VLADIMIR BERNSTEIN

# Sur les singularités des séries de Dirichlet

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1930

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1930__107__1_0>

N. D'ORDRE
2118
—
Série A
N de série: 1249

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR


## VLADIMIR BERNSTEIN

Licencié ès-Sciences


1re THÈSE - Sur les singularités des séries de Dirichlet.

2e THÈSE - Propositions données par la Faculté.

Soutenues le                    1930 devant la Commission d'Examen

MM. Paul MONTEL, *Président*

Arnaud DENJOY, Maurice FRÉCHET } *Examinateurs*


PAVIA

PREM. TIPOGRAFIA SUCC. FRAT. FUSI

Via L. Spallanzani, 11 - 1930

# FACULTÉ DES SCIENCES
# DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

---

MM.

*Doyen* — C. Maurain, *Professeur*, Physique du globe.

*Doyens honor.* — P. Appel, M. Molliard.

*Professeurs honoraires*
- A. Joannis.
- H. Le Chatelier.
- H. Lebesgue.
- A. Fernbach.
- A. Leduc.
- E. Herouard.

*Professeurs*
- Émile Picard, Analyse supérieure et algèbre supérieure.
- G. Koenigs, Mécanique physique et expérimentale.
- E. Goursat, Calcul différentiel et calcul intégral.
- P. Janet, Eléctrotechnique générale.
- F. Wallerant, Minéralogie.
- P. Painlevé, Mécanique analytique et mécanique céleste.
- Gabriel Bertrand, Chimie biologique.
- M.me P. Curie, Physique générale et radioactivité.
- M. Caullery, Zoologie (évolution des êtres organisés).
- G. Urbain, Chimie minérale.
- Émile Borel, Calcul des probabilités et Physique mathématique.
- L. Marchis, Aviation.
- Jean Perrin, Chimie physique.
- Rémy Perrier, Zoologie (enseignement P. C. N.).
- H. Abraham, Physique.
- M. Molliard, Physiologie végétale.
- F. Cartan, Géométrie supérieure.
- L. Lapicque, Physiologie générale.
- E. Vessiot, Théorie des fonctions et théorie des transformations.
- A. Cotton, Physique générale.
- J. Drach, Application de l'analyse à la géométrie.
- Charles Fabry, Physique.
- Charles Pérez, Zoologie.
- Léon Bertrand, Géologie structurale et géologie appliquée.

*Professeurs*

R. Lespieau, Théories chimiques.
E. Rabaud, Biologie expérimentale.
P. Portier, Physiologie comparée.
E. Blaise, Chimie organique.
P.-A. Dangeard, Botanique.
Paul Montel, Mécanique rationnelle.
P. Wintrebert, Anatomie et hystologie comparées.
O. Dubosq, Biologie maritime.
G. Julia, Mathématiques générales.
A. Mailhe, Etude des combustibiles.
L. Lutaud, Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène Bloch, Physique téorique et physique celeste.
Henri Villat, Mécanique des fluides et applications.
Ch. Jabob, Géologie.
P. Pascal, Chimie minérale.
Léon Brillouin, Théories physiques.
V. Auger, Chimie appliquée.
E. Esclangon, Astronomie.
E. Péchard, Chimie (enseignement P. C. N.).
M. Guichard, Chimie minérale.
A. Guillet, Physique.
G. Mauguin, Minéralogie.
L. Blaringhem, Botanique.
A. Michel Lévy, Pétrographie.
A. Dereims, Géologie.
A. Denjoy, Calcul différentiel et intégral.
H. Bénard, Physique (P. C. N.).
E. Darmois, Physique.
G. Bruhat, Physique.
H. Mouton, Chimie physique.
L. Joleaud, Paléontologie.
M. Javillier, Chimie biologique.
A. Dufour, Physique (P. C. N.).
F. Picard, Zoologie (évolution des êtres organisés).
Robert Lévy, Zoologie.
L. Dunoyer, Optique appliquée.
A. Guillermond, Botanique (P. C. N.).
A. Debierne, Radioactivité.
M. Fréchet, Calcul des probabilités et physique matematique.

*Sécretaire* A. Pacaud.

PREMIÈRE THÈSE

# Sur les singularités des séries de Dirichlet

(Extrait des Rendiconti del R. Istituto Lombardo
delle Scienze e Lettere, Serie II, Vol. LXIII, Fasc. VI X).

A mon Maître

M. PAUL MONTEL

PROFESSEUR À LA SORBONNE

hommage de profond respect
et de sincère reconnaîssance.

## Index.



## Introduction.

La raison pour laquelle le cercle de convergence joue un rôle si grand dans la théorie des fonctions déterminées par des séries de Taylor $\Sigma\, a_\nu\, x^\nu$ est que ce cercle, en plus de la propriété (qui lui sert de définition) de délimiter la région où la série considérée converge de celle où elle diverge, possède encore la propriété d'être le plus grand cercle $|\, x\,| \leqq R$, à l'intérieur duquel la fonction est holomorphe, tandis qu'elle a au moins un point singulier sur le cercle lui-même. Mais quand on passe des séries de Taylor aux séries de Dirichlet, on voit que la droite de convergence qui délimite encore les régions de convergence et de divergence ne possède plus nécessairement l'autre propriété du cercle de convergence. Il peut arriver en effet qu'une fonction définie par une série de Dirichlet

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

ne possède aucune singularité sur la droite de convergence de la série qui la définit et même n'en possède aucune à une certaine distance de cette droite. Deux questions viennent donc tout naturellement à l'esprit:

1) *quelles sont les suites d'exposants* $\{\lambda_\nu\}$, *pour lesquelles toute fonction* f(s) *déterminée par une série du type* (1) *possède nécessairement au moins une singularité sur la droite de convergence de la série?*

2) *est-il possible de déterminer pour les autres suites d'exposants une droite sur laquelle la fonction possède nécessairement au moins une singularité, tout en restant holomorphe dans le demi-plan limité par cette droite; quelle peut être la position de cette droite par rapport à la droite de convergence?*

Malheureusement, l'état actuel de la Science ne permet pas de répondre à ces questions. La possibilité de répondre par l'affermative à la deuxième question representerait un très grand intérêt pour la théorie de la fonction $\zeta(s)$ et permettrait de faire un grand pas en avant du point de vue de la démonstration de l'hypothése de Riemann. Toutefois, si au lieu d'imposer l'existence d'une seule singularité sur les droites considérées, nous imposerons l'existence d'une infinité de points singuliers, il sera possible sinon de répondre complètement à nos questions, du moins de s'aventurer assez loin dans la voie de leur résolution.

Plusieurs auteurs se sont occupés de problèmes en rapport avec les questions qui nous intéressent; je n'indiquerai ici que les résultats qui se rattachent directement à ceux qui forment l'objet de ce travail; quant aux autres, on en trouvera une exposition assez complète dans le fascicule du Mémorial des Sciences Mathématiques consacré aux séries de Dirichlet [1].

MM. Landau et Carlson ont démontré que si la suite des $\{\lambda_\nu\}$ est telle que

---

[1] G. Valiron. Théorie générale des séries de Dirichlet (*Mém. Sc. Math.* fasc. XVII, p. 21, Paris, 1926).

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0 \tag{2}$$

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = g > 0 \tag{3}$$

la droite de convergence de la série (1) représente sûrement une coupure pour la fonction $f(s)$ (1). Ce résultat a été généralisé par M. Pólya dans deux directions différentes. En premier lieu, M. Pólya a démontré que, si l'on remplace la condition (2) par

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \Delta < +\infty \tag{4}$$

et si l'on conserve la condition (3), on peut attacher à la suite $\{\lambda_n\}$ un nombre fini D, qu'il appelle *densité maximum* (2), tel que chaque segment de la droite de convergence de longueur supérieure à $2\pi D$ contient au moins un point singulier de $f(s)$ (3). D'autre part, M. Pólya a démontré que, si l'on conserve la condition (2) en laissant tomber la condition (3), on peut affirmer que, ou bien la fonction $f(s)$ est une fonction entière, ou bien son domaine d'existence est un demi-plan $\mathfrak{R}(s) > h$, dont la droite limite est une coupure pour $f(s)$ et à l'interieur duquel $f(s)$ ne possède aucune singularité (4).

Le théorème de MM. Carlson et Landau et le premier théorème de M. Pólya montrent que les suites $\{\lambda_n\}$ qui vérifient les conditions (3) et (4) satisfont à notre première question. Le deuxième théorème de M. Pólya montre que pour les suites $\{\lambda_n\}$ qui vérifient (2) la réponse à la première partie de notre deuxième question est affirmative. Le but de ce travail est de donner un théorème qui comprend en même temps les deux théoremes précités de M. Pólya et qui permet de répondre à nos deux questions, lorsque l'on se borne à la considération de suites $\{\lambda_n\}$ qui possèdent une densité maximum finie. Pour

---

(1) F. CARLSON et F. LANDAU. Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes (*Gött. Nachr.*, 1921, p. 183).

(2) Pour la définition précise de la densité maximum voir plus loin.

(3) G. PÓLYA Ueber die Existenz unendlich vieler singulärer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichletscher Reihen (*Berl. Sitz.*, 1923, p. 45).

(4) G. PÓLYA. Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes (*Gött. Nachr.*, 1927, p. 187).

toutes ces suites la réponse à la première partie de la deuxième question est affirmative; il existe une droite $\Re(s) = h$ telle que la fonction $f(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re(s) > h$, mais possède sûrement une infinité de singularités sur la droite $\Re(s) = h$ elle-même. Je donne à cette droite le nom de *droite d'holomorphie* de la fonction $f(s)$.

Pour ce qui regarde l'autre partie de la deuxième question, nous indiquerons une borne supérieure pour la distance entre la droite de convergence et la droite d'holomorphie, et par cela même nous répondrons à la première question, car dire que la droite de convergence contient des singularités de $f(s)$ équivaut à dire que les droites de convergence et d'holomorphie de cette fonction se confondent. La propriété d'être le siège d'une infinité de points singuliers est évidemment une propriété de la droite d'holomorphie et non de la droite de convergence, et si MM. Carlson et Landau et M. Pólya (dans son premier théorème) ont parlé seulement de la droite de convergence, c'est que dans les cas considérés par eux les deux droites se confondent, de sorte que l'introduction de la notion de droite d'holomorphie était superflue.

Je passe maintenant à une brève exposition des résultats contenus dans la suite.

Les trois premiers paragraphes du premier chapitre contiennent une étude de quelques propriétés des suites de nombres réels $\lambda_n$ qui possèdent une *densité maximum* finie. La notion de densité maximum dont je fais grand usage a été introduite par M. Pólya, dans un mémoire [1] où il a étudié de près les propriétés des suites $\{\lambda_n\}$. Toutefois M. Pólya, comme d'ailleurs presque tous les auteurs qui se sont occupés des théorèmes sur la distribution des singularités des séries de Dirichlet que l'on peut obtenir au moyen de l'étude des propriétés de la fonction

$$C(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

s'est limité à la considération des suites d'exposants $\lambda_\nu$ qui vérifient la condition (3). Je me suis attaché à voir s'il n'était

[1] G. Pólya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (*Math. Zeitschrift*, T. 29, 1929, p. 550).

pas possible de généraliser la notion de densité maximum de manière à ne pas exclure les suites $\{\lambda_n\}$ qui ne vérifient pas cette condition.

D'autre part, lorsque l'on étudie les propriétés de la fonction $C(z)$, on doit généralement exclure le voisinage des points $\lambda_\nu$. Lorsque la condition (3) est vérifiée, on peut exclure les intervalles $(\lambda_\nu - \eta, \lambda_\nu + \eta)$, mais lorsque cette condition n'est pas satisfaite, l'exclusion des intervalles précédents, lesquels dans ce cas peuvent empiéter les uns sur les autres quelque petit que soit $\eta$, ne paraît plus être suffisante pour l'établissement des propositions nécessaires pour la théorie des séries de Dirichlet. J'ai donc dû définir certains ensembles d'intervalles attachés aux suites $\{\lambda_n\}$ et qui contiennent le voisinage des points $\lambda_\nu$. C'est à la définition de ces ensembles qu'est consacré le § 2, tandis que les §§ 1 et 3 sont consacrés aux propriétés des suites $\{\lambda_n\}$ qui admettent une densité maximum finie. J'y démontre que la plupart des résultats démontrés par M. Pólya dans le cas spécial considéré par lui restent vrais dans le cas général.

Les trois derniers paragraphes du premier chapitre contiennent une étude des propriétés de la fonction $C(z)$. Cette fonction a été étudiée par plusieurs auteurs, notamment par MM. Carlson, Landau, Ostrowski, Pólya, Szasz, Wennberg et autres. M. Carlson a démontré que lorsque la suite $\{\lambda_\nu\}$ a la densité D la fonction $C(z)$ se comporte essentiellement comme $\sin \pi D z$ sur tous les rayons issus de l'origine à l'exception peut-être de l'axe réel (1). M. Pólya a en outre démontré que dans le même cas on a

$$\lim \frac{\log |C(r)|}{r} = 0$$

lorsque $r$ croît indéfiniment par valeurs réelles en restant à l'extérieur des intervalles $\lambda_\nu - \eta \leqq z \leqq \lambda_\nu + \eta$ (2). Je démontre au § 4 que ce théorème reste vrai même si la condition (3) n'est pas vérifiée, pourvu que l'on remplace les intervalles $(\lambda_\nu - \eta, \lambda_\nu + \eta)$ par l'ensemble d'intervalles défini au § 2. Dans les §§ 5 et 6 je démontre encore quelques propositions

---

(1) F. Carlson. Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten (*Math. Ann.*, T. 79, 1919, p. 239).

(2) Voir *Math. Zeitschrift*, *l. c.* p. 571.

relatives à la fonction C $(z)$, propositions dont je fais usage au deuxième chapitre, qui est consacré aux séries de Dirichlet.

Les deux premiers paragraphes du deuxième chapitre contiennent la démonstration de deux théorèmes que l'on peut considérer comme l'analogue des théorèmes que MM. Lindelöf, Carlson et Soula ont démontrés pour les séries de Taylor (1). Aux §§ 9 et 10 je démontre qu'à l'aide des théorèmes précédents on peut établir des théorèmes assez généraux sur la distribution des points singuliers de telles séries de Dirichlet. Je suis conduit ainsi à introduire la notion de droite d'holomorphie et je démontre en particulier les résultats déjà annoncés relatifs à cette droite.

Voici les principaux de ces résultats:

*Si la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *possède une densité maximum finie* D, *chaque segment de la droite d'holomorphie de la fonction*

$$(5) \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

*dont la longueur dépasse* $2\pi$D *contient au moins un point singulier de* f(s).

*La distance entre la droite de convergence et la droite d'holomorphie de* (5) *ne peut pas être supérieure à un nombre* $|\delta|$ *qui est complètement déterminé par la suite* $\{\lambda_\nu\}$; je donne l'expression analytique de ce nombre et je démontre que *l'on peut toujours choisir les coefficients* $a_\nu$ *de telle sorte que cette distance soit exactement égale à* $|\delta|$ (2).

---

(1) E. Lindelöf. Calcul des résidus, Paris, 1905, chap. V; F. Carlson. Sur une classe de séries de Taylor, Upsal, 1914; M. Soula. Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor (*Ann. Ec. Norm.*, T. 44, 1927, p. 97); voir aussi le Mémoire de M. Carlson cité plus haut.

(2) MM. Carlson et Landau ont donné une borne supérieure de la distance entre les droites d'holomorphie et de convergence pour le cas D$=0$ (*l. c.*, théorème II); M. Neder a montré que *pour certaines suites* $\{\lambda_\nu\}$ on peut choisir les $a_\nu$ de telle sorte que cette borne soit atteinte (*Math. Ann.*, T. 85, 1922, p. 111). Mais on peut construire des suites $\{\lambda_\nu\}$ de densité D$=0$ pour lesquelles la borne indiquée par MM. Carlson et Landau ne peut pas être atteinte, quel que soit le choix des $a_\nu$. J'indiquerai dans un autre travail des exemples de telles suites.

Les théorèmes des §§ 7 et 8 sont très fertiles en conséquences. Je n'ai signalé ici que les principales conséquences concernant la distribution des singularités des séries de Dirichlet. On pourrait d'ailleurs en indiquer beaucoup plus; je renvoie le lecteur qui s'y intéresserait aux travaux indiqués dans la note (1) de la page précédente; à l'aide de ces livres il se rendra aisément maître de la méthode qui permet de retrouver ces conséquences, car les différences de méthode rendues nécessaires par la substitution des séries de Dirichlet aux séries de Taylor résultent d'unemanière suffisante de la comparaison de la démonstration de mes théorèmes des §§ 7 et 8 avec celle des théorèmes de MM. Lindelöf, Carlson et Soula.

D'autre part, le théorème du § 8 permet aussi de démontrer des théorèmes sur la relation qui existe entre la croissance d'une fonction holomorphe dans un demi-plan et sa croissance en une suite de points isolés (1). Je n'ai pas parlé du tout ici des conséquences de ce genre, car j'estime qu'elles méritent un Mémoire séparé; j'espère avoir l'occasion de le publier dans peu de temps dans un autre receuil.

## Chapitre I.

§ 1. — Soit

$$(1) \qquad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots\ \lambda_n,\ \ldots\ldots$$

une suite de nombres réels positifs rangés par ordre de croissance. Nous dirons, suivant une terminologie introduite par M. Pólya (2), que cette suite est *mesurable* et *de densité* D si le rapport $\frac{n}{\lambda_n}$ tend vers D lorsque $n$ croît indéfiniment.

Supposons maintenant que la suite (1) n'est pas mesurable, mais que l'on a

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{n}{\lambda_n} = \Delta$$

(1) Voir mes Notes aux *Comptes Rendus*, T. 186, 1928, p. 1407, et T. 187, 1928, p. 1018, ainsi que mon Mémoire « Généralisation et conséquences d'un théorème de Le Roy-Lindelof » (*Bull. Sc. Math.*, T. 52, 1928, p. 420).

(2) *Math. Zeitschrift*, *l. c.* p. 559.

M. Pólya a démontré que, *si la condition supplémentaire*

$$(3) \qquad \underline{\lim}_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = p > 0$$

*est vérifiée*, il existe des suites mesurables qui contiennent la suite (1) comme suite partielle; la borne inférieure des densités de ces suites est appelée par lui *densité maximum* de la suite (1). Il y a sûrement une suite mesurable qui contient la suite (1) comme suite partielle et dont la densité est précisément égale à la densité maximum de (1). Cette densité maximum D satisfait à la condition

$$D \leqq \frac{1}{p}$$

et l'on a

$$(4) \quad D = \lim_{\xi \to 1} D(\xi); \qquad D(\xi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r - r\xi} \quad (0 \leqq \xi < 1)$$

où $N(r)$ désigne le nombre des points $\lambda_k$ compris dans l'intervalle $0 < \lambda_k \leqq r$ [1].

Or, il peut arriver qu'il existe des suites mesurables contenant la suite (1) comme suite partielle, *même si la condition* (1) *n'est pas vérifiée.* Dans ce cas nous dirons encore que *la suite* (1) *possède une densité maximum finie, que nous définirons encore comme borne inférieure des densités des suites mesurables qui contiennent la suite* (1) *comme suite partielle.* Nous allons voir plus loin (§ 3) que les formules (4) restent encore valables dans ce cas; en attendant nous allons montrer qu'il y a toujours une suite mesurable contenant la suite (1) comme suite partielle et dont la densité est précisément égale à la densité maximum de la suite (1).

Pour démontrer cette proposition désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$.. une suite de nombres positifs décroissants tendant vers zéro. Nous pouvons construire un ensemble de suites mesurables

$$\varrho_{k,1}, \varrho_{k,2}, \ldots, \varrho_{k,n}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

contenant toutes la suite (1) comme suite partielle et telles que la densité de la suite d'ordre $k$ soit inférieure à $D + \varepsilon_k$.

---

[1] En réalité M. Pólya prend les expressions (4) comme définition de la densité maximum et il démontre que celle-ci possède les propriétés caractéristiques que nous avons pris ici comme définition.

Cela étant, désignons par $N_k(r)$ le nombre des points de la suite $\varrho_{k,i}$ $(i = 1, 2, ....)$ qui sont compris entre O et $r$ (limites exclues), et par $D_k$ la densité de la même suite. (Nous pouvons toujours supposer que $D_{k+1} < D_k$). Choisissons le nombre $r_1$ de telle sorte que l'on ait, pour $r \geqq r_1$

$$\left| \frac{N_1(r)}{r} - D_1 \right| < \varepsilon_1, \qquad \left| \frac{N_2(r)}{r} - D_2 \right| < \varepsilon_1.$$

On aura alors

$$| N_2(r_1) - N_1(r_1) | < r_1 (D_1 - D_2) + 2 \varepsilon_1 r_1 < 3 \varepsilon_1 r_1$$

Posons maintenant

$$N_1(r_1) = p_1 \qquad N_2(r_1) = q_1$$

et formons la suite

(R) $\quad \varrho_{1,1}, \varrho_{1,2}, \dots, \varrho_{1,p_1}, \varrho_{2,q_1+1}, \varrho_{2,q_1+2}, \dots, \varrho_{2,q_1+m}, \dots$

Si nous désignons par $N'_2(r)$ le nombre des points de cette suite compris entre O et $r$, on aura évidemment pour $r > r_1$

$$| N'_2(r) - N_2(r) | = | N_1(r_1) - N_2(r_1) |$$

et, par conséquent

$$\left| \frac{N'_2(r)}{r} - \frac{N_2(r)}{r} \right| < \frac{3 \varepsilon_1 r_1}{r} \to 0$$

La suite (R) sera donc mesurable et de densité $D_2$. En outre elle comprendra évidemment la suite (1) comme suite partielle.

En continuant de la même manière, nous pourrons trou ver un nombre $r_2$ supérieur à $3 r_1$ et tel que l'on ait pour $r \geqq r_2$

$$\left| \frac{N'_2(r)}{r} - D_2 \right| < \varepsilon_2, \qquad \left| \frac{N_3(r)}{r} - D_3 \right| < \varepsilon_2$$

et, par conséquent

$$| N_3(r_2) - N'_2(r_2) | < 3 \varepsilon_2 r_2; \qquad | N_3(r_2) - N_2(r_2) | < 4 \varepsilon_1 r_2$$

On construira alors la suite qui est composée des points de la suite (R) inférieurs à $r_2$ et de ceux de la suite $\{\varrho_{3,m}\}$ $(m = 1, 2, ....)$ supérieurs à $r_2$. On s'assurera comme plus haut que cette suite sera mesurable et de densité $D_3$, et il est évident qu'elle comprend la suite (1) comme suite partielle.

En continuant indéfiniment le même procédé on arrivera à déterminer une suite de fonctions

$$N'_2(r),\ N'_3(r),\ \ldots,\ N'_k(r),\ \ldots$$

et une suite de nombres

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_k,\ \ldots$$

tels que l'on ait en premier lieu $r_k > 3\, r_{k-1}$, et que l'on ait en outre pour $r \geqq r_k$

$$\left|\frac{N'_k(r)}{r} - D_k\right| < \varepsilon_k\,, \qquad \left|\frac{N_{k+1}(r)}{r} - D_{k+1}\right| < \varepsilon_k$$

et donc

$$| N_{k+1}(r_k) - N'_k(r_k) | < 3\, \varepsilon_k\, r_k\,,$$
$$| N_{k+1}(r_k) - N_k(r_k) | < 4\, \varepsilon_{k-1}\, r_k$$

Il est évident que les nombres $r_k$ peuvent être choisis de sorte à ne se confondre avec aucun des points des suites $\varrho_{k,\nu}$ et $\varrho_{k+1,\nu}$.

Cela étant, construisons une suite qui comprenne tous les points de la suite $\varrho_{1,\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ compris entre 0 et $r_1$, puis tous les points de la suite $\varrho_{2,\nu}$ compris entre $r_1$ et $r_2$, et en général tous les points de la suite $\varrho_{k,\nu}$ compris entre $r_{k-1}$ et $r_k$. Appelons cette suite la suite (P) et désignons par $n(r)$ le nombre de ses points compris entre zéro et $r$.

On aura alors

$$n(r) = -\sum_{\mu=2}^{\mu=h} \{N_\mu(r_{\mu-1}) - N_{\mu-1}(r_{\mu-1})\} + N_h(r)$$

où $h$ est choisi de telle sorte que $r_h < r \leqq r_{h+1}$.

Assujettissons maintenant les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ qui n'étaient jusqu'ici soumis qu'à la seule condition de tendre vers zéro en décroissant, à la condition supplémentaire que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ soit convergente, et soit $\varepsilon_0$ la somme de cette série.

Donnons nous un nombre positif $\delta$ aussi petit que l'on veut, et choisissons le nombre $l$ de telle sorte que l'on ait

$$\sum_{\nu=l}^{\infty} \varepsilon_\nu < \frac{\delta}{12}$$

choisissons en outre le nombre $k$ de telle sorte que

$$\frac{r_l}{r_k} < \frac{\delta}{8\,\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad k \leqq l+1$$

Nous aurons alors pour $r > r_k$

$$\left|\frac{n(r)}{r} - \frac{N_h(r)}{r}\right| \leqq 4 \sum_{\mu=2}^{\mu=h} \varepsilon_{\mu-2} \frac{r_{\mu-1}}{r} \leqq 4 \sum_{\mu=2}^{\mu=l+1} \varepsilon_{\mu-2} \frac{r_l}{r_k} +$$

$$+ 4 \sum_{\mu=l+2}^{\infty} \varepsilon_{\mu-2} \leqq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{3} = \frac{5\,\delta}{6}$$

D'autre part, on a $r > r_h$, et par conséquent

$$\left|\frac{N_h(r)}{r} - D_h\right| < \varepsilon_{h-1} < \frac{\delta}{12}$$

et

$$|\, D_h - D \,| < \varepsilon_h < \frac{\delta}{12}$$

Donc, en définitive on a pour $r > r_k$

$$\left|\frac{n(r)}{r} - D\right| < \delta$$

ce qui montre précisément que la suite (P) est mesurable et de densité D. Or, il est évident, d'après le mode de construction de cette suite, qu'elle contient la suite (1) comme suite partielle. Notre proposition est donc établie.

