

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ROBERT MAZET

**Sur deux mouvements non permanents d'un liquide  
sous l'action de la pesanteur**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1929

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1929\\_\\_97\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__97__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE :  
2050

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**M. Robert MAZET**

Professeur au Lycée de Troyes.

---

**1<sup>re</sup> THÈSE.** — SUR DEUX MOUVEMENTS NON PERMANENTS D'UN LIQUIDE SOUS  
L'ACTION DE LA PESANTEUR.

**2<sup>e</sup> THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le 25 Janvier 1929 devant la Commission d'examen.

---

MM. PAINLEVÉ, *Président.*  
VESSIOT } *Examinateurs.*  
VILLAT }

---

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Quai des Grands-Augustins, 55

—  
1929

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
<b>Doyen</b> .....	C. MAURAIN, <i>Professeur</i> , Physique du Globe.	
<b>Doyen honoraire</b> .....	P. APPELL, M. MOLLIARD.	
<b>Professeurs honoraires.</b>	P. PUISEUX, BOUSSINESQ, JOANNIS, H. LE CHATELIER. H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC.	
	ÉMILE PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup
	KCNIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET.....	Electrotechnique générale.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique analy. et méca. céleste.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE.....	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY.....	Zool. (Evolution des êtres organisés).
	G. URBAIN.....	Chimie minérale.
	ÉMILE BOREL.....	Calcul des probab. et Phys.math.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	REMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. G. N.).
	ABRAHAM.....	Physique.
	M. MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	CARTAN.....	Géométrie supérieure.
<b>Professeurs</b> .....	LAPICQUE.....	Physiologie générale.
	VESSIOT.....	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	COTTON.....	Physique générale.
	DRACH.....	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY.....	Physique.
	CHARLES PEREZ.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie structurale et Géologie appliquée.
	LESPIEAU.....	Théories chimiques.
	RABAUD.....	Biologie expérimentale.
	PORTIER.....	Physiologie comparée.
	BLAISE.....	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD.....	Botanique.
	PAUL MONTEL.....	Mécanique rationnelle.
	WINTREBERT.....	Anatomie et histologie comparées.
	DUBOSCQ.....	Biologie maritime.
	JULIA.....	Mathématiques générales.
	JOB.....	Chimie générale.
	L. LUTAUD.....	Géographie phys. et géologie dynam.
	H. VILLAT.....	Mécan. des fluides et applications.
	HEROUARD.....	Zoologie.
	PÉCHARD.....	Chimie (Enseignement P. G. N.).
	AUGER.....	Chimie analytique.
	M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
	GUILLET.....	Physique.
	MAUGUIN.....	Minéralogie.
	BLARINGHEM.....	Botanique.
	MICHEL-LEVY.....	Pétrographie.
	DEREIMS.....	Géologie.
	DONGIER.....	Physique du globe.
<b>Secrétaire</b> .....	D. TOMBECK.	

## ERRATA.

---

Pages.		
19	15 <sup>e</sup> , 16 <sup>e</sup> , 17 <sup>e</sup> lignes	Supprimer l'accolade. Numéroté (6) la 17 <sup>e</sup> ligne seulement.
19	19 <sup>e</sup> , 20 <sup>e</sup> , 21 <sup>e</sup> lignes	Supprimer l'accolade. Numéroté (7) la 21 <sup>e</sup> ligne seulement.
24	Fig. 8	Placer $\bar{l}_0$ au point où la courbe traverse l'axe des $\bar{l}$ .
32	Fig. 10	<i>Lire sur l'asymptote</i> : $\chi = -2\bar{l} + \frac{4}{\pi} \log 2$ .
36	12 <sup>e</sup> ligne	<i>Au lieu de</i> celui de l'infini, <i>lire</i> celui de $l$ infini.
55	16 <sup>e</sup> et 20 <sup>e</sup> lignes	<i>Lire</i> au point $O$ .
63	27 <sup>e</sup> ligne	Id.
67	14 <sup>e</sup> ligne	Id.
77	13 <sup>e</sup> ligne	<i>Au lieu de</i> à l'intérieur de la demi-sphère, <i>lire</i> à l'intérieur du demi-cylindre.



# SUR DEUX MOUVEMENTS NON PERMANENTS D'UN LIQUIDE SOUS L'ACTION DE LA PESANTEUR.

Par M. Robert Mazet (Troyes).

---

Estratto dal tomo LIII (1929) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.  
Adunanza dell'11 marzo 1928.

---

## INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans la première partie de ce Mémoire, de contribuer à l'étude théorique des oscillations d'un liquide en vases communicants, sous l'action de la pesanteur, en me plaçant dans le cas où *les parois des deux vases sont verticales au voisinage des surfaces libres*. Si l'on admet (ce que l'expérience confirme entre certaines limites) *le mouvement quasi-rigide des surfaces libres entre parois verticales*, on peut utiliser une méthode d'autant plus approchée que cette hypothèse est mieux vérifiée et dans laquelle on considère un mouvement permanent auxiliaire substitué au mouvement réel.

Comme on le sait, l'application du théorème des forces vives fournit la loi du mouvement: loi sinusoidale ou loi elliptique, selon que  $s_1 = s_2$  ( $s_1, s_2$ : sections des surfaces libres) ou, au contraire,  $s_1 \neq s_2$  <sup>1)</sup>. Dans les deux cas s'introduit dans les formules une constante numérique  $R$  de la forme

$$\frac{(s_1 + s_2)a}{s_1 s_2} + \chi$$

( $a$ : hauteur du niveau moyen au-dessus d'un plan horizontal-origine  $\pi$ ,  $\chi$ : constante numérique ne dépendant que la forme du système communicant et de la position relative du plan  $\pi$ , indépendante des dimensions du système et de  $a$ ) (CHAPITRE I<sup>er</sup>).

En général, quand on n'utilise pas l'expérience pour déterminer  $\chi$ , on se contente de calculer grossièrement  $R$  en décomposant le domaine liquide en domaines partiels

---

<sup>1)</sup> Voir un exemple du premier cas dans U. MASONI, *Corso di idraulica teoretica e pratica*, 3<sup>e</sup> édit. (Naples, 1908), p. 214-216 et un exemple du second dans un article de TH. POSCHL, *Zur Frage der Schwingungen in Wasserschlössern* [Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. VI (1926), p. 494-497].



# SUR DEUX MOUVEMENTS NON PERMANENTS D'UN LIQUIDE SOUS L'ACTION DE LA PESANTEUR.

Par M. Robert Mazet (Troyes).

---

Estratto dal tomo LIII (1929) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.  
Adunanza dell'11 marzo 1928.

---

## INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans la première partie de ce Mémoire, de contribuer à l'étude théorique des oscillations d'un liquide en vases communicants, sous l'action de la pesanteur, en me plaçant dans le cas où *les parois des deux vases sont verticales au voisinage des surfaces libres*. Si l'on admet (ce que l'expérience confirme entre certaines limites) *le mouvement quasi rigide des surfaces libres entre parois verticales*, on peut utiliser une méthode d'autant plus approchée que cette hypothèse est mieux vérifiée et dans laquelle on considère un mouvement permanent auxiliaire substitué au mouvement réel.

Comme on le sait, l'application du théorème des forces vives fournit la loi du mouvement: loi sinusoidale ou loi elliptique, selon que  $s_1 = s_2$  ( $s_1, s_2$ : sections des surfaces libres) ou, au contraire,  $s_1 \neq s_2$  <sup>1)</sup>. Dans les deux cas s'introduit dans les formules une constante numérique  $R$  de la forme

$$\frac{(s_1 + s_2)a}{s_1 s_2} + \chi$$

( $a$ : hauteur du niveau moyen au-dessus d'un plan horizontal-origine  $\pi$ ,  $\chi$ : constante numérique ne dépendant que la forme du système communicant et de la position relative du plan  $\pi$ , indépendante des dimensions du système et de  $a$ ) (CHAPITRE I<sup>er</sup>).

En général, quand on n'utilise pas l'expérience pour déterminer  $\chi$ , on se contente de calculer grossièrement  $R$  en décomposant le domaine liquide en domaines partiels

---

<sup>1)</sup> Voir un exemple du premier cas dans U. MASONI, *Corso di idraulica teoretica e pratica*, 3<sup>e</sup> édit. (Naples, 1908), p. 214-216 et un exemple du second dans un article de TH. POSCHL, *Zur Frage der Schwingungen in Wasserschlossern* [Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. VI (1926), p. 494-497].



où l'on suppose la vitesse uniforme <sup>2)</sup>). Mais l'erreur ainsi commise peut être très appréciable si la colonne liquide oscillante présente des irrégularités telles que renflements, étranglements, etc.

Il m'a paru intéressant de calculer  $R$ , avec toute la précision qui résulte de l'hypothèse sur les surfaces libres, dans le seul cas où le calcul soit pratiquement abordable, celui où le système communicant est constitué par un vase parallélépipédique unique divisé en deux chambres par une mince cloison verticale ne touchant pas le fond. Ce système schématise assez bien certain type d'écluses en cours de fonctionnement. De ce point de vue, il est intéressant de connaître le temps  $\Theta$  qui s'écoule entre l'instant initial, où le liquide part du repos sous une dénivellation donnée, et le premier instant où les deux niveaux sont les mêmes, instant où l'on peut imaginer que l'on ferme l'orifice par un procédé quelconque (CHAPITRES II & III).

J'ai supposé, comme il est naturel de le faire, le mouvement plan. Quand on passe à l'étude des pressions à l'intérieur du liquide, une difficulté se présente, dans le cas envisagé, du fait qu'au voisinage du bord inférieur de la cloison, formant arête vive, les vitesses deviennent très grandes et, par suite, la pression a tendance à devenir négative (ce qui explique l'apparition, dans la pratique, de phénomènes complexes tels que sillages alternés, tourbillons, etc.). Je me suis résolu à écarter cette difficulté par un artifice, en remplaçant *a posteriori* la paroi théorique infiniment mince par une paroi d'épaisseur petite, mais finie, dont le profil épouse une ligne de courant du mouvement préalablement étudié (CHAPITRE IV).

Pour terminer, j'ai examiné plusieurs cas particuliers où les rapports existant entre certaines dimensions du système permettent une notable simplification des calculs. Signalons :

- a) le cas où les sections des deux chambres sont égales ;
- b) le cas où la largeur de l'orifice est infinie et son application à certaines formes de tubes en  $U$  ;
- c) le cas où l'une des chambres est infiniment longue, système schématisant une écluse à simple *sas* avec une précision qui n'est bonne, il est vrai, que pour une grande profondeur d'eau (CHAPITRE V).

Depuis la découverte si féconde, due à M. LEVI-CIVITA, de la méthode de la référence à un demi-cercle qui a ouvert la voie à de nombreuses et remarquables applications, le problème des jets liquides, c'est-à-dire de l'écoulement permanent d'un liquide dans le vide par un orifice percé dans une paroi rigide, peut être considéré comme résolu dans tous les cas où le mouvement est parallèle à un plan fixe et où l'on peut

---

<sup>2)</sup> Voir les deux exemples cités au <sup>1)</sup>.

faire abstraction de la pesanteur <sup>3)</sup>. Mais toutes les tentatives faites jusqu'à présent pour résoudre le même problème en tenant compte de la pesanteur ou en supposant le mouvement symétrique autour d'un axe ont échoué. On sait seulement que, dans le cas où l'axe est vertical, la pesanteur ne fait sentir son action sur le jet (en l'aminçant indéfiniment et le rendant, par suite, instable) qu'à partir d'une certaine distance de l'orifice <sup>4)</sup>.

Une façon plus générale de poser le problème, qui, pour cette raison même, n'en élimine pas, bien au contraire, la difficulté essentielle, consiste à envisager le mouvement permanent comme la limite d'un mouvement variable à partir du repos. Partant de cette idée, j'ai été conduit, dans la seconde partie de ce Mémoire, à considérer l'écoulement variable d'un liquide pesant par un orifice circulaire (ou rectangulaire allongé) horizontal, indépendamment des conditions imposées à la surface libre inférieure, et à chercher les conditions auxquelles doit satisfaire le potentiel des vitesses sur l'orifice pour qu'il y ait, à un instant donné, écoulement par jet (CHAPITRE I).

Mais comment soumettre au calcul l'établissement progressif du régime permanent? Dans le cas de l'écoulement dans le vide, l'expérience montre que, si l'orifice est brusquement démasqué, le régime permanent s'établit pratiquement en un temps très court. Mais d'autre part M. VERGNE a mis en évidence que le mouvement présente, dans ce cas, une discontinuité initiale et que le début de l'écoulement diffère essentiellement de l'écoulement permanent <sup>5)</sup>. Pour éviter cette difficulté, j'ai été amené à considérer un orifice s'ouvrant progressivement, suivant une loi donnée, à partir de zéro. On peut alors définir le mouvement par les valeurs que prend, à chaque instant, sur l'orifice la dérivée du potentiel par rapport au temps et l'on démontre que, moyennant certaines conditions de continuité remplies par cette fonction, l'écoulement s'effectue, à chaque instant, par jet (CHAPITRE II).

Dans le cas où l'orifice s'ouvre en un temps très court, la fonction en question peut être assimilée à une constante. On constate alors que la discontinuité signalée par M. VERGNE provient uniquement de l'arrêt brusque de l'orifice, qui brise le jet déjà formé. Le seul moyen d'assurer la continuité de l'écoulement par jet semble donc de supposer que l'orifice n'atteint sa largeur finale qu'au bout d'un temps infini, en même temps que s'établit le régime permanent (CHAPITRE III).

Tout revient à déterminer la fonction introduite ci-dessus. Le problème direct,

<sup>3)</sup> Voir U. CISOTTI, *Idromeccanica piana* (Milan, Libreria Editrice Politecnica, 2 vol., 1921-1922), Préface et Chapitre VI.

<sup>4)</sup> Pratiquement, à partir du niveau de la section contractée: Voir T. LEVI-CIVITA, *Sulla contrazione delle vene liquide*. [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, T. LXIV (1905), p. 1465-1472], p. 1471.

<sup>5)</sup> On trouvera une étude approfondie des accélérations initiales dans la *Thèse* de M. J. BERGE (Toulouse, Edouard Privat, 1925).

plus complexe encore que celui que l'on se pose habituellement, est bien loin d'être résolu. Mais on peut, d'un point de vue surtout théorique, résoudre le problème inverse, c'est-à-dire partir d'une fonction arbitraire (à part certaines conditions de continuité) et étudier le mouvement correspondant. Dans tous les cas, ce mouvement peut être défini comme l'écoulement du liquide supérieur dans un liquide de même densité, animé d'un mouvement permanent initial, de telle sorte que les mouvements des deux liquides se raccordent constamment, les conditions imposées au second liquide à l'infini n'étant déterminées *qu'a posteriori*. Dans certains cas il pourra exister un mouvement permanent asymptote. L'écoulement dans le vide entrerait dans cette catégorie et l'étude d'un cas particulier, simple bien qu'un peu artificiel, révèle des analogies qualitatives intéressantes avec ce que l'expérience permet, seule, d'observer dans l'autre cas (CHAPITRE IV).

Enfin, dans un dernier Chapitre, j'ai établi les conditions de l'écoulement par jet pour le cas d'un orifice rectangulaire allongé (CHAPITRE V).

---

Les éléments essentiels de la première partie ont été résumés dans deux Notes, présentées à la R. Accademia dei Lincei le 2 Mai 1926 et le 13 Juillet 1927: *Sur les oscillations d'un liquide en vases communicants* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie 6<sup>a</sup>, Vol. III (1926), p. 673-679], *Compléments à une Note sur les oscillations d'un liquide en vases communicants* [Ibid., Vol. VI (1927), p. 32-37]. M. le Professeur LEVI-CIVITA a bien voulu guider et encourager de ses conseils mon étude sur les oscillations, dont il m'a également suggéré le point de départ d'après des notes personnelles.

La seconde partie est le développement de quatre Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris entre le 11 Octobre 1926 et le 31 Janvier 1927: *Sur l'écoulement par jet* [Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 183 (1926), p. 735-736], *Sur la naissance des jets liquides* [Ibid, 183 (1926), p. 863-865], *Sur l'écoulement à travers un orifice circulaire* [Ibid, 184 (1927), p. 73-75], *Sur l'écoulement d'un liquide à partir du repos dans un liquide de même densité en mouvement permanent* [Ibid, 184 (1927), p. 799-802].

M. LEVI-CIVITA avait bien voulu attirer mon attention sur le problème, non encore résolu, de l'écoulement variable dans le vide, dans le cas du mouvement plan, et sur la singularité signalée par M. VERGNE au premier instant. C'est à la suite d'une conversation, très instructive pour moi, avec M. BRILLOUIN que j'eus l'idée d'envisager, pour faire disparaître cette singularité, un orifice s'ouvrant progressivement. J'avais abordé le problème dans l'espace à deux dimensions lorsque M. HENRI VILLAT me suggéra l'idée fructueuse d'étendre les résultats de mes deux premières Notes au cas

d'un orifice circulaire. C'est dans cette nouvelle voie, où les calculs se révélèrent plus simples que dans le plan, que je poursuivis mes modestes efforts, facilités par les précieuses indications bibliographiques que, d'une part, mes Maitres directs M.M. VOLTERRA et LEVI-CIVITA, d'autre part M. HENRI VILLAT me communiquèrent très obligeamment en toutes occasions, jointes aux encouragements les plus affectueux. Je les prie de bien vouloir trouver ici l'expression de ma plus vive reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

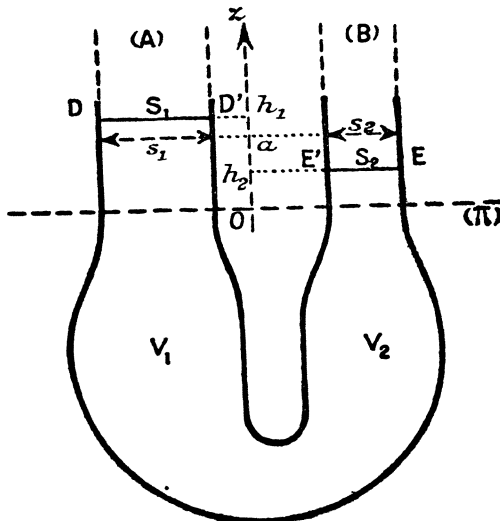
OSCILLATIONS DANS DEUX VASES COMMUNICANTS  
DONT LES PAROIS SONT VERTICALES AU VOISINAGE  
DES SURFACES LIBRES.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉTHODE SUIVIE.

§ 1. — Position du problème.

Considérons deux vases  $V_1$  et  $V_2$  dont les parois sont verticales au-dessus d'un certain plan horizontal  $\pi$  et qui communiquent entre eux par leur partie inférieure (Fig. 1). Supposons-les remplis d'un liquide incompressible oscillant sous l'action de la



(Fig. 1).

pesanteur de façon que les deux niveaux se maintiennent constamment au-dessus du plan  $\pi$ . Pour étudier le mouvement de ce liquide, nous négligerons toute action de viscosité et de capillarité et nous supposerons qu'il n'existe, le long des parois des vases, aucune région de liquide mort.

Sur les surfaces libres  $S_1$  et  $S_2$  règne la pression atmosphérique  $p_0$ . A cette condition nous substituerons une hypothèse approchée plus accessible au calcul : nous admettrons que les surfaces libres oscillent en restant planes et horizontales. Cette hypothèse est d'autant plus voisine de la réalité que les oscillations sont plus lentes. Elle permet de ramener la détermination des vitesses à la résolution d'un problème de NEUMANN.

Prenons un axe vertical  $Oz$  orienté positivement vers le haut et désignons par  $s_1$  et  $s_2$  les sections des parties supérieures des deux vases, par  $h_1$  et  $h_2$  les hauteurs positives des deux niveaux au-dessus du plan  $\pi$ . Le liquide étant incompressible, on a, quel que soit l'instant  $t$ ,

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 = (s_1 + s_2) a,$$

$a$  étant la hauteur du niveau moyen.

Posons  $h_1 - h_2 = h$ ;  $h$  est la *dénivellation* comptée positivement si le niveau  $S_1$  est supérieur au niveau  $S_2$ , négativement dans le cas contraire. La forme des vases étant donnée, la connaissance de la constante  $a$  et de la fonction  $h$  de  $t$  suffit pour déterminer à chaque instant le domaine occupé par le liquide. D'autre part, les vitesses verticales des surfaces libres  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement

$$v_1 = \frac{dh_1}{dt}, \quad v_2 = \frac{dh_2}{dt}.$$

Elles sont données, en fonction de  $\frac{dh}{dt}$ , par le système

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 = 0,$$

$$v_1 - v_2 = \frac{dh}{dt},$$

d'où l'on tire, en posant  $\frac{s_1}{s_1 + s_2} = \beta_1$  et  $\frac{s_2}{s_1 + s_2} = \beta_2$ ,

$$v_1 = \beta_2 \frac{dh}{dt}, \quad v_2 = -\beta_1 \frac{dh}{dt}.$$

Si l'on suppose le mouvement irrotationnel, les vitesses dérivent à l'instant  $t$  d'un potentiel  $\varphi_t(x, y, z)$  qui est une fonction harmonique et régulière à l'intérieur du liquide. On connaît sa dérivée normale extérieure,  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial n_i}$ , en tout point de la frontière.

En effet, là où cette frontière est une paroi rigide :  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial n_c} = 0$ ; sur  $S_1$  :  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial n_c} = v_1$ ; sur  $S_2$  :  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial n_c} = v_2$ . Nous avons donc à résoudre un problème de NEUMANN pour le domaine occupé par le liquide. La condition de possibilité  $\iint \frac{\partial \gamma_t}{\partial n_c} d\sigma = 0$  (intégrale étendue à tout le contour) est vérifiée et, par suite,  $\varphi_t(x, y, z)$  sera déterminé, à une constante additive près, en fonction de  $h$  et de  $\frac{dh}{dt}$ .

Enfin, en appliquant le théorème des forces vives à l'ensemble du liquide, nous aurons une équation reliant  $h$  et  $\frac{dh}{dt}$ , par suite définissant  $h$  en fonction de  $t$ .

### § 2. — Hypothèse simplificatrice.

On peut donner du problème de NEUMANN une solution approchée dans laquelle  $\varphi_t(x, y, z)$  ne dépend que de  $\frac{dh}{dt}$ . Pour cela nous admettrons que, sur  $S_1$  et  $S_2$ , la vitesse tangentielle des particules liquides est négligeable en regard de leur vitesse normale en d'autres termes, que *le mouvement du liquide, au voisinage des surfaces libres, peut être assimilé au mouvement d'un solide*. L'expérience montre que cette approximation est d'autant plus voisine de la réalité que le plan  $\pi$  est plus élevé au-dessus du tube de communication <sup>6)</sup>.

En vertu de cette hypothèse, les vitesses ne seront pas sensiblement modifiées si l'on suppose les parois verticales prolongées jusqu'à l'infini vers le haut et les deux vases entièrement remplis de liquide, puisque, au voisinage des niveaux  $DD'$  et  $EE'$  et, *a fortiori*, au-dessus, le mouvement peut être assimilé au mouvement d'un solide. Nous sommes ainsi ramenés à déterminer le potentiel des vitesses dans une masse infinie de liquide animée à l'infini vers ( $A$ ) de la vitesse  $v_1$ , à l'infini vers ( $B$ ) de la vitesse  $v_2$ .

Désignons par  $\bar{\varphi}(x, y, z)$  le potentiel des vitesses du mouvement permanent de ( $A$ ) vers ( $B$ ) dans lequel le débit est égal à l'unité. Une fois connue cette fonction (qui est, en général, bien déterminée et ne dépend que de la forme et des dimensions

<sup>6)</sup> Cette seconde approximation consiste à admettre que, sur les surfaces libres,  $\varphi_t$  et  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial z}$  sont indépendants de  $x$  et de  $y$ , tandis que, dans la première, on l'admettait seulement pour l'expression

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_t}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}.$$

des vases), nous aurons :

$$\varphi_t(x, y, z) = - \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} \frac{dh}{dt} \varphi(x, y, z).$$

Par conséquent, au degré d'approximation auquel nous nous plaçons, *la vitesse en un point du liquide invariablement lié aux parois est constante en direction*; son intensité est proportionnelle à  $\frac{dh}{dt}$  et elle change de sens en même temps que  $\frac{dh}{dt}$  change de signe. *Les trajectoires coïncident avec les lignes de courant du mouvement permanent.*

### § 3. — Équation du mouvement.

Il est maintenant facile de calculer la force vive du liquide à un instant quelconque  $t$ . Considérons le domaine infini  $\mathfrak{D}$  du mouvement permanent. Appelons  $\Delta$  le domaine partiel obtenu en supprimant, dans les deux vases, tout ce qui se trouve au dessus du plan  $z = a$ ;  $\delta_1$  le domaine compris, dans  $V_1$ , entre les plans  $z = a$  et  $z = h_1$ ;  $\delta_2$  le domaine compris, dans  $V_2$ , entre les plans  $z = a$  et  $z = h_2$ . Désignons par  $\frac{R}{2}$ ,  $\frac{r_1}{2}$ ,  $\frac{r_2}{2}$  les forces vives des masses liquides qui, dans le mouvement permanent, traversent respectivement  $\Delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , la densité étant égale à l'unité :

$R$  est une constante numérique qui ne dépend que de la configuration de  $\Delta$ , c'est-à-dire de la forme et des dimensions du système communicant et du volume total de liquide.

