r$ ou ∞r (d'après la première propriété, et Ch. 1, 5.11); dans ceux de ces termes qui ne contiennent pas à la fois r et ∞r (les autres sont donc des identités), figurent effectivement des propositions d'une des deux premières formes, d'après la deuxième propriété et le critère de vérité du Ch. 1, 5.21. Donc chacun de ces termes est équivalent à un terme de forme:

$$a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots \vee a_{i_p} \vee M$$

M ayant l'une des formes ∞c ou $\infty c \vee N$, N ne contenant que la lettre r.

Alors, pour une valeur logique déterminée de $a_1, a_2, \ldots a_n$, ou bien tous les a_i ont la valeur logique „vrai"; et on voit que B a cette même valeur logique, quelle que soit celle de c; ou bien a_i a la valeur logique „faux"; alors, en remplaçant c par a_i, B acquiert la valeur logique „vrai".

Nous avons donc démontré le théorème cherché.

5.1. Voici une conséquence et une généralisation de ce théorème:

Règle de substitution. *Si une proposition est vraie, on obtient d'autres proposition vraies en remplaçant les fonctions propositionelles éléments par des fonctions propositionelles quelconques ayant les mêmes arguments.*

(Car on peut faire cette substitution dans tout le cours de la démonstration, en particulier, d'après le théorème précédent, dans les identités propositionnelles sans variables apparentes dont on part).

6. Une autre méthode.

6. Nous allons maintenant indiquer d'autres méthodes pour fonder la théorie des identités de deuxième espèce. Elles ne différeront de la précédente que par les régles de raisonnement, et non par les signes employés.

6.1. Commençons par indiquer la démonstration-type d'un lemme qui sera nécessaire dans l'étude de chaque méthode, et dont un cas particulier a d'ailleurs déjà été démontré dans la méthode jusqu'ici employée (4.2)):

Lemme. *Si $F(p)$ est une fonction propositionnelle de la proposition p, on a:*

$$\vdash : p \equiv q \,.\supset.\, F(p) \equiv F(q) \,.$$

On démontre ceci par récurrence sur la construction de F.

Nous supposons qu'on opère dans une méthode où sont vraies les identités de première espèce portant sur des propositions non élémentaires, et la règle d'implication.

1⁰. Si le lemme est vrai pour $F(p)$ et $\Phi(p)$, il l'est pour $\infty F(p)$ et $F(p) \vee \Phi(p)$, d'après les identités de première espèce:

$$\vdash : a \equiv b . \supset . \infty a \equiv \infty b$$

$$\vdash :. a \equiv b . c \equiv d . \supset : a \vee c . \equiv . b \vee d$$

et la règle d'implication.

2⁰. Si le lemme est vrai pour $F(p)$, ($F(p)$ contenant x), il l'est pour $(x) . F(p)$ si on peut déduire:

$$\vdash : (x) . \Phi x . \equiv . (x) . \Psi x$$

(ou même seulement, comme on le voit aisément:

$$\vdash : (x) . \Phi x . \supset . (x) . \Psi x)$$

de:

$$\vdash . \Phi x \equiv \Psi x .$$

3⁰. Dans les mêmes conditions, il l'est pour $(\exists x) . \Phi x$, si on peut déduire

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x . \equiv . (\exists x) . \Psi x$$

(ou même seulement: $\vdash : (\exists x) . \Phi x . \supset (\exists x) . \Psi x)$

de:

$$\vdash . \Phi x \equiv \Psi x .$$

Donc, dans chaque méthode, il faudra regarder si on peut démontrer ce lemme (la deuxième partie de la démonstration devient inutile dans les méthodes où l'on définit les symbolas (x), la troisième partie dans celles où l'on définit les symboles $(\exists x)$, à partir des autres symboles.

6.2. La première de ces nouvelles méthodes a un intérêt pratique pour les démonstrations futures (nous la désignerons toujours par „la deuxième méthode"). Elle consiste à considérer que les symboles comme (x) sont définis à partir de ceux tels que $(\exists x)$, de la manière suivante:

$$(x) . \Phi x . = : \infty : (\exists x) . \infty \Phi x \qquad Df$$

(le deuxième membre donnant, comme toujours, la signification du premier). Les règles du raisonnement y sont les suivantes:

1⁰. Toutes les identités de première espèce donnent des propositions vraies *quand on y remplace les propositions éléments par des propositions quelconques.*

2⁰. Les règles de passage suivantes:

On peut remplacer à l'intérieur d'une proposition:

$(\exists x) . \Phi x \vee p$ *par* $(\exists x) . \Phi x . \vee p$ *et réciproquement, et* $(\exists x) . \Phi x . p$ *par* $(\exists x) . \Phi x : p$ *et réciproquement,* Φx étant une proposition pouvant contenir la variable x, p une proposition ne la contenant pas.

3⁰. *Les deux mêmes règles de généralisation que dans la première méthode; et la règle d'implication.*

6.21. Pour démontrer dans la deuxième méthode le lemme 6.1, il suffit de montrer que de $\vdash . \Phi x \supset \Psi x$, c'est-à-dire: $\vdash : \sim \Phi x . \vee . \Psi x$ on déduit: $\vdash : (\exists x) . \Phi x . \supset (\exists x) . \Psi x$.
Or, (règles de généralisation et de passage), on en déduit:

$$\vdash : \sim \Phi x . \vee . (\exists y) . \Psi y$$

mais cette proposition, en vertu d'une identité de première espèce, implique la suivante:

$$\vdash : . \sim \Phi x \vee : \sim \sim : (\exists y) . \Psi y$$

dont on déduit:

$$\vdash : : (x) : . \sim \Phi x . \vee : \sim \sim : (\exists y) . \Psi y$$

c'est-à-dire:

$$\vdash : : \sim (\exists x) \sim : . \sim \Phi x . \vee : \sim \sim : (\exists y) . \Psi y$$

ou:

$$\vdash : \sim (\exists x) . \Phi x . \sim (\exists y) \Psi y$$

d'où on tire (règle de passage).

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x : \sim (\exists y) . \Psi y$$

qui implique, en vertu d'une identité de première espèce:

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x . \supset . (\exists y) . \Psi y .$$

Ce qu'il fallait démontrer.

6.22. *Toute proposition vraie dans la deuxième méthode est vraie dans la première;* cela résulte de ce que toutes les règles de la deuxième méthode sont des règles de raisonnement également dans la première, et de la remarque suivante: dans la deuxième méthode, on peut remplacer $(x) \Phi x$ par $\sim (\exists x) \sim \Phi x$ et réciproquement; or dans la première méthode, il résulte de:

$$\vdash : (x)\,\Phi x \,.\equiv.\, \infty \,.\, (\exists x)\, \infty\, \Phi x$$

et du lemme (6.1), qu'on peut en faire autant.

Toute proposition vraie dans la première méthode, est vraie dans la deuxiéme. Les seules règles de la première méthode qui ne sont pas dans la deuxième sont en effet les suivantes:

a) La règle de simplification, qui résulte dans la deuxième méthode, de l'identité $P \vee P . \supset P$ et de la règle d'implication.

b) Les règles de passage.

Dans la deuxième méthode, les règles de passage du signe ∞ résultent de la définition de $(x) . \Phi x$, et de l'identité $\vdash . \infty \infty p \equiv p$, jointe au lemme (6.1).

Pour les règles de passage du signe $\vee$, il suffit de remarquer que $(x) . \Phi x \vee p$, dans la deuxième méthode, c'est:

$$\infty\, (\exists x)\, \infty \,.\, \Phi x \vee p$$

donc c'est identique à:

$$\infty\, (\exists x) . \infty\, \Phi x \,.\, \infty\, p$$

donc à:

$$\infty : (\exists x)\, \infty\, \Phi x \,.\, \infty\, p$$

donc à:

$$\infty : \infty\, (x)\, \Phi x \,.\, \infty\, p$$

et en définitive à: $(x)\, \Phi x \,.\, \vee p$, tout cela par application réitérée des règles du raisonnement et du lemme 6.1.

6.23. Dans cette deuxième méthode, pour faire les récurrences sur la construction des propositions, il est inutile de tenir compte des symboles (x): il n'y a plus que trois méthodes pour construire les propositions, en utilisant les signes $\vee$, ∞ et les signes de forme $(\exists x)$.

De même, les démonstrations par récurrence sur les démonstrations sont modifiées à cause des modifications des régles du raisonnement.

7. Les méthodes de Russell et Whitehead.

Nous allons maintenant étudier les méthodes de Russell et Whitehead. Ils emploient deux méthodes differentes pour fonder la théorie considérée.

7.1. La première, exposée au No. 10 des Principia Mathematica, est seule employée dans la suite de l'ouvrage. Il est

donc essentiel, d'après le point de vue exposé dans l'introduction, de montrer son équivalence avec les précédentes.

Elle définit $(\exists x) . \Phi x$ par:

$$(\exists x) . \Phi x :=: \infty (x) \infty . \Phi x \qquad Df$$

et admet les propositions primitives suivantes:

1⁰. Les identités propositionnelles de première espèce.

2⁰. $\vdash : (x) . \Phi x \supset . \Phi y$ $\qquad Pp$ (P.M., 10.1)

3⁰. $\vdash :. (x) . p \vee \Phi x . \supset : p \vee . (x) . \Phi x$ $\qquad Pp$ (P.M., 10.12)

4⁰. $\vdash : (x y) . \Phi x y . \supset . (y x) . \Phi x y$ $\qquad Pp$ (P.M., 11.07)

et les deux régles suivantes:

Si $\vdash . \Phi y$ où y est variable réelle, $\vdash : (x) \Phi x$ (P.M., 10.11)

Si $\vdash . p \supset q$ et $\vdash . p$, $\vdash . q$.

Dans toutes ces règles et propositions, on peut remplacer les lettres p, q et Φ par des propositions ou fonctions propositionelles quelconques.

On démontre les propositions suivantes:

(5) $\vdash :. (x) . p \vee \Phi x . \equiv : p \vee . (x) . \Phi x$ (P.M., 10.2)

(6) $\vdash :. (\exists x) . p \vee \Phi x . \equiv : p \vee . (\exists x) . \Phi x$ (P.M., 10.36)

Remarquons d'abord que, en consultant l'emploi que Russell et Whitehead font de la deuxième Pp, on voit qu'il faut l'écrire:

$$\vdash : (x) . \Phi x y . \supset \Phi y y$$

On en déduit (en remplaçant Φ par $\infty \Phi$):

$\vdash : (x) . \infty \Phi x y . \supset . \Phi y y$ c'est-à-dire: $\vdash : (\exists x) . \Phi x y . v . \infty \Phi y y$

donc:

$$\vdash : \Phi y y \supset . (\exists x) . \Phi x y .$$

On en déduit que la deuxième règle de généralisation est vraie dans cette méthode.

Le lemme 6.1 se démontre alors aisément; car de $\vdash . \Phi x \supset \Psi x$ on déduit $\vdash . (x) . \Phi x . \supset . (x) . \Psi x$, en utilisant les deux premières règles de généralisation, et la troisième Pp.

Montrons que cette méthode équivaut à notre première méthode.

1⁰. *Toute proposition vraie dans la nouvelle méthode, l'est dans la première.*

On démontre en effet, dans dans notre première méthode, que sont vraies:

a) les identités de première espèce (§ 4);

b) les propositions primitives 2, 3 et 4, qui se déduisent immédiatement par les règles de généralisation et de passage respectivement des identités de première espèce:

$$\vdash . \Phi y \supset \Phi y \qquad \vdash : p \vee \Phi z . \supset . p \vee \Phi z \qquad \vdash . \Phi z t \supset \Phi z t ;$$

c) $$\vdash : (\exists x) . \Phi x . \equiv . \infty (x) \infty \Phi x$$

(car on démontre par les règles de généralisation et de passage

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x . \supset . \infty (x) \infty \Phi x$$

et

$$\vdash : \infty (x) \infty \Phi x . \supset . (\exists x) . \Phi x$$

et il suffit alors d'utiliser 4.3).

Il suffit alors d'utiliser le théorème 4.2, pour voir que toute proposition vraie obtenue dans la nouvelle méthode par l'emploi de la définition de $(\exists x) . \Phi x$ peut aussi être obtenue dans notre méthode.

2⁰. Que *toute proposition vraie dans l'ancienne méthode le soit dans la nouvelle,* cela résulte de ce que, dans cette nouvelle méthode, on peut démontrer:

a) Les règles de passage, à cause du lemme (6.1); des propositions 5 et 6, et de la *Df.*

b) La règle de simplification, qui résulte de l'identité:

$$\vdash : P \vee P . \supset P$$

les autres règles de raisonnement de la première méthode étant comprises dans celles de la nouvelle.

Remarquons que la quatrième proposition primitive de la théorie est une conséquence des autres; en effet, elle n'a pas été utilisée dans cette dernière partie de la démonstration, et nous avons vu qu'elle pouvait être démontrée dans notre méthode.

7.2. Nous n'exposerons pas la deuxième méthode de Russell et Whitehead, Elle est d'ailleurs assez incomplètement exposée (P. M., 9), et est très voisine de notre méthode primitive, car on y obtient immédiatement les règles de passage, et on y admet comme vraies les identités propositionnelles de première espèce, uniquement quand on remplace leurs propo-

sitions éléments par des propositions élémentaires (1.1). On peut même considérer que les raisonnements nécessaires pour obtenir notre résultat du § 4, peuvent être entièrement remplacés, dans cette méthode, par la démonstration que nous en donnons.

8. Les champs finis.

8. Pour étudier les propriétés des propositions, nous emploierons plusieurs fois le procédé suivant: nous ferons correspondre à toute proposition, une autre proposition que l'on appellera sa *réduite,* et c'est cette réduite que nous étudierons. On la définira de la manière suivante:

On définira les réduites des propositions éléments; on conviendra que si la réduite de P est p, celle de $\sim P$ sera $\sim p$; que si les réduites de P et Q sont p et q, cele de $P \vee Q$ sera $p \vee q$; on donnera enfin le moyen de trouver la réduite de $(\exists x)\, \Phi x$ connaissant celle de Φx.

Comme toute proposition, dans la deuxième méthode (6.2), est composée à partir des propositions éléments en les combinant avec les signes $\sim$, $\vee$ et $(\exists)$, ces régles permettront de trouver la réduite de toute proposition déterminée.

8.1. Appliquons ceci à un exemple. Considérons n variables que nous désignerons pas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n est un nombre déterminé). Convenons que la réduite d'une proposition élément est cette proposition elle-même; et que si la réduite de Φx est φx, celle de $(\exists x) . \Phi x$ est: $\varphi a_1 \vee \varphi a_2 \vee \ldots \vee \varphi a_n$.

Nous allons montrer que:

Théorème. *Si $\Phi y_1 y_2 \ldots y_p$ est une proposition vraie avec les seules variables réelles $y_1, y_2, \ldots, y_p$, la réduite de $(y_1 y_2 \ldots y_p)$. $\Phi y_1 y_2 \ldots y_p$ (qui ne contient plus de variables apparentes) est une identité propositionnelle de première espèce en ses propositions éléments.*

8.10. On n'a pas à s'occuper dans la démonstration de ce théorème, de savoir si une variable figure effectivement ou non dans Φ, car si on considérait une variable „fictive" (1.2) de Φ, cela reviendrait à remplacer Φ par $\underbrace{\Phi \vee \Phi \vee \ldots \vee \Phi}_{n \text{ fois}}$; or, ces propositions sont équivalentes.

8.11. Remarquons que les propositions ayant leurs réduites vraies, sont en quelque sorte celles qui sont vraies quand il n'y a que n individus différents: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que puissent représenter les variables.

8.12. Remarquons en outre que la réduite de $(x) . \Phi x$ sera, par définition, (d'après 6.2) la même que celle de $\infty (\exists x) \infty . \Phi x$; donc, si la réduite de Φx est φx, celle de $(x) . \Phi x$ sera: $\varphi a_1 . \varphi a_2 \ldots \varphi a_n$ (Ch. 1, 3.42). Donc, si la réduite de $\Phi y_1 \ldots . y_p$ est $\varphi y_1 \ldots y_p$ celle de $(y_1 \ldots y_p) . \Phi y_1 \ldots y_p$ est le produit des propositions obtenues en remplaçant dans $\varphi y_1 \ldots y_p, y_1, \ldots, y_p$ de toutes les manières différentes par $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Pour que la réduite soit vraie, il faut et il suffit que toutes ces propositions soient vraies.

8.2. Considérons donc un raisonnement: il faut montrer que la propriété envisagée dans le théorème est vraie pour les propositions primitives, et qu'elle reste vraie quand on applique les règles du raisonnement; de telle manière qu'en répétant un certain nombre connu de fois les démonstrations qui vont suivre, on puisse être certain que la conclusion du raisonnement possède la propriété envisagée [1]).

Nous nous plaçons, dans ce qui suit, comme nous avons dit, dans la deuxième méthode (6.2).

1⁰. La propriété est évidente pour les identités de première espèce portant sur des propositions quelconques, d'après la règle de substitution du Ch. 1 (3.1).

2⁰. Supposons la propriété vraie pour $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_p$: elle l'est encore pour $(x) . \Phi x y_1 y \ldots y_p$, comme on le voit d'après la remarque 8.12.

3⁰. Supposons la propriété vraie pour $\Phi y y z_1 \ldots z_n$; soit $\varphi x y z_1 \ldots z_n$ la réduite de $\Phi x y z_1 \ldots z_n$; on voit immédiatement que la réduite de $\Phi y y z_1 \ldots z_n$ est $\varphi y y z_1 \ldots z_n$; alors la remarque (8.12) montre que la propriété est vraie pour $(\exists x) . \Phi x y z_1 \ldots z_n$.

4⁰. La propriété reste vraie dans les règles de passage.

En effet:

a) Les réduites de $(\exists x) . \Phi x . v p$ et $(\exists x) . \Phi x v p$ sont équivalentes; car si les réduites de Φx et p sont φx et $\tilde{\omega}$, les deux réduites sont:

$$\varphi a_1 v \varphi a_2 v \ldots v \varphi a_n v \tilde{\omega}$$

et $\varphi a_1 v \tilde{\omega} . v \varphi a_2 v \tilde{\omega} . v \ldots . v . \varphi a_n v \tilde{\omega}$ qui sont bien équivalentes.

---

[1]) Dans ce paragraphe, sauf au 4⁰, il n'y a pas d'autres variables réelles dans les propositions, que celles mises en évidence, sauf peut-être les variables $a_1, \ldots, a_n$, dans les réduites.

b) Les réduites de $(\exists x) . \Phi x : p$ et $(\exists x) . \Phi x . p$ sont équivalentes; car, avec les mêmes notations, ce sont:

$$\varphi a_1 . \tilde{\omega} . v . \varphi a_2 . \tilde{\omega} . v \ldots . v . \varphi a_n . \tilde{\omega}$$

et

$$\varphi a_1 v \varphi a_2 v \ldots v \varphi a_n . \tilde{\omega}$$

qui sont équivalentes d'après le théorème de distributivité (Ch. 1, 5.34).

5⁰. Si la propriété est vraie pour $\Phi y_1 \ldots y_n v \Phi y_1 \ldots y_n$ elle l'est pour $\Phi y_1 \ldots y_n$ comme on le voit d'après la remarque 8.12.

6⁰. Si la propriété est vraie pour $\Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ et $\Phi y_1 \ldots y_n \supset \Psi y_1 \ldots y_n$, elle est vraie pour $\Psi y_1 \ldots y_n$.

En effet, soient $\varphi y_1 \ldots y_n$ et $\Psi y_1 \ldots y_n$ les réduites de $\Phi y_1 \ldots y_n$ et $\Psi y_1 \ldots y_n$; du fait qu'en remplaçant les y_i pas les a_i d'une manière quelconque, dans:

$$\varphi y_1 \ldots y_n \quad \text{et} \quad \varphi y_1 \ldots y_n \supset \varphi y_1 \ldots y_n$$

ces propositions demeurent vraies, on en déduit la même propriété pour $\Psi y_1 \ldots y_n$.

8.3. **Remarque I.** Quand une proposition satisfera à la condition énoncée dans le théorème, nous dirons qu'elle est vraie dans un *champ de n éléments* et le critère correspondant nécessaire pour la vérité d'une proposition sera dit un *critère de champ, d'ordre n.*

On remarquera que si une proposition est vraie dans un champ de n éléments, elle est vraie dans tout champ d'un nombre moindre d'éléments (il suffit pour le voir, de faire un nombre suffisant a_i d'identiques entre eux).

Les champs considérés ici seront dits „finis" (par opposition aux champs infinis du Ch. 5).

8.31. On voit que la réduite d'une proposition p sans variables apparentes, est une fonction propositionnelle de première espèce des propositions $\Phi a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ obtenues en remplaçant, dans les propositions éléments, les variables par des a_i d'une manière quelconque. Si on donne des valeurs logiques (Ch. 1, 4.1) à ces propositions, on en déduit des valeurs logiques pour la réduite de p; on dira que c'est la valeur logique de p correspondant à ces valeurs logiques. On voit qu'avec cette

désignation, la valeur logique d'une proposition vraie est toujours le vrai, d'après le théorème 8.1, et celui du Ch. 1, 5.21.

8.4. **Remarque 2.** Pour obtenir le critère d'ordre 1, on voit qu'il suffit d'enlever tous les symboles de variables apparentes, et de remplacer toutes les variables par une même lettre: on doit avoir une identité, si la proposition dont on part est vraie.

Une conséquence en est que la théorie jusqu'ici développée est non contradictoire (car si P et $\sim P$ étaient vraies simultanément, leurs réduites dans un champ d'un individu, p et $\sim p$, seraient vraies simultanément; ce qui est impossible, d'après (Ch. 1, 4)).

8.5. **Remarque 3.** Une proposition vraie dans tous les champs finis n'est pas forcément vraie, comme le montre l'exemple de:

$$\sim :: (x\,y\,z) : \Phi\,x\,y \,.\, \Phi\,y\,z \,.\supset \Phi\,x\,z : \sim \Phi\,x\,x :. (y)\,(\exists\,x) \,.\, \Phi\,x\,y$$

qui est vraie, comme on le voit aisément, dans tout champ fini; et cependant, n'est pas vraie [1]).

9. Applications.

Nous allons étudier quelques cas classiques où les critères de champ donnent des conditions suffisantes de vérité.

9.1. 1°. **Théorème.** *Pour que la proposition:*

$$(x_1 \ldots x_n)\,(\exists\,y_1 \ldots y_p) \,.\, \Phi\,x_1 \ldots x_n\,y_1 \ldots y_p$$

(sans autres variables) soit vraie, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit vraie dans un champ de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [2]).

C'est évidemment nécessaire.

C'est aussi suffisant, car dans ce cas la disjonction des $\Phi\,a_1 \ldots a_n\,y_1 \ldots y_p$ quand on remplace les y par les a de toutes les manières possibles, est vraie; or, chacun des termes de cette disjonction implique $(\exists\,y_1 \ldots y_p) \,.\, \Phi\,a_1 \ldots a_p\,y_1 \ldots y_p$; de l'identité de première espèce:

---

[1]) En effet, si on utilise les notations de l'arithmétique, et qu'on remplace $\Phi\,x\,y$ par $x > y$, on aura un théorème faux en arithmétique; il résultera plus loin de la non-contradiction de l'arithmétique, que la proposition ne peut être une identité.

[2]) Voir Bernays et Schönfinkel. Math. Annalen, tome 99, p. 359.

$$\vdash :. A_1 \supset P . A_2 \supset P \ldots\ldots A_r \supset P . A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r : \supset P$$

on déduit:

$$\vdash : (\exists y_1 \ldots y_p) . \Phi a_1 \ldots a_n y_1 \ldots y_p$$

et de là, la proposition cherchée, par la première règle de généralisation.

Remarque. On peut avoir $p = 0$; ou $n = 0$; dans le deuxième cas, il suffit, comme on s'en assure aisément, de vérifier la proposition dans un champ d'un individu.

9.2. 2°. Considérons *une proposition P dans laquelle toutes les fonctions propositionnelles éléments n'aient qu'un seul argument* [1]). Nous allons la mettre sous une forme canonique.

Soient $\Phi_1 x, \Phi_2 x, \ldots, \Phi_n x$ les fonctions propositionnelles éléments. Considérons les 2^n produits que l'on peut former avec ces fonctions propositionnelles, précédées ou non du signe ∞.

Par exemple, si $n = 2$, ces produits seront:

$$\Phi_1 x . \Phi_2 x \qquad \Phi_1 x . \infty \Phi_2 x$$
$$\infty \Phi_1 x . \Phi_2 x \qquad \infty \Phi_1 x . \infty \Phi_2 x$$

Posons: $2^n = q$ et appelons $A_1 x, A_2 x, \ldots, A_q x$ ces produits. On a (ce sont des identités de première espèce que l'on vérifie immédiatement):

$$\vdash \infty \; . A_i x . A_j x \quad \text{si} \quad i \neq j$$
$$\vdash \infty A_i x . \equiv . A_1 x \vee A_2 x \vee \ldots \vee A_{i-1} x \vee A_{i+1} x \vee \ldots \vee A_q x$$

la disjonction du deuxième membre contenant tous les $A x$, sauf $A_i x$.