Nous terminerons ce paragraphe en donnant quelques exemples de suites non mesurables qui admettent une densité maximum finie.

I. En premier lieu, on obtient une telle suite en prenant tous les nombres entiers qui satisfont aux inégalités

$$2^{2k} < \lambda \leqq 2^{2k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

alors, si l'on pose

$$\alpha_k = \frac{4^{k+1} - 1}{3} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

on aura, lorsque $n$ est tel que $\alpha_{k-1} < n \leqq \alpha_k$

$$\lambda_n = 2^{2k} + n - \alpha_{k-1}.$$

On s'assurera immédiatement que cette suite n'est pas mesurable en calculant le rapport $\dfrac{n}{\lambda_n}$ pour les valeurs de $n$ égales à $\alpha_k$ et $\alpha_k + 1$ $(k \rightarrow \infty)$; d'autre part, la suite étant comprise comme suite partielle dans la suite des nombres entiers, sa densité maximum est finie.

II. La suite que nous venons de construire satisfait à la condition (3). Nous aurons une suite qui ne satisfait pas à cette condition en prenant

$$\mu_1 = \lambda_1 \qquad \mu_{2m} = \lambda_{2m} - e^{-m} \qquad \mu_{2m+1} = \lambda_{2m} \qquad (m = 1, 2, ...)$$

Pour obtenir une suite mesurable contenant cette suite comme suite partielle, il suffira de *lui adjoindre la suite des entiers qui ne font pas partie des* $\lambda_n$.

III. Enfin, nous pourrons former une suite *qui contient des groupes de plusieurs points très rapprochés*. Nous partirons encore de la suite $\{\lambda_n\}$ et nous poserons

$$\begin{array}{lll} \nu_n = \lambda_n & \text{lorsque} & \alpha_{k-1} < n < \alpha_k - k \\ \nu_n = 2^{2k+1} - (\alpha_k - n)e^{-n} & \text{»} & \alpha_k - k \leqq n \leqq \alpha_k \end{array} \quad (k = 1, 2, ...)$$

On s'assurera que cette suite a une densité maximum finie de la même manière que pour la suite $\{\mu_n\}$.

§ 2. — Considérons maintenant une suite $\{\lambda_p\}$ possédant une densité maximum D. Choisissons une suite mesurable $\{m_\nu\}$ de densité D contenant la suite $\{\lambda_p\}$ comme suite partielle. (Si la suite est elle même mesurable, on prendra $m_\nu = \lambda_\nu$).

Soit $\xi$ un nombre réel fixe, supérieur à l'unité, d'ailleurs quelconque. Notons sur l'axe réel positif les points $1, \xi, \xi^2, ....$ désignons par $\Delta_\mu$ l'intervalle

$$\xi^{\mu-1} \leqq r < \xi^\mu, \qquad (\mu = 1, 2, ....),$$

$\Delta_0$ désignant l'intervalle (0, 1), et soit $s_\mu$ la longueur de l'intervalle $\Delta_\mu$.

Déterminons le nombre $r_0$ de telle sorte que, pour $m_p > r_0$, on ait

$$\left| \frac{p}{m_p} - D \right| < \frac{1}{10} D$$

et soient $p_0$ et $\mu_0$ des entiers tels que

$$\lambda_{p_0} \leqq r_0 < \lambda_{p_0+1}$$
$$\xi^{\mu_0-1} < r_0 \leqq \xi^{\mu_0}$$

Désignons encore par $N_\mu$ le nombre des points $\lambda_p$ situés dans l'intervalle $\Delta_\mu$ ($\mu > \mu_0$); $N_\mu$ est évidemment non supérieur au nombre des points $m_p$ contenus dans le même intervalle; on aura donc

$$N_\mu < \frac{11}{10} D \xi^\mu - \frac{9}{10} D \xi^{\mu-1} = s_\mu D \left[\frac{11}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\xi - 1}\right]$$

ou encore, en désignant par $m$ la quantité

$$D \left[\frac{11}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\xi - 1}\right]$$

(ou l'unité, si cette quantité lui est inférieure),

$$N_\mu < m\, s_\mu$$

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction réelle, positive et non croissante de $x$ déterminée pour toutes les valeurs positives de la variable, et posons

$$\eta_p = f(\lambda_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots.)$$

Nous supposerons que la fonction $f(x)$ est telle que l'on a $m\, f(\lambda_1) < \frac{1}{4}$, et que, par conséquent, quel que soit $p$, on a

$$m\, f(\lambda_p) < \frac{1}{4}\,; \qquad f(\lambda_p) < \frac{1}{4}\,.$$

Nous allons construire une suite d'ensembles $e_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots$), ces ensembles étant formés d'un certain nombre d'intervalles non empiétant les uns sur les autres et chacun de ces intervalles correspondant à un point $\lambda_p$ d'une manière bi-univoque.

Considérons un intervalle $\Delta_\mu$ et désignons par

$$\lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_q$$

les points $\lambda_p$ qui sont situés dans cet intervalle. Si $\lambda_r$ est un de ces points (distinct du premier point $\lambda_m$), nous lui ferons correspondre un intervalle $\delta_r$ de longueur $\eta_r$ et dont le point frontière gauche coïncide avec le point frontière droit de l'intervalle $\delta_{r-1}$ si ce dernier point est situé à droite de $\lambda_r$, et avec le point $\lambda_r$ lui-même dans le cas contraire. Cela étant, l'ensemble $e_\mu$ des intervalles correspondants aux points $\lambda_p$ de l'intervalle $\Delta_\mu$ sera complètement déterminé dès que nous aurons fixé l'intervalle $\delta_m$ correspondant au point $\lambda_m$. Nous fixerons tout-à-l'heure le point initial de cet intervalle en nous bornant pour le moment à dire que sa longueur sera égale à $\eta_m$.

La manière par laquelle nous avons choisi les quantités $\eta_p$, et ce que nous avons dit sur $N_\mu$ nous permet d'affirmer que, pour $\mu > \mu_0$, la longueur totale des intervalles de l'ensemble $e_\mu$ ne sera sûrement pas supérieure à un quart de la longueur de l'intervalle $\Delta_\mu$.

Construisons maintenant les ensembles $e_0, e_1, e_2, \ldots\ldots$ en prenant pour point initial (point frontière gauche) du premier intervalle de chacun d'eux le point $\lambda_p$ auquel cet intervalle correspond si ce point est situé à droite du point frontière droit du dernier intervalle de l'ensemble précédent, et ce point frontière lui-même dans le cas contraire.

En vertu de nos suppositions, nous pouvons affirmer que la longueur totale des intervalles des ensembles $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{\mu_0}$ ne sera pas supérieure à $\frac{1}{4}\, p_0$, et, par conséquent, le point frontière droit de l'ensemble $e_\mu$ (¹) ne pourra pas être situé à droite du point

$$r_1 = \xi^{\mu_0} + \frac{1}{4}\, p_0 .$$

Soit $\Delta_{\mu_1}$ l'intervalle auquel appartient le point $r_1$ ; comme la longueur totale de chacun des ensembles $e_{\mu_0+1}, e_{\mu_0+2}, \ldots, e_{\mu_1}$ est au plus égale au quart de la longueur de l'intervalle $\Delta_\mu$ correspondant, le point frontière droit de l'ensemble $e_{\mu_1}$ ne pourra pas être situé à droite de l'intervalle $\Delta_{\mu_2}$, où $\mu_2$ désigne le plus petit entier supérieur à $\mu_1 + \frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_0)$ ; de même, le point frontière droit de l'ensemble $e_{\mu_2}$ ne pourra être situé à droite de l'intervalle $\Delta_{\mu_3}$, où $\mu_3$ désigne le plus petit entier supérieur à $\mu_2 + \frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1)$.

(¹) L'ensemble $e_\mu$ aura généralement plus de deux points frontières. En disant *point frontière droit* nous voulons désigner celui d'entre eux qui est situé le plus à droite.

En raisonnant ainsi de suite on verra qu'il existe une valeur $\mu'$ de $\mu$ telle que le point frontière droit de l'ensemble $e_{\mu'}$ est situé soit dans l'intervalle $\Delta_{\mu'}$, soit dans l'intervalle $\Delta_{\mu'+1}$ (on pourra sûrement prendre $\mu' < \mu_0 + \frac{5}{3}(\mu_1 - \mu_0)$); il est d'ailleurs évident que tous les ensembles $e_\mu (\mu > \mu')$ posséderont la même propriété, et leur point initial sera toujours à l'intérieur de l'intervalle $\Delta_\mu$ correspondant.

Bien plus, il est clair qu'une modification quelconque (à l'intérieur de l'intervalle $\Delta_\mu$) du point initial de l'ensemble $e_\mu$ ne peut avoir pour conséquence *qu'une modification du point initial de l'ensemble* $e_{\mu+1}$, *mais non pas de son point final; elle ne peut donc avoir aucun effet sur l'ensemble* $e_{\mu+2}$. Nous pouvons en conclure qu'on n'a pas besoin de construire tous les ensembles $e_0, e_1, \ldots, e_{\mu-1}$ pour pouvoir construire l'ensemble $e_\mu$; il suffit, si $\mu$ est supérieur à $\mu'$, de construire un ensemble $e'_{\mu-1}$ en prenant pour son point initial le premier point $\lambda_p$ que l'on rencontre en parcourant de gauche à droite l'intervalle $\Delta_{\mu-1}$, et en agissant après comme on aurait fait pour construire l'ensemble $e_{\mu-1}$ si son point initial était connu; le point frontière droit de l'ensemble $e'_{\mu-1}$ coïncidera sûrement avec celui de l'ensemble $e_{\mu-1}$, et la connaissance de ce point suffit pour construire l'ensemble $e_\mu$.

Ayant ainsi déterminé la suite d'ensembles $e_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$) nous déterminerons une seconde suite d'ensembles $g_\mu$, que nous construirons de la même manière, avec la différence que l'intervalle $\delta'_p$ qui correspond au point $\lambda_p$ devra avoir son point frontière *droit* coïncidant avec le point $\lambda_p$ si ce point est situé à gauche du point frontière gauche de l'intervalle $\delta'_{p+1}$, ou avec ce point frontière lui-même dans le cas contraire. Ce que nous avons dit à propos des ensembles $e_\mu$ montre que nous pouvons construire un ensemble $g_\mu (\mu > \mu_0)$ sans connaître tous les ensembles $g_\mu$ d'indice supérieur; il nous suffit de connaître le point frontière gauche de l'ensemble $g_{\mu+1}$ d'indice immédiatement supérieur et celui-ci coïncide sûrement avec celui de l'ensemble $g'_{\mu+1}$ construit de la même manière que $g_{\mu+1}$ en partant du point $\lambda_p$ situé le plus à droite dans l'intervalle $\Delta_{\mu+1}$. Nous pouvons donc construire chacun des ensembles $g_\mu$ pour les valeurs de $\mu$ supérieures à $\mu_0$. Quant aux ensembles $g_{\mu_0}, g_{\mu_0-1}, g_{\mu_0-2}, \ldots, g_1, g_0$, qui sont en nombre fini, nous les construirons successivement en commençant par l'ensemble $g_{\mu_0}$. Il peut arriver toutefois que, pour une certaine valeur $\mu''$ de $\mu$ $(\mu'' < \mu)$ nous devions dépasser le point 0 de manière à entrer dans la partie négative de l'axe réel. Dans ce cas nous arrêterons l'ensemble $g_{\mu''}$ au point 0 et nous considérerons comme des ensembles vides les ensembles

$$g_0, g_1, \ldots, g_{\mu''-1}.$$

Nous avons construit ainsi deux suites infinies d'ensembles; les ensembles d'une même suite n'empiétent pas les uns sur les autres, mais il peut arriver que quelques uns des ensembles d'une suite empiétent sur certains ensembles de l'autre suite.

Réunissons maintenant en un seul ensemble d'intervalles les deux suites d'ensembles que nous avons construites (les intervalles communs à un ensemble $e_\mu$ et à un ensemble $g_\nu$ ne seront comptés qu'une fois) et désignons par E $[f(x); \{\lambda_p\}]$ ou simplement par E $[f(x)]$ l'ensemble ainsi formé. Il est à peine nécessaire de dire que l'ensemble E $[f(x)]$ ne dépend que de la suite $\{\lambda_p\}$ et de la fonction $f(x)$, mais ne dépend pas du nombre $\xi$. De même, la supposition que $f(\lambda_1)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ n'est pas indispensable.

Si l'on prend une autre limitation de $f(x)$, on devra peut-être modifier l'inégalité par laquelle on détermine $r_0$ en remplaçant son second membre par une quantité plus petite. En outre, le rapport entre la longueur totale de l'ensemble $e_\mu$ et la longueur de l'intervalle $\Delta_\mu$ pourra être supérieur au quart. La démonstration pourra être terminée toutes les fois que ce rapport sera inférieur à l'unité, ce qui aura lieu certainement si l'on a $\lim\limits_{x \to} f(x) \leqq \frac{1}{2\,D}$.

Considérons plus spécialement le cas où la fonction $f(x)$ se réduit à une constante $\eta$. L'ensemble E $[f(x)]$, que nous pourrons désigner plus simplement par E $(\eta)$, possèdera alors les propriétés suivantes. Chaque intervalle [1] de E $(\eta)$ de longueur $s$ contient au moins $\frac{s}{2\eta}$ points de la suite $\{\lambda_p\}$ et chaque point

[1] Nous désignons par l'expression « intervalle de E $(\eta)$ » chaque intervalle qui est tel que tous ses points appartiennent à l'ensemble E $(\eta)$, tandis que les points des deux intervalles adjacents ne lui appartiennent pas, du moins si ces intervalles sont assez petits.

$\lambda_p$ est contenu à l'intérieur d'un intervalle de E $(\eta)$; chaque intervalle de E $(\eta)$ qui contient plus d'un point $\lambda_p$ en contient au moins deux dont la distance ne surpasse pas $2\eta$, et aucun intervalle de E $(\eta)$ n'a une longueur inférieure à $2\eta$. Au cas particulier où la suite $\{\lambda_p\}$ satisfait à la condition de M. Pólya $\underline{\lim}_{\nu \to \infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) = h > 0$, l'ensemble E $(\eta)$ se réduit, si $\eta < h$, à la suite d'intervalles

$$\lambda_\nu - \eta \leqq x \leqq \lambda_\nu + \eta$$

*Exemples.* — Indiquons la construction de l'ensemble E $(\eta)$ pour les suites considérées à la fin du § 1.

Pour la suite $\{\lambda_n\}$ cet ensemble sera formé par les intervalles

$$\mathrm{E}(\eta;\{\lambda_n\}) \qquad \lambda_n - \eta \leqq z \leqq \lambda_n + \eta \qquad (n = 1, 2, \ldots.)$$

et chaque intervalle de E $(\eta)$ ne contiendra qu'un seul point $\lambda_n$.

Pour la suite $\{\mu_n\}$ on aura l'ensemble

$$\mathrm{E}(\eta;\{\mu_n\}) \quad \begin{matrix} \mu_1 - \eta \leqq z \leqq \mu_1 + \eta \\ \mu_{2m+1} - 2\eta \leqq z \leqq \mu_{2m} + 2\eta \end{matrix} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

et chaque intervalle de E $(\eta)$, sauf le premier, contiendra deux points $\mu_n$.

L'ensemble E $(\eta)$ relatif à la suite $\{\nu_n\}$ sera plus compliqué. A chacun des points $\nu_n$ tel que $\alpha_{k-1} < n < \alpha_k - k$ correspondra un intervalle

$$\nu_n - \eta \leqq z \leqq \nu_n + \eta,$$

tandis qu'à chaque groupe de points $\nu_n$, qui vérifient la condition $\alpha_k - k \leqq n \leqq \alpha_k$ avec la même valeur de $k$, correspondra un seul intervalle

$$\lambda_{\alpha_k} - (k+1)\,\eta \leqq z \leqq \lambda_{\alpha_k - k} + (k+1)\,\eta$$

Il y aura donc des intervalles contenant un nombre de points $\nu_n$ aussi grand que l'on veut, et en même temps une infinité d'intervalles ne contenant qu'un seul point $\nu_n$.

§ 3. — Supposons maintenant que la suite (1) possède une densité maximum D, mais qu'elle-même n'est sûrement pas mesurable. Nous allons voir que parmi les suites mesurables de densité D qui comprennent la suite (1) comme suite partielle, il y en a au moins une qui satisfait à la condition suivante: si l'on désigne per $\mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ ceux des points de cette suite qui ne font pas partie de la suite (1), on a

$$\lim_{\overline{k,i \to \infty}} |\mu_k - \lambda_i| = l > 0, \qquad \lim_{\overline{k \to \infty}} (\mu_k - \mu_{k+1}) = m > 0$$

Désignons par $n(r)$ le nombre des points $\lambda_i$ compris entre 0 et $r$. Construisons une suite mesurable quelconque de densité D qui comprenne la suite (1) comme suite partielle et désignons par $\nu(r)$ le nombre de ceux des points de cette suite qui sont compris entre 0 et $r$ et ne se confondent avec aucun des $\lambda_i$.

Cela étant, construisons l'ensemble E$(l)$ déterminé au § 2, $l$ ayant une valeur quelconque non supérieure à $\frac{1}{2\,D}$. Soit, en outre, C l'ensemble complémentaire de E; cet ensemble sera formé par une infinité d'intervalles qui seront séparés par des intervalles de l'ensemble E. Désignons par

$$p_1\, q_1,\ p_2\, q_2,\ \ldots\ldots,\ p_k\, q_k,\ \ldots.$$

les intervalles qui composent l'ensemble C. La longueur totale de ceux de ces intervalles qui tombent dans l'intervalle $(0, r)$ ne pourra pas être inférieure à $r - 2\,n(r)\,l$. Notons dans chaque intervalle $p_k\, q_k$ les points

$$p_k,\ p_k + \frac{1}{D},\ p_k + \frac{2}{D},\ \ldots,\ p_k + \frac{\mu_k}{D},$$

où $\mu_k$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas $(q_k - p_k)$D; et désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ ces points rangés par ordre de grandeur. Il y a donc dans chaque intervalle $p_k\, q_k$ exactement $\mathbf{E}\,[(q_k - p_k)\,D] + 1$ points $m_\nu$ [1] et le nombre $m(r)$ des points $m_\nu$ compris entre 0 et $r$ ne pourra pas être inférieur à $[r - 2\,n(r)\,l]$ D. Supposons maintenant que l'on ait pris $l = \frac{1}{2\,D}$; on aura alors

$$m(r) \geqq r\,D - n(r)$$

et par conséquent

$$\lim_{\overline{r \to \infty}} \frac{m(r) + n(r)}{r} \geqq D$$

Si le rapport $\frac{m(r) + n(r)}{r}$ tend vers D lorsque $r$ croît indéfiniment, la suite formée par la réunion des points $\lambda_\nu$ et $m_\nu$ sa-

[1] $\mathbf{E}(x)$ désigne le plus grand entier non supérieur à $x$.

tisfait évidemment aux conditions posées. Si, au contraire, sa limite supérieure est plus grande que D, nous construirons une autre suite (S) de la manière suivante. Cette suite devra comprendre tous les points $\lambda_\nu$ et certains des points $m_\nu$. Supposons que nous avons déjà établi quels points parmi les points $m_1, m_2, \dots m_{k-1}$ feront partie de la suite (S) et soit $\mu(m_{k+1})$ le nombre de ces points; alors nous inclurons le point $m_k$ dans la suite (S) si

$$n(m_k) + \mu(m_{k-1}) \leqq D\, m_k - 1$$

et nous ne le comprendrons pas dans la suite (S) dans le cas contraire. Le mode de construction des points $m_\nu$ et de l'ensemble d'intervalles $E(l)$ nous garantit que, en procédant comme nous venons de l'indiquer, nous aurons toujours

$$N(r) = n(r) + \mu(r) > D\,r - 2$$

et donc

$$\underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{N(r)}{r} \geqq D$$

Nous allons voir que l'on a aussi

$$\overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{N(r)}{r} = D$$

ce qui prouvera que la suite (S) satisfait aux conditions posées au début de ce paragraphe.

En premier lieu il est clair que lorsque $r$ croît, le rapport $\frac{N(r)}{r}$ ne peut pas devenir supérieur à D en un point $m_k$. Si donc ce rapport devient supérieur à D, cela est entièrement dû à l'apport des points $\lambda_\nu$. De plus, si dans un intervalle $(r_1, r_2)$ ce rapport est supérieur à D, $\mu(r)$ garde une valeur constante dans cet intervalle.

Supposons maintenant qu'au point $r = r_1$ on ait

$$\frac{N(r_1)}{r_1} = \frac{n(r_1) + \mu(r_1)}{r_1} = D + \delta_1 \qquad (\delta > 0)$$

Il y aura certainement une valeur de $r$ supérieure à $r_1$ telle que $\frac{N(r_2)}{r_2} \leqq D$, car autrement on devrait avoir $\underline{\lim} \frac{n(r)}{r} \geqq D$

contrairement à nos hypothèses. Considérons maintenant un intervalle $r_1 \leqq r \leqq r_2$ tel que

$$(\mathrm{N}) \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{\mathrm{N}(r_1 - 0)}{r_1} \leqq \mathrm{D} & \dfrac{\mathrm{N}(r_2)}{r} = \mathrm{D} \\ \dfrac{\mathrm{N}(r)}{r} > \mathrm{D} & \text{pour } r_1 + 0 \leqq r < r_2 \end{array}$$

Posons

$$\eta(r) = \frac{n(r) + \nu(r)}{r} - \mathrm{D} \qquad \zeta(x) = \max_{r > x} |\eta(r)|$$

$\nu(r)$ ayant la signification indiquée au début de ce numéro. Alors $\lim\limits_{r \to \infty} \zeta(r) = 0$ et $\nu(r)$ est une fonction non décroissante de $r$. Nous pouvons donc écrire, si $r > r_1$

$$\mathrm{D}r - n(r) - r\,\eta(r) \geqq \mathrm{D}r_1 - n(r_1) - r_1\,\eta(r_1)$$
$$n(r) - n(r_1) \leqq \mathrm{D}(r - r_1) + 2r\,\zeta(r_1)$$

Appliquons ces inégalités à l'intervalle $(r_1, r_2)$ que nous venons de définir. Dans cet intervalle, comme nous l'avons déjà remarqué, $\mu(r)$ reste constante et, par conséquent,

$$\mathrm{N}(r) - \mathrm{N}(r_1) = n(r) - n(r_1) \leqq \mathrm{D}(r - r_1) + 2r\,\zeta(r_1);$$

donc

$$\frac{\mathrm{N}(r)}{r} \leqq \frac{\mathrm{N}(r_1) + [\mathrm{N}(r) - \mathrm{N}(r_1)]}{r} \leqq \frac{\mathrm{D}r_1 + \mathrm{D}(r - r_1) + r\zeta(r_1)}{r} = \mathrm{D} + 2\zeta(r_1)$$

Nous voyons donc que la plus grande valeur que le rapport $\dfrac{\mathrm{N}(r)}{r}$ pourra atteindre dans chaque intervalle qui satisfait aux conditions (N) sera égale à la somme de D et du double de la valeur de la fonction $\zeta(r)$ au point initial de l'intervalle en question. Or, ce que nous avons dit plus haut démontre que l'axe positif peut être divisé en une suite infinie d'intervalles du type (N) alternés avec des intervalles dans lesquels $\mathrm{N}(r)$ est non supérieur à D; la longueur d'aucun de ces intervalles ne pouvant être inférieure à $\dfrac{1}{\mathrm{D}}$.

Cela étant, si l'on se donne un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on déterminera le nombre $r_0$ par la condition

$$2\zeta(r) < \varepsilon \qquad\qquad \text{pour } r \geqq r_0$$

et alors, pour $r \geqq r_0$, on aura

$$\frac{N(r)}{r} \leqq D + \varepsilon$$

ce qui démontre notre proposition.

La suite (S) que nous venons de construire et qui satisfait aux conditions posées au début de ce paragraphe possède en outre quelques propriétés spéciales. En effet, en premier lieu tous ses points distincts des $\lambda_\nu$ sont à l'extérieur de l'ensemble $E(l)$ relatif à la suite des $\lambda_\nu$. De plus, si l'on désigne par $n_k$ le numéro d'ordre d'un tel point $m_k$ dans la suite (S), c. à d. si l'on pose $n_k = N(m_k + 0)$, $n_k$ sera toujours égal au plus grand entier non supérieur à $m_k D$. Nous aurons à faire usage de ces propriétés dans la suite. C'est pourquoi nous appellerons la suite (S) *suite mesurable principale contenant la suite* $\{\lambda\}$.

Les considérations de ce paragraphe unos permettent d'ailleurs de démontrer que les formules que M. Pólya a donnés pour la densité maximum dans le cas où les $\lambda_n$ vérifient la condition $\underline{\lim}_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ restent vraies dans le cas général.

En effet, nous venons de voir que, quels que soient $r$ et $r_1$, on a

$$D(r - r_1) - [n(r) - n(r_1)] \geqq -2r\zeta(r_1)$$

où $\zeta(r)$ indique une fonction de $r$ qui tend vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$; d'ailleurs les considérations qui précèdent montrent après un moment de réflexion que, si l'on met à la place de D un nombre plus petit, on ne pourra plus maintenir au second membre à la place de $\zeta(r_1)$ une fonction qui tend vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$. Il s'ensuit que D est le plus petit nombre pour lequel on a

$$\underline{\lim}_{r, r_1 \to \infty} \frac{D(r - r_1) - [n(r) - n(r_1)]}{r} \geqq 0$$

quel que soit le mode de croissance de $r_1$ et de $r > r_1$ vers l'infini.

