

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

J. DUBOURDIEU

Sur les réseaux de courbes et de surfaces

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1929

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1929__103__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

} N° D'ORDRE : 2090.
} SÉRIE A : N° 1222.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LA GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. J. DUBOURDIEU

1^{ère} THÈSE. — SUR LES RÉSEAUX DE COURBES ET DE SURFACES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *19 Décembre 1929* devant la Commission d'Examen.

MM. CARTAN, *Président.*
VESSIOT, } *Examineurs.*
MONTEL. }

1929

IMPRIMERIE DE LÜTCKE & WULFF
HAMBOURG. ALLEMAGNE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	C. MAURAIN, <i>Professeur</i> , Physique du globe.
<i>Doyens honoraires</i>	P. APPELL, M. MOLLIARD.
<i>Professeurs honoraires</i>	A. JOANNIS.
	H. LE CHATELIER.
	H. LEBESGUE.
	A. FERNBACH.
	A. LEDUC.
	R. DOUGIER.
	E. HÉROUARD.
<i>Professeurs</i>	Emile PICARD Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	G. KENIGS Mécanique physique et expérimentale.
	E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
	P. JANET Électrotechnique générale.
	F. WALLERANT Minéralogie.
	P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
	Gabriel BERTRAND Chimie biologique.
	Mme P. CURIE Physique générale et radioactivité.
	M. CAULLERY Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	G. URBAIN Chimie générale.
	Emile BOREL Calcul des probabilités et Physique mathém.
	L. MARCHIS Aviation.
	Jean PERRIN Chimie physique.
	Rémy PERRIER Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	H. ABRAHAM Physique.
	M. MOLLIARD Physiologie végétale.
	E. CARTAN Géométrie supérieure.
	L. LAPICQUE Physiologie générale.
	E. VESSIOT Théorie des fonctions et théorie des transformations.
	A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.	
Charles FABRY Physique.	
Charles PEREZ Zoologie.	
Léon BERTRAND Géologie structurale et géologie appliquée.	
R. LESPIEAU Théories chimiques.	
E. RABAUD Biologie expérimentale.	
P. PORTIER Physiologie comparée.	
É. BLAISE Chimie organique	
P.-A. DANGEARD Botanique.	
Paul MONTEL Mécanique rationnelle.	
P. WINTREBERT Anatomie et histologie comparées.	
O. DUBOSCQ Biologie maritime.	
G. JULIA Mathématiques générales.	
A. MAILHE Étude des combustibles.	
L. LUTAUD Géographie physique et géologie dynamique.	
Eugène BLOCH Physique théorique et physique céleste.	
Henri VILLAT Mécanique des fluides et applications.	
Ch. JACOB Géologie.	
P. PASCAL Chimie appliquée.	
Y. AUGER Chimie appliquée.	
Léon BRILLOUIN Théories physiques.	
n.....	Astronomie.
E. PÉCHARD.....	Chimie (Enseigt P. C. N.).
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.
A. GUILLET.....	Physique.
G. MAUGUIN.....	Minéralogie.
L. BLARINGHEM.....	Botanique.
A. MICHEL-LÉVY.....	Pétrographie.
A. DEREIMS.....	Géologie.
A. DENJOY.....	Calcul différentiel et intégral.
H. BÉNARD.....	Physique (P. C. N.).
E. DARMOIS.....	Physique.
G. BRUHAT.....	Physique.
H. MOUTON.....	Chimie physique.
	L. JOLEAUD..... Paléontologie.
	M. JAVILLIER..... Chimie biologique.
	A. DUFOUR..... Physique (P. C. N.).
	F. PICARD..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	ROBERT-LÉVY..... Zoologie.
	L. DUNOYER..... Optique appliquée.
	A. GUILLERMOND..... Botanique (P. C. N.).
	A. DEBIERNE..... Radioactivité.
	M. FRÉCHET..... Calcul des Probabilités et Physique mathémat.

Secrétaire

A SACAND.

A MON PÈRE

A MONSIEUR E. CARTAN
ET
A MES MAÎTRES
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

A MON MAÎTRE
MONSIEUR W. BLASCHKE

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES RÉSEAUX DE COURBES ET DE SURFACES

PAR

M. J. DUBOURDIEU

INTRODUCTION

KLEIN, en rattachant, par le programme d'Erlangen, la géométrie à la théorie des groupes de transformations, a permis d'en systématiser l'étude. Dans cet ordre d'idées, les propriétés géométriques les plus générales d'une figure sont celles qui restent invariantes par le groupe de toutes les transformations possibles et imaginables. Toutefois on impose généralement à ces transformations quelques conditions restrictives de continuité et d'uniformité et on les désigne sous le nom de transformations topologiques. L'étude des propriétés correspondantes des figures géométriques constitue le domaine de l'Analysis-Situs, encore appelée topologie et qui a fait l'objet de nombreux développements.