Appelons p_i la proposition $(\exists x) . A_i x$. Nous allons montrer que l'on peut trouver une proposition équivalente à P et de forme suivante: *Une fonction propositionnelle de première espèce des p_i et des $A_i x_\alpha$ (les x_α étant les variables réelles), tous les $A_i x_\alpha$ étant dans des occurrences positives.*

---

[1]) Le résultat de ce paragraphe a été trouvé indépendamment par de nombreux auteurs; on peut consulter: Behmann. Beiträge zur Algebra der Logik, Math Annalen, Tome 86; Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Annalen, Tome 76; enfin H. et A., p. 77. Nous donnons ci-contre une démonstration que nous croyons nouvelle.

On démontre ceci par récurrence sur la construction de la proposition P dans la deuxième méthode (6.2).

1⁰. Si c'est vrai pour P et Q, ce l'est pour $P \vee Q$.

2⁰. Si c'est vrai pour P, c'est vrai pour $\sim P$. Il suffit de remarquer que les occurrences de $A_i x$ deviennent négatives, mais qu'on peut remplacer $A_i x$ par

$$\sim . A_1 x \vee .. \vee A_{i-1} x \vee A_{i+1} x \vee .. A_{i_p} x, \qquad \text{d'après 4.2.}$$

3⁰. Si c'est vrai pour Φx, c'est vrai pour $(\exists x) . \Phi x$. Mettons en effet Φx sous forme normale disjonctive; il prend la forme: $\Omega_1 x \vee \Omega_2 \vee \ldots \vee \Omega_p x$, chacun des termes $\Omega_i x$ de la disjonction est un produit de propositions p_i, $\sim p_i$ et $A_i x_\alpha$; (d'après Ch. 1, 5.11, il n'y a en effet, pas de $\sim A_i x_\alpha$).

Comme $\sim . A_i x . A_j x$ est vraie si $i \neq j$, on voit que l'on peut supposer que chaque x_α figure une fois et une seule dans les $A_i x_\alpha$ constituant un de ces produits. Du fait que

$$(\exists x) . \Omega_1 x \vee \Omega_2 x \vee \ldots \vee \Omega_p x$$

est identique à:

$$(\exists x) . \Omega_1 x . \vee . (\exists x) . \Omega_2 x . \vee_n \ldots \vee (\exists x) . \Omega_p x$$

comme on la voit sans peine, on déduit aisément le résultat cherché.

4⁰. Reste à voir que les $\Phi_i x$ s'expriment en fonction des $A_i x$. Or, on démontre immédiatement par le théorème du Ch. 1, 5.21, que $\Phi_i x$ est équivalent à la somme des $A_j x$ qui contiennent le terme $\Phi_i x$ (et non sa négation: il y a 2^{n-1} tels $A_j x$).

Pour vérifier si une proposition $\Phi x_1 \ldots x_n$ (sans autres variables réelles) n'ayant que des propositions éléments à un argument est vraie, on considère (ce qui revient au même, d'après 4.7): $(x_1 x_2 \ldots x_n) . \Phi x_1 x_2 \ldots x_n$ qui est donc, d'après ce qui précède, équivalente à une fonction propositionnelle $A(p_1, p_2, \ldots p_q)$, des p_i; montrons *qu'il est nécessaire et suffisant que cette fonction soit une identité de première espèce.*

La condition est évidemment suffisante, d'après le théorème du § 4. Qu'elle soit nécessaire, cela va résulter des considérations suivantes. Si $A(p_1, p_2, \ldots, p_q)$ n'était pas une identité, il y aurait un système de valeurs logiques des p_i lui donnant la valeur logique „faux", d'après Ch. 1, 5.2. Dans ce cas, soient, pour fixer les idées: $p_1 p_2, \ldots, p_r$ $(r \leqslant q)$ ceux des p_i ayant dans le système la valeur logique „vrai". Considérons un champ de r

individus $a_1, a_2, \ldots a_r$; nous voulons donner aux $A_i a_j$ les valeurs logiques suivantes: le vrai si $i = j$, le faux sans cela; on en déduit bien aisément les valeurs logiques qu'il faut donner aux $\Phi_i a_j$ [1]); avec ces valeurs logiques, on voit que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ont la valeur logique „vrai" dans le champ; les autres p la valeur logique „faux", et donc $A(p_1, p_2, \ldots p_q)$ également: ce qui est, comme on l'a vu, impossible (voir 8.21).

Cette démonstration montre qu'on peut aussi (d'après 8.3) énoncer notre critère en disant:

Pour qu'une proposition contenant n fonctions propositionnelles éléments à un argument soit vraie, il faut et il sujfit qu'elle le soit dans un champ de 2^n éléments.

9.3. 3⁰. Outre les deux cas énumérés ci-dessus, le seul cas que l'on connaisse où un critère de champ soit nécessaire et suffisant pour la vérité d'une proposition, est celui des propositions de forme $(y_1 y_2 \ldots y_n)\ (\exists x)(z_1 z_2 \ldots z_p) . A y_1 y_2 \ldots y_n x z_1 z_2 \ldots z_p$ (sans autres variables). Ce cas a été traité par Ackermann [2]) et nous en reparlerons au chapitre 5. Le cas particulier des propositions $(\exists x)(y) . A x y$ avait déjà été traité par Bernays et Schönfinkel [3]).

CHAPITRE III.

Les théories mathématiques.

1. La notion générale de théorie mathématique.

1.1. Nous avons étudié jusqu'ici les règles logiques pour obtenir des propositions vraies; pour obtenir des théories mathématiques, il suffira, en principe, de considérer certaines propositions déterminées comme vraies; une proposition quelconque sera alors considérée comme vraie, si on peut la déduire de ces propositions par les règles du raisonnement. Mais ceci n'est que le cas

---

[1]) Il suffit de faire $\Phi_i a_j$ de même valeur logique que la somme logique des $A_m a_j$ contenant dans leur produit $\Phi_i a_j$ et non $\infty \Phi_i a_j$.

[2]) Über Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke, Math. Annalen, T. 100.

[3]) Zum Entscheidungsproblem der Mathematischen Logik, Math. Annalen T. 99, p. 342.

le plus simple; nous allons indiquer un schéma assez général de théorie, qui peut engendrer, semble-t-il (voir l'introduction) la plupart des théories mathématiques (ou logiques) connues.

Dans ce qui suit, nous appellerons „lettre", non seulement les lettres de l'alphabet, mais également tout autre signe, dont on sera convenu d'avance qu'il faut le considérer comme une lettre. C'est ainsi que, comme au chapitre précédent, des lettres comme x_1, x_2, affectées d'indices différents seront considérées comme différentes.

Nous appellerons désormais, par définition, une *théorie* tout système de signes satisfaisant à la description que nous allons faire.

1.11. 1⁰. Les lettres minuscules désigneront, comme précédemment, des variables; mais il faudra les considérer comme étant de plusieurs sortes; on pourra même avoir un nombre indéfini (voir plus loin, en 1.2) de sortes de lettres, les lettres des différentes sortes étant distinguées par la forme des signes qui les représentent, que l'on pourra, par exemple, affecter d'indices. Chaque sorte de lettres s'appellera, suivant une terminologie due à Russell, un „*type*" de variables.

1.12. 2⁰. On pourra avoir un certain nombre (ou même un nombre indéfini) de lettres différentes (que l'on pourra distinguer par des indices, dans le cas où il y en a un nombre indéfini) dont l'emploi sera le même que celui des variables, à cela près qu'elles ne pourront figurer dans les symboles de variables apparentes. Chacune de ces lettres sera considérée comme d'un type déterminé.

Ces lettres seront appelées „*constantes*". Nous dirons que ce sont les *constantes fondamentales*.

1.13. 3⁰. On aura un certain nombre (ou même un nombre indéfini) de signes différents, que l'on appellera „*fonctions descriptives*". Il est nécessaire, à leur sujet, d'introduire la notion *d'individus* d'un type déterminé. Une fonction descriptive devra toujours être accompagnée d'un nombre déterminé d'individus, dits ses *arguments* de types déterminés, dans un ordre déterminé et sera considérée elle-même comme étant d'un type déterminé. Les combinaisons de signes que l'on appellera individus, seront définies comme suit:

a) Les constantes fondamentales et les variables d'un type déterminé seront des individus de ce type.

b) Une fonction descriptive d'un type déterminé, accompagnée d'individus de la manière requise, est elle-même un individu de ce type.

On voit, en définitive, que les individus sont formés par l'itération des fonctions descriptives, à partir des constantes et des variables.

Nous appellerons *fonctions descriptives élémentaires* celles dont on vient de parler; et d'une manière générale, tout individu représenté par un ensemble de signes contenant les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ sera dit de même une fonction descriptive (ou simplement une fonction) de ces variables, qui seront dites ses *arguments*.

Une fonction descriptive de constantes fondamentales sera dite une *„constante"*.

On peut toujours considérer une constante comme une fonction descriptive à 0 argument; c'est ce que nous ferons désormais.

Dans les mathématiques ordinaires, les différents types correspondront aux différentes sortes d'objets envisagées; les fonctions descriptives, aux fonctions ordinaires à une ou plusieurs variables. (D'une maniere générale un individu y est une fonction des individus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si, à tout systeme $x_1, x_2, \ldots, x_n$, correspond un individu y et un seul).

1.14. 4⁰. On aura un certain nombre de signes différents (ou même un nombre indéfini). Chacun de ces signes ne pourra intervenir qu'accompagné d'un certain nombre d'individus de type déterminé dans un ordre déterminé, et sera dit une *fonction propositionnelle élément* de ces individus). Il faudra les considérer dans les raisonnements comme des propositions.

Comme au Chapitre 2, toutes les autres propositions se fabriqueront à partir de celles-là. Les variables réelles d'une proposition seront toujours dites ses „arguments", et la proposition une „fonction propositionnelle" de ces variables.

Les fonctions propositionnelles éléments traduiront les relations fondamentales pouvant exister entre les objets de la théorie considérée; celles qui n'ont qu'un argument traduiront les propriétés fondamentales que peuvent posséder ces objets.

1.15. 5⁰. On aura un certain nombre de propositions (ou un nombre indéterminé), que l'on considérera comme vraies. On les appellera les *„Hypothèses"*, ou les *„axiomes"*, ou les *„propositions primitives"* de la théorie. Parmi elles, devront figurer les propositions primitives envisagées au début du cha-

pitre 2 (les identités de première espèce portant sur des propositions élémentaires); elles seront toujours sous-entendues.

1.16. 6⁰. On peut avoir aussi des règles de raisonnement spéciales à une théorie. Nous en verrons un exemple au début du Ch. 4.

Mais ceci est un cas exceptionnel; sauf indication formelle, nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi.

1.17. Une proposition sera dite *vraie*, dans cette théorie, ou sera dite un *théorème* de cette théorie, si on peut la déduire des hypothèses par les règles de raisonnement du chapitre 2, complétées comme on va l'indiquer en 1.4, et les règles dont on vient de parler.

Nous indiquerons encore qu'une proposition est vraie (dans une théorie déterminée) en la faisant précéder du signe $\vdash$.

1.2. Remarquons tout de suite que, quand nous parlons d'un nombre indéfini de signes ou d'hypothèses, nous voulons dire que l'on aura une loi déterminée, permettant d'en écrire toujours de nouveaux. Dans un raisonnement déterminé, on n'en utilisera jamais qu'un nombre déterminé, mais il est essentiel de remarquer que ce nombre dépend du raisonnement envisagé. Une proposition déterminée ne comprendra de même jamais qu'un nombre déterminé de signes différents.

1.3. Nous verrons plus loin plusieurs exemples de théories mathématiques; par exemple l'arithmétique, où il n'y a qu'un type, une seule fonction descriptive fondamentale: $a+1$, une seule fonction propositionnelle élément: $a=b$, et une seule constante fondamentale: 0; ou bien la théorie de Russell et Whitehead où il y a une infinité de types. Remarquons que, généralement, une théorie a un nombre indéfini d'hypothèses, souvent de la forme suivante: pour toute fonction propositionnelle *déterminée* $\Phi x_1 x_2 \ldots x_n$, la proposition $A[\Phi x_1 x_2 \ldots x_n]$ est vraie, $A(p)$ étant une fonction propositionnelle (Ch. 2, 1.41) de p.

L'exemple le plus simple de théorie mathématique est la théorie où il n'y a ni constantes, ni fonctions descriptives, ni hypothèses; et où il y a un nombre indéfini de fonctions propositionnelles et un seul type: c'est la théorie étudiée au chapitre 2.

1.4. Supposons maintenant que l'on considère la théorie mathématique déduite de la précédente par l'adjonction d'un nombre indéterminé de fonctions descriptives et de constantes. Nous supposons aussi, pour plus de généralité, qu'il y a un

nombre indéfini de types. Il faudra changer légèrement (et c'est la modification aux règles de raisonnements énoncées plus haut, qu'il faut effectuer pour toute théorie mathématique comportant des fonctions descriptives) l'énoncé de la deuxième règle de généralisation, qui devient le suivant:

Si $\Phi(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est vrai, f étant une variable réelle une fonction descriptive dont les arguments sont des variables réelles ou une constante, alors* $(\exists y) . \Phi y x_1 x_2 \ldots x_n$ *est vrai.*

Par extension, nous disons encore qu'une proposition vraie dans la théorie considérée est une *identité propositionnelle.*

Cette extension de la théorie du Chapitre 2, est celle qui nous servira désormais; ce qu'elle contient d'essentiellement nouveau, ce n'est pas l'introduction des types différents, mais bien celle des fonctions descriptives. Désormais les propositions éléments seront de forme $\Phi f_1 f_2 \ldots f_n$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant des individus, et non plus forcément des variables. Nous verrons d'ailleurs au dernier Chapitre que „l'Entscheidungsproblem" dans cette nouvelle théorie, se ramène au même problème dans la théorie du Chapitre 2, ce qui fait que l'on peut, si l'on veut, éviter l'emploi des fonctions descriptives; mais elles nous seront nécessaires pour traduire en signes les théories mathématiques ordinaires.

1.41. Il est aisé de voir que, outre l'ancienne règle de substitution (Ch. 2, 5.1), nous en avons maintenant une autre:

On peut dans une identité propositionnelle, remplacer une fonction descriptive élémentaire par une fonction descriptive de même type et de mêmes arguments que la première.

Tous les autres résultats des 6 premiers paragraphes du Chapitre 2 subsistent; il faut, bien entendu, faire subir dans la deuxième méthode indiquée au paragraphe 6, la modification déjà indiquée à la deuxième règle de généralisation.

1.42. Quant à la théorie des champs, développée au paragraphe 8, elle s'applique presque sans changement dans ce nouveau cas. Il suffit de procéder comme suit:

1⁰. A chaque type, nous attachons un certain nombre de variables de ce type, que nous appellerons éléments du champ de ce type.

2⁰. Nous faisons correspondre, comme nous voudrons, à chaque individu qui est une fonction descriptive élémentaire $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p})$ dont les arguments sont des éléments des champs, un élément du champ du même type que f.

3⁰. Puis nous modifions ainsi la règle donnant la réduite de $(\exists x).\Phi x$ à partir de celle de Φx que nous nommerons φx: cette réduite sera: $\varphi a_1 \vee \varphi a_2 \vee \ldots \vee \varphi a_p$, si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont les éléments du champ du type de x.

4⁰. Quand on a ainsi obtenu la réduite d'une proposition sans variables réelles, on utilise la correspondance décrite dans le 2⁰, pour, en remplaçant les $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p})$ par les éléments correspondants des champs, arriver à une proposition sans fonctions descriptives; c'est la proposition ainsi obtenue qui sera la réduite définitive.

Avec cette modification, tous les résultats de la théorie restent vrais (on en déduit en particulier la non-contradiction de la théorie considérée en 1.4).

Les critères de champ permettent évidemment de démontrer la non-contradiction de toutes les théories dont les axiomes sont vrais dans un champ fini (par exemple, la théorie des corps).

2. Étude élémentaire des théories mathématiques.

2.1. **Def. 1.** Une théorie sera dite *non-contradictoire,* quand il n'y a pas de proposition p telle que p et $\sim p$ soient vraies simultanément.

Remarquons que dans une théorie contradictoire, toute proposition q est vraie; car si p et $\sim p$ sont vraies, p et $p \supset q$ (qui n'est autre que $\sim p \vee q$) sont vraies; donc q est vraie.

Def. 2. Une théorie sera dite *à complète détermination,* quand pour toute proposition p sans variables réélles, p ou $\sim p$ est vraie [1]).

Def. 3. Nous dirons qu'une théorie est *résoluble,* quand on a un moyen permettant d'y reconnaitre si une proposition y est vraie ou non, et dans le premier cas d'en fournir la démonstration.

On peut donc considérer qu'une théorie non-contradictoire, à complète détermination et résoluble est parfaitement connue, et que son étude est achevée au point de vue mathématique. Nous en verrons un exemple plus loin.

---

[1]) Avec la terminologie ordinaire, c'est une théorie où le principe du *tiers exclus* est vrai; nous ne répéterons pas ici ce que nous disions dans l'introduction à propos de la distinction entre l'emploi mathématique des termes (qui pour le tiers exclus est toujours légitime), et leur emploi métamathématique (qui correspond ici à une propriété nullement essentielle, et au reste sans doute rarement vérifiée, des théories).

2.2. On démontre sans aucune difficulté que l'on peut modifier une théorie mathématique en y introduisant des constantes, des types ou des fonctions nouvelles, sans qu'il y ait dans la théorie ainsi modifiée de proposition vraie qui ne le soit dans la théorie primitive. Ces modifications peuvent être cependant utiles pour obtenir des séries de théorèmes vrais en tenant compte de la remarque suivante: quand des fonctions propositionnelles éléments, ou des fonctions descriptives fondamentales ne figurent pas dans les hypothèses d'une théorie, les règles de substitution (Ch. 2, 5.1; Ch. 3, 1.4) sont applicables à ces fonctions.

2.3. Il est essentiel de distinguer les théories où il y a un nombre fini et déterminé d'hypothèses, de celles qui en ont un nombre indéfini. Voici un exemple de ce dernier cas, qui nous fournit le cas le plus simple de „théorie des ensembles": on a deux types, celui des éléments, et celui des classes, et une fonction propositionnelle élément $x \varepsilon \alpha$, de variables x (du type des éléments), et α (du type des classes); les hypothèses sont toutes les propositions obtenues en remplaçant dans la suivante:

$$(\exists \alpha)(x) . x \varepsilon \alpha \equiv \Phi x$$

Φx par une fonction propositionnelle quelconque de x. On montre aisément que cette théorie est non-contradictoire, car ses hypothèses sont vraies dans un champ fini (Ch. 3, 1.42). On peut de manière analogue, „axiomatiser" la théorie employée par Russell et Whitehead dans les Principia Mathematica (on a alors un nombre indéfini de types); on peut également montrer sa non-contradiction, même quand on ajoute aux hypothèses les axiomes multiplicatifs pour chaque type (qui correspondent au classique axiome de choix) [1]).

Il faut bien remarquer que dans une théorie qui a un nombre indéfini d'hypothèses, on ne se sert jamais que d'un nombre fini et déterminé de ces hypothèses dans la démonstration d'un théorème déterminé; mais on ne sait pas lesquelles; aussi ces théories présentent-elles des difficultés spéciales. Il est d'ailleurs remarquable que toutes les théories des ensembles qui ont permis de fonder l'analyse mathématique classique ont une infinité

---

[1]) Voir à ce sujet notre note aux „Comptes Rendus de l'Ac. des Sc.", tome 186, p. 1274.

d'hypothèses; seule la récente axiomatique de Neumann [1]) fait exception.

2.4. Nous supposerons implicitement, désormais, que les hypothèses n'ont pas de variables réelles, ce qui peut s'obtenir par l'emploi de la première règle de généralisation (Ch. 2, 4.7).

Considérons maintenant une théorie où il n'y a qu'un nombre fini d'hypothèses. On peut les remplacer par leur produit logique, de manière qu'il n'y ait plus qu'une hypothèse (Ch. 1, 3.43); de même comme on vient de le dire, on peut supposer qu'elle ne possède plus de variables réelles. Soit H la proposition ainsi obtenue; nous allons montrer que:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition P soit vraie, est que:*

$$H \supset P$$

soit une identité propositionnelle (*au sens de* 1.4).

Ceci se démontre par récurrence sur la démonstration de P.

1⁰. La propriété envisagée reste évidemment vraie par les règles de passage.

2⁰. Elle reste vraie dans les règles de généralisation, car de $\vdash . H \supset \Phi x$ on déduit: $\vdash : H \supset . (x) . \Phi x$ et de: $\vdash . H \supset \Phi y f$ on déduit: $\vdash : H \supset . (\exists x) . \Phi y x$, grâce aux règles de généralisation et de passage, f étant un individu quelconque.

3⁰. Elle reste vraie dans les règles de simplification et d'implication à cause des identités de première espèce:

$$\vdash H \supset . P \vee P : \supset . H \supset P$$
$$\vdash H \supset P : H \supset . P \supset Q : \supset . H \supset Q .$$

4⁰. Elle est évidente pour les identités élémentaires de première espèce à cause de l'identité:

$$\vdash : P \supset . H \supset P$$

et pour l'hypothèse, puisque:

$$\vdash . H \supset H .$$

2.41. **Remarque.** 1. Ce théorème conduit également à un résultat dans une théorie qui a une infinité d'hypothèses; dans la démonstration d'un théorème déterminé P, on n'utilise que certaines hypothèses déterminées; supposons-les sans variables

[1]) Journal für die reine und angewandte Math., 154, (1925); Math. Zeitschrift, tome 27 (1928).

réelles, et appelons H leur produit logique. Le même raisonnement montre que: $H \supset P$ est une identité propositionnelle.

2.42. 2. Ce théorème ramène l'étude d'une théorie avec un nombre fini d'hypothèses, à celle de la théorie considérée en 1.4.

2.43. 3. On déduit de ce théorème que, quand on ajoute à une théorie une nouvelle hypothèse H supposée sans variables réelles, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition P soit vraie dans la nouvelle théorie est que $H \supset P$ le soit dans l'ancienne.

(Car si on appelle H' le produit des hypothèses de l'ancienne théorie nécessaires pour démontrer P, $H . H' . \supset P$ est une identité d'après 2.4; or, ceci est équivalent à $H' \supset . H \supset P$; d'où on déduit aisément notre remarque).

3. Les descriptions incomplètes.

3.1. Considérons une théorie mathématique sans règle particulière de raisonnement.

Soit $A x$ une fonction propositionnelle de x, qui peut contenir des constantes, mais aucune variable réelle autre que x.

Supposons vraies les propositions suivantes:

$$\vdash : (\exists x) . A x \tag{1}$$

$$\vdash . A a \tag{2}$$

pour toutes les constantes fondamentales a du même type que l'argument de A; ((1) se déduit d'ailleurs de (2), s'il y a des constantes).

$$\vdash . A y_1 . A y_2 \ldots A y_n . \supset . A [f (y_1 y_2 \ldots y_n)] \tag{3}$$

peur toutes les fonctions descriptives fondamentales f du même type que l'argument de A.

On voit aisément que, pour toute constante a, la proposition (2) et que pour toute fonction descriptive, f, la proposition (3), sont vraies.

Nous dirons alors que $A x$ est une description incompléte de x. A toute proposition, la description $A x$ va faire correspondre une réduite (Ch. 2, 8), par les règles suivantes: les réduites de propositions éléments sont ces propositions elles-mêmes. Si la réduite de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ est $\varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$, celle de $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ sera: $(\exists x) . A x . \varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$. De plus, comme toujours, si la réduite de P est p, celle de ∞P sera

∞p; si les réduites de P et Q sont p et q, celle de $P \vee Q$ sera $p \vee q$.

Nous supposons en outre que les réduites des hypothèses (supposées sans variables réelles) sont vraies.

3.2. **Théorème 1.** Dans ces conditions, *si* $\Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ *est vraie, la réduite de* $(y_1 \ldots . y_n) . \Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ *est vraie.*

Ce théorème revient à dire qu'en peut restreindre les individus du type de x, à ceux pour lesquels $A x$ est vrai. On remarquera son analogie avec les critères de champ (Ch. 2, 8.1).

Nous omettrons ici sà démonstration, qui se fait sans aucune difficulté par récurrence sur la démonstration de $\Phi y_1 y_2 \ldots y_n$, dans la méthode du Ch. 2, 62.

3.21. On voit aisément qu'on peut le généraliser légèrement en utilisant plusieurs descriptions incomplètes $A x$, l'argument de chacune étant d'un type différent, de manière à imposer des descriptions aux individus de différents types.