D'autre part,  $r_1$  se calcule immédiatement en remarquant que, dans le domaine  $\delta_1$ , la vitesse est sensiblement constante et égale à  $\frac{1}{s_1}$ ; on a ainsi

$$r_1 = s_1 |h_1 - a| \frac{1}{s_1^2} = \frac{|h_1 - a|}{s_1}.$$

On a de même :

$$r_2 = s_2 |a' - h_2| \frac{1}{s_2^2} = \frac{|a - h_2|}{s_2} \quad \gamma).$$

7) Pour la même raison, si  $a$  augmente de  $\delta a$ ,  $R$  augmente de

$$\delta R = \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) \delta a.$$

Il s'en suit que  $R$  peut se mettre sous la forme

$$R = \frac{(s_1 + s_2)a}{s_1 s_2} + \chi,$$

$\chi$  étant une constante numérique qui ne dépend que de la forme du système communicant et de la position du plan  $\pi$  par rapport à ce système.

Le domaine réellement occupé par le liquide à l'instant  $t$  est  $\Delta \pm (\delta_1 - \delta_2)$ , en prenant le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que  $h$  est positif ou négatif. Dans le mouvement permanent la force vive, à l'intérieur de ce domaine, a pour valeur

$$\frac{1}{2} \left( R + \frac{h_1 - a}{s_1} - \frac{a - h_2}{s_2} \right) = \frac{1}{2} \left[ R + \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \frac{h}{s_1 + s_2} \right].$$

Il en résulte que la force vive du liquide à l'instant  $t$  est égale à

$$\frac{1}{2} \rho S^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \left[ R + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \beta_2} \frac{h}{S} \right] \left( \frac{dh}{dt} \right)^2,$$

en appelant  $\rho$  la densité et posant  $s_1 + s_2 = S$ .

D'autre part, le travail de la pesanteur correspondant à la dénivellation  $h$  est essentiellement négatif et égal, au signe près, au travail que l'on dépenserait pour transporter dans  $\delta_2$  la masse de liquide qui occupe  $\delta_1$  (si  $h$  est positif, ou inversement, si  $h$  est négatif); il est donc égal, en grandeur et signe, à

$$- \rho g s_1 |h_1 - a| \frac{|h|}{2} = - \frac{1}{2} \rho g S \beta_1 \beta_2 h^2.$$

Écrivons le théorème des forces vives :

$$\frac{1}{2} \rho S^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \left[ R + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \beta_2} \frac{h}{S} \right] \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = - \frac{1}{2} \rho g S \beta_1 \beta_2 h^2 + c''.$$

Si, à l'instant  $t=0$  (instant initial), la dénivellation est  $h_0$  et si le liquide part du repos, la constante  $a$  pour valeur

$$\frac{1}{2} \rho g S \beta_1 \beta_2 h_0^2$$

et l'on obtient, après simplifications, l'équation différentielle :

$$(1) \quad \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{g(h_0^2 - h^2)}{S \beta_1 \beta_2 R + (\beta_2 - \beta_1) h}$$

qui définit  $h$  en fonction du temps.

En posant :

$$h = h_0 x, \quad \frac{(\beta_2 - \beta_1) h_0}{S \beta_1 \beta_2 R} = k, \quad \sqrt{\frac{g}{S \beta_1 \beta_2 R}} = m,$$

on ramène cette équation à la suivante :

$$(1') \quad \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = m^2 \frac{1 - x^2}{1 + kx}.$$

Lorsque  $t$  croît,  $x$  oscille entre  $+1$  et  $-1$  (il est légitime, d'après nos hypo-



thèses, de supposer que  $1 + kx$  reste positif dans cet intervalle) et  $h$  entre  $+h_0$  et  $-h_0$ . Le mouvement du liquide est donc bien oscillatoire et la période des oscillations est donnée par

$$T = \frac{2}{m} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+kx}{1-x^2}} dx.$$

De même, le temps  $\Theta$  qui s'écoule entre l'instant initial et le premier instant où les deux niveaux sont égaux est donné par

$$\Theta = \frac{1}{m} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+kx}{1-x^2}} dx.$$

#### § 4. — Calcul de $T$ et de $\Theta$ .

Lorsque  $k$  est  $\neq 0$ , ces deux expressions se calculent au moyen des fonctions elliptiques. D'une façon générale, considérons l'intégrale suivante, déduite de (1') :

$$mt = \int_x^1 \sqrt{\frac{1+kx}{1-x^2}} dx = \int_x^1 \frac{1+kx}{\sqrt{(1-x^2)(1+kx)}} dx,$$

les radicaux étant pris avec le signe  $+$  lorsque  $x$  décroît à partir de 1,  $t$  croissant à partir de zéro ; faisons le changement de variable

$$x = \alpha s + \beta,$$

les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  étant définies par les relations

$$\alpha^3 k + 4 = 0, \quad 3\beta k + 1 = 0,$$

de telle sorte que :

$$(1-x^2)(1+kx) = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

avec

$$g_2 = \alpha(\beta - k), \quad g_3 = \frac{2}{3}(\beta^2 - 1).$$

Il vient :

$$mt = \int_s^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \left( \frac{2\alpha}{3} - \frac{4s}{\alpha} \right) \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}.$$

Considérons alors la fonction elliptique  $p(u; g_2, g_3)$ , qui admet comme périodes

$$\omega = \int_{-\frac{1+\beta}{\alpha}}^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \quad \text{et} \quad \omega' = \int_{\infty}^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

et faisons le nouveau changement de variable

$$s = p(u + \omega');$$

il vient :

$$m t = \frac{4}{\alpha} \int_0^u p(u + \omega') du - \frac{2\alpha}{3} u = \frac{4}{\alpha} [\zeta \omega' - \zeta(u + \omega')] - \frac{2\alpha}{3} u.$$

Nous obtenons donc la relation entre  $x$  et  $t$  sous forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= \alpha p(u + \omega') + \beta, \\ m t &= \frac{4}{\alpha} [\zeta \omega' - \zeta(u + \omega')] - \frac{2\alpha}{3} u. \end{aligned}$$

Suivant que  $k$  sera  $>$  ou  $<$  0, on fera varier  $u$  de 0 à  $+\infty$  ou de 0 à  $-\infty$ , de telle sorte que  $t$  varie de 0 à  $+\infty$  :  $x$  oscillera entre  $+1$  ( $u = \pm 2n\omega$ ) et  $-1$  ( $u = \pm (2n + 1)\omega$ ); on aura ainsi :

$$T = \frac{8}{m|\alpha|} \left( \zeta \omega + \frac{\alpha^2 \omega}{6} \right).$$

Pour calculer  $\Theta$ , on devra d'abord résoudre

$$p(u + \omega') = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad (u \text{ compris entre } 0 \text{ et } \pm \omega).$$

Si  $k$  est petit vis-à-vis de l'unité, on peut éviter les fonctions elliptiques en remplaçant  $\sqrt{1 + kx}$  par  $1 + \frac{k}{2}x$ . L'équation (1') donne alors immédiatement :

$$m t = \int_x^1 \left( 1 + \frac{k}{2}x \right) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos x + \frac{k}{2} \sqrt{1 - x^2},$$

d'où :

$$T = \frac{2\pi}{m} = 2\pi \sqrt{\frac{S\beta_1\beta_2 R}{g}}, \quad \Theta = \frac{\pi + k}{2m}.$$

Enfin, dans le cas particulier où les parties supérieures des deux vases ont des sections équivalentes ( $s_1 = s_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $k = 0$ ) et, d'une façon générale, chaque fois que l'on pourra négliger  $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1\beta_2} \frac{h_0}{S}$  devant  $R$ , on aura simplement :

$$h = h_0 \cos m t.$$

Le mouvement général du liquide sera pendulaire, de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{S\beta_1\beta_2 R}{g}}.$$

Cette formule pourra servir à déterminer expérimentalement la constante  $R$ .

## CHAPITRE II.

LE MOUVEMENT PERMANENT AUXILIAIRE  
DANS LE CAS DE LA CUVE PARALLÉLIPIÉDIQUE.

## § 1. — Définition.

Dans ce qui précède nous avons montré comment l'étude approchée du mouvement réel se ramène à deux problèmes distincts :

- a) étude d'un mouvement permanent auxiliaire ;
- b) résolution d'intégrales elliptiques.

Dans le cas où le mouvement des particules liquides peut être regardé comme parallèle à un plan fixe vertical, le premier problème est soluble, au moins théoriquement, à l'aide de la représentation conforme. D'ailleurs, tout ce que nous avons dit du mouvement à trois dimensions, s'applique au mouvement plan : il suffit de considérer une tranche du liquide comprise entre deux plans parallèles au mouvement et distants de l'unité.

La suite de ce travail est consacrée à l'étude d'un cas particulier de mouvement plan, le seul, du reste, où les calculs soient pratiquement abordables.

Considérons une cuve ayant la forme d'un parallélépipède rectangle et dont le fond est horizontal ; elle est divisée en deux chambres par une cloison très mince, parallèle à deux des parois verticales de la cuve, n'atteignant pas le fond et, par suite, ménageant, à sa partie inférieure, un orifice rectangulaire. On obtient ainsi (remarquons-le en passant) un schéma suffisamment approché d'un certain type d'écluses. Les deux chambres jouent ici le rôle des vases  $V_1$  et  $V_2$  que nous considérons plus haut. Négligeant toute espèce de frottement, on peut admettre que le mouvement des particules liquides s'effectue parallèlement au plan de symétrie de la figure (plan vertical perpendiculaire à la cloison en son milieu) que nous prendrons pour plan  $z = x + iy$ ,  $Ox$  étant dirigé suivant la trace du fond de la cuve et  $Oy$  suivant la trace de la cloison (Fig. 2).

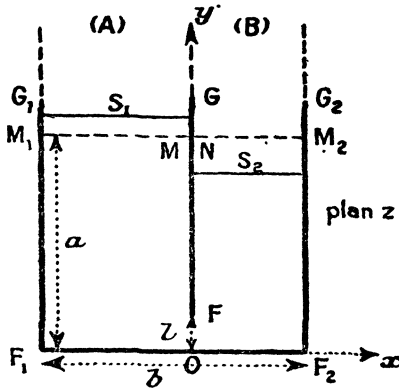
Le mouvement permanent auxiliaire sera défini de la façon suivante : on supposera les parois  $F_1G_1$ ,  $F_2G_2$ , et la cloison  $FG$  prolongées jusqu'à l'infini vers le haut et l'on considèrera le mouvement permanent dans lequel le liquide s'écoule de (A) vers (B), à travers l'orifice  $OF$ , avec un débit égal à l'unité. Comme nous excluons l'hypothèse d'un sillage, nous devons nous attendre à ce que le point  $F$  soit singulier. Nous écarterons cette difficulté plus tard.

Pour déterminer la fonction  $\bar{\varphi}(x, y)$ , potentiel des vitesses du mouvement per-

manent, il nous suffira de connaître les dimensions :

$$OF = l, \quad \frac{F_1 O}{\beta_1} = \frac{OF_2}{\beta_2} = \frac{F_1 F_2}{I} = b,$$

( $b$  remplace ici  $S$  dans les formules).



(Fig. 2).

Pour calculer  $R$  (constante du mouvement plan), nous devons connaître, en outre, la hauteur du niveau moyen

$$F_1 M_1 = a.$$

§ 2. — Passage du plan  $f$  au plan  $\zeta$ .

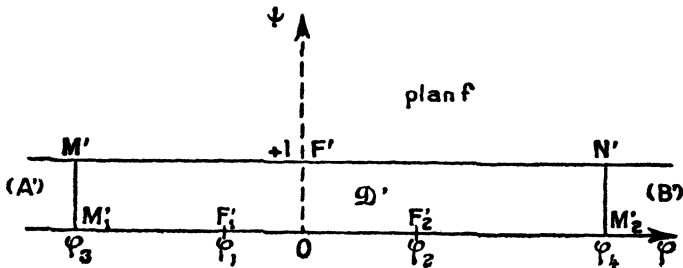
Désignons par  $f(\zeta)$  le potentiel complexe

$$\bar{\varphi}(x, y) + i\bar{\psi}(x, y),$$

la constante arbitraire étant choisie de telle sorte que :

$$f(i1) = +i.$$

Au domaine  $\mathfrak{D}(A-OF-B)$  du plan  $\zeta$  correspond, dans le plan  $f$ , une bande indéfinie  $\mathfrak{D}'(A'-B')$  de largeur un (Fig. 3); aux points  $F, F_1, F_2$  correspondent

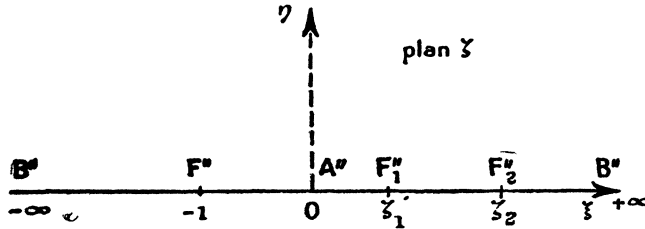


(Fig. 3).

les points  $F'$ ,  $F'_1$ ,  $F'_2$  d'affixes  $+i$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Si nous faisons la transformation définie par

$$\zeta = e^{\pi f},$$

la bande  $\mathfrak{D}'$  se transforme dans la région  $\eta > 0$  du plan  $\zeta = \xi + i\eta$  (Fig. 4); aux



(Fig. 4).

points  $A'$ ,  $F'$ ,  $B'$  correspondent les points d'affixes  $0$ ,  $-1$ ,  $\infty$ ; aux points  $F'_1$ ,  $F'_2$  correspondent les points  $F''_1$ ,  $F''_2$  d'affixes réels et positifs  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  ( $\zeta_1 < \zeta_2$ ). Les deux nombres  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  jouent un rôle essentiel dans la détermination de la fonction  $\chi(\zeta)$  dont la connaissance entrainera la solution complète du problème. On a, en effet, en désignant par  $u$ ,  $v$  les composantes de la vitesse,

$$\frac{df}{d\zeta} = w = u - iv$$

et, si l'on pose, selon la méthode bien connue de M. LEVI-CIVITA,

$$w = e^{-i(\frac{\pi}{2} + \omega)} = -e^{-i\omega},$$

$\omega$ , considérée comme fonction de  $\zeta$ , sera régulière dans tout le demi-plan  $\eta > 0$  et sa partie réelle prendra, sur l'axe des  $\zeta$ , les valeurs

$0$	entre	$-\infty$	et	$-1$ ,
$-\pi$	entre	$-1$	et	$\zeta_1$ ,
$-\frac{\pi}{2}$	entre	$\zeta_1$	et	$\zeta_2$ ,
$0$	entre	$\zeta_2$	et	$+\infty$ .

On aura donc immédiatement :

$$\omega = i \left( \int_{-1}^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{\xi - \zeta} + \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\xi - \zeta} + \log k \right) = i \log \left( k \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}}{\zeta + 1} \right)^{8)},$$

<sup>8)</sup> D'après la formule connue

$$W(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x', 0)}{x' - \zeta} dx' + i \times \text{c}^{\text{te}} \text{ réelle}$$

(voir, par exemple, A. SIGNORINI, *Sull'inizio dell'efflusso dei liquidi*. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. XLI (1916), p. 207-237], p. 209-211).

$k$  étant une constante réelle qui sera déterminée plus loin. On déduit de là :

$$w = -ik \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}}{\zeta + 1}.$$

Choisissons arbitrairement pour le radical la détermination qui se réduit à  $\zeta$ , pour  $\zeta$  infini, et écrivons les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction  $w(\zeta)$  aux points d'affixes 0 et  $\infty$ , à savoir :

(a) pour  $\zeta = 0$  (infini A),  $w = i \times \frac{1}{b\beta_1}$  ;

(b) pour  $\zeta = \infty$  (infini B),  $w = -i \times \frac{1}{b\beta_2}$  .

La condition (b) fixe la constante  $k$  :

$$k = \frac{1}{b\beta_2}.$$

D'où

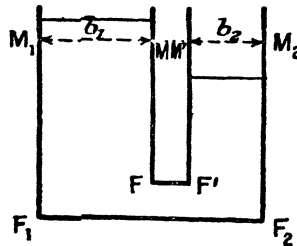
(2)  $w = -\frac{i}{b\beta_2} \frac{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}}{\zeta + 1}$  9).

Il est facile de vérifier sur cette formule que la détermination choisie pour le radical et le signe de  $k$ , qu'elle entraîne, sont en conformité, sur l'axe des  $\zeta$ , avec les signes de  $u$  et de  $v$  que l'on connaît *a priori* le long des parois.

De la formule (2), jointe à la relation

$$df = \frac{1}{\pi} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

9) En considérant, au lieu du système communicant étudié, le système ci-contre (Fig. 5), on aboutit,



(Fig. 5).

tirait, d'après le même raisonnement, à la formule :

$$w = -\frac{i}{b_2} \sqrt{\frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}{(\zeta + 1)(\zeta - \zeta')}} ,$$

en posant :

$$M'M_2 = b_2, \quad f(F) = +i, \quad \zeta(F') = \zeta'.$$

on déduit :

$$d\zeta = i \frac{b\beta_2'}{\pi} \frac{\zeta + 1}{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

d'où :

$$(3) \quad \chi = i \frac{b\beta_2}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} \frac{\zeta + 1}{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}} \frac{d\zeta}{\zeta} + il,$$

formule qui permet de calculer la fonction  $\chi(\zeta)$ , une fois connus les nombres  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ .

Posons :

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 2\sigma, \quad \zeta_1 \zeta_2 = \gamma^2.$$

La condition (a) donne immédiatement :

$$\gamma = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Nous n'avons donc plus qu'une seule inconnue,  $\sigma$ , que nous déterminerons en exprimant que la distance  $OF$  est égale à  $l$ , largeur de l'orifice. Cela fait, la formule (2)

$$u - iv = - \frac{i}{b\beta_2} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2\sigma\zeta + \gamma^2}}{\zeta + 1},$$

jointe à la formule (3) [où l'on remplacera, de même, le produit  $(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)$  par  $\zeta^2 - 2\sigma\zeta + \gamma^2$ ] nous fera connaître, par l'intermédiaire de la variable  $\zeta$ , la vitesse en chaque point du domaine  $\mathfrak{D}$ .

### § 3. — Passage du plan $\zeta$ au plan $\lambda$ .

Toutefois, la variable  $\zeta$  n'est pas la plus commode en tant que variable auxiliaire. Il est plus avantageux, comme nous allons le voir, de lui substituer une autre variable,  $\lambda$ , et, pour cela, de faire une nouvelle représentation conforme définie par

$$(4) \quad \lambda = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 2\sigma\zeta + \gamma^2},$$

le radical ayant la même détermination que précédemment.

Aux points  $F_1'', F_2''$  du plan  $\zeta$  correspondent, dans le plan  $\lambda = \theta + i\kappa$ , les points  $F_1''', F_2'''$  d'affixes

$$\lambda_1 = \zeta_1, \quad \lambda_2 = \zeta_2.$$

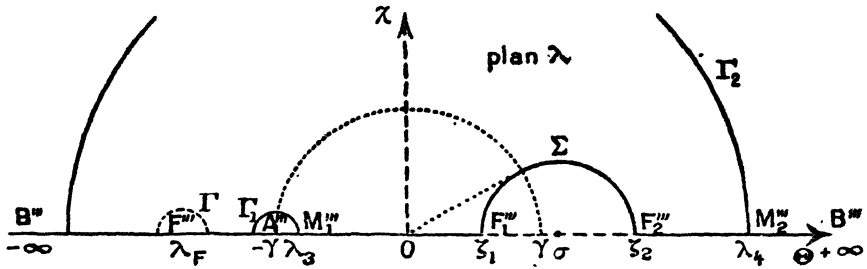
Au domaine  $\mathfrak{D}'' (\eta > 0)$ , limité par l'axe réel, correspond le domaine  $\mathfrak{D}''' (\kappa > 0)$  limité par l'axe réel, moins le segment  $F_1''' F_2'''$ , et par la demi-circonférence  $\Sigma$  de diamètre  $F_1''' F_2'''$  (Fig. 6). Aux points d'affixes  $0, -1, \infty$  correspondent les points

$$A'''(-\gamma), \quad F'''(\lambda_F = -1 - \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}), \quad B'''(\infty).$$

En posant, pour simplifier l'écriture,  $\sqrt{\zeta^2 - 2\sigma\zeta + \gamma^2} = r$ , la formule (3)

s'écrit :

$$z = i \frac{b \beta_2}{\pi} \int_{-1}^{\zeta} \left( 1 + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{r} + il.$$



(Fig. 6).

D'autre part, de la relation (4) on déduit :

$$\zeta = \frac{\lambda^2 - \gamma^2}{2(\lambda - \sigma)}, \quad \frac{d\lambda}{d\zeta} = 1 + \frac{\zeta - \sigma}{r} = \frac{\lambda - \sigma}{r}, \quad \frac{d\zeta}{r} = \frac{d\lambda}{\lambda - \sigma},$$

d'où :

$$(3') \quad \begin{cases} z = i \frac{b \beta_2}{\pi} \int_{\lambda_F}^{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda - \sigma} + \frac{2}{\lambda^2 - \gamma^2} \right) d\lambda + il \\ = i \frac{b \beta_2}{\pi} \left[ \log(\lambda - \sigma) + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]_{\lambda=\lambda_F}^{\lambda} + il. \end{cases}$$

Cette formule, jointe à

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} u - iv &= - \frac{1}{b \beta_2} \frac{\lambda^2 - 2\lambda\sigma + \gamma^2}{\lambda^2 + 2(\lambda - \sigma) - \gamma^2} = - \frac{i}{b \beta_2} \frac{(\lambda - \zeta_1)(\lambda - \zeta_2)}{(\lambda - \lambda_F)(\lambda - \lambda'_F)}, \\ & \quad (\lambda'_F = -1 + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}), \end{aligned} \right.$$

nous fera connaître, par l'intermédiaire de  $\lambda$ , la vitesse en chaque point du domaine  $\mathfrak{D}$ .

Vérifions, en passant, sur la formule (3') que  $F_1 F_2 = b$ . On a :

$$F_1 F_2 = z(F_2) - z(F_1) = i \frac{b}{\pi} \left\{ \beta_2 [\log(\lambda - \sigma)]_{\lambda=\zeta_1}^{\lambda=\zeta_2} + \beta_1 \left[ \log \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]_{\lambda=\zeta_1}^{\lambda=\zeta_2} \right\}.$$

Les expressions qui multiplient  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ont, toutes deux, leur partie réelle nulle et leur partie imaginaire égale à  $-i\pi$ <sup>10)</sup> ; par suite :

$$F_1 F_2 = b(\beta_1 + \beta_2) = b.$$

<sup>10)</sup> Prendre, par exemple, pour chemin d'intégration la demi-circonférence  $\Sigma$ .



§ 4. — Relation entre  $\sigma$  et  $l$ .

Exprimons maintenant que la distance  $OF$  est égale à  $l$ , largeur de l'orifice. A cet effet, nous écrirons que la partie imaginaire de  $z(F) - z(F_1)$  est  $il$ , ou que la partie réelle de

$$\left[ \log(\lambda - \sigma) + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]_{\lambda = \zeta_1}^{\lambda = \lambda_F}$$

est  $\pi \frac{l}{b\beta_2}$ , ce qui donne :

$$\pi \frac{l}{b\beta_2} = \log \frac{\sigma - \lambda_F}{\sigma - \zeta_1} + \frac{1}{\gamma} \log \frac{(\gamma - \lambda_F)(\gamma + \zeta_1)}{(-\gamma - \lambda_F)(\gamma - \zeta_1)}.$$

On a :

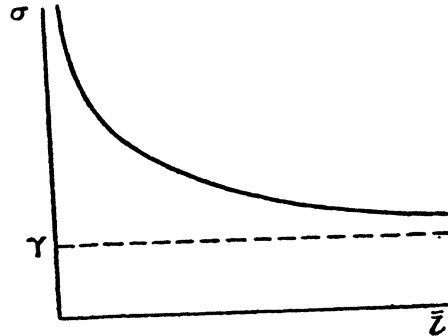
$$\frac{\sigma - \lambda_F}{\sigma - \zeta_1} = \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}}, \quad \frac{\gamma + \zeta_1}{\gamma - \zeta_1} = \sqrt{\frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - \lambda_F}{-\gamma - \lambda_F} &= \frac{1 + \gamma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{1 - \gamma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} = \frac{1 - (\gamma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2})^2}{(1 - \gamma)^2 - (1 + 2\sigma + \gamma^2)} \\ &= \frac{\gamma^2 + \sigma + \gamma\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sigma + \gamma}. \end{aligned}$$

D'où, en posant  $\frac{l}{b\beta_2} = \bar{l}$ <sup>11)</sup>, la relation suivante qui détermine  $\bar{l}$  en fonction de  $\sigma$  et de  $\gamma$  :

$$(5) \quad \pi \bar{l} = \log \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}} + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\gamma^2 + \sigma + \gamma\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}}.$$

Cette formule permet de construire, pour une valeur quelconque de  $\gamma$  (il suffit de prendre  $\gamma \leq 1$ ), la courbe représentant les variations de  $\sigma$  en fonction de  $\bar{l}$  (Fig. 7).



(Fig. 7).

<sup>11)</sup> Il convient de laisser en évidence le produit  $b\beta_2$ , en vue de l'extension au cas où  $b$  est infini.

Il est visible que, lorsque,  $\gamma$  étant fixé,  $\bar{l}$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $\sigma$  décroît de  $+\infty$  à  $\gamma$ <sup>12)</sup>.

On peut résoudre par rapport à  $\sigma$  soit rigoureusement, soit avec une approximation suffisante pour la pratique, dans plusieurs cas particuliers qui seront étudiés plus loin.

CHAPITRE III.