Si on impose aux transformations considérées et aux figures dont on étudie les propriétés d'invariance par rapport à ces transformations, la condition d'être représentées au moyen de fonctions douées de propriétés de continuité et de dérivabilité permettant de leur appliquer les procédés habituels du calcul différentiel, on est conduit à considérer des invariants différentiels. Nous continuerons, même lorsqu'on aura restreint de la sorte la généralité du groupe de transformations considéré, à parler de transformations topologiques et nous désignerons, avec Monsieur BLASCHKE, les invariants sous le nom d'invariants topologiques.

Dans tout ce qui suit nous dirons qu'une figure F est « topologiquement applicable » sur une figure F' , s'il existe une transformation topologique transformant la figure F en la figure F' . D'autre part, chaque fois que nous parlerons d'une « famille de courbes (ou de surfaces) » nous supposerons qu'il s'agit d'une famille à un paramètre, topologiquement applicable sur une famille de droites (ou de plans) parallèles: $x = \text{const.}$ Dès lors une étude des invariants topologiques des familles de courbes dans l'espace à deux dimensions (ou des familles de surfaces dans l'espace à 3 dimensions) n'a de sens que si l'on considère simultanément au moins 3 familles de courbes (ou 4 familles de surfaces)

constituant ce que nous conviendrons d'appeler un « réseau de courbes » (ou un réseau de surfaces). C'est l'étude des invariants topologiques et des propriétés géométriques de ces réseaux que je me suis proposé de développer systématiquement dans ce mémoire.

La première partie traite des réseaux de courbes dans un espace à deux dimensions. Le point de départ de cette étude a été un théorème dû à Monsieur THOMSEN et qu'on trouvera énoncé au Chapitre I (§ 7, Théorème A). Peu après la publication de ce résultat, Monsieur BLASCHKE donnait successivement, une démonstration purement géométrique de cette proposition, ayant l'avantage de ne pas faire intervenir les conditions de dérivabilité qui sont à la base des calculs de Monsieur THOMSEN, et par la même méthode, la démonstration d'un nouveau théorème sur les réseaux de surfaces: (2° partie, Chapitre I, Théorème D). C'est sur son conseil que j'entrepris alors une étude systématique des réseaux. Monsieur BLASCHKE ayant eu l'amabilité de me communiquer les résultats qu'il avait déjà obtenus à ce sujet, ceci nous conduisit à écrire en collaboration un petit mémoire paru dans les „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar“ (Hamburg), que j'ai reproduit à peu de choses près dans le premier chapitre du présent travail: On y trouvera l'exposé de la recherche d'un système complet d'invariants d'un réseau de courbes ainsi que l'interprétation géométrique de ces invariants. On obtient ainsi, en particulier, le théorème de Monsieur THOMSEN sur les « réseaux à configuration hexagonale ».

Au Chapitre II je rappelle brièvement le principe de la démonstration purement géométrique qu'en a donnée Monsieur BLASCHKE et je démontre que les réseaux à configuration hexagonale formés par 3 familles de droites sont constitués par les tangentes à une courbe de troisième classe.

Le troisième chapitre est ensuite consacré à l'étude des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de courbes soit topologiquement applicable sur un réseau formé par 3 familles de droites quelconques. On est conduit à deux équations aux dérivées partielles du second ordre qui doivent admettre une solution commune. Si l'on transforme ce problème par dualité, on constatera aisément qu'il se ramène au problème de la représentation nomographique d'une équation $f(u, v, w) = 0$, telle que l'a définie Monsieur D'OCAGNE. Sous cette forme le problème avait déjà été étudié par Monsieur GRONWALL¹⁾, mais par une méthode fort compliquée due à ce que la nature projective du problème ne semble pas y avoir été entrevue. Monsieur GRONWALL arrive d'ailleurs à des résultats analogues à ceux du Chapitre III, et les équations auxquelles il aboutit s'obtiendraient très simplement, en

¹⁾ GRONWALL: Sur les équations à 3 variables, Liouville-Journal de Mathématiques, 1912.