3.3. **Théorème 2.** *La condition nécessaire et suffisante pour que, en ajoutant* $(x) . A x$ *aux hypothèses,* $\Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ *devienne vraie, est que la réduite de* $(y_1 y_2 \ldots y_n) . \Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ *soit vraie.*

1°. Cette condition est suffisante, car l'hypothèse $(x) . A x$ entraîne l'équivalence de $(\exists x) . A x . \Phi x$ et de $(\exists x) \Phi x$; d'où on déduit (en raisonnant par récurrence sur la construction de la proposition), l'équivalence de la proposition et de sa réduite.

2°. Montrons qu'elle est nécessaire; si $\Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ est vrai quand on ajoute $(x) . A x$ aux hypothèses, la remarque (2.43) montre que :

$$(y_1 y_2 \ldots y_n) : (x) . A x . \supset \Phi y_1 y_2 \ldots y_n$$

est vraie avec les hypothèses primitives.

Donc sa réduite est vraie; or, la réduite de $(x) . A x$ est une proposition vraie; on en déduit que la réduite de $(y_1 y_2 \ldots y_n) . \Phi y_1 y_2 \ldots y_n$ est vraie.

3.31. **Corollaire.** Sous les conditions énoncées au début, en (3.1) on voit que si une théorie est non-contradictoire, elle le reste quand on ajoute l'hypothèse :

$$\vdash : (x) . A x$$

car la réduite d'une proposition de forme $p . \infty p$ sans variables réelles, est fausse.

3.4. La théorie précédente va nous permettre de ramener des théories contenant des types différents à des théories contenant un seul type.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait un nombre déterminé, n, de types (le même procédé conviendrait s'il y en avait un nombre indéfini). Nous numéroterons les types de 1 à n. Introduisons n fonctions propositionnelles $\Phi_1 x, \Phi_2 x, \ldots \Phi_n x, \Phi_i x$, ayant un argument du i^{eme} type.

Considérons une théorie nouvelle qu'on obtiendra à partir de l'ancienne:

1°. En remplaçant ses hypothèses (supposées sans variables réelles) par leurs réduites, obtenues par les descriptions incomplètes (3.21): $\Phi_1 x$ sur le premier type, $\Phi_2 x$ sur le deuxième, ... $\Phi_n x$ sur le n^{eme}.

2°. En ajoutant aux hypothèses les propositions des formes 1,2 et 3 de 3.1, correspondant aux descriptions incomplètes $\Phi_1 x, \Phi_2 x, \ldots, \Phi_n x$.

3°. En supposant qu'il n'y a plus qu'un type.

Nous appellerons désormais P^* la réduite d'une proposition P par les descriptions $\Phi_1 x, \Phi_2 x, \ldots, \Phi_n x$.

Alors, on a le théorème:

3.41. **Théorème.** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition P supposée sans variables réelles, soit vraie dans l'ancienne théorie, est que sa réduite P^* soit vraie dans la nouvelle.*

1°. Si P est vrai dans l'ancienne théorie, il y a un produit H d'hypothèses tel que $H \supset P$ soit une identité, d'après 2.4. Toutes les conditions de validité du théorème 3.2 étant vérifiées dans la nouvelle théorie, $H^* \supset P^*$, réduite de $H \supset P$, est vraie dans cette théorie, donc P^* l'est aussi.

2°. Supposons que P^* soit vrai dans la nouvelle théorie. Il y a un certain produit d'hypothèse de cette théorie, comprenant donc des réduites d'hypothèses de l'ancienne théorie, et des propositions de la forme 1, 2 et 3 de 3.1), que nous désignerons par M, tel que $M \supset P^*$ soit une identité.

On voit immédiatement qu'en remplaçant tous les $\Phi_i x$ par des identités (par exemple de forme $p \vee \infty p$), une réduite A^* devient équivalente à A (car $\Phi_i x . \Omega x$ devient équivalent à Ωx, quelque soit Ωx).

Cette opération transforme M en une proposition équivalente, soit à un produit d'hypothèse de l'ancienne théorie, soit à une identité (car les hypothèses de la forme 1, 2 et 3 de 3.1, deviennent des identités); soit N cette proposition. D'après la règle de substitution (Ch. 2, 5.1), $N \supset P$ est une identité, et donc P est vrai dans l'ancienne théorie.

3.42. Le théorème précédent donne le moyen de remplacer l'étude d'une théorie où il y a plusieurs types, par celle d'une théorie où il n'y a qu'un type.

En tenant compte du théorème 2.4, et du résultat sur lequel nous reviendrons au dernier chapitre, que l'on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de fonctions descriptives, ni de constantes, on voit que le problème consistant à reconnaître si une proposition donnée est vraie dans une théorie à un nombre fini d'hypothèses, se ramène à *l'Entscheidungsproblem,* comme il se posait au Chapitre 2 (2.1).

CHAPITRE IV.

L'arithmétique.

1. L'arithmétique sans variables apparentes.

1.1. Nous considérerons, dans ce qui suit, des théories qui porteront sur un seul type d'individus appelés *nombres;* parmi ceux-ci, nous aurons une constante fondamentale que nous représenterons par 0. Nous aurons en outre une fonction descriptive élémentaire à un argument que nous désignerons (l'argument étant a) par $a+1$, et que nous énoncerons: „a plus un"; nous aurons comme seule fonction propositionnelle élément la fonction à deux arguments: $a=b$, que nous énoncerons; „a égale b".

Nous poserons: [1])

$$a \neq b . = . \infty . a = b \qquad Df.$$

1.11. Nous appellerons désormais „chiffre" tout groupe de signes tels que: 0, $0+1$, $0+1+1$, etc..., que nous pouvons définir en disant que 0 est un chiffre; et que, si a représente une figure qu'on sait être un chiffre, il en est de même de $a+1$.

[1]) Pour cette notation, voir Ch. 1, 1.1.

Dans tout ce chapitre, nous désignerons les variables par les lettres x, y, z, t, s; au contraire, les lettres a, b, c, d, seront toujours mises à la place de chiffres déterminés.

Remarquons qu'il faut essentiellement distinguer les nombres et les chiffres; un chiffre est un individu d'une forme déterminée et donnée: 0, par exemple; c'est, si l'on veut, une simple figure, un dessin; un nombre, c'est n'importe quel individu; une lettre x sera désormais un nombre; ce n'est pas un chiffre. (Il est d'ailleurs clair que tout chiffre est un nombre).

1.12. a étant le chiffre $0+1+1\ldots+1$, 1 étant répété n fois, nous désignerons par $x+a$ la fonction descriptive $x+1+\ldots+1$ $+1$ étant répété n fois, de manière que $0+a=a$.

On peut aussi définir $x+a$ en disant que $x+0$ représente x, et que $x+(a+1)$ représente $(x+a)+1$.

Remarquons que nous pouvons parler de la somme de deux chiffres; c'est un autre chiffre que la définition précédente permet immédiatement de construire.

Remarquons encore que, dans la théorie étudiée, toutes les propositions éléments (voir Ch. 3, 1.4) sont de forme $a=b$, ou $x+a=b$, ou $x+a=y+b$ (nous répétons que x et y sont des variables déterminées, a et b, des chiffres déterminés).

1.13. Nous dirons que deux chiffres sont égaux, s'ils sont identiques. Nous dirons que le chiffre a est plus grand que le chiffre b, et que b est plus petit que a, si a contient plus de fois le signe $+1$ que b.

Si le chiffre a est plus grand que le chiffre b, ou lui est égal, nous appelons $a-b$ un chiffre obtenu en enlevant du chiffre a, autant de signes $+1$ qu'en contient le chiffre b; on dira qu'on obtient ce nouveau chiffre en retranchant b de a.

1.14. Toutes ces définitions, nous le répétons, sont applicables uniquement à des chiffres déterminés, et indiquent des propriétés et des opérations qu'on pourra effectivement reconnaître et effectuer.

Nous allons avoir désormais à employer des propositions contenant des chiffres indéterminés (elles ne sont, évidemment, utilisées dans chaque cas particulier qu'avec des chiffres déterminés). Il nous arrivera de démontrer certaines de leur propriétés, en concluant du cas où un de ces chiffres vaut a, au cas oú il vaut $a+1$, donc par récurrence; ceci est légitime (voir l'Intro-

duction) car, chaque fois que l'on aura une proposition avec des chiffres déterminés, le raisonnement conduira, en l'itérant un certain nombre de fois, à la vérification de la propriété étudiée.

1.2. Envisageons tout d'abord une théorie dans laquelle nous n'emploierons pas de variables apparentes, pour laquelle donc les seules règles de raisonnement seront celles énoncées au chapitre 1; cette théorie possèdera les hypothèses suivantes: d'abord les cinq hypothèses:

$$\begin{array}{ll} 1) & x = x \\ 2) & x = y \,.\supset.\, y = x \\ 3) & x = y \,.\, y = z \,.\supset.\, x = z \\ 4) & x = y \,.\equiv.\, x + 1 = y + 1 \\ 5) & x + 1 \neq 0 \end{array}$$

et en outre toutes les hypothèses de la forme:

$$6) \quad x \neq x + a$$

a étant un chiffre quelconque différant de 0, mais déterminé.

Nous ajoutons à ces hypothèses toutes celles qu'on obtient en y remplaçant x, y, z par des *nombres* déterminés, a par un *chiffre* déterminé.

1.3. Nous désignerons désormais cette théorie par Théorie 1 (en abrégé Th. 1). Nous allons déduire quelques conséquences de cette théorie; dans ce qui suit, a, b, c, désignent des chiffres quelconques, mais déterminés.

1.31. Si a et b sont égaux,

$$\vdash .\, a = b$$

1.32. Si a et b sont inégaux

$$\vdash .\, a \neq b$$

(Ceci résulte des axiomes 6).

1.33. $\vdash : x + a = y + b \,.\equiv.\, x = y + (b - a)$

si b est plus grand ou égal à a.

Nous avons le droit de démontrer ceci de la manière suivante.

On a:

$$\vdash : x = y + c \,.\equiv.\, x + 1 = y + c + 1$$

d'après l'axiome (4). Comme (9) ne peut être appliqué qu'à des chiffres a et b déterminés, un nombre déterminé de pas conduit au résultat.

On démontrera de manière semblable les propositions suivantes:

1.34. $\vdash . x + a = x + b . \equiv . a = b$

d'après les axiomes (6) et 1.33.

1.35. $\vdash : y = x + a . z = y + b . \supset . z = x + a + b$

1.36. $\vdash : y = x + a . z = x + b . \supset . z = y + (b - a)$

si b est plus grand ou égal à a. (Cela résulte des axiomes 1, 2 et 3).

Tous ces résultats seront utilisés dans la recherche de la forme canonique d'une proposition.

1.37. Remarquons enfin qu'on peut toujours trouver un chiffre différent d'un certain nombre de chiffres donnés. (Il suffit, par exemple, d'ajouter $+1$ au plus grand de ces chiffres).

Toute l'étude qui va suivre va consister, au fond, à étudier les propositions vraies, à partir des propositions obtenues en remplaçant leurs variables par des chiffres déterminés.

2. Un théoreme de non-contradiction.

2. Nous allons démontrer la *non-contradiction* (Ch. 3, 2.1) *de cette théorie*. A toute proposition P de cette théorie, nous en faisons correspondre une autre en y remplaçant chacune des variables par 0; toutes les propositions-éléments figurant dans cette nouvelle proposition seront de la forme $a = b$, a et b étant des chiffres. Nous attribuerons à cette proposition-élément la valeur logique vrai ou faux, selon que les chiffres a et b sont identiques ou différents. A la proposition P correspondra alors une valeur logique déterminée; montrons que si P *est vraie, cette valeur logique est le vrai.*

D'une part, en effet, on constate immédiatement, comme au chapitre 1, § 3, que si à P et à $P \supset Q$ correspond la valeur logique vrai, il en est de même pour Q. D'autre part, pour constater qu'à toute proposition primitive correspond la valeur logique vrai, il suffit de chercher cette valeur logique en prenant succesivement tous les cas possibles selon que les chiffres obtenus en y remplaçant dans x, y, z les variables par 0, sont identiques ou non.

Or, à P et à ∞P ne peuvent correspondre simultanément les valeurs logique „vrai"; donc, ils ne peuvent être simultanément vrais dans la théorie considérée.

2.1. Remarquons de plus que, pour une proposition qui ne contient pas de variables, ce critère est suffisant; il suffit en effet de démontrer que si une proposition P ne contient pas de variables, elle est vraie ou sa négation est vraie, selon que sa valeur logique est le vrai ou le faux.

Nous le démontrerons par récurrence sur la construction de P.

Pour les propositions-éléments, cela résulte de (1.31) et (1.32).

On voit alors immédiatement que si c'est vrai pour P et Q, cela l'est pour ∞P et pour $P \vee Q$.

Nous pourrons donc désormais parler sans ambiguité de la vérité et de la fausseté d'une proposition sans variables, dans la théorie considérée: car toute proposition non vraie a sa négation vraie.

3. La forme canonique des propositions.

Nous allons indiquer un procédé permettant de reconnaître si une proposition est vraie ou non dans cette théorie. Il faut, pour cela, mettre toute proposition sous une forme canonique, c'est-à-dire en trouver une autre de forme canonique qui lui soit équivalente.

Etant donnée une proposition, nous commencerons par la mettre sous la forme normale disjonctive (Ch. 1, 5.1) puis, nous allons remplacer chaque terme de la disjonction par un terme qui lui est équivalent dans cette théorie, ce qui est légitime d'après Ch. 1 (3.3). Chacun de ces termes est un produit de propositions simples (c'est-à-dire de propositions-éléments et de négations de propositions-éléments).

3.11. Nous utiliserons constamment le fait suivant: si P est vrai, $A . P$ est équivalent à A; et $A \vee P$ est vrai; si P est faux, $A \vee P$ est équivalent à A, et $A . P$ est faux.

3.12. Montrons d'abord qu'un produit de propositions éléments est équivalent à une proposition:

ou bien de la forme $0 \neq 0$

ou bien de la forme $0 = 0$

ou bien de la forme suivante:

les variables étant dans cette nouvelle proposition de trois espèces différentes, celles de la première espèce désignées par $x_1, x_2, \ldots x_n$; celles de la deuxième espèce par $y_1, y_2, \ldots y_p$; celles de la troisième espéce par $z_1, z_2, \ldots, z_q$, — elle sera un produit de propositions-éléments d'une des formes suivantes:

Soit $x_i = a_i$ chaque x_i donnant lieu à une telle égalité et à une seule.

Soit $z_i = y_j + b_i$ chaque z_i donnant lieu à une telle égalité et à une seule, (les a_i et les b_j étant des chiffres).

Remarquons, pour fixer les idées, que les variables de certaines espèces peuvent manquer totalement.

Nous allons démontrer cela par récurrrence sur le nombre des variables.

Quand il n'y a qu'une proposition-élément dans le produit, elle est *a*) soit de forme: $x + a = b$ auquel cas elle est, ou fausse, donc équivalente à $0 \neq 0$, ou équivalente à $x = b - a$ (d'après 1.33 et l'axiome 6).

b) soit de forme $x + a = x + b$, auquel cas elle est ou fausse, donc équivalente à $0 \neq 0$, ou vraie, donc équivalente à $0 = 0$ (d'après 1.34, 1.31, et 1.32).

c) soit de forme $x + a = y + b$, auquel cas, elle est équivalente à $x = y + (b - a)$,

si, pour fixer les idées, b est plus grand ou égal à a (d'après 1.33).

Ajoutons maintenant aux produits de la forme susdite une nouvelle proposition-élément.

a) *ou bien elle ne contient pas de variable;* on sait donc si elle est vraie ou si elle est fausse; dans le premier cas, on peut supprimer la nouvelle proposition élément; dans le deuxième cas, on remplace la proposition par $0 \neq 0$ (d'après 1.31, 1.32 et 3.11).

b) *ou bien elle est de forme $t + a = b$, t étant une variable;* on peut évidemment toujours, en remplaçant s'il y a lieu t par sa valeur prise dans un des autres facteurs du produit (ce qui est légitime d'après 1.35) remplacer cette proposition, par une autre équivalente, soit rentrant dans le cas ci dessus, soit de même forme, mais telle que t soit une variable de deuxième espèce. Dans ce dernier cas, si a est supérieur ou égal à b, le produit est équivalent à $0 \neq 0$; sans cela, notre proposition élé-

ment équivant à: $t = b - a$; on remplace alors t par ce chiffre dans les égalités contenant t, et le produit prend la forme indiquée (d'après 1.33, l'axiome 6 et 3.11).

c) ou bien elle est de forme $t + a = t + b$; si a est différent de b, le produit est équivalent à $0 \neq 0$; sans cela, on peut supprimer cette nouvelle proposition-élément (d'après 1.34, 1.31, 1.32 et 3.11).

d) ou bien elle est de forme $t + a = s + b$; on peut, comme en b) supposer s et t de deuxième espèce. Supposons, pour fixer les idées b supérieur ou égal à a; elle est équivalente à:

$$t = s + (b - a) \qquad \text{(d'après 1.33)}$$

en remplaçant t par cette valeur dans toutes les égalités contenant t, on ramène le produit à la forme cherchée (d'après 1.35).

3.13. Ajoutons maintenant au produit des inégalités; une discussion analogue conduit à la forme canonique suivante d'un produit de propositions simples:

a) ou bien $0 = 0$

b) ou bien $0 \neq 0$

c) ou bien un produit de propositions $x_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$;

$z_i = y_j + b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots q$, j y dépendant de i, (chaque x_i et chaque z_i donnant lieu à une égalité et une seule);

$y_i \neq y_j + b_i$ (un couple i, j, pouvant donner lieu à plusieurs inégalités);

$y_i \neq d_i$(un même y_i pouvant entrer dans plusieurs de ces inégalités).

On en déduit en tenant compte des remarques (3.11) la forme canonique d'une proposition, qui est:

a) ou bien $0 = 0$

b) ou bien $0 \neq 0$

c) ou bien une somme de produits de la forme qu'on vient d'indiquer.

C'est ainsi que:

$$x = 0 \,.\, v \,.\, x = 1 \,.\, z_1 = y_1 + 1 \,.\, z_2 = y_2 + 1 \,.\, y_1 \neq y_2 \,.\, y_1 \neq 1$$

est de forme canonique.

Remarquons enfin qu'une proposition peut être mise de plusieurs manières sous forme canonique; en particulier, si, dans un terme de la disjonction, on a un facteur tel que $z_i = y_j$, on peut prendre z_i au lieu de y_j comme variable de deuxième espèce, en remplaçant, dans tous les autres facteurs y_j par z_i.

4. Un critère de vérité.

4. Considérons une proposition P; soit Q une proposition équivalente de forme canonique. Ou bien Q est $0=0$, auquel cas P est vrai; ou bien Q est $0 \neq 0$, auquel cas ∞P est vrai. Dans le cas contraire, montrons qu'on peut remplacer les variables de P par des chiffres tels que Q soit vrai.

Q est, en effet, une disjonction; considérons un de ses termes. C'est ce terme que nous allons rendre vrai. Faisons d'abord les variables qui sont, dans ce terme, de première espèce (3.12), égales aux chiffres auxquels elles y sont égalées. Considérons maintenant les variables de seconde espèce $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Prenons d'abord pour y_1 une valeur telle que toutes les inégalités de forme $y_1 \neq a_1$, (a étant un nombre) soient vraies. Puis choisissons y_2 tel que toutes les inégalités contenant y_2 seul, ou y_2 et y_1, soient vraies quand on remplace y_1 par sa valeur; c'est possible d'après (1.37). Nous choisissons ainsi des chiffres pour les y_i de proche en proche par la loi générale suivante: une fois choisi $y_1, y_2, \ldots, y_i$ nous choisissons y_{i+1} de telle manière que toutes les inégalités contenant y_{i+1}, ou bien y_{i+1} et y_j (où j est un indice plus petit que $i+1$) soient vraies.

Nous choisissons enfin les variables de troisième espèce, de telle manière que les égalités qui les relient à celles de deuxième espèce soient vraies.

Il est alors évident que quand on remplace toutes les variables de la manière indiquée, Q devient vrai (d'après le critère de 2.1).

4.1. Nous arrivons donc à la conclusion que, ou bien on peut démontrer ∞P, ou bien on peut remplacer les variables de P par des chiffres tels que P devienne vrai. En remplaçant P par ∞P, *nous avons donc indiqué un procédé permettant, étant donnée une proposition, ou bien de démontrer qu'elle est vraie, ou bien de remplacer ses variables par des chiffres la rendant fausse.*

Dans ce deuxième cas, à cause de la non-contradiction de notre théorie, la proposition ne peut-être vraie, et ce critère permet donc de reconnaitre si une proposition est vraie.

4.11. On peut aussi dire, pour résumer cela, qu'une proposition est vraie, quand on sait que tout système de chiffres mis à la place de ses variables, la rend vraie.

4.12. Considérons en particulier la proposition $P \equiv Q$; la méthode précédente permettra alors, ou de démontrer l'équivalence de P et de Q, ou d'y remplacer les variables par des chiffres rendant l'un vrai et l'autre faux.

5. Introduction des variables apparentes.

5. Considérons maintenant une autre théorie mathématique où l'on pourra utiliser les variables apparentes et qui aura comme hypothèses:

1. $x = x$
2. $x = y \,.\supset.\, y = x$
3. $x = y \,.\, y = z \,.\supset.\, x = z$
4. $x = y \,.\equiv.\, x + 1 = y + 1$
5. $x + 1 \neq 0$
6. $x \neq x + a$ (pour tout chiffre a).

Nous l'appellerons: Théorie 2 (en abrégé Th. 2).

Remarquons qu'il est bien évident, maintenant que nous employons les variables apparentes, que toutes les hypothèses de l'ancienne théorie sont vraies dans la nouvelle (à cause de l'identité $\vdash : (x) \,.\, \Phi x \,.\supset.\, \Phi y$).

Cette théorie ne diffère donc de l'ancienne que par l'introduction de variables apparentes.

La non-contradiction de cette théorie et de celle que nous allons considérer plus loin a été démontrée pour la première fois par Neumann, par une méthode très compliquée (Math. Zeitschrift, t. 26); un précédent essai, dû à Ackermann (Math. Annalen, t. 93) a été critiqué par Neumann qui en a montré les erreurs et les lacunes; enfin, Hilbert et Bernays, dans les „Abhandlungen der Math. Seminär der Hamburger Univ.", ont indiqué les grandes lignes d'une autre méthode, sans d'ailleurs achever la démonstration. Nous exposons, dans ce qui suit, une nouvelle méthode, qui outre sa simplicité relative, permet de démontrer beaucoup plus que la non-contradiction.

Nous ferons correspondre à toute proposition de la Th. 2, certaines propositions de la Th. 1, que nous nommerons *ses réduites*, et qui auront la propriété d'être toutes équivalentes entre elles dans l'ancienne théorie. Nous dirons qu'une proposition est une réduite de P, si on peut la déduire de P par le procédé

que nous allons indiquer, ou si elle est équivalente dans la Th. 1 à une proposition ainsi déduite de P.

5.1. Nous définirons ces réduites par récurrence sur la construction de P, en nous plaçant dans la deuxième méthode du Chapitre 2, (Ch. 2, 6.2) et nous montrerons en même temps leur équivalence, la deuxième règle de généralisation étant modifiée comme il est dit au Chapitre 3 (1.4).

a) Une réduite d'une proposition-élément sera cette proposition-élément elle-même.

b) Si une réduite de P est p, une réduite de $\sim P$ sera $\sim p$.

c) Si les réduites de P et Q sont respectivement p et q, une réduite de $P \vee Q$ sera $p \vee q$.

Observons que, dans chacune de ces opérations, on obtient pour $\sim P$, ou pour $P \vee Q$, uniquement des réduites équivalentes entre elles, si l'on sait qu'il en est ainsi pour toutes les réduites de P et de Q.

5.11. Il nous faut maintenant définir une réduite de $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ à partir d'une réduite de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$.

Considérons pour cela une réduite de cette dernière, mise sous forme normale disjonctive. Nous allons remplacer chaque terme de disjonction de cette forme normale par un autre pour obtenir la réduite de la première.

Considérons donc un terme de cette disjonction, ainsi que les propositions simples qui contiennent x. Nous allons faire sur ce terme, les opérations qui, en algèbre ordinaire, correspondent à l'élimination de x dans un système d'égalités et d'inégalités.

a) Si x est de première ou de troisième espèce, on supprimera les propositions simples qui le contiennent; si toutefois, cette opération faite, il ne reste plus de propositions simples, on remplacera notre terme par $0 = 0$. Remarquons que cette opération revient à remplacer x par la valeur à laquelle il est égalé dans le terme considéré.

b) Si x est de deuxième espèce,

α) Ou bien il y aura une égalité telle que $x = y$ dans le terme étudié; dans ce cas, on supprime cette égalité, et on remplace partout x par y. On a d'ailleurs vu qu'on pouvait supposer dans ce cas, que x n'était pas de deuxième espèce.

β) Ou bien il n'y a pas d'égalités contenant x; dans ce cas, on supprime les inégalités contenant x et si, en faisant cela, il ne reste plus de propositions simples, on remplace le terme par $0 = 0$.

