EDOUARD LAINÉ

Recherches sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__96__1_0>

N° D'ORDRE:
2.026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. EDOUARD LAINÉ

1ère THÈSE. — RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q)$ INTÉGRABLES PAR LA METHODE DE DARBOUX.

2ème THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ: LES FORMES DE CLIFFORD DE L'ESPACE EUCLIDIEN.

Soutenues le 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. GOURSAT, *Président*
CARTAN, DENJOY } *Examinateurs.*

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1928.

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	C. Maurain, *Professeur*, Physique du globe.	
Doyens honoraires .	P. Appell, M. Molliard.	
Professeurs honoraires.	V. Boussinesq.	
	A. Joannis.	
	H. le Chatelier.	
	H. Lebesgue.	
	A. Fernbach.	
	A. Leduc.	
Professeurs	Émile Picard . .	Analyse supérieure et algébre supérieure.
	G. Koenigs . . .	Mécanique physique et expérimentale.
	E. Goursat . . .	Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. Janet. . . .	Electrotechnique générale.
	F. Wallerant .	Minéralogie.
	H. Andoyer . .	Astronomie.
	P. Painlevé . .	Mècanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel Bertrand	Chimie biologique.
	Mme P. Curie . .	Physique générale et radioactivité.
	M. Caullery . .	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	G. Urbain . . .	Chimie minérale.
	Emile Borel . .	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	L. Marchis . . .	Aviation.
	Jean Perrin . .	Chimie physique.
	Rémy Perrier .	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. Abraham . .	Physique.
	M. Molliard . .	Physiologie végétale.
	E. Cartan . . .	Géométrie supérieure.
	L. Lapicque . .	Physiologie générale.
	E. Vessiot . . .	Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. Cotton . . .	Physique générale.
	J. Drach . . .	Application de l'analyse à la géométrie.
	Charles Fabry .	Physique.
	Charles Pérez . .	Zoologie.
	Léon Bertrand .	Géologie structurale et géologie appliquée.
	R. Lespieau . .	Théories chimiques.

Professeurs	E. Rabaud . . .	Biologie expérimentale.
	P. Portier . . .	Physiologie comparée.
	E. Blaise . . .	Chimie organique.
	P. A. Dangeard .	Botanique.
	Paul Montel . .	Mécanique rationelle.
	P. Wintrebert .	Anatomie et histologie comparés.
	O. Duboscq . . .	Biologie maritime.
	G. Julia . . .	Mathématiques générales.
	A. Job . .	Chimie générale.
	A. Mailhe . . .	Etude des combustibles.
	L. Lutaud . . .	Géographie physique et géologie dynamique.
	Eugène Bloch .	Physique théorique et physique céleste.
	Henri Villat . .	Mécanique des fluides et applications.
	Ch. Jacob . . .	Géologie.
	P. Pascal . . .	Chimie appliquée.
	E. Hérouard . .	Zoologie.
	E. Péchard . . .	Chimie (Enseig^{t} P. C. N.).
	V. Auger . . .	Chimie analytique.
	M. Guichard . .	Chimie minérale.
	A. Guillet . .	Physique.
	C. Mauguin . .	Minéralogie.
	L. Blaringhem .	Botanique.
	A. Michel-Lévy .	Pétrographie.
	A. Dereims . .	Géologie
	R. Dongier . .	Physique du globe.
	A. Denjoy . .	Calcul différentiel et intégral.
	H. Bénard . . .	Physique (P. C. N.).
	E. Darmois . .	Physique.
	G. Bruhat . .	Physique.
	H. Mouton . .	Chimie physique.
	L. Joleaud . .	Paléontologie.
	M. Javillier . .	Chimie biologique.
	A. Dufour . . .	Physique (P. C. N.).
	F. Picard . . .	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	Robert-Lévy . .	Zoologie.
	L. Dunoyer . .	Optique appliquée.
	A. Guilliermond.	Botanique (P. C. N.).
	A. Debierne . .	Radioactivité.
Secrétaire	Daniel Tombeck.	

A LA MÉMOIRE DE MON FRÈRE

HENRI LAINÉ

CAPORAL AU 47eme RÉGIMENT D'INFANTERIE

MORT POUR LA FRANCE

A VINGT ANS.

PREMIÈRE THÈSE

Recherches sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux.

Préliminaires.

1. Relativement à l'application de la méthode de Darboux aux équations de la forme

$$(1) \qquad s = f(x, y, z, p, q)$$

on peut se proposer deux problèmes.

Problème *A. Etant donnée une équation* (1), *reconnaître si elle est intégrable par la méthode de Darboux, c'est-à-dire si elle est de la première classe.*

Problème *B. Former les équations* (1) *qui sont de la première classe.*

Ces deux problèmes sont distincts. Par exemple [1]) M. Goursat a résolu le problème B pour les équations

$$s^2 - 4\,\lambda(x, y)\,p\,q = 0;$$

cependant étant donnée une équation de ce type, on ne peut en général reconnaître par un nombre fini d'opérations si elle est de la première classe.

Le problème B a été entièrement résolu par Darboux pour l'équation linéaire

$$(2) \qquad s = a(x,y)p + b(x,y)q + c(x,y)z.$$

Il a en effet indiqué le moyen de former toutes les équations (2) dont la suite de Laplace est limitée dans les deux sens, et on sait

---

[1]) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV, p. 36—48.

que les deux problèmes sont équivalents. Ceci n'est d'ailleurs à peu près d'aucune utilité pour la résolution du problème A relatif à une équation (2); mais on doit en outre observer, et cette remarque a une portée générale pour la suite du présent travail, que si l'on impose aux coefficients a, b, c de vérifier certaines relations, un nouveau problème B se présente, distinct de celui qui a été résolu pour le cas général. Rappelons par exemple les belles recherches de Moutard et de Darboux sur les équations à invariants égaux,

$$s = c(x, y)\, z,$$

qui sont de la première classe: a et b sont ici nuls, et le problème B a dû être repris entièrement pour ces équations particulières.

2. Moutard s'est proposé de déterminer toutes les équations du second ordre dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$z = F(x, y;\ X, X', \ldots, X^{(m)};\ Y, Y', \ldots\ Y^{(m)}).$$

Il a établi que ces équations, qui sont toujours de la forme (1), sont réductibles, par des transformations *ponctuelles*, soit aux équations linéaires, soit à l'une des équations

$$s = k p z \qquad s = e^{kz} \qquad (k \text{ constant}) \tag{3}$$

qui s'intègrent sans difficulté, soit à des équations de la forme

$$s - \frac{d}{dx}\left[A(x, y)\, e^{z}\right] + \frac{d}{dy}\left[B(x, y)\, e^{-z}\right] = 0. \tag{4}$$

On pourra donc considérer le problème B comme résolu pour les équations étudiées par Moutard si l'on sait déterminer les équations (4) qui sont de la première classe. Posons

$$\frac{\partial z}{\partial y} = A\, e^{z} + \frac{\partial \log u}{\partial y} \qquad B\, e^{-z} = -\frac{\partial \log u}{\partial x}: \tag{5}$$

si l'on élimine u entre les équations (5) on a l'équation (4); si l'on élimine z on a l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \log B}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - A\, B\, u = 0. \tag{6}$$

On est donc ramené à résoudre le problème B pour les équations (6). Il résulte d'une remarque de M. Goursat [1]) que l'on peut toujours

---

[1]) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II. p. 247.

passer de l'équation (2) à une équation de la forme (6) au moyen d'un changement de variable

$$u = z\,\varphi(x, y);$$

on sait par conséquent former toutes les équations (4) intégrables par la méthode de Darboux. On leur donne généralement le nom *d'équations de Moutard.*

M. Gau [1]) a résolu le problème B pour les équations (1) qui sont linéaires en p et q,

$$s = \varrho(x, y, z)\,p\,q + a(x.\,y, z)\,p + b(x, y, z)\,q + c(x, y, z).$$

Le résultat de son étude est que les équations cherchées se ramènent, par une transformation *ponctuelle*, soit aux équations linéaires, soit aux équations (3), soit aux équations de Moutard, soit à l'équation

$$s = (e^z + e^{-z})\,p \tag{7}$$

qui admet un invariant d'ordre 3 pour le système X et un invariant d'ordre 1 pour le système Y.

Signalons enfin, pour compléter l'énoncé des travaux antérieurs à ceux de M. Gosse, que M. Goursat, dans deux Mémoires fondamentaux [2]) qui ont servi de base à toutes les études ultérieures sur ce sujet, a formé et intégré toutes les équations qui ont un invariant d'ordre 1 ou 2 pour chaque système de caractéristiques. Ces équations se ramènent, par des transformations *ponctuelles*, soit à des équations linéaires, soit à onze types canoniques que l'on trouvera dans le premier Mémoire de M. Goursat.

3. C'est M. Gosse [3]) qui a entrepris le premier l'étude du problème B relatif aux équations (1) de forme générale. Il résume ainsi sa méthode [4]).

„Des conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe un invariant ou une involution, on peut déduire des conditions seule-

---

[1]) Thèse de doctorat (Gauthier-Villars, 1911) et *Annales de l'Université de Grenoble*, t. 25, 1913, p. 95—107. Avant M. Gau, Clairin avait résolu le problème B pour les équations $s = f(x, y, z)$ (*Bulletin des Sciences Mathématiques* t. 29, 1905, p. 177).

[2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2[e] série, t, I, 1899 (p. 31—78 et 439—464).

[3]) *Annales de Toulouse*, t. XII, 1920 (p. 107—180), et t. XVI, 1924 (p. 204—240).

[4]) *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascicule XII (p. 31).

ment *nécessaires*, qui ont l'avantage d'être très simples. On profite de leur simplicité pour essayer de restreindre la généralité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$, et l'on essaye, par des transformations appropriées, de ramener l'équation à une forme canonique avantageuse".

Si l'on veut arriver, par cette méthode, à une solution rigoureuse et complète du problème B pour les équations (1), il est essentiel de préciser deux points.

En premier lieu, on peut convenir de ne pas considérer comme distinctes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par une transformation ponctuelle de la forme

$$(T_0) \qquad X = X(x) \qquad Y = Y(y) \qquad Z = Z(x, y, z).$$

C'est ce qu'a fait M. Goursat dans les Mémoires déjà cités.

En second lieu, il faut observer au contraire que deux équations telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre que par une transformation de Bäcklund doivent être considérées comme distinctes. On sait en effet que toute transformation (T_0) conserve la forme de l'équation (1), tandis que le problème de la détermination de toutes les transformations de Bäcklund admises par une équation de la forme (1) paraît présenter, même dans les cas les plus simples, des difficultés considérables.

Reprenons par exemple l'équation de M. Gau déjà signalée

$$(7) \qquad s = (e^z + e^{-z})\,p.$$

Si l'on y fait la transformation de Bäcklund

$$p = e^{z'}$$

suivie de la transformation ponctuelle

$$X = x \qquad Y = -e^{-4y} \qquad Z = z' + 2y,$$

on obtient l'équation

$$(8) \qquad S = e^Z \sqrt{YQ^2 + Q}$$

qui est une équation de M Goursat On doit pourtant considérer les équations (7) et (8) comme distinctes, car, avant les travaux de M. Gau, on ne savait pas qu'on pouvait, par une transformation de Bäcklund, passer de l'équation (8) à une autre équation de la forme (1) ayant un invariant du 1er ordre pour le système Y et un invariant d'ordre 3 pour le système X. Le fait d'avoir obtenu l'équation (7) constitue donc un résultat nouveau par rapport à ceux de M. Goursat.

La méthode à suivre découle immédiatement des considérations précédentes. En combinant les conditions *nécessaires* obtenues, conditions qui expriment des propriétés invariantes pour toute transformation (T_0), on répartit d'abord les équations (1) qui peuvent être de la première classe en un certain nombre de groupes G_1, $G_2, \ldots$, tels qu'on ne puisse passer d'un groupe à l'autre au moyen d'une telle transformation. Supposons alors que nous ayons résolu le problème B pour les groupes G_1, $G_2, \ldots$ G_n; si l'étude du groupe G_{n+1} met en évidence une transformation de Bäcklund qui permette de passer de ce groupe à une équation *particulière* E_0 du groupe G_i $(i \leqslant n)$, il faudra encore résoudre le problème B pour l'équation E_0. Et, comme nous l'avons fait remarquer à propos des équations linéaires, le problème B relatif à l'équation E_0 est distinct du problème B relatif à l'équation générale du même groupe.

4. L'étude du problème B relatif aux équations (1) a été conduite par M. Gosse avec une rare puissance de calcul. C'est en appliquant ses méthodes, et en reprenant ou complétant ses discussions, que j'ai été amené à déterminer de nouveaux types intégrables. Il semble bien d'ailleurs que la voie qu'il a ouverte soit la seule praticable, et c'est probablement en la suivant jusqu'au bout qu'il sera possible d'élucider entièrement le difficile problème à la solution duquel M Gosse a apporté de si larges contributions.

Le présent travail est divisé en quatre chapitres.

Au Chapitre I je préciserai la position du problème et les divisions que la considération des invariants amène à y introduire. Après avoir formé de nouvelles conditions nécessaires, je compléterai l'énumération des groupes G_i précédemment signalés, qui n'a été faite que partiellement jusqu'ici, et je montrerai que les équations non encore cataloguées peuvent être réparties en trois familles, suivant leur ordre minimum d'invariance.

Aux Chapitres II et III, je donnerai la solution complète du problème B pour les deux premières familles.

Au Chapitre IV, j'étudierai un cas particulier du problème B relatif aux équations de la troisième famille qui sont linéaires par rapport à *l'une* des dérivées p ou q, et je ferai connaître, au cours de cette étude, un certain nombre de propositions de portée générale qui sont de nature à faciliter l'extension du résultat obtenu. Le caractère négatif de ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il n'est plus vrai pour les équations non linéaires: j'indiquerai en effet en terminant un nouveau type intégrable admettant un invariant d'ordre 3 pour chaque système de caractéristiques.

Je remercie M. Goursat d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail.

J'adresse aussi l'expression de ma bien vive gratitude à M. Bouligand, qui a orienté mes premières recherches; si j'ai persévéré dans une voie plutôt aride, je le dois en partie à ses encouragements affectueux et à l'appui de sa très cordiale amitié.

CHAPITRE I.

Position et division du problème.

5. Nous allons chercher un système de conditions nécessaires pour qu'une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{1}$$

admette un invariant. Ce problème a déjà été résolu partiellement par M. Gau et par M. Gosse.