CALCUL DE LA CONSTANTE R.

§ 1. — Préliminaires.


Proposons-nous maintenant de calculer la constante R, connaissant la hauteur du niveau moyen a. On a :

$$R = \int \int_{M_1 F_1 F_2 M_2 N F M} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 ds.$$


Les points  $M_1, M_2$  ont pour images, dans le plan  $\lambda$ , les points  $M_1''', M_2'''$  dont les affixes  $\lambda_3, \lambda_4$  peuvent se calculer en exprimant, à l'aide de la formule (3'), que :

$$F_1 M_1 = F_2 M_2 = a.$$

Posant  $\frac{a}{b\beta_2} = \bar{a}$ , nous aurons ainsi, pour  $\lambda_3$ ,

(6)  
$$\begin{aligned} \pi \bar{a} &= \log \frac{\sigma - \lambda_3}{\sigma - \zeta_1} + \frac{1}{\gamma} \log \frac{(\gamma - \lambda_3)(\gamma + \zeta_1)}{(\gamma + \lambda_3)(\gamma - \zeta_1)} \\ &= \log \frac{\sigma - \lambda_3}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}} + \frac{1}{\gamma} \log \left( \frac{\gamma - \lambda_3}{\gamma + \lambda_3} \sqrt{\frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma}} \right), \\ \left( \frac{\gamma - \lambda_3}{\gamma + \lambda_3} (\sigma - \lambda_3)^r \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} &= (\sigma + \gamma)^{\frac{\gamma-1}{2}} (\sigma - \gamma)^{\frac{\gamma+1}{2}} e^{r\pi \bar{a}}, \quad (-\gamma < \lambda_3 < \gamma), \end{aligned}$$

et, pour  $\lambda_4$ ,

(7)  
$$\begin{aligned} \pi \bar{a} &= \log \frac{\lambda_4 - \sigma}{\zeta_2 - \sigma} + \frac{1}{\gamma} \log \frac{(\lambda_4 - \gamma)(\zeta_2 + \gamma)}{(\lambda_4 + \gamma)(\zeta_2 - \gamma)} \\ &= \log \frac{\lambda_4 - \sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \gamma^2}} + \frac{1}{\gamma} \log \left( \frac{\lambda_4 - \gamma}{\lambda_4 + \gamma} \sqrt{\frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma}} \right), \\ \left( \frac{\lambda_4 - \gamma}{\lambda_4 + \gamma} (\lambda_4 - \sigma)^r \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} &= (\sigma + \gamma)^{\frac{\gamma-1}{2}} (\sigma - \gamma)^{\frac{\gamma+1}{2}} e^{r\pi \bar{a}}, \quad (\lambda_4 > \sigma). \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> Remarquons toutefois que, a étant fixé,  $\bar{l}$  ne peut pas croître au-delà d'une certaine limite, puisqu'il doit rester inférieur à  $\frac{a}{b\beta_2}$ , ou  $\bar{a}$ , et que même, comme nous le verrons, la différence  $\bar{a} - \bar{l}$  doit rester suffisamment grande.

Pour résoudre les équations (6) et (7), nous ferons la remarque suivante : l'hypothèse, d'où nous sommes partis, *du mouvement rigide des particules au voisinage des surfaces libres* n'est pas rigoureuse — avons-nous dit — car elle implique trop de conditions, mais elle s'approche d'autant plus de la réalité que, toutes choses égales d'ailleurs,  $a$  est plus grand, c'est-à-dire  $\lambda_3 - \lambda(A)$  plus petit et  $\lambda_4$  plus grand. Il est donc légitime de considérer  $\frac{\lambda_3}{\gamma} + 1$  et  $\frac{1}{\lambda_4}$ , séparément, comme des infiniment petits principaux et de poser :

$$\lambda_3 = -\gamma(1 - \varepsilon)^{1/3}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{\varepsilon'},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs à  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$

L'équation (6) donne alors immédiatement

$$\varepsilon = 2 \left( \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} e^{-\gamma\pi\bar{a}},$$

et l'équation (7),

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sigma + \gamma} \left( \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} e^{-\pi\bar{a}}.$$

## § 2. — Degré d'approximation de la méthode.

Il est tout indiqué, *si l'on suppose une fois pour toutes*  $\gamma \leq 1$ , de prendre  $\varepsilon$  pour infiniment petit principal. Au reste, pour bien préciser ce point, nous allons vérifier qu'au degré d'approximation qui consiste uniquement à négliger  $\varepsilon$  vis-à-vis de quantités supérieures ou égales à l'unité, les particules liquides sont animées, sur les segments  $M_1M$  et  $M_2N$ , des vitesses  $-\frac{1}{b\beta_1}$  et  $\frac{1}{b\beta_2}$  dirigées verticalement.

Remarquons tout d'abord que, de la formule (5) qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \pi\bar{l} = & \log \left( \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} + \log \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sigma + \gamma} \\ & + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\gamma^2 + \sigma + \gamma\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sigma + \gamma}, \end{aligned}$$

<sup>13)</sup> Nous étudierons plus loin, par la même méthode convenablement modifiée, le cas où  $\gamma$  est voisin de zéro.

on déduit :

$$\log \left( \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}} < \pi \bar{l}$$

et, par suite,

$$\varepsilon < 2 e^{-\gamma \pi (\bar{a} - \bar{l})}.$$

Il suffira donc que l'on puisse négliger  $2 e^{-\gamma \pi (\bar{a} - \bar{l})}$  devant l'unité, mais, à cause de l'exponentielle, il ne sera pas nécessaire pour cela que  $\gamma(\bar{a} - \bar{l})$  [ou  $\frac{a - l}{b \beta_1}$ ] soit très grand <sup>14)</sup>.

Considérons, dans le plan  $\lambda$ , les demi-circonférences d'équations

$$(\Gamma_1) \quad \lambda = -\gamma(1 - \varepsilon e^{i\tau}), \quad (0 \leq \tau \leq \pi),$$

$$(\Gamma_2) \quad \lambda = (\sigma + \gamma) \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{i\tau}, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

Je dis qu'elles correspondent aux segments  $M_1M$  et  $M_2N$  du plan  $\chi$ . En effet, en substituant les  $\lambda$  dans la formule (3') ou, mieux, respectivement dans

$$\chi = i \frac{b \beta_1}{\pi} \left[ \gamma \log(\lambda - \sigma) + \log \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]_{\lambda=\zeta_1}^{\lambda} - b \beta_1,$$

$$\chi = i \frac{b \beta_2}{\pi} \left[ \log(\lambda - \sigma) + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]_{\lambda=\zeta_2}^{\lambda} + b \beta_2,$$

et négligeant les termes en  $\varepsilon$  de degrés supérieurs au premier, il vient :

$$\chi = b \beta_1 \left( \frac{\tau}{\pi} - 1 \right) + i \frac{b \beta_1}{\pi} \left[ \gamma \pi \bar{a} - \left( \frac{1}{2} + \frac{\gamma^2}{\sigma + \gamma} \right) \varepsilon e^{i\tau} \right],$$

$$\chi = b \beta_2 \left( 1 - \frac{\tau}{\pi} \right) + i \frac{b \beta_2}{\pi} \left[ \gamma \pi \bar{a} - \frac{(\sigma + 2)\gamma}{\sigma + \gamma} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-i\tau} \right].$$

Dans les crochets,  $\gamma \pi \bar{a}$  est sûrement plus grand que 1 ( $\varepsilon < \frac{2}{\varepsilon}$ ) et les seconds

<sup>14)</sup> Donnons, à titre d'exemples, quelques valeurs correspondantes :

$$2 e^{-\gamma \pi (\bar{a} - \bar{l})} = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{50}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{500}, \quad \frac{1}{1000},$$

$$\gamma(\bar{a} - \bar{l}) = 0,96, \quad 1,47, \quad 1,69, \quad 2,21, \quad 2,43.$$

termes sont, en valeur absolue, plus petits que  $\varepsilon$ ; il vient donc simplement :

$$(M_1M) \quad z = b\beta_1 \left( \frac{\tau}{\pi} - 1 \right) + ia, \quad (0 \leq \tau \leq \pi),$$

$$(M_2N) \quad z = b\beta_2 \left( 1 - \frac{\tau}{\pi} \right) + ia, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

Nous pouvons maintenant calculer, à l'aide de la formule (2'), la vitesse des particules liquides sur  $M_1M$  et  $M_2N$ . Il vient, sur  $M_1M$ ,

$$u - iv = \frac{i}{b\beta_2} \frac{\gamma(\sigma + \gamma)(1 - \varepsilon e^{i\tau})}{\sigma + \gamma - \gamma(1 - \gamma)\varepsilon e^{i\tau}} = \frac{1}{b\beta_1} \left( 1 - \frac{\sigma + \gamma^2}{\sigma + \gamma} \varepsilon e^{i\tau} \right), \quad (0 \leq \tau \leq \pi),$$

ou simplement, comme le second terme de la parenthèse est, en valeur absolue,  $\leq \varepsilon$ ,

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{b\beta_1},$$

et, sur  $M_2N$ ,

$$\begin{aligned} u - iv &= -\frac{i}{b\beta_2} \frac{\sigma + \gamma - 2\sigma \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-i\tau}}{\sigma + \gamma + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-i\tau}} \\ &= -\frac{1}{b\beta_2} \left[ 1 - \frac{2(\sigma + 1)}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-i\tau} \right], \quad (0 \leq \tau \leq \pi). \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\frac{2(\sigma + 1)}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\sigma + 1}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \varepsilon$$

et, comme

$$\frac{\sigma + 1}{\sigma + \gamma} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} < \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} < 1, \quad \left( \text{si } \varepsilon < \frac{2}{e} \right),$$

on aura simplement, sur  $M_2N$ ,

$$u = 0, \quad v = \frac{1}{b\beta_2}.$$

De plus, lorsque  $y$  varie infiniment peu autour de la valeur  $a$ , l'accroissement de  $u - iv$  est, en valeur absolue, infiniment petit par rapport à celui de  $y$ . Il suffit donc dans la pratique, pour que nos approximations soient valables, que l'on puisse négliger  $\varepsilon$  devant l'unité.

§ 3. — La fonction  $\chi(\sigma, \gamma)$ .

Revenons au calcul de  $R$ . Les demi-circonférences  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont pour images, dans le plan  $f$ , les segments  $M'_1M'$  et  $M'_2N'$  dont les équations s'obtiennent en substituant les  $\lambda$  dans  $f = \frac{1}{\pi} \log \frac{\lambda^2 - \gamma^2}{2(\lambda - \sigma)}$  :

$$(M'_1M') \quad f = \frac{1}{\pi} \left( \log \frac{\gamma^2 \varepsilon}{\sigma + \gamma} + \underbrace{\frac{\gamma \varepsilon}{\sigma + \gamma} e^{i\tau}}_{\text{néglig.}} + i\tau \right), \quad (0 \leq \tau \leq \pi),$$

$$(M'_2N') \quad f = \frac{1}{\pi} \left\{ \log \left[ \frac{\sigma + \gamma}{2} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] + \underbrace{\frac{\sigma}{\sigma + \gamma} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-i\tau}}_{\text{néglig.}} + i\tau \right\}, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

Ils sont perpendiculaires à l'axe des  $\varphi$  et ont pour abscisses :

$$\varphi_3 = \frac{1}{\pi} \log \frac{\gamma^2 \varepsilon}{\sigma + \gamma},$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\pi} \log \left[ \frac{\sigma + \gamma}{2} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right].$$

Reprenons alors l'expression de  $R$ . On a immédiatement, en passant dans le plan  $f$ ,

$$R = \varphi_4 - \varphi_3 = \frac{1}{\pi} \log \left[ \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4\gamma^2} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]$$

$$= \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \left( \frac{a}{b} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma} \right) + \frac{2}{\pi} \log \frac{\sigma + \gamma}{2\gamma}.$$

On trouve bien, comme on devait s'y attendre, une expression de la forme

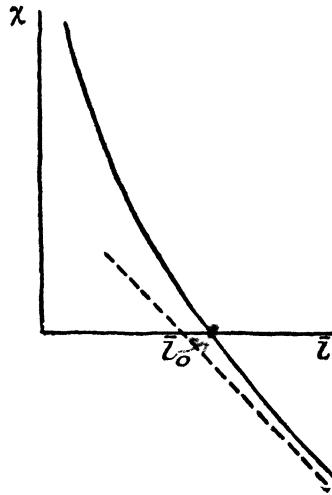
$$(8) \quad R = \frac{a}{b \beta_1 \beta_2} + \chi(\sigma, \gamma),$$

avec

$$(9) \quad \chi(\sigma, \gamma) = \frac{2}{\pi} \log \frac{\sigma + \gamma}{2\gamma} - \frac{(\gamma + 1)^2}{2\pi\gamma} \log \frac{\sigma + \gamma}{\sigma - \gamma}.$$

La formule (9), jointe à la formule (5), permet de construire, pour une valeur quelconque ( $\leq 1$ ) de  $\gamma$ , la courbe représentant les variations de  $\chi$  en fonction de  $\bar{l}$  (Fig. 8). On obtient ainsi la solution approchée complète du problème des oscillations pour le système communicant envisagé. On trouvera plus loin l'étude de plusieurs cas particuliers, notamment du cas où  $\gamma = 1$  et du cas où  $\gamma = 0$  ( $b$  infini).

Si l'on se borne à calculer  $R$  avec l'approximation, couramment utilisée en hydraulique, qui consiste ici à admettre que toutes les molécules situées dans la chambre



(Fig. 8).

de gauche sont animées de la même vitesse,  $\frac{I}{b\beta_1}$ , et toutes les molécules situées dans la chambre de droite animées de la même vitesse,  $\frac{I}{b\beta_2}$ , on trouve simplement :

$$(8') \quad R = \frac{a}{b\beta_1\beta_2}.$$

On voit que cette approximation est d'autant plus admissible, pour le calcul de  $R$ , que  $\chi(\sigma, \gamma)$  est plus voisin de zéro. Or, lorsque,  $\gamma$  étant fixé,  $\bar{l}$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $\chi$  décroît de  $+\infty$  à  $-\infty$ <sup>15)</sup>.  $\chi$  s'annule donc pour une valeur, et une seule, de  $\bar{l}$ , soit  $\bar{l}_0$ , qui ne dépend que de  $\gamma$ , et l'approximation usuelle ne sera bonne que si  $\bar{l}$  est voisin de  $\bar{l}_0$ .

<sup>15)</sup> Cela correspond au fait évident que, toutes choses égales d'ailleurs, plus l'orifice est large, plus les oscillations sont rapides.

Voir en outre la note <sup>12)</sup>.

§ 4. — Erreur commise sur  $R$ .

Pour savoir d'une façon précise s'il vaut la peine, ou non, de tenir compte de  $\chi$ , on peut calculer une limite supérieure de l'erreur commise sur  $R$  <sup>16)</sup>. En fait, les images de  $M_1M$  et  $M_2N$  dans le plan  $f$  sont des segments curvilignes qui sont respectivement compris entre les segments curvilignes obtenus en remplaçant, dans les équations de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $a$  par  $a \pm \frac{b\beta_1}{\pi}\varepsilon$ , c'est-à-dire  $\varepsilon$  par  $\varepsilon(1 \pm \varepsilon)$ . On peut confondre tous ces segments avec des segments perpendiculaires à l'axe des  $\varphi$  en commettant sur  $R$  une erreur absolue de l'ordre de  $\varepsilon^3$ . Il reste alors que l'erreur absolue commise sur  $\varphi_3$  est inférieure à

$$\frac{2\varepsilon}{\pi}$$

et l'erreur absolue commise sur  $\varphi_4$  inférieure à

$$\frac{2\varepsilon}{\gamma\pi}.$$

Par suite, l'erreur absolue commise sur  $R$  est inférieure à

$$\frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{2\varepsilon}{\gamma\pi} = \frac{2(\gamma + 1)\varepsilon}{\gamma\pi} < \frac{4(\gamma + 1)\varepsilon}{\gamma\pi} e^{-\gamma\pi(\bar{a} - \bar{l})}.$$

Chaque fois que  $\varepsilon$  sera assez petit (ou  $a - l$  assez grand) pour que cette limite soit inférieure à  $|\chi|$ , il y aura avantage, au point de vue de la précision, à employer la formule (8) au lieu de la formule usuelle (8').

Pour obtenir une limite supérieure de l'erreur relative, il suffit de remarquer que l'on a :

$$R > \frac{1}{\pi} \log \left[ \frac{(\sigma + \gamma)^2}{4\gamma^2} e^{(\gamma+1)\pi(\bar{a} - \bar{l})} \right] > (\gamma + 1)(\bar{a} - \bar{l}).$$

Par suite, l'erreur relative commise sur  $R$  est inférieure à

$$\frac{2(\gamma + 1)\varepsilon}{\gamma\pi} : (\gamma + 1)(\bar{a} - \bar{l}) = \frac{2\varepsilon}{\gamma\pi(\bar{a} - \bar{l})}.$$

Elle est sûrement plus petite que  $\varepsilon$  si  $\gamma\pi(\bar{a} - \bar{l})$  est plus grand que 2 ou

$$\varepsilon < 2e^{-2} = 0,27 \dots$$

<sup>16)</sup> L'erreur dont nous nous occupons ici est celle qui résulte des approximations faites au cours du calcul. Elle ne doit pas être confondue avec l'erreur qui provient, notamment dans l'évaluation de  $T$  et de  $\Theta$  au moyen de  $R$ , du fait que les hypothèses mathématiques d'où nous sommes partis ne sont pas rigoureusement conformes au problème physique, erreur qui ne relève que de l'expérience, mais dont on peut dire qu'elle est d'autant plus faible que, toutes choses égales d'ailleurs,  $\varepsilon$  et  $h_0$  sont plus petits.



CHAPITRE IV.  
SUR LA SINGULARITÉ DU POINT  $F$ .

§ 1. — Retour au problème initial.

Dans ce qui précède, nous avons étudié un certain mouvement permanent et montré que, si l'on admettait de négliger  $\varepsilon$  devant l'unité, on pouvait l'utiliser comme mouvement auxiliaire pour résoudre le problème des oscillations tel que nous l'avons posé au début. Il s'agit maintenant de revenir au problème initial et de voir dans quelles conditions pratiques la solution à laquelle nous avons abouti s'adapte à ce problème.

En premier lieu, il est évident que les hypothèses simplificatrices que nous avons faites sur le mouvement au niveau moyen doivent être également vérifiées au niveau le plus bas ( $y = a - \beta_1 h_0$ , si  $\gamma \leq 1$ ). En d'autres termes,  $a$  étant fixé de telle sorte que  $\varepsilon$  soit négligeable devant l'unité, la dénivellation initiale  $h_0$  doit être assez petite pour que le produit

$$\varepsilon e^{\frac{\pi h_0}{b}}$$

soit, lui aussi, négligeable. Ces deux conditions sont satisfaites si  $\frac{a - l - \beta_1 h_0}{\beta_1 b}$  est assez grand pour qu'on puisse négliger

$$2e^{-\pi \frac{a-l-\beta_1 h_0}{\beta_1 b}}$$

devant l'unité.

En second lieu, on vérifierait sans difficulté que, si le mouvement est suffisamment lent (ou  $h_0$  suffisamment petit), la pression calculée sur les surfaces libres, sans être rigoureusement constante, diffère d'une quantité négligeable de la pression atmosphérique  $p_0$ . On se servirait pour cela des inégalités :

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 < \frac{g h_0^2}{R \beta_1 \beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2) h_0},$$

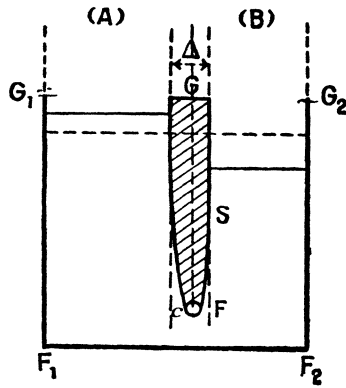
$$\left|\frac{d^2 h}{dt^2}\right| < g \left[ \frac{h_0}{R \beta_1 \beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2) h_0} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \left( \frac{h_0}{R \beta_1 \beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2) h_0} \right)^2 \right].$$

En dernier lieu, il existe, dans le mouvement permanent auxiliaire, un point singulier, le point  $F$ , où la vitesse devient infinie. Par suite, il y aurait, dans le mouvement réel, une petite région autour du point  $F$  où la pression serait négative, ce qui ne correspond à aucune réalité physique. Pour écarter cette difficulté, nous remarquerons que nous avons supposé la cloison  $GF$  infiniment mince, alors qu'en réalité elle

a une certaine épaisseur. Nous pourrions, sans changer en rien le mouvement, admettre que son profil coïncide avec une ligne de courant du mouvement permanent et choisir cette ligne de façon qu'en aucun de ses points voisins de  $F$  la pression ne devienne négative <sup>17</sup>).

§ 2. — Étude de la ligne  $\psi = 1 - \nu$  ( $\nu$  étant petit).

Soit donc  $1 - \nu$  la valeur constante que prend  $\psi$  sur la cloison intermédiaire  $S$  (Fig. 9). Comme celle-ci doit s'écarter assez peu de la cloison théorique  $GF$ ,  $\nu$  pourra



(Fig. 9).

être regardé comme une quantité petite <sup>18</sup>). Posons :

$$e^{\pi\varphi} = s$$

et marquons de l'indice 1 les quantités qui se rapportent à la ligne de courant  $\psi = 1$ . Celle-ci ayant pour équation :

$$\chi_1 = iy_1(s),$$

la ligne  $\psi = 1 - \nu$  sera représentée par

$$\chi = iy_1(s) + \delta\chi(s),$$

avec :

$$\delta\chi(s) = \left(\frac{d\chi}{ds}\right)_1 \delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\chi}{ds^2}\right)_1 \delta s^2 + \dots$$

<sup>17</sup>) De l'étude du système communicant considéré, on pourrait déduire immédiatement celle d'une infinité d'autres systèmes obtenus en prenant comme parois, au lieu des lignes  $\psi = 0$  et  $\psi = 1$ , deux lignes de courant quelconques  $\psi = \alpha$  et  $\psi = \beta$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ). Le mouvement ne serait pas modifié, mais il faudrait définir  $a$ ,  $b$  et  $l$  (voir plus loin le cas de  $l$  infini).

<sup>18</sup>) ... mais pas forcément très petite; c'est pourquoi, dans le calcul qui suit, nous conviendrons de négliger, vis-à-vis de l'unité, les termes en  $\nu^2$  et au-delà, mais de conserver les termes en  $\nu$ .

On a, en remarquant que  $\zeta_1 = -s$  et que la détermination à prendre pour  $\sqrt{\zeta_1^2 - 2\sigma\zeta_1 + \gamma^2}$  est la négative,

$$\left(\frac{d\zeta}{d\zeta^2}\right)_1 = -i \frac{b\beta_2}{\pi} \frac{s-1}{s\sqrt{s^2 + 2\sigma s + \gamma^2}},$$

$$\left(\frac{d^2\zeta}{d\zeta^2}\right)_1 = i \frac{b\beta_2}{\pi} \left[ \frac{1}{s^2\sqrt{s^2 + 2\sigma s + \gamma^2}} - \frac{(s-1)(s+\sigma)}{s(s^2 + 2\sigma s + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \dots$$

$$\delta\zeta = s \left( i\pi v + \frac{1}{2}\pi^2 v^2 + \dots \right),$$

d'où

$$\delta\zeta(s) = b\beta_2 \left[ \frac{s-1}{\sqrt{s^2 + 2\sigma s + \gamma^2}} v - i \frac{\pi}{2} \frac{(\sigma+1)s^2 + (\sigma+\gamma^2)s}{(s^2 + 2\sigma s + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} v^2 + \dots \right].$$

A l'infini vers (A):

$$\delta\zeta(0) = -b\beta_1;$$

à l'infini vers (B):

$$\delta\zeta(+\infty) = +b\beta_2;$$

d'où, en désignant par  $\Delta$  l'épaisseur asymptotique de  $S$ ,

$$\Delta = b v.$$

Ce résultat étant évident *a priori*, si l'on remarquait qu'à l'infini, aussi bien vers (A) que vers (B),  $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v = c^{te}$  et  $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u = 0$ .

Pour déterminer l'allure du profil de  $S$  au voisinage du point  $F$ , on peut poser  $s-1 = s'$  et considérer  $s'$  comme une quantité variable, mais petite, du même ordre de grandeur que  $v$ <sup>19</sup>); il vient alors :

$$y_1(s') = l + \frac{b\beta_2}{2\pi} \frac{s'^2}{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} + \dots,$$

$$\zeta = il + \frac{b\beta_2}{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} \left[ v s' + \frac{i}{2\pi} (s'^2 - \pi^2 v^2) + \dots \right].$$

Nous voyons que, dans sa partie voisine du point  $F$ , le profil peut être confondu avec un arc de parabole de foyer  $F$  et que la circonférence  $c$  de centre  $F$  et de

<sup>19</sup>)  $v^2, v s', s'^2$  jouent le rôle d'infiniment petits du premier ordre vis-à-vis de  $\bar{l}$ .

rayon

$$r = \frac{\pi b \beta_2}{2\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} v^2$$

a tous ses points, sauf un, intérieurs à la parabole. Par conséquent, il suffira de choisir  $v$  de telle sorte que la région où la pression, dans le liquide, peut devenir négative soit toute entière à l'intérieur de  $c$  (ou que la pression le long de  $c$  soit constamment positive).

### § 3. — Détermination de $v$ .

Considérons, dans le plan  $\lambda$ , la demi-circonférence d'équation

$$(\Gamma) \quad \lambda = \lambda_F + n(\sigma - \lambda_F)e^{i\tau}, \quad (0 \leq \tau \leq \pi),$$

$n$  étant une constante supposée petite.