γ) Ou bien toutes les égalités contenant x sont de forme $y = x + a$ où a est un chiffre différent de 0; dans ce cas, on considère une de celles de ces égalités ou a est le plus petit, soit $y = x + a$; on supprime alors cette égalité du produit; puis on remplace les égalités de forme: $z = x + b$ par $z = y + (b - a)$; et les inégalités de forme: $x \neq b$ ou $z + b \neq x + c$, par $y \neq a + b$ et $z + a + b \neq y + c$. On ajoute ensuite au produit toutes les inégalités: $y \neq 0$, $y \neq 1$, etc... jusqu'à $y \neq a - 1$.

Les définitions précédentes nous permettent de faire correspondre, à une proposition, des réduites. Pour montrer qu'elles sont toutes équivalentes entre elles, il nous reste à montrer que, une fois que l'on sait que toutes les réduites de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ le sont, il en est de même pour toutes les réduites que la définition précédente permet d'attribuer à $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$; (nous supposons que $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ sont les seules variables réelles).

5.2. Ceci résulte des propriétés suivantes: Soit $\varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$ une réduite de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$, et soit $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$ une réduite de $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ déduite de la première par la définition précédente.

1⁰. *Si un système de chiffres, $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$, mis à la place de $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ rend $\varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$ vrai* [1]*, le système $a_1, \ldots, a_n$ rend $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$ vrai.*

2⁰. *On peut indiquer un procédé permettant, étant donné un système de chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rendant vrai $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$, de trouver un chiffre b tel que le système de chiffres $b, a_1, a_2 \ldots, a_n$ rende $\varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$ vrai.*

En effet, supposons que $b a_1 \ldots a_n$ rende $\varphi x y_1 \ldots y_n$ vrai; il rendra vrai un des termes de la disjonction qui forme $\varphi x y_1 \ldots y_n$ (car s'il donnait à tous les termes la valeur logique „faux", la disjonction serait fausse, d'après (2.1)). On voit immédiatement qu'il rendra vrai le terme correspondant de $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$ (on considèrera, pour le vérifier, séparément chacun des cas a), b_α), b_β), b_γ)).

---

[1]) Nous dirons alors en abrégé que „le système $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ rend $\varphi x y_1 \ldots y_n$ vrai.

Si, réciproquement, $a_1 a_2 \ldots a_n$ rend $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$ vrai, il rend vrai un terme de la disjonction qui forme $\Psi y_1 y_2 \ldots y_n$; dans chacun des cas a), b_α), b_β) le chiffre b se détermine aisément, soit par des égalités, soit par des inégalités; dans le cas b_γ), il faut retrancher à un des chiffres $a_1 a_2 \ldots a_n$ un chiffre comme a, pour trouver b, ce qui est possible à cause des inégalités $x \neq 0$, $x \neq 1, \ldots x \neq a - 1$, qui figurent dans ce terme.

5.21. Supposons alors que, de deux réduites équivalentes φ_1 φ_2 de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$, on déduise par la définition précédente deux réduites Ψ_1 et Ψ_2 de $(\exists x) . \Phi x y_1 \ldots y_n$; si elles n'étaient pas équivalentes, on pourrait trouver des valeurs $a_1, a_2, \ldots a_n$ pour $y_1, y_2, \ldots y_n$ rendant l'une vraie, Ψ_1 par exemple; et l'autre fausse (d'après 4.12); on en déduira un système $b a_1 a_2 \ldots a_n$ rendant φ_1 vraie, donc φ_2 vraie; donc $a_1 a_2 \ldots a_n$ rendrait Ψ_2 vrai; nous arrivons donc à une contradiction dans Th. 1 (impossible d'après (2)).

Nous avons donc réussi à faire correspondre à toute proposition des réduites qui ne comprennent pas de variables apparentes, et qui sont équivalentes entre elles.

5.31. **Remarque 1:** On définit les réduites de $(x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ comme étant les mêmes que celles de $\infty (\exists x) \infty \Phi x y_1 \ldots y_n$ (d'après Ch. 2. (6.2)).

Si un système de chiffres, $a_1 a_2 \ldots a_n$ mis à la place de $y_1 y_2 \ldots y_n$ rend cette réduite fausse, on peut trouver b tel qu'un système $b a_1 a_2 \ldots a_n$ de chiffres, mis à la place de $x y_1 y_2 \ldots y_n$ rende fausses les réduites de $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$.

Car le système $a_1 \ldots a_n$ rend vraies les réduites de $(\exists x) . \infty \Phi x y_1 \ldots y_n$; donc, on peut trouver b tel que le système $b a_1 \ldots a_n$ rende vraies les réduites de $\infty \Phi x y_1 \ldots y_n$, donc fausses celles de $\Phi x y_1 \ldots y_n$.

5.32. **Remarque 2.** *Si une réduite de $\Phi x y z_1 \ldots z_n$ est $\varphi x y z_1 \ldots z_n$, une réduite $\Phi x, x + a, z_1 \ldots z_n$ est $\varphi x, x + a, z_1 \ldots z_n$.*

Nous montrons ceci par récurrence sur la construction de Φ.

Si c'est vrai pour Φ et Ψ, c'est bien évidemment vrai pour $\infty \Phi$ et pour $\Phi \vee \Psi$.

Montrons que si c'est vrai pour $\Phi x y z_1 \ldots z_n$ dont une réduite est $\varphi x y z_1 \ldots z_n$, c'est encore vrai pour $(\exists z_1) . \Phi x y z_1 \ldots z_n$ dont une réduite est $\Psi x y z_2 \ldots z_n$; s'il n'en était pas ainsi, $(\exists z_1) . \Phi x, x + a, z_1 z_2 \ldots z_n$ aurait une réduite $\varpi x, z_2 \ldots z_n$ non équivalente à $\Psi x, x + a, z_2 \ldots z_n$; donc il y aurait un système de

chiffres rendant l'une vraie et l'autre fausse. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit Ψ qui soit vrai; on peut alors trouver un autre chiffre pour z_1 rendant, avec les chiffres précédents, $\varphi\, x, x+a, z_1 \ldots z_n$ vrai; or, c'est une réduite de $\Phi\, x, x+a, z_1 \ldots z_n$ par hypothèse; donc le système de chiffres primitifs doit rendre vrai $\omega\, x, z_2 \ldots z_n$, d'où, une contradiction.

On raisonnerait de même dans l'autre cas.

5.33. **Remarque 3.** On constaterait de manière analogue *que si une réduite de* $\Phi\, x\, y_1\, y_2 \ldots y_n$ *est* $\varphi\, x\, y_1\, y_2 \ldots y_n$, *une réduite de* $\Phi\, a\, y_1\, y_2 \ldots y_n$ *est* $\varphi\, a\, y_1\, y_2 \ldots y_n$, ($a$ étant un chiffre).

6. Une condition nécessaire de vérité.

6. Nous allons maintenant montrer que:

Théorème. *Quand une proposition est vraie dans Th. 2, ses réduites sont vraies dans Th. 1.*

Il suffira de montrer qu'une seule des réduites est vraie. Nous allons démontrer cela par récurrence.

a) Les réduites des propositions primitives, sont ces propositions elles-mêmes; or, elles sont vraies dans Th. 1.

b) Soit $\varphi\, x\, y_1 \ldots y_n$ une réduite de $\Phi\, x\, y_1 \ldots y_n$ $\Psi\, y_1 \ldots y_n$ une réduite de $(x) \,.\, \Phi\, x\, y_1 \ldots y_n$. Supposons la première vraie dans Th. 1, et montrons que la deuxième est vraie; s'il n'en était pas ainsi, il y aurait des chiffres $a_1\, a_2 \ldots a_n$ qui, mis à la place des y, rendraient Ψ faux; donc, on pourrait trouver un chiffre b tel que, en remplaçant $x\, y_1 \ldots y_n$ par $b\, a_1 \ldots a_n$, les réduites de $\Phi\, x\, y_1 \ldots y_n$ deviennent fausses (d'après 5.31), ce qui est impossible d'après 2.

c) Pour appliquer la deuxième règle de généralisation sous la forme du Ch. 3, 1.4 on remarque que les seuls individus dans la théorie actuellement considérée sont de la forme a, ou $y+a$, a étant un chiffre. Désignons cet individu par t.

Supposons vraies les réduites de $\Phi\, t\, y\, z_1\, z_2 \ldots z_n$; montrons qu'une réduite de $(\exists\, x) \,.\, \Phi\, x\, y\, z_1\, z_2 \ldots z_n$ est vraie. Soit $\varphi\, x\, y\, z_1, \ldots z_n$ une réduite de $\Phi\, x\, y\, z_1 \ldots y_n$; on en déduit la réduite de $(\exists\, x) \,.\, \Phi\, x\, y\, z_1 \ldots z_n$.

Or, $\varphi\, t\, y\, z_1 \ldots z_n$ qui est, d'après (5.32) et (5.33) la réduite de $\Phi\, t\, y\, z_1 \ldots z_n$ est vraie; donc, tout système de chiffres mis à la place de $y\, z_1 \ldots z_n$ rend vraie la réduite de $(\exists\, x) \,.\, \Phi\, x\, y\, z_1 \ldots z_n$ d'après (5.2)); donc, cette réduite est vraie, d'après (4.11).

d) On voit immédiatement que les réduites des identités de première espèce sont vraies, d'après Ch. 1, (3.1), et que les réduites restent vraies quand on utilise les règles de simplification et d'implication.

Nous avons donc démontré le théorème considéré.

6.1. On en déduit aisément la proposition suivante:

Théorème. *La théorie II n'est pas contradictoire.*

La réduite de $0 \neq 0$ est en effet cette proposition elle-même et est fausse dans la théorie 1 (voir Ch. 3, 2.1).

On voit de la même manière que *l'on peut ajouter dans les hypothèses de la Théorie II, toute proposition dont la réduite est vraie dans Th. 1.*

7. Un critère de vérité.

7. Nous avons donc trouvé un critère nécessaire pour la vérité d'une proposition dans Th. 2.

Ajoutons dans les axiomes de cette théorie la proposition:

$$x = 0 \,.\, v \,.\, (\exists y) \,.\, x = y + 1 \qquad (1)$$

qui signifie, au fond, qu'on peut toujours retrancher 1 d'un nombre différent de 0. La réduite de $(\exists y) \,.\, x = y + 1$ est $x \neq 0$; donc la réduite du nouvel axiome est vraie, et la théorie reste non contradictoire. Appelons cette théorie: Théorie 3 (en abrégé Th. 3).

Th. 3 diffère de Th. 2; en effet, remplaçons, dans Th. 2, la fonction descriptive $x + 1$ par $x + 1 + 1$; on voit que tout théorème de Th. 2, reste vrai dans Th. 2 (car les axiomes le restent) mais notre nouvel axiome devient faux (car on voit en y remplaçant x par $0 + 1$).

Nous allons démontrer que le *critère trouvé est suffisant dans Th. 3.*

7.1 Remarquons d'abord que dans la nouvelle théorie, les propositions telles que:

$$x = 0 \,.\, v \,.\, x = 1 \,.\, v \,.\, (\exists y) \,.\, x = y + 1 + 1$$

$$x = 0 \,.\, v \,.\, x = 1 \,.\, v \,.\, x = 1 + 1 \,.\, v \,.\, (\exists y) \,.\, x = y + 1 + 1 + 1$$

et, en général.

$$x = 0 \,.\, v \,.\, x = 1 \,.\, v \,.\, \ldots \,.\, v \,.\, x = a - 1 \,.\, v \,.\, (\exists y) \,.\, x = y + a \qquad (2)$$

(a étant un chiffre), sont vraies.

Nous démontrerons ceci par récurrence sur la chiffre a.

Appelons H le produit $x \neq 0 . x \neq 1 \ldots\ldots x \neq a-1$ et supposons démontré:

$$\vdash : H . \supset . (\exists y) . x = y + a \tag{3}$$

(qui n'est autre chose que (2)). Or, on a:

$$\vdash : x \neq a . x = y + a . \supset . y \neq 0$$

(Ceci n'est autre que:

$$\vdash : y = 0 . x = y + a . \supset . x = a,$$

qui résulte de 1.35); d'où, en tenant compte de (1) et d'une identité de première espèce:

$$\vdash : x \neq a . x = y + a . \supset . (\exists y) . y = z + 1 . x = y + a$$

d'où:

$$\vdash : x \neq a . x = y + a . \supset . (\exists z) . x = z + a + 1$$

comme on le déduit aisément de 1.35, et du Ch. 2 (3.2)).

Donc:

$$\vdash x \neq a : (\exists y) . x = y + a : \supset . (\exists x) . x = z + a + 1 \tag{4}$$

d'après la première règle de généralisation; (3) et (4) donnent, en vertu d'une identité de première espèce:

$$\vdash H . x \neq a . \supset . (\exists z) . x = z + a + 1$$

ce qui constitue le résultat cherché.

7.2. Pour démontrer notre affirmation, il suffit de prouver le théorème suivant:

Théorème. *Dans la nouvelle théorie, toute proposition est équivalente à chacune de ses réduites.*

On démontre ceci par récurrence sur la construction de la proposition.

Si le théorème est vrai pour P et Q, il l'est évidemment pour ∞P et $P \vee Q$.

Supposons-le vrai pour $\Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$ et démontrons-le pour $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$. Soit $\varphi x y_1 \ldots y_n$ une réduite de $\Phi x y_1 \ldots y_n$; supposons-la équivalente à Φ; on en déduit (Ch. 2, 4.2) $(\exists x) . \varphi x y_1 \ldots y_n . \equiv . (\exists x) . \Phi x y \ldots y_n$; donc les réduites de $(\exists x) . \varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$ et de $(\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$, sont les mêmes.

Pour en déduire la réduite de $(\exists x) . \Phi x y_1 \ldots y_n$, suivons la construction du § 3; mettons φ sous forme normale disjonctive; d'après l'identité aisée à démontrer:

$$\vdash : (\exists x) . A_1 x \vee A_2 x \vee \ldots \vee A_n x .$$
$$\equiv . (\exists x) . A_1 x . \vee . (\exists x) . A_2 x . \vee \ldots \vee (\exists x) . A_n x$$

il suffit de démontrer que si on a un produit $P x y_1 \ldots y_n$, de la forme canonique de 3.13, le nouveau produit déduit par les opérations de 5.11 est équivalent à $(\exists x) . P x y_1 \ldots y_n$.

Décomposons le produit P en deux autres, dont l'un est le produit des propositions simples contenant x; il devient: $Q x y_1 \ldots y_n . R y_1 \ldots y_n$; alors $(\exists x) . P x y_1 \ldots y_n$ devient équivalent à $(\exists x) . Q x y_1 \ldots y_n : R y_1 \ldots y_n$.

Reprenons les différents cas de 5.11.

a) Si x est de première espèce, Q est de forme $x = a$.

Si x est de troisième espèce, Q est de forme $x = y + a$.

La proposition cherchée résulte alors de:

$$\vdash : (\exists x) . x = z$$

(qui résulte de $\vdash . z = z$ (l'axiome 1 du § 5) par la deuxième règle de généralisation).

b) Si x est de deuxième espèce, dans les cas α) et β) traités en 5.11, le résultat est évident. Reste le cas γ). Dans ce cas, après des transformations qui laissent P équivalent à lui-même, Q prend la forme $y = x + a$; a étant différent de 0 on le remplace par:

$$y \neq 0 . y \neq 1 \ldots . y \neq a - 1 .$$

pour obtenir la réduite.

Il faut montrer que:

$$\vdash : (\exists x) . y = x + a . \equiv . y \neq 0 . y \neq 1 \ldots y \neq a - 1 .$$

Or ceci résulte de la formule (2) de 7.1, et de

$$\vdash . x + a \neq 0 \quad \vdash . x + a . \neq . 1 \quad \ldots\ldots \quad \vdash . x + a . \neq . a - 1$$

qui se démontrent immédiatement à partir de l'axiome 4 du § 5, qui est: $x + 1 \neq 0$.

7.2. Ces raisonnements nous montrent donc que nous avons dans Th. 3, un critère nécessaire et suffisant pour la vérité d'une proposition.

Etant donnée une proposition sans variables réelles, il lui correspond une réduite sans variables, donc qui est vraie, ou dont la négation est vraie d'après 2.1. Donc, en résumé (avec les définitions de Ch. 3 (2.2)):

Dans la Théorie 3, il y a à la fois non-contradiction, complète détermination et résolubilité.

Notre méthode nous donne un résultat supplémentaire: si

$$\vdash : (\exists x) . \Phi x y_1 y_2 \ldots y_n$$

et si $\varphi x y_1 \ldots y_n$ est la réduite de $\Phi x y_1 \ldots y_n$ on peut calculer les x rendant vrai $\Phi x y_1 \ldots y_n$ à partir de $y_1, y_2 \ldots y_n$; il suffit de reprendre la construction de la réduite de $(\exists x) . \Phi x y_1 \ldots y_n$, pour voir que, selon qu'un système de chiffres mis à la place de $y_1, y_2 \ldots y_n$ rend vrai l'un ou l'autre des produits de propositions simples, dont la disjonction constitue la réduite de $(\exists x) . \Phi x y_1 \ldots y_n$ et est par conséquent toujours vraie, on peut déterminer les chiffres qui, mis à la place de x, rendent vrai $\varphi x y_1 y_2 \ldots y_n$ (et cela par des opérations de forme suivante: prendre x égal à un chiffre donné; ou à un des chiffres mis à la place des y_i; ou à un de ces chiffres augmenté ou diminué d'un chiffre donné; ou bien prendre x différent de plusieurs de ces expressions).

Donc, dans la Théorie 3, on peut, en somme, construire les nombres dont on démontre l'existence.

8. L'axiome d'induction totale.

8.1. Nous pouvons maintenant étudier les propositions obtenues en remplaçant, dans la suivante:

$$\Phi 0 : (x) . \Phi x \supset \Phi x + 1 : \supset . \Phi y \qquad (1)$$

Φx par n'importe quelle fonction propositionnelle déterminée (pouvant contenir d'autres variables que x). L'ensemble de ces propositions constitue ce qu'on appelle ordinairement: „l'axiome d'induction totale".

On remarquera que cette désignation est vicieuse, dans notre terminologie; car la proposition (1) symbolise une infinité d'axiomes.

Ces propositions sont vraies; soit, en effet φx une réduite de Φx. Si la proposition (1) n'était pas vraie, il y aurait des chiffres rendant sa réduite fausse; remplaçons les variables de φx autres que x par ces chiffres; φx devient $\varphi' x$; soit a le chiffre par lequel il faut remplacer y; on voit que $\varphi' a$ serait faux, $\varphi' o$ vrai; et que les réduites de $(x) . \varphi' x \supset \varphi' x + 1$ seraient vraies (d'après la Remarque (5.3) au lieu de prendre la réduite de $(x) . \Phi x \supset \Phi x + 1$ et de remplacer les autres variables par des chiffres déterminés, on obtient le même résultat en remplaçant tout de suite ces variables par ces chiffres). Donc pour tout

chiffre b, comme on le déduit aisément de 5.2, 1°, $\varphi' b \supset \varphi' b + 1$ est vrai; en particulier

$$\begin{array}{ll} \varphi' 0 & \supset \varphi' 1 \\ \varphi' 1 & \supset \varphi' 2 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ \varphi' a - 1 & \supset \varphi' a \end{array}$$

sont vrais; or $\varphi' 0$ est vrai et $\varphi' a$ faux; d'où une contradiction.

8.2. Nous voyons donc que l'axiome d'induction totale est une conséquence des précédents; mais, réciproquement, on peut en déduire les propositions suivantes:

1°. $$\vdash . x \neq x + a .$$

En effet, on a $\vdash . 0 \neq 0 + a$ (d'après 1.32) et

$$\vdash : x \neq x + a . \supset . x + 1 \neq x + a + 1$$

car, d'après l'axiome 4 (§ 5)

$$\vdash : x = x + a . \equiv . x + 1 = x + a + 1 .$$

L'axiome d'induction totale en y remplaçant Φx par $x \neq x + a$ donne le résultat cherché.

2°. $$\vdash : x = 0 . v . (\exists y) . x = y + 1$$

car

$$\vdash . 0 = 0 . v . (\exists y) . x = y + 1$$

et

$$\vdash :. x = 0 . v . (\exists y) . x = y + 1 : \supset : x = 0 . v . (\exists y) . x + 1 = y + 1 .$$

(Ceci résulte uniquement de $\vdash . (\exists y) . x + 1 = y + 1$ qui est une conséquence de $x + 1 = x + 1$ et de la deuxième règle de généralisation).

8.3. Nous voyons donc que la Théorie 3 peut être fondée sur les axiomes suivants:

$$x = x$$
$$x = y . \supset . y = x$$
$$x = y . y = z . \supset . x = z$$
$$x + 1 = y + 1 . \equiv . x = y$$
$$x + 1 \neq 0$$

et les axiomes déduits de:

$$\Phi o : (x) . \Phi x \supset \Phi x + 1 : \supset . \Phi y \qquad (1)$$

en remplaçant Φx par des fonctions propositionnelles quelconques.

Ce sont à peu près les axiomes de Peano pour l'Arithmétique.

Remarquons que nous aurions pu fonder la Théorie 1 sur les axiomes déduits des 5 premiers (de 1.2) par substitution, et sur la règle:

Si $\vdash \Phi 0$ *et si* $\vdash . (x) . \Phi x \supset \Phi x + 1$, *on déduit:* $\vdash \Phi y$ les démonstrations restaient les mêmes, mais nous n'aurions pas mis en évidence ce fait remarquable que, dans la Théorie 3, (et, on le voit aisément, la Théorie 1), „l'axiome d'induction totale", est une conséquence d'un certain nombre de ses cas particuliers.

8.4. Neumann, dans le mémoire cité plus haut (§ 5), a démontré que, quand on avait démontré la non-contradiction des cinq premiers des axiomes ci-dessus, on en déduisait immédiatement la non-contradiction de ceux déduits de la proposition (1). La méthode employée est, au fond, la suivante:

Dans une démonstration déterminée, on n'emploie jamais la proposition (1) que pour un nombre fini de fonctions Φx, soient $\Phi_1 x, \Phi_2, \ldots \Phi_n x$. On constate immédiatement que le produit logique des propositions $(y) :. \Phi_i 0 : (x) . \Phi_i x \supset \Phi_i x + 1 : \supset \Phi_i y$ satisfait aux conditions du Théorème du Ch. 3, 3.31 vu que:

$$\vdash :. \Phi_i 0 : (x) . \Phi_i x \supset \Phi_i x + 1 : \supset . \Phi_i 0$$

$$\vdash :: \Phi_i 0 : (x) . \Phi_i x \supset \Phi_i x + 1 : \supset . \Phi_i y . : \supset :. \Phi_i 0 :$$
$$(x) . \Phi_i x \supset \Phi_i x + 1 : \supset . \Phi_i y + 1 .$$

(Ces propositions sont des identités aisées à démontrer).

8.5. Pour aboutir à une théorie équivalente à l'arithmétique classique, il faudrait encore introduire les définitions par récurrence. Pour le faire, nous nous permettrons d'adjoindre un certain nombre de fois à la théorie des fonctions descriptives nouvelles à un ou plusieurs arguments, avec, à chaque fois, des axiomes de forme suivante: Soit $A x y_1 y_2 \ldots y_n$ la fonction descriptive introduite; supposons que dans la théorie à laquelle on ajoute $A x y_1 y_2 \ldots y_n$ on ait:

$$\vdash :. (\exists z) (x) : x = z . \equiv . \Phi x y_1 \ldots y_n$$

$$\vdash :. (\exists z) (x) : x = x . \equiv . \Psi x' x y_1 \ldots y_n$$

avec des fonctions propositionnelles déterminées Φ et Ψ; on ajoute alors les axiomes:

$$\vdash . \Phi [A 0 y_1 y_2 \ldots y_n, y_1, y_2, \ldots y_n]$$

$$\vdash . \Psi [A x y_1 \ldots y_n, A x + 1, y_1 \ldots y_n, y_1, y_2 \ldots y_n]$$

$$\vdash : x = x' . y_1 = y_1' . y_2 = y_2' \ldots . y_n = y_n' . \supset$$
$$. A x y_1 y_2 \ldots y_n = A x' y_1' y_2' \ldots y_n' .$$

A chacune de ces extensions, s'introduisent de nouveaux axiomes, qui vont résulter de l'axiome d'induction totale, quand on y utilise des fonctions propositionnelles Φx contenant les nouvelles fonctions descriptives employées.

La non-contradiction de cette nouvelle extension n'a pas encore été démontrée (Hilbert a indiqué qu'il en possédait une démonstration, mais ne l'a jamais publiée). Nous ne la démontrerons au Chapitre suivant que sous certaines restrictions que nous y indiquerons.