Faisons d'abord connaître une notation qui nous sera souvent utile. Nous poserons, d'une façon générale, u désignant une fonction des variables $x, y, z, p, \ldots, p_m$,

$$\Delta^x_m u = \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + f\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{df}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \ldots + \frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\frac{\partial u}{\partial p_m};$$

de même, v désignant une fonction des variables $x, y, z, q, \ldots q_n$, nous poserons

$$\Delta^y_n v = \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{df}{dy}\frac{\partial v}{\partial q_2} + \ldots + \frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\frac{\partial v}{\partial q_n}.$$

Les lettres p_i, q_k ont ici leur signification usuelle dans la théorie des équations (1), ainsi que les symboles $\frac{d^if}{dx^i}$, $\frac{d^kf}{dy^k}$. Rappelons aussi la notation classique

$$\frac{d^mf}{dx^m} = p_{m+1}\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d^mf}{dx^m}\right) \qquad \frac{d^nf}{dy^n} = q_{n+1}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{d^nf}{dy^n}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que u soit un invariant s'écrit alors, comme on sait,

$$\Delta^x_m u = 0. \tag{2}$$

De même, pour que l'équation $u = 0$ soit en involution avec (1), il faut et il suffit que l'équation (2) soit une conséquence de $u=0$. D'une façon plus précise, pour que l'équation

$$p_{m+1}+u(x, y, z, p, \ldots p_m)=0$$

soit en involution avec (1), il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\Delta_m^x u+\frac{d^m f}{dx^m}=(p_{m+1}+u)\frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{ou} \quad \Delta_{m+1}^x \operatorname{Log}(p_{m+1}+u)=\frac{\partial f}{\partial p}.$$

6. Pour simplifier, nous conviendrons de dire qu'une équation (1) qui admet un invariant d'ordre n pour le système X, par exemple, sans admettre aucun invariant d'ordre inférieur, est *de genre n* pour ce système.

Considérons alors une équation (1) qui soit de genre $n>2$ pour le système X, et commençons par rappeler un certain nombre de résultats dûs à M. Gau et à M. Gosse.

Posons d'une façon générale, avec M. Gosse, λ désignant une fonction des variables $x, y, z, p, \ldots p_k$,

$$E_x^k(\lambda)=\Delta_k^x \lambda+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}$$

Un invariant d'ordre $n \geqslant 3$ pour le système X est, comme l'a montré M. Goursat, de la forme

(3) $$[p_n+\psi(x, y, z, p, \ldots p_{n-1})]\, A(x, y, z, p, \ldots p_{n-k})$$

Supposons que l'invariant (3) soit l'invariant d'ordre minimum. Deux cas sont à distinguer:

1°. Il existe une fonction $\lambda(x, y, z, p) \neq 0$ telle que

(4) $$E_x^1(\lambda)=0.$$

On peut alors dans (3) prendre

$$k=n-1 \qquad A=\lambda;$$

l'équation

$$p_n+\psi=0$$

est en involution avec (1), et il n'y a aucune involution d'ordre m tel que $1<m<n$ pour le système X.

2° L'équation (4) n'a que la solution $\lambda=0$[1]. Dans ce cas on a

$$A=[p_{n-k}+\vartheta(x, y, z, p, \ldots p_{n-k-1})]^{-1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-2);$$

les équations

$$p_{n-k}+\vartheta=0 \qquad p_n+\psi=0$$

[1]) Nous ne tiendrons pas compte désormais des involutions d'ordre 1 qui pourraient exister sans que l'équation (4) ait des solutions non nulles.

sont en involution avec (1), et la première est la seule involution d'ordre inférieur à n pour le système X.

M. Gau a établi[1]) que si l'équation

$$E_x^k(\lambda) = 0 \tag{5}$$

n'a aucune solution non nulle pour $k \leqslant 2$, et si m est l'ordre minimum d'involution pour le système X ($m \geqslant 3$), la fonction f doit vérifier les deux conditions

$$C_1(\alpha) \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$$

$$C_2(\alpha_1) \equiv \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + q\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + (m-1)\left[\alpha\left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \\ + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

α et α_1 désignant des fonctions des seules variables x, y, z, p.

Posons encore

$$E_y^k(\mu) = \Delta_k^y \mu + \mu\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Si l'équation

$$E_y^k(\mu) = 0 \qquad (k \leqslant 2)$$

n'a que la solution $\mu = 0$, et si m' est l'ordre minimum d'involution pour le système Y, la fonction f doit de même vérifier les deux conditions

$$C_1'(\beta) \equiv \frac{\partial \beta}{\partial x} + p\frac{\partial \beta}{\partial z} + f\frac{\partial \beta}{\partial q} + \beta\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0$$

$$C_2'(\beta_1) \equiv \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + p\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + f\frac{\partial \beta_1}{\partial q} + (m'-1)\left[\beta\left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] + \\ + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

β et β_1 désignant des fonctions de x, y, z, q.

Supposons maintenant que l'équation (5) ait, pour l'une des valeurs $k = 0$, 1 ou 2 une solution non nulle, et observons d'abord que de cette équation on tire

$$\Delta_x^k \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial p},$$

[1]) Thèse, p. 37.

ce qui montre que l'équation

$$\frac{1}{\lambda}=0$$

est en involution avec (1) (n° 5).

Si l'on a $k=0$ ou $k=1$, M. Gosse a établi [1]) que la fonction f devait vérifier les conditions

$$\Gamma_1(\lambda)\equiv\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

$$\Gamma_2(\vartheta)\equiv\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+q\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+f\frac{\partial\vartheta}{\partial p}-\lambda X(x)\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

On a évidemment des conditions analogues pour le système Y.

Si l'on a $k=2$, l'équation (1) admet une involution d'ordre 2; réciproquement, ce qui n'a pas lieu pour $k<2$, si l'équation (1) admet une involution d'ordre 2,

$$p_2+\vartheta=0,$$

on voit aisément que l'on a

$$E_x^2\left(\frac{1}{p_2+\vartheta}\right)=0.$$

On est donc amené naturellement à répartir les équations qui sont de genre $n\geqslant 3$ pour le système X en trois catégories:

1° Celles qui satisfont aux conditions Γ de M. Gosse; elles ont une involution d'ordre 0 ou 1.

2° Celles qui admettent une involution d'ordre minimum égal ou supérieur à 3: elles doivent satisfaire aux conditions C de M. Gau.

3° Celles qui admettent une involution d'ordre minimum égal à 2.

Nous allons maintenant chercher, pour ces dernières équations, un système de conditions nécessaires.

7. Supposons donc que l'équation (1) admette 1° une involution et une seule d'ordre 2

$$p_2+\psi(x, y, z, p)=0; \tag{6}$$

2° une involution d'ordre $n>2$

$$p_n+\vartheta(x, y, z, p, \dots p_{n-1})=0, \tag{7}$$

étant entendu qu'il n'existe aucune autre involution d'ordre compris entre 2 et n, et que l'équation

[1]) *Annales de Toulouse,* t. XII, 1920, p. 148.

$$\Delta_1^x A + A\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

n'a que la solution $A = 0$.

Lemme. — Soit $u(x, y, z, p, \ldots, p_m)$ une solution de l'équation

$$\Delta_m^x u + k u \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

où k désigne une constante, et m un entier positif compris entre 1 et n. La fonction u est nécessairement de la forme

$$\xi(x)(p_2 + \psi)^{-k}.$$

En effet, posons $u = v^k$; on aura, si $v \neq 0$ et si m est l'ordre réel de u,

$$\Delta_m^x v + v\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_m^x \operatorname{Log} v + \frac{\partial f}{\partial p} = 0;$$

soit $w = \operatorname{Log} v$; dérivons la dernière équation par rapport à p_m: on aura, en remarquant que $\dfrac{\partial w}{\partial p_m} \neq 0$,

$$\Delta_m^x \frac{\partial w}{\partial p_m} + \frac{\partial w}{\partial p_m}\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_m^x \operatorname{Log}\frac{\partial w}{\partial p_m} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

donc

$$\Delta_m^x\left(w - \operatorname{Log}\frac{\partial w}{\partial p_m}\right) = 0 \qquad \operatorname{Log}\frac{\partial w}{\partial p_m} - w = \operatorname{Log}[-\xi_0(x)]$$

$$e^{-w} = \xi_0\,[p_m + \varphi(x, y, z, p, \ldots, p_{m-1})],$$

et enfin

$$v = e^w = \xi_1(p_m + \varphi)^{-1}.$$

D'ailleurs l'équation $\dfrac{1}{v} = 0$ est en involution avec (1). On a donc

$$m = 2, \qquad \varphi \equiv \psi, \qquad u = v^k = \xi(x)(p_2 + \psi)^{-k},$$

ce qui démontre notre proposition.

8. Ecrivons maintenant que l'équation (7) est en involution avec (1),

$$\Delta_{n-1}^x \vartheta + \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) = \vartheta\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{8}$$

M. Gau a montré[1]) que l'on a, pour $n > 3$,

[1]) Thèse, p. 36.

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = p_{n-1}\left[(n-1)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right] +$$
$$+ \varrho(x, y, z, p, q, p_2, p_3, \ldots p_{n-2}) = M_{n-1}^{n-1} p_{n-1} + \varrho.$$

Cette formule n'est plus exacte pour $n = 3$; on a alors

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + p_2\left[2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right] + \lambda\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Nous réserverons le cas où f est linéaire en p; on a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0 \qquad\qquad M_{n-1}^{n-1} \neq 0.$$

Dérivons l'équation (8) par rapport à p_{n-1}; on aura, pour $n \geqslant 3$,

(9) $$\Delta_{n-1}^{x}\,\vartheta' + M_{n-1}^{n-1} = 0.$$

Soit $m \geqslant 2$ l'ordre réel de ϑ'; nous examinerons successivement les hypothèses

$$m = 2 \qquad m = 3 \qquad 3 < m \leqslant n - 1.$$

9. *Première hypothèse*: $m = 2$.

Posons

$$\vartheta' = \mu(x, y, z, p_1, p_2) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial p_2} = \mu' \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial p_2^2} = \mu''.$$

En dérivant deux fois par rapport à p_2 l'équation (9) et appliquant le Lemme, on trouve

$$\mu = \vartheta' = \xi\,\mathrm{Log}\,(p_2 + \psi) + p_2\,\vartheta_1\,(x, y, z, p) + \vartheta_2\,(x, y, z, p).$$

Remplaçant ϑ' par cette valeur dans l'équation (3) et annulant séparément le coefficient de p_2 et le terme indépendant de p_2, on a

$$\Delta_1^x \vartheta_1 + \vartheta_1 \frac{\partial f}{\partial p} + (n-1)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

$$\Delta_1^x \vartheta_2 + \vartheta_1\left(\frac{df}{dx}\right) + \xi\frac{\partial f}{\partial p} + (n-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Par hypothèse, on a d'ailleurs

$$\Delta_1^x \psi - \psi\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0,$$

d'où

$$\Delta_1^x \frac{\partial \psi}{\partial p} - \psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + K = 0 \qquad \left(K = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right);$$

posons alors

$$\vartheta_1 = (n-1)\,\alpha \qquad \vartheta_2 = (2-n)\,\alpha_1 + (n-1)\left(\alpha\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial p}\right),$$

et changeons ξ en $(2-n)\,\xi$: les conditions précédemment obtenues s'écrivent

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x\,\alpha + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0\\ &\Delta_1^x\,\alpha_1 + \xi\frac{\partial f}{\partial p} + K = 0\end{aligned}$$

La première équation (10) est identique à la condition (C_1) de M. Gau.

10. *Deuxième hypothèse*: $m = 3$.

Posons

$$\vartheta' = \psi_1(x, y, z, p, p_2, p_3).$$

En dérivant l'équation (9) par rapport à p_3 et appliquant le Lemme, on trouve

$$\vartheta' = \psi_1 = \xi_1\,\frac{p_3 + \varphi(x, y, z, p, p_2)}{p_2 + \psi}.$$

Portons cette valeur dans l'équation (9); on aura

$$(11)\qquad \Delta_2^x\,\varphi - \varphi\frac{\partial f}{\partial p} + \left(1 + \frac{n-1}{\xi_1}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\,p_2^2 + \varrho_0\,p_2 + \varrho_1 = 0,$$

avec

$$\varrho_0 = \frac{n-1}{\xi_1}\,\psi\,\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \left(2 + \frac{n-1}{\xi_1}\right)\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \left(1 + \frac{1}{\xi_1}\right)K,$$

$$\varrho_1 = \frac{\psi}{\xi_1}\left[(n-1)\left(\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p}\right) + K\right] + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right).$$

Supposons d'abord

$$1 + \frac{n-1}{\xi_1} = \xi_2 \neq 0.$$

En dérivant trois fois de suite l'équation (11) par rapport à p_2 on aura

$$(12)\qquad \begin{gathered} \Delta_2^x\,\varphi' + 2\,\xi_2\,p_2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \varrho_0 = 0, \quad \Delta_2^x\,\varphi'' + \varphi''\frac{\partial f}{\partial p} + 2\,\xi_2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,\\ \Delta_2^x\,\varphi''' + 2\,\varphi'''\frac{\partial f}{\partial p} = 0,\end{gathered}$$

et par suite

$$\varphi' = \xi_3\,\mathrm{Log}\,(p_2 + \psi) + p_2\,\sigma(x, y\;z, p) + \sigma_1(x, y, z, p).$$

La première équation (12), où l'on remplace φ' et ϱ_0 par leurs valeurs, donne alors

$$\Delta_1^x \sigma + \sigma \frac{\partial f}{\partial p} + 2\xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$$

$$\Delta_1^x \sigma_1 + \sigma\left(\frac{df}{dx}\right) + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial p} + (\xi_2 + 1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \\ + \left(\frac{1}{\xi_1} + 1\right) K + (\xi_2 - 1)\,\psi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Posant enfin

$$\sigma = 2\xi_2 \alpha \qquad \sigma_1 = \alpha_1 + 2\xi_2 \alpha \psi + (\xi_2 + 1)\frac{\partial \psi}{\partial p},$$

on aura les deux conditions

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \alpha + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0 \\ &\Delta_1^x \alpha_1 + \xi \frac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0. \end{aligned}$$

Les conditions (10) sont un cas particulier des conditions (13). Il est clair, d'ailleurs, qu'on peut toujours satisfaire à la seconde condition (13) en prenant $\xi = \xi_0 = \alpha_1 = 0$.

Supposons en second lieu

$$1 + \frac{n-1}{\xi_1} = 0.$$

L'équation (11) donne alors

$$\text{(14)} \qquad \Delta_2^x \varphi - \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_0 p_2 + \varrho_1 = 0,$$

et on en tire, en dérivant deux fois par rapport à p_2 et appliquant le Lemme,

$$\varphi = \xi_4 (p_2 + \psi) \operatorname{Log}(p_2 + \psi) + p_2 \sigma_0(x, y, z, p) + \sigma_1(x, y, z, p).$$

En portant cette valeur dans l'équation (14) on aura

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \sigma_0 + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_0 = 0 \\ &\Delta_1^x \sigma_1 - \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial p} + \sigma_0 \left(\frac{df}{dx}\right) + \xi_4 \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \varrho_1 = 0. \end{aligned}$$

Posons dans la première équation (15)

$$\sigma_0 = \sigma + \left(2 + \frac{n-1}{\xi_1}\right)\frac{\partial \psi}{\partial p}:$$

elle s'écrira

$$(16)\qquad \Delta_1^x \sigma + 2\left(1+\frac{n-1}{\xi_1}\right)\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \left(1+\frac{n-2}{\xi_1}\right)K + \xi_4\frac{\partial f}{\partial p} = 0;$$

posons de même, dans la seconde équation (15),

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \sigma\psi + \left(2+\frac{n-1}{\xi_1}\right)\psi\frac{\partial\psi}{\partial p}:$$

elle s'écrira

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \alpha_1 - \alpha_1\frac{\partial f}{\partial p} - \psi\left[\frac{n-1}{\xi_1}\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + K + 2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \\ &\qquad + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Remplaçant dans les équations (16) et (17) ξ_1 par $1-n$, σ par $\frac{\alpha}{1-n}$ et ξ_4 par $\frac{\xi}{1-n}$, on a finalement les conditions

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\Delta_1^x \alpha + \xi\frac{\partial f}{\partial p} + K = 0 \\ &\Delta_1^x \alpha_1 - \alpha_1\frac{\partial f}{\partial p} + \psi\left[\psi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - K - 2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

11. *Troisième hypothèse*: $m > 3$.