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda(\Gamma)$  dans la formule (3') et développant par rapport à  $n$ , il vient :

$$\chi = i l + \frac{b \beta_2 \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{2\pi} n^2 e^{2i\tau + \frac{\pi}{2}} + \dots$$

L'image de  $\Gamma$  dans le plan  $\chi$  est donc assimilable à une circonférence de centre  $F$ . Si l'on prend :

$$n = \frac{\pi v}{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}},$$

l'image de  $\Gamma$  ne sera autre que  $c$ . Par suite, pour avoir la vitesse du liquide sur dans le mouvement auxiliaire, il suffit de remplacer, dans (2'),  $\lambda$  par

$$\lambda_F + \frac{\pi(\sigma - \lambda_F)}{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} v e^{i\tau}, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

Il vient, en remarquant que

$$\lambda_F^2 - 2\lambda_F\sigma + \gamma^2 = 2(\sigma - \lambda_F)\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2},$$

$$u_c - i v_c = \frac{i}{b\beta_2} \left( \frac{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2} e^{-i\tau}}{\pi} \frac{1}{v} - \frac{\sigma - \lambda_F}{2\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} + \dots \right).$$

Négligeant les termes suivants, on peut écrire :

$$(10) \quad \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \leq \frac{1}{b\beta_2} \left( \frac{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\pi v} + \frac{\sigma + 1}{2\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} + \frac{1}{2} \right).$$

D'autre part, la pression le long de  $c$ , dans le mouvement réel, est donnée par la formule :

$$\frac{p_c}{\rho} = g(H_0 + a - l) + C_0(t) - \frac{W_c^2}{2},$$

dans laquelle

$$H_0 = \frac{p_0}{\rho g} \quad (p_0: \text{pression atmosphérique, } \rho: \text{densité du liquide}),$$

$$C_0(t) = \left[ \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right]_{DD'} + g\beta_2 h = \left[ \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right]_{EE'} - g\beta_1 h,$$

$$W_c = b\beta_1\beta_2 \left| \frac{dh}{dt} \right| \sqrt{u_c^2 + v_c^2}.$$

Pour que  $p_c$  soit constamment positif, il faut que l'on ait, quel que soit  $t$ ,

$$\frac{W_c^2}{2} < g(H_0 + a - l) + C_0(t).$$

Remarquons que, des deux expressions  $\left[ \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right]_{DD'}$ ,  $\left[ \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right]_{EE'}$ , l'une au moins est positive <sup>20)</sup>; on a donc  $C_0(t) > -g\beta_1|h|$  (en supposant toujours  $\gamma \geq 1$ ) et, pour que  $p_c$  soit positif, il suffit que l'on ait :

$$\frac{W_c^2}{2} < g(H_0 + a - l - \beta_1|h|),$$

quel que soit  $t$ , ou

$$\sqrt{u_c^2 + v_c^2} < \text{minimum de } \frac{\sqrt{2g(H_0 + a - l - \beta_1|h|)}}{b\beta_1\beta_2 \left| \frac{dh}{dt} \right|}.$$

Cette condition sera sûrement remplie si l'on a :

$$(11) \quad \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \leq \frac{\sqrt{2(H_0 + a - l - \beta_1 h_0)[R\beta_1\beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2)h_0]}}{b\beta_1\beta_2 h_0}.$$

En comparant les inégalités (10) et (11), on voit qu'il suffira de prendre :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\pi\nu} + \frac{\sigma + 1}{2\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}} + \frac{1}{2} \\ = \frac{\sqrt{2(H_0 + a - l - \beta_1 h_0)[R\beta_1\beta_2 b - (\beta_1 - \beta_2)h_0]}}{\beta_1 h_0} \end{array} \right.$$

<sup>20)</sup> Rappelons que :

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = -b\beta_1\beta_2 \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

pour être assuré que la pression reste constamment positive dans le liquide.

Si  $h_0$  est très petit, on pourra prendre simplement :

$$(12') \quad v = \frac{h_0}{\pi} \sqrt{\frac{1 + 2\sigma + \gamma^2}{2(H_0 + a - l)\gamma R b}}.$$

## CHAPITRE V.

### ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.

Nous examinerons maintenant quelques cas particuliers où l'on peut résoudre la formule (5) par rapport à  $\sigma$  et, par suite, calculer explicitement  $R$  en fonction de  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{l}{b}$ ,  $\gamma$ .

#### § 1. — Cas où $\gamma = 1$ .

Il est d'abord un cas où tous les calculs se simplifient notablement, c'est celui où les sections des deux chambres sont égales ( $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 1$ ).

En effet, la formule (5) se réduisant à

$$\frac{\pi l}{b} = \log \frac{\sqrt{\sigma + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{\sigma - 1}},$$

on en tire :

$$\sigma = \frac{e^{\frac{4\pi l}{b}} + 6e^{\frac{2\pi l}{b}} + 1}{(e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1)^2}$$

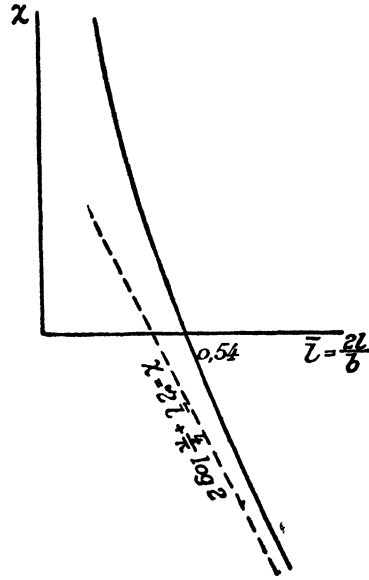
et, portant cette expression dans (9), il vient :

$$\chi = -\frac{4}{\pi} \log \operatorname{sh} \frac{\pi l}{b},$$

d'où

$$(13) \quad R = \frac{4a}{b} - \frac{4}{\pi} \log \operatorname{sh} \frac{\pi l}{b}.$$

La valeur du rapport  $\frac{l}{b}$  pour laquelle  $\chi$  s'annule (Fig. 10) est :



(Fig. 10).

$$\frac{l_0}{b} = \frac{1}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) = 0,27 \dots$$

Rappelons que le mouvement du liquide est oscillatoire simple, de période :

$$T = \pi \sqrt{\frac{Rb}{g}} \text{ } ^{21)}.$$

## § 2. — Cas où $\frac{l}{b}$ est voisin de zéro ou de l'infini.

Si  $\gamma$  est quelconque ( $\beta_1 \geq \beta_2$ ,  $\gamma \leq 1$ ), on a vu que, lorsque  $\bar{l}$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $\sigma$  décroît de  $+\infty$  à  $\gamma$ . On pourra donc envisager deux cas asymptotes dans

<sup>21)</sup> Lorsque  $\gamma = 1$ , il est facile de calculer la valeur de la vitesse, dans le mouvement permanent auxiliaire, en chaque point de l'orifice  $OF$ . On trouve :

$$u = \frac{2}{b} \frac{e^{\frac{2\pi y}{b}} + 1}{\sqrt{\left(e^{\frac{2\pi l}{b}} - e^{\frac{2\pi y}{b}}\right) \left(e^{\frac{2\pi y}{b}} - e^{-\frac{2\pi l}{b}}\right)}}, \quad v = 0, \quad (0 \leq y \leq D).$$

D'ailleurs, dans ce cas,  $Oy$  est un axe de symétrie pour les vitesses, abstraction faite de leur sens.

lesquels  $\bar{l}$  sera 1° voisin de zéro, 2° voisin de l'infini, et que l'on traitera en considérant 1°  $\frac{1}{\sigma}$ , 2°  $\sigma - \gamma$  comme des quantités infiniment petites.

1° Posons d'abord, dans la formule (5),

$$\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \text{ }^{22)}.$$

Il vient, en négligeant les termes en  $\varepsilon$  de degrés supérieurs à 1/2,

$$\pi \bar{l} = 2\sqrt{2\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{8} \bar{l}^2.$$

On voit que, dans ce cas, l'infiniment petit principal n'est autre que  $\bar{l}$ . Portant l'expression de  $\sigma$  dans (9), on obtient

$$\chi = \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{2\gamma\varepsilon} = \frac{4}{\pi} \log \frac{2\sqrt{\beta_1\beta_2}b}{\pi l},$$

d'où :

$$(14) \quad R = \frac{a}{b\beta_1\beta_2} + \frac{4}{\pi} \log \frac{2\sqrt{\beta_1\beta_2}b}{\pi l}.$$

On vérifie que cette formule, quand on y fait  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ , coïncide avec la formule (13) si l'on peut confondre  $\text{sh} \frac{\pi l}{b}$  avec  $\frac{\pi l}{b}$ .

2° Passant à l'autre cas, posons, dans (5),

$$\sigma = \gamma + \varepsilon$$

et ne conservons, au second membre, que la partie principale. Il vient :

$$\pi \bar{l} = \frac{1}{2\beta_2} \log \frac{2(1+\gamma)^2 \gamma^{\beta_1-\beta_2}}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = 2(1+\gamma)^2 \gamma^{\beta_1-\beta_2} e^{-\frac{2\pi l}{b}}.$$

Ici, c'est  $e^{-\frac{2\pi l}{b}}$  qui joue le rôle d'infiniment petit principal; or il n'est pas nécessaire pour cela que  $\frac{l}{b}$  soit très grand. Portant l'expression de  $\sigma$  dans (9), on ob-

<sup>22)</sup> La lettre  $\varepsilon$ , qui nous sert ici provisoirement à désigner une quantité infiniment petite, n'a aucun rapport avec celle qui figure dans des calculs antérieurs.



tient :

$$\chi = -\frac{(\gamma + 1)^2}{2\pi\gamma} \log \frac{2\gamma}{\varepsilon} = -\frac{l}{b\beta_1\beta_2} + \frac{1}{\pi\beta_1\beta_2} \log \frac{1}{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}},$$

d'où :

$$(15) \quad R = \frac{a-l}{b\beta_1\beta_2} + \frac{1}{\pi\beta_1\beta_2} \log \frac{1}{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}.$$

On vérifie que cette formule, quand on y fait  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$  coïncide avec la formule (13) si l'on peut confondre  $\text{sh} \frac{\pi l}{b}$  avec  $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi l}{b}}$ .

### § 3. — Application numérique.

Nous compléterons ce qui précède par une application numérique en prenant les données suivantes :

$$\gamma = 1;$$

$$b = 12^m, \quad l = 0^m,50, \quad a = 8^m;$$

$$h_0 = 1^m, \quad H_0 = 10^m,30, \quad g = 9,80.$$

Comme

$$\frac{\pi l}{b} = \frac{3,14}{2 \times 12} = 0,13,$$

on peut confondre  $\text{sh} \frac{\pi l}{b}$  avec  $\frac{\pi l}{b}$ , d'où

$$\chi = -4 \times 0,318 \times \log 0,13 = 2,60,$$

$$R = 2,65 + 2,60 = 5,25.$$

Ici le terme complémentaire  $\chi$  est du même ordre de grandeur que le terme  $\frac{a}{b\beta_1\beta_2}$ .

On peut calculer directement  $\varepsilon$ . En effet, on a d'abord :

$$\sigma = \frac{8}{\pi^2 l^2} = 2(12 \times 0,318 \times 2)^2 = 117,$$

d'où

$$\varepsilon = 2 \times \frac{118}{116} \times e^{-4,18} = 0,033 \text{ ou } \frac{1}{30}.$$

Par conséquent, l'approximation consiste à substituer au mouvement réel du li-

quide, dans lequel les particules formant les surfaces libres paraissent se déplacer verticalement avec la même vitesse, un mouvement très voisin dans lequel les vitesses horizontales de ces particules sont, près du niveau moyen <sup>23)</sup>, inférieures au 1/30 de leurs vitesses verticales et celles-ci diffèrent entre elles de moins du 1/30 de leur valeur.

L'erreur absolue commise sur  $R$ , résultant du calcul théorique, est inférieure à

$$\frac{4\varepsilon}{\pi} = 4 \times 0,318 \times 0,033 < 0,05.$$

Elle est du même ordre de grandeur que l'erreur normale provenant de la mesure des longueurs  $b$ ,  $l$  et  $a$ .

Nous aurons ensuite :

$$T = 3,14 \sqrt{\frac{5,25 \times 12}{9,80}} = 8^s,$$

$$\Theta = \frac{T}{4} = 2^s.$$

Les vitesses moyenne et maxima de translation des surfaces libres sont respectivement 0,25 et 0,40 m. s.

Calculons maintenant  $v$  à l'aide de la formule (12) :

$$\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2} = \sqrt{236} = 15,3,$$

$$\frac{15,3 \times 0,318}{v} + \frac{118}{2 \times 15,3} + \frac{1}{2} = 2\sqrt{2 \times 17,3 \times 5,25 \times 3},$$

$$\frac{4,86}{v} = 46,7 - 3,8 - 0,5 = 42,4,$$

$$v = 0,115 \text{ }^{24)}.$$

L'épaisseur asymptotique de la cloison correspondante :

$$\Delta = 12^m \times 0,115 = 1^m,40$$

est assez considérable ; toutefois la largeur de l'orifice n'est diminuée que d'une quantité

<sup>23)</sup> Comme  $\frac{\pi h_0}{b} = 0,26$ , remplacer 0,033 par  $0,33 \times e^{-0,26} = 0,045$  au niveau le plus bas et par  $0,33 \times e^{-0,26} = 0,025$  au niveau le plus élevé atteint par le liquide.

<sup>24)</sup> La formule (12') aurait seulement donné :

$$v = \frac{0,318 \times 15,3}{\sqrt{2 \times 17,8 \times 5,25 \times 12}} = 0,10.$$

négligeable, à savoir :

$$r = \frac{3,14 \times 12}{4 \times 15,3} \sqrt{0,115^2} \text{ m} = 0^{\text{m}},008.$$

Si l'on suppose que les dimensions des chambres sont fixées, ainsi que le volume total du liquide,  $a$ ,  $b$  et  $\gamma$  ont des valeurs déterminées. Dans ce cas, si l'on veut diminuer  $v$ , on ne peut agir que sur  $l$ , largeur de l'orifice, ou sur  $h_0$ , dénivellation initiale. On pourra, par exemple, augmenter  $l$  sans toucher à  $h_0$  : mais alors on diminuera  $T$  et, par suite, la précision de la méthode, parce qu'on augmentera la vitesse de translation des surfaces libres ; on sera donc limité d'un côté par  $v$ , de l'autre par  $T$ . Si, au contraire, on diminue  $h_0$ , on diminuera en même temps  $v$  et la vitesse de translation des surfaces libres : c'est donc sur  $h_0$  que l'on devra agir de préférence.

\* \* \*

Pour terminer, nous examinerons deux cas-limites intéressants : celui de  $\infty$  ( $\sigma = \gamma$ ), qui nous permettra de construire une série de tubes en  $U$  pour lesquels on saura résoudre le problème des oscillations, et celui de  $\gamma = 0$  ( $b$  infini), qui nous donnera un schéma, assez grossier d'ailleurs, d'écluse à simple compartiment (où : à simple sas).

#### § 4. — Cas où $l$ est infini. — Équation des lignes de courant.

Si l'on fait  $\sigma = \gamma$ , la formule (4), qui relie le plan  $\lambda$  au plan  $\zeta$ , s'écrit simplement :

$$\lambda = 2\zeta - \gamma,$$

tandis que la formule (3') s'écrit, en faisant préalablement subir aux axes  $xoy$  la translation  $OF$ ,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= i \frac{b}{\pi} \left[ \log(\lambda - \gamma) - \frac{1}{\gamma + 1} \log(\lambda + \gamma) \right]_{\lambda = 2\zeta - \gamma}^{\lambda} \\ &= i \frac{b}{\pi} \left( \log \frac{\gamma - \lambda}{2(\gamma + 1)} - \frac{1}{\gamma + 1} \log \frac{\gamma + \lambda}{-2} \right) \\ &= i \frac{b}{\pi} \left[ \log \frac{\gamma - \zeta}{\gamma + 1} - \frac{1}{\gamma + 1} \log(-\zeta) \right]. \end{aligned} \right.$$

Pour  $\zeta = \zeta_1 = \gamma - 0$ , on a  $\lambda = -b\beta_1 + i \times -\infty$  et, pour  $\zeta = \zeta_2 = \gamma + 0$ , on a  $\lambda = b\beta_2 + i \times -\infty$ . La paroi  $F_1 F_2$  se trouve donc rejetée à l'infini vers le bas. Par suite  $l$  et  $a$  sont infinis, mais la différence  $a - l = a'$  reste finie, de même que

$R$  qui s'exprime en fonction de  $a'$  et de  $\gamma$ . En effet, on peut écrire :

$$R = \frac{a' + l}{b\beta_1\beta_2} + \chi(\sigma, \gamma) = \frac{a'}{b\beta_1\beta_2} + \chi'(\sigma, \gamma),$$

avec :

$$(15_a) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi'(\sigma, \gamma) &= \frac{\gamma + 1}{\pi} \left( \log \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sigma + \gamma} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\gamma} \log \frac{\gamma^2 + \sigma + \gamma\sqrt{1 + 2\sigma + \gamma^2}}{\sigma + \gamma} \right) + \frac{2}{\pi} \log \frac{\sigma + \gamma}{2\gamma}. \end{aligned} \right.$$

En faisant  $\sigma = \gamma$ , on obtient :

$$R = \frac{a'}{b\beta_1\beta_2} + \frac{\gamma + 1}{\pi} \left[ \log \frac{\gamma + 1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \log(\gamma + 1) \right],$$

qui n'est autre que la formule (15).

Posons :

$$\zeta = s e^{i\tau}, \quad (s \geq 0, 0 \leq \tau \leq \pi),$$

de telle sorte que l'on ait :

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \log s, \quad \psi = \frac{\tau}{\pi}.$$

En choisissant comme détermination de  $\log \frac{\gamma - \zeta}{\gamma + 1}$  celle qui s'annule pour  $\zeta = -1$  ( $s = 1, \tau = \pi$ ), la formule (16) devient :

$$z = i \frac{b}{\pi} \left[ \log \frac{\gamma - s e^{i\tau}}{\gamma + 1} - \frac{\log s - i(\pi - \tau)}{\gamma + 1} \right].$$

On a :

$$\log \frac{\gamma - s e^{i\tau}}{\gamma + 1} = \log \frac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma s \cos \tau + s^2}}{\gamma + 1} + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s \sin \tau}{s \cos \tau - \gamma}.$$

D'où finalement :

$$z = \frac{b}{\pi} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s \sin \tau}{\gamma - s \cos \tau} - \frac{\pi - \tau}{\gamma + 1} + i \log \frac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma s \cos \tau + s^2}}{(\gamma + 1)s^{\frac{1}{\gamma+1}}} \right) = \frac{b}{\pi} (X + iY),$$

en posant :

$$X = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s \sin \tau}{\gamma - s \cos \tau} - \frac{\pi - \tau}{\gamma + 1}, \quad Y = \log \frac{\sqrt{\gamma^2 - 2\gamma s \cos \tau + s^2}}{(\gamma + 1)s^{\frac{1}{\gamma+1}}}.$$

Les lignes de courant s'obtiennent en donnant à  $\tau$  une valeur constante, arbitraire entre 0 et  $\pi$ , et faisant varier  $s$  de 0 à  $+\infty$ . On peut également éliminer  $s$

entre  $X$  et  $Y$ : en remarquant que  $Y$  peut s'écrire :

$$Y = \log \frac{s^{\beta_2} \sin \tau}{(\gamma + 1) \sin [X + \beta_1(\pi - \tau)]}$$

et que :

$$s = \gamma \frac{\sin [X + \beta_1(\pi - \tau)]}{\sin [\beta_2(\pi - \tau) - X]}$$

il vient :

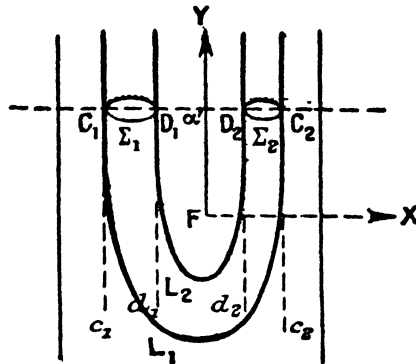
$$(17) \quad Y = \log \frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2} \sin \tau}{\sin^{\beta_1} [X + \beta_1(\pi - \tau)] \sin^{\beta_2} [\beta_2(\pi - \tau) - X]} = \text{fonct. de } X, \tau, \gamma.$$

On peut construire, pour chaque valeur de  $\gamma$ , une famille de courbes définies par l'équation (17) dans laquelle  $\tau$  est un paramètre arbitraire, compris entre 0 et  $\pi$ . Ensuite,  $b$  étant fixé, on obtiendra les lignes de courant en faisant subir à ces courbes une homothétie de centre  $F$  et de rapport  $\frac{b}{\pi}$ .

### § 5. — Application à certaines formes de tubes en $U$ .

Rappelons que ces lignes de courant coïncident avec les trajectoires réelles des particules liquides. On pourra donc, à l'intérieur du domaine précédemment étudié, remplacer une surface de courant par une paroi rigide sans modifier le mouvement réel du liquide.

Faisons, pour simplifier,  $b = \pi$ . Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux lignes de courant correspondant aux valeurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$  du paramètre (Fig. 11). Au-dessus du niveau  $Y = \alpha'$



(Fig. 11).

tel que  $2e^{-\frac{\alpha'}{\beta_1}}$  soit négligeable devant l'unité, les courbes peuvent être confondues avec

leurs asymptotes, qui sont, pour  $L_1$ ,

$$(c_1 C_1) \quad X = -\beta_1(\pi - \tau_1), \quad (c_2 C_2) \quad X = \beta_2(\pi - \tau_1)$$

et, pour  $L_2$ ,

$$(d_1 D_1) \quad X = -\beta_1(\pi - \tau_2), \quad (d_2 D_2) \quad X = \beta_2(\pi - \tau_2).$$

Considérons, dans le plan horizontal  $Y = \alpha'$ , une courbe fermée convexe  $\Sigma_1$  admettant pour plan de symétrie le plan  $XFY$  qu'elle perce aux points  $C_1$  et  $D_1$ . L'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur  $\Sigma_1$  limite un tube en  $U$  dont la trace sur le plan  $XFY$  est formée des deux lignes  $L_1$  et  $L_2$  et dont les branches verticales ont pour sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  (passant par  $C_2$  et  $D_2$ ). Supposons que ce tube en  $U$  contienne un liquide oscillant. Si la cote du niveau moyen,  $Y = \alpha'$ , est plus grande que  $\alpha'$  et la dénivellation initiale,  $h_0$ , plus petite que  $\frac{\alpha' - \alpha'}{\beta_1}$ , le mouvement du liquide sera complètement défini par les formules (1) et suivantes, où l'on fera  $S = \pi$  et

$$R = \frac{1}{\pi \beta_1 \beta_2} \left( \alpha' + \log \frac{1}{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}} \right).$$

Si, en particulier,  $\gamma = 1$ , l'équation (17) devient :

$$Y = \log \frac{\sin \tau}{\sqrt{2(\cos 2X + \cos \tau)}};$$

$FY$  est axe de symétrie.

Plaçons-nous dans ce cas et supposons que  $\Sigma_1$  soit un cercle :  $\Sigma_2$  sera un cercle égal à  $\Sigma_1$ . On peut alors attribuer une signification simple au paramètre  $\tau$ . Considérons un tube très mince correspondant à deux valeurs très voisines,  $\tau$  et  $\tau + \delta\tau$ , du paramètre ; son épaisseur, calculée dans le plan  $XFY$  suivant une ligne  $s = \text{constante}$ , orthogonale aux lignes de courant, est égale à :

$$\sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2} = \sqrt{\frac{1 + 2s \cos \tau + s^2 \delta \tau}{1 - 2s \cos \tau + s^2 \delta \tau}}.$$

Le long d'une branche, elle varie, toujours dans le même sens, de  $\frac{\delta \tau}{2}$  (pour  $s = 0$  ou  $s = +\infty$ ) à  $\cotg \frac{\tau}{2} \frac{\delta \tau}{2}$  (pour  $s = 1$ ) <sup>25</sup>). En désignant par  $\eta$  le rapport de l'épaisseur suivant  $FY$  à l'épaisseur asymptotique des branches, on a :

$$\eta = \cotg \frac{\tau}{2}.$$

<sup>25</sup>) Dans le sens normal au plan  $XFY$ , l'épaisseur du tube est constante.

Si  $\eta > 1$  ( $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ ), la partie inférieure de  $1' U$  présente un renflement; si  $\eta < 1$  ( $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi$ ), elle présente, au contraire, un étranglement; enfin si  $\eta = 1$  ( $\tau = \frac{\pi}{2}$ ), le tube a partout la même épaisseur. En appelant  $H$  la hauteur moyenne du liquide comptée depuis la partie inférieure du tube, on aura :

$$a' = H + \log \sin \frac{\tau}{2},$$

$$R = \frac{4}{\pi} \left[ H + \log \left( 2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

et la période des oscillations sera :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H + \log \left( 2 \sin \frac{\tau}{2} \right)}{g}}.$$

Il est aisé de vérifier que, pour  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , le mouvement est le même que celui d'une chaîne ayant même longueur que la colonne liquide. On peut,  $H$  étant fixé, construire un tube dont les branches aient un écartement donné  $I$  et qui corresponde à une période d'oscillations donnée  $T$ . On doit pour cela rétablir le rapport d'homothétie  $\frac{b}{\pi}$  et l'on est conduit à résoudre l'équation transcendante en  $\tau$

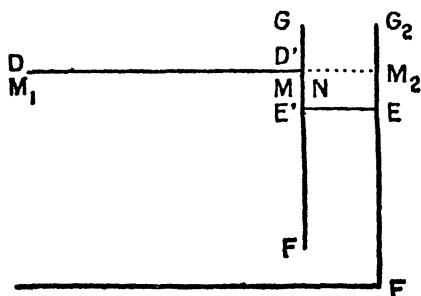
$$(\pi - \tau) \frac{H}{I} + \log \left( 2 \sin \frac{\tau}{2} \right) = \frac{g T^2}{4 \pi^2}.$$

Toutefois, le calcul ne sera valable que si la valeur de  $\tau$  qui en résulte rend l'expression  $\frac{2}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} e^{-2H}$  négligeable devant l'unité.