8.6. La méthode employée dans ce chapitre est susceptible d'autres applications; elle fournit toujours en même temps que la non-contradiction de la théorie étudiée, sa résolubilité (Ch. 3, 2.1). Il nous semble que son principe doit être applicable dans toutes les théories, où l'on a une méthode pour reconnaître la vérité des propositions (il faut alors bien faire attention au fait que ce n'est qu'à la condition que la théorie soit non-contradictoire, que cette méthode donnera sa résolubilité). Le fait que nous ayons eu affaire à des hypothèses sans variables apparentes est secondaire (on peut toujours supposer qu'il en est ainsi; voir le Ch. 5); par contre l'utilisation d'individus déterminés, ici les chiffres, pour effectuer les démonstrations, est essentielle, mais on pourra toujours fabriquer de semblables individus dans toute théorie mathématique, en introduisant s'il le faut des constantes, et en utilisant les fonctions descriptives.

Nous avons vérifié que cette méthode permettait de démontrer la non-contradiction d'une théorie un peu plus générale que celle considérée dans ce chapitre, avec deux fonctions propositionnelles $x = y$ et $x < y$, et deux fonctions descriptives $x + 1$ et $x - 1$; et les axiomes qu'il est aisé d'imaginer pour aboutir à une théorie traduisant l'arithmétique des nombres entiers positifs et négatifs. Il nous paraît probable qu'elle permettrait également d'arriver à la non-contradiction de la théorie des corps réels et „réellement fermés" [1]); mais les méthodes du Chapitre suivant nous y conduiraient plus aisément.

---

[1]) „reel abgeschlossen"; cf. Artin und Schreier, Abhandlungen der Math. Sem. der Hamb. Univ., Band. 5.

CHAPITRE V.

Les propriétés des propositions vraies.

1. Étude approfondie des règles de passage.

1. Dans tout ce chapitre, nous nous placerons dans la théorie du Ch. 3, 1, 4, obtenue à partir de celle du Ch. 2 en ajoutant les fonctions descriptives; nous avons indiqué à cet endroit que presque tous les résultats du Chapitre 2 restaient vrais; nous supposerons seulement pour simplifier (cela n'aura rien d'essentiel) que nous n'avons que des variables d'un seul type.

Nous voulons étudier dans ce paragraphe les différentes formes que peut prendre une proposition quand on lui applique les règles de passage; nous aboutirons à quelques résultats qui ne seront pas tous nécessaires dans la suite; mais ils nous donnerons l'occasion d'introduire des notions que nous utiliserons au § 2.

Nous rappelons le résultat démontré plus haut (au Ch. 2, 3.101), d'après lequel les règles de passages permettaient de trouver une certaine proposition équivalente à la première que nous avons appelée *liée* à la première. Nous renvoyons au même endroit pour la définition des propositions de forme normale.

Pour éviter les ambiguités, nous supposerons jusqu'à la fin de ce chapitre, que des variables apparentes différentes sont désignées par des lettres différentes.

1.1. Nous appellerons dans ce qui suit, un *type* une suite de symboles de variables apparentes; deux types seront dits *semblables* s'ils ne diffèrent que par les lettres qui figurent des variables: c'est ainsi que:

$$+x_1 - x_2 + x_3$$

et

$$+y_1 - y_2 + y_3$$

sont des types semblables.

1.11. Nous appellerons *type d'une proposition*, le type formé par les symboles de variables apparentes situés en avant de la proposition normale liée à celle-ci.

Nous allons, d'une manière plus précise, étudier dans ce qui suit, les types des propositions de forme normale, que l'on peut déduire d'une proposition par les règles de passage. Ces types seront dits les *types attachés à la proposition*.

Dire que $(\pm x_1, \pm x_2 \ldots . \pm x_n)$ est un type attaché à une proposition P, revient à dire, comme on voit, qu'on peut, grâce aux règles de passage, amener la proposition P sous la forme: $(\pm x_1) . P_1 x_1$ puis $P_1 x_2$ sous la forme $(\pm x_2) . P_2 x_2$ et ainsi de suite; en quelque sorte, cela revient à dire qu'on peut extraire successivement de la proposition les symboles:

$$(\pm x_1), (\pm x_2), \ldots, (\pm x_n).$$

1.12. Rappelons la remarque suivante; (démontrée au Ch. 2, 3. 12).

Lemme 1. *Il existe des types attachés à la proposition* $\Phi((\pm x) A x)$, *(Φp étant une fonction propositionnelle de première espèce en p et pouvant d'ailleurs contenir d'autres propositions éléments), tels que x soit la variable située la plus à gauche.*

1.2. Nous allons maintenant utiliser les règles de passage pour réduire au maximum l'étendue de x. Pour réduire successivement cette étendue, on se servira des deux faits suivants, qui résultent des règles de passage: Si l'étendue de x est $\sim \Phi x$, on peut la réduire à n'être plus que Φx; si l'étendue de x est $\Phi x \vee p$ ou $p \vee \Phi x$, on peut la réduire à n'être plus que Φx (p ne contenant pas x). On arrivera ainsi à obtenir une forme de la proposition où l'étendue de x sera une proposition ou bien élément, ou bien de forme $\Phi x \vee \Psi x$ (Φx et Ψx contenant x effectivement).

Partons alors d'une proposition déterminée P; prenons le symbole de variable apparente situé le plus à droite et réduisons le plus possible, en opérant comme ci-dessus, son étendue: on a ainsi son *étendue minimum*. Ceci fait, recommençons la même opération sur le deuxième symbole de variable apparente à partir de la droite; nous recommencerons successivement jusqu'à ce que nous ayons pris le symbole de variable apparente situé le plus à gauche.

La proposition a alors pris ce que nous appellerons sa *forme canonique*, caractérisée par le fait que les étendues de toutes les variables sont minima.

Par exemple:

$$(x)(\exists y)(z) : \Phi x . \Psi x y . \vee \Phi z$$

a pour forme canonique:

$$(x) . \Phi x . (\exists y) \Psi x y . \vee (z) \Phi z$$

l'étendue minimum de z est Φz; celle de y est Ψxy; celle de x est $\Phi xv . (\exists y) \Psi xy$.

Remarquons qu'il suffit d'envisager chaque règle de passage pour se convaincre que la forme canonique de deux propositions dont l'une résulte de l'autre par les règles de passage, est la même.

1.3. Il est bien évident que si l'on considère les étendues de deux symboles différents, ou bien ces étendues n'ont aucun signe en commun, ou bien une d'entre elles est comprise dans l'autre. Nous appellerons *variables dominantes* d'une proposition celles dont l'étendue du symbole n'est comprise à l'intérieur de l'étendue du symbole d'aucune autre.

Par exemple, dans la proposition ci-dessus, x et z sont dominantes.

Lemme 2. *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les variables dominantes d'une proposition, $\Phi_1 x_1, \Phi_2 x_2, \ldots, \Phi_n x_n$ leurs étendues minimum respectives, une proposition mise sous forme canonique peut s'écrire: $A[(\pm x_1) \Phi_1 x_1, (\pm x_2) \Phi_2 x_2, \ldots, (\pm x_n) \Phi_n x_n]$, A étant une fonction propositionnelle de première espèce.*

On remarquera d'ailleurs que si ce lemme est vrai, on pourra donner aux $\Phi_i x_i$ une forme semblable, et ainsi de suite.

Ce lemme résulte immédiatement du fait que, en dehors des étendues des variables dominantes, une proposition mise sous forme canonique ne comprend que des signes ∞ et v. Les étendues des x_i n'empiétant pas, comme on vient de la voir, la proposition est une fonction propositionnelle de ces étendues et ce ne peut pas en être une fonction propositionnelle de deuxième espèce d'après ce qui précède.

1.4. Nous pouvons alors définir ce que nous appellerons le *schème* d'une proposition. Ce sera une figure composée de lettres, de signes et d'accolades, que nous définirons comme suit par récurrence sur le nombre de variables apparentes. D'abord le schème d'une proposition élémentaire (Ch. 2, 1.1) sera considéré comme inexistant.

Puis le schème de la proposition P (qu'on peut mettre, d'après ce qu'on vient de voir, sous la forme $A[(\pm x_1) \Phi_1 x_1, \ldots, (\pm x_n) \Phi_n x_n]$ les x_i étant des variables dominantes dans les $\Phi_i x_i$ correspondants) s'obtiendra à partir des schèmes des propositions $\Phi_1 x_1, \Phi_2 x_2, \ldots, \Phi_n x_n$ de la manière suivante: les schèmes de

ces propositions étant des figures $S_1, S_2, \ldots, S_n$, le schème de P sera:

$$\begin{array}{l} \pm x_1 \{ S_1 \\ \pm x_2 \{ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \pm x_n \{ S_n . \end{array}$$

L'ordre des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera d'ailleurs considéré comme indifférent; ces variables seront dites les variables *dominantes* du schème.

Par exemple, le schème de la proposition déjà considérée en 1.2 est:

$$\begin{array}{l} + x \{ - y \\ \quad\;\; + z \end{array}$$

celui de:

$$(\exists x) : (y) . \Phi x y . v . (z) . \Phi x z : v . (x' y') . \Phi x' y'$$

sera:

$$\begin{array}{l} - x \left\{ \begin{array}{l} + y \\ + z \end{array} \right. \\ + x' \{ + y' \end{array}$$

Nous conviendrons de supprimer l'accolade, quand elle séparera deux variables consécutives sur une même ligne, comme dans le premier schème, que nous écrirons:

$$\begin{array}{l} + x - y \\ \quad\;\; + z \end{array}$$

Nous voyons donc que le schème d'une proposition est une figure composée de lettres précédées de signes $+$ ou $-$, qui seront les variables apparentes de cette proposition, le signe les accompagnant indiquant si elles sont générales ou restreintes (Ch. 2, 3.101), chaque lettre étant suivie d'une autre à sa droite ou étant suivie de plusieurs autres réunies par une accolade. Dans ce qui suivra, une semblable figure sera toujours appelée un schème [1]).

Nous appellerons ligne du schème une suite de lettres du schème accompagnées de leur signe, telles que chacune soit, dans le schème, à la droite de la précédente ou soit comprise dans l'accolade de la précédente. Toute ligne du schème peut donc

[1]) Il est indiqué de convenir que deux lettres d'un même schème sont toujours différentes.

être considérée comme un type, qui sera dit le *„type" de cette ligne* (voir 1.1).

Ainsi, les lignes du schème de la proposition considérée ci-dessus sont: $-x+y, -x+z, +x'+y'$.

En particulier, un type est un schème d'une seule ligne.

1.41 On voit immédiatement d'après le lemme 2, et la définition de schème, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable x soit sur une même ligne du schème que y, et à sa droite est que l'étendue minimum de x soit comprise dans celle de y.

Nous dirons alors que la variable y *„domine"* la variable x.

Nous dirons de manière analogue qu'une variable y est *„supérieure"* à une variable x, si l'étendue de x est comprise dans celle de y (donc le fait que x domine y est équivalent à celui que x est supérieure à y, dans le cas où la proposition a la forme canonique (1.2).

On voit sans peine que, si x domine y, y ne peut être supérieure à x.

1.42. Nous appellerons *type déduit du schème* tout type dont les variables sont les lettres du schème et tel que ces lettres soient situées dans le même ordre dans ce type et dans une ligne quelconque du schème. C'est ainsi que, dans l'exemple considéré ci-dessus, on obtient tout les types déduits du schème en écrivant sur une même ligne les cinq signes $-x, +y, +z, +x', +y'$ de manière que x' soit à gauche de y', et x à gauche de y et de z (il y a vingt combinaisons possibles).

On peut définir les types déduits du schème par le fait que si une variable x domine une autre variable y, x est à gauche de y dans ce type.

1.43. Avant de passer à la démonstration du théorème final, remarquons que le schème de la proposition obtenue en enlevant un symbole de variable apparente dominante, se déduit du schème primitif en enlevant cette variable dans le schème (cela résulte sans difficulté de la définition du schème par récurrence et du Lemme 2).

1.5. **Théorème.** *Les types attachés à une proposition sont les mêmes que les types déduits du schème de cette proposition.*

Ce théorème, qui résout le problème posé au début du paragraphe, se démontre comme suit:

1⁰. *Tout type déduit du schème est un type attaché à la proposition.*

Pour obtenir un type déduit du schème, on peut en effet enlever une variable dominante du schème; du nouveau schème ainsi obtenu, on enlève une variable dominante dans ce nouveau schème qu'on met à droite de la précédente; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé toute les variables. Il résulte alors de la remarque 1.43 et du Lemme 1 (1.12) que l'on peut enlever dans cet ordre toutes les variables de la proposition considérée; et donc que cet ordre donne un type attaché à la proposition.

2⁰. *Tout type attaché à la proposition est un type déduit du schème.*

Il suffit pour le voir de remarquer que si dans une proposition x est supérieur à y, alors y ne peut dominer x, et de se rappeler la propriété caractéristique des types déduits du schème (1.42).

2. La propriété A.

2. Nous allons étudier, dans ce qui suit, les propriétés suffisantes les plus générales pour la vérité d'une proposition; nous verrons, dans les paragraphes suivants, que ces propriétés sont aussi nécessaires.

Supposons d'abord, pour simplifier, *qu'il n'y a pas de fonctions descriptives dans les propositions étudiées.*

2.1. Commençons par définir ce que nous appellerons une *identité normale:* soit une proposition P qu'on a mise, grâce aux règles de passage, sous la forme normale (Ch. 2, 3.1).

$$(\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_n) \,.\, M\, x_1\, x_2 \ldots x_n.$$

Considérons la matrice M de cette proposition, et remplaçons-y chaque variable restreinte, soit par une variable réelle de P (on peut même supposer que cette variable ne figure pas effectivement dans P; on la dira alors fictive, comme en 1.2), soit par une variable générale supérieure (1.41) dans la forme normale de la proposition, c'est-à-dire dont le symbole est situé à gauche du sien dans le type de la proposition mise sous cette forme.

Nous dirons que la proposition est une *identité normale* si la proposition élémentaire II ainsi obtenue est une identité de

première espèce en ses propositions éléments. Nous disons que cette identité est *associée* à la proposition, et que le type $(\pm x_1 \pm x_2 \ldots \pm x_n)$ est un *type normal.*

Par exemple:

$$(x)\,\Phi\,x\,v\,(\exists\,y) \backsim \Phi\,y$$

est normale, car on peut l'écrire:

$$(x)\,(\exists\,y)\,.\,\Phi\,x\,v \backsim \Phi\,y$$

et en remplaçant y par x, on a $\Phi\,y\,v \backsim \Phi\,y$ qui est une identité.

2.11. On voit que pour passer d'une proposition P à l'identité associée II, il faut répéter plusieurs fois l'une ou l'autre des opérations suivantes:

1⁰. Enlever un symbole de variable générale, de manière à rendre cette variable réelle.

2⁰. Enlever une symbole de variable restreinte, et remplacer cette variable restreinte par une variable réelle, c'est-à-dire, passer d'une proposition de forme: $(\exists\,x)\,.\,\Phi\,x\,y$ à la proposition $\Phi\,y\,y$.

Dans l'exemple ci-dessus, on remplacerait la proposition successivement par:

$$(\exists\,y)\,.\,\Phi\,x\,v \backsim \Phi\,y$$

et

$$\Phi\,x\,v \backsim \Phi\,x\,.$$

On voit aisément qu'une identité normale est toujours vraie; car dans chacune des deux opérations ci-dessus indiquées, la vérité de la deuxième proposition entraîne celle de la première, grâce aux règles de généralisation.

On peut toujours effectivement reconnaître si une proposition est normale (on prend tous les types attachés à cette proposition, et on essaie de toutes les manières possibles de remplacer les variables restreintes par des variables générales situées à leur gauche; le critère du Ch. 1, 5.21 permet alors de reconnaître si une de ces propositions est une identité: on n'a qu'un nombre fini d'essais à faire).

2.12. D'une proposition normale, on déduit d'autres propositions normales (équivalentes à la première, d'après Ch. 2, 4.6), en permutant dans le type normal deux symboles consécutifs de variables restreintes, ou de variables générales; on déduit d'autres propositions normales (impliquées par la première) en reculant dans le type normal, un symbole de variable restreinte vers la droite; ou de variable générale vers la gauche.

2.13. Un exemple général d'identité normale est fourni par les identités de première espèce n'ayant qu'une occurrence de chaque signe, quand on y remplace les propositions éléments par des propositions non élémentaires: il suffit, pour le voir, de se reporter à la démonstration de la vérité de ces propositions. (Ch. 2, § 4).

2.2. Nous emploierons désormais la notation suivante: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant une proposition élémentaire (en général la matrice d'une proposition), une substitution sur les x, (c'est-à-dire le fait de remplacer $x_1, x_2 \ldots x_n$ par d'autres lettres $y_1, y_2 \ldots y_n$) sera désigné par une lettre telle que S affectée ou non d'indices; et le résultat de cette substitution, à savoir: $M(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par $M(S)$.

Considérons alors un schème tel que chacune de ses lignes soit d'un type semblable (1.1) à un type attaché à P. Pour chaque ligne du schème, faisons correspondre la $k^{\text{ème}}$ lettre de la ligne, à la $k^{\text{ème}}$ lettre du type attaché à P. Le remplacement des lettres figurant les variables apparentes de P par les lettres correspondantes d'une ligne du schème définissent une substitution; il y a autant de substitutions que de lignes. Appelons $S_1, S_2, \ldots, S_p$ ces substitutions, M étant la matrice de P, T un type déduit du schème la proposition.

$$(T) \,.\, M(S_1) \vee M(S_2) \vee \ldots \vee M(S_p)$$

est dite une *proposition dérivée* de P.

On voit sans difficulté que cette proposition ne dépend pas du type particulier T qu'on a choisi. (Ceci est d'ailleurs sans importance pour la suite).

Le schème considéré sera dit *„engendrer"* la proposition dérivée, et cette proposition sera dite *„dériver"* de P par ce schème.

Par exemple, soit la proposition:

$$(\exists x)(y) M x y$$

$M x y$ étant élémentaire; soit le schème:

$$-x \begin{cases} +y \\ +y \end{cases} .$$

On en déduit une proposition dérivée:

$$(-x)(+yz) M x y \vee M x z$$

On voit bien aisément que, pour passer d'une proposition à une proposition dérivée de celle-là, il faut effectuer plusieurs

fois l'opération suivante:

$$(\pm x_1 \ldots \pm x_n) . M x_1 \ldots x_n$$

étant une forme normale de la proposition P, remplacer une proposition dérivée de forme:

$$(\pm x_1 \ldots \pm x_r) : A x_1 \ldots x_r . v . (x_{r+1} \ldots x_n) . M x_1 \ldots\ldots x_r x_{r+1} \ldots x_n$$

par une autre de forme:

$$(\pm x_1 \ldots \pm x_r) : A x_1 \ldots x_r . v . (x_{r+1} \ldots x_n) . M x_1 \ldots x_r x_{r+1} \ldots x_n . v . \\ (y_{r+1} \ldots y_n) . M x_1 \ldots x_r y_{r+1} \ldots y_n .$$

Cette opération permet en effet de passer d'une proposition dérivée par un schème, à une proposition dérivée par un schème ayant une ligne de plus.

On en déduit qu'une proposition est équivalente à toute proposition qui en est dérivée (d'après l'identité $P v P . \equiv P$ et Ch. 2, 6.1).

2.3. Supposons alors que l'on ait trouvé une proposition P' dérivée de P, qui soit une identité normale, et en outre (cette hypothèse n'étant pas essentielle) telle que l'un de ses types normaux (1.1) soit déduit (1.42) du schème engendrant P'; soit Π son identité associée. On dira alors P a la *propriété* A; que Π est l'identité *associée* à P; que le schème engendrant P' est associé à P; et que le type normal de P' considéré est *associé* à P.

On voit que toute proposition ayant la propriété A est une identité.

En particulier, une identité normale a la propriété A (le schème associé n'est autre que le type normal).

Remplaçons, dans le schème, chaque variable restreinte par la variable générale ou réelle par laquelle elle est remplacée dans Π; les lignes du schème déterminent alors, comme en 2.2, d'autres substitutions: $T_1, T_2, \ldots, T_p$; M étant la matrice de P, on voit que Π n'est autre que: $M(T_1) v M(T_2) v \ldots v M(T_p)$.

On remarquera que la propriété A n'est pas une propriété au sens de l'introduction, car on ne peut reconnaître immédiatement si une proposition donnée la possède; seulement, nous dirons qu'une proposition possède la propriété A, si l'on peut effectivement montrer qu'elle satisfait à notre définition. Il en sera de même des propriétés B et C, que nous définirons plus loin.

2.31. En résumé, pour montrer qu'une proposition a la propriété A, il faut d'abord construire le schème associé; puis en déduire le type associé; et enfin indiquer par quelles variables générales il faut remplacer les restreintes pour avoir l'identité associée (cela fournira ce que nous appellerons les *„égalités associées"* entre variables restreintes et variables générales).

Par exemple, soit une proposition P, pouvant, grâce aux règles de passage, prendre les deux formes:

$$(y)(\exists x)(z)(\exists t)\, M x y z t$$

$$(z)(\exists t)(y)(\exists x)\, M x y z t\,.$$

Supposons que:

$$M z'' y z y' \vee M y' y z' z'' \vee M y' y'' z' z''$$

soit une identité. Alors, la proposition a la propriété A, avec, comme on le vérifie aisément, le schème associé:

$$\begin{array}{l} +z\ -t \quad +y\ -x \\ +y'-x' \begin{cases} +z'\ -t' \\ +z''-t'' \end{cases} \end{array}$$

Le type associé est:

$$(+y'+z-t+y-x'+z'+z''-x-t'-t'')$$

avec les égalités associées:

$$t=y' \qquad x'=y' \qquad x=z'' \qquad t'=z'' \qquad t''=z''.$$

La proposition dérivée de P, qui est une identité normale, est:

$$(+z'+y'-t+y-x'+z'+z''-x+t'-t'')\,.$$
$$.\,M x y z t \vee M x' y' z' t' \vee M x' y' z'' t''.$$

2.32. **Remarques 1⁰.** On peut toujours remplacer un type associé par un autre, qui n'en diffère que parce qu'une variable générale donnée est avancée vers la gauche (car ceci n'empêchera pas de conserver les mêmes égalités associées: cette remarque est l'analogue de 2.12).

2.33. 2⁰. Si une proposition a la propriété A, on peut supposer que le schème associé n'a que des accolades contenant des variables restreintes.

Car si un morceau isolé de schème est:

$$\pm x \begin{cases} +y \\ +y' \end{cases}$$

on peut remplacer ce morceau par $\pm x + y$.

En effet, d'après la remarque 2.32, d'un type associé à P, on en déduira un autre où y et y' se suivent; d'où un type associé et déduit du second schème, en supprimant y' dans le premier type car ceci revient, dans l'identité associée, à remplacer y' par y).

2.34. 3°. On ne peut pas donner de procédé fixe permettant de reconnaître si une proposition a la propriété A, car on ne sait pas, en général, quel est le schème associé. Il y a pourtant un cas où il n'en est pas ainsi, c'est celui oú la matrice de la proposition est une disjonction de propositions éléments et de négations de propositions éléments.

Avec les mêmes notations que plus haut (en 1.2), soit:

$$M(\Sigma_1) . v \ldots . v . M(\Sigma_p)$$

l'identité associée. Il résulte de Ch. 1, 5.22, que pour deux indices convenables, i et j, $M(\Sigma_i) v M(\Sigma_j)$ est aussi une identité. Ces deux substitutions correspondent à deux lignes du schème, qui vont former un nouveau schème: si ces lignes sont:

$$x_1 \ldots x_\alpha y_1 \ldots y_\beta \text{ et } x_1 \ldots x_\alpha z_1 \ldots z_\beta$$

le nouveau schème sera:

$$x_1 \ldots x_\alpha \begin{cases} y_1 \ldots y_\beta \\ z_1 \ldots z_\beta \end{cases}$$

et on voit immédiatement que ce schème est associé à P. Or, il n'y a qu'un nombre fini de schèmes possibles de cette sorte; donc, il suffit d'un nombre fini et déterminé de vérifications (on peut calculer ce nombre bien aisément dès qu'on connait l'énoncé de la proposition) pour savoir si la proposition a la propriété A.

Pour faire effectivement cette vérification, il peut être utile de savoir, que le type des lignes du schème peut être supposé un type quelconque déterminé attaché à la proposition (voir Ch. 5, 5.1).

2.4. Supposons maintenant que les propositions étudiées contiennent des fonctions descriptives. Nous donnerons des

notions „d'identité normale" et de „propriété A", les mêmes définitions que ci-dessus, en les modifiant seulement par le fait que, dans une identité normale, nous pourrons remplacer une variable restreinte, soit par une variable générale supérieure (ou fictive) comme précédemment, soit par une *fonction descriptive de variables supérieures (ou fictives).*

Les égalités entre ces variables et ces fonctions seront toujours dites les égalités associées (2.21).

Essayons de vérifier si une proposition P, supposée désormais de forme normale (Ch. 2, 3.1), est une identité normale. Considérons le type de P (1.11). Essayons donc de vérifier si c'est le type normal. Nous remplaçons pour cela chaque variable restreinte par une variable générale supérieure ou une variable réelle ou fictive, ou une fonction de telles variables. La proposition II ainsi obtenue doit pouvoir être une identité de première espèce (pour une au moins des formes normales de P).