Posons

$$\vartheta' = \psi_1(x, y, z, p, \dots p_m) \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial p_m} = \psi'_1 \not\equiv 0.$$

On trouve alors, comme dans l'hypothèse précédente,

$$\psi_1 = \xi_1\frac{p_m+\varphi}{p_2+\psi} \qquad (\xi_1 \neq 0).$$

L'équation

$$\Delta_{n-1}^x \psi_1 + M_{n-1}^{n-1} = 0$$

donne ensuite

$$\frac{\xi_1}{p_2+\psi}\left[\Delta_{m-1}^x \varphi - \varphi\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)\right] + M_{n-1}^{n-1} = 0,$$

et, après dérivation par rapport à p_{m-1},

$$\Delta_{m-1}^x \varphi' + M_{m-1}^{m-1} = 0.$$

La fonction φ' est au moins d'ordre 2; si elle est d'ordre supérieur à 3, on recommencera le raisonnement précédent, et, en continuant de la sorte, on finira nécessairement par retomber sur une des hypothèses déjà étudiées.

En résumé, si la fonction f n'est pas linéaire en p, elle est assujettie à vérifier l'un des systèmes (13) ou (18), et en outre la relation

$$\Delta_1^2 \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0,$$

qui exprime l'existence d'une involution d'ordre 2.

12. Dans tout ce qui précède nous avons supposé $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0$. Voyons ce qui se produit dans le cas où f est linéaire en p.

Soit toujours m l'ordre réel de ϑ'. Si $m = 2$, on retrouve les conditions (10), et l'on a nécessairement $\alpha = 0$, sans quoi f vérifierait la condition Γ_1.

Supposons $m = 3$. L'équation (11) donne alors les conditions (16) et (17) où l'on fait $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0$ et où ξ_1 est arbitraire. On a ainsi les conditions

$$\Delta_1^2 \sigma + \xi_0 K + \xi \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

$$\Delta_1^2 \alpha_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \psi \left[K + 2\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) = 0;$$

on peut toujours satisfaire à la première en prenant $\sigma = \xi_0 = \xi = 0$.

Si $m > 3$, on voit, comme au n° 11, qu'on peut de proche en proche se ramener à l'hypothèse $m \leqslant 3$.

Il nous reste donc à examiner l'hypothèse $m < 2$ qu'on ne peut plus exclure a priori. Dans ce cas l'équation (9) peut s'écrire

$$\Delta_1^2 \vartheta' + (n-1)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) + K = 0;$$

posons

$$\vartheta' = (2-n)\,\sigma + (n-1)\frac{\partial \psi}{\partial p}:$$

il viendra

$$\Delta_1^2 \sigma + K = 0.$$

C'est un cas particulier de la seconde équation (10).

13. Nous pouvons maintenant indiquer une classification des équations (1) qui sont intégrables par la méthode de Darboux, c'est-à-dire qui possèdent, outre les invariants x et y, un autre invariant pour chaque système de caractéristiques.

Nous ne considérons pas comme distinctes des équations que l'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation ponctuelle; d'autre part nous laissons de côté:

1° les équations linéaires en p et q, qui ont été étudiées complètement par M Gau;

2° les équations de genre 1 ou 2 au plus pour chaque système de caractéristiques, qui ont été déterminées par M. Goursat.

Nous répartirons alors les autres équations en trois groupes.

Groupe A. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre 1 pour l'un des systèmes de caractéristiques, et de genre $n \geqslant 3$ pour l'autre. Nous déterminerons au chapitre II les équations de ce groupe; il comprend trois familles, dont deux ont déjà été obtenues par M. Gosse.

Groupe B. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre 2 pour l'un des systèmes de caractéristiques, et de genre $n \geqslant 3$ pour l'autre. Nous verrons, au chapitre III, que ces équations peuvent se ramener à deux types canoniques dont nous formerons les invariants.

Groupe C. — Ce groupe comprendra les équations qui sont de genre $n \geqslant 3$ pour chaque système de caractéristiques.

Considérons, parmi les équations du groupe C, celles dont l'ordre minimum d'involution, relativement au système X par exemple, est égal à 2. Nous venons d'établir qu'elles doivent vérifier l'un ou l'autre des systèmes suivants:

$$(G) \quad \begin{cases} G_1(\psi) \equiv \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0 \\ G_2(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha + \alpha \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0 \\ G_3(\alpha_1) \equiv \Delta_1^x \alpha_1 + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0 \qquad \left(\xi_0 \neq 0 \text{ si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0\right) \end{cases}$$

$$(H) \quad \begin{cases} H_1(\psi) \equiv \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0 \\ H_2(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \xi_0 K = 0 \qquad \left(\xi_0 \neq 0 \text{ si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0\right) \\ H_3(\alpha) \equiv \Delta_1^x \alpha_1 - \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial p} + \psi\left[\psi \dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2} - K - 2\left(\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\right] + \\ \qquad + \left(\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

On aurait évidemment, pour le système Y, deux systèmes analogues de conditions nécessaires, (G') et (H'), qu'il est inutile d'écrire.

Ceci posé, on voit que l'étude des équations du groupe C se ramènera, conformément à la méthode indiquée par M. Gosse, à l'étude de la compatibilité de l'un des systèmes C, Γ, G et H avec l'un des systèmes C' Γ'. G' et H'. En se bornant aux cas essentiellement distincts, on aura donc à faire l'étude successive des dix cas

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma - \Gamma' & \Gamma - G' & \Gamma - H' & \Gamma - C' & G - G' \\ G - H' & G - C' & H - H' & H - C' & C - C' \end{array}$$

Notons toutefois que si l'on se propose de résoudre le problème B pour les équations (1) qui sont linéaires par rapport à l'une des dérivées partielles du 1er ordre, p par exemple, on ne pourra plus, en raison de la dissymétrie ainsi introduite, considérer comme non distincts deux cas tels que $\Gamma - G'$ et $G - \Gamma'$. Le nombre des cas réellement distincts est alors porté à seize.

CHAPITRE II.

Détermination des équations du groupe A.

14. Nous pouvons évidemment nous borner à rechercher les équations qui ont un invariant du premier ordre pour le système Y et un invariant d'ordre $n \geqslant 3$ pour le système X.

Une équation qui admet, outre les invariants x et y, un invariant du premier ordre pour le système Y est de la forme

$$s\frac{\partial\varphi(x,y,z.q)}{\partial q} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} \neq 0\right),$$

ou

$$s = f(x,y,z,p,q) = p\,\varrho(x,y,z,q) + \omega(x,y,z,q), \tag{1}$$

avec

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \omega\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0$$

La condition de compatibilité de ces deux dernières équations nous fournit la relation fondamentale

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} + \varrho\frac{\partial\omega}{\partial q} = \frac{\partial\varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial\varrho}{\partial q}. \tag{R}$$

L'équation (1) doit en outre pour être de la 1re classe satisfaire aux conditions Γ, C, G ou H. Nous allons faire successivement l'étude de ces différentes conditions.

§ 1. Etude des conditions Γ; les équations de M. Gosse.

15. La condition Γ_1 s'écrit

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dérivons deux fois l'équation (2) par rapport à q; on aura

$$(p\,\varrho'' + \omega'') \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda\, \varrho'' = 0,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport à q.

Supposons d'abord $\varrho'' \neq 0$; on aura

$$\lambda = \frac{1}{\lambda_0\, p + \lambda_1},$$

λ_0 et λ_1 étant des fonctions des seules variables x, y, z,; l'équation (2) donne alors

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda_0}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \lambda_0\, \omega - \varrho\, \lambda_1 = 0.$$

Si λ_0 était nul, on aurait $\lambda_1 \neq 0$, $\varrho'' = 0$. Donc λ_0 n'est pas identiquement nul, et on peut prendre $\lambda_0 = 1$. On a alors, en remplaçant λ par sa valeur dans l'équation (2),

$$\omega = \varrho\, \lambda_1 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - q \frac{\partial \lambda_1}{\partial z},$$

et l'équation (1) s'écrit

$$s + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = (p + \lambda_1)\, \varrho.$$

Prenant enfin une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0,$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = p\, \varrho(x, y, z, q),$$

pour laquelle $\omega = 0$, et la relation (R) donne alors

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0.$$

On obtient donc les équations

$$s = p\,\varphi(y, z, q).$$

Les équations de ce type qui sont de la première classe ont été déterminées et intégrées par M. Gosse [1]).

16. Supposons en second lieu $\varrho'' = 0$. Comme $\omega'' \neq 0$, on devra avoir

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0,$$

et par suite

$$\varrho = -\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} - q\frac{\partial \log \lambda}{\partial z};$$

l'équation (1) s'écrit donc

$$\lambda s + p\frac{\partial \lambda}{\partial y} + p\,q\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda\,\omega(x, y, z, q).$$

Si l'on prend une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \lambda(x, y, z),$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = \omega(x, y, z, q),$$

pour laquelle ϱ est nul, et la relation (R) donne

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

On obtient donc finalement les équations

$$s = \varphi(x, y, q).$$

Les équations de ce type qui sont de la première classe ont été également déterminées et intégrées par M. Gosse [2]).

§ 2. Etude des conditions C

17. Nous reprendrons, en la poussant jusqu'au bout, une discussion de M. Gosse [3]) relative aux équations (1) qui satisfont aux conditions C. M. Gosse établit que ces équations peuvent se rame-

---

[1]) *Annales de Toulouse*, 3^e série, t. XVI, 1924, p. 334—240.
[2]) *Annales de Toulouse*, 3^e série, t. XVI, 1924, p. 224—234.
[3]) *Annales de Toulouse*, 3^e série, t. XVI, 1924, p. 210—211.

ner, par des transformations ponctuelles, à des équations qui satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z}+\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}+\frac{\partial m}{\partial y}+q\frac{\partial m}{\partial z}=\psi(x, y, \varrho) \tag{4}$$

$$(n-1)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial z}+\varrho\frac{\partial \omega}{\partial q}+\frac{\partial l}{\partial y}+q\frac{\partial l}{\partial z}=0, \tag{5}$$

l et m désignant des fonctions de x, y, z, et n l'ordre minimum d'involution pour l'équation (1) relativement au système (X). Ce sont ces conditions que nous allons discuter.

Supposons d'abord que ϱ soit une fonction linéaire de q,

$$\varrho=\varrho_0(x, y, z)\,q+\varrho_1(x, y, z).$$

Si ϱ_0 était nul, il en serait de même de $\frac{\partial \varrho}{\partial q}$ et $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$; un changement de fonction inconnue permettrait alors de supposer $\varrho=0$, et la condition Γ_1 admettrait pour solution une fonction arbitraire de x. On a donc $\varrho_0 \neq 0$, et l'équation (3) donne en particulier

$$\frac{\partial \varrho_0}{\partial z}+\varrho_0^2=0. \tag{6}$$

Prenons comme variables indépendantes x, y, z, ϱ au lieu de x, y, z, q, et posons

$$\omega(x, y, z, q)=\overline{\omega}(x, y, z, \varrho).$$

Remplaçons dans l'équation (4) q par sa valeur (3) et dérivons par rapport à z: nous aurons une équation de la forme

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z}-\varrho_0\,\overline{\omega}=A(x, y, z)\,\varrho+B(x, y, z). \tag{7}$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial \omega}{\partial z}+\varrho\frac{\partial \omega}{\partial q}=\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z},$$

et l'équation (5) donne alors

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z}+(n-1)\,\varrho_0\,\overline{\omega}=A_1(x, y, z)\,\varrho+B_1(x, y, z) \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) montrent que $\overline{\omega}$ est une fonction linéaire de ϱ: l'équation (1) est donc alors une équation de M. Gau.

18. Nous supposerons donc $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial q^2} \neq 0$; on tire alors de l'équation (3)

(9) $$q = \varrho z + g(x, y, \varrho) \text{ avec } \frac{\partial^2 q}{\partial \varrho^2} = g'' \neq 0.$$

Des équations (3), (4), (5) et (9) on tire ensuite après quelques transformations faciles, en posant

(10) $$\alpha = l - (n+1)m,$$

(11) $$n\psi + (\varrho z + g)\frac{\partial(\alpha + m)}{\partial z} + \frac{\partial(\alpha + m)}{\partial y} = (z + g')\left[\varrho \frac{\partial m}{\partial z} + \right. \left. + (\varrho z + g)\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y \partial z}\right],$$

d'où, en prenant le système de variables x, y, z, ϱ et dérivant par rapport à z,

(12) $$\varrho \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (\varrho z + g)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = (z + g')\left[2\varrho \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + \right. \left. + (\varrho z + g)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 m}{\partial y \partial z^2}\right].$$

Ecartons d'abord l'hypothèse $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = 0$; l'équation (12) ne peut se réduire à une identité, et on en tire

$$g' = \frac{b_0 g + b_1 \varrho + b_2}{a_0 g + a_1 \varrho + a_2}.$$

Remplaçant g' par cette valeur dans l'équation (12) on obtient une équation de la forme

(13) $$A g^2 + g(B\varrho + C) + D\varrho^2 + E\varrho + F = 0.$$

Si cette équation n'est pas vérifiée identiquement, on en tire g, et l'équation (12) montre alors que les hypothèses $g'' \neq 0$ et $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \neq 0$ sont incompatibles L'équation (13) doit donc être vérifiée identiquement, ce qui donne les conditions

(14) $$a_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_0 z + b_0)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}$$

(15) $$a_0\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + z\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right) + a_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = (a_1 z + b_1)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} + (a_0 z + b_0)\left(2\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right)$$

$$(16) \qquad a_1\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}+z\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right)=(a_1 z+b_1)\left(2\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}+z\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right)$$

$$(17) \quad a_0\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z}+a_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}=(a_0 z+b_0)\frac{\partial^3 m}{\partial y\,\partial z^2}+(a_2 z+b_2)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} a_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z}+a_2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}+z\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right)&=(a_1 z+b_1)\frac{\partial^3 m}{\partial y\,\partial z^2}+\\ &+(a_2 z+b_2)\left(2\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}+z\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right)\end{aligned}$$

$$(19) \qquad a_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z}=(a_2 z+b_2)\frac{\partial^3 m}{\partial y\,\partial z^2}.$$

Supposons d'abord $a_0 \neq 0$; on peut prendre $a_0 = 1$. On tire alors de (14), (15) et (16)

$$(b_1 - a_1 b_0)\left[2\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}+(z-a_1)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3}\right]=0;$$

si $b_1 - a_1 b_0 \neq 0$, on aura donc

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}=m_1(x,y)(z-a_1)^{-2};$$

portant cette valeur dans (14) et (15) et remarquant que m_1 n'est pas nul, on est conduit à une impossibilité. On doit donc prendre

$$b_1 - a_1 b_0 = 0,$$

et les équations (14) et (15) donnent alors

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}=m_1(x,y)(z+b_0)^{-2} \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z}=2m_1(z+b_0)^{-1}.$$

Portons dans (19) en remarquant qu'on ne peut avoir

$$b_2 - a_2 b_0 = 0,$$

car on en déduirait $g' = b_0$; on aura

$$\frac{\partial b_0}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial m_1}{\partial y}=0$$

et l'équation (17) conduit alors à une impossibilité.