partant de la représentation du réseau fournie par les équations (45) du Chapitre I. Dans la préface de son mémoire, Monsieur GRONWALL affirme que ces équations ne peuvent jamais avoir plus d'une seule solution commune, mais il n'existe pas à ma connaissance de démonstration de cette affirmation que je n'ai d'ailleurs pas pu vérifier. Elle paraît pourtant devoir être exacte pour tout réseau n'ayant pas la configuration hexagonale, et on en concluerait alors que les seules transformations topologiques transformant un réseau de droites n'ayant pas la configuration hexagonale en un réseau de droites, sont les transformations projectives. J'ai pu démontrer cette proposition dans le cas où deux seulement des familles de droites du réseau sont des faisceaux de droites, mais dans le cas général, la question reste en suspens.

Au Chapitre IV j'étudie les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de courbes admette un groupe continu de transformations.

La deuxième partie du mémoire est consacrée à l'étude des réseaux de surfaces. Le plan en est le même que pour la première partie. Le Chapitre II y est consacré à la démonstration géométrique de quelques théorèmes résultant de la théorie des invariants topologiques développée au Chapitre I. Il y aurait lieu de voir à ce propos si l'on ne pourrait pas donner du théorème E une démonstration analogue que je n'ai pas pu obtenir. On y trouvera également une étude des réseaux à configuration octogonale formés par 4 familles de plans (Th. F) qui découle très simplement du Théorème D.

Les réseaux à configuration octogonale sont caractérisés par la propriété d'être topologiquement applicables sur 4 faisceaux de plans dont les axes forment un quadrilatère, c.-à-d. sont deux à deux concourants. Il était naturel de rechercher dans quel cas un réseau de surfaces peut être topologiquement appliqué sur 4 faisceaux de plans d'axes quelconques. Cette étude fait l'objet du Chapitre III. Les conditions nécessaires et suffisantes cherchées peuvent s'exprimer explicitement au moyen des invariants du réseau. L'étude des conditions pour qu'un réseau soit topologiquement applicable sur 4 familles de plans quelconques s'effectuerait par la même méthode. Mais on obtient ainsi des équations fort compliquées qu'il semble assez difficile d'étudier.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude des réseaux de surfaces admettant un groupe continu transitif de transformations topologiques.

Qu'il me soit permis, pour terminer, d'exprimer ici ma gratitude à Monsieur BLASCHKE pour l'amabilité avec laquelle il a dirigé mes recherches et à mes maîtres de l'École Normale pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu prendre à mon travail.

PREMIÈRE PARTIE.

Réseaux de courbes.

CHAPITRE I.

Invariants des réseaux de courbes.

§ 1. *L'Invariant relatif ϱ .*

Considérons dans le plan ou sur une surface un réseau de courbes, c.-à-d. l'ensemble de trois familles à un paramètre de courbes que nous supposerons, dans ce qui suit, continues et dérivables aussi souvent que cela nous sera nécessaire. Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher les invariants différentiels du réseau par rapport à des transformations ponctuelles dont nous supposerons seulement qu'elles sont continues et dérivables.

Nous imaginerons à cet effet les trois familles de courbes définies dans un système de coordonnées curvilignes quelconque u, v par les relations différentielles $L_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) où les expressions,

$$(1) \quad L_i = \varphi_i(u, v) du + \psi_i(u, v) dv$$

sont des formes différentielles linéaires que l'on peut toujours supposer choisies de manière à vérifier identiquement la relation:

$$(2) \quad L_1 + L_2 + L_3 \equiv 0,$$

ce qui entraîne:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0, \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \equiv 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'on a:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \varphi_2 & \psi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = D,$$

et nous conviendrons de dire que les 3 familles de courbes forment un réseau dans un certain domaine si pour tous les points de ce domaine on a $D \neq 0$.

En vertu de la relation (2) les L_i sont définies à un facteur commun près $\lambda(u, v)$. Nous voyons par suite que la recherche des invariants du réseau se ramène à l'étude des invariants des formes L_i par rapport aux deux groupes de transformations suivants:

1°) (T). *Changement du système de coordonnées.*

$$(5) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, v), \\ v = v(u, \bar{v}), \end{cases} \text{ avec: } \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0.$$

2°) (T*). *Multiplication des L_i par un facteur commun $\lambda(u, v)$.*

$$(6) \quad L_i^* = \lambda L_i; \quad \varphi_i^* = \lambda \varphi_i, \quad \psi_i^* = \lambda \psi_i; \quad \lambda \neq 0.$$