Soit $\xi$ un nombre positif inférieur à un; prenons $r_1 = r\xi$. Nous pourrons alors affirmer que D est le plus petit nombre qui satisfait, quelle que soit la valeur de $\xi$, à l'inégalité

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left[D - \frac{n(r)-n(r\xi)}{r(1-\xi)}\right] \geqq 0$$

ou encore à l'inégalité

$$D \geqq D(\xi) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r)-n(r\xi)}{r-r\xi}$$

On a donc

$$D = \operatorname*{Max}_{0\leqq\xi<1} D(\xi)$$

Or, M. Pólya a démontré [1] que, lorsque $\xi$ tend vers un, $D(\xi)$ tend vers une limite que nous pouvons désigner par $D(1)$, et en outre il a démontré que, quelle que soit la valeur de $\xi$, $D(1) \geqq D(\xi)$. La démonstration de M. Pólya est d'ailleurs indépendante de l'hypothèse (3), ce dont on peut s'assurer en séparant les développements qui conduisent à la démonstration de l'inégalité $D(1) \geqq D(\xi)$ de ceux qui ont pour but la démonstration d'autres inégalités. Nous pouvons donc affirmer que

$$D = D(1) = \lim_{\xi\to 1} D(\xi)$$

c. à d. que *les formules* (4) *de M. Pólya* (voir § 1) *sont vraies pour toutes les suites qui ont une densité maximum finie et même pour celles qui ne la possèdent pas, car dans ce cas on aura*

$$\lim_{\xi\to 1} D(\xi) = \infty .$$

*Exemples.* — Voyons quelles sont les suites mesurables principales relatives aux trois suites considérées à la fin du § 1.

I. La suite principale relative à la suite $\{\lambda_n\}$ s'obtiendra en lui adjoignant les points de la suite $\{l_h\}$ avec

$$l_h = L_h + \frac{1}{2},$$

$\{L_h\}$ ($h = 1, 2, \ldots.$) désignant la suite des entiers complémentaire à $\{\lambda_n\}$. Ceci montre que *pour des suites très simples* la suite principale deut ne pas être la plus simple parmi les suites mesurables contenant la suite donnée. En effet, dans notre cas, la suite $\{\lambda_n\}$ est comprise

[1] *Math. Zeitschrift, l. c.*, pp. 557-560.

dans la suite de tous les entiers naturels qui est plus simple que la suite principale que nous venons d'obtenir.

II. Pour obtenir la suite principale relative à la suite $\{\mu_n\}$ on devra lui adjoindre la suite

$$l_1, l_2, l_3, l_4-1, l_5-1, \dots, l_h-1, \dots$$

III. Pour obtenir la suite principale relative à la suite $\{\nu_n\}$ on lui adjoindra la même suite $\{l_h\}$ qu'à la suite $\{\lambda_n\}$.

§ 4. — Supposons maintenant que la suite $\{\lambda_n\}$ est mesurable et de densité D, et considérons la fonction

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{5}$$

M. Carlson a démontré [1] que

1) sur l'axe réel positif on a pour $r$ assez grand

$$|C(r)| < e^{\varepsilon r}$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$.

2) $\eta$ étant un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\left|C\left(re^{\pm i\eta}\right)\right| = e^{[\pi D\sin\eta + \varepsilon(r)]r} \tag{6}$$

$\varepsilon(r)$ désignant ici et dans la suite une fonction indéterminée tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Le raisonnement de M. Carlson n'est plus valable pour $\eta = \frac{\pi}{2}$ mais on s'assure immédiatement que la formule (6) reste vraie même pour $\eta = \frac{\pi}{2}$. En effet, on voit de suite que chaque facteur de (5) atteint son maximum sur le cercle $|z| = r$ précisément au point $\eta = \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $|C(z)|$ atteint aussi son maximum sur le cercle $|z| = r$ au même point. Cela étant, donnons nous un nombre positif $\varepsilon$ aussi petit que l'on veut et choisissons $\eta_0$ de telle sorte que l'on ait

---

[1] *Math. Ann.*, t. 79, 1919, p. 239.

$$1 - \sin \eta_0 < \frac{\varepsilon}{2\pi D};$$

après cela choisissons $r_0$ de telle sorte que dans la formule (6) on ait, pour $r > r_0$ et $\eta = \eta_0$

$$|\varepsilon(r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On aura alors pour $r > r_0$

$$\left| C\left(re^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right) \right| \geqq \left| C\left(re^{\pm i \eta_0}\right) \right| > e^{(\pi D - \varepsilon) r} \tag{7}$$

D'autre part, on a, en posant $\alpha_m = \max\limits_{n \geqq m} \frac{n}{\lambda_n}$

$$\left| C\left(re^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right) \right| = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) \leqq \tag{8}$$

$$\leqq (1 + r^2)^m \prod_{n=m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha_m r)^2}{n^2}\right) \leqq (1 + r^2)^m \frac{\sin \pi i \alpha_m r}{\pi i \alpha_m r}$$

d'où l'on déduit que, pour $r$ assez grand, on a

$$\left| C\left(re^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right) \right| < e^{(\pi D + \varepsilon) r} \tag{9}$$

Or, les formules (7) et (9) démontrent précisément que la formule (6) est encore vraie pour $\eta = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part, on peut voir facilement que les propriétés précédentes qui sont évidemment vraies aussi pour toutes les fonctions

$$C_n(z) = \frac{C(z)}{\lambda_n - z}$$

le sont d'une manière uniforme par rapport à $n$. Plus précisément, on s'assure facilement *que $\eta$ étant un nombre compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (limites comprises) et $\varepsilon$ étant aussi petit que l'on veut, on peut trouver deux nombres positifs* L *et* $r_0$ *de elle sorte que l'on ait pour* $r > r_0$ *et quel que soit* n

$$(6') \qquad \left| C_n\left(re^{i\eta}\right)\right| \leqq L\, e^{[\pi D \sin |\eta| + \varepsilon] r}$$

*les nombres* $L = L(\eta, \varepsilon)$ *et* $r = r_0(\eta, \varepsilon)$ *ne dépendant pas de* **n**.

En effet, on a en premier lieu pour $\eta \neq 0$

$$| C_n(z) | \leqq \frac{| C(z) |}{\lambda_n \, | \sin \eta |} \leqq \frac{| C(z) |}{\lambda_1 \, | \sin \eta |}$$

ce qui démontre l'inégalité (6') pour $\eta \neq 0$.

Pour démontrer notre proposition aussi pour $\eta = 0$, nous noterons que chacune des fonctions $C_n(z)$ est un produit canonique de même forme que $C(z)$ dans lequel le facteur $1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}$ est remplacé par $\frac{1}{\lambda_n}\left(1 + \frac{z}{\lambda_n}\right)$. Chaque facteur de $C_n(z)$ atteint donc son minimum sur le cercle $| z | = r$ au point $z = r$. Choisissons donc $\eta$ tel que $\pi D \sin \eta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ et déterminons $L' = L\left(\eta_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $r'_0 = r_0\left(\eta_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ de telle sorte que l'on ait pour $r > r'_0$ et quel que soit $n$

$$\left| C_n\left(re^{i\eta_0}\right)\right| \leqq L'\, e^{\left[\pi D \sin \eta_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right] r} < L'\, e^{\varepsilon r}$$

On aura alors, pour $r > r'_0$ et quel que soit $n$

$$\left| C_n(r) \right| \leqq \left| C_n\left(re^{i\eta_0}\right)\right| < L'\, e^{\varepsilon r}$$

c. q. f. d.

Une autre propriété de la fonction $C(z)$ dont nous aurons besoin dans la suite est la suivante: *quelque petit que soit le nombre positif* $\varepsilon$, *on peut trouver une suite de nombres* $R_1, R_2, \ldots$ *indéfiniment croissants telle que l'on ait*

$$\min_{|z| = R_k} | C(z) | > e^{-\varepsilon R_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

En effet, nous avons vu que

$$(10) \qquad \min_{|z| = r} | C(z) | = C(r)$$

D'autre part, en vertu de (6), on a pour tout $\eta$ différent de zéro dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$h(\eta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log | C(re^{i\eta}) |}{r} = D\pi \, | \sin \eta \, |$$

Or, MM. Phragmen et Lindelöf ont démontré (¹) que la fonction $h(\eta)$ est une *fonction continue* de $\eta$; par conséquent, on a

$$h(0) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log | C(r) |}{r} = 0$$

et il existe donc, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, une suite de nombres $R_1, R_2, \ldots.$ croissant indéfiniment, telle que

$$| C(R_k) | > e^{-\varepsilon R_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots.)$$

ce qui, en vertu de (10), démontre notre proposition.

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence très particulière de la proposition suivante:

*Quelque petits que soient les nombres positifs $\varepsilon$ et $\eta$ donnés à l'avance, on peut trouver un nombre $z_0 = z_0(\varepsilon, \eta)$ tel que l'inégalité*

$$(11) \qquad | C(z) | > e^{-\varepsilon z}$$

*soit vérifiée sur l'axe réel positif à droite du point $z_0$ en tout point qui ne fait pas partie de l'ensemble $E[\eta; \{\lambda_\nu\}]$ défini au § 2 (²).*

Pour démontrer ce théorème nous allons démontrer que l'inégaiité

$$(11') \qquad \left| \frac{C(z)}{\frac{1}{z} \sin \pi D z} \right| > e^{-\varepsilon z}$$

est vérifiée à l'extérieur de l'ensemble $E(\eta)$ de même que l'inégalité

$$(11'') \qquad \left| \frac{C(z)}{\cos \pi D z} \right| > e^{-\varepsilon z}$$

Pour cela nous allons considérer le développement en produit canonique

---

(¹) *Acta Mathematica*, T. 31, 1908, p. 393.

(²) M. Pólya a démontré ce théorème dans le cas où les $\lambda_\nu$ vérifient la condition $\underline{\lim} (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu) \geqq l > 0$, *Math. Zeitschrift*, *l. c.*, p. 571. (Cfr. a ce propos la remarque faite à la fin du § 2).

$$\frac{C(z)}{\frac{1}{z}\sin \pi D z} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1 - \frac{z^2 D^2}{\nu^2}};$$

nous diviserons, comme au § 2, l'axe réel en une suite d'intervalles

$$(\Delta_\mu) \qquad \xi^{\mu-1} \leqq z < \xi^\mu$$

et nous allons diviser le produit infini en deux parties: l'une qui comprend les facteurs pour lesquels le point $\lambda_\nu$ correspondant est séparé de $z$ d'au moins un intervalle entier $\Delta_\mu$, l'autre qui comprend les facteurs pour lesquels le point $\lambda_\nu$ est situé soit dans le même intervalle $\Delta_\mu$ que le point $z$, soit dans l'un des deux intervalles adjacents. Nous évaluerons la première partie à l'aide d'un artifice de calcul dû à M. Carlson, basé sur le fait que, pour tous les facteurs qui interviennent, on a

$$| \lambda_\nu^2 - z^2 | \geqq \beta \lambda_\nu^2$$

$\beta$ désignant une constante non nulle. Quant à la deuxième partie, nous l'évaluerons, $z$ étant supposé extérieur à l'ensemble $E(\eta)$, à l'aide d'un calcul élémentaire basé sur le mode de construction de l'ensemble $E(\eta)$.

L'inégalité (11'') pourra être démontrée exactement de la même manière que l'inégalité (11').

Choisissons donc les nombres positifs $\varepsilon$ et $\eta$ aussi petits que l'on veut; pendant la durée de la démonstration nous allons les considérer comme fixes. Pour fixer les idées supposons que l'on a pris $\varepsilon < \frac{1}{4}$; $\eta < \frac{1}{25\,D}$.

La densité de la suite $\{\lambda_\nu\}$ étant égale à D, on a

$$(12) \qquad \lambda_m = \frac{m}{D}(1 + \varepsilon_m) \qquad \text{avec} \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$$

Choisissons la valeur $m_0 = m_0(\varepsilon)$ de telle sorte que l'on ait pour $m \geqq m_0$

$$(13) \qquad | \varepsilon_m | < \gamma \varepsilon^2$$

$\gamma$ désignant un nombre positif que nous déterminerons mieux dans la suite. Ce nombre, que nous supposerons inférieur à $\frac{1}{4}$

dépendra de la valeur de $\eta$, mais une fois la valeur de $\eta$ choisie, $\gamma$ pourra être choisi de manière à rester invariable pendant toute la durée du raisonnement. Cela étant, désignons par $\xi$ la quantité

$$\xi = 1 + 10\,\gamma\varepsilon^2 \tag{14}$$

On aura alors, en vertu de nos suppositions, $\xi > \frac{6}{5}$. Choisissons maintenant le nombre entier $\mu_0$ de telle sorte que

$$\lambda_{m_0} < \xi^{\mu_0} \leqq \lambda_{m_0+1}$$

et considérons la suite d'intervalles

$$\xi^{\mu} \leqq z < \xi^{\mu+1} \qquad (\mu = \mu_0 + 1,\ \mu_0 + 2, \ldots.) \tag{15}$$

Donnons à $\mu$ une valeur particulière *supérieure* à $\mu_0 + 4$ et supposons que $z$ parcourt l'intervalle (15) correspondant à cette valeur de $\mu$. Déterminons les nombres $m_\varsigma$ et $n_\varsigma$ ($\varsigma = \mu_0, \mu_0 + 1, \ldots$) par les conditions

$$\lambda_{m_\varsigma} < \xi^{\varsigma} \leqq \lambda_{m_\varsigma} + 1\,; \qquad \lambda_{n_\varsigma} \leqq \xi^{\varsigma} < \lambda_{n_\varsigma} + 1\,; \tag{16}$$

on aura en général $m_\varsigma = n_\varsigma$, sauf pour certaines valeurs de $\varsigma$ (qui dépendront naturellement de la valeur de $\xi$), pour lesquelles on aura $m_\varsigma + 1 = n_\varsigma$.

Posons maintenant $\beta = 1 - \frac{1}{\xi^2}$; nous pouvons alors affirmer que, tant que $z$ se trouve dans l'intervalle (15), on a

$$|\, z^2 - \lambda_\nu^2 \,| \geqq \beta\lambda_\nu^2 \quad \text{pour } \nu \leqq m_{\mu-1} \quad \text{et pour } \nu > n_{\mu+2}$$

ou encore, en usant d'un artifice dû à M. Carlson,

$$\left|\frac{1 - \frac{z^2 D^2}{\nu^2}}{1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}}\right| = \left| 1 + z^2 \frac{\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{D}{\nu^2}}{1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}} \right| \leqq 1 + z^2 \frac{\left|1 - \left(\frac{D\lambda_\nu}{\nu}\right)^2\right|}{\beta\lambda_\nu^2} =$$

$$= 1 + z^2 \frac{\left| D^2 \left[\frac{\nu^2}{\lambda_\nu^2 D^2} - 1\right]\right|}{\beta\nu^2} = 1 + \frac{z^2\,\delta(\nu)}{\beta\nu^2} \tag{17}$$

Dans la dernière formule nous avons posé

$$\delta(\nu) = \left| D^2 \left[\frac{\nu^2}{\lambda_\nu^2 D^2} - 1\right]\right|\,;$$

cette quantité tend évidemment vers zéro lorsque $\nu$ croît indéfiniment et elle est de plus indépendente de $\beta$. Il s'ensuit que, quelle que soit la valeur de $\beta$ (et, par conséquent, quelles que soient les valeurs de $\varepsilon$ et $\gamma$, ou de $\varepsilon$ et $\eta$), on pourra trouver une valeur $p = p(\varepsilon, \eta)$ telle que, pour $\nu > p$, on ait

$$\frac{\delta(\nu)}{\beta} \leqq \left(\frac{\varepsilon}{4\pi^2}\right)^2$$

Par conséquent, si nous écrivons, en vertu de (17)

$$\prod_{\substack{\nu \leqq m_{\mu-1} \\ \nu > n_{\mu+2}}} \frac{1 - \dfrac{z^2 D^2}{\nu^2}}{1 - \dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}} \leqq \prod_{\nu=1}^{p}\left(1 + \frac{z^2\delta(\nu)}{\beta\nu^2}\right)\prod_{\nu=p+1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2\delta(\nu)}{\beta\nu^2}\right)$$

nous verrons que le deuxième produit du second membre est inférieur, pour $z > \dfrac{4}{\varepsilon}$, à

$$\prod_{\nu=p+1}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon z}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right] < \prod_{\nu=1}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{\varepsilon z}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right] = \frac{\sin \dfrac{i\varepsilon z}{4}}{\dfrac{i\varepsilon z}{4}} < e^{\frac{\varepsilon z}{4}}$$

Quant au premier produit, si l'on désigne par $P = P(\varepsilon, \gamma)$ la plus grande valeur de $\dfrac{\delta(\nu)}{\beta\nu^2}$ pour $\nu \leqq p$, il est inférieur à $(1 + Pz^2)^p$; par conséquent, si nous choisissons $z_1$ de telle sorte que, pour $z \geqq z_1$, on ait

$$(1 + P z_1^2) < e^{\frac{\varepsilon z}{4}}$$

le premier produit sera inférieur à $e^{\frac{\varepsilon z}{4}}$, pour $z > z_1$. Par conséquent, si l'on désigne par $z_2$ le plus grand des nombres $z_1$ et $\dfrac{4}{\varepsilon}$, on a pour $z > z_2$

$$\prod_{\substack{\nu \leqq m_{\mu-1} \\ \nu > n_{\mu+2}}} \frac{1 - \dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1 - \dfrac{z^2 D^2}{\nu^2}} > e^{-\frac{\varepsilon}{2} z} \tag{18}$$

Notons encore que $z_1$, et par conséquent $z_2$, ne dépend que de $\varepsilon$, $p$ et $\beta$; sa valeur sera donc complètement déterminée en fonction de $\varepsilon$ et de $\eta$ dès que l'on se donnera la valeur de $\gamma$. Ceci nous permet de supposer que le nombre $m_0$ a été choisi assez grand pour que $\lambda_{m_0}$ et par conséquent $\xi^{\mu_0}$ soit supérieur à $z_1$, de sorte que l'inégalité (18) ait sûrement lieu pour tout $z$ supérieur à $\xi^{\mu_0}$.

Passons maintenant à l'évaluation de la partie du produit (18) relative aux valeurs de $\nu$ comprises entre $m_{\mu-1}$ et $n_{\mu+2}$. Notons en premier lieu que pour ces valeurs de $\nu$ on a sûrement

$$\xi^{-2} \leqq \frac{z}{\lambda_\nu} \leqq \xi^2$$

et donc, en vertu de (12 ) et (13)

$$(19) \qquad \xi^{-2}(1-\varepsilon^2\gamma) \leqq \frac{zD}{\nu} \leqq \xi^2(1+\varepsilon^2\gamma)$$

Or, suivant nos suppositions, on a

$$\varepsilon < \frac{1}{4}, \gamma < \frac{1}{4}, \xi < \frac{6}{5};$$

il s'ensuit que tous les facteurs du dénominateur de notre produit sont inférieurs en valeur absolue à 1, de sorte que nous pouvons écrire

$$(20) \quad \left| \prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{n_{\mu+2}} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2 D^2}{\nu^2}} \right| \geqq \left| \prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{n_{\mu+2}} \left(1-\frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right) \right| = \frac{\displaystyle\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{n_{\mu+2}} |z^2-\lambda_\nu^2|}{\displaystyle\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{n_{\mu+2}} \lambda_\nu^2}$$

Or, on a pour le dénominateur

$$(21) \qquad \prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{n_{\mu+2}} \lambda_\nu^2 \leqq \left(\xi^{2\mu+4}\right)^{n_{\mu+2}-m_{\mu-1}}$$

Quant au numérateur, nous allons démontrer que, lorsque $z$ est à l'extérieur de l'ensemble $E(q)$ du § 2 ($q$ désignant un nombre quelconque inférieur à $\eta$), on a

$$(22)\qquad \prod_{\nu=m_{\mu-1}-1}^{\nu=n_{\mu+2}} | z^2 - \lambda_\nu^2 | \geqq \left(\frac{q\,\xi^{\mu-1}\,N_\mu}{e}\right)^{N_\mu}$$

où $N_\mu$ désigne la différence $n_{\mu+2} - m_{\mu-1}$. Comme l'ensemble E ne comprend sûrement pas tous les points de l'intervalle (15) (du moins si $\mu$ est assez grand), il s'ensuivra, en tenant compte de (20) et (21), que, $z$ étant extérieur à l'ensemble E, on a

$$(23)\qquad \left|\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=n_{\mu+2}} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2\,D^2}{\nu^2}}\right| \geqq \left(\frac{q\,N_\mu}{e\,\xi_{\mu+2}}\right)^{N_\mu}$$

Evaluons maintenant la quantité $N_\mu$. En vertu des inégalités (12), (13) et (16), nous pouvons écrire que, pour $\varsigma \geqq \mu_0+1$, on a

$$(24)\qquad \frac{m_\varsigma}{D}(1-\gamma\varepsilon^2) \leqq \xi^\varsigma \leqq \frac{m_\varsigma}{D}(1+\gamma\varepsilon^2)\,,$$

une inégalité analogue ayant lieu pour les $n_\varsigma$. On peut donc affirmer que l'on a

$$N_\mu \leqq \frac{D\,\xi^{\mu+2}}{1-\gamma\varepsilon^2} - \frac{D\,\xi^{\mu-1}}{1+\gamma\varepsilon^2} \qquad (\mu = \mu_0+1,\ \mu_0+2,\ \ldots..)$$

et par conséquent, en tenant compte de (14)

$$(25)\qquad \begin{aligned} N_\mu &\leqq \frac{D\,\xi^{\mu-1}(\xi^3-1)}{1-\gamma\varepsilon^2} + \frac{2\,D\,\xi^{\mu-1}\,\gamma\varepsilon^2}{1-\gamma\varepsilon^2} \\ \frac{N_\mu}{z} &\leqq \frac{N_\mu}{\xi^\mu} < \frac{D}{\xi}\,[4(\xi-1)+3\,\gamma\varepsilon^2] < 43\,D\,\gamma\varepsilon^2 \end{aligned}$$

En vertu de nos suppositions sur le choix de $\varepsilon$, $\gamma$, $q$

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\,,\ \gamma < \frac{1}{4}\,,\ q < \frac{1}{25\,D}$$

nous pouvons affirmer que la quantité $43\,D\,q\,\gamma\,\varepsilon^2$ est inférieure à l'unité. On a donc a fortiori

$$\frac{q\,N_\mu}{\xi^{\mu+2}} < 1 \quad \text{et} \quad \log\frac{q\,N_\mu}{\xi^{\mu+2}} < 0$$

$$\left[\frac{q\,N_\mu}{e\,\xi^{\mu+5}}\right]^{N_\mu} = e^{-N_\mu\left|\log\left[\frac{q\,N_\mu}{e\,\xi^{\mu+5}}\right]\right|} \geqq$$

$$> e^{-z\frac{N_\mu}{\xi^\mu}\left\{\left|\log\frac{N_\mu}{\xi^\mu}\right| + \left|\log\frac{q}{e\,\xi^5}\right|\right\}}$$

Or, l'expression $\alpha \mid \log \alpha \mid$ décroît constamment lorsque $\alpha$ tend vers zéro par valeurs positives, dès que $\alpha < \frac{1}{e}$. Si donc nous subordonnons $\gamma$ à la condition

$$\gamma < \frac{1}{9\mathrm{D}}$$

on aura

$$\frac{\mathrm{N}_\mu}{\xi^\mu} < 43\,\mathrm{D}\,\gamma\,\varepsilon^2 < \frac{43}{144} < \frac{1}{e}$$

et

$$\frac{\mathrm{N}_\mu}{\xi^\mu}\left|\log\frac{\mathrm{N}_\mu}{\xi^\mu}\right| < 43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2 \mid \log(43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2) \mid$$

On pourra donc écrire

$$(26)\quad \left[\frac{q\,\mathrm{N}_\mu}{\xi^{\mu+2}}\right]^{\mathrm{N}_\mu} \geqq e^{-43\,z\,\mathrm{D}\gamma\varepsilon^2\left\{\mid \log(43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2)\mid + \left|\log\frac{\bar{q}}{e\,\xi^5}\right|\right\}}$$

Dans cette expression la seule quantité encore indéterminée est $\gamma$; or, on voit de suite que l'on peut trouver un nombre positif $\gamma_0$, ne dépendant que de $\eta$ et de D, tel que l'on ait

$$(27)\quad 43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2\left\{\mid \log(43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2)\mid + \left|\log\frac{q}{e\,\xi^5}\right|\right\} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour } \gamma < \gamma_0$$

En effet, il suffit pour cela que l'on ait

$$43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon\left\{\mid \log(43\,\mathrm{D}\,\gamma\varepsilon^2)\mid + \left|\log\frac{q}{e\,\xi^5}\right|\right\} < \frac{1}{4}$$

ou encore que l'on ait simultanément

$$\begin{cases} 43\,\mathrm{D}\,\varepsilon\gamma \mid \log\varepsilon^2 \mid < \frac{1}{20} & 43\,\mathrm{D}\,\varepsilon\gamma \mid \log 43\,\mathrm{D} \mid < \frac{1}{20} \\ 43\,\mathrm{D}\,\varepsilon\gamma \mid \log q \mid < \frac{1}{20} & 43\,\mathrm{D}\,\varepsilon\gamma \mid \log \gamma \mid < \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$43\,\mathrm{D}\,\varepsilon\gamma \mid \log e\,\xi^5 \mid < \frac{1}{20}$$

ce qui aura lieu sûrement si l'on a en même temps

$$
(27')\left\{\begin{array}{ll}
33\,D\gamma < \dfrac{1}{20} & 11\,D(\,|\log D\,| + 6) < \dfrac{1}{20} \\
11\,D\,|\log q\,|\,\gamma < \dfrac{1}{20} & D\gamma\,|\log \gamma\,| < \dfrac{1}{20} \\
\multicolumn{2}{c}{40\,D\gamma < \dfrac{1}{20}}
\end{array}\right.
$$

Par conséquent, on voit en confrontant les inégalités (23), (25) et (26) que lorsque $z$ est dans les parties de l'intervalle (15) qui sont extérieures au système d'intervalles $E(q)$ on a

$$
(28)\qquad \left|\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=n_{\mu}+2} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2 D^2}{\nu^2}}\right| > e^{-\frac{\varepsilon}{4}z}
$$

Il s'ensuit que, pour les valeurs de $z$ supérieures à $z_2$ et extérieurs à l'ensemble $E(q)$, on aura, en tenant compte de (18)

$$
(29)\qquad \left|\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2 D^2}{\nu^2}}\right| > e^{-\frac{3}{4}\varepsilon z}
$$

On démontrerait exactement de la même façon que l'inégalitè

$$
(30)\qquad \left|\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2 D^2}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2}}\right| > e^{-\frac{3}{4}\varepsilon z}
$$

a lieu, elle aussi, pour toutes les valeurs de $z$ supérieures à $z_0$ et extérieures à E. Or, les inégalités (29) et (30) peuvent être mises sous la forme

$$
(29')\qquad |C(z)| > e^{-\frac{3}{4}\varepsilon z}\left|\frac{\sin \pi z D}{\pi z D}\right|
$$

$$
(30')\qquad |C(z)| > e^{-\frac{3}{4}\varepsilon z}\,|\cos \pi z D|
$$

Quelle que soit la valeur de $z$, l'une au moins des deux quantités $\left|\frac{\sin \pi z D}{\pi z D}\right|$ et $|\cos \pi z D|$ est supérieure à $\frac{1}{2\pi z D}$, et, par conséquent, à partir d'une certaine valeur $z_3$ de $z$ l'une au moins de ces quantités est supérieure à $e^{-\frac{\varepsilon}{4} z}$. Si donc nous désignons par $z_0$ la plus grande des deux quantités $z_2$ et $z_3$, nous pourrons affirmer que pour toutes les valeurs de $z$ supérieures à $z_0$ et extérieures à $E(q)$ on aura

$$|C(z)| > e^{-\varepsilon z} \tag{31}$$

Cela étant, il ne nous reste plus qu'à montrer que l'inégalité (22) est vérifiée en dehors de l'ensemble $E(q)$.