On a donc nécessairement $a_0 = 0$ Si $b_0 = 0$, on tire de (15) et (16)

$$a_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}=(a_1 z+b_1)\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} \qquad a_1\frac{\partial\alpha}{\partial z}=2(a_1 z+b_1)\frac{\partial^2 m}{\partial z^2};$$

on ne peut avoir $a_1 = 0$, donc on peut prendre $a_1 = 1$ et l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 2 m_1 (z + b_1)^{-1} \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = m_1 (z + b_1)^{-2}:$$

l'équation (17) donne alors

$$b_2 = a_2 b_1,$$

et l'on en tire $g' = b_1$ Par suite b_0 n'est pas nul, et l'on peut prendre $b_0 = 1$. L'équation (14) donne donc

$$\frac{\partial^3 m}{\partial z^3} = 0$$

et les équations (15) et (16) sont incompatibles avec l'hypothèse $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \neq 0$.

19. La seule hypothèse à conserver est donc l'hypothèse

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$m = m_0(x, y) z + m_1(x, y);$$

on aura d'après (10)

$$l = (n + 1) [m_0 z + m_2(x, y)].$$

Prenant alors le système de variables x, y, z, ϱ, on tire des équations (4), (5) et (9),

$$\overline{\omega} = \frac{\partial g}{x} + (z + g') \left[\psi - \frac{\partial m_0}{\partial y} z - \frac{\partial m_1}{\partial y} - m_0 (\varrho z + g)\right]$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial z} = -2 \left[\frac{\partial m_0}{\partial y} z + \frac{\partial m_2}{\partial y} + m_0 (\varrho z + g)\right] - (n - 1) \psi.$$

La condition de compatibilité de ces deux dernières équations détermine ψ, et on arrive finalement à la conclusion suivante:

Les équations (1) qui vérifient les conditions (C) sont telles que l'on ait

$$q = \varrho z + g(x, y, \varrho) \tag{9}$$

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \varrho\right) (g' - n z) - (n + 1) \mu g + \mu_1\right] (z + g'), \tag{20}$$

$g(x, y, \varrho)$, $\mu(x, y)$ et $\mu_1(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires.

20. Si ces équations sont de genre 1 pour le système Y, on doit en outre avoir la relation fondamentale

$$(R) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q}.$$

Avec le système de variables x, y, z, ϱ, on a d'ailleurs

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \omega}{\partial q} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \varrho}{\partial q} = \frac{1}{z + g'}\left(\bar{\omega} - \frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

et la relation (R) s'écrit, compte tenu de (20),

$$- 2nz\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right) + g'\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right)(1 - n) - (n+1)\mu g + \mu_1$$
$$= \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\varrho\right)(g' - nz) - (n+1)\mu g + \mu_1,$$

ce qui exige $\mu = 0$. Les fonctions ϱ et ω sont donc définies par les relations

$$q = z\varrho + g(x, y, \varrho) \qquad \omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g')\mu_1(x, y).$$

Si l'on prend une nouvelle fonction inconnue $Z = \mu_0(x, y)z$ telle que

$$\frac{\partial^2 \log \mu_0}{\partial x \, \partial y} + \mu_1 = 0,$$

on aura une équation de même forme avec $\mu = 0$ En définitive, les équations cherchées peuvent se mettre, compte tenu de l'équation (9), sous la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial x} + p\frac{\partial \varrho}{\partial z} + s\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0.$$

Les équations (21) admettent visiblement l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$q = Yz + g(x, y, Y),$$

où Y désigne une fonction arbitraire.

Proposons-nous maintenant de déterminer toutes les équations (21) qui sont de la 1ère classe. D'après ce que nous venons de voir, ces équations peuvent s'écrire indifféremment sous l'une ou l'autre des formes

$$s = f(x. y, z, p, q) = p\varrho + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{avec} \quad q = \varrho z + g(x, y, \varrho),$$

ou

$$\frac{d\varrho}{dx} = 0.$$

On aura d'abord

$$\frac{df}{dx}=p_2\varrho+p\frac{d\varrho}{dx}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial\varrho}\frac{d\varrho}{dx}=p_2\varrho+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

et d'une façon générale

$$\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}=p_k\varrho+\frac{\partial^k g}{\partial x^k}.$$

Soit

$$p_n+\lambda(x,y,z,p,\dots p_{n-1})=0$$

l'involution d'ordre minimum pour le système X; on aura

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}+f\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\frac{df}{dx}\frac{\partial\lambda}{\partial p_2}+\dots+\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n-1}}+\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)=\lambda\frac{\partial f}{\partial p},$$

ou encore, en prenant ϱ comme variable indépendante à la place de q,

$$(22)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial\lambda}{\partial y}+(\varrho z+g)\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\left(\varrho p+\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}+\dots+\\&+\left(\varrho p_{n-1}+\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n-1}}+\frac{\partial^n g}{\partial x^n}-\lambda\varrho=0.\end{aligned}$$

Dérivons l'équation (22) par rapport à p_{n-1}, en posant $\frac{\partial\lambda}{\partial p_{n-1}}=\lambda'$; on aura

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial y}+(\varrho z+g)\frac{\partial\lambda'}{\partial z}+\dots\dots+\left(\varrho p_{n-1}+\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}\right)\frac{\partial\lambda'}{\partial p_{n-1}}=0,$$

équation qui exprime que λ' est un invariant; on a donc

$$\lambda'=\xi_0\quad\text{d'où}\quad\lambda=\xi_0 p_{n-1}+\lambda_1(x,y,z.p,\dots,p_{n-2}).$$

L'équation (22) s'écrit alors

$$(23)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+(\varrho z+g)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}+\dots+\left(\varrho p_{n-2}+\frac{\partial^{n-2}g}{\partial x^{n-2}}\right)\frac{\partial\lambda_1}{\partial p_{n-2}}+\\&+\xi_0\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}+\frac{\partial^n g}{\partial x^n}-\lambda_1\varrho=0.\end{aligned}$$

En recommençant sur l'équation (23) le calcul que nous venons de faire sur l'équation (22), nous aurons

$$\lambda_1=\xi_1 p_{n-2}+\lambda_2(x,y,z,p,\dots,p_{n-3}),$$

avec

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}+(\varrho z+g)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}+\dots+\left(\varrho p_{n-3}+\frac{\partial^{n-3}g}{\partial x^{n-3}}\right)\frac{\partial\lambda_2}{\partial p_{n-3}}+\xi_1\frac{\partial^{n-2}g}{\partial x^{n-2}}+\\&+\xi_0\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}+\frac{\partial^n g}{\partial x^n}-\lambda_2\varrho=0,\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On arrivera de la sorte à l'équation

$$\frac{\partial\lambda_{n-1}}{\partial y}+(\varrho z+g)\frac{\partial\lambda_{n-1}}{\partial z}+\xi_{n-2}\frac{\partial g}{\partial x}+\xi_{n-3}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\ldots+\xi_0\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}+$$
$$+\frac{\partial^n g}{\partial x^n}-\lambda_{n-1}\varrho=0,$$

d'où l'on tirera encore

$$\lambda_{n-1}=\xi_{n-1}z+\lambda_n,$$

avec

$$(24)\quad \frac{\partial\lambda_n}{\partial y}+\xi_{n-1}g+\xi_{n-2}\frac{\partial g}{\partial x}+\ldots+\xi_0\frac{\partial^{n-1}g}{\partial x^{n-1}}+\frac{\partial^n g}{\partial x^n}-\varrho\lambda_n=0.$$

On aura donc en définitive

$$\lambda=\xi_0 p_{n-1}+\xi_1 p_{n-2}+\ldots+\xi_{n-2}p+\xi_{n-1}z+\lambda_n(x,y),$$

les ξ_i désignant des fonctions de la seule variable x.

On tire alors de l'équation (24), en désignant par des accents les dérivées par rapport à ϱ.

$$(25)\qquad \frac{\partial^n g'}{\partial x^n}+\xi_0\frac{\partial^{n-1}g'}{\partial x^{n-1}}+\ldots+\xi_{n-1}g'+\lambda_n.$$

Soit $v_1(x)$, $v_2(x)$,. ., $v_n(x)$ un système fondamental de l'équation linéaire

$$\frac{d^n v}{dx^n}+\xi_0\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\ldots\xi_{n-1}v=0;$$

on aura, en désignant par $\sigma_0(x,y)$ une intégrale particulière de l'équation (25) indépendante de ϱ,

$$g'=u_1'(\varrho,y)v_1(x)+\ldots+u_n'(\varrho,y)v_n(x)+\sigma_0(x,y)$$

d'où

$$(26)\qquad g=u_1v_1+\ldots+u_nv_n+\sigma_0(x,y)\varrho+\sigma_1(x,y).$$

Portons cette valeur dans l'équation (24); elle s'écrira

$$\frac{\partial^n\sigma_1}{\partial x^n}+\xi_0\frac{\partial^{n-1}\sigma_1}{\partial x^{n-1}}+\ldots+\xi_{n-1}\sigma_1=-\frac{\partial\lambda_n}{\partial y};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}\right)+\xi_0\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}\right)+\ldots+\xi_{n-1}\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}=\frac{\partial\lambda_n}{\partial y},$$

et par suite

$$\sigma_1+\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}=Y_1v_1+Y_2v_2+\ldots+Y_nv_n.$$

En changeant les u_i dans l'équation (26) on pourra prendre

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_n = 0,$$

et alors, en changeant de fonction inconnue, on pourra poser $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, et écrire

$$g = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n. \tag{27}$$

L'équation (21) admet alors l'intégrale intermédiaire

$$q = -\frac{Y'}{Y} z + u_1\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) v_1(x) + \dots + u_n\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) v_n(x),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{v_1(x)}{Y} \int u_1\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) Y\, dy + \dots + \\ & + \frac{v_n(x)}{Y} \int u_n\left(-\frac{Y'}{Y}, y\right) Y\, dy + \frac{X}{Y}, \end{aligned} \tag{28}$$

X et Y désignant des fonctions arbitraires.

En résumé quand l'équation (21) admet pour le système X une involution elle est nécessairement de la $1^{ère}$ classe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la fonction g soit de la forme (27); l'intégrale générale s'exprime alors au moyen de la formule (28).

§ 3. Etude des conditions G et H.

21. Si l'on fait dans la formule (27) $n = 2$, on obtient des équations de genre 1 pour le système Y ayant une involution d'ordre 2 pour le système X. Comme elles sont de la $1^{ère}$ classe, elles satisfont aux conditions G ou H. Nous allons voir qu'il n'en existe pas d'autres.

Les équations (1) cherchées doivent satisfaire d'une part à la relation fondamentale (R), d'autre part à l'équation

$$\Delta_1^x \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0 \tag{29}$$

qui exprime l'existence d'une involution d'ordre 2, étant entendu d'ailleurs que l'équation

$$\Delta_1^x \lambda + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

n'admet que la solution $\lambda = 0$.

Dérivons l'équation (29) par rapport à p, en remarquant qu'on a ici

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = p^2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) + 2p\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial q};$$

on en déduira

$$\Delta_1^x \psi''' = 0, \quad \psi''' = 0, \quad \psi = \beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2,$$

les β_i désignant des fonctions de x. y, z. L'équation (29) fournit alors les trois équations

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_0}{\partial z} + \varrho\beta_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2\,\omega\,\beta_0 + 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_2}{\partial z} + \omega\beta_1 - \varrho\beta_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega\frac{\partial \omega}{\partial q} = 0. \tag{32}$$

Si $\beta_0 \neq 0$, nous prendrons une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta_0(x, y, z)\frac{\partial Z}{\partial z};$$

on passe ainsi de l'équation (1) à une équation de même forme pour laquelle on a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial q} = 0. \tag{33}$$

L'équation (30) donne alors

$$\Delta_1^x \beta_0 = 0 \quad \text{donc} \quad \beta_0 = 0.$$

On peut donc toujours supposer $\beta_0 = 0$; les équations (30) et (31) sont alors remplacées par l'équation (33) et l'équation

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q\frac{\partial \beta_1}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varrho}{\partial q}\right) = 0. \tag{34}$$

On tire de (33)

$$q = \varrho z + g(x, y, \varrho),$$

puis de (34)

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2}(z + g')\left[\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + (\varrho z + g)\frac{\partial \beta_1}{\partial z}\right].$$

La relation (R) donne alors $\dfrac{\partial \beta_1}{\partial z} = 0$, et on est ramené aux équations étudiées au précédent paragraphe.

Nous avons ainsi achevé la détermination des équations de la première classe qui sont de genre 1 pour l'un des systèmes de caractéristiques.

CHAPITRE III.

Détermination des équations du groupe B.

22. Nous nous proposons dans ce chapitre, la détermination des équations

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{1}$$

qui sont de genre 2 pour le système X, et de genre $n \geqslant 3$ pour le système Y.

Notre étude fera ressortir une différence essentielle entre le cas où f est linéaire par rapport à q et le cas où il n'en est pas ainsi Dans le premier cas une équation (1) qui est de genre 2 pour le système X n'admet pas nécessairement un invariant pour le système Y, donc n'est pas nécessairement de la première classe. Au contraire une équation (1) non linéaire par rapport à q et qui est de genre 2 pour le système X est toujours de la première classe: elle admet en effet pour le système Y un invariant qui est au plus d'ordre 3

23. Supposons donc en premier lieu que l'équation (1), qui admet un invariant d'ordre 2 pour le système X, soit linéaire par rapport à q. et considérons la fonction $a(x, y, z, p)$ définie par la relation

$$p = z\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

où $\varphi(x, y, a)$ est une fonction arbitraire. M. Gosse a montré [1]) que les équations cherchées peuvent se ramener par des transformations *ponctuelles* à l'équation

$$\frac{da}{dy} = \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z} + s\frac{\partial a}{\partial p} = z, \tag{2}$$

qui admet l'invariant du second ordre

$$\frac{da}{dx} - \varphi(x, y, a).$$

La transformation *de Bäcklund*

$$Z = a(x, y, z, p)$$

conduit alors de l'équation (2) à l'équation

$$S = Q\,\frac{\partial \varphi(x, y\, Z)}{\partial Z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

---

[1]) *Annales de Toulouse,* t XII, 1920, p. 117.

et il reste à déterminer la fonction φ de telle sorte que l'équation en Z soit de la première classe.