### § 6. — Cas où $\gamma = 0$ ( $b$ infini).

Revenons au cas général et supposons maintenant le rapport  $\gamma$  très petit: la chambre de gauche est très longue vis-à-vis de celle de droite. L'amplitude des oscillations étant, de part et d'autre de  $GF$ , respectivement  $2\beta_2 h_0$  et  $2\beta_1 h_0$ , elle sera très faible dans la chambre de gauche, quand même elle serait considérable dans celle de droite. Pour étudier ce cas, on peut passer à la limite en faisant  $\gamma = 0$  ( $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ) et  $b$  infini, de telle sorte que la longueur  $b\beta_2$  de la chambre de droite ait une

valeur finie  $b_2$ , tandis que la paroi  $G_1F_1$  se trouve rejetée à l'infini vers la gauche (Fig. 12). La méthode approchée que nous avons suivie dans le cas général consiste



(Fig. 12).

ici à admettre que la surface libre  $DD'$  reste immobile et confondue avec  $M_1M_2$ . Parmi les formules précédemment établies, toutes celles qui conservent un sens lorsqu'on y fait  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $b\beta_2 = b_2$ , conservent leur validité. En particulier la formule (1) s'écrit :

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{g(b_0^2 - h^2)}{Rb_2 - h}$$

et, dans les suivantes, il suffit de faire :

$$k = -\frac{h_0}{Rb_2}, \quad m = \sqrt{\frac{g}{Rb_2}}.$$

On a ensuite :

$$(18) \quad \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 2\sigma, \quad \lambda = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 2\sigma\zeta},$$

$$\chi = i\frac{b_2}{\pi} \left[ \log(\lambda - \sigma) - \frac{2}{\lambda} \right]_{\lambda=\zeta_2}^{\lambda} + b_2 = i\frac{b_2}{\pi} \left( \log \frac{\sigma - \lambda}{\sigma} - \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\sigma} \right),$$

$$(2') \quad u - iv = -\frac{i}{b_2} \frac{\lambda(\lambda - 2\sigma)}{\lambda^2 + 2\lambda - 2\sigma},$$

$$(19) \quad \pi\bar{l} = \log \frac{1 + \sigma + \sqrt{1 + 2\sigma}}{\sigma} + \frac{\sqrt{1 + 2\sigma}}{\sigma}.$$

On peut construire une courbe qui fera connaître les valeurs de  $\sigma$  en fonction de  $\bar{l}$  (Fig. 13).

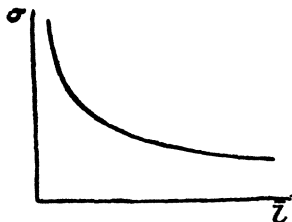
Pour calculer  $R$ , connaissant le niveau moyen  $a$ , on doit d'abord résoudre l'équation en  $\lambda$

$$\log \frac{\sigma - \lambda}{\sigma} - \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\sigma} = \pi\bar{a},$$



qui a deux racines,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ , correspondant respectivement aux points  $M$  et  $N$ . En posant :

$$\pi \bar{a} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\varepsilon}$$

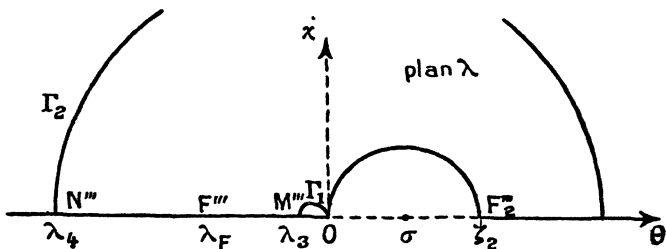


(Fig. 13).

et regardant  $\varepsilon$  comme négligeable vis-à-vis de l'unité (et, de même,  $\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$  dans le cas où  $\sigma$  serait lui-même très petit)<sup>26)</sup>, il vient immédiatement :

$$\lambda_3 = -2\varepsilon, \quad \lambda_4 = -\sigma e^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Considérons alors, dans le plan  $\lambda$  (Fig. 14), les courbes d'équations



(Fig. 14).

$$(\Gamma_1) \quad \lambda = -2\varepsilon \cos \tau e^{i\tau} \left( 1 + \underbrace{i \frac{\varepsilon}{\sigma} \sin \tau e^{i\tau}}_{\text{néglig. en général}} \right), \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi \right),$$

$$(\Gamma_2) \quad \lambda = \sigma e^{\frac{1}{\varepsilon} + i\tau}, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

<sup>26)</sup> La première hypothèse, qui implique que  $\frac{b_2}{a}$  soit très petit, est assez restrictive (grande profondeur de liquide); la seconde entraîne que  $\frac{l}{a}$  soit lui-même assez petit.

Elles ont pour images respectives dans le plan  $z$

$$(M_1 M) \quad z = a(\operatorname{tg} \tau + i), \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi \right),$$

$$(M_2 N) \quad z = b_2 \left( 1 - \frac{\tau}{\pi} \right) + ia, \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

Il s'en suit que l'on a, sur  $M_1 M$ ,

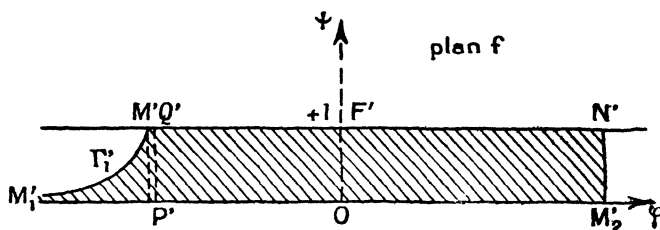
$$\sqrt{u^2 + v^2} = \text{approx.ment } - \frac{2\varepsilon}{b_2} \cos \tau,$$

et, sur  $M_2 N$ ,

$$u - iv = - \frac{i}{b_2}.$$

La vitesse sur  $M_1 M$  est négligeable vis-à-vis de la vitesse sur  $M_2 N$ ; par conséquent, le raisonnement approché qui conduit à la formule (1) est bien valable.

D'autre part,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont pour images dans le plan  $f$  (Fig. 15)



(Fig. 15).

$$(\Gamma_1) \quad f = \frac{1}{\pi} \left[ \log \frac{2\varepsilon^2 \cos^2 \tau}{\sigma} - \frac{2\varepsilon}{\sigma} + i(2\tau - \pi) \right], \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi \right),$$

négl. en gén.

$$(M_2' N') \quad f = \frac{1}{\pi} \left( \log \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{\varepsilon} + i\tau \right), \quad (0 \leq \tau \leq \pi).$$

La valeur de  $R$  est égale à l'aire hachurée. Si l'on substitue à  $\Gamma_1$  le segment :

$$(P' Q') \quad f = \frac{1}{\pi} \left[ \log \frac{2\varepsilon^2}{\sigma} + i(2\tau - \pi) \right], \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi \right),$$

on commet sur  $R$  une erreur très petite, égale à

$$- \frac{4}{\pi^2} j + \frac{2\varepsilon}{\pi\sigma},$$

négl. en gén.

en posant :

$$j = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt = 1,08 \dots,$$

On obtient ainsi :

$$(20) \quad R = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2 \log \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right) = \bar{a} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \log \frac{\pi \bar{a}}{2}}_{\text{négl. en gén.}} + \frac{2}{\pi} \left( \log \sigma - \frac{1}{2\sigma} \right) = \bar{a} + \chi(\bar{l}),$$

en posant :

$$\chi(\bar{l}) = \frac{2}{\pi} \left( \log \sigma - \frac{1}{2\sigma} \right).$$

Si  $\bar{l}$  est petit, on peut tirer de la formule (19)

$$\sigma = \frac{8}{\pi^2 \bar{l}^2},$$

d'où :

$$(20') \quad R = \bar{a} + \frac{2}{\pi} \log \frac{8}{\pi^2 \bar{l}^2}.$$

On peut enfin, pour écarter l'objection de la pression négative autour du point  $F$ , employer le même artifice que dans le cas général, c'est-à-dire remplacer la paroi  $\psi = 1$  par une paroi  $\psi = 1 - v$  convenablement choisie. Les formules (12) et (12') conservent leur validité. Comme  $\frac{h_0}{a}$  doit être petit, il suffira de prendre (12'), d'où

$$v = \frac{h_0}{\pi} \sqrt{\frac{1 + 2\sigma}{2(H_0 + a)Rb_2}}.$$

## DEUXIÈME PARTIE.

### ÉCOULEMENT À TRAVERS UN ORIFICE CIRCULAIRE HORIZONTAL S'OUVRANT PROGRESSIVEMENT.

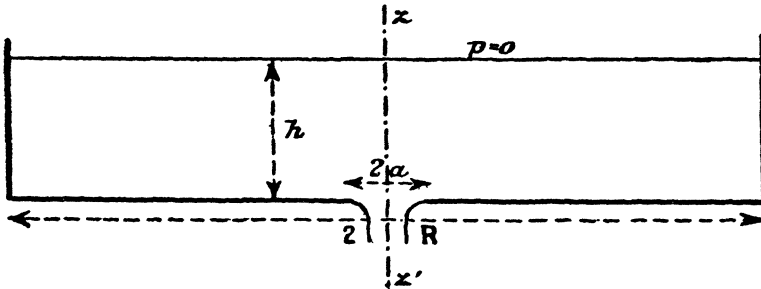
#### CHAPITRE I.

#### SUR L'ÉCOULEMENT PAR JET.

##### § 1. — Expression approchée du potentiel des vitesses.

Soit une cuve cylindrique, de diamètre  $2R$ , dont le fond est horizontal; elle contient, jusqu'à une hauteur  $h$ , un liquide pesant, incompressible et sans viscosité, qui s'écoule par un orifice circulaire, de diamètre  $2a$ , percé au centre du fond (infiniment

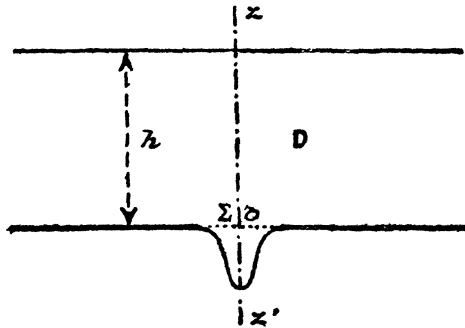
mince) de la cuve (Fig. 16). Nous supposons  $R$  grand vis-à-vis de  $h$  et  $h$  grand



(Fig. 16).

vis-à-vis de  $a$ , de telle sorte que nous pourrions admettre que la paroi latérale de la cuve est rejetée à l'infini et que, au voisinage de la surface libre supérieure, le liquide est sensiblement immobile. Sur la surface libre même règne la pression constante  $p_0$ . Nous pouvons supposer cette constante nulle; si elle ne l'est pas, il suffira de remplacer  $h$  par  $h + \frac{p_0}{\rho g}$ ,  $\rho$  étant la densité du liquide et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Dans tous les cas que nous envisagerons, le mouvement du liquide sera complètement symétrique par rapport à l'axe de la cuve et de l'orifice. Soit  $z'o z$  cet axe, orienté positivement vers le haut,  $o$  étant le centre de l'orifice. Le domaine  $D$  occupé par le liquide à un instant quelconque sera limité d'une part par le plan horizontal  $z = h$ , d'autre part par le plan troué  $z = 0$ ,  $r \geq a$  ( $r$ : distance à  $z'z$ ) et par la surface libre <sup>27)</sup> inférieure qui pourra être au contact soit d'une atmosphère à pression constante, soit d'un autre liquide en mouvement (Fig. 17).



(Fig. 17).

Supposons que le mouvement, permanent ou non, du liquide admette un potentiel

<sup>27)</sup> Nous l'appelons *libre* pour la distinguer de la surface du liquide qui est en contact avec le fond de la cuve.

de vitesse  $\varphi(r, z|t)$ ; la fonction  $\varphi$  de  $r$  et de  $z$ , définie dans  $D$ , y vérifie l'équation de LAPLACE

$$(21) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

De plus  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  en tout point du plan troué  $z = 0$ ,  $r \geq a$  et, sur le plan  $z = h$ , on a, à partir de l'équation fondamentale

$$(22) \quad \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z = 0 \quad (V: \text{vitesse})$$

et en négligeant, comme nous l'avons dit, les vitesses du liquide,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g h = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(23) \quad \varphi(r, h|t) = -g h t + \varphi_0$$

( $\varphi_0$ : constante déterminée avec les conditions initiales).

Si, en outre, on suppose  $\varphi(r, z|t)$  régulière en tout point intérieur au liquide et bornée au voisinage de ses limites singulières (*infini*, entre  $z = 0$  et  $z = h$ , et *bord de l'orifice*), il suffira, pour déterminer complètement cette fonction au degré d'approximation auquel nous nous sommes placés, de connaître les valeurs qu'elle prend sur l'orifice, c'est-à-dire

$$\varphi(r, 0|t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq r \leq a.$$

Dans ce cas, on peut donner une expression de  $\varphi(r, z|t)$ , valable pour  $z \geq 0$ , en se servant du résultat suivant dû à BELTRAMI <sup>28)</sup>:

Soit  $\mu(r')$  ( $0 \leq r' \leq a$ ) la densité électrostatique, variable par couronnes concentriques, d'un disque circulaire infiniment mince  $\Sigma$  occupant la place de l'orifice; le potentiel newtonien de ce disque aura pour expression (*celle-ci étant nulle à l'infini*)

$$(24) \quad V(r, z) = \int \int_{\Sigma} \frac{\mu(r')}{u} d\sigma = 2 \int_0^a \mu(r') r' dr' \int_0^\pi \frac{d\Theta}{u},$$

en posant:

$$u = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \Theta + z^2}.$$

On sait que la fonction  $V(r, z)$  vérifie l'équation (1) et que

$$V'_z(r, +0) \text{ }^{29)} = \begin{cases} -2\pi\mu(r), & \text{pour } 0 \leq r < a, \\ 0, & \text{pour } r > a. \end{cases}$$

<sup>28)</sup> E. BELTRAMI, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. [Opere matematiche, Milan, Ulrico Hoepli, Tomo III (1911), p. 349-382], p. 350-351, form. 1, 1<sub>a</sub>, 1<sub>c</sub>.

<sup>29)</sup> Limite de  $V'_z(r, z)$  quand  $z$  tend vers zéro par valeurs supérieures à zéro.

D'autre part, en un point  $r, z$  suffisamment éloigné du disque, on peut confondre  $u$  avec  $\sqrt{r^2 + z^2}$  et écrire :

$$V(r, z) \sim \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int \int_{\Sigma} \mu(r') d\sigma = \frac{2\pi}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^a \mu(r') r' dr'$$

ou encore, comme  $\mu(r') = -\frac{1}{2\pi} V'_z(r', +0)$ ,

$$V(r, z) \sim \frac{q}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}},$$

en posant

$$(25) \quad q = - \int \int_{\Sigma} V'_z(r', +0) d\sigma = - 2\pi \int_0^a V'_z(r', +0) r' dr'.$$

Si, au lieu de  $\mu(r)$  ( $0 \leq r \leq a$ ), on se donne  $V(r', 0)$  ( $0 \leq r' \leq a$ ), ce qui suffit pareillement à déterminer le potentiel newtonien du disque, tout revient à exprimer  $\mu(r)$  en fonction de  $V(r', 0)$ ; c'est le but de la formule de BELTRAMI :

$$(26) \quad \mu(r) = - \frac{1}{\pi^2 r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s V(r', 0) \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

Remplaçons alors  $V(r', 0)$

1° par  $\varphi(r', 0|t)$ ,

2° par  $ght - \varphi_0$ ,

et soient  $\psi_1(r, z|t)$ ,  $\psi_2(r, z|t)$  les potentiels newtoniens correspondants, déduits de (26) et de (24). Considérons la fonction :

$$\psi(r, z|t) = \psi_1(r, z|t) + \psi_2(r, z|t) - ght + \varphi_0.$$

Elle est régulière à l'extérieur du cercle  $\Sigma$ , vérifie l'équation (21) et  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$  est nul en tout point du plan troué  $z = 0, r \geq a$ ; de plus, sur l'orifice même, on a

$$\psi(r, 0|t) = \varphi(r, 0|t).$$

Enfin, sur le plan  $H(z = h)$ , on peut écrire sensiblement :

$$\psi(r, h|t) = \frac{q_1 + q_2}{2\pi\sqrt{r^2 + h^2}} - ght + \varphi_0,$$

en posant :

$$q_1 = - 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r', +0|t) r' dr',$$

$$q_2 = - 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \psi_2(r', +0|t) r' dr' = 4a(ght - \varphi_0),$$

d'où :

$$\psi(r, h|t) = \frac{q_1}{2\pi\sqrt{r^2 + h^2}} + (g h t - \psi_0) \left( \frac{2a}{\pi\sqrt{r^2 + h^2}} - 1 \right).$$

Si l'on fait croître indéfiniment  $h$ , le premier terme tend, en général, vers zéro <sup>30)</sup>, le second tend vers  $-g h t + \varphi_0$ ; par suite, pour  $h$  suffisamment grand (vis-à-vis de  $a$ , s'entend), on aura sensiblement :

$$\psi(r, h|t) = -g h t + \varphi_0.$$

On voit donc que, de toutes les conditions auxquelles doit satisfaire, dans le demi-espace supérieur, la fonction  $\varphi(r, z|t)$ , une seule, celle qui concerne le plan  $H$ , n'est vérifiée qu'approximativement par la fonction  $\psi(r, z|t)$ , mais avec une approximation d'autant meilleure que  $h$  est plus grand. Comme, d'autre part, nous n'aurons à considérer, dans ce qui suit, que la région voisine de l'orifice, nous pouvons prendre, pour  $z \geq 0$ ,

$$\varphi(r, z|t) = \psi(r, z|t).$$

## § 2. — Condition de l'écoulement par jet.

Cela posé,  $\varphi'_z(r, 0|t)$  est, pour  $0 \leq r \leq a$ , une certaine fonction de  $r$  et de  $t$  qui représente la vitesse verticale du liquide en chaque point de l'orifice. Nous dirons, *par définition*, qu'il y a, à l'instant  $t$ , *écoulement par jet*, si cette vitesse s'annule sur le bord  $L$  de l'orifice, c'est-à-dire si

$$\varphi'_z(a, 0|t) = 0.$$

S'il y a écoulement par jet à partir d'un instant  $t_0$ , on pourra définir, à chaque instant postérieur  $t$ , une surface de jet constituée par l'ensemble des molécules qui étaient encore, à l'instant  $t_0$ , en contact avec le fond de la cuve et n'y sont plus à l'instant  $t$ . Cette surface, variable ou non avec  $t$ , se raccorde constamment, le long de  $L$ , avec le fond de la cuve.

Nous allons établir une relation fondamentale à laquelle doit satisfaire la fonction  $\varphi(r, 0|t)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) dans le cas de l'écoulement par jet. A cet effet, nous commencerons par exprimer  $\varphi'_z(r, 0|t)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) au moyen de  $\varphi(r', 0|t)$  ( $0 \leq r' \leq a$ ).

On a immédiatement :

$$\varphi'_z(r, 0|t) = \psi'_z(r, +0|t) = \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, +0|t) + \frac{\partial}{\partial z} \psi_2(r, +0|t)$$

<sup>30)</sup> Si  $\varphi(r', 0|t)$  est indépendant de  $h$ , ou bien s'il dépend de  $h$  de telle sorte que  $\frac{q_1}{h}$  tende vers zéro; d'ailleurs il suffit, pour que  $\psi(r, h|t)$  tende vers  $-g h t + \varphi_0$ , que  $\frac{q_1}{h^2}$  tende vers zéro.

et, par l'intermédiaire de (26),

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, +0|t) = \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \varphi(r', 0|t) \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_2(r, +0|t) = -\frac{2}{\pi} \frac{g h t - \varphi_0}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Pour calculer  $\frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, +0|t)$ , nous regarderons  $t$  comme un paramètre et supposerons (provisoirement) que  $\varphi(r, 0|t)$  admette des dérivées première et seconde, par rapport à  $r$ , finies dans tout l'intervalle  $0 \leq r \leq a$  <sup>31</sup>).

Posons alors :

$$(27) \quad F(s) = \int_0^s \varphi(r', 0|t) \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

Nous devons calculer :

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, +0|t) = \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^a F'(s) \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}.$$

On a, en intégrant par parties,

$$\int_r^a F'(s) \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = F'(a) \sqrt{a^2 - r^2} - \int_r^a F''(s) \sqrt{s^2 - r^2} ds,$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, +0|t) = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{F'(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{F''(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right]$$

et par suite :

$$(28) \quad \varphi'_z(r, 0|t) = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{F'(a) + g h t - \varphi_0}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{F''(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right].$$

D'après nos hypothèses sur  $\varphi(r, 0|t)$  et ses dérivées, l'intégrale qui figure au second membre a un sens quel que soit  $r$  et, en particulier, pour  $r = a$  (cette dernière condition est strictement suffisante pour ce que nous voulons établir).

Pour le voir, il suffit de calculer  $F'(s)$  et  $F''(s)$ , à partir de (27), en employant le même procédé que ci-dessus, c'est-à-dire en dérivant après avoir intégré par

<sup>31</sup>)  $\varphi'_r(r, 0|t)$  représente la vitesse horizontale des molécules qui traversent l'orifice et l'on a nécessairement, en vertu de la symétrie complète par rapport à  $z'z$ ,  $\varphi'_r(0, 0|t) = 0$  quel que soit  $t$ .



parties; il vient :

$$F(s) = s\varphi(0, 0|t) + \int_0^s \varphi'_{r'}(r', 0|t) \sqrt{s^2 - r'^2} dr',$$

$$\begin{aligned} F'(s) &= \varphi(0, 0|t) + s \int_0^s \varphi'_{r'}(r', 0|t) \frac{dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} \\ &= \varphi(0, 0|t) + s \left[ \frac{\pi}{2} \varphi'_s(s, 0|t) - \int_0^s \varphi''_{r's}(r', 0|t) \arcsin \frac{r'}{s} dr' \right], \end{aligned}$$

$$F''(s) = \int_0^s [\varphi'_{r'}(r', 0|t) + r' \varphi''_{r's}(r', 0|t)] \frac{dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

On voit sur la formule (28) que  $\varphi'_r(r, 0|t)$  est, en général, infini par  $r = a$  <sup>32)</sup>. Pour qu'il y ait écoulement par jet, c'est-à-dire pour que  $\varphi'_r(a, 0|t) = 0$ , il est nécessaire que l'on ait :

$$F'(a) + ght - \varphi_0 = 0,$$

ou, en remplaçant  $F'(a)$  par sa valeur,

$$(29) \quad \varphi(0, 0|t) + a \int_0^a \varphi'_{r'}(r', 0|t) \frac{dr'}{\sqrt{a^2 - r'^2}} + ght - \varphi_0 = 0.$$

Cette condition à laquelle doit satisfaire la fonction  $\varphi(r, 0|t)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) est suffisante si, en outre, l'intégrale  $\int_r^a \frac{F''(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$  s'annule pour  $r = a$  [comme c'est le cas, notamment, si  $\varphi'_r(r, 0|t)$  et  $r \varphi''_{r's}(r, 0|t)$  sont finis dans tout l'intervalle  $0 \leq r \leq a$ ].

### § 3. — Autre interprétation de la relation (29).

Nous avons supposé implicitement jusqu'ici que le rayon  $a$  de l'orifice était invariable, mais il est essentiel de remarquer que toutes les considérations qui précèdent subsistent si  $a$  varie avec le temps, comme nous le supposons désormais. Partant de là, on peut donner à la relation (29) une interprétation légèrement différente : le débit du liquide à travers  $\Sigma$  est représenté par la fonction (positive puisqu'il y a écoulement)

$$q(t) = - 2\pi \int_0^a \varphi'_r(r', 0|t) r' dr' = q_1 + q_2.$$

<sup>32)</sup> Le liquide aurait, dans ce cas, tendance à se répandre sur la face inférieure du fond de la cuve.