Soit donc $z$ un point de l'intervalle (15) extérieur par rapport à l'ensemble $E(q)$. Désignons par $m_z$ l'entier déterminé par la condition

$$\lambda_{m_z} < z < \lambda_{m_z+1}$$

Il est clair que la distance du point $z$ à chacun des points $\lambda_{m_z}$ et $\lambda_{m_z+1}$ sera au moins égale à $q$. Il est en outre clair que, quel que soit le nombre entier $\nu$, on aura

$$\lambda_{m_z-\nu} < z - (\nu + 1) q$$

$$\lambda_{m_z+\nu} > z + (\nu + 1) q$$

car ces inégalités sont une conséquence immédiate du mode de construction de l'ensemble $E(q)$.

Cela étant, nous pouvons écrire que

$$\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=n_{\mu+2}} (z + \lambda_\nu) \geqq (2\xi^{\mu-1})^{N_\mu} \tag{32}$$

et

$$\left|\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=m_z} (z - \lambda_\nu)\right| \geqq q.2q \ldots (m_z - m_{\mu-1}) q = q^{m_z - m_{\mu-1}} (m_z - m_{\mu-1})!$$

$$\left|\prod_{\nu=m_z+1}^{\nu=n_{\mu+2}} (z - \lambda_n)\right| \geqq q^{n_{\mu+2} - m_z} (n_{\mu+2} - m_z)!$$

Or, on sait que, $p$ et $q$ étant des entiers, on a

$$p!\, q! \geqq \left(\left[\frac{p+q}{2}\right]!\right)^2$$

On aura donc

$$\left|\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=n_{\mu+2}} (z-\lambda_\nu)\right| \geqq q^{N_\mu} \cdot \left\{\left(\frac{1}{2} N_\mu\right)!\right\}^2 \geqq \left(\frac{q\, N_\mu}{2\, e}\right)^{N_\mu}$$

et, par conséquent, en tenant compte de (32)

$$\left|\prod_{\nu=m_{\mu-1}+1}^{\nu=n_{\mu+2}} (z^2-\lambda_\nu^2)\right| \geqq \left(\frac{q\, \xi^{\mu-1} N_\mu}{e}\right)^{N_\mu}$$

Or, cette inégalité est identique à l'inégalité (22) et notre théorème est donc complètement démontré.

Supposons maintenant que, pour $\lambda_\nu > r$, on a

$$\left|\frac{D\,\lambda_\nu}{\nu} - 1\right| < f(r)$$

$f(r)$ désignant une fonction positive non croissante de $r$, qui tend vers zéro lorsque $r$ croît indéfiniment.

Dans le raisonnement précédent nous avons dû soumettre le choix de $\gamma$ aux inégalités (27'), parmi lesquelles quatre ne contiennent que $\gamma$ et D, tandis que la cinquième

$$11\, D \mid \log q \mid \gamma < \frac{1}{20}$$

dépend aussi de $q$. Supposons maintenant que l'on donne à $q$ une suite de valeurs qui tendent vers zéro. Alors, dès que $q$ sera assez petit, on pourra prendre

$$\gamma = \frac{1}{250\, D \mid \log q \mid}$$

et l'on pourra déterminer pour chaque valeur de $q$ le nombre $m_0$ par la condition

$$f(\lambda_{m_0}) \leqq \frac{\varepsilon^2}{250\, D \mid \log q \mid}$$

Réciproquement, prenons une suite de valeurs de $r$ et déterminons les valeurs correspondantes de $q$ par l'équation

$$f(r_k) = \frac{\varepsilon^2}{250\,D\,|\log q_k|} \qquad (q < 1)$$

Nous verrons alors que l'inégalité (11) sera vérifiée à l'extérieur de l'ensemble $E(q_k)$ pour toutes les valeurs de $z$ supérieures à $r_k$. En remplaçant la suite de valeurs discontinue de $r$ par une suite de valeurs continues, nous verrons que, pour toutes les valeurs de $z$ supérieures à $z_0$ ($z_0$ assez grand), l'inégalité (11) est vérifiée à l'extérieur de l'ensemble $E(q)$ où

$$q = e^{-\frac{\varepsilon^2}{250\,D\,f(z_0)}}$$

Posons maintenant

$$\varphi(x) = e^{-\frac{\varepsilon^2}{250\,D\,f(x)}}$$

La fonction ainsi déterminée sera évidemment une fonction positive non croissante de $x$ et l'on aura de plus $\varphi(\infty) = 0$. Nous pouvons donc construire l'ensemble $E[\varphi(x)]$ défini au § 2, et nous pouvons affirmer *que l'inégalité* (11) *sera vérifiée à l'extérieur de l'ensemble* $E[\varphi(x)]$ *à partir d'une certaine valeur de* z. Ce résultat est évidemment beaucoup plus précis que le théorème que nous avons démontré tout-à-l'heure, et il permet de trouver des résultats intéressants moyennant des suppositions sur le genre de décroissance de $f(x)$, c. à d. sur la rapidité plus ou moins grande avec laquelle $\frac{\nu}{\lambda_\nu}$ tend vers D. En particulier nous pouvons énoncer le théorème suivant:

*Si la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *est telle que, à partir d'une certaine valeur de* $\nu$, *on a*

$$\left|\frac{D\,\lambda_\nu}{\nu} - 1\right| < \frac{1}{k \log \lambda_\nu} \tag{33}$$

k *étant une constante supérieure à* $\frac{250\,D}{\varepsilon^2}$, *l'inégalité* (11) *est vérifiée sur l'axe positif partout, sauf en une suite infinie d'intervalles dont la somme des longueurs ne dépasse pas une quantité finie.*

En effet, $\xi$ désignant une constante supérieure à l'unité, le nombre des points $\lambda_\nu$ compris entre $\xi^\nu$ et $\xi^{\nu+1}$ est au plus égal à $A\,\xi^\nu$, A désignant une constante (qui peut d'ailleurs être prise d'autant plus petite que $\nu$ est grand). Il s'ensuit que la longueur totale des intervalles de l'ensemble $E\,[\varphi(x)]$ n'est pas supérieure à

$$A\,\xi^\nu\,\varphi(\xi^\nu) = A\,\xi^\nu\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{250\,D\,f(\xi^\nu)}} < A\,\xi^\nu\, e^{-\frac{k\,\varepsilon^2}{250\,D}\log \xi^\nu} = A\,\xi^{-h\nu}$$

où

$$h = \frac{k\,\varepsilon^2}{250\,D} - 1 > 0$$

Par conséquent, la longueur totale de l'ensemble $E\,[\varphi(x)]$ ne dépasse pas la quantité

$$\xi + A\,[\xi^{-h} + \xi^{-2h} + \xi^{-3h} + \ldots\ldots] = \xi + \frac{A\,\xi^{-h}}{1 - \xi^{-h}}$$

c. q. f. d.

J'ai tenu à indiquer ce théorème, bien que nous n'aurons pas à en faire usage, parce qu'il me paraît digne d'intérêt. En effet, je ne crois pas qu'il ait été démontré même pour les séries du type considéré par M. Pólya. Je crois d'autre part que la limitation (33) rendue nécessaire par le mode de démonstration, doit pouvoir être enlevée: je pense que le théorème doit être vrai pour toutes les suites de densité D, mais jusqu'ici je n'ai pas réussi à le démontrer.

Une autre proposition que je n'ai pas réussi à démontrer, mais qui me paraît devoir être vraie, est la suivante:

*Si l'on désigne par* p *une constante positive ou nulle, et si* $\varepsilon$ *est un nombre positif aussi petit que l'on veut, l'inégalité*

$$|\,C(z)\,| > e^{-(p+\varepsilon)z}$$

*est vérifiée pour* z *assez grand à l'extérieur de l'ensemble* $E\,[e^{-pz}]$.

Je signale cette proposition (qui est vraie pour $C(z) = \sin \pi z$) parce qu'elle constitue la généralisation naturelle du théorème que nous avons démontré dans ce paragraphe (auquel elle se réduit pour $p = 0$) et parce que sa démonstration éventuelle me paraît ne pas être dénuée d'intérêt du point de vue de la théorie des fonctions entières.

§ 5. — On pourrait essayer de démontrer le théorème principal du § 4 pour les suites $\{\lambda_\nu\}$ qui possèdent une densité maximum D *sans être mesurables*. Je n'ai pas réussi à le démontrer et je doute même que le théorème soit vrai pour ce type de suites [1]. Toutefois, nous pouvons affirmer que, *si l'on considère deux suites $\{\lambda_\nu\}$ et $\{\Delta_\nu\}$, mesurables ou non, mais possédant une densité maximum* D *et telles que*

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\lambda_\nu}{\Delta_\nu} = 1$$

*et si $\varepsilon$ et $\eta$ ont la même signification que plus haut, l'inégalité*

$$(34) \qquad \left| \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\Delta_\nu^2}\right)} \right| > e^{-\varepsilon z}$$

*est vérifiée sur l'axe réel positif pour toutes les valeurs de* z *supérieures à une certaine quantité* $z_0$ (*qui dépend des deux suites données et des nombres* $\varepsilon$, $\eta$) *et extérieures à l'ensemble* E $[\eta; \{\lambda_\nu\}]$ *correspondant à la suite* $\{\lambda_\nu\}$.

Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème principal du § 4. Soit

$$l_1, l_2, \ldots, l_p, \ldots$$

une suite mesurable de densité D qui contient la suite $\{\lambda_\nu\}$ comme suite partielle, de sorte que l'on peut écrire

$$\lambda_\nu = l_{p_\nu} ;$$

alors

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{p_\nu}{\lambda_\nu} = \text{D}$$

et, $p_\nu$ n'étant jamais inférieur à $\nu$,

$$\overline{\lim_{\nu = \infty}} \frac{\nu}{\lambda_\nu} \leqq \text{D}$$

---

[1] Pendant l'impression de ce travail M. Pólya a bien voulu me communiquer un procédé qui permet de construire des suites *non mesurables* à densité maximum finie pour lesquelles le théorème en question n'est sûrement pas vrai.

Cela étant, écrivons

$$\lambda_\nu = l_{p_\nu} = \frac{p_\nu}{D}(1+\varepsilon_\nu)$$

$$\Delta_\nu = \lambda_\nu (1+\varepsilon'_\nu)$$

et choisissons le nombre $m_0$ de telle sorte que l'on ait, pour $m > m_0$,

$$|\varepsilon_m| < \gamma\varepsilon^2 \qquad |\varepsilon'_m| < \frac{1}{4}.$$

Nous pourrons alors démontrer comme au paragraphe précédent, que, lorsque $z$ est situé dans l'intervalle (15), on a

$$\left| \prod_{\substack{\nu \leqq m_{\mu-1} \\ \nu > n_{\mu+2}}} \frac{1-\dfrac{z^2}{\Delta_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}} \right| \leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{z^2\,\delta(\nu)}{\beta_\nu^2}\right)$$

$m_{\mu-1}$ et $n_{\mu+2}$ ayant la même signification qu'au paragraphe précédent et $\delta(\nu)$ désignant la quantité

$$\left|\frac{\lambda_\nu^2}{\Delta_\nu^2}-1\right| \cdot \frac{\nu^2}{\lambda_\nu^2}$$

quantité qui tend évidemment vers zéro lorsque $\nu$ croît indéfiniment. On en déduira, toujours comme précédemment, que

$$(35) \qquad \left| \prod_{\substack{\nu \leqq m_{\mu-1} \\ \nu > n_{\mu+2}}} \frac{1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\dfrac{z^2}{\Delta_\nu^2}} \right| > e^{-\frac{\varepsilon}{2}z}$$

pour $z$ supérieur à une certaine valeur $z_2$.

Quant à la partie du produit relative aux valeurs de $\nu$ comprises entre $m_{\mu-1}$ et $n_{\mu+2}$, il peut arriver que de telles valeurs de $\nu$ n'existent pas, c. à d. que $m_{\mu-1} = n_{\mu+2}$; ce cas ne peut pas se présenter lorsque les suites $\{\lambda_\nu\}$ et $\{\Delta_\nu\}$ sont mesurables, mais rien ne l'empêche de se présenter si elles ne le sont pas. Lorsque ce cas se présente, il est évident que l'inégalité (35) est équivalente à l'inégalité (34), laquelle résulte ainsi vérifiée pour tous les points de l'intervalle (15).

Lorsque, au contraire, $n_{\mu+2} > m_{\mu-1}$, on procèdera comme au paragraphe précédent. L'inégalité (23) ne sera plus applicable pour $m_\varsigma$ et $n_\varsigma$, mais elle sera applicable pour les quantités $p_\varsigma$ et $q_\varsigma$ définies par les conditions

$$l_{p_\varsigma} < \xi^\varsigma \leqq l_{p_\varsigma+1} \, ; \qquad l_{q_\varsigma} \leqq \xi^\varsigma < l_{q_\varsigma+1}$$

et l'on aura évidemment, quels que soient les nombres entiers $a$ et $b$ $(a > b)$,

$$n_a - m_b \leqq p_a - q_b \tag{36}$$

car $n_a - m_b$ et $q_a - p_b$ représentent respectivement les nombres des points $\lambda_\nu$ et $l_\nu$ situés entre $\xi^a$ et $\xi^b$ (limites comprises). Il s'ensuit que toutes les inégalités du paragraphe précédent qui donnent des bornes supérieures pour des expressions du type $n_a - m_b$ sont encore valables pour les expressions correspondantes $q_a - p_b$ ; elles sont donc valables *a fortiori* pour les expressions $n_a - m_b$ en vertu de (36).

La démonstration peut donc être terminée de la même manière qu'au paragraphe précédent, sauf bien entendu en ce qui concerne l'inégalité (31) et le passage des inégalités (30) et (31) à l'inégalité (32), passage qu'il n'y a plus lieu d'envisager pour la démonstration de notre théorème. (Voir à ce propos la remarque faite au début de ce paragraphe).

Une autre proposition qui se démontre de la même manière que les deux précédentes est la suivante:

*La suite* $\{\lambda_\nu\}$ *ayant une densité maximum* D *et* $\varepsilon$, $\eta$ *ayant la même signification que dans les théorèmes précédents,*

$$z_1 \, , \; z_2 \, , \; \dots . \; z_n \, , \; \dots .$$
$$Z_1 \, , \; Z_2 \, , \; \dots . \; Z_n \, , \; \dots .$$

***étant deux suites de nombres indéfiniment croissants, telles que***

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_n}{Z_n} = 1 \, ,$$

***on a, pour toutes les valeurs de*** n ***supérieures à une certaine valeur*** $n_0$

$$\left| \frac{C(z_n)}{C(Z_n)} \right| > e^{-\varepsilon z_n}$$

***pourvu que tous les points*** $z_n$ $(n > n_0)$ ***soient situés à l'extérieur de l'ensemble*** E $[\eta, \{\lambda_\nu\}]$.

Posons

$$\lambda_\nu = l_{p_\nu} = \frac{p_\nu}{D}(1+\varepsilon_\nu)$$

$$Z_n = z_n(1+\varepsilon''_n)$$

$l_{p_\nu}$ ayant la même signification que plus haut et soit

$$k = \max_{\nu \geqq 1} \frac{\nu}{\lambda_\nu}$$

Choisissons le nombre $m_1$ de telle sorte que l'on ait pour $m \geqq m_1$

$$|\varepsilon_m| < \gamma \varepsilon^2;$$

d'autre part, choisissons $n_1$ de sorte que l'on ait pour $n \geqq n_1$

$$|\varepsilon''_n| < \frac{\beta \varepsilon^2}{16 k^2 \pi^2}$$

$\beta$ ayant la même signification qu'au paragraphe 4 et désignons par $m_2$ le nombre entier qui satisfait à la condition

$$\lambda_{m_2-1} \leqq z_{n_1} < \lambda_{m_2}$$

Cela étant, nous prendrons $m_0$ égal au plus grand des nombres $m_1$ et $m_2$. Nous verrons alors que l'on a, lorsque $z_n$ est situé dans l'intervalle (15), pour les valeurs de $\nu$ telles que $\nu \leqq m_{\mu-1}$ ou $\nu > n_{\mu+2}$

$$\left|\frac{1-\frac{Z_n^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\frac{z_n^2}{\lambda_\nu^2}}\right| = \left|1+\frac{z_n^2\left(1-\frac{Z_n^2}{z_n^2}\right)}{z_n^2-\lambda_\nu^2}\right| \leqq \left|1+\frac{z_n^2 . 4\varepsilon''_n}{\beta \lambda_\nu^2}\right| \leqq$$

$$\leqq \left|1+\frac{4\varepsilon''_n k^2 z_n^2}{\beta \nu^2}\right| < 1+\left(\frac{\varepsilon z_n}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}$$

et, par conséquent, pour $z_n > \frac{2}{\varepsilon}$

$$\left|\prod_{\substack{\nu \leqq m_{\mu-1} \\ \nu > n_{\mu+2}}} \frac{1-\frac{z_n^2}{\lambda_\nu^2}}{1-\frac{Z_n^2}{\lambda_\nu^2}}\right| \geqq \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\varepsilon z_n}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{\frac{i\varepsilon z_n}{2}}{\sin \frac{i\varepsilon z_n}{2}} \geqq e^{-\frac{\varepsilon}{2} z_n}$$

On finira la démonstration exactement comme pour le théorème précédent.

Nous allons démontrer maintenant un corollaire des propositions précédentes, qui nous sera utile dans la suite.

Soit une suite $\{\lambda_\nu\}$ non mesurable mais possédant une densité maximum D. Construisons la suite principale mesurable (S) contenant la suite $\{\lambda_\nu\}$ comme suite partielle (v. § 3) et soit $p_\nu$ le numéro d'ordre du point $\lambda_\nu$ dans la suite (S); désignons encore par $m_K$ les points de (S) qui ne font pas partie de la suite $\{\lambda_\nu\}$ et soit $n_K$ le numéro d'ordre du point $m_K$ dans la suite (S), de sorte que les deux suites $\{p_\nu\}$ et $\{n_K\}$ représentent deux suites d'entiers complémentaires l'une de l'autre. Posons enfin

$$M(z) = \prod_{K=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{m_K^2}\right); \qquad K(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{p_\nu^2}\right)$$

Cela étant, nous allons voir que, *quelque petit que soit le nombre positif* $\varepsilon$ *donné à l'avance, on aura à partir d'une certaine valeur* $\nu_0$ *de* $\nu$

$$e^{-\varepsilon\lambda_\nu} < |\, K'(p_\nu) \,.\, M(\lambda_\nu)\,| < e^{\varepsilon\lambda_\nu}$$

Pour le démontrer désignons par $\eta$ une quantité positive arbitraire, d'ailleurs assez petite, et divisons les points $\lambda_\nu$ en deux classes; l'une qui contient les points $\lambda_\nu$ situés à gauche du point $\frac{p_\nu}{D}$ correspondant et ceux qui, tout en étant situés à droite du point $\frac{p_\nu}{D}$ correspondant, sont tels que l'intervalle $\left(\frac{p_\nu}{D} - \eta, \lambda_\nu\right)$ ne contient aucun point $m_K$; l'autre qui contient les points $\lambda_\nu$ pour lesquels cet intervalle contient au moins un point $m_K$. Si $\eta$ a été pris assez petit, il ne pourra y avoir qu'un seul point $m_K$ dans chacun de ces intervalles; cela découle du fait que $n_K$ est égal à l'entier de $m_K D$ et que les suites $\{n_K\}$ et $\{p_\nu\}$ sont complémentaires Soient $\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots$ les indices des points $\lambda_\nu$ de première classe et soient $k_1, k_2, \ldots\ldots$ les indices des points $m_K$ qui sont situés dans les intervalles $\left(\frac{p_\nu}{D} - \eta, \lambda_\nu\right)$ des points $\lambda_\nu$ de seconde classe. Considérons la suite $\{q_\nu\}$ qu'on obtient en réunissant les points $\frac{p_{\nu_i}}{D}$ avec les points $m_{k_j} + \eta$ $(i, j = 1, 2, ....)$. On aura alors

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{q_\nu}{\lambda_\nu} = 1$$

et de plus, si l'on construit l'ensemble $E[\eta; \{m_k\}]$, tous les points $q_\nu$, aussi bien que tous les points $\lambda_\nu$, seront extérieurs par rapport à cet ensemble. Par conséquent, il résulte du théorème précédent que

$$e^{-\frac{1}{3}\varepsilon q_\nu} < \left|\frac{M(q_\nu)}{M(\lambda_\nu)}\right| < e^{\frac{1}{3}\varepsilon \lambda_n}$$

pour les valeurs de $\nu$ supérieures à une certaine valeur $\nu_1$.

Remarquons maintenant que si nous construisons l'ensemble $E\left[\eta; \left\{\frac{n_k}{D}\right\}\right]$, les points $q_\nu$ seront tous extérieurs par rapport à cet ensemble. En effet, cet ensemble est constitué par les intervalles de longueurs $2\eta$ ayant leurs centres aux points $\frac{n_k}{D}$. Considérons un point $m_k$ qui dans la suite (S) précède ou suit immédiatement un point $\lambda_\nu$. Dans le premier cas la distance entre $\frac{n_k}{D}$ et $q_\nu$ sera non inférieure à la distance entre $m_k$ et $q_\nu$, et comme le point $q_\nu$ considéré est extérieur à l'ensemble $E[\eta; \{m_k\}]$ il sera aussi extérieur à l'ensemble $E\left[\eta; \left\{\frac{n_k}{D}\right\}\right]$; dans le second cas la distance entre $\frac{n_k}{D}$ et $q_\nu$ sera égale ou bien à $\frac{1}{D}$ si le point $\lambda_\nu$ est de première classe, ou bien à $\frac{1}{D} - \eta$ s'il est de seconde classe; $q_\nu$ sera donc bien extérieur à l'ensemble $E\left[\eta; \left\{\frac{n_k}{D}\right\}\right]$ si seulement on aura soin de prendre $\eta < \frac{1}{2D}$.

Cela étant, appliquons le premier théorème de ce paragraphe aux fonctions $M(z)$ et

$$\gamma(z) = \prod_{k=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{z^2 D^2}{n_k^2}\right)$$

et à la suite des points $q_\nu$. Nous verrons alors que, à partir d'une certaine valeur $\nu_2$ de $\nu$, on a

$$e^{-\frac{1}{3}\varepsilon q_\nu} < \left| \frac{\gamma(q_\nu)}{M(q_\nu)} \right| < e^{\frac{1}{3}\varepsilon q_\nu}$$

Notons maintenant que, les suites $n_k$ et $p_\lambda$ étant complémentaires, les points $\frac{p_\lambda}{D}$ sont tous extérieurs par rapport à l'ensemble $E\left[\eta\,;\,\left\{\frac{n_k}{D}\right\}\right]$ Nous pouvons donc appliquer encore une fois le second théorème de ce paragraphe pour conclure que, à partir d'une certaine valeur $\nu_3$ de $\nu$, on a

$$e^{-\frac{1}{3}\varepsilon q_\nu} < \left| \frac{\gamma\left(\frac{p_\nu}{D}\right)}{\gamma(q_\nu)} \right| < e^{\frac{1}{3}\varepsilon q_\nu}$$

On a donc, pour toutes les valeurs de $\nu$ supérieures à $\nu_0$ ($\nu_0$ désignant le plus grand des nombres $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$)

$$e^{-\varepsilon\lambda_\nu} < \left| \frac{\gamma\left(\frac{p_\nu}{D}\right)}{M(\lambda_\nu)} \right| < e^{\varepsilon\lambda_\nu}$$

Or,

$$\gamma\left(\frac{p_\nu}{D}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p_\nu^2}{n_k^2}\right)$$

D'autre part

$$\frac{p_\nu}{2} K'(p_\nu) = \prod_{\mu \neq \nu} \left(1 - \frac{p_\nu^2}{p_\mu^2}\right) ;$$

par conséquent

$$\frac{p_\nu}{2} K'(p_\nu)\, \gamma\left(\frac{p_\nu}{D}\right) = \prod_{n \neq p_\nu} \left(1 - \frac{p_\nu^2}{n^2}\right) = (-1)^{p_\nu + 1} \frac{\pi}{2}$$

et ceci nous montre que pour $\nu > \nu_0$, on a

$$e^{-\varepsilon\lambda_\nu} < | K'(p_\nu) . M(\lambda_\nu) | < e^{\varepsilon\lambda_\nu}$$

c. q. f. d.