Appliquant à cette équation les conclusions des recherches de M. Gau[1]), j'ai obtenu les résultats suivants:

1°. Si φ est linéaire en a, l'équation (2) est une équation linéaire; on sait déterminer les équations linéaires de la première classe qui sont de genre 2 pour le système X.

2°. Si φ n'est pas linéaire en a, il n'y a que trois formes possibles pour la fonction φ·

α — ou bien

$$\varphi = X e^{\xi(a+u)} - \frac{\xi'}{\xi}(a+u) - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x},$$

$X(x)$, $\xi(x)$ et $u(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires; dans ce cas l'équation (2) se ramène par une transformation (T_0) à l'équation

$$s = p e^{s}$$

qui est une équation de M. Goursat;

β — ou bien

$$\varphi = X_1 e^{\xi(a+u)} + X_2 e^{-\xi(a+u)} - \frac{\xi'}{\xi}(a+u) - \frac{\partial u}{\partial x},$$

$X_1(x)$, $X_2(x)$, $\xi(x)$ et $u(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires; dans ce cas l'équation (2) se ramène par une transformation (T_0) à l'équation

$$s = e^{s}\sqrt{p^2 - 4}$$

qui est une équation de M. Goursat.

γ — ou bien

$$\varphi = \frac{\varrho}{\xi} e^{\xi a} - \frac{\xi'}{\xi} a + \psi,$$

$\xi(x)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions arbitraires, et $\varrho(x, y)$ une fonction telle que l'équation de Moutard

$$s = \frac{d}{dx}[\varrho(x, y) e^{s}]$$

soit de la première classe, ce qui exige que ϱ soit de la forme

$$\varrho = \xi_1(x)\eta_1(y) + \xi_2(x)\eta_2(y) + \dots + \xi_n(x)\eta_n(y);$$

l'équation (2) se ramène dans ce cas, par une transformation (T_0), à une équation de M. Gau

[1]) Thèse, n° 30, et *Annales de Grenoble*, loc. cit.

Pour la démonstration de ces résultats, nous nous contenterons de renvoyer aux conclusions de M. Gau, dont ils sont des conséquences quasi immédiates.

En résumé, l'équation (2), qui est toujours de genre 2 pour le système X, n'est pas toujours de la première classe; quand elle est de la première classe, elle se ramène, par une transformation *ponctuelle*, à un type déjà obtenu

23. Examinons maintenant le cas où l'équation (1), supposée toujours de genre 2 pour le système X, n'est pas linéaire par rapport à q. M. Gosse a montré[1]) que la fonction f doit alors être de la forme

$$f = -\frac{b(x, y, z, q) - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}}{\frac{\partial a(x, y, z, p)}{\partial p}},$$

et il résulte de son analyse[2]) que le seul cas qui puisse conduire à des équations distinctes de celles de M. Goursat est le cas où l'on a

$$b = \omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + \vartheta(x, y, z)\, q + \varphi(x, y, z);$$

on est ainsi conduit à chercher les équations

$$s = f = \alpha(x, z, p)\, [\omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + \omega_1(x, y, z, p)\, q],$$

où l'on a

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

qui sont de genre 2 pour le système X, autrement dit à déterminer les fonctions α, ω et ω_1 de telle sorte que l'équation

$$\Delta_1^x \lambda - \lambda\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d f}{d x}\right) = 0 \tag{3}$$

ait une solution $\lambda(x, y, z, p)$ indépendante de q.

Nous supposerons essentiellement $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$ puisque f n'est pas linéaire par rapport à q, enfin $\omega_1 \neq 0$, l'hypothèse $\omega_1 = 0$ ramenant d'après les calculs de M Gosse aux équations de M. Goursat.

Si l'on fait le changement de variable

$$\lambda = \alpha(x, z, p)\, u(x, y, z, p),$$

---

[1]) *Annales de Toulouse*, loc cit. p. 113—114.

[2]) *Annales de Toulouse*, loc. cit p 120. Voir aussi *Comptes Rendus*, t. 182, 1926, p. 1127.

on voit que l'équation (3) est équivalente au système

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\alpha}{2}\,\omega^2=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\log\omega}{\partial x}+\frac{p}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{p}{\alpha}\frac{\partial\log\omega}{\partial z}+\frac{3}{2}\,\omega_1=0 \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{u}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\omega_1\frac{\partial u}{\partial p}-u\frac{\partial\omega_1}{\partial p}+\frac{\omega_1}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\\ +p\left(\frac{\omega_1}{\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)+\omega_1^2=0.\end{gathered} \tag{6}$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\partial^2\beta(x,z,p)}{\partial p^2}\quad\text{d'où}\quad\omega_1=-\frac{\partial^2\beta}{\partial p\,\partial z}+\frac{2}{3}\,\gamma(x,y,z)$$

et intégrant l'équation (5), on a

$$\begin{gathered}u=\frac{\partial^2\beta}{\partial p\,\partial x}+p\,\frac{\partial^2\beta}{\partial p\,\partial z}-\frac{\partial\beta}{\partial p}\frac{\partial\log\omega}{\partial x}-\left(p\,\frac{\partial\beta}{\partial p}-\beta\right)\frac{\partial\log\omega}{\partial z}+\\ +\frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial z}-p\,\gamma(x,y,z)+\gamma_0(x,y,z).\end{gathered}$$

On tire alors de l'équation (4)

$$\frac{1}{2\,\beta''}=A\beta'+B(p\,\beta'-\beta)+Cp+D, \tag{7}$$

les accents désignant des dérivées par rapport à p, avec

$$A=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\log\omega}{\partial x\,\partial y}\qquad B=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\log\omega}{\partial y\,\partial z}\qquad C=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\gamma}{\partial y}$$

$$D=-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\gamma_0}{\partial y}.$$

Dérivons l'équation (7) par rapport à y, puis par rapport à p; on aura

$$\beta''\left(\frac{\partial A}{\partial y}+p\,\frac{\partial B}{\partial y}\right)+\frac{\partial C}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Supposons d'abord

$$\frac{\partial C}{\partial y}=0;$$

on aura

$$\frac{\partial A}{\partial y}=0\qquad\frac{\partial B}{\partial y}=0,$$

d'où, en posant

$$\omega = e^{\varphi(x,y,z)}$$

et désignant par $\psi(y)$ une fonction arbitraire de y,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \psi^2 - \psi',$$

et par suite

$$\omega = \frac{\sqrt{Y'(y)}\,\vartheta_2(x,z)}{\vartheta_1(x,z) - Y},$$

Y, ϑ_1 et ϑ_2 désignant des fonctions arbitraires.

On pourra alors écrire l'équation proposée sous la forme

$$s = \alpha(x,z,p)\left[\frac{\sqrt{Y'q}}{\vartheta_1 - Y} + \omega_1(x,y,z,p)\,q\right],$$

les fonctions α et ω_1 ne satisfaisant plus à aucune relation.

Si $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial z} \neq 0$, on aura, en prenant comme nouvelles variables x, Y, et ϑ_1, l'équation

$$\text{(I)} \qquad s = \alpha(x,z,p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + \omega_1(x,y,z,p)\,q\right];$$

si $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \neq 0$, on aura, en prenant ϑ_1 et Y comme variables indépendantes, l'équation

$$\text{(II)} \qquad s = \alpha(x,z,p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{x-y} + \omega_1(x,y,z,p)\,q\right];$$

enfin si ϑ_1 est constant, on aura l'équation

$$\text{(III)} \qquad s = \alpha(x,z,p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + \omega_1(x,y,z,p)\,q\right].$$

Supposons en second lieu

$$\frac{\partial C}{\partial y} \neq 0;$$

l'équation (8) donne

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p^2} = 0.$$

Si α est indépendant de p, on aura

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} = 0,$$

et on pourra mettre l'équation proposée sous la forme

$$s = \omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + [\omega_1(x, y, z) + \omega_2(x, z)p]\, q;$$

en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\omega_2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

on fait disparaître le terme en p, et on arrive à l'équation

$$\text{(IV)} \qquad s = \omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + \omega_1(x, y, z)\, q.$$

Si α dépend de p, on arrive finalement, en faisant au besoin un changement de fonction inconnue, à l'équation

$$\text{(V)} \qquad s = p\left\{\omega(x, y, z)\, q^{\frac{1}{2}} + [\vartheta_1(x, z) \operatorname{Log} p + \omega_1(x, y, z)]\, q\right\}.$$

Nous allons étudier successivement chacune des équations (I) à (V).

24. Considérons d'abord l'équation

$$\text{(I)} \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right]$$

L'existence d'un invariant d'ordre 2 pour le système X exige [1]) que l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z} + f\frac{\partial P}{\partial p} + P\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial q} = 0\right)$$

ait une solution non nulle; on aura ici

$$P = \frac{\vartheta(x, z)}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial p}\varphi(x, z, p) \quad \text{et} \quad \omega_1 = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi_1(x, y, z).$$

Les équations (4), (5) et (6) ont été formées indépendamment de toute relation entre ω_1 et α. Si l'on remplace dans ces équations ω par $\dfrac{1}{z-y}$, on aura d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{(z-y)^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad u = -\frac{\alpha}{2(z-y)} + u_1(x, z, p),$$

puis

$$\text{(9)} \qquad -\frac{1}{2(z-y)}\frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{p}{\alpha(z-y)} + \frac{\partial u_1}{\partial p} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \frac{3}{2}\left(\varphi_1 - \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

[1]) Goursat, *Annales de Toulouse*, loc. cit. p. 36.

En dérivant l'équation (9) par rapport à y, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial p}+\frac{p}{\alpha}=\vartheta_1(x,z), \tag{10}$$

avec

$$\varphi_1=\frac{2\vartheta_1}{3(z-y)}+\vartheta_2(x,z) \qquad \omega_1=-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\frac{2\vartheta_1}{3(z-y)}+\vartheta_2(x,z),$$

et l'équation (9) se réduit à

$$\frac{\partial u_1}{\partial p}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+p\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)+\frac{3}{2}\left(\vartheta_2-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0. \tag{11}$$

L'équation (6) donne alors

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\alpha^2\left(\omega_1\frac{\partial u}{\partial p}-u\frac{\partial \omega_1}{\partial p}\right)+\omega_1\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \omega_1}{\partial x}+\\+p\left(\omega_1\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\alpha\frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right)+\alpha^2\omega_1^2=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Le premier membre est un trinôme du second degré en $\dfrac{1}{z-y}$. En égalant à zéro le coefficient du terme $(z-y)^{-2}$, on aura d'abord

$$\vartheta_1=\frac{3\epsilon}{2} \qquad (\epsilon=\pm 1),$$

et l'équation (10) donne

$$\alpha=2\epsilon(\varrho+p)+2\epsilon_1\sqrt{\varrho(\varrho+p)} \qquad (\epsilon_1=\pm 1),$$

la fonction $\varrho(x,z)$ étant arbitraire.

Nous mettons à part les cas singuliers

$$\varrho=0 \qquad \varrho=\infty$$

pour lesquels on a respectivement

$$\alpha=2\epsilon p \qquad \alpha=\epsilon p;$$

nous reviendrons plus loin sur ces deux cas.

On peut prendre alors

$$\varphi=\varepsilon\vartheta\operatorname{Log}\left[\varepsilon\varrho+\varepsilon_1\sqrt{\varrho(\varrho+p)}\right].$$

Egalant ensuite à zéro le coefficient du terme $(z-y)^{-1}$ dans l'équation (12), on aura

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\vartheta_2\right)(\varepsilon\alpha-p)-\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\alpha^2}{2\vartheta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial z}=0, \tag{13}$$

et il en résulte

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0.$$

En remplaçant φ par $\frac{\varphi}{\vartheta}$, on voit qu'on peut supposer partout

$$\vartheta = 1;$$

on aura alors

$$\omega_1 = \vartheta_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{z-y} \qquad \varphi = \varepsilon \operatorname{Log}\left[\varepsilon \varrho + \varepsilon_1 \sqrt{\varrho(\varrho + p)}\right] \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{1}{\alpha},$$

et l'équation (13) s'écrira

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_2\right)(\varepsilon \alpha - p) - \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_2 = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{\varrho(\varrho+p)}}\frac{\partial \varrho}{\partial z} \qquad \vartheta_2 = \frac{\varepsilon}{2\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

L'équation (11) donne ensuite

$$u_1 = \vartheta_3(x, z) + \frac{\vartheta_4(x, z)}{\sqrt{\varrho(\varrho + p)}} + \vartheta_5(x, z)\sqrt{\varrho(\varrho + p)}$$

avec

$$\vartheta_4 = -\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) \qquad \vartheta_5 = \frac{\varepsilon_1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

et, en annulant le terme indépendant de $(z-y)^{-1}$ dans l'équation (12), on aura

$$\frac{\partial \vartheta_3}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{4\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} - \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Si $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ est nul, on arrive, en prenant comme nouvelles variables

$$\int \varrho\, dx \qquad y \qquad z + \int \varrho\, dx,$$

à une équation de M. Goursat.

Si $\frac{\partial \varrho}{\partial z} \neq 0$, on a

$$\varrho = \xi_0 (z + \xi_1)^2;$$

en prenant comme nouvelles variables

$$\int \xi_0\, dx \qquad y \qquad z,$$

on arrive finalement à l'équation

$$(14)\quad s=\left\{2[(z+X)^2+p]+2(z+X)\sqrt{(z+X)^2+p}\right\}\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y}+\left[\frac{1}{z-y}-\frac{1}{\sqrt{(z+X)^2+p}}\right]q\right\}$$

où X est une fonction arbitraire de x.