Dans ce cas, considérons tous les individus (variables ou fonctions descriptives) qui sont dans P arguments d'une fonction propositionnelle; dans II, où l'on a effectué les égalités associées, certains de ces arguments deviennent identiques; (donc, toute proposition déduite de P en faisant d'autres égalités, et telle que les mêmes arguments soient identiques, est aussi une identité de première espèce). Il nous faut donc chercher les égalités d'arguments qui transforment P en une identité de première espèce; il y en a un nombre fini et déterminé. On cherche alors à fabriquer des égalités qui les engendrent, égalant des variables restreintes à des variables générales, réelles ou fictives, ou à des fonctions de telles variables (il ne restera alors plus qu'à voir, ce qui est immédiat, si ces égalités peuvent être considérées comme des égalités associées).

Pour y arriver, il suffit, pour chaque système d'égalités d'arguments, de procéder par récurrence en utilisant l'un ou l'autre des deux procédés suivants, qui simplifient le système d'égalités à satisfaire.

1°. Si une des égalités à satisfaire égale une variable restreinte x à un autre individu; ou bien cet individu contient x, et on ne peut y satisfaire; ou bien il ne contient pas x; cette égalité sera alors une des égalités normales cherchées; et on remplacera x par cette fonction dans les autres égalités à satisfaire.

2⁰. Si une des égalités à satisfaire égale une variable générale à un autre individu, qui ne soit pas une variable restreinte, il est impossible d'y satisfaire.

3⁰. Si une des égalités à satisfaire égale $f_1(\varphi_2, \varphi_2 \ldots \varphi_n)$ à $f_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)$, ou bien les fonctions élémentaires f_1 et f_2 sont différentes, auquel cas il est impossible d'y satisfaire; ou bien les fonctions f_1 et f_2 sont les mêmes; auquel cas on remplace l'égalité par celles obtenues en égalant φ_i à ψ_i.

Au bout d'un nombre fini et déterminé d'opérations de ce genre, on arrivera donc à vérifier si une proposition est normale (ou donc si elle possède la propriété A pour un schème associé donné).

3. Les propriétés B et C.

3.1. Nous considérerons dans ce qui suit des collections déterminées de lettres déterminées, qui seront dites des *champs;* ces lettres seront dites les *éléments* des champs.

Nous considérerons en même temps des fonctions, qui pourront être, soit des fonctions descriptives, soit de nouvelles fonctions, que nous appellerons des *fonctions d'indice* (et qui joueront un rôle analogue [1])). D'une manière générale, nous aurons un certain nombre de symboles:

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots x_{n_i}) \qquad i=1,2,\ldots,p$$

qui seront dits les *fonctions élémentaires* (les x_i seront leurs arguments), et nous formerons de nouvelles fonctions à partir de celles-là par le processus suivant: $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ étant des fonctions, $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ une fonction élémentaire, $f(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n)$ sera une nouvelle fonction.

Définissons maintenant la *hauteur des fonctions:* nous dirons que les fonctions élémentaires sont de hauteur 1; et nous définirons cette hauteur dans le cas général en disant que c'est un chiffre tel que la fonction $f(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n)$ ait une hauteur supérieure d'une unité à la hauteur de celle des fonctions φ_i qui a la plus grande hauteur. Nous dirons aussi que la hauteur d'un élément du champ est 0.

---

[1]) On remarquera l'étroite relation qui existe entre les fonctions d'indice et les fonctions logiques de Hilbert (voir Hilbert, Abh. der Math. Sem. der Hamb. Univ., 1928).

La hauteur d'une proposition sera par définition, la hauteur des fonctions descriptives de hauteur maximum qui y figurent.

A certains systèmes formés d'une fonction élémentaire $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ et d'un certain nombre de lettres du champ $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ en nombre égal à celui des arguments de la fonction, et prises dans un ordre déterminé, nous ferons correspondre un autre élément du champ, qui sera dit la *valeur* de la fonction pour ces valeurs des arguments, ou la valeur de $f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$. On définit la valeur des fonctions non élémentaires, quand elle existe, à partir de celle des fonctions élémentaires, en disant que, si pour les valeurs considérées des arguments de $f(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ont respectivement pour valeurs $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$, $f(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$ a la même valeur que $f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$.

Nous considérerons aussi des fonctions de 0 argument; nous y ferons correspondre un élément fixe du champ, leur valeur. Ces fonctions seront analogues à des constantes (Ch. 3, 1.12).

Les fonctions qui auront une valeur dans le champ seront dites *attachées* au champ.

3.11. Souvent, dans ce qui suit, nous aurons à *„égaler"* deux éléments d'un champ. Définissons cette opération.

Partons d'un champ C, dont les éléments sont $a_1, a_2, \dots, a_{n_i}$ égaler a_α à a_β dans ce champ C consiste à le remplacer par un autre champ Γ avec les mêmes fonctions attachées, de la manière suivante: $b_1, b_2, \dots, b_p$ étant les éléments de Γ, à tout élément de C correspond un élément et un seul de Γ; à tout élément de Γ, un ou plusieurs éléments de C; tous les a_i correspondant à un b_j sont les valeurs d'individus tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre en remplaçant en un ou plusieurs endroits de leur expression à partir des fonctions élémentaires attachées au champ, a_α par a_β ou a_α par a_β; et réciproquement deux tels a_i correspondent au même b_j. C'est ainsi que a_α et a_β correspondent à un même b_i; que si $f(x)$ est une fonction attachée au champ, $f(a_\alpha)$ et $f(a_\beta)$ correspondent au même b_i.

$f(x_1 x_2 \dots x_n)$ étant une fonction attachée au champ C, la valeur de $f(b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n})$ sera l'élément de Γ correspondant à $f(a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n})$, a_{j_s} correspondant à b_{j_s}. On voit immédiatement que cette définition fournit cette valeur univoquement.

Elle permet de prendre pour la lettre b_i la lettre représentant un des éléments correspondants de C, par exemple celui de plus petit indice; Γ devient alors une partie de C; et les valeurs des fonctions attachées sont les mêmes dans les deux champs. C'est ce que nous ferons désormais.

3.2. Nous considérons désormais une proposition P, dans laquelle pourront figurer des fonctions descriptives (et même des variables de différents types, si l'on veut: on voit aisément que rien d'essentiel n'est changé dans ce qui suivra; nous supposerons toujours, pour simplifier les notations, qu'il n'y a qu'un type). Nous nous ramènerons toujours au cas où P n'a pas de variables réelles; (si P avait les variables réelles $x_1, x_2, \ldots x_n$, nous la remplacerions par: $(x_1 x_2 \ldots x_n)$. P; voir Ch. 2, 4.7; nous verrons en 3.221 que l'ordre dans lequel on prend $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est indifférent pour les considérations qui suivent).

Faisons d'abord correspondre à toute variable *générale* y une fonction d'indice, dont les arguments soient les variables restreintes dominant celle-là (1.41). Aux variables réelles en particulier correspondent des fonctions à 0 argument (des „constantes").

3.21. Considérons alors un champ C_1, composé des lettres: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$. Nous le prendrons fixe dans ce qui suit; nous verrons plus loin qu'on peut prendre n'importe quel champ C_1 (voir 3.54).

Puis un champ C_2, obtenu comme suit: à chaque fonction élémentaire (fonction d'indice ou fonction descriptive) et à chaque système d'arguments pris dans C_1, nous faisons correspondre une lettre de C_2 qui sera la valeur de la fonction pour ce système d'arguments, de manière que chaque lettre de C_2 ne soit la valeur que d'une seule fonction, et cela, pour un seul système d'arguments.

Soient: $a_{n_1+1} \ldots\ldots a_{n_2}$ les éléments de C_2.

Nous fabriquons, en général, C_k à partir de $C_1 C_2 \ldots C_{k-1}$, en faisant correspondre une lettre de C_k à toute fonction élémentaire, d'arguments pris dans $C_1, C_2, \ldots C_{k-1}$, dont la valeur n'ait pas encore été donnée (tel donc qu'un au moins des arguments figure dans C_{k-1}), et cela, de telle manière que chaque élément de C_k ne corresponde qu'à un seul tel système. La lettre sera la valeur de la fonction pour ce système d'arguments.

Nous fabriquons ainsi $C_1, C_2 \ldots C_{p+1}$; enfin, si b est la hauteur de la proposition P, nous fabriquons $C_{p+2} \ldots C_{p+b+1}$ (en n'y mettant pas, si nous voulons, les éléments correspondant aux fonctions d'indice. On s'assurera que rien n'est changé dans ce qui suivra).

Soient en général $a_{n_{k-1}+1} \ldots a_{n_k}$ les éléments de C_k. k sera dit l'ordre de C_k. Posons $N = n_p$.

Remarquons avant de continuer que C_k contient les valeurs de toutes les fonctions de hauteur $k-1$ à arguments pris dans C_1.

On pourrait fabriquer de tels champs en partant de n'importe quelles fonctions descriptives ou d'indice, et non de celles que nous a fournies la proposition P. Ces fonctions sont dites „*engendrer*" ces champs.

3.211. Quand dans les champs $C_1, C_2, \ldots, C_p$, nous dirons que nous *égalons* (3.11) deux éléments, nous voulons dire que nous les égalons dans le champ résultant de la réunion des précédents; en utilisant la convention de la fin de 3.11, on voit que chaque champ C_i est remplacé par un champ Γ_i qui est composé d'éléments de C_i.

3.12. Nous dirons que nous avons un système de *valeurs logiques* dans ces champs quand nous aurons donné une valeur logique à toute proposition obtenue en remplaçant les arguments d'une proposition-élément de P par ces éléments des champs. On en déduit la valeur logique de propositions sans variables apparentes ni fonctions descriptives, ne contenant comme variables réelles que les éléments des champs.

3.22. Fabriquons maintenant les propositions suivantes: appelons partie d'une proposition, ou proposition partielle, toute proposition comprise à l'intérieur de celle-là (c'est-à-dire toute proposition dont la première est une fonction propositionnelle: c'est toujours l'étendue d'un signe logique). A chaque partie de la proposition P, nous faisons correspondre une réduite (Ch. 2, 8) suivant les règles suivantes:

1⁰. La réduite d'une proposition-élément est cette proposition elle-même.

2⁰. Si la réduite de A est a, celle de ∞A est ∞a.

3⁰. Si celle de B est b, celle de $A \vee B$ est $a \vee b$.

4⁰. Si la réduite de Φx est φx, celle de $(\pm x) . \Phi x$ est $\Phi f_x(y_1 y_2 \ldots y_n)$ dans le cas où x est une variable générale

(Ch. 2, 3.101), $f_x(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant la fonction d'indice correspondante à x ($y_1, y_2 \ldots y_n$ sont donc des variables réelles de Φx).

5⁰. Au contraire, la réduite de $(-x) . \Phi x$, si cette proposition partielle est dans une occurrence positive (Ch. 2, 3.102), sera:

$$\varphi a_1 \vee \varphi a_2 \ldots \vee \varphi a_N$$

et la réduite de $(+x) . \Phi x$, si cette proposition partielle est dans une occurrence négative, sera:

$$\varphi a_1 . \varphi a_2 \ldots \varphi a_N .$$

Ces lois permettent de faire correspondre à la proposition supposée sans variables réelles, une réduite. Remplaçons toutes les fonctions qui y figurent par leur valeur, de manière qu'il ne reste plus de fonctions dans cette réduite; c'est évidemment possible, en introduisant des éléments des champs $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_{p+b+1}$; on arrive à une proposition II. Si la proposition II est une identité de première espèce, nous dirons que *P a la propriété B d'ordre p.*

Recommençons les mêmes opérations, mais en supposant maintenant que *les fonctions d'indice par lesquelles on remplace les variables générales ont comme arguments, non plus les variables dominant celle-là, mais les variables supérieures à celles-la* (1.41). Si la proposition II ainsi obtenue est une identité, nous dirons que *P a la propriété C d'ordre p.*

3.221. On voit immédiatement que si on part d'une proposition à variables réelles, les propriétés B et C ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on généralise, comme il est dit en 3.2 ces variables (donc du fait de savoir qu'elles sont celles de ces variables qui dominent une variable donnée): les fonctions d'indice à 0 argument correspondant aux variables réelles ont leur valeur dans C_2, et ne servent plus dans la construction des champs suivants.

On voit que la propriété B et la propriété C sont identiques, si la proposition est mise sous forme canonique (1.2 et 1.41).

3.3. **Lemme.** *Quand une proposition possède la propriété B (ou la propriété C) d'ordre p, toute proposition déduite de celle-là par les règles de passage possède la même propriété avec le même ordre, le champ C_1 étant le même dans les deux cas.*

Montrons que les propriétés se conservent dans l'application de chaque règle de passage.

1°. *Cas de la propriété B.*

Pour les règles de passage relatives au signe ∞, cela résulte immédiatement de Ch. 1, 3.42.

Considérons les règles de passage relatives au signe v; on voit immédiatement que $(x) . \Phi x \, v \, p$ et $(x) . \Phi x . v . p$, et que $(\exists x) . \Phi x \, v \, p$ et $(\exists x) . \Phi x . v \, p$ ont, dans toute occurence, des réduites équivalentes (on utilise Ch. 1, 5.34).

2°. *Cas de la propriété C.*

Pour les règles de passage relatives au signe ∞, cela résulte de Ch. 1, 3.42.

Considérons les règles de passage relatives au signe v.

a) *Passage de* $(\pm x) . \Phi x . v \, p$ *à* $(\pm x) . \Phi x \, v \, p$ *(x générale) et passage inverse.*

Il suffit de remarquer que les réduites de ces deux propositions partielles sont les mêmes.

b) *Passage de* $(\exists x) . \Phi x . v \, p$ *à* $(\exists x) . \Phi x \, v \, p$, *et passage inverse dans le cas où x est restreinte* (donc l'occurrence positive). Sous la première forme, P s'écrira P_1 sous la deuxième P_2. Dans P_2, les fonctions d'indice des variables générales de p dépendent d'x; y étant une variable générale de p, soient $x_1 x_2 \ldots x_n$ les variables restreintes supérieures à x, $f_y(x_1, x_2 \ldots x_n x)$ la fonction d'indice de v dans P_2, $f_y(x_1 \ldots x_n)$ cette fonction dans P_1.

Les fonctions descriptives et d'indice fournies par P_1 vont engendrer à partir de C_1 des champs $C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, \ldots$; celles fournies par P_2, qui n'en diffèrent que par ce que les $f_y(x_1 x_2 \ldots x_n)$ sont remplacés par les $f_y(x_1 x_2 \ldots x_n x)$, vont engendrer de même à partir de C_1 les champs $C_2^{(2)}, C_3^{(2)}, \ldots$

1°. Remarquons que l'on peut passer des $C_i^{(2)}$ aux $C_i^{(1)}$ en égalant (3.211) tous les éléments qui sont valeurs de fonctions $f_y(x_1 x_2 \ldots x_n x)$, à un d'entre eux, $f(x_1 x_2 \ldots x_n a_1)$, pour chaque système donné d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ des $C_i^{(2)}, a_i$ étant un élément quelconque des $C_i^{(2)}$. Les champs $C_i^{(1)}$ peuvent alors être considérés comme une partie des champs $C_i^{(1)}$.

On voit dès lors que l'on peut passer de la réduite de P_2 à une proposition équivalente à celle de P_1, en y remplaçant, pour chaque système donné de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$,

tous les $f_y(x_1 x_2 \ldots x_n x)$ pour toutes les valeurs de x, par celui d'entre eux qui est dans les champs $C_i^{(1)}$.

Donc, si la réduite de P_2 est une identité, celle de P_1 en est aussi une.

2°. Si la réduite Π_2 de P_2 n'est pas une identité, il y a un système de valeurs logiques (3.212) la rendant fausse, (d'après Ch. 1, 5.21); montrons qu'il en est de même de celle de P_1, que nous appellerons Π_1.

Remplaçons pour cela la réduite de P_1 par une autre, obtenue comme suit: $a_1, a_2, \ldots, a_N$ étant les éléments des champs $C_1^{(2)}, \ldots, C_p^2$ on définira dans ces champs $f_y(x_1 \ldots x_n)$ comme étant $f_y(x_1 \ldots x_n a_i)$ pour un i que nous choisirons tout à l'heure et qui dépendra de $x_1 \ldots x_n$. Ceci conduirait à prendre une partie de ces champs comme champs $C_i^{(1)}$. La modification que nous voulons faire va consister à calculer la réduite de P_1 comme celle de P_2, en utilisant tous les N éléments des $C_i^{(2)}$).

Autrement dit, des 5 règles énoncées en 3.22, la cinquième seule subira la modification suivante: $a_1, a_2, \ldots, a_N$ y désigneront les éléments des champs $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots, C_p^{(2)}$ et non plus ceux des champs $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_p^{(1)}$; et les transformations décrites à la fin de 3.22 seront évidemment effectuées dans les premiers champs et non dans les derniers.

On fabrique ainsi une réduite Π_1'.

Il suffit de remarquer que

$$\varphi a_{i_1} \vee \varphi a_{i_2} \vee \ldots \vee \varphi a_{i_n} . \supset . \varphi a_1 \vee \varphi a_2 \vee \ldots \vee \varphi a_N$$

et

$$\varphi a_1 . \varphi a_2 \ldots . \varphi a_N . \supset . \varphi a_{i_1} . \varphi a_{i_2} \ldots . \varphi a_{i_n}$$

sont des identités, et d'appliquer le théorème du Ch. 2, (3.2) pour conclure que $\Pi_1 \supset \Pi_1'$ est une identité. Donc si Π_1' n'est pas une identité, Π_1 n'en sera pas une non plus.

Montrons qu'avec un système de valeurs logiques rendant Π_2 faux, on a, en choisissant convenablement les $f_y(x_1, x_2 \ldots x_n)$ un système de valeurs logiques rendant Π_1 faux.

Les réduites des propositions partielles $(\exists x) \Phi x . \vee p$ et $(\exists x) . \Phi x \vee p$ dépendent des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ supérieures à x; mais nous ne les considèrerons que pour des valeurs données de ces variables, soient $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}$; ces réduites n'ont alors qu'une occurrence dans Π_2 et Π_1' comme on s'en assure aisément.

Pour ces valeurs, appelons $\pi\ (x)$ la réduite de p dans P_2; soit i l'indice de l'a_i qui est tel que la valeur des $f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n})$ soit la même que celle des $f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} a_i)$; la réduite de p dans P_1 sera alors, on le voit aisément $\pi\ (a_i)$.

Donc dans P_1, la réduite de $(\exists x)\,\Phi_x \,.\, v\, p$ est:

$$\varphi\, a_1 \vee \varphi\, a_2 \vee \ldots \vee \varphi\, a_N \,.\, \vee\, \pi\,(a_i) \tag{1}$$

Dans P_2, celle de $(\exists x)\,.\,\Phi\, x \vee p$ est:

$$\varphi\, a_1 \vee \pi\,(a_1)\,.\vee.\,\varphi\, a_2 \vee \pi\,(a_2)\,.\vee \ldots .\vee.\,\varphi\, a_N \vee \pi\,(a_N) \tag{2}$$

Le système de valeurs logiques considéré peut donner à la proposition (2):

1⁰. Soit la valeur logique „vrai"; alors, ou bien c'est un des $\varphi\, a_i$ qui a cette valeur logique; et on fait

$$f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) = f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} a_1)$$

ou bien un des $\pi\ (a_i)$, soit $\pi\,(a_k)$, a cette valeur logique; alors on fait:

$$f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) = f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} a_k)$$

2⁰. Soit la valeur logique „faux"; alors on fait

$$f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) = f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} a_1)\,.$$

On voit qu'alors (1) et (2) auront même valeur logique.

Le procédé indiqué donne donc bien à Π_2 et Π_1' la même valeur logique.

c) *Passage de* $(x)\,\Phi\, x \,.\, v\, p$ *à* $(x)\,.\,\Phi\, x \vee p$, *et passage inverse, dans une occurrence négative.*

On raisonne de la même manière qu'en b). Seule, la fin est un peu modifiée. Il faut considérer.

$$\varphi\, a_1 \,.\, \varphi\, a_2 \ldots \varphi\, a_N \,.\, \vee\, \pi \tag{1}$$

et

$$\varphi\, a_1 \vee \pi\,(a_1)\,.\,\varphi\, a_2 \vee \pi\,(a_2) \ldots .\,\varphi\, a_N \vee \pi\,(a_N) \tag{2}$$

Le système de valeurs logiques considéré peut donner à la proposition (2):

1⁰. Soit la valeur logique „vrai", auquel cas, ou bien tous les $\varphi\, a_i$ ont une valeur logique, et on fait:

$$f(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}) = f_y(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} a_1)$$

ou bien un $\pi(a_i)$, soit $\pi(a_k)$, a cette valeur logique, et on fait:

$$f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = f(a_1 a_2 \dots a_{i_n} a_k).$$

1⁰. Soit la valeur logique „faux"; auquel cas un $\pi(a_i)$ soit $\pi(a_k)$ a cette même valeur logique, et on fait:

$$f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = f_y(a_{i_1} a_{i_2} \dots {}_{i_n} a_k)$$

La fin du raisonnement est alors inchangée.

3.31. **Corollaire.** Les propriétés B et C d'ordre p étant identiques pour une proposition de forme canonique (3.221), on en déduit que *ces deux propriétés sont toujours équivalentes.*

3.4. En mettant les propositions sous une forme normale (Ch. 2, 3.101) on peut mettre la propriété B sous une forme simple: prenons les champs C_i de 3.21 engendrées par les fonctions d'indice des variables générales ayant les variables dominantes comme arguments, et les fonctions descriptives élémentaires.

Dans la matrice de P, remplaçons les variables restreintes par des éléments pris dans $C_1, C_2, \dots$, ou C_p d'une manière quelconque; puis chaque variable générale y par la valeur de la fonction d'indice correspondante $f_y(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$, les arguments $a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n}$ étant les éléments par lesquels on a remplacé les variables restreintes dominant y. Dans la proposition ainsi obtenue, on s'arrange enfin pour qu'il ne figure aucun fonction descriptive, en remplaçant chaque fonction descriptive $f(a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n})$ par sa valeur.

Formons la disjonction de toutes les propositions élémentaires ainsi obtenues en remplaçant les variables restreintes de toutes les manières possibles; dire que P possède la propriété B d'ordre p revient à dire que cette disjonction est une identité: il suffit en effet de se reporter à la définition de cette propriété, et de l'appliquer à la forme normale de P (Ch. 2, 3.101), pour s'en convaincre. Cette proposition sera désormais appellée la *première disjonction d'ordre p associée à P.*

Pour exprimer que P a la propriété C, on fabriquerait de même les champs engendrés par les fonctions d'indice ayant comme arguments les variables supérieures et les fonctions descriptives; et on ferait sur P les même opérations que ci-dessus, mais en remplaçant cette fois-ci chaque variable générale y, par

la valeur de la fonction d'indice correspondante $f(a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n})$, les arguments $a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n}$ étant les éléments par lesquels on a remplacé les variables restreintes dont les symboles sont situés à gauche du sien (ce sont, en effet, les variables supérieures à y dans la forme normale); on obtient ainsi la deuxième disjonction associée d'ordre p, qui doit être une identité pour que la proposition ait la propriété C.

3.5. Voici quelques remarques très importantes relatives aux propriétés B et C (les raisonnements sont les mêmes dans les deux cas):

3.51. 1⁰. *Le nombre des éléments du champ C_1 est indifférent* (on le prendra donc en général égal 1).

a) On peut augmenter ce nombre.

Soient, en effet, les champs $C_1, C_2, \dots, C_p, \dots, C_1$ ayant pour éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$; soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_p$ d'autres champs engendrés par les mêmes fonctions, Γ_1 ayant m éléments, $a_1, a_2, \dots, a_m$; supposons $m < n$. Les éléments des Γ_i seront désignés par les mêmes lettres que certains éléments des C_i, de manière qu'une même fonction $f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$ ait la même valeur dans les deux cas. Alors les termes de la première disjonction associée d'ordre p correspondant aux champs Γ, sont une partie des termes de la première disjonction associée d'ordre p correspondant aux champs C; donc, si la première est une identité, la dernière en est une autre (car $\vdash : A \supset . A \vee B$).

b) On peut diminuer ce nombre.

Reprenons les mêmes notations; on peut passer des C_i aux Γ_i, en égalant (3.11; 3.211) $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots a_n$ à a_1 par exemple. Remplaçons dans la première disjonction associée d'ordre p correspondant aux champs C, $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$ par a_1; on voit immédiatement que tous ses termes demeurent des termes de la première disjonction associée d'ordre p correspondant aux champs Γ et qu'on obtient tous ces termes. Donc, si la première est une identité, la deuxième en est une autre, comme on le voit d'après la remarque 3.31 du chapitre 1.