Nous avons déjà calculé  $q_2$  :

$$q_2 = 4a(ght - \varphi_0).$$

On a de même, en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial \chi} \psi_1(r', + 0|t)$  par  $\frac{2}{\pi r'} \frac{d}{dr'} \int_{r'}^a F'(s) \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r'^2}}$ ,

$$q_1 = 4F(a);$$

par suite, en mettant en évidence les variables  $a$  et  $t$ , nous pouvons écrire :

$$(30) \quad q(a|t) = 4[F(a|t) + a(ght - \varphi_0)].$$

On voit que la relation (29) exprime simplement que :

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0,$$

c'est-à-dire que le bord de l'orifice n'apporte aucune contribution au débit. Cette interprétation se ramène immédiatement à la précédente : on a, en effet,

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 2\pi a \varphi'_\chi(a, 0|t).$$

## CHAPITRE II.

### CAS D'UN ORIFICE S'OUVRANT PROGRESSIVEMENT.

#### § 1. — Expression de $\varphi(r, \chi|a)$ à l'aide de $\chi(r'|a')$ .

Dans toute la suite de ce travail, nous supposons que l'orifice  $\Sigma$  s'ouvre progressivement à partir de zéro, sans cesser d'être circulaire <sup>33</sup>). En même temps, le liquide s'écoule à partir du repos, sous l'action de la pesanteur et des conditions aux limites. Le rayon  $a$  est fonction du temps ou, si l'on veut,  $t$  est fonction de  $a$ . Il est préférable, comme nous le verrons, d'adopter cette dernière manière de voir et de prendre  $a$  pour variable indépendante à la place de  $t$ . C'est ainsi que nous supposons la loi d'ouverture donnée sous la forme

$$t = \int_0^a \omega(a') da',$$

<sup>33</sup>) A la manière d'un objectif photographique Nous admettons que la réalisation mécanique de l'ouverture n'introduit aucune action perturbatrice (telle que frottements, etc.).

$\omega(a')$  étant une fonction finie et positive de  $a'$  dans un certain intervalle  $0 \leq a' < c$ , tel que  $c$  soit assez petit vis-à-vis de  $h$  pour que le calcul approché exposé plus haut soit valable pour  $a \leq c$ .

Remarquons que la fonction  $\varphi(r, z|a)$ , représentant le potentiel des vitesses à l'instant où le rayon de l'orifice est  $a$  <sup>34</sup>, est entièrement déterminée au point  $r, z$  si l'on connaît, en ce point, sa dérivée par rapport au temps,  $\varphi'_t(r, z|a')$ , pour toutes les valeurs de  $a'$  comprises entre 0 et  $a$ ; on a, en effet,

$$\varphi(r, z|a) = \int_0^a \varphi'_t(r, z|a') \omega(a') da'.$$

Considérons alors la fonction  $\varphi'_t(r, z|a')$ : elle est définie dans le domaine  $D'$  occupé par le liquide à l'instant  $a'$  et y vérifie l'équation (21); de plus, sa dérivée  $\frac{\partial \varphi'_t}{\partial z}$  est nulle en tout point du plan troué  $z = 0, r \geq a'$  et, sur le plan  $z = h$ , on a d'après (22)

$$\varphi'_t(r, h|a') = -gh.$$

Supposons  $\varphi'_t(r, z|a')$  régulière en tout point intérieur à  $D'$  et bornée au voisinage des limites singulières de  $D'$  (*infini*, entre  $z = 0$  et  $z = h$ , et *bord de l'orifice*). Pour achever de déterminer cette fonction, il suffira, comme nous l'avons vu pour  $\varphi(r, z|t)$ , de connaître les valeurs qu'elle prend sur l'orifice, c'est-à-dire

$$(31) \quad \varphi'_t(r, 0|a') = \chi(r|a'), \quad \text{pour} \quad 0 \leq r \leq a'.$$

De même que pour  $\varphi(r, z|t)$ , on peut obtenir, à partir des formules (24) et (26), une expression approchée de  $\varphi'_t(r, z|a')$  en fonction de  $\chi(r'|a')$  ( $0 \leq r' \leq a'$ ), valable pour  $0 \leq z \leq h$ : il suffit de remplacer  $V(r', 0)$

1° par  $\chi(r'|a')$ ,

2° par  $gh$ .

En désignant par  $\psi'_1(r, z|a')$ ,  $\psi'_2(r, z|a')$  les potentiels newtoniens correspondants, on aura, pour  $0 \leq z \leq h$ ,

$$\varphi'_t(r, z|a') = \psi'_1(r, z|a') + \psi'_2(r, z|a') - gh.$$

En particulier, on peut calculer  $\varphi'_t(r, 0|a')$  pour  $r > a'$  à l'aide d'une formule analogue à la formule (26), due elle aussi à BELTRAMI <sup>35</sup>, et qui donne l'expression de  $V(r, 0)(r > a')$  en fonction de  $V(r', 0)$  ( $0 \leq r' \leq a'$ ); cette formule est la sui-

<sup>34</sup>) Nous dirons pour abrégé: *l'instant a*.

<sup>35</sup>) E. BELTRAMI, loco citato au <sup>28</sup>), p. 362, form. 7c.

vante :

$$(32) \quad V(r, o) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s V(r', o) \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

On obtient les valeurs de  $\psi'_1(r, o|a')$  et de  $\psi'_2(r, o|a')$  pour  $r > a'$  en remplaçant, dans (12),  $V(r', o)$  successivement par  $\chi(r'|a')$  et par  $gh$ , d'où

$$\varphi'_i(r, o|a') = \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s [\chi(r'|a') + gh] \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} - gh, \quad \text{pour } r > a'.$$

Considérons le premier terme : on a, en intégrant par parties <sup>35</sup>,

$$\int_0^s [\chi(r'|a') + gh] \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} = \int_0^s \chi'_{r'}(r'|a') \sqrt{s^2 - r'^2} dr' + s[\chi(o|a') + gh],$$

d'où finalement, pour  $r > a'$ ,

$$(33) \quad \varphi'_i(r, o|a') = f(r|a') + \frac{2}{\pi} [\chi(o|a') + gh] \arcsin \frac{a'}{r} - gh,$$

en posant

$$f(r|a') = \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \frac{s ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \int_0^s \chi'_{r'}(r'|a') \frac{dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

Vérifions que l'expression (33) se raccorde, pour  $r = a'$ , avec  $\chi(r|a')$ , autrement dit que l'on a :

$$(34) \quad f(a'|a') + \chi(o|a') = \chi(a'|a').$$

En effet, on peut écrire, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \frac{s ds}{\sqrt{a'^2 - s^2}} \int_0^s \chi'_{r'}(r'|a') \frac{dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \chi'_{r'}(r'|a') dr' \int_{r'}^{a'} \frac{s ds}{\sqrt{(a'^2 - s^2)(s^2 - r'^2)}} \\ &= \int_0^{a'} \chi'_{r'}(r'|a') dr' = \chi(a'|a') - \chi(o|a'). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer  $\varphi(r, o|a)$  ( $o \leq r \leq a$ ) en fonction de  $\chi(r'|a')$  ( $o \leq r' \leq a' \leq a$ ), car nous connaissons  $\varphi'_i(r, o|a')$  pour toutes les valeurs de  $a'$  comprises entre  $o$  et  $a$ . Cet intervalle se décompose en deux : pour  $o \leq a' \leq r$ ,  $\varphi'_i(r, o|a')$  est donnée par la formule (33) et, pour  $r \leq a' \leq a$ , par la formule (31).

<sup>35</sup>) Nous supposons la fonction donnée  $\chi(r|a')$  et sa dérivée  $\chi'_{r'}(r'|a')$  finies et continues par rapport à  $r$  et bornées par rapport à  $a'$  pour  $o \leq r \leq a' < c$  et, de plus, en vertu de la note <sup>31</sup>)  $\chi'_{r'}(o, a') \equiv 0$ .

Il vient, en intégrant dans chaque intervalle partiel :

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \varphi(r, 0|a) &= \int_0^r f(r|a') \omega(a') da' + \frac{2}{\pi} \int_0^r [\chi(0|a') + gh] \omega(a') \arcsin \frac{a'}{r} da' \\ &\quad - gh \int_0^r \omega(a') da' + \int_r^a \chi(r|a') \omega(a') da'. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement ainsi défini correspond au cas où  $\varphi'_r(r, \chi|a')$  est régulière dans l'espace  $\Delta$  compris entre les plans  $\chi = 0$ ,  $\chi = h$ , et bornée au voisinage des limites singulières de  $\Delta$ ; par suite, il en est de même pour  $\varphi(r, \chi|a)$ . De plus  $\frac{q_1}{h^2}$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{h}$  <sup>37)</sup> et  $\varphi_0 = \varphi(r, h|0) = 0$ . Il en résulte que le potentiel des vitesses  $\varphi(r, \chi|a)$  est, par l'intermédiaire de  $\varphi(r, 0|a)$  ( $0 \leq r \leq a$ ), complètement déterminé dans  $\Delta$ , à chaque instant  $a$ , à l'aide de la fonction  $\chi(r'|a')$  ( $0 \leq r' \leq a' \leq a$ ).

## § 2. — Propriétés de la fonction $\varphi(r, 0|a)$ .

La fonction  $\varphi(r, 0|a)$ , définie par la formule (35), jouit de deux propriétés intéressantes :

THÉORÈME I. — Pour que  $\varphi'_r(0, 0|a)$  soit nul quel que soit  $a$ , il faut et il suffit :

1° que  $\chi'_{r'}(0|a')$  soit nul quel que soit  $a'$  ;

2° que  $\omega(0) = 0$  ou que  $\chi(0|0) = -gh$ .

On a, en effet, en dérivant  $\varphi(r, 0|a)$  par rapport à  $r$ , tenant compte de (34) et simplifiant :

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \varphi'_r(r, 0|a) &= \int_0^r f'_r(r|a') \omega(a') da' - \frac{2}{\pi} \int_0^r [\chi(0|a') + gh] \omega(a') \frac{a' da'}{r \sqrt{r^2 - a'^2}} \\ &\quad + \int_a^r \chi'_{r'}(r|a') \omega(a') da'. \end{aligned} \right.$$

Pour calculer  $f'_r(r|a')$ , transformons d'abord  $f(r|a')$  en intervertissant l'ordre des intégrations et effectuant la première ; il vient :

$$\begin{aligned} f(r|a') &= \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \chi'_{r'}(r'|a') dr' \int_{r'}^{a'} \frac{s ds}{\sqrt{(r^2 - s^2)(s^2 - r'^2)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{a'} \chi'_{r'}(r'|a') \arccos \frac{r^2 + r'^2 - 2a'^2}{r^2 - r'^2} dr', \end{aligned}$$

<sup>37)</sup> A condition que  $\chi_{r'}(r'|a')$  tende vers zéro.

d'où :

$$(37) \quad f'_r(r|a') = - \frac{2r}{\pi \sqrt{r^2 - a'^2}} \int_0^{a'} \chi'_{r'}(r'|a') \frac{\sqrt{a'^2 - r'^2}}{r^2 - r'^2} dr'.$$

Portons cette expression dans (36) et posons dans les deux premières intégrales

$$a' = r \sin \Theta, \quad r' = a' \sin \Theta' = r \sin \Theta \sin \Theta';$$

il vient :

$$\begin{aligned} \varphi'_r(r, 0|a) = & - \frac{2r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(r \sin \Theta) d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi'_{r'}(r \sin \Theta \sin \Theta' | r \sin \Theta) \frac{\sin^2 \Theta \cos^2 \Theta' d\Theta'}{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Theta'} \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\chi(0|r \sin \Theta) + gh] \omega(r \sin \Theta) \sin \Theta d\Theta + \int_r^a \chi'_r(r|a') \omega(a') da'. \end{aligned}$$

Si maintenant nous faisons  $r = 0$ , le coefficient de  $-\frac{2r}{\pi}$  dans le premier terme devient :

$$\omega(0) \chi'_{r'}(0|0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \Theta \cos^2 \Theta' d\Theta'}{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Theta'} = \omega(0) \chi'_{r'}(0|0) \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Ce premier terme est donc nul ; il reste simplement

$$\varphi'_r(0, 0|a) = - \frac{2}{\pi} [\chi(0|0) + gh] \omega(0) + \int_0^a \chi'_r(0|a') \omega(a') da'.$$

On voit que, pour que  $\varphi'_r(0, 0|a)$  soit nul quel que soit  $a$ , il faut et il suffit :

1° que  $[\chi(0|0) + gh] \omega(0) = 0$  ;

2° que  $\chi'_r(0|a') = 0$  quel que soit  $a'$ .

C. Q. F. D.

$\chi(0|0) = -gh$  signifie, d'après (22), que la pression au point  $\mathcal{O}$  du liquide, immédiatement après l'instant initial, est égale à  $gh$ , pression hydrostatique qui régnait en ce point avant l'ouverture de l'orifice ; c'est un cas très particulier que nous retrouverons, du reste, plus loin. On devra donc, en général, supposer, pour que le mouvement soit régulier au point  $\mathcal{O}$ ,  $\omega(0) = 0$ , c'est-à-dire que la vitesse d'ouverture de l'orifice est infinie à l'instant initial.

THÉORÈME II. — *La fonction  $\varphi(r, 0|a)$  vérifie, à chaque instant  $a$ , la condition (29) de l'écoulement par jet.*

Nous devons calculer l'expression

$$(38) \quad \varphi(0, 0|a) + a \int_0^a \varphi'_r(r, 0|a) \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + gh \int_0^a \omega(a') da'$$

et montrer qu'elle est nulle quel que soit  $a$ .

En effet, on a d'abord, d'après la définition même de la fonction  $\chi(r|a')$ ,

$$\varphi(0, 0|a) = \int_0^a \chi(0|a') \omega(a') da'.$$

Considérons ensuite  $\int_0^a \varphi'_r(r, 0|a) \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$  : on peut écrire, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^r f'_r(r|a') \omega(a') da' &= \int_0^a \omega(a') da' \int_{a'}^a f'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^r [\chi(0|a') + gh] \omega(a') \frac{a' da'}{r \sqrt{r^2 - a'^2}} \\ &= - \frac{2}{\pi} \int_0^a [\chi(0|a') + gh] \omega(a') da' \int_{a'}^a \frac{dr}{r \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - a'^2)}} \\ &= - \frac{1}{a} \int_0^a [\chi(0|a') + gh] \omega(a') da', \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^r \chi'_r(r|a') \omega(a') da' = \int_0^a \omega(a') da' \int_0^{a'} \chi'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Il s'en suit que l'expression (38) peut se mettre sous la forme

$$a \int_0^a G(a, a') \omega(a') da',$$

en posant

$$G(a, a') = \int_{a'}^a f'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_0^{a'} \chi'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Nous allons montrer que  $G(a, a')$  est nul quels que soient  $a$  et  $a'$ . On a, en effet, d'après (37),

$$\int_{a'}^a f'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \frac{2}{\pi} \int_{a'}^a \frac{r dr}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - a'^2)}} \int_0^{a'} \chi'_r(r|a') \frac{\sqrt{a'^2 - r'^2}}{r^2 - r'^2} dr'$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$\int_{a'}^a f'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \frac{2}{\pi} \int_0^{a'} \chi'_r(r|a') \sqrt{a'^2 - r'^2} dr' \int_{a'}^a \frac{r dr}{(r^2 - r'^2) \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - a'^2)}}.$$

Or il vient, par le changement de variable  $r^2 - r'^2 = \frac{1}{t}$ ,

$$\int_{a'}^a \frac{r dr}{(r^2 - r'^2) \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - a'^2)}} = \frac{\pi}{2 \sqrt{(a^2 - r'^2)(a'^2 - r'^2)}}.$$

D'où enfin :

$$\int_{a'}^a f'_r(r|a') \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \int_0^{a'} \chi'_r(r|a') \frac{dr'}{\sqrt{a'^2 - r'^2}}.$$

C. Q. F. D.

Pour qu'il y ait, à l'instant  $a$ , écoulement par jet, il faut en outre que  $\int_r^a \frac{F''(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$  s'annule pour  $r = a$  <sup>38)</sup>, ce qui aura lieu notamment si, en plus des hypothèses déjà faites,  $\omega'(a')$ ,  $\chi_{a'}(r|a')$ ,  $\chi_{r^2}(r|a')$ ,  $\chi_{r'a'}(r|a')$  sont finies dans les intervalles  $0 \leq a' < c$ ,  $0 \leq r \leq a'$ . Ces conditions étant supposées remplies, l'écoulement du liquide s'effectuera par jet continu <sup>39)</sup>, de l'instant initial à l'instant  $c$ . Il est intéressant de remarquer que, bien que  $\varphi'_z(a, 0|a)$  soit nul quel que soit  $a$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi'_z(a, 0|a)$  <sup>40)</sup> ou  $\frac{\partial}{\partial \chi} \varphi'_z(a, 0|a)$  est, en général, infini; en effet, la relation qui équivaut à la relation (29) pour la fonction  $\chi(r|a)$  s'écrit :

$$(29') \quad \chi(0|a) + a \int_0^a \chi_{r'}(r|a) \frac{dr'}{\sqrt{a^2 - r'^2}} + gh = 0$$

et n'est vérifiée que pour des valeurs exceptionnelles de  $a$ . L'infinitude de la dérivée par rapport au temps n'a pas d'influence parce que le bord de l'orifice se dérobe. Nous reviendrons sur ce résultat un peu plus loin.

On peut aussi remarquer que, dans le mouvement considéré, la pression  $p$ , déduite de la formule (22), est finie en tout point de l'orifice, où elle est donnée par :

$$(39) \quad \frac{p(r|a)}{\rho} = -\chi(r|a) - \frac{V^2}{2}, \quad (0 \leq r \leq a. - V: \text{vitesse}).$$

### CHAPITRE III.

## SUR LE DÉBUT DE L'ÉCOULEMENT DANS UNE ATMOSPHÈRE À PRESSION CONSTANTE.

### § 1. — Interprétation du cas où $\chi(r|a') = c^{te}$ .

Le cas le plus simple est celui où  $\chi(r|a')$  est une constante. Sous certaines conditions on peut donner au mouvement ainsi défini dans l'intervalle  $(0, c)$  une signifi-

<sup>38)</sup> Voir Chap. I, § 2.

<sup>39)</sup> Ou, du moins, ce sera le seul mode d'écoulement correspondant au cas où  $\varphi'_z(r, \chi|a')$  est régulière à l'intérieur de  $\Delta$  et bornée au voisinage des limites singulières de  $\Delta$ .

<sup>40)</sup> Dérivée de  $\varphi'_z(r, 0|t)$  par rapport à  $t$ , dans laquelle on a fait  $r = a$  et remplacé  $t$  en fonction de  $a$ .



cation physique intéressante. Posons, en effet,

$$\chi(r|a') = -\frac{\varpi}{\rho} = -gh + \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right)^{41),}$$

$\varpi$  étant une constante positive provisoirement arbitraire; la formule (39) se réduit à

$$\frac{p(r|a)}{\rho} = gh - \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) - \frac{V^2}{2}.$$

Or le liquide part du repos; dans les premiers instants sa vitesse, même à l'orifice, est très faible. Tant qu'elle demeurera assez petite pour que  $\frac{V^2}{2}$  puisse être négligé devant  $gh - \frac{\varpi}{\rho}$ , on aura simplement, sur l'orifice,

$$p(r|a) = \varpi.$$

D'autre part, pendant cet intervalle de temps  $(0, c)$ , la surface libre inférieure ne s'écartera pas sensiblement du plan de l'orifice et l'on pourra admettre que c'est en réalité sur cette surface que la pression demeure constante.

Supposons la loi d'ouverture donnée sous la forme

$$t = \Theta w\left(\frac{a}{c}\right),$$

$\Theta$  étant un coefficient constant ayant les dimensions d'un temps et  $w(x)$  une fonction numérique de  $x$ , continue (ainsi que sa dérivée) et croissante dans l'intervalle  $(0, 1)$  [ $w''(x)$  bornée] et, de plus, telle que

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w(1) = 1.$$

La formule (35) donne, en posant  $a' = r \cos \alpha$  et intégrant par parties,

$$\varphi(r, 0|t) = -\frac{2\Theta}{\pi} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} w\left(\frac{r}{c} \cos \alpha\right) d\alpha - \frac{\varpi}{\rho} t.$$

On en déduit :

$$(40) \quad \varphi'_r(r, 0) = -\frac{2\Theta}{\pi c} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} w'\left(\frac{r}{c} \cos \alpha\right) \cos \alpha d\alpha, \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a,$$

<sup>41)</sup> Il est essentiel, pour la validité du raisonnement, d'isoler la constante additive  $-gh$  [valeur de  $\varphi'_r(r, \chi|a')$  à l'infini].

et le débit est donné par la formule (30) :

$$q(a) = \frac{4\Theta}{c} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_0^a w' \left( \frac{a'}{c} \right) a' da'.$$

Si  $\frac{\varpi}{\rho} = gh$ , c'est-à-dire si la pression à l'orifice est exactement égale à la pression hydrostatique, le liquide reste (théoriquement) en repos. Pour que le liquide s'écoule hors de la cuve, il faut que  $\frac{\varpi}{\rho}$  soit inférieur à  $gh$ ;  $\varphi'_r(r, 0)$  est alors négatif pour  $0 < r \leq a$  et le débit est positif. Si  $\frac{\varpi}{\rho}$  était supérieur à  $gh$ , le liquide serait refoulé à l'intérieur de la cuve et le débit serait négatif.

D'autre part, nous voyons sur (40) que la vitesse à l'orifice est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{\Theta}{c} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right).$$

Il s'en suit que l'on devra pouvoir négliger  $\frac{\Theta^2}{c^2} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right)^2$  devant  $gh - \frac{\varpi}{\rho}$  ou, ce qui revient au même,

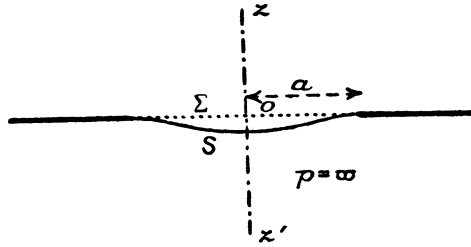
$$gh - \frac{\varpi}{\rho} \quad \text{devant} \quad \left( \frac{c}{\Theta} \right)^2.$$

Imaginons que le liquide s'écoule dans le vide, autrement dit que  $\varpi = 0$ . Dans ce cas, la méthode que nous avons exposée ne nous fera connaître son mouvement avec une approximation satisfaisante que tant que la vitesse moyenne d'ouverture de l'orifice,  $\frac{c}{\Theta}$ , (initialement infinie) sera assez grande vis-à-vis de  $\sqrt{gh}$ . Au contraire, si le liquide, au lieu de s'écouler dans le vide, s'écoule dans une atmosphère à pression constante  $\varpi$ , légèrement inférieure à  $\rho gh$ , nous pourrions prendre pour  $\frac{c}{\Theta}$  une valeur beaucoup plus petite :  $c$  restant le même, nous obtiendrions le même mouvement que dans le premier cas, mais *au ralenti*.

## § 2. — Équation de la surface libre.

Ainsi que nous l'avons démontré dans le cas général, l'écoulement a lieu, dès le début, par jet. Par conséquent, la surface libre inférieure se raccorde constamment, le long du bord de l'orifice  $\Sigma$ , avec le fond de la cuve et, pourvu qu'elle ne s'écarte pas sensiblement du plan de  $\Sigma$ , on aura le droit de substituer, comme nous l'avons fait,

dans la résolution approchée du problème harmonique le domaine  $\Delta$  au domaine  $D$  réellement occupé par le liquide <sup>42)</sup> (Fig. 18).



(Fig. 18).

Or, au degré d'approximation auquel nous nous plaçons, on peut prendre pour équation de la surface libre à l'instant  $a$

$$(S) \quad z = \frac{\Theta}{c} \int_r^{a'} \varphi'_z(r, 0|a') w' \left( \frac{a'}{c} \right) da'.$$

La formule (28) donne immédiatement :

$$\varphi'_z(r, 0|a') = \frac{2}{\pi} \int_r^{a'} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \int_0^s \frac{\partial}{\partial r'} [r' \varphi'_{r'}(r', 0)] \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}}$$

et l'on a, d'après (40), en posant  $r' \cos \alpha = u$ ,

$$\begin{aligned} r' \varphi'_{r'}(r', 0) &= -\frac{2\Theta}{\pi c} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_0^{r'} w' \left( \frac{u}{c} \right) \frac{u du}{\sqrt{r'^2 - u^2}} \\ &= -\frac{2\Theta}{\pi c^2} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_0^{r'} w'' \left( \frac{u}{c} \right) \sqrt{r'^2 - u^2} du, \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi'_z(r, 0|a') = -\frac{4\Theta}{\pi^2 c^2} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_r^{a'} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \int_0^s \frac{r' dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}} \int_0^{r'} w'' \left( \frac{u}{c} \right) \frac{du}{\sqrt{r'^2 - u^2}},$$

ou encore, en intervertissant l'ordre des deux premières intégrations,

$$\begin{aligned} \varphi'_z(r, 0|a') &= -\frac{4\Theta}{\pi^2 c^2} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_r^{a'} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \int_0^s w'' \left( \frac{u}{c} \right) du \int_u^{r'} \frac{r' dr'}{\sqrt{(s^2 - r'^2)(r'^2 - u^2)}} \\ &= -\frac{2\Theta}{\pi c} \left( gh - \frac{\varpi}{\rho} \right) \int_r^{a'} w' \left( \frac{s}{c} \right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

<sup>42)</sup> Une cause possible d'échec d'une telle approximation, signalée par M. G. BOULIGAND à propos du problème des ondes liquides (*Sur les singularités à la paroi dans le problème des ondes liquides* [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2<sup>e</sup> série, tome L (1926), p. 89-96 et 106-112], p 111) ne se présente pas ici, le voisinage de la surface libre avec le plan de l'orifice étant du second ordre.