Si X se réduit à une constante, on peut prendre $X=0$, et le changement de variables

$$x'=x \qquad y'=-\frac{1}{y} \qquad z'=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$$

conduit à l'équation

$$sz=2(1+p+\sqrt{1+p})\,(1+q+\sqrt{1+q})$$

qui rentre dans le type IV des équations de M. Goursat. Mais si X ne se réduit pas à une constante, l'équation (14) ne peut, on s'en assure sans peine, admettre un invariant du second ordre pour le système Y Elle admet pour le système X l'invariant

$$\frac{r}{2p}\left[1-\frac{z+X}{\sqrt{(z+X)^2+p}}\right]-\frac{(z+X)^2+p+(z+X)\sqrt{(z+X)^2+p}}{z-y}+$$
$$+z+\frac{(z+X)^2+2p}{\sqrt{(z+X)^2+p}}.$$

25. Il nous reste à revenir sur les cas singuliers

$$\alpha=\varepsilon p \qquad \alpha=2\varepsilon p.$$

Dans le premier cas, on peut prendre

$$\varphi=\varepsilon\vartheta \operatorname{Log} p.$$

L'équation (13) montre que ϑ est indépendant de z; on peut donc prendre

$$\vartheta=1 \qquad \varphi=\varepsilon \operatorname{Log} p.$$

On tire ensuite de (11)

$$u_1=-\frac{3}{2}p\vartheta_2+\vartheta_3(x,z) \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{\varepsilon p}{z-y}-\frac{3}{2}p\vartheta_2+\vartheta_3,$$

puis, de (12),

$$\frac{\partial\vartheta_3}{\partial z}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}=0 \qquad \varepsilon\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}+\vartheta_2^2=0 \qquad \vartheta_2=\frac{\varepsilon}{z-X_0}.$$

Si X_0 se réduit à une constante, on a une équation de M. Goursat. Sinon, on peut prendre X_0 comme variable à la place de x; on obtient ainsi l'équation

$$(15) \qquad s = p\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + q\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}\right)\right],$$

qui admet pour le système X l'invariant du second ordre

$$\frac{r}{p} - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{z-y} + \frac{3}{z-x}\right) + \frac{1}{z-x},$$

et il est facile de voir que cette équation n'admet pas d'invariant du second ordre pour le système Y.

L'hypothèse

$$\alpha = 2\varepsilon p$$

conduit d'autre part, on s'en assure sans peine. à une équation de M. Goursat.

26. Considérons maintenant l'équation

$$(\text{II}) \qquad s = \alpha(x, z, p)\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{x-y} + \omega_1(x, y, z, p)\, q\right].$$

En raisonnant comme pour l'équation (I), on obtient

$$\alpha = \frac{\vartheta(x\ z)}{\dfrac{\partial}{\partial p}\varphi(x, z, p)} \qquad \omega_1 = -\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2\vartheta_1(x.\,z)}{3(x-y)} + \vartheta_2(x, z)$$

L'équation (12) est alors remplacée par une équation dont le premier membre est un trinôme du second degré en $\dfrac{1}{x-y}$; un calcul simple d'identification montre qu'on devrait avoir

$$\omega_1 = 0,$$

hypothèse exclue.

On étudie de la même façon l'équation (III). On a ici successivement

$$\alpha = \frac{\vartheta(x, z)}{\dfrac{\partial}{\partial p}\varphi(x, z, p)}, \qquad \omega_1 = \vartheta_2(x, z) - \frac{\vartheta_1(x, z)}{3y} - \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\alpha = p\vartheta_1(x, z) + \vartheta_2(x, z):$$

un nouveau calcul d'identification, à partir des équations (9) et (12), conduit alors à l'équation

$$s = \frac{\xi(x)}{\vartheta}\frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + q\left[\xi_1(x) - \frac{2}{\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \frac{2p}{\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right].$$

En prenant comme nouvelles variables

$$\int \xi(x)\,dx \qquad y \qquad \int \vartheta^2 dz$$

on aboutit à l'équation

$$s = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{y} + q\varrho(x)$$

qui est une équation de M. Goursat Elle admet en effet un invariant d'ordre 1 pour le système Y (nº 16).

On voit pareillement que l'équation (IV) se ramène à des équations de M Goursat.

Enfin l'équation (V) se ramène par des calculs simples soit à des équations de M. Goursat, soit à l'équation (1.).

En résumé, toutes les équations (1) qui sont de genre 2 pour le système X et qui se sont pas linéaires par rapport à q se ramènent, par des transformations ponctuelles, soit aux équations de M. Goursat, soit à l'une des équations (14) ou (15).

27. Les équations (14) et (15) sont elles mêmes de la première classe. J'ai établi en effet qu'elles sont de genre 3 pour le système Y. Particularité curieuse: ces deux équations, si différentes de forme, admettent pour le système Y le même invariant,

$$\frac{q_3 - \frac{q_2^2}{2q} - q_2\frac{1+5q^{\frac{1}{2}}+4q}{z-y} - \frac{2q+2q^{\frac{3}{2}}-6q^2-10q^{\frac{5}{2}}-4q^3}{(z-y)^2}}{q_2 - 2\frac{q+2q^{\frac{3}{2}}+q^2}{z-y}}.$$

Pour le vérifier, il suffit de montrer qu'en égalant à zéro le numérateur et le dénominateur de l'expression précédente, on obtient deux équations en involution avec chacune des équations (14) et (15). Cette vérification ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs.

J'ai pu d'autre part obtenir l'intégrale explicite de l'équation (15). L'intégration de cette équation se ramène à celle de l'équation différentielle

$$(16)\qquad \frac{r}{p} - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{z-y} + \frac{3}{z-x}\right) + \frac{1}{z-x} = X(x),$$

X désignant une fonction arbitraire. Posons

$$(17)\qquad p = u(z-x)(z-y) \qquad\qquad X = \frac{\xi'''}{\xi''};$$

on tire de l'équation (16)

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - u^2(x-y) = 2u\frac{\xi'''}{\xi''},$$

d'où

$$u = \frac{2\xi''}{\xi - \xi'(x-y) + Y_1},$$

Y_1 désignant une fonction arbitraire de y.

Posant maintenant

$$z - y = v[\xi - \xi'(x-y) + Y_1]^2,$$

on tire de (17)

$$\frac{1}{v} = X_2 + Y_2 - 2\xi' Y_1 - \xi'^2 y,$$

Y_2 désignant une nouvelle fonction arbitraire de y, et X_2 une fonction de x telle que

$$(18)\qquad X'_2 = 2\xi''(\xi' x - \xi).$$

On a donc ainsi

$$(19)\qquad z = y + \frac{[\xi - \xi'(x-y) + Y_1]^2}{X_2 + Y_2 - 2\xi' Y_1 - \xi'^2 y}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (15), on trouve finalement

$$(20)\qquad Y_1'^2 + Y_2' = 0.$$

On satisfait à l'équation (18) en posant

$$(21)\qquad x = \varphi''(\alpha) \qquad \xi = \alpha\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha) \qquad X_2 = 2\varphi(\alpha),$$

et à l'équation (20) en posant

$$(22)\qquad \begin{aligned} y &= \psi''(\beta) \qquad Y_1 = \beta\psi''(\beta) - \psi'(\beta) \\ Y_2 &= -\beta^2\psi''(\beta) + 2\beta\psi'(\beta) - 2\psi(\beta). \end{aligned}$$

Les équations (19), (21) et (22) permettent alors d'écrire explicitement l'intégrale générale de l'équation (15) au moyen des fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$.

Signalons enfin, d'après M. Gosse [1]), que la transformation *de Bäcklund*

$$x' = x \qquad y' = y \qquad p' = \frac{1}{z-x} \qquad q' = \frac{1+q+2q^{\frac{1}{2}}}{z-y} - \frac{q}{z-x}$$

ramène l'équation (15) à une équation appartenant au type I de M. Goursat.

CHAPITRE IV

Etude d'un problème particulier relatif aux équations du groupe C.

28. La détermination des équations

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

qui sont de la première classe est donc ramenée à celle des équations du groupe C, c'est à dire des équations qui sont de genre $n \geqslant 3$ pour chaque système de caractéristiques.

Cette recherche, comme nous l'avons dit, a pour préliminaire essentiel une étude de la compatibilité des systèmes de conditions Γ, G, H, C, et Γ', G', H', C', étude qui a été abordée par M Gosse dans les deux importants Mémoires déjà cités, mais qui est encore sans doute assez loin à l'heure actuelle de pouvoir être considérée comme terminée.

On est conduit naturellement à distinguer les équations qui sont linéaires par rapport à l'une des dérivées p ou q de celles qui ne le sont pas, ce caractère étant invariant pour toute transformation ponctuelle.

Nous nous proposons, dans ce dernier Chapitre, de rechercher les équations linéaires en p, par exemple, qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques. C'est sans doute un problème assez particulier, mais qui nous donnera, chemin faisant, l'occasion d'établir un certain nombre de propositions de portée générale· de plus les conclusions que nous obtiendrons déborderont en maint endroit le problème initial.

Nous aboutirons à un résultat négatif: il n'existe donc aucune équation linéaire par rapport à l'une des dérivées p ou q et qui soit de genre $n = 3$ pour chaque système de caractéristiques. Il paraît probable, conformément aux vues de M. Gosse, qu'il en est

[1]) *Comptes Rendus*, t. 184, 1927, p. 363.

encore ainsi pour $n > 3$. Ceci présente d'autant plus d'intérêt qu'il en est tout autrement pour les équations qui ne sont linéaires ni en p, ni en q. J'ai en effet obtenu des équations de la forme

$$s = Apq + Bp^{\frac{1}{2}}q + Cpq^{\frac{1}{2}} + Dp^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$$

qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques; j'en donnerai un exemple en terminant.

Pour éviter des longueurs, je me contenterai le plus souvent, dans les pages qui suivent, d'indiquer la marche générale des calculs.

29. Nous cherchons les équations de la forme

$$(1) \qquad s = f \equiv p\varrho(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q)$$

qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques et qui ne sont pas linéaires par rapport à q.

Une telle équation admet nécessairement une involution d'ordre 1 ou 2 pour chaque système de caractéristiques. Il résulte alors des conclusions du chapitre I que la fonction f doit satisfaire d'une part à l'un des systèmes

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} \Delta_1^x \lambda + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial p} = 0 \\ \Delta_1^x \vartheta - \lambda X\left(\dfrac{df}{dx}\right) + K = 0 \end{cases} \qquad (G) \quad \begin{cases} \Delta_1^x \alpha + \xi \dfrac{\partial f}{\partial p} + K = 0 \\ \Delta_1^x \psi - \psi \dfrac{\partial f}{\partial p} + \left(\dfrac{df}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

d'autre part à l'un des systèmes

$$(\Gamma') \quad \begin{cases} \Delta_1^y \lambda_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} = 0 \\ \Delta_1^y \vartheta_1 - \lambda_1 Y\left(\dfrac{df}{dy}\right) + K = 0 \end{cases} \qquad (G') \quad \begin{cases} \Delta_1^y \alpha_1 + \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0 \\ \Delta_1^y \psi - \psi_1 \dfrac{\partial f}{\partial q} + \left(\dfrac{df}{dy}\right) = 0 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$K = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

On aura donc à examiner successivement la compatibilité des systèmes

$$\Gamma - \Gamma' \qquad \Gamma - G' \qquad G - \Gamma' \qquad G - G'.$$

§ 1. Etude du système $\Gamma - \Gamma'$.

30. Pour l'étude de ce système, comme pour l'étude du système $\Gamma - G'$, il est inutile de s'arrêter à l'hypothèse $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p} = 0$.

En effet, on peut alors se ramener, par un changement de fonction inconnue, à une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, q). \tag{2}$$

Nous allons démontrer relativement à ces équations la proposition générale suivante·

Une équation de la forme (2) ne peut être de la première classe que si elle est de genre 2 au plus pour le système X ou de genre 1 pour le système Y.

En effet si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ l'équation (2) est de genre 1 pour le système Y. Sinon, soit $n > 2$ le genre de l'équation relativement au système X; l'invariant d'ordre n est de la forme $p_n + \varphi(x, y, z, p, \ldots, p_{n-1})$, et l'on a

$$\Delta^2_{n-1}\varphi + \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} = 0, \tag{3}$$

d'où l'on tire

$$\varphi = X p^2_{n-1} + \varphi_1 p_{n-1} + \varphi_2,$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x y, z, $p_1, \ldots p_{n-2}$. Le premier membre de l'équation (3) est alors un binôme du 1er degré en p_{n-1}, et le coefficient de p_{n-1} s'écrit

$$2X\left(p_{n-2}\frac{\partial f}{\partial z} + \vartheta_{n-2}\right) + \frac{\partial f}{\partial z},$$

ϑ_{n-2} ne dépendant que des variables x, y z, p, $p_2, \ldots, p_{n-3}$, q; ce coefficient ne peut être identiquement nul, ce qui établit notre proposition.

31 Nous n'avons donc à examiner que l'hypothèse $\frac{\partial \lambda}{\partial p} \neq 0$. On tire alors de l'équation Γ_1

$$\lambda = \frac{1}{p + a(x, y, z)},$$

et, en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - a\frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = p\varrho(x, y. z. q), \tag{4}$$

pour laquelle l'équation Γ_1 admet la solution $\lambda = \frac{1}{p}$.

L'équation (4) supposée de genre 3 pour le système X admet alors une involution de la forme

$$p_3 + \varphi(x, y, z, p, p_2) = 0;$$

on doit donc avoir

$$\Delta_2^x \varphi - \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0. \tag{5}$$

Posons

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho_1 \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial q} = \varrho_2.$$

On aura

$$\frac{df}{dx} = p_2 \varrho + p \varrho_1 + p^2 \varrho_2$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = p_2 (2 \varrho_1 + 3 p \varrho_2) + A_1 p + A_2 p^2 + A_3 p^3$$

avec

$$A_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, \qquad A_2 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}, \qquad A_3 = \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}.$$

En dérivant deux fois de suite l'équation (5) par rapport à p_2 et appliquant un Lemme de M. Gosse [1]) on a d'abord

$$\varphi = \frac{X}{2p} p_2^2 + \varphi_1 (x, y, z, p) p_2 + \varphi_2 (x, y, z, p).$$

L'équation (5) fournit alors les deux équations

$$\Delta_1^x \varphi_1 + (X + 2) \varrho_1 + p (X + 3) \varrho_2 = 0 \tag{6}$$

$$\Delta_1^x \varphi_2 - \varrho \varphi_2 + p (\varrho_1 + p \varrho_2) \varphi_1 + A_1 p + A_2 p^2 + A_3 p^3 = 0. \tag{7}$$

En dérivant deux fois l'équation (6) par rapport à p on a ensuite

$$\varphi_1 = X_1 \operatorname{Log} p + p \varphi_3 (x, y, z) + \varphi_4 (x, y, z),$$

et l'équation (6) fournit les deux équations

$$(X + 2) \varrho_1 + X_1 \varrho + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$(X + 3) \varrho_2 + \varphi_3 \varrho + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

---

[1]) *Annales de Toulouse*, t. XII, 1920, p. 139.

On tire de même de l'équation (7), compte tenu de la valeur de φ_1,

$$\varphi_2 = \frac{X_0}{2} p (\operatorname{Log} p)^2 + (\beta_0 p + \beta_1 p^2) \operatorname{Log} p + \gamma_1 p + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p^3,$$

les β_i et γ_i étant des fonctions de x, y, z. L'équation (7) donne alors les équations

$$X_1 \rho_2 + \rho \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_1}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

$$X_1 \varrho + X_0 \varrho + \frac{\partial \beta_0}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_0}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

$$A_3 + \rho_1 \varphi_3 + 2 \rho \gamma_3 + \frac{\partial \gamma_3}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

$$A_2 + \rho_2 \varphi_4 + \rho_1 \varphi_3 + \rho (\beta_1 + \gamma_2) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

$$A_1 + \rho_1 \varphi_4 + \rho \beta_0 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} = 0. \tag{14}$$

Notons en outre que la condition Γ_1' donne la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} \mu (y. z, q) + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = m (x, y, z). \tag{15}$$

32. 1er Cas: $X + 2 = 0$.