Reprenons maintenant la suite mesurable $\{\lambda_\nu\}$ du § 4 et considérons en outre une suite de points

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \qquad (\lim_{n \to \infty} z_n = \infty)$$

et faisons correspondre à chacun de ces points un intervalle $\Delta_n$ qui comprend ce point à l'intérieur. Désignons par $S_n$ la suite que l'on obtient en supprimant dans la suite $\{\lambda_\nu\}$ les points intérieurs à l'intervalle $\Delta_n$, et par $E_n$ l'ensemble $E(\eta; S_n)$. Soit enfin

$$C_n(z) = \prod^{(n)} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

le produit étant rapporté à tous les points $\lambda_\nu$ de la suite $S_n$.

Cela étant, si nous reprenons la démonstration du théorème du § 4 et si nous tenons compte de la remarque faite au début de ce paragraphe, que la démonstration reste valable si la quantité $N_\mu$ du § 4 est remplacée par une quantité inférieure (positive et même nulle pour certaines valeurs de $\mu$), nous verrons après un moment de réflexion, que l'on a, à partir d'une certaine valeur de $n$

$$| C_n(z_n) | > e^{-\varepsilon z_n}$$

pourvu que les points $z_n$ soient tous extérieurs aux ensembles $E_n$ correspondants.

En particulier, si nous supposons que la suite $\{\lambda_\nu\}$ satisfait à la condition

$$(3) \qquad \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqq 2h > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et si nous prenons comme intervalle $\Delta_n$ l'intervalle

$$\lambda_n - h \leqq z \leqq \lambda_n + h$$

en posant $z_n = \lambda_n$, nous aurons

$$C_n(z_n) = \frac{1}{\lambda_n} C'(\lambda_n)$$

Il s'ensuit que

$$\delta = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log |C'(\lambda_n)|}{\lambda_n} \geqq 0$$

Or, en vertu d'un théorème de Laguerre (1) la dérivée de $C(z)$ est une fonction du même type que $C(z)$, cette dérivée ne possédant que des racines réelles et deux racines consécutives de $C(z)$ contenant toujours une et une seule racine de $C'(z)$. On peut donc écrire

$$C'(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{l_\nu^2}\right)$$

la suite des $l_\nu$ étant mesurable en même temps que celle des $\lambda_\nu$. Par conséquent, le nombre $\delta$ ne peut pas être positif et on peut même remplacer dans sa définition la limite inférieure par la limite simple. *On a donc, toutes les fois que la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *satisfait à la condition* (3)

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{\log |C'(\lambda_n)|}{\lambda_n} = 0.$$

Reprenons maintenant une suite $\{\lambda_n\}$ non mesurable; considérons la suite mesurable principale (S) qui contient $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle et conservons les notations d'il y a un moment. Posons encore

$$Q(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{q_\nu^2}\right) \qquad R(z) = Q(z)\, M(z)$$

Nous allons voir que, *à partir d'une certaine valeur de* k, *on a*

$$e^{-\varepsilon m_k} < |C(m_k)\, M'(m_k)| < e^{\varepsilon m_k}$$

La suite formée par la réunion de tous les $q_\nu$ et de tous les $m_k$ sera mesurable et de densité D et elle satisfera à la condition (3). On aura donc

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log |R'(m_k)|}{m_k} = 0$$

(1) Voir BOREL. Fonctions entières. Paris, 1921, p. 32.

c. à d. que l'on aura, à partir d'une certaine valeur de $k$

$$e^{-\frac{1}{2}\varepsilon m_k} < | Q(m_k) M'(m_k) | < e^{\frac{1}{2}\varepsilon m_k}$$

Or, les points $m_k$ sont tous à l'extérieur des deux ensembles $E[\eta; \{q_\nu\}]$ et $E[\eta; \{\lambda_\nu\}]$ et l'on a

$$\lim \frac{\lambda_\nu}{q_\nu} = 1$$

Nous aurons donc, à partir d'une certaine valeur de $k$

$$e^{-\frac{1}{2}\varepsilon m_k} < \left| \frac{C(m_k)}{Q(m_k)} \right| < e^{\frac{1}{2}\varepsilon m_k}$$

Par conséquent, en multipliant les deux dernières inégalités, on voit que, pour $k$ assez grand, on doit avoir

$$e^{-\varepsilon m_k} < | C(m_k) M'(m_k) | < e^{\varepsilon m_k}$$

c. q. f. d.

§ 6. — Considérons de nouveau une suite mesurable $\{\lambda_\nu\}$ de densité D, et soit

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \qquad (\lim z_n = \infty)$$

une suite de points différents de tous les $\lambda_\nu$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log | C(z_n) |}{z_n} = -\infty$$

$C(z)$ ayant la même signification qu'au § 4.

*Cela étant, nous allons démontrer qu'il est possible de trouver une fonction* $\varphi(x)$ *de la variable complexe* $x$, *holomorphe dans un secteur* $|\arg x| \leqq \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, *et y satisfaisant aux conditions suivantes:*

1) *sur chaque rayon* $|\arg x| = \psi \leqq \psi_0$, *on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log | \varphi(re^{i\psi}) |}{r} = -\infty ;$$

2) *si l'on pose*

$$k_n = \left| \frac{\varphi(z_n)}{C(z_n)} \right|,$$

*on a*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log k_n}{z_n} = 0 .$$

Choisissons dans la suite des $z_n$ une suite partielle

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots$$

telle que l'on ait

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log | C(\zeta_m) |}{\zeta_m} = -\infty \tag{37}$$

Suivant les travaux de M. Valiron, on peut toujours trouver un ordre L, (c. à d. une fonction réelle et continue $\varrho(r)$, différentiable sauf en des points isolés, telle que $\lim\limits_{r \to \infty} \varrho(r) = \varrho > 0$, $\lim\limits_{r \to \infty} \varrho'(r) \log r = 0$), de manière que, si l'on désigne par $\alpha(r)$ une fonction positive de $r$ qui tend vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$ et que nous préciserons plus loin, on ait

$$\lim_{r \to \infty} r^{\varrho(r)-1} = \infty, \qquad \lim_{r \to \infty} r^{\varrho(r)-1} \alpha(r) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{\zeta_m} \log | C(\zeta_m) | + \zeta_m^{\varrho(\zeta_m)-1} \right\} = -\infty .$$

En outre on peut trouver une fonction $V(x)$ de la variable complexe $x$, holomorphe dans le secteur

$$-\frac{\pi}{2\varrho} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$$

et telle que dans ce secteur on a

$$V(re^{i\psi}) = r^{\varrho(r)} e^{i\psi\varrho} [1 + \varepsilon(r, \psi)]$$

où $\varepsilon(r, \psi)$ désigne une fonction qui tend vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$, quelle que soit la valeur de $\psi$ (1).

---

(1) Voir VALIRON, Lectures on the general theory of integral functions, p. 127 et suiv.

On aura donc

$$(38) \quad \begin{gathered} \lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r} = \infty, \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{V(re^{i\psi})}{V(r)} = e^{i\psi\varrho} \\ \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\zeta_m} \{\log | C(\zeta_m) | + V(\zeta_m)\} = -\infty \end{gathered}$$

Cela posé il suffira, pour démontrer notre théorème, de construire une suite $\{\mu_\nu\}$ de densité D telle que la fonction

$$\gamma(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_\nu^2}\right)$$

satisfasse aux conditions suivantes, où l'on a posé $W(z) = e^{V(z)}$;

1) pour une certaine suite infinie d'indices $n_k$, on a

$$(39) \qquad e^{-\varepsilon z_{n_k}} \leqq \left| \frac{\gamma(z_{n_k})}{C(z_{n_k})} \cdot \frac{1}{W(z_{n_k})} \right| \leqq e^{\varepsilon z_{n_k}}$$

quelque petit que soit $\varepsilon$.

2) pour toutes les valeurs de $n$ supérieures à un certain nombre $n_0$, on a

$$(40) \qquad \left| \frac{\gamma(z_n)}{C(z_n)} \right| \cdot \frac{1}{W(z_n)} \leqq e^{\varepsilon z_n}$$

En effet, si nous avons construit une telle suite $\{\mu_\nu\}$, la fonction

$$\varphi(z) = \frac{\gamma(z)}{W(z)}$$

satisfait évidemment aux conditions de notre proposition, pour $\psi_0 < \frac{\pi}{2\varrho}$, car on aura alors

$$\log | \varphi(re^{i\psi}) | \leqq e^{r(\pi D+\varepsilon)\sin|\psi|} - (1-\varepsilon)\cos(\varphi\,\varrho)\,V(r)$$

ce qui montre que la première condition du théorème sera vérifiée, tandis que la seconde est une conséquence immédiate de (39) et (40).

Pour construire une suite $\{\mu_\nu\}$ qui satisfait aux conditions précédentes, nous prendrons la suite $\{\lambda_\nu\}$ et nous déplacerons d'une manière convenable certains de ses points. Nous remarquerons que l'on peut attacher à certains des points $\zeta_m$ un petit intervalle $\Delta_m$ qui comprend, en outre du point $\zeta_m$ lui-même, quelques uns des points $\lambda_\nu$, ces intervalles $\Delta_m$ étant séparés l'un de l'autre par des intervalles intermédiaires suffisamment larges. Un faible déplacement des points $\lambda_\nu$ intérieurs à $\Delta_m$ n'influencera que très peu la valeur de $C(z)$ aux points $z_k$ extérieurs à $\Delta_m$, mais pourra influencer très fortement la valeur de $C(z)$ aux points $z_k$ intérieurs à $\Delta_m$, en particulier au point $\zeta_m$. Nous commencerons donc par la définition exacte des intervalles $\Delta_m$, puis nous évaluerons d'une manière précise l'influence d'un déplacement des $\lambda_\nu$ intérieurs à $\Delta_m$ sur la valeur de $C(z)$ aux points $z_k$ extérieurs à $\Delta_m$. Enfin, nous allons démontrer que le déplacement peut être choisi de telle sorte que son influence sur la valeur de $C(z)$ aux points $z_k$ intérieurs à $\Delta_m$ soit précisément telle que les inégalités (39) et (40) soient satisfaites; cette démonstration sera sensiblement facilitée par le fait que le nombre des points $z_k$ intérieurs à $\Delta_m$, aussi bien que celui des points $\lambda_\nu$ intérieurs à $\Delta_m$, est fini.

Remarquons maintenant que les points $\zeta_m$, à partir d'une certaine valeur de $m$, sont tous intérieurs à l'ensemble $E[\eta;\{\lambda_\nu\}]$; en effet, s'il y avait des points $\zeta_m$ d'indice aussi grand que l'on veut à l'extérieur de cet ensemble, on devrait avoir, en vertu du théorème du § 4

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\log |C(\zeta_m)|}{\zeta_m} = 0$$

Choisissons une valeur particulière de $\zeta_m$ ; il est clair que nous pouvons enlever de la suite $\{\lambda_\nu\}$ un certain nombre de points (un au moins) de telle sorte que l'ensemble $E(\eta)$ relatif à la suite des $\lambda_\nu$ qui restent, ne contienne plus le point $\zeta_m$ à l'intérieur. Désignons par

(41) $$\lambda_{p_m}, \lambda_{p_m+1}, \ldots, \lambda_{q_m}$$

les points que nous devons enlever pour cela. Nous pouvons choisir ces points de telle sorte que les ensembles $E(\eta)$ attachés aux deux suites

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_m-2}, \lambda_{p_m-1}, \lambda_{q_m}, \lambda_{q_m+1}, \lambda_{q_m+2}, \ldots$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_m-2}, \lambda_{p_m-1}, \lambda_{p_m}, \lambda_{q_m+1}, \lambda_{q_m+2}, \ldots$$

contiennent encore le point $\zeta_m$ à l'intérieur. Désignons maintenant par $\Delta_m$ un intervalle qui contient à l'intérieur les points (41) et le point $\zeta_m$, en laissant à l'extérieur les points $\lambda_{p_n-1}$, $\lambda_{q_n+1}$. Or, nous avons vu au § 2 que les intervalles de $E(\eta)$ générés par des points $\lambda_\nu$ situés à droite d'un point Z assez grand sont tous situés à droite du point $A^{-1}Z$, A désignant une constante que l'on peut toujours prendre inférieure à l'unité et que l'on pourra prendre d'autant plus petite que $\eta$ aura été pris plus petit. Il s'ensuit que la longueur de $\Delta_m$ sera, pour $m$ assez grand, inférieure à $2A\zeta_m$.

Déterminons maintenant la suite $\{\mu_\nu\}$ de telle sorte que l'on ait $\mu_\nu = \lambda_\nu$ toutes les fois que $\lambda_\nu$ ne fait partie d'aucun groupe (41), tandis que, pour les autres indices, $\mu_\nu$ sera soumis à la condition

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu} = 1$$

Reprenons maintenant la division de l'axe réel en une suite d'intervalles

$$(\delta_\nu) \qquad \xi^\nu \leqq x \leqq \xi^{\nu+1}$$

considérée au § 4, $\xi$ désignant toutefois une constante fixe indépendante de $\varepsilon$ et $\eta$.

Prenons le nombre $\eta$ et par conséquent, le nombre A assez petit pour que l'on ait

$$1 + A < \sqrt{\xi}$$

D'autre part, prenons le nombre $m$ assez grand pour que l'on ait, pour les points (41)

$$\left|\frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu} - 1\right| < \sqrt{\xi} - 1$$

Nous pouvons d'ailleurs supposer que la suite des $\zeta_m$ ait été prise de telle manière que cette condition soit vérifiée déjà pour $\zeta_1$.

Cela étant, nous verrons que, si $\zeta_m$ se trouve dans l'intervalle $\delta_\nu$, tous les points (41) et aussi bien tous les points

$$(42) \qquad \mu_{p_m}, \mu_{p_m+1}, \ldots, \mu_{q_m-1}, \mu_{q_m}$$

se trouvent à l'intérieur de l'intervalle

$$(d_\nu) \qquad \xi^{\nu-1} \leqq x \leqq \xi^{\nu+2}$$

Si maintenant nous supposons encore que les points $\zeta_m$ vérifient la condition

$$\zeta_{m+1} > \xi^6 \zeta_m$$

ce qui ne restreint pas la généralité, nous verrons que chaque groupe de points (41) et (42) peut être inclus dans un intervalle du type $(d_\nu)$ que nous pouvons indiquer par $d_{\nu_m}$, et que entre deux intervalles $d_{\nu_m}$ et $d_{\nu_{m+1}}$ correspondants à deux points consécutifs $\zeta_m$ et $\zeta_{m+1}$ il y a toujours au moins trois intervalles $\delta_\nu$ qui ne contiennent aucun point appartenant à l'un des groupes (41) ou (42). Il s'ensuit que si nous construisons les deux ensembles $E(\eta)$ attachés respectivement à la suite de tous les points $\lambda_\nu$ qui appartiennent à l'un des groupes (41) et à celle de tous les points $\mu_\nu$ qui appartiennent à l'un des groupes (42), les intervalles de ces deux ensembles qui proviennent des points contenus dans l'intervalle $d_{\nu_m}$ (c. à d. des points qui correspondent au point $\zeta_m$) seront tous intérieurs (du moins pour $m$ assez grand) à l'intervalle

$$(D_{\nu_m}) \qquad \xi^{\nu_m - 2} \leqq x \leqq \xi^{\nu_m + 3}$$

et entre les intervalles $(D_{\nu_{m-1}})$ et $(D_{\nu_m})$ il y aura encore sûrement un intervalle $\delta_\nu$ qui ne contient aucun intervalle appartenant à l'un des deux ensembles que nous venons de construire.

Notons d'ailleurs que ce qui précède est vrai quel que soit le choix de la constante $\xi$, qui peut être prise aussi voisine de l'unité que l'on veut. Or, ceci démontre que, si nous désignons par $l_m$ la distance entre le point $\zeta_m$ et celui des points du groupe (41) qui en est le plus éloigné, on aura

$$\lim_{m \to \infty} \frac{l_m}{\zeta_m} = 0$$

On peut donc trouver une fonction $\alpha(z)$ continue, positive et tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{z}$, telle que l'on ait pour $m$ assez grand

$$l_m < \alpha(\zeta_m)\, \zeta_m$$

C'est précisément cette fonction $\alpha(z)$ que nous ferons intervenir dans les conditions qui sont imposées à la fonction $V(z)$, lorsque nous aurons à faire usage de cette dernière.

Cela étant, si nous désignons par $\Pi(z)$ le produit

$$\prod_{\nu} \frac{1 - \frac{z^2}{\mu_\nu^2}}{1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}} \tag{43}$$

rapporté à toutes les valeurs de $\nu$ pour lesquelles $\lambda_\nu$ fait partie d'un groupe (41), on verra que pour les valeurs de $z$ assez grandes et situées à l'extérieur de tous les intervalles $(D_{\nu_m})$ on a, en vertu du premier théorème du § 5,

$$e^{-\varepsilon z} < | \Pi(z) | < e^{\varepsilon z}$$

Et comme, pour les autres valeurs de $\nu$, on a $\mu_\nu = \lambda_\nu$, de sorte que l'on a, quel que soit $z$,

$$\Pi(z) = P(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z^2}{\mu_\nu^2}}{1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}}$$

nous voyons que *pour les valeurs assez grandes de* z *situées à l'extérieur de tous les* $D_{\nu_m}$, *on a*

$$e^{-\varepsilon z} < | P(z) | < e^{\varepsilon z} \tag{44}$$

Prenons maintenant un point $z$ situé à l'intérieur d'un intervalle $D_{\nu_m}$. Nous avons vu aux §§ 4 et 5 que, si l'on désigne alors par $P_m(z)$ le produit (43) rapporté à toutes les valeurs de $\nu$ pour lesquelles le point $\lambda_\nu$ est à l'extérieur de l'intervalle $(D_{\nu_m})$ et des deux intervalles $(\delta_\nu)$ adjacents de part et d'autre à l'intervalle $(D_{\nu_m})$, on a, pourvu que $m$ soit assez grand,

$$e^{-\varepsilon z} < | P_m(z) | < e^{\varepsilon z} \tag{45}$$

Or, nous pouvons rapporter le produit qui définit $P_m(z)$ à tous les points $\lambda_\nu$ qui ne font pas partie du groupe (41) correspondant à la valeur considérée de $m$, car l'intervalle $(D_{\nu_m})$ ne contient, outre les points $\lambda_\nu$ de ce groupe, que des points $\lambda_\nu$ pour lesquels $\lambda_\nu = \mu_\nu$ et les intervalles adjacents ne contiennent eux aussi que des points $\lambda_\nu$ de cette dernière espèce. Si donc nous posons

$$(46)\quad \begin{cases} K_m(z) = \prod\limits_{\nu=p_m}^{q_m}\left(1-\dfrac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right) & C_m(z) = \dfrac{C(z)}{K_m(z)} \\ H_m(z) = \prod\limits_{\nu=p_m}^{q_m}\left(1-\dfrac{z^2}{\mu_\nu^2}\right) & \gamma_m(z) = \dfrac{\gamma(z)}{H_m(z)} \end{cases} \qquad Q_m(z) = \frac{H_m(z)}{K_m(z)}$$

l'inégalité (45) pourra être écrite sous la forme

$$(47)\qquad e^{-\varepsilon z} < \left|\frac{\gamma_m(z)}{C_m(z)}\right| < e^{\varepsilon z}$$

Désignons maintenant par

$$(48)\qquad z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots\ldots, z_{k_m}^{(m)}$$

les points de la suite $\{z_n\}$ qui sont situés à l'intérieur de l'intervalle $D_{\nu_m}$. Les formules précédentes mises en relation avec les inégalités (44) et (47) nous montrent alors que, pour que la suite $\{\mu_\nu\}$ satisfasse aux conditions (39) et (40), il suffit que, à partir d'une certaine valeur de $m$, l'inégalité

$$(49)\qquad |Q_m(z)|\,\frac{1}{W(z)} < e^{\varepsilon z}$$

soit vérifiée en tous les points (48), tandis que, pour l'un au moins de ces points, on ait

$$(50)\qquad e^{-\varepsilon z} < |Q_m(z)|\,\frac{1}{W(z)} < e^{\varepsilon z}$$

Or, ces inégalités (49) et (50) ne contiennent que les points (41) et (42) *d'un même groupe*. Nous pouvons donc déterminer successivement les points $\mu_\nu$ de chaque groupe (42) indépendemment des points des autres groupes; nous n'avons d'ailleurs qu'un nombre fini d'inégalités pour chaque groupe. La détermination des points $\mu_\nu$ de manière à satisfaire aux inégalités (49) et (50) n'offre donc pas de difficultés.

Prenons maintenant une valeur quelconque de $m$ et désignons pour simplifier les notations les points du groupe (41) par

$$\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \ldots\ldots, \lambda_{k_m}^{(m)}.$$

et par

$$\mu_1^{(m)},\ \mu_2^{(m)},\ \ldots\ldots,\ \mu_{k_m}^{(m)}$$

ceux du groupe (42). Soit $\theta$ un paramètre qui peut prendre toutes les valeurs entre zéro et l'unité et soient

$$\alpha_1^{(m)}(\theta),\quad \alpha_2^{(m)}(\theta),\quad \ldots.,\quad \alpha_{k_m}^{(m)}(\theta)$$

des fonctions de ce paramètre qui satisfont aux conditions suivantes:

1) si l'on pose

$$A_i^{(m)} = \max_{0<\theta\leqq 1} \alpha_i^{(m)}(\theta)$$

et

$$A_m = \max_{1<i\leqq k_m} A_i^{(m)},$$

on a

$$\lim_{m\to\infty} A_m = 0$$

2) quel que soit $i$, on a

(51) $$\alpha_i^{(m)}(0) = 0$$

3) à chaque $i$ correspond un nombre $T_i^{(m)}$ compris entre 0 et 1 (limites comprises) tel que pour $0 \leqq \theta \leqq T_i^{(m)}$ on a

$$\alpha_i^{(m)}(\theta) = 0$$

tandis que pour les valeurs de $\theta$ supérieures à $T_i^{(m)}$, $\alpha_i^{(m)}$ est une fonction analytique de $\theta$.

Cela étant, posons

(52) $$\mu_i^{(m)} = \left[1 + \alpha_i^{(m)}(\theta)\right] \lambda_i^{(m)} \qquad (i = 1, 2, \ldots., k_m)$$

ce que nous pouvons faire, car la seule condition à laquelle les points $\mu_\nu$ ont été soumis jusqu'ici, savoir

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu} = 1$$

sera alors satisfaite en vertu de la première des conditions imposées aux fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$. Ecrivons

$$Q_m(z) = S_m(\theta, z)$$

et calculons la valeur de $S_m(1, z)$ pour tous les points $z_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, ...., k_m)$. Nous allons voir tout à l'heure que l'on peut choisir les fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ de telle sorte que l'on ait

$$S_m(1, \zeta_m) = W(\zeta_m) \tag{53}$$

Supposons donc que les fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ soient choisies précisément de cette manière. Il peut arriver que pour la valeur considérée de $m$ on ait, pour tous les points $z_i^{(m)}$ autres que $\zeta_m$

$$S_m(1, z_i^{(m)}) \leqq W(z_i^{(m)})\,; \tag{54}$$

dans ce cas les conditions (49) et (50) sont visiblement satisfaites. Mais il peut aussi arriver que pour quelques uns des points $z_i^{(m)}$ l'inégalité précédente ne soit pas vérifiée. Alors il y aura parmi les équations en $\theta$

$$S_m(\theta, z_i^{(m)}) = W(z_i^{(m)}) \tag{55}$$

une au moins qui possède des racines comprises entre 0 et 1. Il peut d'ailleurs arriver que l'une des équations (55) soit vérifiée pour toutes les valeurs d'un certain intervalle

$$t_1 \leqq \theta \leqq t_2\,;$$

si nous convenons de ne considérer comme « racine » de l'équation que le plus grand point de cet intervalle, c. à d. le point $t_2$, nous pourrons dire que les « racines » de chacune des équations sont en nombre fini, car toutes les fonctions $S_m(\theta, z)$ sont des fonctions continues de $\theta$; elles sont même analytiques en tout intervalle qui ne comprend aucun point $T_i^{(m)}$.

Nous pouvons donc considérer la plus petite « racine » de chacune de ces équations; désignons la par $\theta_1$. Alors, si nous remarquons que, en vertu de (51) et (52), on doit avoir, quel que soit $i$

$$S_m(0, z_i^{(m)}) = 1,$$

nous verrons que, pour $\theta < \theta_i$, on a

$$S_m(\theta, z_i^{(m)}) < W(z_i^{(m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_m)$$

Or, les équations (55) sont elles-mêmes en nombre fini, de sorte que nous pouvons choisir le plus petit parmi les nombres $\theta_i$ ; soit $\theta_r$ ce nombre. On aura alors

$$S_m(\theta_r, z_i^{(m)}) \leqq W(z_i^{(m)})$$

pour toutes les valeur de $i$, le signe d' égalité ayant lieu pour $i = r$. Donc, pour $\theta = \theta_r$, la fonction $Q(z)$ satisfait aux conditions (49) et (50). Notre théorème sera donc complètement démontré si nous prouvons la possibilité de choisir les fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ de telle sorte que l' égalité (53) soit vérifiée. Or, ceci n' offre pas de difficultés. Posons

$$\delta_i^{(m)} = 1 - \left(\frac{\zeta_m}{\lambda_i^{(m)}}\right)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_m)$$

$$\delta = |K_m(\zeta_m)| = \prod_{i=1}^{k_m} \delta_i^{(m)}$$

Désignons par $t$ une variable qui peut prendre toutes les valeurs entre 1 et $W(\zeta_m)$ et posons

$$t'_i = \frac{\sqrt[k_m]{t\,\delta}}{\delta_i^{(m)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_m)$$

posons encore

$$t_i = 1 \qquad \text{si} \quad t'_i \leqq 1$$

$$t_i = M(t)\, t'_i \qquad \text{si} \quad t'_i > 1$$

la fonction $M(t)$ étant déterminée par la condition que le produit de tous les $t_i$ soit égal à celui de tous les $t'_i$ c. à d. à $t$. Les $t_i$ sont alors des fonctions continues de $t$, e si l' on désigne par $T'_i$ la plus grande valeur de $t$ pour laquelle $t_i = 1$, on pourra dire que $t_i$ est une fonction analytique de $t$ pour $t > T'_i$ ; pour $t < T'_i$, $t_i$ sera une constante.