On aurait abouti au même résultat, plus rapidement, en calculant d'abord, à l'aide de la formule (28), l'expression

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi'_z(r, 0|s) = \frac{\partial}{\partial z} \varphi'_z(r, 0|s) = -\frac{2}{\pi} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

qui, à notre degré d'approximation, représente l'accélération verticale (l'accélération horizontale étant négligeable) au point  $(r, 0)$  ( $r \leq s$ ), et intégrant ensuite, sur place, entre les instants  $r$  et  $a'$ , d'où

$$\begin{aligned} \varphi'_z(r, 0|a') &= \frac{\Theta}{c} \int_r^{a'} \frac{\partial}{\partial t} \varphi'_z(r, 0|s) w' \left(\frac{s}{c}\right) ds \\ &= -\frac{2\Theta}{\pi c} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int_r^{a'} w' \left(\frac{s}{c}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

Ce dernier procédé met en évidence, sur le cas particulier qui nous occupe, le mécanisme par lequel, bien que l'accélération soit infinie pour  $r = s$ , la vitesse reste finie du fait que le bord de l'orifice se dérobe constamment.

Finalement l'équation de la surface libre sera :

$$z = -\frac{2\Theta^2}{\pi c^2} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int_r^a w' \left(\frac{a'}{c}\right) da' \int_r^{a'} w' \left(\frac{s}{c}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations et effectuant la première,

$$(S) \quad z = -\frac{2\Theta^2}{\pi c} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int^a \left[ w \left(\frac{a}{c}\right) - w \left(\frac{s}{c}\right) \right] w' \left(\frac{s}{c}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}.$$

Il est facile de vérifier sur cette équation, d'une part, que

$$z = \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a$$

(c'est-à-dire que la surface  $S$  se raccorde, le long du bord de  $\Sigma$ , avec le fond de la cuve) et, d'autre part, que la distance d'un point quelconque de  $S$  au plan de  $\Sigma$  est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{\Theta^2}{c} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right)$$

et, par suite, négligeable vis-à-vis de  $2c$  (ou de  $2a$ , pourvu que la vitesse moyenne  $\frac{a}{t}$  soit toujours grande vis-à-vis de  $\sqrt{gh - \frac{\varpi}{\rho}}$ ).

### § 3. — La percussion d'arrêt et la singularité de M. VERGNE.

Imaginons maintenant que le rayon de l'orifice, ayant atteint la valeur  $c$  avec une vitesse appréciable  $\left[\frac{da}{dt} = \frac{c}{\Theta w'(1)}\right]$ , cesse brusquement de s'accroître : il se produit dans le mécanisme d'ouverture, à l'instant  $\Theta$ , une percussion qui réagit sur le mouvement du liquide. On peut considérer les vitesses du liquide comme nulles, car elles sont petites vis-à-vis de  $\sqrt{2\left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right)}$  qui sera la vitesse d'écoulement, d'après le théorème de TORRICELLI, si un régime permanent vient à s'établir <sup>43</sup>).

D'autre part, l'accélération, à l'instant  $\Theta$ , en chaque point de la surface libre  $S$  (on peut confondre celle-ci avec  $\Sigma$ ) est donnée par la formule (41) où l'on fait  $s = c$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi'_z(r, 0|c) = -\frac{2}{\pi} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \frac{1}{\sqrt{c^2 - r^2}}.$$

Cette accélération, dirigée verticalement vers le bas, est infinie pour  $r = c$ . Par conséquent, à l'instant qui suivra l'arrêt du mécanisme, tout le débit sera fourni par le bord de l'orifice ; il n'y aura pas écoulement par jet. C'est ce que M. VERGNE a mis en lumière dans un article très remarqué du *Bulletin des Sciences Mathématiques* <sup>44</sup>). Il admet, conformément à l'énoncé de M. LANGEVIN, que l'orifice (réduit à une fente rectangulaire longue et étroite de largeur  $2c$ ) est brusquement démasqué. Il trouve ainsi, dès l'instant initial, la singularité que nous n'obtenons qu'à l'instant  $\Theta$ . Il en conclut : *On voit à quel point le début du mouvement diffère de l'écoulement en régime permanent*. Mais, si l'on suppose que l'orifice s'ouvre progressivement en un temps très court, on voit que cette singularité a pour cause l'arrêt soudain du bord qui provoque une réaction et brise le jet déjà formé. Il semble que le seul moyen d'éviter

<sup>43</sup>) On peut calculer la force vive  $\mathfrak{I}(\Theta)$  du liquide à l'instant  $\Theta$  en écrivant qu'elle est égale au travail qu'effectuerait la quantité de liquide écoulée hors de l'orifice en tombant, dans le vide, de la hauteur  $h$  avec l'accélération  $g - \frac{\varpi}{\rho h}$  (car tout se passe comme si l'on remplaçait  $\varpi$  par zéro et  $g$  par  $g - \frac{\varpi}{\rho h}$ ). On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\Theta) &= \frac{\rho \Theta}{c} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right) \int_0^c q(a) w' \left(\frac{a}{c}\right) da \\ &= \frac{4\rho \Theta^2}{c^2} \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right)^2 \int_0^c w' \left(\frac{a}{c}\right) da \int_0^a w' \left(\frac{a'}{c}\right) a' da' = 2\rho \Theta^2 \left(gh - \frac{\varpi}{\rho}\right)^2 \int_0^c \left[1 - w \left(\frac{a}{c}\right)\right]^2 da. \end{aligned}$$

<sup>44</sup>) *Sur quelques points d'Hydrodynamique*. [Bulletin des Sciences Mathématiques, 2<sup>e</sup> serie, T. XLIV (1920), p. 220-224 et 249-267] p. 220-224 et 249-253.

cette singularité et d'observer la continuité de l'écoulement par jet soit de faire en sorte que l'orifice n'atteigne sa largeur finale  $2c$  qu'au bout du temps infini nécessaire à l'établissement du régime permanent.

Dans le cas de l'écoulement dans le vide, on devrait, par exemple, déterminer la fonction  $\chi(r|a)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) en écrivant que la pression reste nulle sur la surface libre inférieure.

Ce problème est encore trop complexe, dès que la surface libre s'écarte sensiblement du plan de l'orifice, pour être résolu. Mais il y a tout lieu de penser que, si  $w'(a)$  est bornée et, par suite,  $w(a)$  continue pour  $0 \leq a < c$ , la fonction  $\chi(r|a)$  satisfera à toutes les conditions de continuité voulues pour qu'il y ait, à chaque instant, écoulement par jet et que, moyennant certaines hypothèses sur  $w(c)$  et  $w'(c)$ , le mouvement du liquide tendra, pour  $t$  infini, c'est-à-dire pour  $a = c$ , vers le mouvement permanent révélé par l'expérience <sup>45</sup>). Faute de savoir résoudre ce problème lui-même, nous pouvons du moins, en partant de fonctions  $\chi(r|a)$  données *a priori*, construire des exemples d'écoulement (non dans le vide, mais dans un liquide de même densité que le premier) dans lesquels il existe bien, pour  $t$  infini, un mouvement permanent asymptote.

---

#### CHAPITRE IV.

### SUR L'ÉCOULEMENT DANS UN LIQUIDE DE MÊME DENSITÉ QUE LE PREMIER, EN MOUVEMENT PERMANENT.

#### § 1. — Prolongement de la fonction $\varphi(r, z|a)$ à travers l'orifice.

Dans ce qui suit, on suppose :

1° que les fonctions données  $\omega(a)$  et  $\chi(r|a)$  satisfont, pour  $0 \leq r \leq a < c$ , à toutes les conditions de continuité voulues pour qu'il y ait, à chaque instant  $a$ , écoulement par jet ;

2° que l'écoulement est régulier au point  $\mathcal{O}$  c'est-à-dire que

$$\omega(0) = 0, \quad \chi'_r(0|a) \equiv 0;$$

3° que les fonctions  $\omega(a)$ ,  $\chi(r|a)$ ,  $\chi'_r(r|a)$  sont bien définies et régulières pour

---

<sup>45</sup>) Remarquer que ce mouvement devient instable à une faible distance au-dessous du plan de l'orifice [voir note <sup>51</sup>) et Chap. IV, § 5].

toutes les valeurs réelles et imaginaires de  $r$  et de  $a$ , sauf en des points isolés et à l'infini.

L'expression que nous avons donnée du potentiel des vitesses  $\varphi(r, z|a)$  n'est valable que dans le demi-espace supérieur (plus exactement : dans le domaine  $\Delta$ ). Nous allons la prolonger analytiquement au-delà de l'orifice en nous servant d'une formule bien connue, établie par POISSON et retrouvée par M. VOLTERRA <sup>46)</sup> :

Soit une fonction harmonique  $V(x, y, z)$ , régulière dans un domaine  $D$ , et soit  $\sigma$  une aire du plan des  $xy$  intérieure à ce domaine ; cette fonction est complètement déterminée si l'on connaît, en chaque point de  $\sigma$ , sa valeur  $V(x, y, 0)$  et celle de sa dérivée normale  $V'_z(x, y, 0)$  et elle admet pour expression (valable dans un cylindre de base  $\sigma$ , mais pouvant être prolongée dans tout  $D$ )

$$(42) \left\{ \begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\alpha \frac{s ds}{\sqrt{z^2 - s^2}} \int_0^{2\pi} V(x + is \cos \Theta, y + is \sin \Theta, 0) d\Theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha \frac{s ds}{\sqrt{z^2 - s^2}} \int_0^{2\pi} V'_z(x + is \cos \Theta, y + is \sin \Theta, 0) d\Theta \end{aligned} \right. \quad 47).$$

Dans le cas où il y a symétrie complète par rapport à l'axe des  $z$ , cette formule se simplifie et devient, en posant  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,

$$(42') \left\{ \begin{aligned} V(r, z) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\alpha \frac{s ds}{\sqrt{z^2 - s^2}} \int_0^\pi V(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0) d\Theta \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{s ds}{\sqrt{z^2 - s^2}} \int_0^\pi V'_z(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0) d\Theta \end{aligned} \right. \quad 48).$$

Or nous connaissons, sur le cercle  $\Sigma$ , la fonction  $\varphi(r, 0|a)$ , définie par (35), et la fonction  $\varphi'_z(r, 0|a)$ , qui s'exprime au moyen de la précédente par la formule (28) simplifiée :

$$\varphi'_z(r, 0|a) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \int_0^s \frac{\partial}{\partial r'} [r' \varphi'_r(r', 0|a)] \frac{dr'}{\sqrt{s^2 - r'^2}}.$$

Si nous remplaçons dans (42')  $V(r, 0)$  par  $\varphi(r, 0|a)$  et  $V'_z(r, 0)$  par  $\varphi'_z(r, 0|a)$ , nous obtenons une expression de  $\varphi(r, z|a)$  bien définie et régulière dans tout l'espace,

<sup>46)</sup> VITO VOLTERRA, *Esercizi di fisica matematica*. [Rivista di Matematica, Vol. IV (1894), p. 1-12], p. 8.

<sup>47)</sup> La détermination de  $\frac{1}{\sqrt{z^2 - s^2}}$  est celle qui se réduit à  $z$  pour  $z$  infini ; les expressions  $\int_0^{2\pi} V(x + is \cos \Theta, y + is \sin \Theta, 0) d\Theta$  et  $\int_0^{2\pi} V'_z(x + is \cos \Theta, y + is \sin \Theta, 0) d\Theta$  sont des fonctions réelles des trois variables  $x, y$  et  $s$ .

<sup>48)</sup> La détermination de  $\frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}}$  étant celle qui se réduit à  $r$  pour  $s = 0$ .

sauf sur le plan troué  $\chi = 0$ ,  $r \geq a$ , en des points isolés et à l'infini (d'après l'hypothèse 3<sup>o</sup>), et, par suite, valable en tout point intérieur au liquide. Cette expression coïncide donc, pour  $\chi > 0$ , avec l'expression déduite de la formule (24), que nous désignerons par  $\varphi_1(r, \chi|a)$ :

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(r, \chi|a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi'_\chi(r', 0|a) r' dr' \int_0^\pi \frac{d\Theta}{u} - gh \int_0^a \omega(a') da', \\ & \quad (u = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta + \chi^2}), \end{aligned} \right.$$

et donne, pour  $\chi < 0$ , le prolongement  $\varphi_2(r, \chi|a)$  de cette fonction à travers le cercle  $\Sigma$ . Or, si l'on change, dans

$$\begin{aligned} \varphi(r, \chi|a) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\chi \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^\pi \varphi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\chi \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^\pi \varphi'_\chi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta \quad 49), \end{aligned}$$

$\chi$ , d'abord négatif, en  $-\chi$  (ce qui entraîne le changement de  $-\sqrt{\chi^2 - s^2}$  en  $\sqrt{\chi^2 - s^2}$ ), le premier membre, qui était  $\varphi_2(r, \chi|a)$ , devient  $\varphi_1(r, -\chi|a)$ ; au second membre, le premier terme se reproduit, le deuxième change de signe et, comme

$$\varphi_1(r, -\chi|a) \equiv \varphi_1(r, \chi|a),$$

on peut écrire, pour  $\chi < 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \chi|a) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\chi \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^\pi \varphi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\chi \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^\pi \varphi'_\chi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_2(r, \chi|a) &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\chi \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^\pi \varphi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta - \\ & \quad - \varphi_1(r, \chi|a). \end{aligned} \right.$$

Il est facile de vérifier que l'on a bien, pour  $0 \leq r \leq a$ ,

$$\varphi_2(r, 0|a) \equiv \varphi(r, 0|a).$$

On a, en effet, en posant

$$\int_0^\pi \varphi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|a) d\Theta = F(r, s)$$

49)  $\sqrt{\chi^2 - s^2}$  désignant, celle fois, la racine carrée arithmétique



et intégrant par parties :

$$\int_0^{\chi} F(r, s) \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} = \chi F(r, 0) + \int_0^{\chi} F'_s(r, s) (-\sqrt{\chi^2 - s^2}) ds,$$

d'où :

$$\varphi_2(r, \chi|a) = \frac{2}{\pi} \left[ F(r, 0) + \chi \int_0^{\chi} F'_s(r, s) \frac{ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \right] - \varphi_1(r, \chi|a)$$

et, en faisant  $\chi = 0$ ,

$$\varphi_2(r, 0|a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(r, 0|a) d\Theta - \varphi(r, 0|a) = \varphi(r, 0|a).$$

## § 2. — Interprétation de la formule (44). Mouvement permanent initial.

En résumé, la formule (44) définit le mouvement du liquide au-delà de l'orifice. On en peut déduire *a posteriori*, en fonction de  $\omega(a)$  et de  $\chi(r|a)$ , les conditions aux limites auxquelles satisfait la surface libre inférieure. Nous définirons ces conditions de la façon suivante : imaginons que tout l'espace  $\chi < 0$  (ou, du moins, la région voisine de l'orifice) contienne un liquide de même densité  $\rho$  que le premier, qui participe à son mouvement de telle sorte que les deux liquides se raccordent, à chaque instant, sans aucune discontinuité. La formule (44) est alors valable dans tout le liquide de l'espace  $\chi < 0$  et permet de déterminer, en fonction de  $\omega(a)$  et de  $\chi(r|a)$ , les conditions à l'infini (ou aux limites) auxquelles doit satisfaire, à chaque instant, le liquide inférieur. Entre autres, celui-ci est animé, avant l'ouverture de l'orifice, d'un mouvement permanent défini par le potentiel de vitesses

$$(45) \quad \varphi_2(r, \chi|0) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^{\chi} \frac{s ds}{-\sqrt{\chi^2 - s^2}} \int_0^{\pi} \varphi(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0|0) d\Theta,$$

avec, d'après (35),

$$\varphi(r, 0|0) = \int_0^r \left\{ f(r|a') - \frac{2}{\pi} [\chi(0|a') + gh] \arccos \frac{a'}{r} + \chi(0|a') - \chi(r|a') \right\} \omega(a') da'.$$

Dans ce mouvement, la pression est bien déterminée ; elle est donnée par

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{V_0^2}{2} - g\chi + C,$$

$V_0$  étant la vitesse et  $C$  une constante non arbitraire. En effet, nous venons de voir que, si  $V(r, \chi)$  est une fonction harmonique régulière sur  $\Sigma$  où elle prend les valeurs

$V(r, 0)$ , on a, pour  $z < 0$ , l'identité

$$V(r, -z) + V(r, z) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{s ds}{\sqrt{z^2 - s^2}} \int_0^\pi V(\sqrt{r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta}, 0) d\Theta.$$

Appliquons ce résultat à la fonction  $\varphi'_i(r, z|0)$ : nous aurons, quel que soit  $z$ ,

$$\varphi'_i(r, -z|0) + \varphi'_i(r, z|0) = 2\chi(0|0).$$

D'autre part, l'apparition de l'orifice ne modifie pas la pression ni la vitesse dans les régions des deux liquides, supérieur et inférieur, qui sont très éloignées de l'origine. On aura donc, pour  $z$  très grand et négatif, d'après (22),

$$\varphi'_i(r, -z|0) = -gh, \quad \varphi'_i(r, z|0) = -C,$$

et, par suite,

$$C = -gh - 2\chi(0|0).$$

Il s'en suit que la pression, dans le mouvement permanent du liquide inférieur précédant l'ouverture de l'orifice <sup>50)</sup>, est donnée par :

$$(46) \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{V_0^2}{2} - g(b + z) - 2\chi(0|0).$$

$V_0$  est évidemment nul au point  $O$ , puisqu'il y a raccordement pour  $t = 0$ . En ce point, de part et d'autre du plan des  $xy$ , les pressions sont, avant l'ouverture de l'orifice, respectivement  $gh$  et  $-gh - 2\chi(0|0)$  et, immédiatement après, la pression unique est  $-\chi(0|0)$ , c'est-à-dire la demi-somme des précédentes. Nous voyons de plus que, si l'on a  $gh > -gh - 2\chi(0|0)$  ou

$$\chi(0|0) > -gh,$$

le liquide supérieur s'écoulera dans le liquide inférieur; si, au contraire,

$$\chi(0|0) < -gh,$$

le liquide inférieur pénétrera dans la cuve; si enfin

$$\chi(0|0) = -gh,$$

il y aura, tout au moins à l'instant initial, équilibre entre les deux liquides.

Nous voyons encore, sur la formule (46), qu'il faut supposer

$$\chi(0|0) < -\frac{gh}{2}$$

<sup>50)</sup> Nous l'appellerons, pour abrégier, *mouvement permanent initial*.

pour que la pression, dans le mouvement permanent initial, soit positive tout au moins dans une certaine région comprenant l'origine <sup>51</sup>).

### § 3. — Mouvement permanent asymptote.

Si, lorsque  $a$  tend vers  $c$ , on a

$$\lim_{a \rightarrow c} [(c - a) \omega(a)] \neq 0 \text{ ou infinie,}$$

le temps  $t$  croît indéfiniment. Il peut exister un mouvement permanent asymptote, qui s'obtiendra simplement en faisant  $a = c$  dans les formules (43) et (44). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit :

1° que  $\varphi'_r(r, z|a)$  tende uniformément vers une constante, qui sera nécessairement  $-gh$ , autrement dit que l'on ait :

$$\lim \text{unif}_{a \rightarrow c, 0 \leq r \leq a} [\chi(r|a) + gh] = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi'_r(r, 0|c) = \chi'_r(r|c) \equiv 0$$

[on en conclut que la relation (29') est vérifiée pour  $a = c$ ];

2° que l'expression  $\varphi'_r(r, 0|c)$ , déduite des formules (36) et (37), soit bien définie pour  $0 \leq r < c$  et, de plus, (pour que le mouvement soit physiquement acceptable) qu'elle soit finie pour  $r = c$ , ce qui donne les conditions :

$$\lim_{a \rightarrow c, 0 \leq r \leq a} [(c - a) \omega(a) \chi'_r(r|a)] = 0$$

[qui entraîne également :

$$\chi'_r(r|c) \equiv 0]$$

et

$$\lim_{a \rightarrow c} \sqrt{c - a} \omega(a) \left\{ c \int_0^a \chi'_{r'}(r'|a) \frac{\sqrt{a^2 - r'^2}}{c^2 - r'^2} dr' + \frac{a}{c} [\chi(0|a) + gh] \right\} = 0;$$

3° (pour qu'il y ait écoulement par jet) que l'intégrale  $\int_r^c \frac{F''(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}$  s'annule pour  $r = c$ , ce qui aura lieu d'une façon générale (ainsi que toutes les autres conditions) si  $\chi(r|a) + gh$  tend assez rapidement (et uniformément) vers zéro lorsque  $a$  tend vers  $c$ .

<sup>51</sup>) Nous admettons que le liquide inférieur occupe tout l'espace  $z < 0$ , sans nous préoccuper de savoir si la pression  $y$  est et s'y maintient partout positive. Pratiquement, il faudrait déterminer un domaine recouvrant le cercle  $\Sigma$  où cette condition soit constamment vérifiée et le supposer limité par des parois fixes ou mobiles avec, au besoin, des surfaces d'entrée et de sortie du liquide.

§ 4. — Cas où  $\chi(r|a)$  ne dépend pas de  $r$ .

Un cas particulièrement simple est celui où la fonction donnée  $\chi(r|a)$  ne dépend pas de  $r$ ; nous la désignerons alors par  $\chi(a)$  et nous poserons :

$$[\chi(a) + g h] \omega(a) = G(a),$$

en remarquant que :

$$G(0) = 0.$$

Les formules établies dans le cas général se réduisent aux suivantes :

$$(35') \quad \varphi(r, 0|a) = -\frac{2}{\pi} \int_0^r G(a') \arccos \frac{a'}{r} da' + \int_0^a \chi(a') \omega(a') da',$$

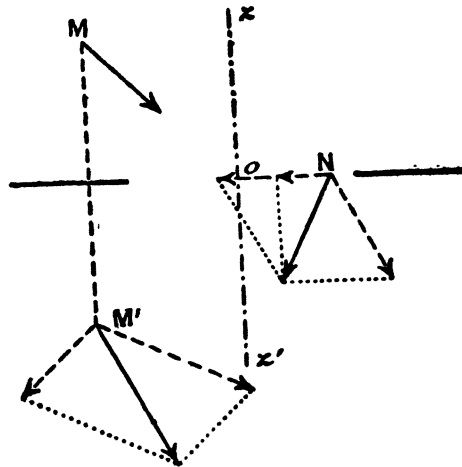
$$(36') \quad \varphi'_r(r, 0|a) = -\frac{2}{\pi} \int_0^r G(a') \frac{a' da'}{r \sqrt{r^2 - a'^2}}, \quad (\text{ne dépend pas de } a),$$

$$(28') \quad \varphi'_z(r, 0|a) = -\frac{2}{\pi} \int_r^a G(s) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

$$(25') \quad q(a) = -2\pi \int_0^a \varphi'_z(r, 0|a) r dr = 4 \int_0^a G(s) s ds,$$

$$(44') \quad \varphi_2(r, z|a) = \varphi_2(r, z|0) - \varphi_1(r, z|a) + 2 \int_0^a \chi(a') \omega(a') da'.$$

La dernière formule montre qu'à un instant quelconque la vitesse en un point  $M'$  de l'espace  $z < 0$  s'obtient en composant la vitesse du mouvement permanent initial avec la vitesse du mouvement symétrique du mouvement supérieur par rapport au plan  $x \ 0 \ y$ , mais changé de sens (Fig. 19).



(Fig. 19).

Il en résulte :

1° que la vitesse tangentielle en un point  $N$  de l'orifice est égale à la moitié de la vitesse du mouvement permanent initial et, par suite, indépendante du temps :

$$\varphi'_r(r, 0|a) = \frac{1}{2} \varphi_{2r}(r, 0|0), \quad \text{pour } 0 \leq r \leq a;$$

2° que ce mode d'écoulement n'altère pas sensiblement le mouvement du liquide inférieur en un point  $P'$  éloigné de l'orifice.

D'autre part, la pression en ce point varie d'une façon bien déterminée; on a, en effet,

$$\varphi'_i(P'|a) \sim 2\chi(a) + gh,$$

d'où :

$$(46') \quad \frac{p(P'|a)}{\rho} \sim -\frac{V_0^2}{2} - g(b + z_{P'}) - 2\chi(a).$$

On voit que les surfaces d'égale pression ne sont pas sensiblement altérées loin de l'orifice, mais que leur indice varie comme  $-2\chi(a)$ .

Réciproquement, étant donné un mouvement permanent initial  $\varphi_2(r, z|0)$  dans l'espace  $z < 0$ , il lui correspond une fonction  $G(a)$  définie par l'équation

$$(47) \quad \int_0^a G(a') \frac{a' da'}{\sqrt{a^2 - a'^2}} = -\frac{\pi a}{4} \varphi'_{2r}(a, 0|0) \quad 5a).$$

C'est une équation de VOLTERRA de première espèce. On peut la résoudre par les procédés habituels <sup>53)</sup>; mais il est plus simple ici de reprendre l'identité (34) et d'y remplacer  $\chi(r'|a')$  par  $-\frac{\pi r'}{4} \varphi'_{2r}(r', 0|0)$ : il vient, en modifiant légèrement les notations,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{a' da'}{\sqrt{a^2 - a'^2}} \int_0^{a'} \frac{d}{dr} \left[ -\frac{\pi r}{4} \varphi'_{2r}(r, 0|0) \right] \frac{dr}{\sqrt{a'^2 - r^2}} = -\frac{\pi a}{4} \varphi'_{2r}(a, 0|0),$$

d'où l'on a immédiatement, par comparaison avec (47), la formule d'inversion :

$$(47') \quad G(a) \equiv [\chi(a) + gh] \omega(a) = -\frac{1}{2} \int_0^a \frac{d}{dr} [r \varphi'_{2r}(r, 0|0)] \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Si donc, la loi d'ouverture étant définie par  $\omega(a)$  et le mouvement permanent

<sup>52)</sup> Nous supposons (ce n'est d'ailleurs pas nécessaire pour la résolution) la fonction  $\varphi'_{2r}(r, 0|0)$  finie et continue pour  $0 \leq r \leq c$  et  $\varphi'_{2r}(0, 0|0) = 0$ .