Posons:

$$(7) \quad \begin{cases} d u = \alpha d \bar{u} + \beta d \bar{v}, \\ d v = \gamma d \bar{u} + \delta d \bar{v}, \end{cases} \quad \mathcal{J} = \alpha \delta - \beta \gamma.$$

Les formes L_i étant invariantes pour tout changement de coordonnées, on a:

$$L_i = L_i,$$

d'où suivent les relations:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{\varphi}_i = \alpha \varphi_i + \gamma \psi_i, \\ \bar{\psi}_i = \beta \varphi_i + \delta \psi_i. \end{cases}$$

Par suite:

$$(9) \quad \bar{D} = \mathcal{J} D, \quad D^* = \lambda^2 D.$$

Les formules (7) peuvent aussi s'écrire:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{v}} = \beta \frac{\partial}{\partial u} + \delta \frac{\partial}{\partial v}, \end{cases}$$

et on voit que les « opérateurs différentiels »:

$$(11) \quad A_i = \frac{1}{D} \left(\psi_i \frac{\partial}{\partial u} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

possèdent les propriétés suivantes:

$$(12) \quad \bar{A}_i = A_i, \quad A_i^* = \frac{1}{\lambda} A_i.$$

Pour obtenir des invariants différentiels nous introduirons maintenant les « parenthèses de Jacobi » définies par les relations bien connues:

$$(13)_1 \quad \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j) = \mathcal{A},$$

\mathcal{A} étant un nouvel opérateur du premier ordre.

En vertu des relations (3), on a:

$$(14) \quad \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \equiv 0,$$

d'où il suit:

$$(13)_2 \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_2,$$

de telle sorte qu'on n'obtient ainsi, en fait, qu'un seul nouvel opérateur \mathcal{A} . Pour la commodité des écritures nous introduirons les notations suivantes:

$$(15) \quad \varrho_i = \frac{1}{D} (\psi_{iu} - \varphi_w),$$

où, par exemple:

$$\varphi_{iv} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v},$$

et nous remarquerons que l'on a, en vertu de (3):

$$(16) \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \equiv 0.$$

De plus les ϱ_i se transforment par \bar{T} et T^* d'après les lois suivantes:

$$(17) \quad \bar{\varrho}_i = \varrho_i, \quad \varrho_i^* = \frac{1}{\lambda} \varrho_i + \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{A}_i(\lambda).$$

Si on développe les parenthèses de Jacobi on trouve pour \mathcal{A} les expressions suivantes:

$$(18)_1 \quad \mathcal{A} = \varrho_2 \mathcal{A}_1 - \varrho_1 \mathcal{A}_2 = \varrho_3 \mathcal{A}_2 - \varrho_2 \mathcal{A}_3 = \varrho_1 \mathcal{A}_3 - \varrho_3 \mathcal{A}_1.$$

Il est commode d'englober ces relations dans l'identité suivante par rapport aux c_i :

$$(18)_2 \quad (c_1 + c_2 + c_3) \mathcal{A} \equiv \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \end{vmatrix},$$

les flèches indiquant que dans chaque terme du développement du déterminant, les \mathcal{A}_i doivent être écrits en dernier lieu. Par analogie avec (11), posons:

$$(19) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{D} \left(\psi \frac{\partial}{\partial u} - \varphi \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Des relations (18) on tire explicitement:

$$(20) (c_1 + c_2 + c_3) \varphi = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}; (c_1 + c_2 + c_3) \psi = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix},$$

et on voit aisément que \mathcal{A} , φ , ψ se transforment par \bar{T} et T^* d'après les relations suivantes:

$$(21) \quad \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}; \quad \mathcal{A}^* = \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{A} - \frac{1}{D\lambda^3} \begin{vmatrix} \lambda_u & \lambda_v \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

D'où:

$$(22) \quad \varphi^* = \varphi + \frac{\lambda_u}{\lambda}; \quad \psi^* = \psi + \frac{\lambda_v}{\lambda}.$$

Il y a lieu de remarquer à cet effet l'identité par rapport aux c_i :

$$(23) \quad \frac{c_1 + c_2 + c_3}{D} \begin{vmatrix} \lambda_u & \lambda_v \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \mathcal{A}_1 \lambda & \mathcal{A}_2 \lambda & \mathcal{A}_3 \lambda \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \end{vmatrix}.$$

Si on forme maintenant, par analogie avec les ϱ_i , l'expression:

$$(24) \quad \boxed{e = \frac{1}{D} (\psi_u - \varphi_v),}$$

on trouve que c'est un invariant relatif:

$$(25) \quad \bar{e} = e; \quad e^* = \frac{1}{\lambda^2} e.$$

L'équation $e = 0$ est par suite invariante. Nous en donnons une interprétation géométrique dans le paragraphe suivant.