Les équations (8), (10), et (11) donnent alors

$$X_0 = 0 \qquad X_1 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0 (x) \qquad \beta_1 = 0 \qquad \varphi_4 = \xi_4 (x).$$

Posons, d'après (15),

$$P = \frac{1}{\dfrac{\partial \mu}{\partial q}}, \qquad P_1 = - P \frac{\partial \mu}{\partial z}, \qquad \rho = m (x, y, z) P + P_1.$$

En dérivant deux fois par rapport à q l'équation (14), on a

$$\frac{\partial^2 \rho''}{\partial x^2} + \xi_4 \frac{\partial \rho''}{\partial x} + \xi_0 \rho'' = 0, \tag{16}$$

c'est à-dire

$$P'' \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \xi_4 \frac{\partial m}{\partial x} + \xi_0 m \right) + \xi_0 P_1'' = 0.$$

On ne peut avoir $P' = 0$, car ρ serait linéaire en q. Si $P'' = 0$, on a

$$\mu = \sigma_0 \operatorname{Log}(q + \sigma_1)$$
$$\rho = m(q + \sigma_1) - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} - \frac{\partial \log \sigma_0}{\partial z}(q + \sigma_1) \operatorname{Log}(q + \sigma_1),$$

et l'équation (9) conduit à une impossibilité.

On a donc $P'' \neq 0$, et l'on tire de l'équation (16)

$$\rho'' = X_2 \mu_2''(y, z, q) + X_3 \mu_3''(y, z, q),$$

X_2 et X_3 désignant deux intégrales distinctes de l'équation

$$\frac{d^2 \omega}{d x^2} + \xi_4 \frac{d \omega}{d x} + \xi_0 \omega = 0.$$

On peut toujours supposer $X_2' \neq 0$; on a alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) P'' = \left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' \mu_3''.$$

Supposons en premier lieu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) \neq 0,$$

ce qui exige $\left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' \neq 0$, et par suite $\xi_0 \neq 0$. On a dans ce cas

$$P'' = a_0(y, z) \mu_3'' \qquad \mu_2'' = \mu_3'' \vartheta_1(y, z),$$

et on en tire aisément

$$P_1 = \sigma_0(y, z) P + \sigma_1(y, z) q + \sigma_2(y, z).$$

L'équation (15) s'écrit alors

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + (\sigma_1 q + \sigma_2) \frac{\partial \mu}{\partial q} + \sigma_0 = 0.$$

En changeant μ, on peut prendre $\sigma_0 = 0$, d'où $P_1'' = 0$, et

$$\rho = m(x, y, z) P(y, z, q) + \sigma_1(y, z) q + \sigma_2(y, z).$$

On tire ensuite de l'équation (14)

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \xi_4 \frac{\partial m}{\partial x} + \xi_0 m = 0, \tag{17}$$

puis

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \qquad \sigma_2 = -\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial \gamma_1}{\partial y}.$$

En choisissant une nouvelle fonction inconnue $Z(y, z)$ telle que

$$\operatorname{Log} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\gamma_1}{\xi_0},$$

on pourra poser

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma_1 = 0 \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

et l'équation (1) prendra alors la forme

(18) $$s = m(x, y, z)\, p\, \varphi(y, q).$$

Supposons en second lieu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{X_2'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) = 0;$$

on a alors ou bien $\left(\frac{X_3'}{X_2'}\right)' = 0$, ou bien $\mu_3'' = 0$, et dans les deux cas on trouve

$$\rho = X_2 \sigma_0(y, z, q) + \sigma_1(y, z, q)$$

avec $\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial q^2} \neq 0$. L'équation (1) s'écrit donc

(19) $$s = p\,[X_2 \sigma_0(y, z, q) + \sigma_1(y, z, q)].$$

Il nous reste en définitive à étudier les équations (18) et (19).

33. Occupons-nous d'abord de l'équation (19). On tire de (9), après deux dérivations par rapport à q,

$$\varphi_3 = \frac{c_0 X_2^2 + c_1 X_2 + c_2}{X_2 + c_3},$$

les c_i désignant des fonctions de y et z. L'équation obtenue en remplaçant ensuite φ_3 par sa valeur dans l'équation (9) doit être vérifiée identiquement, ce qui exige $\sigma_0' = 0$, hypothèse exclue.

Reste donc à étudier l'équation (18) On tire aisément de (9)

(20) $$\varphi \varphi' = Y_1 \varphi + Y_2 q + Y_3.$$

D'autre part la condition Γ_1' admet la solution $\frac{1}{\varphi}$ et la condition Γ_2' s'écrit

(21) $$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z} + m\varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} - Y\left[m \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial m}{\partial z} + m^2 \varphi\right] + \\ + \varphi \frac{\partial m}{\partial z} + m^2(Y_1 \varphi + Y_2 q + Y_3) = 0.$$

En dérivant par rapport à x et remarquant que $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = 0$, on a

$$Y_3 = 0 \qquad Y \neq 0 \qquad Y_2 \neq 0 \qquad Y_2 + Y(Y_1 - Y) = 0$$

$$\varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} - Y \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\varphi}{Y} - q\right) \sigma_0 (y, z) = 0. \tag{22}$$

En écrivant que les équations (21) et (22) sont compatibles, on a ensuite

$$\left(\frac{\partial m}{\partial z} - \frac{m \sigma_0}{Y}\right) Y_2 + m^2 Y_2 (Y_1 - Y) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} = 0,$$

et on en tire, en posant

$$\sigma_0 = - Y \frac{\partial^2 \sigma(y, z)}{\partial z^2} : \frac{\partial \sigma}{\partial z} = - Y \frac{\sigma''}{\sigma'} \qquad (\sigma' \neq 0),$$

$$m = \frac{1}{Y - Y_1} \, \frac{\sigma'' [\sigma + \psi(x, y)] + \sigma'^2}{\sigma' (\sigma + \psi)}. \tag{23}$$

L'équation (9) donne d'ailleurs

$$\frac{\partial m}{\partial z} + Y_1 m^2 + m \varphi_3 = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + m^2 Y_2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial z^2} + Y_1 \frac{\partial m}{\partial z} - Y_2 m^2 = 0;$$

si l'on remplace dans cette équation m par sa valeur (23), on a

$$Y_1 = 0 \qquad \sigma'' = 0 \qquad m = \frac{\sigma'}{Y(\sigma + \psi)}.$$

Portant cette valeur de m dans l'équation (17) on est conduit à une impossibilité.

$2^{ème}$ Cas: $\lambda + 3 = 0$.

Supposons d'abord $X_1 = 0$. Les équations (9), (10) et (11) donnent alors

$$\varphi_3 = 0 \qquad \beta_1 = 0 \qquad X_0 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0,$$

et l'équation (8) devient

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}.$$

L'équation (15) donne ensuite

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial q} \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi_4}{\partial z}\right),$$

d'où l'on tire

$$\mu = \mu_1(y, z) \operatorname{Log}[q + \mu_2(y, z)];$$

en changeant de fonction inconnue on peut prendre $\mu_2 = 0$, et on a

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(y, z)\, q \operatorname{Log} q.$$

L'équation (13) conduit alors à une impossibilité.

On doit donc supposer $X_1 \neq 0$; l'équation (8) donne alors

$$\rho = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} + q \frac{\partial \psi}{\partial z} + \xi_1 \rho_0(y, z, q) \qquad (\xi_1' \neq 0),$$

et l'on tire de (15)

$$(24) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \psi_{xy}\right) + q \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \psi_{xz}\right)\right] \frac{\partial \mu}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \frac{\partial m}{\partial x}\right)$$

Si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\xi_1'} \frac{\partial m}{\partial x}\right) \neq 0$, on a, après un changement de fonction inconnue,

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(x, y, z)\, q \operatorname{Log} q,$$

et l'équation (10) donne $a_1 = 0$, ce qui est impossible.

L'équation (24) doit donc être une identité, ce qui permet de prendre $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Choisissant alors une nouvelle fonction inconnue $Z(y, z)$ telle que

$$\psi = -\operatorname{Log} \frac{\partial Z}{\partial z},$$

on est ramené à une équation de la forme

$$s = p\, \xi_1 \rho_0(y, z, q) \qquad (\xi_1' \neq 0)$$

On tire ensuite de (15)

$$m = \xi_1 m_1(y, z) + m_2(y, z) \qquad \rho_0 = m_1(y, z)\, \varphi(y, q):$$

portant ces valeurs dans l'équation (10) on est encore conduit à une impossibilité.

35 $3^{ème}$ Cas: $(X + 2)(X + 3) \neq 0$.

Alors si $X_1 \neq 0$, il n'y a rien à changer au raisonnement de la seconde partie du n° 34, où l'on a seulement utilisé l'hypothèse $X + 2 \neq 0$

Si $X_1 = 0$, on trouve comme précédemment

$$\rho = a(x, y, z)\, q + a_1(y, z)\, q \operatorname{Log} q,$$

et l'équation (9) conduit à une impossibilité.

Observons enfin que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de l'existence d'un invariant d'ordre 3 pour le système Y. La conclusion du présent paragraphe est donc la suivante:

Il n'existe aucune équation (1) qui soit de genre 3 pour le système X et qui satisfasse aux conditions $\Gamma - \Gamma'$.

§ 2. Etude du système $\Gamma - G'$.

36. Les raisonnements du paragraphe précédent qui s'appuient sur les conditions Γ et sur l'existence d'un invariant du $3^{ème}$ ordre pour le système X ne sont évidemment pas modifiés et conduisent aux mêmes conclusions Nous avons donc à étudier les équations

$$s = p\,\rho(x\ y, z, q)$$

qui satisfont d'une part aux équations (8) à (14), d'autre part (conditions G') aux équations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \alpha\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + p\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + f\frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + \eta\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0. \tag{26}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p\frac{\partial \psi}{\partial z} + f\frac{\partial \psi}{\partial q} - \psi\frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{d f}{d y}\right) = 0. \tag{27}$$

37. 1^{er} Cas: $X + 2 = 0$.

Les équations (8), (10) et (11) donnent d'abord

$$X_0 = X_1 = 0 \qquad \beta_0 = \xi_0 \qquad \beta_1 = 0 \qquad \varphi_4 = \xi_4,$$

et l'on tire de (14)

$$\frac{\partial^2 \rho''}{\partial x^2} + \xi_4\frac{\partial \rho''}{\partial x} + \xi_0\,\rho'' = 0. \tag{28}$$

Nous désignerons par X_2 et X_3 deux intégrales distinctes de l'équation

$$\Delta\omega \equiv \frac{d^2\omega}{dx^2} + \xi_4\frac{d\omega}{dx} + \xi_0\,\omega = 0.$$

Si l'on pose dans l'équation (25)

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mu(y, z, q)}{\partial q^2} : \frac{\partial \mu}{\partial q} = \frac{\mu''}{\mu'},$$

on aura

$$\rho = \frac{\mu}{\mu'}h(x, y, z) + \frac{1}{\mu'}h_1(x, y, z) + \rho_0(y, z, q) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho_0\frac{\partial \mu}{\partial q} = 0.$$

Nous écarterons provisoirement les deux hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0.$$

On a alors, d'après (28),

$$(29) \qquad \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' \Delta h + \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' \Delta h_1 + \xi_0 \rho_0'' = 0.$$

Supposons d'abord $\xi_0 \neq 0$. On tire de (29), en changeant μ,

$$h = X_2 l_2(y, z) + X_3 l_3(y, z) \qquad h_1 = X_2 m_2(y, z) + X_3 m_3(y, z)$$
$$\rho_0'' = 0,$$
$$\rho = \frac{\mu}{\mu'} h + \frac{1}{\mu'} h_1 + \lambda_0(y, z) q + \lambda_1(y, z).$$

L'équation (14) montre alors qu'en changeant de fonction inconnue on peut prendre $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$; nous écrirons donc

$$\rho = X_2 Q_2(y, z, q) + X_3 Q_3(y, z, q).$$

Les équations (26) et (27) sont alors des équations du second degré en X_2 et X_3. Elles sont indécomposables, car l'existence d'une relation linéaire entre X_2 et X_3 est incompatible avec l'hypothèse $\xi_0 \neq 0$. Elles doivent donc être identiques à un facteur près. On en déduit successivement

$$Q_2 = \sigma(y, z) Q_3, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0;$$

par suite on peut écrire

$$\rho = X_4 Q(y, z, q),$$

et l'équation (26) conduit à une impossibilité.

Supposons ensuite $\xi_0 = 0$. On peut prendre $X_3 = 1$, et l'on tire de (29)

$$\rho = X_2 Q(y, z, q) + Q_1(y, z, q):$$

l'équation (26) conduit encore à une impossibilité.

38. $2^{\text{ème}}$ Cas: $X + 2 \neq 0$.

Nous continuerons d'exclure les hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0.$$

On a alors comme précédemment

$$(30) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu h(x, y, z) + h_1(x, y, z).$$

Si $X_1 = 0$, on a, d'après (8), $\frac{\partial \rho''}{\partial x} = 0$, ce qui est impossible. Si $X_1 \neq 0$, l'équation (8) donne

$$\rho = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \xi \rho_0(y, z, q) \qquad (\xi' \neq 0),$$

et l'on tire de (30)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_{zy}}{\xi'} + q \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_{zz}}{\xi'}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu \frac{1}{\xi'} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\xi'} \frac{\partial h_1}{\partial x},$$

équation qui doit se réduire à une identité. On peut donc prendre $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, et, en changeant de fonction inconnue, on est ramené à une équation

$$s = \xi p \rho_0(y, z, q):$$

l'équation (26) conduit alors à une impossibilité.

39. Il ne reste donc à examiner que les hypothèses

$$\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'' = 0 \qquad \left(\frac{1}{\mu'}\right)'' = 0,$$

qui donnent pour μ l'une des valeurs suivantes

$$\mu = e^{\beta q} \qquad \mu = \operatorname{Log}(q + \beta) \qquad \mu = (q + \beta_1)^{\beta}.$$

Soit d'abord $\mu = e^{\beta q}$; on tire de (30)

$$\rho = -q \frac{\partial \log \beta}{\partial z} + \frac{h}{\beta} + h_1 e^{-\beta q}.$$

Il est facile de voir que l'équation $s = p\rho$ ne peut alors admettre d'invariant $\psi(x, y, z, p, p_2, \ldots, p_n)$ pour le système X: en effet $\frac{d^{n-1} f}{d x^{n-1}}$ contient un terme en $e^{-n\beta q}$ de coefficient

$$(-1)^{n-1} p^n h_1^n \beta^n (n-1)!,$$

terme qui est multiplié, dans le premier membre de l'équation

$$\Delta_n^x \psi = 0,$$

par $\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \neq 0$ et qui ne peut se réduire avec aucun autre: on devrait donc avoir $h_1 = 0$ ou $\beta = 0$ ce qui est impossible.