<sup>53)</sup> VITO VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales* (Paris, Gauthier-Villars, 1913) p. 56 et suivantes.

initial par  $\varphi_2(r, z|0)$ , on sait de plus que, sur une surface d'égalité de pression du liquide inférieur dont tous les points sont suffisamment distants de l'orifice, les vitesses restent sensiblement les mêmes, et si la pression  $p(P|x)$  y vérifie la relation obtenue en éliminant  $\chi(a)$  entre (46') et (47), l'écoulement, à partir du repos, du liquide supérieur dans le liquide inférieur pourra être défini, au degré d'approximation du chapitre I, par les formules (43), (28'), (44') et (47')<sup>54</sup>.

Connaissant deux des trois fonctions  $\omega(a)$ ,  $\chi(a)$ ,  $\varphi_2(r, z|0)$ , on pourra toujours déterminer la troisième de telle manière que ces trois fonctions définissent un mouvement analogue au précédent. En particulier, si l'on se donne  $\varphi_2(r, z|0)$  telle que  $\varphi'_2(r, 0|0)$  soit continue et  $\varphi''_{2,r}(r, 0|0)$  bornée pour  $0 \leq r \leq c$ , et  $\chi(a)$  telle que :

$$\lim_{a \rightarrow c} \frac{\chi(a) + gb}{c - a} = \text{quantité finie ou nulle,}$$

comme le produit  $[\chi(c) + gb]\omega(c)$  sera, en général,  $\neq 0$ , on en déduira

$$\lim_{a \rightarrow c} (c - a)\omega(a) \neq 0 \quad \text{ou infini}$$

et il existera, pour  $a = c$ , un mouvement permanent asymptote.

Si l'on a  $\chi(c) + gb = 0$ , mais si  $\frac{\chi(a) + gb}{c - a}$  tend vers l'infini, on en déduira

$$\lim_{a \rightarrow c} (c - a)\omega(a) = 0$$

et le mouvement permanent final sera atteint au bout d'un temps fini

$$\Theta = \int_0^c \omega(a) da.$$

A  $\chi(a) \equiv -gb$  ou  $\varphi_2(r, z|0) \equiv c^{te}$  correspond, quel que soit  $\omega(a)$ , le repos absolu avec  $p = \rho g(b - z)$ .

### § 5. — Exemple.

Soient :

$$\omega(a) = \frac{\Theta}{c} \frac{a}{c - a}, \quad \chi(a) = -gb \frac{\nu a + (1 - \nu)c}{c},$$

$\Theta$  et  $\nu$  étant deux constantes, la première ayant les dimensions d'un temps, la seconde numérique et comprise entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

On a simplement dans ce cas :

$$G(a) = \lambda a,$$

<sup>54</sup>) Voir la note 39).

en posant :

$$\lambda = \frac{\nu \Theta g h}{c^2} \quad 55).$$

On en déduit :

$$\varphi(r, 0|0) = -\frac{2\lambda}{\pi} \int_0^r a' \arccos \frac{a'}{r} da' = -\frac{\lambda}{4} r^2,$$

d'où le mouvement permanent initial :

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, z|0) &= -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{s ds}{\sqrt{\lambda^2 - s^2}} \int_0^{2\pi} (r^2 - s^2 + 2irs \cos \Theta) d\Theta \\ &= -\frac{\lambda}{2} (r^2 - 2z^2). \end{aligned}$$

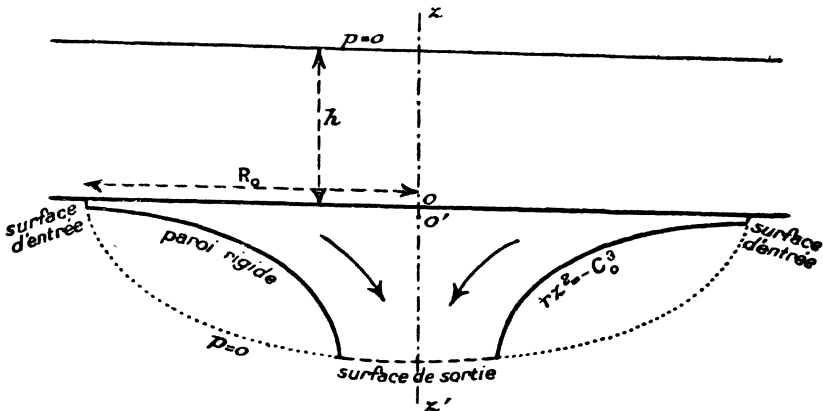
Dans ce mouvement, les lignes de courant ont pour équation

$$r^2 z = -C^3,$$

$C$  étant une constante positive arbitraire. La vitesse en un point situé à la distance  $R$  de l'origine est du même ordre de grandeur que  $\lambda R$ ; la vitesse complémentaire à l'instant  $a$ , déduite de  $\varphi_1(r, z|a)$ , est du même ordre que  $\frac{q}{R^2}$  ou  $\left[ q = \frac{4\lambda a^3}{3} \right]$  que  $\lambda \frac{a^3}{R^3}$ .

Par conséquent, si l'on donne à  $C$  une valeur  $C_0$  assez grande pour que  $\left(\frac{c}{C_0}\right)^3$  soit négligeable vis-à-vis de l'unité, la nappe de courant correspondante (de révolution autour de  $Oz'$ ) ne sera pas sensiblement modifiée par l'écoulement du liquide supérieur.

Pratiquement on peut remplacer une de ces nappes par une paroi rigide limitant le liquide inférieur (Fig. 20<sub>a</sub>).



(Fig. 20<sub>a</sub>). — Mouvement permanent initial.

55)  $\lambda$  est indépendant de l'unité de longueur.

D'autre part, la pression dans le mouvement initial, est donnée par

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\lambda^2}{2}(r^2 + 4z^2) - gz + gh(1 - 2\nu);$$

les surfaces d'égale pression sont des ellipsoïdes de révolution aplatis dans le rapport  $\frac{1}{2}$ , ayant pour centre commun le point  $O'$  ( $r = 0$ ,  $z = -\frac{g}{4\lambda^2}$ ) et limités au plan  $z = 0$  qu'ils coupent suivant des cercles de rayons

$$R_p = \frac{\sqrt{2 \left[ gh(1 - 2\nu) - \frac{p}{\rho} \right]}}{\lambda}.$$

Si  $\frac{\sqrt{gh}}{\lambda}$  est comparable à  $c$ , c'est-à-dire  $\nu\Theta$  comparable à  $\frac{c}{\sqrt{gh}}$ , la surface de pression nulle se maintient à une distance de l'origine comparable à  $c$  et, d'autre part, la vitesse d'écoulement du liquide supérieur  $\left[ \varphi'_z(0, 0|a) = -\frac{2\lambda a}{\pi} \right]$  est comparable à  $\sqrt{gh}$ : le mouvement de ce liquide devient instable dès qu'il franchit la surface de pression nulle, c'est-à-dire à une distance au-dessous du plan de l'orifice comparable à son rayon <sup>56</sup>).

Si  $\nu\Theta$  est petit vis-à-vis de  $\frac{c}{\sqrt{gh}}$ , mais grand vis-à-vis de  $\frac{c}{\sqrt{gh}} \times \frac{c}{h}$  (afin que  $OO'$  soit petit vis-à-vis de  $R_0$ ), la surface de pression nulle du mouvement initial, assimilable à un demi-ellipsoïde, a tous ses points situés à une grande distance de l'orifice et n'est pas sensiblement modifiée par l'écoulement du liquide supérieur; mais, sur cette surface, la pression varie suivant la loi:

$$(48) \quad p = 2\nu\rho gh \frac{a}{c}.$$

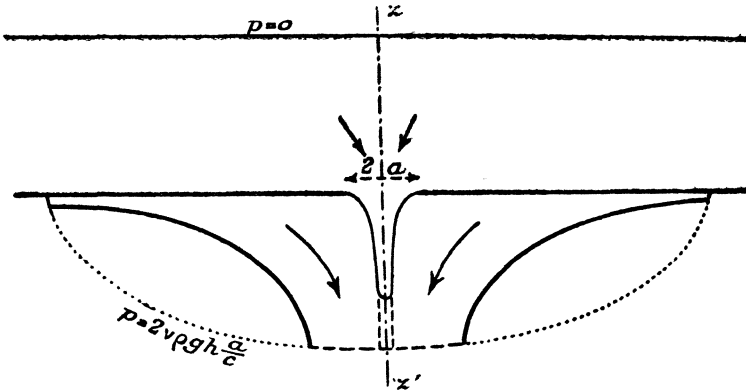
Si, en même temps,  $\frac{\sqrt{gh}}{\lambda}$  est grand vis-à-vis de  $C_0$ , ou  $\nu\Theta$  petit vis-à-vis de  $\frac{c}{\sqrt{gh}} \times \frac{c}{C_0}$  ( $\frac{C_0}{h}$  étant choisi petit vis-à-vis de l'unité), on pourra, si l'on veut, limiter à cette surface la région du liquide inférieur que l'on considère <sup>57</sup>), limitée d'autre part à la nappe  $C_0$ , autrement dit envisager une surface d'entrée et une surface de sortie

<sup>56</sup>) A rapprocher de la note <sup>45</sup>).

<sup>57</sup>) Voir la note <sup>51</sup>).

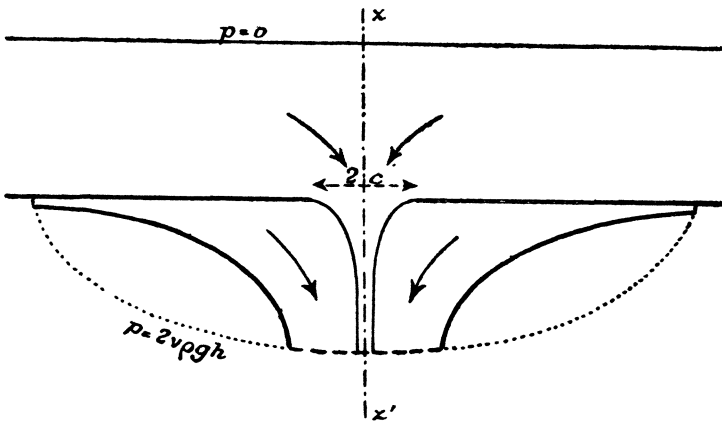


du liquide (la première sensiblement cylindrique, la seconde sensiblement plane et perpendiculaire à  $z z'$ ) sur lesquelles la pression variera suivant (48) (Fig. 20<sub>b</sub>).



(Fig. 20<sub>b</sub>). — Pendant l'ouverture de l'orifice.

Il existe, pour  $a = c$ , un mouvement permanent asymptote (Fig. 20<sub>c</sub>). La surface



(Fig. 20<sub>c</sub>). — Mouvement permanent asymptote.

de séparation des deux liquides (tracée en traits pleins sur les figures) se raccorde constamment avec le fond de la cuve et s'étend progressivement, en s'amincissant, jusqu'à l'infini vers  $z'$ , au fur et à mesure que s'ouvre l'orifice. Remarquons, en outre, que la loi d'ouverture peut s'écrire

$$\frac{t}{\Theta} = \frac{1}{c} \int_0^a \frac{a' da'}{c - a'} = \log \frac{c}{c - a} - \frac{a}{c};$$

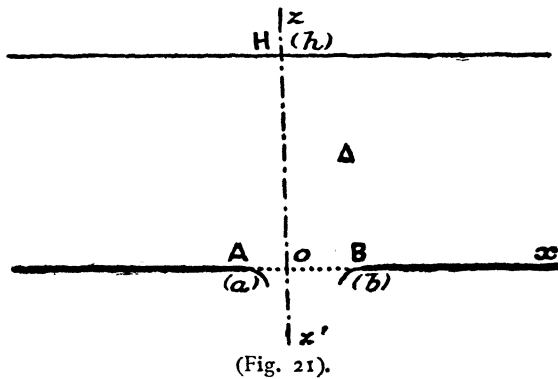
pour  $\frac{a}{c} = \frac{99}{100}$ , il vient  $\frac{t}{\Theta} = 3,6$ . Or on peut rendre le produit  $\nu \Theta$  arbitrairement

petit en se donnant soit  $\Theta$  aussi grand que l'on veut, puis  $v$  suffisamment petit, soit  $v$  compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$ , puis  $\Theta$  suffisamment petit.  $v\Theta$  étant le même dans les deux cas, le mouvement permanent initial sera le même, mais, dans le premier cas, on pourra ralentir à volonté l'écoulement du liquide supérieur; dans le second, au contraire, tout se passera comme si l'orifice était brusquement démasqué, *mais sans percussion d'arrêt*, et l'écoulement deviendra sensiblement permanent au bout d'un temps très court <sup>53</sup>).

## CHAPITRE V.

### CONDITIONS DE L'ÉCOULEMENT PAR JET DANS LE CAS D'UN ORIFICE RECTANGULAIRE ALLONGÉ.

Il est bien certain que l'on peut transposer toute l'étude précédente dans l'espace à deux dimensions en considérant, au lieu d'une cuve cylindrique et d'un orifice circulaire, une cuve parallélépipédique et une fente rectangulaire longue et étroite. Nous nous bornerons à établir, dans ce cas, les conditions nécessaires de l'écoulement par jet <sup>59</sup>). Nous emploierons les mêmes notations qu'au Chapitre I, en remplaçant seulement la variable  $r$  par la variable  $x$  considérée, non plus comme une longueur, mais comme une quantité algébrique, et appelant  $a$ ,  $b$  les abscisses des bords  $A$  et  $B$  de l'orifice ( $a < 0$ ,  $b > 0$ ) (Fig. 21).



(Fig. 21).

On suppose le potentiel des vitesses  $\varphi(x, z, t)$  harmonique et régulier en tout

<sup>58</sup>) Il est très probable que l'on obtiendrait, conformément à l'expérience, des résultats qualitativement analogues dans le cas de l'écoulement dans le vide, si l'on pouvait étudier le mouvement par le calcul depuis l'instant  $\Theta$  où nous l'avons abandonné jusqu'à  $t$  infini, en supposant que, durant cette

point intérieur au domaine  $\Delta$  et borné au voisinage de ses limites singulières (*infini*, entre  $\chi = 0$  et  $\chi = h$ , et points  $A, B$ ). On se donne la fonction  $\varphi(x', 0|t)$  pour  $a \leq x' \leq b$ ; on la suppose régulière pour  $a < x' < b$  et bornée, ainsi que  $\varphi'_x(x', 0|t)$ , pour  $x' = a, x' = b$ . Il s'agit d'exprimer  $\varphi'_\chi(x, 0|t)$  ( $a \leq x \leq b$ ) à l'aide de  $\varphi(x', 0|t)$  et de ses dérivées, sachant que :

$$1^\circ \varphi'_\chi(x, 0|t) = 0 \text{ pour } x < a \text{ et } x > b,$$

$$2^\circ \varphi(x, h|t) = -ght + \varphi_0 \text{ ou, ce qui revient physiquement au même,}$$

$$\varphi(x, \chi|t) = -ght + \varphi_0 \text{ pour } x^2 + \chi^2 = h^2.$$

Nous nous servons pour cela du résultat suivant établi par M.<sup>lle</sup> E. FREDA dans un problème d'induction électrostatique <sup>60</sup>):

Soit  $v(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) la densité électrostatique d'une bande indéfinie infiniment mince occupant la place de l'orifice; le potentiel logarithmique de cette bande aura pour expression, à une constante additive près,

$$V(x, \chi) = \int_a^b v(x') \log \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + \chi^2}} dx',$$

telle que :

$$V'_\chi(x, +0) = \begin{cases} -\pi v(x), & \text{pour } a < x < b, \\ 0, & \text{pour } x < a \text{ et } x > b. \end{cases}$$

Si, au lieu de  $v(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), on se donne  $V(x', 0)$  ( $a \leq x' \leq b$ ) et la masse totale répartie sur la bande

$$M = \int_a^b v(x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_a^b V'_\chi(x, +0) dx,$$

son potentiel logarithmique est complètement déterminé; en effet, la densité électrostatique a pour expression :

$$(49) \quad v(x) = \frac{2}{\pi^2} \frac{\pi M + \int_0^\pi \frac{\partial^2 V(x', 0)}{\partial \Theta^2} \log |x - x'| d\Theta}{\sqrt{(b-a)^2 - [2x - (a+b)]^2}},$$

période, le rayon de l'orifice croît extrêmement peu. Il semblerait (mais c'est une simple hypothèse fondée sur des raisons d'analogie) que, durant tout le cours du mouvement, la surface de pression nulle doit présenter deux nappes, l'une coïncidant avec la surface de séparation du liquide réel et du liquide fictif, l'autre coupant le jet à peu de distance au-dessous du plan de l'orifice.

53) Comme on ne suppose plus le mouvement symétrique par rapport à l'axe vertical  $z'z'$ , il y aura une condition pour chaque bord.

60) *Sul problema dell'induzione elettrostatica in un nastro metallico indefinito*. [Nuovo Cimento, série VI, vol. XIX (1920)], p. 193-213 et [vol. XX (1920)], p. 47-50. J'ai signalé à M.<sup>lle</sup> FREDA deux légères erreurs de calcul qui n'entachent en rien la méthode très élégante qu'elle a employée.

où l'on a posé  $x' = \frac{b-a}{2} \cos \Theta + \frac{a+b}{2}$ , et le potentiel est :

$$V(x, z) = \int_a^b v(x') \log \frac{b-a}{4\sqrt{(x-x')^2 + z^2}} dx' + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(x', 0) d\Theta.$$

Remplaçons alors  $V(x', 0)$  par  $\varphi(x', 0|t)$  et considérons, dans le demi-plan  $z \geq 0$ , la fonction

$$\psi(x, z|t) = \int_a^b v(x') \log \frac{b-a}{4\sqrt{(x-x')^2 + z^2}} dx' + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x', 0|t) d\Theta.$$

Elle prend, sur l'orifice, les valeurs données et se comporte, en un point  $(x, z)$  éloigné de l'orifice, comme

$$(50) \quad -\frac{q(t)}{\pi} \log \frac{4\sqrt{x^2 + z^2}}{b-a} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x', 0|t) d\Theta,$$

en désignant par  $q(t)$  le débit :

$$q(t) = - \int_a^b \varphi'_z(x, 0|t) dx = \pi \int_a^b v(x) dx = \pi M.$$

Si l'on détermine  $q(t)$  de telle sorte que l'expression (50) coïncide, pour  $x^2 + z^2 = b^2$ , avec  $-ght + \varphi_0$ , on pourra prendre la fonction  $\psi(x, z|t)$  pour expression approchée du potentiel des vitesses  $\varphi(x, z|t)$ , valable seulement à l'intérieur de la demi-sphère  $x^2 + z^2 = b^2$ ,  $z \geq 0$ . On voit que l'approximation se présente d'une façon un peu moins nette dans le cas de l'orifice rectangulaire allongé que dans le cas de l'orifice circulaire.

En calculant  $q(t)$  comme il vient d'être dit, on trouve :

$$(51) \quad q(t) = \frac{1}{\log \frac{4b}{b-a}} \left[ \int_0^\pi \varphi(x', 0|t) d\Theta + \pi(ght - \varphi_0) \right].$$

D'autre part, on a, d'après (49), pour  $a \leq x \leq b$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'_z(x, 0|t) &= \psi'_z(x, 0|t) \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{q(t) + \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi(x', 0|t)}{\partial \Theta^2} \log |x-x'| d\Theta}{\sqrt{(b-a)^2 - [2x - (a+b)]^2}}. \end{aligned}$$

En général, cette expression devient infinie pour  $x = a$  et pour  $x = b$ .

S'il y a écoulement par jet au bord  $A$ , on aura, par définition,

$$\varphi'_z(a, 0|t) = 0,$$

d'où

$$q(t) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi(x', 0|t)}{\partial \Theta^2} \log \frac{1}{x' - a} d\Theta.$$

De même, s'il y a écoulement par jet au bord  $B$ , on aura

$$\varphi'_\zeta(b, 0|t) = 0,$$

d'où

$$q(t) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi(x', 0|t)}{\partial \Theta^2} \log \frac{1}{b - x'} d\Theta.$$

En égalant chacune de ces expressions à l'expression (51) (et, par suite, entre elles), on obtient les deux conditions nécessaires pour que l'écoulement par jet se produise à la fois aux bords  $A$  et  $B$ :

$$\begin{aligned} \log \frac{4b}{b-a} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi(x', 0|t)}{\partial \Theta^2} \log \frac{1}{x' - a} d\Theta &= \log \frac{4b}{b-a} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \varphi(x', 0|t)}{\partial \Theta^2} \log \frac{1}{b - x'} d\Theta \\ &= \int_0^\pi \varphi(x', 0|t) d\Theta + \pi(ght - \varphi_0), \\ &\quad \left( x' = \frac{b-a}{2} \cos \Theta + \frac{a+b}{2} \right). \end{aligned}$$

Après un calcul simple, elles se réduisent aux suivantes:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'_x(x', 0|t) \frac{dx'}{\sqrt{(x'-a)(b-x')}} &= 0, \\ \int_a^b \varphi(x', 0|t) \frac{dx'}{\sqrt{(x'-a)(b-x')}} \\ + \log \frac{4b}{b-a} \int_a^b \varphi'_x(x', 0|t) \frac{x' dx'}{\sqrt{(x'-a)(b-x')}} + \pi(ght - \varphi_0) &= 0, \end{aligned}$$

dont la seconde présente une analogie évidente avec la relation (29).

Ces conditions, auxquelles doit satisfaire la fonction  $\varphi(x', 0|t)$  ( $a \leq x' \leq b$ ), sont suffisantes pour entraîner

$$\varphi'_\zeta(a, 0|t) = \varphi'_\zeta(b, 0|t) = 0$$

dans le cas, notamment, où  $\varphi(x', 0|t)$  est régulière pour  $a \leq x' \leq b$ .

Elles subsistent si les abscisses  $a, b$  des bords de l'orifice varient avec le temps.

Chateauroux, février 1928.

ROBERT MAZET.





# TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>1</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE.</b>	
<b>Oscillations dans deux vases communicants dont les parois sont verticales au voisinage des surfaces libres.</b>	
<b>CHAPITRE I. — Généralités sur la méthode suivie</b> .....	<b>5</b>
§ 1. Position du problème.....	5
§ 2. Hypothèse simplificatrice.....	7
§ 3. Équation du mouvement.....	8
§ 4. Calcul de T et de $\theta$ .....	10
<b>CHAPITRE II. — Le mouvement permanent auxiliaire dans le cas de la cuve parallélépipédique</b> .....	<b>12</b>
§ 1. Définition.....	12
§ 2. Passage du plan $f$ au plan $\zeta$ .....	13
§ 3. Passage du plan $\zeta$ au plan $\lambda$ .....	16
§ 4. Relation entre $\sigma$ et $l$ .....	18
<b>CHAPITRE III. — Calcul de la constante R</b> .....	<b>19</b>
§ 1. Préliminaires.....	19
§ 2. Degré d'approximation de la méthode.....	20
§ 3. La fonction $\chi(\sigma, \gamma)$ .....	23
§ 4. Erreur commise sur R.....	25
<b>CHAPITRE IV. — Sur la singularité du point F</b> .....	<b>26</b>
§ 1. Retour au problème initial.....	26
§ 2. Étude de la ligne $\psi = 1 - v$ ( $v$ étant petit).....	27
§ 3. Détermination de $v$ .....	29
<b>CHAPITRE V. — Étude de quelques cas particuliers</b> .....	<b>31</b>
§ 1. Cas où $\gamma = 1$ .....	31
§ 2. Cas où $\frac{l}{b}$ est voisin de zéro ou de l'infini.....	32
§ 3. Application numérique.....	34
§ 4. Cas où $l$ est infini. — Équation des lignes de courant.....	36
§ 5. Application à certaines formes de tubes en U.....	38
§ 6. Cas où $\gamma = 0$ ( $b$ infini).....	40



## DEUXIÈME PARTIE.

Écoulement à travers un orifice circulaire horizontal  
s'ouvrant progressivement.

	Pages.
<b>CHAPITRE I. — Sur l'écoulement par jet.....</b>	<b>44</b>
§ 1. Expression approchée du potentiel des vitesses .....	44
§ 2. Condition de l'écoulement par jet .....	48
§ 3. Autre interprétation de la relation (29).....	50
<b>CHAPITRE II. — Cas d'un orifice s'ouvrant progressivement .....</b>	<b>51</b>
§ 1. Expression de $\varphi(r, z   a)$ à l'aide de $\chi(r', a')$ .....	51
§ 2. Propriétés de la fonction $\varphi(r, 0   a)$ .....	54
<b>CHAPITRE III. — Sur le début de l'écoulement dans une atmosphère à pression constante.....</b>	<b>57</b>
§ 1. Interprétation du cas où $\chi(r   a') = c^{st}$ .....	57
§ 2. Équation de la surface libre.....	59
§ 3. La percussion d'arrêt et la singularité de M. VERGNE.....	62
<b>CHAPITRE IV. — Sur l'écoulement dans un liquide de même densité que le premier, en mouvement permanent.....</b>	<b>63</b>
§ 1. Prolongement de la fonction $\varphi(r, z   a)$ à travers l'orifice.....	63
§ 2. Interprétation de la formule (44). Mouvement permanent initial.....	66
§ 3. Mouvement permanent asymptote.....	68
§ 4. Cas où $\chi(r   a)$ ne dépend pas de $r$ . .....	69
§ 5. Exemple.....	71
<b>CHAPITRE V. — Conditions de l'écoulement par jet dans le cas d'un orifice rectangulaire allongé.....</b>	<b>75</b>