3.52. *On peut supposer, sans modifier les propriétés B et C, que les champs que l'on fabrique pour exprimer que la proposition a la propriété B (ou C), sont engendrés non seulement par les fonctions sudites, mais aussi par d'autres fonctions* (dites *„fonctions fictives"*). On peut, en particulier, introduire

des variables réelles *fictives* (comme au Ch. 2, 1.21), qui donneront lieu alors à des *constantes* fictives (3.2).

Soient $\varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_{n_i})$ les nouvelles fonctions introduites, $(i = 1, 2, \ldots, \alpha)$; $\psi_j(x_1 x_2 \ldots x_{m_j})$ les anciennes $(j = 1, 2, \ldots, \beta)$; soient $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ des champs engendrés par les φ_i et les ψ_j. Egalons à un élément de C_1 tous les éléments qui sont valeurs de fonctions $\varphi_i(a_{p_1} a_{p_2} \ldots a_{p_{n_i}})$; on obtient des champs $C_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_p$ engendrés par les fonctions ψ_i; en raisonnant comme ci-dessus en b), on voit que si la première disjonction associée d'ordre p obtenue avec les premiers champs est une identité, il en est de même de celle obtenue avec les seconds champs.

3.53. 3⁰. *Si P et Q ont la propriété B, il en est de même de $P.Q$.*

Fabriquons en effet les champs correspondant à la proposition $P.Q$, soient $C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$. La première disjonction d'ordre p associée à P est, dans ces champs, de forme:

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_N$$

chaque P_i résultant de la matrice de P par les opérations décrites en 3.4. C'est une identité d'après 3.52. Celle qui est associée à Q est de même, de la forme:

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_M.$$

Or, on voit immédiatement que celle associée à $P.Q$ contient tous les termes de forme $P_i.Q_j$; c'est une identité d'après Ch. 1, 5.34.

3.54. 4⁰. *Si une proposition a la propriété B (ou C) d'ordre p, elle l'a pour tout ordre supérieur q.*

Désignons dans les deux cas par les mêmes lettres les éléments des champs $C_1, C_2, \ldots, C_p \ldots$ considérés en 3.4; alors les termes de la première disjonction associée d'ordre p sont une partie de ceux de la première disjonction associée d'ordre q; si donc, la première est une identité, la deuxième en est une autre (d'après l'identité $\vdash : A \supset . A \vee B$).

3.6. Prenons l'exemple suivant, pour la propriété C d'ordre 2:

$$(x)(\exists y)(z) . P[x, y, z, f(y, z)]$$

$f(y, z)$ étant une fonction descriptive élémentaire; cette proposition est de hauteur 1,

Il faut introduire deux fonctions d'indice: φ_x, sans arguments, pour x, et $\varphi_z(y)$ pour z.

Le champ C_1 sera composé de a_1.

Le champ C_2 de a_2 qui sera φ_x

a_3 „ „ $\varphi_z(a_1)$

a_4 „ „ $f(a_1 a_1)$.

Le champ C_3, de a_5, a_6, a_7, qui seront: $\varphi_z(a_2)$, $\varphi_z(a_3)$ et $\varphi_z(a_4)$,

a_8 a_9 a_{10} qui seront: $f(a_2 a_2)$, $f(a_3 a_3)$, $f(a_4 a_4)$

a_{11} a_{12} a_{13} „ „ $f(a_1 a_2)$, $f(a_1 a_3)$, $f(a_1 a_4)$

a_{14} a_{15} a_{16} „ „ $f(a_2 a_3)$, $f(a_2 a_1)$, $f(a_3 a_4)$

Ne considérons de C_4 que a_{17} qui sera: $f(a_3 a_6)$, a_{18} qui sera $f(a_4 a_7)$, et a_{19} qui sera $f(a_2 a_5)$.

Il faudra prendre pour y successivement $a_1 a_2 a_3 a_4$.

La disjonction d'ordre 2 est

$$P(a_2 a_1 a_3 a_{12}) \vee P(a_2 a_2 a_5 a_{19}) \vee P(a_2 a_3 a_6 a_{17}) \vee P(a_2 a_4 a_7 a_{18}).$$

On voit en particulier que $a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16}$ auront été inutiles.

Si les règles de passage permettent d'amener la proposition à la forme:

$$(x)(z)(\exists y) . P[x, \varphi, z, f(\varphi, z)]$$

il faudra égaler a_3, a_5, a_6 et a_7.

4. Les champs infinis.

Introduisons maintenant la notion capitale de „champ infini".

4.1. Soit un champ C_1, composé des éléments $a_1 a_2 \ldots a_{n_1}$.

Supposons que l'on ait affaire à un certain nombre de fonctions descriptives, de fonctions d'indice et de fonctions propositionelles éléments; nous dirons que l'on a un champ infini, si on a un moyen déterminé de faire correspondre à tout nombre p un

champ C', contenant C_1, — un système de valeurs (3.11) des fonctions dans C', tel que l'on puisse en déduire la valeur de toute fonction de hauteur égale ou inférieure à p à arguments pris dans C_1, — et un système de valeurs logiques pour les propositions éléments considérées, quand leurs arguments sont remplacés par des éléments de C'. Ces fonctions, ces propositions, ces valeurs logiques, seront dites *„attachées"* au champ infini.

Il nous arrivera aussi de considérer des champs, où par exemple on n'ait pas de propositions, ou de valeurs logiques attachées; nous le signalerons toujours explicitement.

Il est bien évident qu'en général le nombre d'éléments de C' croîtra avec p.

Nous dirons que C' est le *champ d'ordre* p dans le champ infini; C_1 est le champ d'ordre 0.

(On remarquera que cette définition diffère de la définition qu'on pourrait croire la plus naturelle seulement par le fait que, quand le nombre p augmente, le nouveau champ C' et les nouvelles valeurs ne peuvent pas forcément être considérés comme un „prolongement" des anciens; mais cependant, la connaissance de C' et des valeurs pour un nombre p déterminé, entraîne celle d'un champ et de valeurs convenant pour tout nombre inférieur; seul donc, un „principe de choix" pourrait conduire à prendre un système de valeurs fixe dans un champ infini).

Partons alors d'une proposition P de hauteur h, sans variables réelles.

A chaque variable restreinte y de P, nous faisons correspondre une fonction d'indice dont les arguments sont les variables générales *dominant* y. Considérons un champ infini pour lequel les fonctions attachées soient ces fonctions d'indice et les fonctions élémentaires de P, et les propositions attachées soient les propositions éléments figurant dans P; soit C_1 le champ d'ordre 0, D_p le champ d'ordre p. Nous remplaçons dans la matrice de P chaque variable restreinte de P par la fonction d'indice correspondante. On en déduit une proposition P'. En remplaçant les variables par des éléments de D_p, on a une autre proposition; on essaie d'y remplacer toutes les fonctions qui y figurent par leur valeur, de manière à ce qu'il n'y ait plus de fonction: d'où une proposition II.

(Ce n'est pas toujours possible: mais nous ne remplaçons les variables que par les systèmes d'éléments où c'est possible (il y en a toujours si p est supérieur à la hauteur de la proposition: il suffit de prendre les arguments dans C_1)).

Nous disons que P est *vrai dans le champ infini*, si pour tout nombre p, on a un procédé permettant de vérifier que toutes ces propositions ont une valeur logique (Ch. 1, 4.1) (déduite de la valeur logique de leurs propositions-éléments dans le champ), qui est le vrai.

Partons encore de P; mais faisons correspondre cette fois à toute variable générale y, une fonction d'indice ayant comme arguments les variables restreintes dominant y. Fabriquons comme ci-dessus un champ infini, mais en remplaçant les anciennes fonctions d'indice par les nouvelles; remplaçons maintenant dans la matrice de P chaque variable générale par la fonction d'indice correspondante, et faisons les mêmes opérations que ci-dessus; si toutes les propositions ainsi obtenues ont la valeur logique „faux", nous dirons que P est *faux dans ce champ infini*.

Il est absolument nécessaire de prendre de telles définitions, pour donner un sens précis aux mots: „vrai dans un champ infini", qui ont souvent été employés sans explication suffisante, et pour justifier une proposition à laquelle on fait souvent allusion, démontrée par Löwenheim [1]), sans bien remarquer que cette proposition n'a aucun sens précis sans définition préalable, et que la démonstration de Löwenheim est au surplus totalement insuffisante pour notre but (voir 6.4).

4.11. Remarquons tout de suite qu'il est évident que si P est vrai dans un champ infini, ∞P est faux; et que si P y est faux, ∞P y est vrai.

4.2. Pour éclaircir la notion de champ infini, faisons abstraction pour un moment des valeurs logiques associées; nous pouvons alors classer ainsi les éléments situés dans D_p: prenons d'abord les éléments de C_1; puis les éléments qui sont les valeurs de fonctions de hauteur 1 de ceux-là; ils forment un champ Γ_2 (qui peut avoir des éléments commun avec C_1); puis les éléments qui

---

[1]) Über Möglichkeiten im Relativkalkul, Math. Annalen, tome 76. Voir aussi Skolem, Vidersk, Skriften Math. Naturw. Klasse, 1920, Kristiania.

sont les valeurs de fonctions de hauteur 2 à arguments pris dans C_1; ils forment Γ_3; on forme ainsi $C_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \Gamma_p \ldots$ On peut avoir un nombre de termes au moins égal à p; cette suite peut être évidemment arrêtée à un champ entièrement compris dans les précédents [1]).

Or, reprenons les champs considérés en (3.21) pour la proposition P; si on prend comme premier champ C_1, on voit que l'on peut considérer que Γ_2 résulte de C_2, en égalant (voir les conventions de 3.211) certains éléments de C_1 et de C_2, ou des éléments de C_2 entre eux; et qu'en général, Γ_k résulte de C_k, en égalant certains éléments de C_k à d'autres éléments de $C_1, C_2, \ldots C_{k-1}$, ou C_k.

En se rappelant le théorème de Ch. 1 (5.21), on déduit les deux résultats capitaux suivants:

4.21. 1⁰. *Une proposition fausse dans un champ ne peut avoir la propriété B.*

2⁰. *Si une proposition n'a pas la propriété B, on peut construire un champ infini où elle est fausse.*

Le premier résulte de ce que, dans $C_1, C_2, \ldots, C_{p+b+1}$, on déduit immédiatement du champ infini, un système de valeurs logiques donnant la valeur logique „faux" à la première disjonction associée d'ordre p (voir 3.4). Le deuxième résulte du fait que C_p fournit précisément le champ d'ordre p dans le champ infini cherché et que les valeurs logiques donnant à cette disjonction la valeur logique „faux", (d'après Ch. 1, 5.21), fournissent précisement leus valeurs logiques attachées.

Nous dirons pour simplifier (le sens de la locution étant défini par les énoncés qui précèdent):

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition n'ait pas la propriété B, est qu'elle soit fausse dans un infini.

4.3. Les considérations précédentes montrent que nous pouvons nous borner à la considération des champs infinis sui-

---

[1]) Il y aura peut-être des éléments de D_p qui ne seront compris dans aucun de ces champs; ces éléments ne joueront aucun rôle dans la suite.

vants. Partons d'un champ C_1 arbitraire (composé par exemple d'un élément); appelons C_k dans chaque cas particulier le champ obtenu comme en 3.21 en faisant correspondre un élément, d'une manière biunivoque, à toute fonction de hauteur $k-1$, à arguments dans C_1, que nous pourrons construire avec les fonctions élémentaires dont nous disposerons, cet élément étant la valeur de la fonction. Il suffit alors, dans la définition de la vérité (ou de la fausseté) d'une proposition de hauteur b, de supposer que le champ d'ordre p dans le champ infini résulte de la réunion de $C_1, C_2, \ldots, C_{p+b+1}$ (les fonctions attachées étant les fonctions descriptives, et les fonctions d'indice indiquées en 4.1), et d'un système de valeurs logiques pour les fonctions propositionnelles à arguments dans ces champs. Un tel champ infini sera dit „champ réduit". Tous les résultats précédents subsistent en remplaçant les mot „champ infini" par „*champ réduit*". On le voit sans difficultés, en remarquant que l'on peut toujours supposer que deux fonctions différentes, ou à arguments différents, ont des valeurs différentes; car si deux telles fonctions ont pour valeur un élément b, on remplacera cet élément par deux autres b_1 et b_2; l'un sera la valeur de la première fonction; l'autre celle de la deuxième; et l'on conviendra que les valeurs logiques de $\varphi\, b_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n$ et $\varphi\, b_2\, x_2\, x_3 \ldots x_n$ (pour toute fonction propositionnelle élément φ, et tout système d'arguments), seront les mêmes qu'était celle de $\varphi\, b\, x_2\, x_3 \ldots x_n$.

4.31. On peut même partir de plusieurs propositions; pour définir leur vérité, on fabriquera les champs C_k correspondants à leur produit (pour définir leur fausseté, ceux correspondants à leur somme); on vérifie immédiatement que si chacune d'entre elles est vraie dans un champ qui est réduit pour leur produit (ou fausse dans un champ réduit pour leur somme), ce produit (ou cette somme) est vraie (ou fausse), dans ce champ, et réciproquement.

5. Théorème fondamental.

5. **Théorème.** 1°. *Une proposition de propriété B, d'ordre p est vraie; et la connaissance de p permet de fabriquer sa démonstration.*

2⁰. *Si l'on a une proposition vraie dont on a la démonstration, on peut déduire de l'examen de celle-ci un nombre p tel que la proposition ait la propriété B d'ordre p.*

On peut dire: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vraie est qu'elle ait la propriété B.*

5.1. **Lemme 1.** *Une proposition P de propriété C a la propriété A.*

Il suffit d'indiquer le type, le schème et les égalités associées (se reporter au § 2).

Supposons que P ait une forme normale sans variables réélles et la propriété C d'ordre p; soit N le nombre des éléments de C_p (même notation qu'en 3.21).

Prenons la propriété C sous la forme de (3.4.).

Fabriquons un schème associé à P (2.2), tel qu'avant chaque variable restreinte, il y ait une accolade comprenant N lignes; nous dirons que la variable restreinte qui est à la i-ème ligne de l'accolade est attachée à a_i. Dans une ligne quelconque du schème, chaque variable restreinte est donc attachée à un a_i avec $i \leqslant N$.

Nous allons maintenant définir une correspondance entre les éléments des champs, et les variables générales (ou fonctions descriptives de variables générales), du schème. Nous conviendrons que chaque variable générale y correspondra à l'élément qui est valeur de $f_y(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$, $a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n}$ étant les éléments attachés aux variables restreintes de la même ligne que y et à sa gauche, et f_y la fonction d'indice de y. Aux éléments de C_1, nous ferons correspondre des variables générales „fictives" (au sens de 2.1); enfin, à tout élément des champs, nous ferons correspondre soit une variable générale, selon la loi précédente, soit une fonction descriptive de variables générales, en convenant que si $a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_n}$ correspondent aux variables générales ou aux fonctions de variables générales $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ la valeur de $f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n})$ correspond à la fonction $f(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$ (f étant une fonction *descriptive)*. On voit aisément qu'ainsi, à chaque élément des champs, correspond une variable générale, ou une fonction de variables générales, et *une seule*.

Appelons ordre d'une ligne, le plus grand des ordres des champs des éléments correspondant aux variables restreintes de cette ligne.

Le type associé sera obtenu en enlevant successivement toutes les variables des lignes d'ordre 1, puis toutes celles de ce qui restera des lignes d'ordre 2, puis des lignes d'ordre 3, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre p.

Les égalités associées seront obtenues en égalant chaque variable restreinte à la variable générale, ou à la fonction de variable générale, correspondant à l'élément qui lui est attaché. On voit qu'une variable restreinte est toujours égalée à une générale, ou à une fonction des variables générales de lignes dont l'ordre est inférieur au sien; et donc que ces égalités fournissent des égalités associées compatibles avec le type considéré.

Il suffit de voir que la disjonction ainsi obtenue est une identité; or, il est évident qu'elle résulte de la deuxième disjonction d'ordre p associée à P (3.4), en remplaçant chaque élément des champs, par la variable générale, ou la fonction de variable générale correspondante (chaque ligne du schème correspond à un terme de cette identité).

Corollaire. *Une proposition de propriété B est vraie.*

Car on a vu: 1) Que la propriété B équivaut à la propriété C (3.31).

2) Qu'une proposition de propriété A est vraie (2.3).

Ceci démontre la première partie du théorème.

5.2. Pour démontrer la deuxième partie du théorème, nous procédons par récurrence sur la démonstration de la proposition.

1⁰. Si $P \vee P$ a la propriété B, il en est de même de P (d'après la définition de 3.22).

2⁰ Si Φx a la propriété B, $(x) . \Phi x$ l'a aussi. En effet, pour fabriquer les réduites de Φx et $(x) . \Phi x$, il faut précisément remplacer ces propositions par: $(y_1 y_2 .. y_n x) . \Phi x$, si $y_1 y_2 \ldots y_n$ sont les variables réelles de $(x) . \Phi x$, comme on a vu en 3.2.

Lemme 2. *La propriété C se conserve dans l'emploi de la deuxième règle de généralisation (sous la forme de Cb. 3, 1.4).*

t étant un individu dépendant de variables réelles, on passe de $\vdash . \Phi t$ à $\vdash . (\exists x) . \Phi x$.

Prenons la propriété C sous la forme donnée en 3.4.

Nous savons (3.221) qu'aux variables réelles vont correspondre des éléments fixes de C_2; alors l'élément correspondant à t sera dans C_k (avec $k \geqslant 2$); appelons le a_i.

Supposons que la première proposition ait la propriété C d'ordre p. Considérons la deuxième disjonction associée (voir 3.4) d'ordre $p+k-1$ pour la deuxième. Ne considérons dans cette disjonction que les termes où x est remplacé par a_i. On voit immédiatement que leur disjonction est une deuxième disjonction d'ordre p associée à la proposition $\Phi\, t$, le premier champ étant C_1; donc c'est une identité propositionnelle; et il en est donc de même de la disjonction primitive.

5.3. **Lemme 3.** *Si P et $P \supset Q$ ont la propriété C d'ordre p, il en est de même de Q.*

$P.P \supset Q$ a aussi la propriété C d'ordre p d'après 3.53. Mettons P et Q sous forme normale (Ch. 2, 3.101); ils s'écrivent respectivement:

$$(\pm y_1 \pm y_2 \ldots \pm y_p).M y_1 y_2 \ldots y_p x_1 x_2 \ldots x_n$$

et

$$(\pm z_1 \pm z_2 \ldots \pm z_q).N z_1 z_2 \ldots z_q x_1 x_2 \ldots x_n$$

en mettant en évidence toutes les variables réelles (certaines pourront être fictives (Ch. 5, 3.52) dans P ou Q). $P.P \supset Q$ peut s'écrire, en le transformant par les règles de passage:

$$(-y_1^{\alpha_1} + y_1^{1-\alpha_1} - y_2^{\alpha_2} + y_2^{1-\alpha_2} \ldots\ldots -$$
$$- y_p^{\alpha_p} + y_p^{1-\alpha_p} \pm z_1 \pm z_2 \ldots \pm z_q):$$
$$M y_1^0 y_2^0 \ldots y_p^0 x_1 x_2 \ldots x_n . M y_1^1 y_2^1 \ldots y_p^1 x_1 x_2 \ldots x_n \supset$$
$$\supset N z . z_2 \ldots z_q \ldots x_1 \ldots x_n .$$

Dans cette proposition, les α_i valent 0 ou 1 suivant que y_i est restreinte ou générale dans P. Nous nous arrangeons comme on voit, pour que de deux symboles (y_i^0) et (y_i^1) qui se suivent, le premier soit toujours symbole de variable restreinte, le deuxième symbole de variable générale (car si y_i^0 est restreinte, y_i^1 est générale, et inversement d'après Ch. 2, 3.102). Prenons la propriété C pour cette proposition sous la forme donnée en 3.4. On a donc des champs $C_1 C_2 \ldots C_k \ldots . C_{p+b+1}$ engendrés par les fonctions descriptives et d'indice de cette proposition; nous les transformons en des champs $C_1' C_2' \ldots C_k' \ldots C_{p+b+1}'$, comme suit: C_1 et C_1' sont identiques; on obtient en général les C_k' à partir des C_k, de la manière suivante: appelons f_t la fonc-

tion d'indice d'une variable t; nous égalons dans les C_k tous les éléments qui correspondent à $f_{y_i}^{1-\alpha_i}(y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_i^{\alpha_i})$, pour toutes les valeurs possibles de $y_1^{\alpha_1}, y_2^{\alpha_2} \ldots y_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$, à $y_i^{\alpha_i}$; et nous égalons à l'un entre eux tous les éléments qui correspondent aux $f_{z_i}(y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_p^{\alpha_p} z_{u_1} \ldots z_{u_i})$ pour toutes les valeurs possibles des $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_p^{\alpha_p}$ et un système de valeurs donné des z_{u_α}.

Les nouveaux champs obtenus sont précisément, comme on voit, ceux qu'engendrent à partir de C_1 les fonctions descriptives et d'indice de Q. P_i et Q_i désignant alors des propositions obtenues en effectuant sur la matrice de P ou de Q dans ces champs les opérations décrites en 3.4, on obtient en faisant, dans la deuxième disjonction d'ordre, p associée à $P . P \supset Q$ dans les champs primitifs, les égalités susdites, une identité:

$$P_1 . P_1 \supset Q_1 . v . P_2 . P_2 \supset Q_2 . v \ldots . v . P_\alpha . P_\alpha \supset Q_\alpha;$$

et

$$Q_1 v Q_2 v \ldots v Q_\alpha$$

ne diffère de la disjonction d'ordre p associée à Q que par le fait que certains termes sont répétés plusieurs fois.

Or, le théorème Ch. 1, 5.21 montre que la vérité de la première disjonction entraîne celle de la seconde (car pour un système déterminé de valeurs logiques, $P_i . P_i \supset Q_i$ a la valeur logique „vrai" pour un i convenable; donc, il en est de même de $P_i \supset Q_i$; donc de Q_i, et de la deuxième disjonction).

Si P contenait des fonctions descriptives non contenues dans Q, on utiliserait la remarque 3.5.

5.31. En se souvenant que:

1⁰. Les identités de premiere espèce sans variables apparentes ont bien évidemment la propriété B.

2⁰. Les propriétés B et C sont identiques (3.31).

3⁰. Une proposition de propriété B d'ordre p a la même propriété avec tout ordre supérieur (3.5).

Les lemmes 2 et 3, le lemme du paragraphe 3.3, les remarques de 5.2, démontrent la deuxième partie du Théorème fondamental.

Remarques 1. Les propriétés A, B et C sont donc équivalentes et peuvent être dites nécessaires et suffisantes pour la vérité d'une proposition; le théorème précédent nous montre

alors que la démonstration de toute proposition vraie peut se ramener à une forme canonique, consistant à la déduire de son identité associée (2.3) (qui est la disjonction associée d'ordre p).

2. On montrerait sans peine que, si on emploie dans la démonstration d'une proposition la deuxième règle de généralisation n fois, pour des individus de hauteur $b_1 b_2 \ldots b_n$ la proposition obtenue a la propriété B d'un ordre au plus égal à $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + n$.

3. S'il y avait plusieurs types dans la proposition étudiée, il faudrait, dans chaque champ, distinguer des éléments des différents types (la valeur d'une fonction étant en particulier du type de cette fonction) et prendre garde de remplacer une variable uniquement par des éléments du même type; mais, à part cela, il n'y a rien de changé dans les considérations précédentes. (Il faudra considérer une fonction d'indice comme du même type que la variable à laquelle elle est attachée).

6. Conséquences.

A') Conséquences relatives à l'Entscheidungsproblem.

6.1. **Corollaire 1.** Pour démontrer une proposition de propriété A, on a vu que la règle d'implication était inutile, pourvu qu'on remplace la règle de simplification par la suivante:

Règle de simplification généralisée: *En remplaçant $P \vee P$ par P à l'intérieur d'une proposition vraie, on obtient une nouvelle proposition vraie.*

Or, de notre théorème et du Lemme 5.1, résulte que *toute proposition vraie a la propriété A.*

Il nous reste donc, comme seules règles de raisonnement: les règles de passage; les deux règles de généralisation; et la règle de simplification généralisée. La règle d'implication disparaît.

A cause des difficultés que l'on risque de rencontrer, dans certaines démonstrations par récurrence sur les démonstrations, du fait de la règle d'implication, nous considérons ce résultat comme très important. Il montre, en outre, que cette règle d'implication, qui provenait au fond du syllogisme classique, est inutile dans l'édification de la logique. (Elle reste cependant nécessaire dans les théories mathématiques, où il y a des hypothèses).