Soit en second lieu $\mu = \operatorname{Log}(q + \beta)$. En changeant de fonction inconnue on est ramené à une équation de la forme

$$s = p(h q \operatorname{Log} q + h_1 q),$$

équation qui ne peut admettre d'invariant pour le système X.

Soit enfin $\mu = (q + \beta_1)^\beta$. On peut d'abord, au moyen d'un changement de fonction inconnue, supposer $\beta_1 = 0$; on a ensuite

$$\rho = -\frac{\partial \log \beta}{\partial z} q \operatorname{Log} q + \frac{h}{\beta} q + \frac{h_1}{\beta} q^{1-\beta};$$

et l'on s'assure, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, que l'équation $s = p\rho$ ne peut avoir un invariant d'ordre n que si l'on a $\beta = \frac{1}{\mu}$, μ désignant un entier positif au plus égal à n. On a donc ici $\beta = \frac{1}{2}$ ou $\beta = \frac{1}{3}$; nous examinerons successivement ces deux hypothèses.

40. Première hypothèse: $\beta = \frac{1}{2}$.

On a alors

$$\rho = \lambda(x, y, z) q + \lambda_1(x, y, z) q^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que, sous les seules hypothèses $\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, les équations $s = p\rho$ qui admettent une involution d'ordre 2 pour le système Y se ramènent à l'équation

$$s = p\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{z-y} + q\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}\right)\right],$$

qui est comme nous l'avons vu de genre 2 pour le système X et de genre 3 pour le système Y.

De l'équation

$$\Delta_1^y \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial q} + \left(\frac{df}{dy}\right) = 0 \tag{31}$$

on tire d'abord, après une discussion facile,

$$\psi = g_0 q^2 + g_1 q^{\frac{3}{2}} + g_2 q + g_3 q^{\frac{1}{2}},$$

les g_i étant des fonctions de y et z seulement; on a de plus

$$\lambda_1 = g(y, z)\lambda + h(y, z) \tag{32}$$

Remplaçant ψ par sa valeur dans l'équation (31), on obtient les équations

$$\frac{\partial g_0}{\partial z} + \lambda g_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \lambda^2 = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{1}{2} g_1 \lambda + \frac{3}{2} g_0 \lambda_1 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + 2\lambda\lambda_1 = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} + \lambda_1 g_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda_1^2 = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\lambda_1 g_2 - \frac{1}{2}\lambda g_3 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 0. \tag{36}$$

De (32), (33) et (34) on tire

$$g = 0 \qquad g_0 = 2\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial z} \qquad g_1 = -4\lambda_1,$$

puis de (36)

$$g_3 = 0 \qquad g_2 = -2\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial y},$$

enfin de (35)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 3\lambda_1^2 + 2\frac{\partial^2 \log \lambda_1}{\partial y\, \partial z}.$$

Il vient alors

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{Y'Z'}}{Z-Y} \qquad \lambda = Z'\left(\frac{1}{Z-Y} + \frac{1}{Z-X}\right),$$

et, en prenant comme nouvelles variables X, Y et Z, on est bien ramené à l'équation indiquée.

41. Seconde hypothèse: $\beta = \frac{1}{3}$.

On a alors

$$\rho = \lambda q + \lambda_1 q^{\frac{2}{3}}.$$

La discussion est entièrement analogue à celle qui précède: on est conduit cette fois à des impossibilités Sous les seules hypothèses $\frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$. il n'existe donc aucune équation

$$s = p(\lambda q + \lambda_1 q^{\frac{2}{3}})$$

qui admette une involution d'ordre 2 pour le système Y.

La conclusion du présent paragraphe est donc qu'*il n'existe aucune équation* (1) *qui soit de genre* 3 *pour le système X et qui satisfasse aux conditions $\Gamma - G'$.*

§ 3. Etude des systèmes $G - \Gamma'$ et $G - G'$.

42. Nous allons d'abord établir quelques résultats généraux sur les équations (1) qui satisfont aux conditions G. On sait que f étant linéaire en p on peut satisfaire à la condition $G_2(\alpha) = 0$ en prenant $\alpha = 0$, et que dans la condition G_3 on peut prendre $\xi_0 = 1$.

Nous avons donc à satisfaire au système

$$\Delta_1^x \psi - \psi \frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{d f}{d x}\right) = 0 \tag{37}$$

$$\Delta_1^x \alpha_1 + \xi \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{38}$$

On tire d'abord de (37)

$$\psi = \beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2.$$

En remplaçant ψ par sa valeur dans l'équation (37), on observe qu'en prenant une nouvelle fonction inconnue $Z(x, y, z)$ telle que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta_0 \frac{\partial Z}{\partial z},$$

on peut poser $\beta_0 = 0$. D'autre part on constate aussi que dans ce cas l'équation (38) donne $\alpha_1 = \gamma_1(x, y, z)$. Finalement les équations (37) et (38) sont remplacées par le système

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial y} + q \frac{\partial \beta_2}{\partial z} + \omega \beta_1 - \rho \beta_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \quad X \rho + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0. \tag{42}$$

On satisfait aux équations (39), (40) et (42) en posant

$$q = \rho z + g(x, y, \rho) \qquad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} = g'' \neq 0\right) \tag{43}$$

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g')\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} + q \frac{\partial \gamma}{\partial z} - X \rho\right) \tag{44}$$

$$
(45)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + q\frac{\partial \gamma}{\partial z} - X\rho + (z+g')\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y\, \partial z} + q\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} + \rho\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = \\ = \frac{\partial \beta}{\partial y} + q\frac{\partial \beta}{\partial z} + X\rho. \end{aligned}
$$

Il restera en outre à satisfaire à l'équation (41)

Nous allons montrer qu'on a nécessairement $X=0$.

43. Supposons $X \neq 0$. On ne peut avoir $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, et l'équation (45) donne

$$
g' = \frac{c_0 \rho + c_1 g + c_2}{c_3 \rho + c_4 g + c_5},
$$

les c_i étant des fonctions de x et y. Remplaçant g' par sa valeur dans l'équation (45) on aura une équation de la forme

$$
(46)\qquad A g^2 + g(B\rho + C) + D\rho^2 + E\rho + F = 0.
$$

Si cette équation n'est pas vérifiée identiquement, on en déduit pour g l'une des formes

$$
\begin{aligned}
&g = \lambda_0 \rho + \lambda_1 + \sqrt{\mu_0 \rho^2 + 2\mu_1 \rho + \mu_2} && (\mu_1^2 - \mu_0 \mu_2 \neq 0) \\
&g = \lambda_0 \rho + \lambda_1 + \frac{\mu}{\rho + h} && (\mu \neq 0) \\
&g = \lambda_0 \rho^2 + 2\lambda_1 \rho + \lambda_2 && (\lambda_0 \neq 0).
\end{aligned}
$$

En portant ces valeurs de g dans l'équation (45) on est conduit chaque fois à des impossibilités.

L'équation (46) doit être par suite vérifiée identiquement. Une discussion simple montre alors que l'on doit prendre $c_4 = 0$ et

$$
g' = \frac{\rho + c_1 g + c_2}{c_1 \rho + c_5} \qquad \text{avec} \qquad c_5 = \frac{\partial c_1}{\partial y};
$$

on aura donc

$$
g = \frac{1}{c_1^2}(c_1 \rho + c_5)\,\mathrm{Log}\,(c_1 \rho + c_5) + \sigma_0(x, y)\rho + \sigma_1(x, y).
$$

En portant dans l'équation (41) on est alors conduit à une impossibilité.

On a donc bien nécessairement $X = 0$.

44. Faisons maintenant intervenir les conditions Γ'. La première s'écrit

$$
\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + p\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + (p\rho + \omega)\frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1\left(p\frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) = 0;
$$

elle se décompose en deux autres

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0.$$

Posons $\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial q} \mu_1 (x, y, z, q)$; on aura

$$(47) \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = m(x, y, z) \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = l(x, y, z).$$

La condition de compatibilité s'écrit

$$(48) \qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \omega}{\partial z} - \rho \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) \frac{\partial \mu_1}{\partial q} = \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z}.$$

Les équations (40) et (42) où l'on fait $X = 0$ montrent que le coefficient de $\frac{\partial \mu_1}{\partial q}$ se réduit à

$$\frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial y} + q \frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial z}.$$

S'il n'est pas identiquement nul, on aura

$$(49) \qquad \mu_1 = \sigma_0 (x, y, z) \operatorname{Log} [q + \sigma_1 (x, y, z)].$$

On tire alors de (47) et (49)

$$\rho = A (q + \sigma_1) \operatorname{Log} (q + \sigma_1) + B q + C,$$

et l'équation (39) montre qu'on devrait avoir $A = 0$, ce qui est impossible.

Le coefficient de $\frac{\partial \mu_1}{\partial q}$ dans l'équation (48) doit donc être identiquement nul, et l'on a

$$\frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial (\gamma - \beta)}{\partial z} = 0.$$

On tire ensuite de (45) $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, et de (44)

$$\omega = \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g') \frac{\partial \gamma (x, y)}{\partial y}.$$

On obtient ainsi les équations

$$(50) \qquad s = p \rho (x, y, z, q) + \frac{\partial g}{\partial x} + (z + g') \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

où la fonction ρ est définie par la relation

$$q = \rho z + g(x, y, \rho).$$

Soit φ une fonction de x et y telle que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma$; on s'assure aisément que l'équation (50) admet pour le système de caractéristiques Y l'invariant du 1^{er} ordre

$$\rho(x, y, z, q) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}:$$

c'est donc une équation du groupe A.

Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'*il n'existe aucune équation* (1) *satisfaisant au système* $G - \Gamma'$ *qui soit de genre* $n \geqslant 3$ *pour chaque système de caractéristiques.*

45. Examinons en second lieu les conditions G'. La seconde s'écrit

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0,$$

et l'on en tire les deux équations

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \omega \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \omega}{\partial q} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial q^2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial \lambda_1}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial q^2} = 0,$$

ou encore, en posant

$$\lambda_1 = \frac{\mu''(x, y, z, q)}{\mu'},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega \frac{\partial \mu}{\partial q} = h_1 \mu + h_2$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial q} = h_3 \mu + h_4,$$

les h_i étant des fonctions de x, y, z.

La condition de compatibilité de ces deux équations s'écrit

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \omega}{\partial z} - \rho \frac{\partial \omega}{\partial q}\right) \frac{\partial \mu}{\partial q} =$$

$$= \left(\frac{\partial h_3}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial z}\right) \mu + \frac{\partial h_4}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial z} + h_2 h_3 - h_1 h_4.$$

On voit comme précédemment que le coefficient de $\frac{\partial \mu}{\partial q}$ ne peut être nul; la fonction μ satisfait donc à une équation de la forme

$$(Aq + B)\frac{\partial \mu}{\partial q} = C\mu + D$$

La seule hypothèse à conserver, on s'en assure sans peine, est l'hypothèse $A \neq 0$, $C \neq 0$; on peut alors prendre

$$\mu = (q + \sigma)^{\sigma_0},$$

et l'équation (39) donne immédiatement

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 (q + \sigma) + \rho_2 (q + \sigma)^{\frac{1}{2}},$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2, et σ ne dépendant que de x, y, z; portant cette valeur de ρ dans l'équation (39) on voit aisément que l'on peut prendre

$$\rho_1 = \frac{1}{z}, \qquad \rho_2 = 2\lambda_2 z^{-\frac{3}{2}}, \qquad \rho_0 = \frac{\lambda_2^2}{z^2} + \lambda_0, \qquad \sigma = \lambda_1 - \lambda_0 z + \frac{\lambda_2^2}{z},$$

les fonctions λ_i ne dépendant que de x et y et λ_2 n'étant pas nul; on en déduit

$$g = 2\lambda_2 \sqrt{\rho - \lambda_0} - \lambda_1.$$

On est ainsi ramené à une forme étudiée précédemment (n° 43) et qui conduit à des impossibilités

En définitive, si l'on remarque que la seconde condition G' est identique à la condition C_1' de M. Gau, on aboutit à la conclusion suivante:

Il n'existe aucune équation (1) *de genre* $n \geqslant 3$ *pour chaque système de caractéristiques qui satisfasse aux conditions* $G - G'$ *ou* $G - C'$.

46. Cette conclusion, qui apporte aux vues de M. Gosse une confirmation au moins partielle, est d'autant plus digne de remarque qu'elle ne s'étend pas aux équations non linéaires. En faisant pour ces équations l'étude des conditions $G - G'$ j'ai en effet obtenu des équations qui sont de genre 3 pour chaque système de caractéristiques; telles sont par exemple les équations

$$s(x + y)\left[z(x + y)^3 + \frac{k^2}{3}\right] = Apq + Bpq^{\frac{1}{2}} + Cp^{\frac{1}{2}}q + Dp^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}},$$

où l'on a

$$A = 2\,(x+y)^4 \qquad B = C = 2k(x+y)^2 \qquad D = \frac{2\,k^2}{3} - 4\,z\,(x+y)^3,$$

et où k désigne une constante arbitraire *non nulle.* Il existe, pour le système X, une involution d'ordre 2,

$$p_2 - \frac{6\,(x+y)^3}{3\,z\,(x+y)^3 + k^2}\left[p^2 + 2\,k(x+y)^{-2}p^{\frac{3}{2}} + k^2(x+y)^{-4}p\right] +$$

$$+ \frac{8\,p}{x+y} - \frac{12\,z}{k}\,p^{\frac{1}{2}} = 0,$$

et une involution d'ordre 3

$$p_3 + \vartheta_0\,p_2^2 + \vartheta_1\,p_2 + \vartheta_2 = 0,$$

où l'on a, en posant $\varphi(x, y) = -\frac{k^2}{3}\,(x+y)^{-3}$:

$$\vartheta_0 = -\frac{1}{2\,p}, \qquad \vartheta_1 = \frac{4}{x+y} - \frac{k^2(x+y)^{-4} + 5\,k\,(x+y)^{-2}p^{\frac{1}{2}} + 4p}{z-\varphi}$$

$$\vartheta_2 = \frac{4\,p^3 + 10\,k\,(x+y)^{-2}p^{\frac{5}{2}}}{(z-\varphi)^2} + \left[\frac{6\,k^2(x+y)^{-4}}{(z-\varphi)^2} - \frac{5\,(x+y)^{-1}}{z-\varphi}\right]p^2 -$$

$$-\left[\frac{2\,k^3\,(x+y)^{-6}}{(z-\varphi)^2} + \frac{4\,k\,(x+y)^{-3}}{z-\varphi}\right]p^{\frac{3}{2}} \quad \left[\frac{2\,k^4\,(x+y)^{-8}}{(z-\varphi)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{4\,k^2(x+y)^{-5}}{z-\varphi} - \frac{4}{(x+y)^2}\right]p$$

On a évidemment par raison de symétrie des résultats analogues pour le système Y. Leur vérification ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des calculs

---

Vu et approuvé:
Paris, le 2 Mai 1928
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer:
Paris, le 2 Mai 1928.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S. CHARLÉTY.