Cela étant, nous pouvons poser

$$\beta_i^{(m)}(t) = \sqrt{\frac{1 - \delta_i^{(m)}}{1 - \delta_i^{(m)} t_i}}$$

et

$$1 + \alpha_i^{(m)}(\theta) = \beta_i^{(m)}(\theta[W(\xi) - 1] + 1)$$

En premier lieu nous verrons immédiatement que la deuxième et la troisième conditions imposées aux fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ sont satisfaites par les fonctions que nous venons de définir. En second lieu nous pourrons nous assurer que la première condition est aussi satisfaite, si $m$ est assez grand ; en effet, si $m$ est assez grand, on aura, quel que soit $i$

$$|\delta_i^{(m)}| < \alpha(\zeta_m),$$

de sorte que, si $t'_i \leqq 1$, on a

(56) $$|\delta_i^{(m)} t_i| = |\delta_i^{(m)}| < \alpha(\zeta_m)$$

tandis que, si $t'_i > 1$, on a

(56') $$|\delta_i^{(m)} t_i| \leqq |\delta_i^{(m)} t'_i| = \sqrt[k_m]{\delta t} \leqq \sqrt[k_m]{W(\zeta_m)\,|K_m(\zeta_m)|}$$

où

$$k_m < p\,\zeta_m,$$

$p$ étant une constante qui ne dépend que de D.

Or, nous avons choisi les points du groupe (41) de telle sorte que l'ensemble $E(\eta)$ attaché à la suite de tous les autres $\lambda_\nu$ ne comprenne pas le point $\zeta_m$. Nous pouvons donc affirmer, suivant la remarque faite aut début de ce paragraphe, que pour $m$ assez grand on a

$$|C_m(\zeta_m)| < e^{-\varepsilon\zeta_m}$$

Il s'ensuit, en vertu de (37) et (38) que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log|K_m(\zeta_m)|}{\zeta_m} = -\infty$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\zeta_m}\,\{\log|K_m(\zeta_m)| + V(\zeta_m)\} = -\infty$$

Cette formule, en relation avec les formules (56) et (56'), nous montre donc que, si $m$ est assez grand, toutes les quantités $|\delta_i^{(m)} t_i|$ seront inférieures à un nombre aussi petit que l'on veut, donné à l'avance. Il s'ensuit que toutes les quantités $\beta_i^{(m)}(t)$ tendent vers un d'une manière uniforme par rapport à l'indice $i$, et ceci démontre précisément que les fonctions $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ satisfont à la première condition.

Enfin, pour montrer qu'elles vérifient l'égalité (53), notons que l'on a

$$1-\left(\frac{\zeta_m}{\mu_i^{(m)}}\right)^2 = 1-\left[\frac{1}{\beta_i^{(m)}}\cdot\frac{\zeta_m}{\lambda_i^{(m)}}\right]^2 = 1-\frac{1-\delta_i^{(m)}t_i}{1-\delta_i^{(m)}}\left(1-\delta_i^{(m)}\right) = \delta_i^{(m)}t_i$$

et, par conséquent

$$\prod_{i=1}^{k_m}\frac{1-\left(\dfrac{\zeta_m}{\mu_i^{(m)}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\zeta_m}{\lambda_i^{(m)}}\right)^2} = \prod_{i=1}^{k_m} t_i = t$$

Si donc on remarque que la valeur de $t$ qui correspond à la valeur 1 de $\theta$ est précisément $W(\zeta_m)$, on voit que l'on a

$$S_m(1, \zeta_m) = W(\zeta_m)$$

c. q. f. d. Notons d'ailleurs que les $\alpha_i^{(m)}(\theta)$ étant choisis de la manière que nous venons d'indiquer, certains groupes de points $\mu_\nu$ peuvent se confondre en un seul. Ceci n'infirme en rien nos conclusions car les théorèmes des §§ 4 et 5 restent vrais pour les suites qui contiennent des points multiples. Il faut seulement faire attention à la multiplicité des points lors du calcul de la densité ou lors de la construction des ensembles $E(\eta)$.

Avant de terminer ce chapitre indiquons une application du théorème précédent dont nous aurons à faire usage plus loin.

Nous avons vu au § 5 que l'on peut poser

$$C'(z) = z\,C_1(z) = z\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{l_\mu^2}\right)$$

aucun des points $l_\mu$ ne pouvant se confondre avec un point $\lambda_\nu$. Nous pouvons donc appliquer le théorème précédent à la fonction $C_1(z)$ et à la suite $\{\lambda_\nu\}$ supposée mesurable. On verra alors que, *si l'on a*

$$\underline{\lim}_{\nu \to \infty} \frac{\log |C'(\lambda_\nu)|}{\lambda_\nu} = -\infty$$

*on peut trouver une fonction* $\varphi(z)$ *holomorphe dans un secteur* $|\arg z| \leqq \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, *et telle que l'on ait*

$$(57) \qquad \overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\log |\varphi(re^{i\psi})|}{r} = -\infty \qquad \textit{pour } |\psi| \leqq \psi_0$$

*et*

$$(58) \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log k_n}{\lambda_n} = 0$$

*où*

$$k_n = \left| \frac{\varphi(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} \right|$$

Reprenons maintenant le cas général et soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$$

une suite de points possédant une densité maximum $D_1$ et telle que l'ensemble $E(\eta; \{\alpha_m\})$ ne contienne aucun des points $z_n$. Soit encore comme précédemment

$$z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}$$

une suite partielle de la suite $\{z_n\}$ pour laquelle la fonction $\gamma(z)$ vérifie les inégalités (39) et (40). Nous pouvons évidemment supposer que la suite $\{z_{n_k}\}$ a été choisie de telle sorte qu'elle soit mesurable et de densité zéro. Soit (A) la suite obtenue par la réunion des suites $\{\alpha_m\}$ et $\{z_{n_k}\}$; ce sera encore une suite de densité maximum $D_1$. Construisons la suite mesurable principale (S) qui contient la suite (A) comme suite partielle, et soit

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$$

la suite mesurable de densité $D_1$ que l'on obtient en enlevant les points $z_{n_k}$ de la suite (S). Le mode de construction de la suite (S) nous garantit que l'ensemble $E(\eta, \{\beta_\nu\})$ ne contiendra aucun des points $z_{n_k}$, si $\eta$ est assez petit. Si donc nous posons

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\beta_\nu^2}\right)$$

nous aurons, en vertu des théorèmes du § 4, pour $z_{n_k}$ assez grand

$$| B(z_{n_k}) | > e^{-\varepsilon z_{n_k}}$$

tandis que pour $z$ assez grand mais quelconque nous aurons

$$| B(z) | < e^{\varepsilon z}$$

Ceci nous montre que la fonction

$$\gamma_1(z) = \gamma(z)\, B(z)$$

satisfait aussi aux conditions (39) et (40) et il est clair que cette fonction s'annule aux points $\alpha_\nu$. Nous pouvons donc affirmer que, *lorsque la suite* $\{\alpha_m\}$ *possédant une densité maximum finie est telle que l'ensemble* $E(\eta, \{\alpha_m\})$ *ne contient aucun des points* $z_n$, *la fonction* $\varphi(z)$ *qui satisfait au théorème précédent peut être choisie de telle sorte que l'on ait*

$$\varphi(\alpha_m) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots.)$$

Appliquons encore ce résultat à la fonction $C_1(z)$ de tout à l'heure. Nous verrons alors que, *si la suite mesurable* $\{\lambda_\nu\}$ *est telle que*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\log | C'(\lambda_n) |}{\lambda_n} = -\infty$$

*et si les points* $\lambda_\nu$ *sont divisés en deux catégories*

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots., \lambda'_\nu, \ldots.$$
$$\lambda''_1, \lambda''_2, \ldots., \lambda''_\mu, \ldots.$$

*de telle sorte que l'ensemble* $E(\eta; \{\lambda''_\mu\})$ *ne contienne aucun des points* $\lambda'_\nu$, *tandis que pour les points* $\lambda'_\nu$ *on a encore*

$$\varlimsup_{\nu \to \infty} \frac{\log | C'(\lambda'_\nu) |}{\lambda'_\nu} = -\infty,$$

*on peut déterminer la fonction* $\varphi(z)$ *de telle sorte qu'elle satisfasse aux conditions (57) et (58) et que de plus on ait*

$$\varphi(\lambda''_\mu) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots.)$$

## Chapitre II.

§ 7. — *Théorème I. Soit* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *une suite de nombres positifs croissants, tels que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = D \tag{1}$$

D *étant un nombre fini, positif ou nul, et soit*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it) \tag{2}$$

*une série de Dirichlet dont l'abscisse de convergence n'est pas supérieure à zéro. Pour que* f(s) *soit holomorphe sur le segment*

$$|t| < l \tag{3}$$

*de la droite de convergence, il faut et il suffit qu'il existe un angle* $\eta$ $\left(0 < \eta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ *et une fonction* $\varphi(z)$ *holomorphe dans le secteur*

$$-\eta \leqq \arg z \leqq \eta \tag{4}$$

*et satisfaisants aux conditions suivantes:*

1) *quelque petit que soit* $\varepsilon$, *on a pour* $\varrho$ *assez grand*

$$|\varphi(\varrho e^{i\psi})| < e^{\varrho[(\pi D - l)\sin|\psi| + \varepsilon]} \tag{5}$$

*pourvu que* $|\psi| \leqq \eta$.

2) *pour* n *entier positif, on a*

$$\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n) \tag{6}$$

*où*

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

***En outre, pour que la fonction*** f(s) ***soit holomorphe à l'intérieur*** *du triangle isocèle qui a pour base le segment* (3), *dont le sommet est situé sur l'axe réel négatif et l'angle à la base est égal à* $\alpha$, *il faut et il suffit que la condition précédente soit vérifiée pour tout* $\eta$ *inférieur à* $\alpha$.

I. *La condition est suffisante.* Supposons qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ qui satisfait aux conditions de l'énoncé et considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\, e^{\;sz}\, dz}{C(z)}$$

prise suivant un contour $C_R$ formé par deux segments des demi-droites $\arg z = \pm\,\eta$ et l'arc de cercle $\gamma_R$ de rayon R et de centre origine.

Il est évident que, si R est différent de tous les $\lambda_n$, on a

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{\varphi(z)\, e^{-sz}\, dz}{C(z)} = \sum_{\lambda_n < R} \frac{\varphi(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)}\, e^{-\lambda_n s} = \sum_{\lambda_n < R} a_n\, e^{-\lambda_n s}.$$

Nous allons voir que l'on peut choisir une suite de valeurs indéfiniment croissantes de R de telle sorte que, pour certaines valeurs de $s$, la partie de l'intégrale (7) relative à l'arc de cercle $\gamma_R$ tende vers zéro. Alors, le deuxième membre de (7) tendra vers $f(s)$, tandis que le premier membre se transformera en une intégrale prise suivant les deux demi-droites $\arg z = \pm\,\eta$. On obtiendra donc une expression de $f(s)$ qui ne dépend que des valeurs de $\varphi(z)$ et de $C(z)$ sur ces deux demi-droites et il ne sera pas difficile de s'assurer, en se basant sur (5) et sur les propriétés de $C(z)$ établies au § 4, que l'expression considérée représente une fonction holomorphe dans le triangle isocèle dont il est question dans notre théorème.

Posons donc $z = Re^{i\psi}$; alors, pour $s$ réel et positif, on aura, en vertu des conditions imposées à $\varphi(z)$

$$|\,\varphi(z)\, e^{-sz}\,| < e^{-R[s\cos\psi - (\pi D - l)\sin|\psi| - \varepsilon]}$$

D'autre part, nous avons vu au § 4 que l'on peut choisir une suite de valeurs indéfiniment croissantes de R de telle sorte que l'on ait

$$(8)\qquad |\,C(Re^{i\psi})\,| > e^{-pR}$$

quelle que soit la constante positive $p$. Par conséquent, pour $s$ réel et positif, on a sur $\gamma_R$ l'inégalité suivante:

$$(9)\qquad \left|\frac{\varphi(z)\, e^{-sz}}{C(z)}\right| < e^{-R[s\cos\eta - (\pi D - l)|\sin\psi| - p - \varepsilon]}$$

Fixons maintenat le nombre $s_0$ par la condition

$$(10) \qquad s_0 \cos \eta - (\pi D - l) \sin \eta - p = 1 \text{ (}^1\text{)}, \qquad \text{si } l \leqq \pi D,$$

$$(10') \qquad s_0 \cos \eta - p = 1, \qquad \text{si } l > \pi D.$$

Alors, pour $s \geqq s_0$, on aura sur $\gamma_R$ (R étant choisi comme il est indiqué)

$$\left| \frac{\varphi(z)\, e^{-sz}}{C(z)} \right| < e^{-(1-\varepsilon)R}$$

Par conséquent, si R croît indéfiniment en prenant seulement des valeurs pour lesquelles (8) est vérifiée, la partie de l'intégrale (7) relative à l'arc $\gamma_R$ tend effectivement vers zéro. Quant au second membre de (7), il tend vers $f(s)$, lorsque R croît indéfiniment d'une manière quelconque (continue ou discontinue), tant que $s$ se trouve dans un domaine intérieur au demi-plan de convergence $\sigma < 0$, ce demi-plan étant en vertu de (1) le demi-plan de convergence absolue. Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que lorsque R croît indefiniment, en ne prenant que des valeurs telles que (8) ait lieu, l'inégalité (7) devient

$$(11) \qquad f(s) = \lim \sum_{\lambda_n < R} a_n e^{-\lambda_n s} = \frac{e^{-i\eta}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\varphi(\varrho e^{-i\eta})\, e^{-s\varrho e^{-i\eta}}\, d\varrho}{C(\varrho e^{-i\eta})} - \frac{e^{i\eta}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\varphi(\varrho e^{i\eta})\, e^{-s\varrho e^{i\eta}}\, d\varrho}{C(\varrho e^{i\eta})};$$

cette formule est ainsi démontrée pour $s$ réel et supérieur a $s_0$ (²).

---

(¹) C'est toujours possible si $\eta < \frac{\pi}{2}$. Quant au cas $\eta = \frac{\pi}{2}$, nous en parlerons plus loin (voir § 8).

(²) Notons toutefois que, si nous n'avions pas supposé explicitement que $s$ se trouve dans le demi-plan de convergence de (1), notre raisonnement ne nous aurait pas permis d'affirmer que (2) converge pour les valeurs de $s$ pour lesquelles (10) a lieu. On ne pourrait le faire que si l'on était sûr que dans *chaque* intervalle $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ il y a des valeurs de R pour lesquelles (8) est vérifiée, ce qui n'est pas le cas en général. Le raisonnement permettrait seulement d'affirmer

Pour achever la démonstration nous allons montrer que chacune des intégrales qui figurent dans le second membre de (11), est holomorphe à l'intérieur de tout angle $\Omega$ d'ouverture $(\pi - 2\eta)$ qui a l'axe réel positif pour bissectrice et qui intercepte sur l'axe imaginaire un segment de longueur inférieure (d'ailleurs d'aussi peu que l'on veut) à $2l$; ceci implique évidemment l'holomorphie de $f(s)$ à l'intérieur du triangle isocèle dont il est question dans notre théorème.

En posant $s = \sigma + i t$, on a

$$\left| e^{-s\varrho e^{\pm i\eta}} \right| = e^{-\varrho(\sigma\cos\eta \mp t\sin\eta)} \, ;$$

d'autre part

$$\left|\varphi\left(\varrho\, e^{\pm i\eta}\right)\right| < e^{\varrho[(\pi D - l)\sin\eta + \varepsilon]}$$

$$\left|C\left(\varrho\, e^{\pm i\eta}\right)\right| = e^{\varrho[\pi D \sin\eta + \varepsilon_1(\varrho)]}$$

$\varepsilon_1(\varrho)$ tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{\varrho}$. Par conséquent, on a

$$\left| \frac{\varphi\left(\varrho\, e^{\pm i\eta}\right) e^{-s\varrho e^{\pm i\eta}}}{C\left(\varrho\, e^{\pm i\eta}\right)} \right| < e^{-\varrho[\sigma\cos\eta + (l \mp t)\sin\eta - \varepsilon]} \tag{12}$$

Or, lorsque $s$ est situé dans l'angle $\Omega$, on a

$$| t | < \sigma \operatorname{ctg} \eta + l - h$$

$h$ étant un nombre positif; donc

$$\sigma \cos \eta + (l \mp t) \sin \eta > h \sin \eta$$

et, lorsque $s$ est situé dans $\Omega$, l'expression (12) est inférieure à $e^{-\varrho[h\sin\eta - \varepsilon]}$, ce qui démontre notre affirmation.

II. *La condition est nécessaire.* Supposons que $f(s)$ est holomorphe à l'intérieur du triangle $[- l \operatorname{tg} \alpha ; + l i ; - l i]$. Soit $k$ un nombre réel non nul, $\psi$ un angle compris entre

---

*qu'une certaine suite de sommes partielles de* (2) converge vers le second membre de (11); on serait conduit à un phénomène de *extra-convergence* (Ueberkonvergenz), qui se rattache aux travaux de M. Ostrowski. Je reviendrai sur ce sujet à une autre occasion.

$-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ tel que $\operatorname{tg}\psi = k$ et $a$ une constante telle que d'une part $0 < a < \frac{l}{|k|}$ et d'autre part $a < l \operatorname{tg} \alpha$; considérons l'intégrale

$$(13) \qquad J(z) = \int_{-a}^{\infty} f(s)\, e^{sz}\, ds$$

prise suivant la demi-droite qui part du point $-a$ en faisant avec l'axe positif un angle égal à $\psi$. Posons

$$s = -a + \sigma + ik\sigma, \qquad z = \varrho\, e^{i\eta};$$

alors

$$(14) \qquad |e^{sz}| = e^{-a\cos\eta}.\, e^{\sigma\varrho(\cos\eta - k\sin\eta)}$$

et comme dans tout demi-plan $\Re(s) > p > 0$, on a

$$|f(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n p}$$

il s'ensuit que l'intégrale (13) a un sens si $\cos\eta - k\sin\eta < 0$, c. à d. lorsque $z$ est situé dans l'angle

$$(15) \qquad \frac{\pi}{2} - \psi < \arg z < \frac{\pi}{2} \qquad \text{si } k > 0$$

ou

$$(16) \qquad -\left(\frac{\pi}{2} - |\psi|\right) > \arg z > -\frac{\pi}{2} \qquad \text{si } k < 0.$$

Il est clair d'ailleurs que, la valeur de $a$ étant choisie, l'intégrale (13) détermine la même fonction de $z$, quelle que soit la valeur positive de $k$, pourvu que cette valeur ne dépasse pas $\frac{l}{a}$; l'intégrale (13) détermine donc une fonction $J_1(z)$ qui est holomorphe dans l'angle

$$(15') \qquad \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{l}{a} < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

Modifions maintenant le chemin d'intégration en suivant auparavant l'axe réel du point $-a$ jusqu'à l'origine et puis la droite $\arg s = \psi$. Tant que $k$ est inférieur à $\frac{l}{a}$, la nouvelle intégrale représentera la même fonction $J_1(z)$ et elle aura encore un sens tant que $z$ est situé dans (15). D'ailleurs, cette dernière affirmation reste vraie même pour des valeurs de $k$ supérieures à $\frac{l}{a}$ et, par conséquent, la première affirmation reste aussi vraie pour les valeurs de $k$ aussi grandes que l'on veut. En prenant successivement pour $k$ une suite de nombres positifs indéfiniment croissants, on déterminera ainsi une fonction $J_1(z)$ holomorphe dans le domaine

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2};$$

en procédant de la même manière et en prenant pour $k$ des nombres négatifs indéfiniment croissants en valeur absolue, on déterminera une fonction $J_2(z)$ holomorphe dans le domaine

$$0 > \arg z > -\frac{\pi}{2}.$$

Nous allons montrer que $J_2(z)$ est le prolongement analytique de $J_1(z)$ au dessous de l'axe positif et que la fonction $J(z)$ ainsi déterminée n'a dans le demi-plan $\Re(z) > 0$ aucune singularité à l'exception des points $\lambda_i$ qui sont des pôles de premier ordre de $J(z)$. A cet effet, donnons à $k$ une valeur positive fixe et modifions le chemin d'intégration de manière à parcourir l'axe réel de $-a$ à $+1$, puis la droite $s = 1 + it$ depuis $+1$ à $1 + ik(1 + a)$ et enfin la droite $s = -a + \sigma + ik\sigma$ depuis $1 + ik(1 + a)$ jusqu'à l'infini.

La série (2) est uniformément convergente dans tout domaine situé complètement à l'intérieur du demi-plan $\Re(s) > 0$. On peut donc écrire

$$(17) \qquad \int_{1}^{1+ik(1+a)} + \int_{1+ik(1+a)}^{-a+h(1+ik)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, e^{(z-\lambda_n)[-a+h(1+ik)]}}{z - \lambda_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, e^{z-\lambda_n}}{z - \lambda_n}$$

Or, on peut voir, en tenant compte de (14), que la première somme du second membre de (17) est inférieure en module à

$$R_h = \frac{1}{ka} \sum a_n\, e^{-\lambda_n(h-a)}\, e^{h\varrho(\cos\eta \quad k\sin\eta)};$$

par conséquent, lorsque $z$ est compris dans le domaine

$$(18) \qquad \frac{\pi}{2} - (\psi + \varepsilon) < \arg z < \frac{\pi}{2} \qquad (\varepsilon > 0),$$

on a, en posant $q = k \sin(\psi + \varepsilon) - \cos(\psi + \varepsilon) > 0$, pour $h$ assez grand

$$R_h < \frac{1}{ka} \sum a_n e^{-\lambda_n} e^{-q\varrho h}$$

Il s'ensuit que, $z$ étant toujours intérieur à (18), on peut écrire

$$(19) \qquad J_1(z) = \int_{-a}^{1} f(s) e^{sz} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{z-\lambda_n}}{z - \lambda_n}$$

On s'assurera de la même manière que, lorsque $z$ est situé dans le domaine

$$(18') \qquad -\left[\frac{\pi}{2} - (|\psi| + \varepsilon)\right] > \arg z > -\frac{\pi}{2} \qquad (\varepsilon > 0)$$

on a

$$(19') \qquad J_2(z) = \int_{-a}^{1} f(s) e^{sz} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{z-\lambda_n}}{z - \lambda_n}$$

Les seconds membres de (19) et (19′) représentent une fonction analytique dans tout le demi-plan $\Re(z) > 0$ et ils sont d'ailleurs identiques, ce qui démontre notre affirmation.

Cela étant, si nous posons

$$(20) \qquad \varphi(z) = -C(z) \, . \, J(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ satisfera évidemment, en vertu de (19), à la condition (6) et elle sera holomorphe dans tout le demi-plan $\Re(z) > 0$. Il reste à démontrer qu'elle satisfait à la condition (5).