6.2. Les théorèmes énoncés en 5 et 4.21 permettent d'énoncer les résultats suivants:

Théorème 1. *Si P est une identité, ∞P ne peut être vraie dans un champ infini.*

Théorème 2. *Si P n'est pas une identité, on peut fabriquer un champ infini où ∞P est vrai.*

Des résultats analogues ont déja été énoncés par Löwenheim [1]) mais ses démonstrations nous paraissent tout-à-fait insuffisantes pour nos besoins. D'abord, il donne à la notion de „vérité dans un champ infini", un sens intuitif, ce qui fait que sa démonstration du théorème 2 n'atteint pas la rigueur qui nous semble désirable (cette démonstration se trouve au fond dans les considérations du § 4 et de 5.1). Mais ensuite, et ce reproche est le plus grave, il paraît, à cause même du sens intuitif qu'il donne à cette notion, considérer comme évident le théorème 1. C'est tout-à-fait inadmissible, et une telle manière de voir nous conduirait par exemple, dans un cas particulier, à considérer comme évidente la non-contradiction de l'Arithmétique. C'est au contraire la démonstration de ce théorème (dont fait partie le lemme 3.3) qui nous a offert les plus grosses difficultés.

Nous pouvons dire que la démonstration de Löwenheim était suffisante en Mathématiques; mais il nous a fallu, dans ce travail, la rendre „métamathématique" (voir l'introduction), pour qu'elle nous soit de quelque utilité.

6.3. Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer nous fournissent une méthode d'étude de l'„Entscheidungsproblem"; nous avons, en particulier, réussi à en déduire de nouvelles solutions de tous les cas particuliers déjà résolus, et même à les étendre légèrement [2]). Voici cependant un cas essentiellement différent de ceux déjà connus: celui des *propositions dont la matrice est une disjonction de propositions-éléments, ou de négations de propositions-éléments* (pouvant contenir des fonctions descriptives). Pour qu'une telle proposition soit une identité, il faut et il suffit qu'elle ait la propriété A, ce que l'on reconnaîtra facilement au moyen des remarques 2.34 et 2.4.

---

[1]) Über Möglichkeiten im Relativkalkül (Math. Annalen, T. 76, 1915).

[2]) Par exemple au cas d'une disjonction de propositions de forme $(x_1 x_2 \ldots x_n)(\exists y)(z_1 z_2 \ldots z_p) A x_1 x_2 \ldots x_n y z_1 z_2 \ldots z_p$.

6.4. **Remarque 1.** On reconnaît sans difficulté qu'une proposition vraie dans un champ fini (Ch. 2, 8.3) est aussi vraie dans un champ infini (qui est tel dans ce cas particulier, que ses champs d'ordre n ont un nombre borné d'éléments); alors le théorème du chapitre 2, § 8, résulte immédiatement du théorème 1.

Remarque 2. La notion d'„Erfüllbarkeit" utilisée par Ackerman dans son mémoire déjà cité (Ch. 2, 9.3) ne nous paraît pas définie d'une manière suffisamment complète (on ne nous donne pas de moyen précis permettant d'affirmer qu'une proposition est „erfüllbar"). Mais le théorème 1 permet immédiatement de lever cette objection. Soit, en effet, une proposition P de la forme $(x_1 x_2 \ldots x_n)(\exists z)(y_1 y_2 \ldots y_p) . A x_1 x_2 \ldots x_n z y_1 y_2 \ldots y_p$. Si ce n'est pas une identité, on peut fabriquer un champ infini où $\sim P$ est vrai; on voit immédiatement qu'il suffit de répéter le raisonnement d'Ackermann pour reconnaître qu'il y a aussi un tel champ fini, et composé d'un nombre connu d'éléments. Au contraire, si P est une identité, $\sim P$ ne peut être vraie dans un tel champ fini (d'après Ch. 2, 8.1); nous avons donc un critère permettant de reconnaître si P est une identité ou non.

Il est d'ailleurs possible — et plus simple — de montrer, par un raisonnement analogue, que si une proposition P de la forme considérée a la propriété C, elle l'a avec un ordre que l'on peut sûrement fixer d'avance, ce qui fournit un critère équivalent.

Remarque 3. Si l'on ajoutait à nos règles de raisonnement énumérées au début du chapitre 2, d'autres règles qui ne se déduiraient pas de celles-là, nous voyons que l'on serait conduit à considérer comme vraies des propositions fausses dans un champ infini; on reconnaitra que cette éventualité est difficilement admissible. Ce fait correspond à ce que les Allemands appellent la „Vollständigkeit" de notre système de règles. (On verrait même aisément que si on pouvait *démontrer* que ces règles supplémentaires conduisent à considérer comme vraie une proposition P, qui sans cela ne l'est pas, on en déduirait la contradiction des mathématiques classiques, car on pourrait fabriquer un ensemble dénombrable pour les éléments duquel P serait faux).

Remarque 4. On peut considérer que le théorème du § 5 nous donne une forme canonique pour toute démonstration

mathématique: en effet, la connaissance de l'ordre p avec lequel une proposition possède la propriété B suffit pour décrire la démonstration de cette proposition, d'après 5.1. On peut dire aussi d'une manière générale que si un théorème P est vrai dans une théorie à partir d'hypothèses (sans variables apparentes) dont le produit logique est H, la démonstration de P peut s'obtenir de la manière uniforme suivante (d'après 6.2 et Ch. 3, 2.4): *on essaie de construire un champ infini où $H \supset P$ est faux, et on constate au bout d'un certain nombre d'opérations que c'est impossible.* Cela nous conduit à dire que l'on peut toujours donner d'un théorème vrai une démonstration ne faisant appel à aucun artifice, le rôle de ceux-ci étant uniquement d'abréger les démonstrations.

B) Conséquences relatives à l'étude des théories mathématiques.

6.5. Les théorèmes obtenus dans les paragraphes précédents ont de nombreuses applications: ils fournissent une méthode générale pour l'étude des théories mathématiques. Nous allons indiquer rapidement quelques-unes de ces applications, en insistant sur la plus importante d'entre elles, qui est la non-contradiction de l'Arithmétique ordinaire.

1°. *Si toutes les hypothèses d'une théorie sont vraies dans un champ infini (4.31), cette théorie n'est pas contradictoire (Ch. 3, 2.1).*

(Car si une théorie est contradictoire, on voit immédiatement que l'on peut trouver des hypothèses $H_1, H_2 \ldots H_n$ supposées sans variables apparentes, telles que $\infty . H_1 . H_2 \ldots H_n$ soit une identité propositionnelle, donc ait la propriété B. Ce qui est impossible, d'après 4.11, puisque $H_1 . H_2 \ldots . H_n$, d'après 4.31 est vrai dans le champ infini, donc $\infty . H_1 . H_2 \ldots . H_n$ faux).

2°. *Si une théorie n'est pas contradictoire et n'a qu'un nombre fini d'hypothèses*[1]*, on peut fabriquer un champ infini où ces hypothèses sont vraies*[2]).

---

[1]) Il est aisé, mais inutile, de lever cette restriction.

[2]) Cette proposition est l'aspect „métamathématique" de celle connue sous le nom de „paradoxe de Skolem"; on remarquera en effet que les raisonnements que nous faisons sur les champs infinis peuvent se traduire en Mathématiques par des raisonnements faits sur des ensembles dénombrables.

Il suffit, comme on le voit immédiatement d'après 4.3, de rendre vrai le produit logique de ces hypothèses dans un champ réduit (4.3).

Développons rapidement quelques conséquences immédiates.

Remarquons d'abord que s'il y a des constantes c'est à dire des fonctions descriptives à 0 argument dans une théorie, il faudra les représenter dans les champs infinis, pas certains éléments que l'on pourra mettre dans le champ d'ordre 1.

6.6. Les résultats énoncés en 6.5 peuvent servir à démontrer que certaines modifications apportées dans les théories ne permettent pas de démontrer de résultats nouveaux.

Supposons, par exemple, que nous ayons une théorie avec un certain nombre de types; nous pouvons introduire pour chaque type une nouvelle fonction propositionnelle „$x = y$" d'arguments x et y, que nous énoncerons „x égale y", dans laquelle x et y seront du type considéré (nous aurons donc différentes fonctions propositionnelles représentées par des ensembles de signes qui ne différeront que par le type des variables).

Nous ajoutons les hypothèses suivantes que nous désignerons par (1):

$$\vdash . x = x \qquad \vdash . x = y . \supset . y = x \qquad \vdash : x = y . y = z . \supset . x = z$$

pour chaque type,

$$\vdash : x_1 = y_1 . x_2 = y_2 \ldots . x_n = y_n . \supset . \Phi\, x_1\, x_2 \ldots x_n \supset \Phi\, y_1\, y_2 \ldots y_n$$

pour chaque fonction propositionnelle élément $\Phi\, x_1\, x_2 \ldots x_n$,

$$\vdash : x_1 = y_1 . x_2 = y_2 \ldots . x_n = y_n . \supset . f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = f(y_1\, y_2 \ldots y_n)$$

pour chaque fonction descriptive élémentaire $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$.

On en déduit bien aisément que les deux dernières propositions sont vraies pour toute fonction.

Supposons que ces hypothèses, unies aux anciennes, entraînent la vérité de la proposition P, qui ne contient pas la nouvelle fonction propositionnelle, et n'était pas vraie avant son introduction. Soient $H_1, H_2, \ldots, H_n$ les hypothèses de la théorie primitive, nécessaires dans la démonstration de P; les hypothèses $H_1, H_2, \ldots, H_n, \infty P$ qui n'étaient pas contradictoires, le deviennent donc après adjonction des hypothèses (1). Or, on peut fabriquer un champ infini où $H_1\, H_2, \ldots, H_n \infty P$ sont vraies; pour rendre les hypothèses (1) vraies dans ce champ infini, il suffit

de convenir que $a_i = a_j$ (a_i et a_j étant des éléments du champ), n'a la valeur logique „vrai" que si les lettres a_i et a_j sont identiques. Les hypothèses $H_1, H_2, \ldots H_n, \infty P$ et (1) étant vraies dans un champ infini, ne peuvent donc être contradictoires.

Donc: *Une proposition qui n'était pas vraie avant l'introduction de l'égalité, ne peut le devenir après.*

On démontrerait par la même méthode que l'on peut dans les mêmes conditions introduire dans une théorie la notion de „couple" $< x, y >$ (à condition que le couple soit d'un autre type que ses arguments), (ce qui montrerait la non-contradiction de la théorie des nombres rationnels [1])), avec l'axiome

$$< x, y > = < x, y' > . \equiv . x = x' . y = y'$$

Revenons au cas où l'on introduit l'égalité, et demandons-nous comment on pourra déduire la démonstration de P dans le cas où l'on n'utilise pas l'égalité. Supposons que la proposition

$$H_1 . H_2 \ldots . H_n . H . \supset . P$$

H étant le produit des hypothèses (1) employées, ait la propriété B d'ordre p. Il suffit de se reporter à la démonstration des résultats antérieurs de 4.21 et 4.3 invoqués dans le texte, pour conclure que $H_1 . H_2 \ldots . H_n . \supset P$ a la propriété B d'ordre p; d'où une démonstration de P.

6.7. Le résultat de Löwenheim (loco citato), d'après lequel on pouvait ramener la résolution de „l'Entscheidungsproblem" au cas où toutes les fonctions propositionnelles n'ont que deux variables, et dont la démonstration, s'appuyait sur ses résultats insuffisamment démontrés, est maintenant complètement justifié; on peut même aller plus loin, et démontrer:

a) qu'on peut se ramener au cas où il n'y a plus ni fonctions descriptives, ni constantes.

On utilise au fond pour ce faire, la théorie de la description de Russell et Whitehead; il suffirait d'introduire l'égalité comme en 6.6, en même temps qu'on remplacerait chaque fonction descriptive $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ (une constante étant une fonction à 0 argument) par une fonction propositionnelle $\Phi\, y\, x_1 x_2 \ldots x_n$ (qui signifierait au fond $y = f(x_1 x_2 \ldots x_n)$) et qu'on introduirait les hypothèses: $(\exists z)(y) : \Phi\, y\, x_1 x_2 \ldots x_n . \supset . y = z$:

---

[1]) et de la géométrie euclidienne, dans l'axiomatisation d'Hilbert, sans „Vollständigkeitsaxiom".

b) puis au cas où il n'y a plus qu'une fonction propositionnelle à trois arguments, ou trois fonctions propositionnelles à deux arguments.

c) On démontrerait aisément que l'on peut ne plus se servir de variables apparentes, si on introduit avec Hilbert la „fonction logique" (chaque proposition donnera lieu à une telle fonction ayant pour arguments les variables réelles, et à un axiome correspondant; voir le mémoire de Hilbert de 1928). On peut en particulier toujours supposer que les hypothèses d'une théorie ne contiennent que des variables réelles.

6.8. *Non contradiction de l'Arithmétique.*

Les résultats de 6.5 nous permettent de résoudre le problème de la non-contradiction de l'Arithmétique beaucoup plus complètement que nous ne l'avons fait au Chapitre 4.

Rappelons qu'en Arithmétique, il n'y a qu'une fonction propositionnelle élément $x = y$, qu'une fonction descriptive fondamentale $x + 1$, ainsi qu'une constante fondamentale 0; on peut de plus y introduire d'autres fonctions descriptives que l'on définira par récurrence (Ch. 4, 8.5).

Soit alors la suite de lettres: $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ que nous considérerons comme indéfinie et que nous appellerons le champ A; nous conviendrons que a_0 n'est autre que la constante 0. Nous formerons les champs dont nous aurons besoin avec ces lettres; nous conviendrons que $a_i = a_j$ n'a la valeur logique „vrai" que si les indices i et j sont identiques.

Supposons que nous ayons une fonction (descriptive ou d'indice) $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$; nous dirons que nous connaissons sa valeur dans le champ A, si nous avons un procédé permettant d'attribuer une valeur à $f(a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots a_{i_n})$ pour tout système d'arguments pris dans le champ.

Une proposition P sera dite *vraie dans le champ* A, si en faisant correspondre à toute variable restreinte de P une fonction d'indice des variables générales supérieures et des variables réelles, nous pouvons donner à ces fonctions des valeurs dans le champ A telles que la proposition obtenue en remplaçant les variables restreintes de P par leurs fonctions d'indice, ait la valeur logique (calculée comme en 4.1) „vrai", de quelque manière que l'on remplace les variables générales par des éléments du

champ A. Si plusieurs propositions sont vraies dans le champ A, on voit tout de suite qu'on en déduit un champ infini où ces propositions sont vraies.

C'est ainsi qu'en convenant que la valeur de $a_i + 1$ est a_{i+1}, on vérifie immédiatement que tous les axiomes de Ch. 4, 5 sont vrais dans le champ A (le champ d'ordre p du champ infini que l'on en déduit est composé de $a_0 a_1 \ldots a_p$). D'où la non contradiction de ces axiomes.

Mais nous pouvons cette fois-ci aller plus loin.

1⁰. *Introductions des définitions par récurrence.* D'une manière plus générale qu'au Ch. 4, 8.5, nous supposerons que l'on peut adjoindre à la théorie envisagée d'autres fonctions descriptives et d'autres hypothèses de la manière suivante: supposons que les modifications précédentes aient déjà conduit à une théorie T, dont les hypothèses soient vraies dans le champ A; introduisons une nouvelle fonction descriptive $f(y, x_1, \ldots x_n)$ d'arguments $y, x_1, x_2, \ldots x_n$, avec des hypothèses de forme:

$$\vdash . \Phi\,[f(0, x_1, \ldots x_n)] \tag{1}$$

$$\vdash . \Psi\,[f(y, x_1, \ldots x_n), f(y+1, x_1, \ldots x_n)] \tag{2}$$

$$\vdash . y = y' . x_1 = x_1' \ldots x_n = x_n' . \supset . f(y, x_1 \ldots x_n) = f(y', x_1', \ldots x_n') \tag{3}$$

avec la condition que les propositions

$$(\exists x) . \Phi x \tag{4}$$

$$(y)(\exists x) . \Psi y x \tag{5}$$

soient vraies dans la théorie T (Φ et Ψ peuvent contenir d'autres variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Nous allons montrer la non-contradiction sous l'hypothèse très peu restrictive que les propositions (4) et (5) soient vraies dans le champ A (autrement dit, si on a pu les „interpréter" dans ce champ). Il suffira de remarquer que les propositions (1) et (2) sont vraies dans le champ A, si l'on prend pour les fonctions d'indice des variables de ces propositions, les mêmes que celles des variables correspondantes de (4) et (5); et si nous choisissons les valeurs de la fonction $f(y\, x_1\, x_2 \ldots x_n)$ de la manière suivante: $f(0\, x_1\, x_2 \ldots x_n)$ sera la fonction d'indice de x dans (4); si la fonction d'indice de x dans (5) est $\varphi\, y\, x_1 \ldots x_n$, on prendra comme valeur de $f(y+1, x_1 \ldots x_n)$ celle de $\varphi[f(y\, x_1 \ldots x_n); x_1, x_2, \ldots x_n]$; cela définit bien les valeurs de $f(y\, x_1 \ldots x_n)$ dans le champ A.

Quand à la proposition (3), elle est vérifiée d'elle-même dans le champ.

2⁰. *Introduction de l'axiome d'induction totale.*

Nous rappelons que (Ch. 4, 8.1), il faut ajouter aux Hypothèses les propositions de forme suivante:

$$\Phi 0 : (x) . \Phi x \supset \Phi x + 1 : \supset (y) . \Phi y. \tag{6}$$

Pour démontrer la non-contradiction de la théorie ainsi obtenue, il se présente des difficultés que nous ne chercherons pas à lever, notre but étant seulement de montrer la fécondité de la notion de „champ infini". Nous ne démontrerons cette non-contradiction que si l'on introduit des propositions de forme (6) parmi les hypothèses dans l'un ou l'autre des deux cas suivants (qui sont d'ailleurs, on s'en convaincra aisément, les principaux cas où on emploie l'axiome d'induction totale).

a) Cas où Φa est vraie dans le champ A, pour tout chiffre a. Alors il est bien évident que $(x) . \Phi x$ est vraie dans le champ A, et peut être ajoutée sans contradiction aux hypothèses.

b) Cas où Φx ne contient pas de variables apparentes.

Supposons donc qu'on ajoute aux hypothèses toutes les propositions obtenues en remplaçant (6) Φx par $\Phi_1 x, \Phi_2 x, \ldots,$ et $\Phi_n x$. Introduisons n nouvelles fonctions d'indice correspondant à x dans (1) pour chacun de ces cas, soient $f_i (y_1 y_2 \ldots y_{n_i})$ ($x, y_1 y_2, \ldots, y_{n_i}$ étant les variables réelles de $\Phi_i x$). Cherchons à fabriquer un champ infini où toutes les hypothèses de la théorie considérée soient vraies. Remarquons tout de suite qu'outre les anciennes hypothèses (celles du Ch. 4, et celles provenant des définitions par récurrence) il faudra rendre vraies les propositions:

$$\Phi_i 0 . \Phi_i f_i \supset \Phi_i f_i + 1 . \supset . \Phi_i y \tag{7}$$

provenant de la matrice de (1), en remplaçant x par sa fonction d'indice. En mettant en évidence toutes les variables réelles, $\Phi_i x$ s'écrira $\Phi_i x z_1 z_2 \ldots z_{n_i}$.

Appelons E les individus de hauteur au plus égale à p, fabriqués à partir de la constante 0, des anciennes fonctions descriptives et des nouvelles fonctions d'indice.

Nous allons rendre „vraies" toutes les hypothèses dans un champ infini: le champ d'ordre 0 sera composé de a_0; les champs d'ordre k, de lettres du champ A. Soit Γ le champ d'ordre p. Tout individu de Γ est la valeur d'un individu E, et réciproquement, tout individu E a une valeur dans Γ. Pour que les hypothèses considérées soient vraies dans le champ infini, il suffit que:

1⁰. Les anciennes fonctions descriptives aient la même valeur que dans A, et la fonction propositionnelle $x=y$, la même valeur logique.

2⁰. $f_i(y_1 y_2 \ldots y_{n_i})$ n'ait de valeur différente de 0 que s'il y a un indice j différent de 0 tel que a_j et a_{j+1} soient dans Γ et que $\Phi_i a_j y_1 y_2 \ldots y_{n_i}$ ait la valeur logique „vraie", $\Phi_i a_j + 1, y_1 y_2 \ldots y_{n_i}$ la valeur logique „faux"; $f_i(y_1 y_2 \ldots y_{n_i})$ devant alors avoir la valeur a_j.

Pour fabriquer les champs il suffit donc d'y trouver les valeurs de ces fonctions d'indice.

Nous appellerons fonctions de première sorte toute fonction (de hauteur quelconque) obtenue à partir des anciennes fonctions élémentaires descriptives; fonctions de deuxième sorte, les nouvelles fonctions d'indice (celles-ci sont de hauteur 1).

Supposons que nous ayons un champ C, où l'on connaisse déjà les valeurs de certains individus E; nous faisons sur lui l'opération suivante (si toute fois elle est possible):

1⁰. *S'il y a* des individus E qui soient des fonctions de première sorte d'individus E dont on connaisse la valeur dans C, on ajoute à C les valeurs de ces individus pris dans le champ A (ces valeurs pouvant figurer ou non déjà dans C: dans le premier cas, cela fournit seulement de nouveaux individus E dont on connaîtra la valeur dans C).

2⁰. *S'il n'y a pas* de tels individus, et s'il y a des individus E qui sont des fonctions de deuxième sorte d'individus E dont on connaisse la valeur dans C, prenons-en un: $f_i(y_1 y_2 \ldots y_{n_i})$ ($y_1, y_2, \ldots, y_{n_i}$ étant des lettres de C).

a) Si $\Phi_i(0 y_1 y_2 \ldots y_{n_i})$ est faux dans A, on donne à cet individu la valeur 0.

b) S'il y a un élément de C, soit a_j différent de a_0 tel que

α) a_j et a_{j+1} soient dans C;

β) $\Phi_i\, a_j y_1 y_2 \ldots y_{n_i}$ ait la valeur logique „vrai", et $\Phi_i\, a_j + 1, y_1 y_2 \ldots_{n_i}$, la valeur logique „faux",
on donne à cet individu la valeur a_j.

Partons du champ composé de a_0, et effectuons l'opération précédente un nombre suffisant de fois; on aura des champs de plus en plus étendus où on aura les valeurs d'un toujours plus grand nombre d'individus E. Il est bien évident qu'il arrivera un moment (au bout d'un nombre d'opérations au plus égal au nombre des individus E) à un champ Γ où l'opération précédente sera impossible; les individus E se diviseront alors en 3 catégories:

1) les e_1 ayant une valeur dans le champ Γ.

2) les e_2 fonctions de deuxième espèce des e_1 ne rentrant dans aucune des catégories a) et b) ci-dessus.

3) les e_3, fonctions de e_2.

Donnons aux e_2 la valeur 0. Les e_3 sont des fonctions des e_2; remplaçons dans ces fonctions ces e_2 par 0; les e_3 deviennent des individus E, de hauteur au plus égale à celle des e_3 dont on part. A ceux d'entre eux qui deviennent des e_1 ou des e_2, on donne la valeur de l'E en lequel ils se transforment. Pour ceux d'entre aux qui deviennent d'autres e_3, on répète la même transformation.

On finit ainsi par donner des valeurs à tous les individus E dans Γ. On obtient donc le champ d'ordre p cherché.

On constate immédiatement que ce champ satisfait aux conditions énoncées ci-dessus. Notre démonstration est donc achevée.

L'exemple précédent fournit un exemple caractéristique d'application de notre méthode. Nous espérons d'ailleurs que nos théorèmes permettront de démontrer la non-contradiction de la théorie obtenue en ajoutant à l'Arithmétique le type des classes (Ch. 3, 2.3) et les axiomes correspondants; les difficultés que nous avons rencontrées dans cette direction, et qui sont analogues à celles qu'offre le cas général de l'axiome d'induction totale, nous paraissent en étroite connexion avec les question qui se posent autour du premier lemme de Hilbert dans son mémoire „Sur l'Infini". Nous croyons aussi que l'on pourra arriver par cette voie à un théorème général dont un cas particulier serait

le suivant: *les méthodes transcendantes ne peuvent permettre de démontrer en Arithmétique de théorème qu'on ne puisse démontrer sans leur aide*[1]). Notre théorème du § 5, qui fournit un type canonique pour toute démonstration, permettrait alors de donner la démonstration purement arithmétique de ces théorèmes.

Nous avons voulu dans ce qui précède donner quelques applications simples de nos théorèmes; nous espérons pouvoir dans un prochain travail montrer leur utilité dans l'étude des théories à „complète détermination" (Ch. 3, 3.1), et dans celle de la constructibilité des objets mathématiques. Mais il est bien certain que la direction la plus intéressante, et sans doute la plus difficile, serait la recherche de la solution de l'„Entscheidungproblem". La solution de ce problème fournirait une méthode générale en Mathématiques, et permettrait de faire jouer à la logique mathématique, vis-à-vis des Mathématiques classiques, le même rôle que la géométrie analytique vis-à-vis de la géometrie ordinaire.

14 Avril 1929.

---

[1]) Nous nous sommes assurés que l'on pourrait démontrer ce théorème, si on avait résolu l'Entscheidungsproblem, et démontré la non-contradiction de la théorie Russell et Whitehead (en y supposant vrais les axiomes multiplicatifs et de l'infini).