A cet effet notons que, de la même manière que nous avons démontré (19), nous aurions pu démontrer que

$$(21) \qquad J(z) = \int_{-a}^{\varepsilon} f(s) e^{sz} ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{(z-\lambda_n)\varepsilon}}{z - \lambda_n}$$

$\varepsilon$ désignant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Or, l'abscisse de convergence de (2) n'étant pas supérieure à zéro, on a

$$(22) \qquad |a_n| < K_\omega e^{\omega \lambda_n}$$

et cela quelque petit que soit $\omega > 0$ ($K_\omega$ désigne ici une constante qui ne dépend que de $\omega$). D'autre part, on sait que

$$(23) \qquad \begin{aligned} C(\varrho e^{i\gamma}) &= e^{[\pi D \sin|\gamma| + \varepsilon(\varrho)]\varrho} \\ C(\varrho) &< L_\varepsilon e^{\varepsilon\varrho} \end{aligned}$$

et que les mêmes formules sont valables pour les fonctions

$$C_n(z) = \frac{C(z)}{z - \lambda_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots.)$$

les constantes qui interviennent au second membre ne dépendant pas de $n$ [1]. On déduit, par conséquent, de (20) et (21), en tenant compte de (22) et (23), que, pour $\varrho$ assez grand et $|\gamma| \leqq \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$

$$(24) \qquad |\varphi(\varrho e^{i\gamma})| < M_a e^{\varrho[\varepsilon\cos\gamma + \pi D|\sin\gamma| + \varepsilon(\varrho)]} + \\ + K_\omega e^{\varrho[\varepsilon\cos\gamma + \pi D|\sin\gamma| + \varepsilon(\varrho)]} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\omega-\varepsilon)\lambda_n}$$

où $M_a = \max\limits_{-a \leqq s \leqq 1} |f(s)|$. Or, si nous prenons $\omega = \frac{\varepsilon}{2}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{(\omega-\varepsilon)\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\lambda_n}$$

et la série du second membre, qui est sûrement convergente pour $\varepsilon > 0$, ne dépend que de $\varepsilon$. On a donc

$$|\varphi(\varrho e^{i\gamma})| < N_{a,\varepsilon}\, e^{\varrho[\varepsilon\cos\gamma + \pi D|\sin\gamma| + \varepsilon(\varrho)]}$$

la constante $N_{a,\varepsilon}$ ne dépendant que de $a$ et de $\varepsilon$. On a donc dans tout le secteur $|\arg z| \leqq \gamma_0$

$$(25) \qquad |\varphi(z)| < e^{p.|z|} \qquad (p = \text{const.})$$

[1] Voir § 4.

et, en particulier, sur l'axe réel positif

(26) $$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon(\varrho)\cdot\varrho}$$

Il s'ensuit, en vertu d'un théorème de MM. Phragmen-Lindelöf (¹) que l'inégalité (5) sera démontrée pour tout le secteur

(27) $$-\alpha < \arg z < \alpha$$

si nous avons démontré qu'elle est vérifiée sur les droites $\arg z = \pm\alpha$. Or, les formules (13) et (14) montrent que, si l'on désigne par $M'_{a,k}$ le maximum de $f(s)$ sur la demi-droite

$$\arg[s-(-a)] = \psi = \operatorname{arctg} k,$$

on a

$$|J(\varrho e^{i\alpha})| < M'_{a,k}\, e^{-a\varrho\cos\alpha}\, \frac{1}{\cos a - k\sin\alpha},$$

pourvu que l'on ait pris $k$ tel que $\cos\alpha - k\sin\alpha < 0$, et $a$ tel que $0 < a < \dfrac{l}{|k|}$. Ces conditions seront évidemment remplies si l'on prend

$$k = (1+\varepsilon_1)\operatorname{ctg}\alpha \qquad a = (1-\varepsilon_2)\frac{l}{|k|}$$

les nombres $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ satisfaisant à la condition

$$\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} > 1-\varepsilon$$

On aura alors

$$-a\cos\alpha = -\frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1}\, l\sin\alpha - (1-\varepsilon)\, l\sin\alpha$$

et, par conséquent,

$$|J(\varrho e^{i\alpha})| < N_\varepsilon\, e^{-(1-\varepsilon)l\sin\alpha\cdot\varrho}$$

ou encore, en tenant compte de (23),

(28) $$|\varphi(\varrho e^{i\alpha})| < P_\varepsilon\, e^{\varrho[(\pi D - l)\sin\alpha + \varepsilon]},$$

$N_\varepsilon$ et $P_\varepsilon$ indiquant des constantes qui ne dépendent que de $\varepsilon$. L'inégalité (5) est donc démontrée pour $\arg z = \alpha$, et on la

(¹) *Acta Mathematica*, T. 31, 1908, pp. 391-403.

démontrera de la même manière pour $\arg z = -\alpha$. Notre théorème est donc complètement démontré.

§ 8. — Il résulte du théorème que nous venons de démontrer que, pour que $f(s)$ soit holomorphe à l'intérieur de la bande $|\mathfrak{I}(s)| < l$, il faut et il suffit que, quel que soit l'angle $\eta$ inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il existe une fonction $\varphi_\eta(z)$ qui est holomorphe dans le secteur (4) et y satisfait aux conditions (5) et (6). Or, il peut arriver qu'il existe une fonction qui satisfait à ces conditions même pour $\eta = \frac{\pi}{2}$; plus généralement, il peut arriver qu'il existe une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

1) $\varphi(z)$ est holomorphe dans un demi-plan $\mathfrak{R}(z) > \beta$, $\beta$ étant un nombre réel, dont la valeur absolue n'est égale à aucun des nombres $\lambda_n$ [1]

2) $\varphi(z)$ satisfait à la condition (5) dans tout ce demi-plan

3) on a pour tout $n$ entier positif, tel que $\lambda_n > \beta$

$$\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n)$$

Nous allons voir que dans ce cas la fonction $f(s)$ est non seulement holomorphe dans la bande

$$\text{(H)} \qquad |\mathfrak{I}(s)| < l$$

mais que dans toute semi-bande horizontale

$$\text{(B)} \qquad |\mathfrak{I}(s)| \leqq l_1 < l; \qquad \mathfrak{R}(s) < 0$$

complètement intérieure à la bande (H) on a

$$(29) \quad \begin{cases} f(s) = e^{-(\beta+\omega)s}\,\varepsilon(s) & \text{si } \gamma > -\lambda_1 \\ f(s) = \sum\limits_{\lambda_n < |\beta|} \dfrac{\varphi(-\lambda_n)}{C'(\lambda_n)}\, e^{\lambda_n s} + e^{-(\beta+\omega)s}\,\varepsilon(s) & \text{si } \gamma < -\lambda_1 \end{cases}$$

où $\varepsilon(s)$ tend uniformément vers zéro lorsque $s$ croît indéfiniment dans la semi-bande (B), et cela quelque petit que soit le

[1] Cette restriction n'est pas absolument nécessaire. Le lecteur qui connaît le Chapitre V du *Calcul des Résidus* de *M. Lindelöf* trouvera facilement les modifications à apporter à ce qui suit pour ne pas exclure le cas où $\beta$ est égal en valeur absolue à l'un des $\lambda_n$.

positif $\omega$ [1]. Réciproquement, si la fonction $f(s)$ satisfait dans toute semi-bande (B), quels que soient les nombres $\omega > 0$ et $l_1 < l$, à la condition

$$f(s) = e^{-(\beta+\omega)s}\,\varepsilon(s) \qquad \text{si } \beta > -\lambda_1$$

$$f(s) = -\sum_{n=1}^{n=k} a_{-n}\, e^{\lambda_n s} + e^{-(\beta+\omega)s}\,\varepsilon(s) \qquad \text{si } -\lambda_{k+1} < \beta < -\lambda_k$$

où $\varepsilon(s)$ a la même signification que tout à l'heure, il existe une fonction $\varphi(z)$ qui satisfait aux conditions que nous venons d'énoncer (si $-\lambda_{k+1} < \beta < -\lambda_k$, on aura $\varphi(-\lambda_n) = a_{-n}\,C'(-\lambda_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots, k$) [2].

Il n'y a pas beaucoup à changer dans la démonstration du § 7 pour obtenir la démonstration de la proposition qui nous intéresse.

Nous prendrons cette fois comme contour d'intégration $C_R$ un segment de la droite $\Re(z) = \gamma$, $\gamma$ désignant un nombre arbitraire mais fixe, supérieur à $\beta$ et différent des points $\pm\lambda_n$) et l'arc de cercle $|z| = R$, $\Re(z) \geqq \gamma$ qui joint les deux extrémités de ce segment. Nous pourrons alors écrire

$$(30) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{\varphi(z)\,e^{-sz}\,dz}{C(z)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma<\lambda_n<R} a_n\, e^{-\lambda_n s} & \text{si } \gamma > -\lambda_1 \\ \displaystyle\sum_{\lambda_n<R} a_n\, e^{-\lambda_n s} + \sum_{\lambda_n<|\gamma|} \frac{\varphi(-\lambda_n)}{C'(-\lambda_n)}\, e^{\lambda_n s} & \text{si } \gamma < -\lambda_1 \end{cases}$$

---

[1] Si, au lieu de supposer que les conditions (1) et (2) sont vérifiées dans le demi-plan *ouvert* $\Re(z) > \beta$, nous avions supposé qu'elles sont vérifiées dans le demi-plan *fermé* $\Re(z) \geqq \beta$, on aurait pu prendre $\omega = 0$ dans les formules (29). Quant aux modifications à apporter à la démonstration de la première partie du théorème pour démontrer que les formules (29) restent vraies pour $\omega = 0$, on peut répéter ce que nous avons dit dans la note précédente.

[2] Je n'ai pas pu démontrer que la fonction $\varphi(z)$ satisfait aux conditions (1) et (2) dans le demi-plan fermé si $f(s)$ vérifie les formules (29) avec $\omega = 0$. C'est la raison pour laquelle j'ai conservé dans la première partie du théorème $\omega > 0$, pour avoir un théorème qui peut être complètement inverti.

Nous choisirons encore R de telle sorte que (8) ait lieu, mais $\eta$ étant égale à $\frac{\pi}{2}$, nous ne pourrons plus choisir $s_0$ de telle sorte que l'égalité (10) soit satisfaite. Cela étant, pour démontrer que la partie de l'intégrale (30) relative au cercle tend vers zéro, nous userons d'un artifice dû à M. Lindelöf.

En premier lieu nous pouvons affirmer que, dans le cas qui nous intéresse, on a sûrement $l < \pi D$. En effet, si nous supposions que $\pi D - l < 0$, la fonction

$$h(\psi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |\varphi(\beta + re^{i\psi})|}{r}$$

devrait être négative pour $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ et pour $0 > \psi \geqq -\frac{\pi}{2}$. Or ceci est en contradiction avec les théorèmes de MM. Phragmen et Lindelöf [1]; suivant un de ces théorèmes on devrait avoir $h(0) < 0$, de sorte que $h(\psi)$ serait négative dans tout l'intervalle *fermé* $-\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$; mais suivant un autre théorème de MM. Phragmen-Lindelöf la longueur d'un intervalle *fermé* dans lequel $h(\psi)$ est négative doit être inférieure à $\pi$.

Cela posé, nous savons que, $\psi_0$ étant un angle aigu arbitraire, on a pour $\psi_0 < |\psi| \leqq \pi$

$$(31) \qquad |C(z)| > e^{[\pi D \sin\psi_0 - \varepsilon]R}$$

on a donc pour les mêmes valeurs de $\psi$ et pour $s$ réel et positif

$$(32) \qquad \left| \frac{\varphi(z)\, e^{-sz}}{C(z)} \right| < e^{-R[\pi D \sin\psi_0 - \pi D + l - \varepsilon]}$$

Choisissons $\psi_0$ de telle sorte que

$$\pi D \sin \psi_0 = \pi D - l + \theta$$

$\theta$ désignant un nombre positif convenable, et puis choisissons $s_0$ de sorte que

$$s_0 \cos \psi_0 - (\pi D - l) \sin \psi_0 - p = 1$$

On aura alors sur $C_R$, en vertu de (9) et de (32)

---

(1) *Acta Mathematica, l. c.*

$$\left|\frac{\varphi(z)\,e^{-sz}}{C(z)}\right| < \begin{cases} e^{-(1-\varepsilon)R} & \text{pour } |\psi| \leqq \psi_0 \\ e^{-(1+\theta)R} & \text{pour } \psi_0 \leqq |\psi| \end{cases}$$

et, par conséquent, l'égalité (30) deviendra

$$(33)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\varphi(z)\,e^{-sz}\,dz}{C(z)} = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma<\lambda_n} a_n\,e^{-\lambda_n s} = f(s) - \sum\limits_{\lambda_n<\gamma} a_n\,e^{-\lambda_n s} & \text{si } \gamma > -\lambda_1 \\ = f(s) + \sum\limits_{\lambda_n<|\gamma|} \frac{\varphi(-\lambda_n)\,e^{\lambda_n s}}{C'(-\lambda_n)} & \text{si } \gamma < -\lambda_1 \end{cases}$$

Or,

$$(34)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\varphi(z)\,e^{-sz}\,dz}{C(z)} = \frac{e^{-s\gamma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\gamma+i\tau)\,e^{-is\tau}\,d\tau}{C(\gamma+i\tau)}$$

et, en vertu de (5) et de (31), on a, en posant $s = \sigma + it$

$$\left|\frac{\varphi(\gamma+i\tau)\,e^{-is\tau}\,d\tau}{C(\gamma+i\tau)}\right| < e^{-[l-|t|+\varepsilon(\tau)].|\tau|}$$

Il s'ensuit 1°, que l'intégrale du second membre de (34) représente une fonction holomophe dans toute la bande $|t| < l$, et 2° que, dans la bande $|t| \leqq l_1 < l$, elle est inférieure à une quantité finie qui ne dépend que de la différence $l - l_1$, et ceci démontre la première partie de notre théorème.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, supposons que $\beta$ est compris entre $-\lambda_1$ et $\lambda_1$ et posons

$$(35)\qquad J(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{sz}\,ds$$

l'intégrale étant prise suivant l'axe réel ; elle sera convergente si $z$ est situé dans la bande $\beta < |\Re(z)| < \lambda_1$. Désignons par $\varepsilon$ un nombre positif aussi petit que l'on veut ; on pourra alors écrire, la série (2) étant uniformément convergente dans tout domaine situé complètement à l'intérieur du demi-plan $\Re(s) > 0$,

$$\int_{-\infty}^{h} f(s)\,e^{sz}\,ds = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(s)\,e^{sz}\,ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\,e^{(z-\lambda_n)h}}{z-\lambda_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\,e^{(z-\lambda_n)\varepsilon}}{z-\lambda_n}$$

et l'on en déduira comme plus haut que pour $\beta < \Re(z) < \lambda_1$ on a

$$(36) \qquad J(z) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(s)\, e^{sz}\, ds - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{(z-\lambda_n)\varepsilon}}{z-\lambda_n}$$

Le second membre de cette formule représente une fonction de $z$, analytique dans tout le demi-plan $\Re(z) > \beta$, et qui n'y a pas d'autres singularités que les points $\lambda_n$ qui sont des pôles de premier ordre.

Il s'ensuit que la fonction

$$\varphi(z) = -C(z)\, J(z)$$

satisfait à la première et à la troisième conditions de notre théorème.

On s'assurera maintenant, exactement de la même manière qu'au § 7, que $\varphi(z)$ satisfait dans tout demi-plan $\Re(z) \geqq \gamma > \beta$ l'inégalité (24), où toutefois $M_a$ représentera maintenant le maximum de l'expression $| f(s)\, e^{\gamma s} |$ sur le segment infini $-\infty \leqq s \leqq \varepsilon$ si $\beta$ est positif ou nul, et le maximum de $| f(s) |$ sur le même segment si $\beta$ est négatif. On en déduit immédiatement que $\varphi(z)$ satisfait dans le demi plan $\Re(z) \geqq \gamma$ les inégalités (25) et (26); il ne reste qu'à démontrer que l'on a

$$(37) \qquad | \varphi(\gamma \pm it) | \leqq e^{(\pi D - l + \varepsilon)\, | t |}$$

La méthode de démonstration que nous avons employée pour démontrer l'inégalité (28) n'est plus applicable ici, car maintenant $tg\, \alpha = \infty$. Mais nous pouvons appliquer telle quelle la méthode que j'avais employée pour démontrer le théorème correspondant relatif aux séries de Taylor [1].

Soit $\gamma$ un nombre fixe compris entre $\beta$ et $\lambda_1$. Posons

$$(38) \qquad f(s)\, e^{\gamma s} = A(s)$$

il y aura alors un nombre positif $\Delta$ tel que dans toute bande $| \Im(s) | \leqq l_1 < l$ on ait pour $| s |$ assez grand $| A(s) | < e^{-\Delta |s|}$.

---

[1] Voir mes Notes: « Sopra l'interpolazione ecc. » (*Rendiconti Accad. Lincei*, 6 série, T. III, 1926, p. 652) et « Complementi alla Nota Sopra l'interpolazione ecc. » (*Ibid.* 6 série, T. VII, 1928, p. 979).

Cela étant, donnons à $t$ une valeur fixe $t_0$ comprise entre $-l_1$ et $+l_1$ ; nous pouvons alors écrire, en vertu de la formule de Fourrier

$$A(\sigma + it_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma\xi i}\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta + it_0)\, e^{-\xi\zeta i}\, d\zeta$$

et les intégrales qui entrent dans cette formule seront sûrement absolument convergentes et cela quelle que soit la valeur de $\sigma$. Or, en vertu de (38)

$$e^{\xi t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta + it_0)\, e^{-\xi\zeta i}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta)\, e^{-\xi\zeta i}\, d\zeta = J(\gamma - \xi i)$$

Donc

$$A(\sigma + it_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma i - t_0)\xi}\, J(\gamma - \xi i)\, d\xi$$

l'intégrale étant absolument convergente pour toutes les valeurs de $\sigma$ et quel que soit $t_0$ inférieur en valeur absolue à $l_1$. On en déduit que, pour $\xi$ assez grand

$$| J(\gamma \pm \xi i) | < e^{-l_1\xi} ;$$

or, $l_1$ peut être pris aussi voisin que l'on veut de $l$. On doit donc avoir, pour $\xi$ assez grand

$$| J(\gamma \pm \xi i) | < e^{-(l-\varepsilon)\xi}$$

et, par conséquent,

$$| \varphi(\gamma \pm \xi i) | < e^{(\pi D - l + \varepsilon)\xi}$$

et cela quelque petit que soit $\varepsilon$.

Nous avons ainsi démontré le théorème dans les cas où $-\lambda_1 < \beta < \lambda_1$ ; la démonstration sera la même dans tous les autres cas ; on n'aura qu'à remplacer dans (35) $f(s)$ par

$$f_k(s) = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad \text{si } \lambda_k < \beta < \lambda_{k+1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$f_k(s) = f(s) + \sum_{n=1}^{|k|} a_{-n} e^{\lambda_n s} \text{ si } -\lambda_{|k|} > \beta > \lambda_{|k|+1}$$

$$k = -1, -2, -3, \ldots .$$

et substituer la bande $\beta < \Re(z) < \lambda_{k+1}$ $(k > 0)$ ou la bande $\beta < \Re(z) < -\lambda_{|k|}$ $(k < 0)$ à la bande $\beta < \Re(z) < \lambda_1$.

Notons encore que la formule (37) que nous avons démontrée pour $\beta < \gamma < \lambda_1$ est vraie pour tout $\gamma$ supérieur à $\beta$. Voir à ce sujet ma Note « Sopra l' interpolazione ecc. » (*Rendiconti Accad. Lincei*, 6 série, T. III, 1926, p. 735).

§ 9. — Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les théorèmes sur la *droite d'holomorphie* annoncés dans l'introduction. Nous nommerons ainsi la droite $\Re(s) = \mathcal{H}$, telle que $f(s)$ est holomorphe dans tout demi-plan $\Re(s) > \mathcal{H} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, mais possède sûrement des singularités dans chaque demi-plan $\Re(s) > \mathcal{H} - \varepsilon$; nous donnerons encore au nombre $\mathcal{H}$ le nom d' *abscisse d' holomorphie*; et au demi-plan $\Re(s) > \mathcal{H}$ le nom de *demi-plan d' holomorphie*.

Nous nous servirons du théorème I du § 7 et d' un théorème de Phragmen-Lindelöf sur la fonction

$$h(\psi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |\varphi(re^{i\psi})|}{r} \quad (^1),$$

et nous allons montrer que les éléments d' un triangle isocèle du type considéré au § 7 ne peuvent pas être quelconques; ils sont liés, par une inégalité, à deux nombres qui caractérisent la suite des exposants de la série de Dirichlet. A l' aide de cette inégalité nous allons démontrer que *si la suite* $\{\lambda_1\}$ *a une densité maximum finie* D, *chaque fonction* $f(s)$ *déterminée par une série de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

***qui a une abscisse de convergence et une abscisse d'holomorphie finies, possède au moins un point singulier sur chaque***

(1) *Acta Matemathica, l. c.*

*segment de la droite d'holomorphie de longueur supérieure à* $2\pi D$. En outre, en nous servant toujours de la même inégalité, nous déterminerons une limite supérieure pour la distance entre la droite de convergence et la droite d'holomorphie de toutes les séries de Dirichlet qui ont la même suite d'exposants $\{\lambda_\nu\}$ (à densité maximum finie) et nous allons voir que cette limite est précise, c. à d. qu'elle ne peut pas être remplacée par un nombre plus petit.

Nous allons nous occuper dans ce paragraphe de séries pour lesquelles la suite des $\lambda_\nu$ est mesurable. Nous verrons au paragraphe suivant comment les résultats que nous obtiendrons tout à l'heure peuvent être adaptés aux séries pour lesquelles la suite des $\lambda_\nu$ n'est pas mesurable, mais possède une densité maximum finie.

Pour abréger le langage, nous appellerons *triangle* $H_\sigma(l,\alpha)$ chaque triangle isocèle, dont la base est de longueur $2l$ et est située sur la droite $\Re(s) = \sigma$, dont les angles à la base sont égaux à $\alpha$ et dont le sommet est à gauche de la droite $\Re(s) = \sigma$. Lorsque nous voudrons préciser que nous considérons un triangle $H_\sigma(l,\alpha)$ particulier, nous l'indiquerons par $H^t_\sigma(l,\alpha)$, $t$ désignant l'ordonnée du sommet du triangle considéré. Nous dirons encore qu'une fonction $f(s)$ est holomorphe dans un triangle $H^t_\sigma(l,\alpha)$, si elle est holomorphe à l'intérieur de ce triangle et sur sa base, les côtés latéraux pouvant contenir des singularités quelconques de $f(s)$.

Cela posé, nous allons démontrer en premier lieu le théorème suivant :

*Théorème II. La suite*

$$\lambda_1\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

*étant mesurable et de densité* D *et l'abscisse de convergence de la série*

$$\text{(A)} \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it)$$

*étant égale à zéro, la fonction* f(s) *ne peut être holomorphe dans un triangle* $H_0(l,\alpha)$ *avec* $l > \pi D$ *que si l'on a*

$$\text{(39)} \qquad (l - \pi D)\, tg\,\alpha \leqq |\,\delta\,|$$

*où*

$$(40)\qquad \delta = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\log |C'(\lambda_\nu)|}{\lambda_\nu} \text{ [1]} \quad \text{et} \quad C(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right)$$

*Réciproquement, si* $H_0(l, \alpha)$ *est un triangle dont les éléments vérifient la condition* (39), *il existe au moins une série du type (A) dont l'abscisse de convergence est égale à zéro et dont la somme est holomorphe dans le triangle* $H_0(l, \alpha)$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, notons le cas particulier suivant :

*Théorème II'. Dans les conditions du théorème II la fonction* f(s) *ne peut être une fonction entière de* s *que si* $\delta = -\infty$. *Réciproquement, si* $\delta = -\infty$, *il existe au moins une série du type (A) dont l'abscisse de convergence est égale à zéro et dont la somme est une fonction entière de* s.

Pour démontrer ces théorèmes, considérons une suite (A) particulière, dont l'abscisse de convergence est égale à zéro et dont la somme est holomorphe dans un triangle $H_0(l, \alpha)$ avec $l > \pi D$. (Nous pouvons évidemment supposer, sans restreindre la généralité, qu'il s'agit du triangle qui a pour base le segment $|t| \leqq l$, c. à d. du triangle $H_0^0(l, \alpha)$.

Il y a alors une suite d'indices

$$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_\nu, \ldots\ldots$$

telle que

$$(41)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\log |a_{n_\nu}|}{n_\nu} = 0$$

tandis que pour tous les autres indices on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |a_n|}{n} \leqq 0$$

Le théorème du § 7 montre d'autre part qu'il existe une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans le secteur

$$(42)\qquad -\alpha \leqq \arg z \leqq \alpha$$

[1] En vertu de considérations du début du § 4 et de la fin du § 6 il est évident que $\delta \leqq 0$.

et satisfaisant aux conditions

(43,1) $\quad | \varphi (\varrho e^{\pm i\alpha}) | < e^{\varrho[(\pi D - l)\sin|\alpha| + \varepsilon]}$ pour $\varrho$ assez grand

(43,2) $\quad | \varphi (\varrho e^{i\psi}) | < e^{A\varrho}$ $\qquad$ ($A$ = const.; $-\alpha \leqq \psi \leqq \alpha$)

(43,3) $\quad | \varphi (\lambda_n) | = a_n C' (\lambda_n)$

quelque petit que soit le nombre positif $\varepsilon$.

Or, suivant notre supposition

$$\pi D - l < 0$$

Nous pouvons donc déduire des inégalité (43, 1) et (43, 2), en vertu d'un théorème de Phragmen-Lindelöf ([1]), que dans tout le secteur (42) on a

$$h (\psi) = \overline{\lim_{\varrho=\infty}} \frac{\log | \varphi (\varrho e^{i\psi}) |}{\varrho} \leqq (\pi D - l) \operatorname{tg} | \alpha | \cos \psi$$

et en particulier, pour $\psi = 0$

$$\overline{\lim_{\varrho=\infty}} \frac{\log | \psi(\varrho) |}{\varrho} \leqq (\pi D - l) \operatorname{tg} | \alpha | < 0$$

*D'autre part, les formules (40), (41) et (43, 3) montrent que*

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\log | \psi (\lambda_{n_\nu}) |}{\lambda_{n_\nu}} \geqq \delta ;$$

par conséquent. en tenant compte de (44), on trouve que

(39') $$\delta \leqq (\pi D - l) \operatorname{tg} | \alpha | < 0$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Quant à la première partie du théorème II', elle est aussi démontrée par la formule (39'), car si $f(s)$ est une fonction entière, elle est holomorphe dans chaque triangle $H_0 (l, \alpha)$. quels que soient les nombres $l$ et $\alpha$. L'expression $(\pi D - l) \operatorname{tg} \alpha$ dans (39') peut donc être prise aussi grande que l'on veut en valeur absolue et, par conséquent, $\delta$ doit être égal à $-\infty$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème II, supposons en premier lieu que $\delta$ a une valeur négative finie, et

---

([1]) *Acta Mathematica, l. c.*

soient $l$ et $\alpha$ deux nombres ($l > \pi D$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) qui vérifient l'inégalité (38). Nous pouvons encore supposer que le triangle $H_0(l, \alpha)$ donné est le triangle symmétrique par rapport à l'axe réel.

Il doit y avoir une suite d'indices $n_\nu$ pour laquelle

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |C'(\lambda_{n_\nu})|}{\lambda_{n_\nu}} = \delta$$

tandis que pour tous les autres indices on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |C'(\lambda_n)|}{\lambda_n} \geqq \delta$$

Posons

$$a_n = \frac{e^{\delta \lambda_n}}{C'(\lambda_n)}. \tag{45}$$

On aura alors, pour les indices de la suite $n_\nu$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\log |a_{n_\nu}|}{n_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\delta \lambda_{n_\nu} - \log |C'(\lambda_{n_\nu})|}{\lambda_{n_\nu}} \cdot \frac{\lambda_{n_\nu}}{n_\nu} = 0$$

et pour tous les autres indices

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log |a_n|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\delta \lambda_n - \log |C'(\lambda_n)|}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_n}{n} \leqq 0$$

Donc, la série du type (A), qui a pour coefficients les nombres (45), a l'abscisse de convergence égale à zéro. D'autre part, si l'on pose

$$\varphi(z) = e^{\delta z}$$

on aura évidemment

$$|\varphi(re^{i\psi})| = e^{\delta r \cos \psi}$$

et, par conséquent, en tenant compte de (39) et du fait que $\pi D - l$ est négatif, on verra que, pour $|\psi| \leqq \alpha$

$$|\varphi(re^{i\psi})| \leqq e^{r(\pi D - l)\sin|\psi|}$$

ce qui montre que $\varphi(z) = e^{\delta z}$ satisfait aux conditions du théorème du § 7 ; par conséquent, la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\delta \lambda_n}}{C'(\lambda_n)} e^{-\lambda_n s}$$

est holomorphe dans le triangle $H_0^0(l, \alpha)$, c. q. f. d.

Considérons maintenant le cas où $\delta = -\infty$, c. à d. où

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log | C'(\lambda_n) |}{\lambda_n} = -\infty$$

Nous avons vu au § 6 qu'il existe alors une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un secteur $| \arg z | \leqq \psi_0 < \frac{\pi}{2}$ et telle que l'on ait

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log | \varphi(r e^{i\psi}) |}{r} = -\infty \qquad \text{pour } | \psi | \leqq \psi_0,$$

et que si l'on pose

$$a_n = \frac{\varphi(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)}$$

on a

$$\overline{\lim} \frac{\log | a_n |}{\lambda_n} = 0$$

Par conséquent, en vertu du théorème du § 7, la somme de la série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ est holomorphe dans le triangle $H_0^0(l, \psi_0)$, quelque grande que soit la valeur de $l$, et ceci ne peut avoir lieu que si cette somme représente une fonction entière de $s$. Les théorèmes II et II' sont donc complètement démontrés. Il est d'ailleurs évident que ces théorèmes sont aussi applicables aux séries dont l'abscisse de convergence n'est pas nulle ; si $c$ désigne cette abscisse de convergence, il faudra simplement remplacer le triangle $H_0(l, \alpha)$ par le triangle $H_c(l, \alpha)$.

Nous allons maintenant démontrer une suite de propositions qui se rattachent immédiatemernt aux théorèmes précedents. *Dans toutes ces propositions nous supposerons pour commencer* (comme nous l'avons déjà indiqué au début du paragraphe), *que la suite des $\lambda_\nu$ est mesurable et de densité* D. Voici les théorèmes que nous allons démontrer.

*Théorème III. Si la série*

$$\text{(A)} \qquad f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \, e^{-\lambda_\nu s}$$

*dont l'abscisse de convergence est égale à* c, *représente une fonction holomorphe dans un triangle* $H_c(l, \alpha)$, *avec* $l > \pi D$, *cette fonction est holomorphe dans tout le demi-plan*

$$\mathfrak{R}(s) > c - (l - \pi D) \, . \operatorname{tg} \alpha \, ;$$

*ce demi-plan peut d'ailleurs être détérminé comme le demi-plan sur la limite duquel le triangle* $H_c(l, \alpha)$ *intercepte un segment dont la longueur est exactemente égale à* $2\pi D$.

*Théorème IV. Chaque segment de longueur supérieure à* $2\pi D$ *de la droite d'holomorphie contient au moins un point singulier de* f(s). *En particulier, si* D *est nul, la droite d'holomorphie est une coupure de* f(s) *et cette fonction ne peut avoir aucun point singulier isolé.*

*Théorème V. Si sur la droite de convergence ou sur une droite située à gauche de la droite de convergence il y a un segment de longueur supérieure à* $2\pi D$ *qui est tout entier intérieur à l'étoile horizontale de* f(s), *la droite d'holomorphie est sûrement située à gauche de la droite considérée.*

*Théorème VI. Si l'on désigne par* $\mathcal{H}$ *l'abscisse d'holomorphie de la série* (A), *on a sûrement*

$$\mathcal{H} \geqq c - |\delta|$$

$\delta$ *désignant, comme plus haut, l'expression* (40). *D'ailleurs, la suite* $\{\lambda_n\}$ *étant donnée, il existe toujours au moins une série du type* (A) *pour laquelle l'abscisse d'holomorphie est exactement égale à* $c - |\delta|$.

Ces théorèmes se démontrent très facilement en partant des théorèmes I et II. En effet, le théorème I nous montre que, si $f(s)$ est holomorphe dans un triangle $H_c(l, \alpha)$ (et nous pouvons toujours supposer, sans restreindre la généralité, que $c = 0$ et que le triangle considéré a son sommet sur l'axe réel), il existe une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans le secteur $|\arg z| < \alpha$ et telle que l'on a, quelque petit que soit $\varepsilon$,

$$|\varphi(re^{i\psi})| \leqq e^{[(\pi D - l)\sin|\psi| + \varepsilon]} \quad \text{pour } r \text{ assez grand et } |\psi| < \alpha$$
$$\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il s'ensuit, en vertu du théorème déjà cité de MM. Phragmen et Lindelöf que l'on a, pour $|\psi| < \alpha$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|\varphi(re^{i\psi})|}{r} \leqq (\pi D - l) \operatorname{tg} \alpha \cos \psi$$

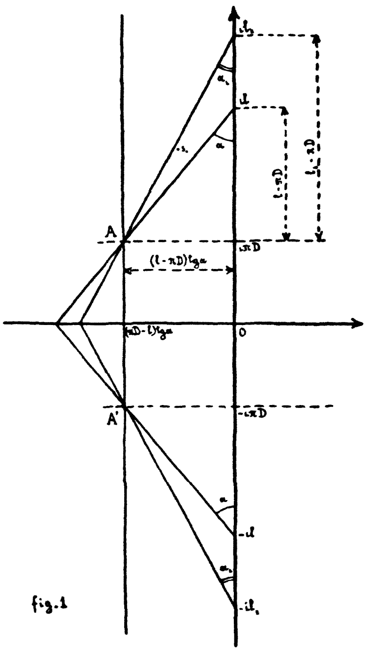

fig. 1

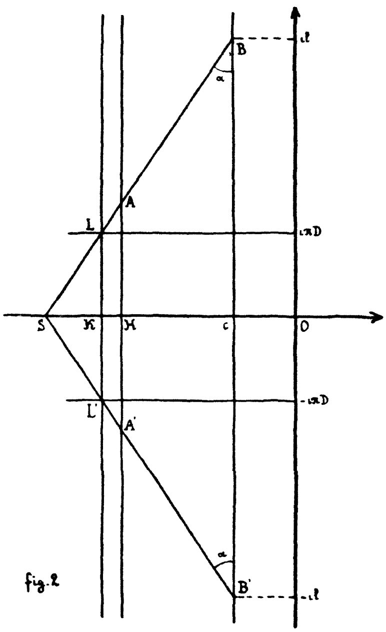

fig. 2

Si donc on prend un angle quelconque $\alpha_1$ inférieur à $\alpha$ et si l'on détermine le nombre $l_1$ de telle sorte que l'on ait

$$(46) \qquad (\pi D - l_1) \operatorname{tg} \alpha_1 = (\pi D - l) \operatorname{tg} \alpha,$$

on verra, en tenant compte de la condition $\pi D - l < 0$, que la fonction $\varphi(z)$ satisfait, pour $|\psi| \leqq \alpha_1$ et $r$ assez grand, à la condition

$$|\varphi(re^{i\psi})| \leqq e^{r[(\pi - Dl_1)\sin|\psi| + \varepsilon]},$$

et cela quelque petit que soit $\varepsilon$. Il s'ensuit, en vertu du théorème I, que $f(s)$ est holomorphe dans le triangle $H_0^0(l_1, \alpha_1)$. Or, si l'on se donne un point quelconque $s_0$ intérieur a la bande

$$0 > \mathfrak{R}(s) > -(l - \pi D) \operatorname{tg} \alpha$$

on peut prendre $\alpha_1$ assez petit pour que ce point $s_0$ soit situé à l'intérieur du triangle $H_0^0(l_1, \alpha_1)$; ceci est une conséquence directe de (46), qui deviendra évidente si l'on considère la figure 1. D'autre part la distance des points A et A' est évidemment égale à $2\pi D$. Le théorème III est ainsi démontré.

Le théorème IV se démontre aussi facilement. En effet, supposons que $f(s)$ est holomorphe sur un segment A' A de longueur supérieure a $2\pi D$ de la droite d'holomorphie $\mathfrak{R}(s) = \mathcal{H}$ (voir fig. 2). Nous pouvons évidemment supposer, sans restreindre la généralité, que ce segment est symétrique par rapport à l'axe réel. Cela étant, il est clair que nous pouvons choisir un point S de l'axe réel situé à gauche de la droite d'holomorphie et tel que le triangle SA' A ne contienne aucun point singulier de $f(s)$. Prolongeons les droites SA' et SA jusqu'à l'intersection avec la droite de convergence $\mathfrak{R}(s) = c$ et soient B' et B les points d'intersection respectifs. Le triangle SB' B sera alors un triangle du type $H_c^0(l, \alpha)$ et $f(s)$ sera holomorphe dans ce triangle. Construisons maintenant la droite $\mathfrak{R}(s) = \mathcal{K}$ sur laquelle le triangle SBB' intercepte un segment de longueur $2\pi D$. Comme, par hypothèse, $\overline{AA'} > 2\pi D$, la droite $\mathfrak{R}(s) = \mathcal{K}$ sera située à gauche de AA'; on aura donc $\mathcal{K} < \mathcal{H}$. Mais, en vertu du théorème III, $f(s)$ sera holomorphe dans le demi-plan $\mathfrak{R}(s) > \mathcal{K}$; on devra donc avoir $\mathcal{K} \geqq \mathcal{H}$. Ainsi l'hypothèse que $f(s)$ est holomorphe sur un segment de longueur supérieure à $2\pi D$ de la droite d'holomorphie nous a conduit à une contradiction, et ceci démontre le théorème IV. Quant au théorème V, il est une conséquence immédiate du théorème IV, de sorte que nous ne nous arrêterons pas à sa démonstration.

Passons donc au théorème VI. La première partie de ce théorème est une conséquence du fait que l'on peut toujours construire un triangle $H_c^t(l, \alpha)$, situé entièrement à l'intérieur de la bande

$$\mathcal{H} \leqq \mathfrak{R}(s) \leqq c\,,$$

pour lequel la quantité $(l - \pi D)\,\mathrm{tg}\,\alpha$ soit aussi voisine que l'on veut de $c - \mathcal{H}$. En effet, le triangle $H\left(\dfrac{c - \mathcal{H}}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$, dont le sommet est situé au point $\mathcal{H}$ (voir fig. 3), satisfait à cette condition pour $\alpha$ assez petit. Si donc, pour une série quelconque,

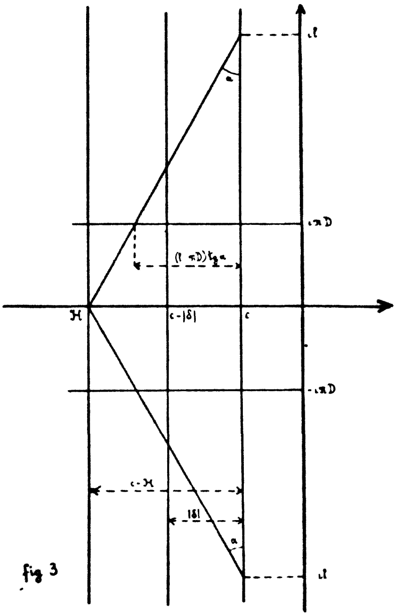


fig 3

on avait $\mathcal{H} < c - |\delta|$, on pourrait construire un triangle $H_c^0(l, \alpha)$ dans lequel la somme de la série serait holomorphe et pour lequel on aurait $(l - \pi D)\,\mathrm{tg}\,\alpha > |\delta|$, ce qui serait en contradiction avec le théorème II. Enfin la deuxième partie du théorème VI est une conséquence immédiate des théorèmes II et III. Nos théorèmes sont donc tous démontrés.

Avant de terminer ce paragraphe notons que, si l'on confronte les théorèmes I et III on en déduit immédiatement le théorème suivant.

*Théorème VII. Si l'abscisse de convergence de la série* (A) *est égale à zéro, une condition nécessaire et suffisante pour que l'abscisse d'holomorphie de cette série ne soit pas* *supérieure à un nombre négatif donné* $\mathcal{H} = -\mathrm{h}$ *est qu'il existe une fonction* $\varphi(z)$ *holomorphe dans un secteur*

$$|\arg z| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

*et telle que l'on ait dans ce secteur, pour* r *assez grand et quelque petit que soit* $\varepsilon$,

$$|\varphi(re^{i\psi})| < e^{-r[h\cos\psi-\varepsilon]}$$

*et que de plus on ait*

$$\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots.)$$

La démonstration de ce théorème est presque évidente; elle consiste à remarquer que, pour que $f(s)$ ait son abscisse d'holomorphie égale à $-h$, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe dans chaque triangle $H_0^0(l, \alpha)$ qui satisfait à la condition $l \operatorname{tg} \alpha = h$, et à appliquer le théorème I.

§ 10. — Voyons maintenant comment on peut adapter les théorèmes du paragraphe précédent aux séries pour lesquelles la suite des exposants $\lambda_n$ n'est pas mesurable, mais admet une densité maximum. En premier lieu, il est clair que, si la suite admet la densité maximum D et si l'on désigne par

$$l_1, l_2, \ldots., l_m, \ldots.$$

une suite mesurable de densité D, qui contient la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle, toute série du type

$$\text{(A)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

peut être considérée comme série du type

$$\text{(B)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-l_m s}$$

certains des $b_m$ étant nuls et les autres étant égaux aux $a_n$. Il s'ensuit que *les théorèmes III, IV et V du paragraphe précédent sont applicables sans modification à toutes les sé-*

*ries* (A) *pour lesquelles la suite des exposants a la densité maximum* D. En particulier, le théorème IV peut être mis alors sous la forme suivante:

*Théorème IV'. Si la suite des $\lambda_n$, mesurable ou non, a la densité supérieure* D, *chaque segment de longueur supérieure à* $2\pi$D *de la droite d'holomorphie d'une série quelconque du type*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

*dont l'abscisse de convergence est finie, contient au moins un point singulier de la fonction $f(s)$. Si* D *est égal à zéro, la droite d'holomorphie est nécessairement une coupure de $f(s)$.*

Nous avons signalé dans l'introduction que des cas particuliers de ce théorème ont été démontrés par MM. Carlson, Landau et Pólya. Il résulte, en particulier, des théorèmes de M. Pólya que lorsque

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) > 0 \tag{48}$$

les droites de convergence et d'holomorphie se confondent.

Considérons maintenant le théorème VI. Nous pouvons encore affirmer que sa première partie reste vraie à condition toutefois d'y remplacer le nombre $\delta$ par le nombre

$$\delta' = \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\log |S'(l_m)|}{l_m} \tag{49}$$

où

$$S(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{l_m^2}\right)$$

et cela quelle que soit la suite $\{l_m\}$, pourvu qu'elle contienne la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle et soit mesurable et de densité D. Et si l'on tient compte du fait que pour toutes les suites mesurables $\delta' \leqq 0$, on verra que la première partie du théorème VI restera encore vraie, si au lieu du nombre $\delta$ on place le nombre $\delta_1$ égal à la borne supérieure des $\delta'$ pour toutes les suites $\{l_m\}$ qui satisfont à la condition d'être mesurables et de densité D et de contenir la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle. Or, le nombre $\delta_1$ ainsi défini est évidemment assez peu maniable. Nous allons montrer que l'on peut donner une définition de ce nombre qui ne dépend que de la suite $\{\lambda_n\}$ et d'une seule suite $\{l_m\}$, au lieu de dépendre de toutes les suites $\{l_m\}$ comme la définition que nous venons de donner.

Supposons donc que la suite $\{l_m\}$ est la suite mesurable principale S qui contient la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle et reprenons les notations du § 5, c. à d. désignons par $m_k$ les points $l_\mu$ qui ne se confondent avec aucun des $\lambda_\nu$, et posons

$$\lambda_\nu = l_{p_\nu}\ ; \qquad m_k = l_{n_k} \qquad (\nu, k = 1, 2, ....)$$

$$C(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right) \qquad M(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m_k^2}\right)$$

$$K(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_\nu^2}\right)$$

Nous avons vu au § 5 que

$$(50) \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\log |S'(l_{n_k})|}{l_{n_k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log |M'(m_k)\, C(m_k)|}{m_k} = 0$$

Si donc nous déterminons le nombre $\delta'$ par la formule (49) et si nous tenons compte du fait que ce nombre ne peut pas être positif, nous verrons que

$$\delta' = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log |S'(l_{p_\nu})|}{l_{p_\nu}} = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log |M(\lambda_\nu) . C'(\lambda_\nu)|}{\lambda_\nu}$$

Or, au même § 5 nous avons vu que

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\log |M(\lambda_\nu)| + \log |K'(p_\nu)|}{\lambda_\nu} = 0$$

Nous pouvons donc écrire

$$(51) \qquad \delta' = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log |C'(\lambda_\nu)| - \log |K'(p_\nu)|}{\lambda_\nu}$$

Nous avons ainsi trouvé une expression du nombre $\delta'$ relatif à la suite mesurable principale S qui, en outre des $\lambda_\nu$, ne contient que les $p_\nu$, c. à d. les numéros d'ordre des $\lambda_\nu$ eux-

**mêmes dans la suite principale S. Nous aurions pu montrer** maintenant que les nombres $\delta'$ relatifs à toutes les autres suites mesurables et de densité D qui contiennent le suite $\{\lambda_\nu\}$ comme suite partielle, ne peuvent pas être supérieurs au nombre $\delta'$ relatif à la suite principale S et déterminé par la formule (**51**); au lieu de cela nous allons démontrer que la seconde partie du théorème VI reste vraie pour les séries dont la suite des exposants n'est pas mesurable, mais admet la densité maximum D si l'on y remplace le nombre $\delta$ par l'expression (51). Par cela même nous démontrerons évidemment aussi que cette expression nous donne précisément la borne supérieure $\delta_1$ de tous les $\delta'$.

Considérons la série

$$F(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{\delta' l_\mu}}{S'(l_\mu)} e^{-l_\mu s} \tag{52}$$

où $\delta'$ est déterminé par la formule (51). Cette formule étant équivalente à la formule (49), nous verrons facilement, en répétant un calcul déjà fait au § 9, que l'abscisse de convergence de (52) est égale à zéro, tandis que son abscisse d'holomorphie ne dépasse pas $\delta'$ en vertu du théorème VII du § 9. Or, la formule (50) montre que l'abscisse de convergence de la série

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\delta' m_k}}{S'(m_k)} e^{-m_k s}$$

est égale à $\delta'$. Il s'ensuit que la fonction

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\delta' \lambda_\nu}}{S'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu s} = F(s) - F_1(s)$$

est holomorphe dans le demi-plan $\mathfrak{R}(s) > \delta'$, et comme son abscisse d'holomorphie $\mathcal{H}$ ne peut pas être inférieure à $\delta'$, nous voyons que l'on a $\mathcal{H} = \delta'$.

Pour achever la démonstration du théorème VI pour les séries pour lesquelles la suite des exposants n'est pas mesurable, nous devons encore considérer le cas où $\delta' = -\infty$. Dans le cas des suites mesurables nous n'avons pas eu à considérer séparément le cas de $\delta = -\infty$, car pour cette valeur de $\delta$ le théorème VI est équivalent au théorème II'. Mais maintenant nous ne pouvons plus nous baser sur les théorèmes II et II', car nous ne savons pas si ces théorèmes sont vrais pour les séries pour lesquelles la suile $\{\lambda_\nu\}$ n'est pas mesurable. Supposons donc que $\delta' = -\infty$ et reprenons la démonstration de la deuxième partie du théorème II' c. à d. la démonstration de l'existence d'une série du type

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-l_n s} \tag{53}$$

dont l'abscisse de convergence est égale à zéro et dont la somme est une fonction entière de $s$. Cette démonstration consiste à construire une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un secteur $-\alpha \leqq \arg z \leqq \alpha$ et telle que l'on ait

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |\varphi(re^{i\psi})|}{r} = -\infty \qquad \text{pour } |\psi| \leqq \alpha \tag{54}$$

et

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |b_n|}{l_n} = 0 \tag{55}$$

avec

$$b_n = \frac{\varphi(l_n)}{S'(l_n)}$$

La série (53) satisfait alors aux conditions posées par le théorème II'. Quant à l'existence d'une fonction $\varphi(z)$ qui satisfait aux conditions (54) et (55), elle a été démontrée au § 6. Or, à la fin du § 6 nous avons vu que la fonction $\varphi(z)$ peut être choisie de telle sorte qu'elle satisfasse non seulement aux conditions (54) et (55), mais encore à la condition

$$\varphi(m_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots.)$$

Dans ce cas la série (53) devient une série du type (A), ce qui prouve que, toutes les fois que $\delta' = -\infty$, il y a une série du type (A) qui représente une fonction entière tout en ayant une abscisse de convergence finie.

Le théorème VI est donc applicable aux suites $\{\lambda_\nu\}$ non mesurables mais admettant la densité maximum D, pourvu que l'on y remplace le nombre $\delta$ du § 9 par l'expression (51).

Notons d'ailleurs que l'expression (51) est générale en ce sens que pour les suites $\{\lambda_\nu\}$ mesurables elle est équivalente à l'expression (40) du § 9. En effet, si la suite $\{\lambda_\nu\}$ est mesurable, on peut prendre $K(z) = \dfrac{\sin \pi z}{\pi z}$ et $p_\nu = \nu$ de sorte que

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\log | K'(p_\nu) |}{\lambda_\nu} = 0$$

et

$$\delta' = \delta$$

Nous pouvons maintenant condenser les résultats principaux des deux derniers paragraphes dans le théorème suivant :

*Si la suite $\{\lambda_\nu\}$, mesurable ou non, admet la densité maximum* D *et si l'on désigne par $\delta$ l'expression (51) (ou, dans le cas d'une suite mesurable, l'expression équivalente (40) on peut affirmer que la plus grande distance entre la droite de convergence d'une série quelconque du type*

$$\text{(A)} \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

*et la droite d'holomorphie de la même série est égale à* $|\delta|$, *et chaque segment de la droite d'holomorphie de longueur supérieure à* $2\pi D$ *contient au moins un point singulier de la fonction $f(s)$ représentée par la série considérée. Dans cet énoncé le nombre* $|\delta|$ *ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur.*

Nous avons dit plus haut que, lorsque la suite $\{\lambda_n\}$ a une densité maximum finie et satisfait à la condition (48), les droites de convergence et d'holomorphie se confondent. Ce fait, qui a été démontré par M. Pólya, résulte aussi de nos théorèmes. En effet, à la fin du § 5 nous avons remarqué que, lorsque la suite $\{\lambda_\nu\}$ est mesurable et vérifie la condition (48), on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log | C'(\lambda_n) |}{\lambda_n} = 0$$

donc a fortiori $\delta = 0$. D'autre part, si la suite $\{\lambda_n\}$ n'est pas mesurable, mais admet une densité maximum, la suite principale mesurable S qui contient la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle satisfait à la condition (48), si la suite $\{\lambda_n\}$ y satisfait elle même. Donc, en vertu de ce que nous venons de dire, l'expression (49) de $\delta'$ montre que $\delta' = 0$. La coïncidence des droites d'holomorphie et de convergence pour les suites d'exposants qui vérifient la condition (48) résulte donc effectivement de nos théorèmes.

Avant de terminer, considérons encore le cas, où $\delta$ étant égal à $-\infty$, la série (A) représente une fonction entière de $s$. Dans ce cas, nous pouvons appliquer le théorème du § 8 si, dans une bande horizontale de largeur $2l$, l'expression

$$H(t) = \overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \frac{\log |f(-\sigma + it)|}{\sigma} \tag{56}$$

conserve une valeur finie. Alors, si nous supposons que l'abscisse de convergence de la série (A) est négative ou nulle, ce que nous pouvons faire sans restreindre la généralité, il y aura une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un demiplan $\Re(z) \geqq \beta$ et satisfaisant dans ce demiplan à la condition

$$|\varphi(\beta + re^{i\psi})| \leqq e^{r[(\pi D - l)\sin|\psi| + \varepsilon]} \qquad \left(|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

pour $r$ assez grand et quelque petit que soit $\varepsilon$. Or, nous avons vu au § 8 que ceci n'est possible que si $l$ n'est pas supérieur à $\pi D$.

On peut donc affirmer que, si l'expression (56) reste bornée dans une bande horizontale, la largeur de cette bande ne dépasse pas $2\pi D$. En d'autres termes, *la propriété des séries de Dirichlet d'avoir un point singulier sur chaque segment de la droite d'holomorphie dont la longueur dépasse* $2\pi D$ *trouve son pendant dans le fait que, si une série représente une fonction entière* $f(s)$, *chaque bande horizontale de largeur supérieure à* $2\pi D$ *contient au moins une droite* $\Im(s) = t_0$, *telle que sur cette droite l'expression*

$$\frac{\log |f(s)|}{|s|} \tag{57}$$

*ne reste pas bornée lorsque la partie réelle de s tend vers moins l'infini. Et le fait que la droite d'holomorphie est nécessairement une coupure pour la somme d'une série pour laquelle* $D = 0$ *trouve son pendant dans le fait que, si une telle série représente une fonction entière de s, l'expression* (57) *ne peut rester bornée sur aucune droite horizontale lorsque la partie réelle de s tend vers moins l'infini.*