§ 2. Réseaux à configuration hexagonale.

Nous conviendrons d'appeler «réseau à configuration hexagonale» tout réseau dont on peut, par un choix convenable des coordonnées u, v représenter les trois familles de courbes par les équations:

$$(26) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}, \quad \text{avec } u + v + w = 0,$$

nous réservant de justifier cette dénomination au § 6.

Si l'on considère u et v comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires les équations (26) représentent 3 familles de droites

parallèles se coupant sous des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Comme il est toujours possible de ramener par une transformation affine trois familles de droites parallèles à être représentées par ces équations, nous voyons qu'on peut encore donner des réseaux à configuration hexagonale la définition suivante: *Ce sont des réseaux tels qu'il existe une transformation topologique transformant les 3 familles de courbes du réseau en 3 familles de droites parallèles.*

THÉORÈME. *La condition $\varrho = 0$ caractérise les réseaux à configuration hexagonale.* Si l'on peut en effet représenter les courbes du réseau par les relations (26) c'est qu'il est possible de trouver un facteur commun λ pour L_1 et L_2 de telle manière que λL_1 et λL_2 soient des différentielles exactes:

$$\lambda L_1 = du, \quad \lambda L_2 = dv.$$

Alors, en vertu de la relation (2), on a: $\lambda L_3 = -(du + dv) = -dv$. La condition pour que λL_i soit une différentielle exacte, donne pour λ la condition:

$$(27)_i \quad \mathcal{A}_i \log \lambda = -\varrho_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

et l'on trouve aisément comme condition d'intégrabilité du système (27)_i l'égalité $\varrho = 0$. Les conditions d'intégrabilité de ce système sont en effet:

$$(\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i) \log \lambda - \varrho_j \mathcal{A}_i \log \lambda - \varrho_i \mathcal{A}_j \log \lambda,$$

ce qui donne en tenant compte des relations (27) elles-mêmes,⁶

$$\mathcal{A}_i \varrho_j - \mathcal{A}_j \varrho_i = 0.$$

Or on vérifie aisément par ailleurs que l'on a:

$$\boxed{\varrho = \mathcal{A}_1 \varrho_2 - \mathcal{A}_2 \varrho_1 = \mathcal{A}_2 \varrho_3 - \mathcal{A}_3 \varrho_2 = \mathcal{A}_3 \varrho_1 - \mathcal{A}_1 \varrho_3.}$$

La condition $\varrho = 0$ est donc nécessairement vérifiée pour tout réseau à configuration hexagonale. Inversement d'ailleurs si elle est vérifiée, les équations (27)_i sont complètement intégrables et par suite on peut trouver un facteur λ tel que $\lambda L_1 = du$, $\lambda L_2 = dv$ ce qui permet de représenter le réseau par les équations (26).

§ 3. Nouveaux invariants pour $\varrho \neq 0$.

Les réseaux pour lesquels $\varrho = 0$ ayant été ainsi complètement déterminés, nous considérerons maintenant des réseaux pour lesquels on a:

$\varrho \neq 0$. Nous allons voir qu'on peut alors numéroter les L_i de manière à avoir $\varrho > 0$.

Si en effet, on échange par exemple les indices 2 et 3, on voit d'après (4) que le déterminant D et par suite d'après (11) les \mathcal{A}_i changent de signe, ainsi que \mathcal{A} . D'après (19) φ et ψ conservent au contraire leurs signes et par suite, d'après (24), ϱ change de signe. On peut donc toujours supposer $\varrho > 0$. Nous désignerons par $\sqrt{\varrho}$ l'une quelconque des deux racines carrées de ϱ .

On voit alors qu'en posant:

$$(28) \quad \sqrt{\varrho} L_i = L'_i, \quad \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}'_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

les expressions L'_i et les opérateurs \mathcal{A}'_i sont invariants par rapport à \bar{T} (pour $\mathcal{S} > 0$ ce qui est nécessaire pour conserver le signe de ϱ) et à T^* .

$$(29) \quad \begin{aligned} \bar{L}'_i &= L'_i, & \bar{\mathcal{A}}'_i &= \mathcal{A}'_i; \\ L_i^* &= L'_i, & \mathcal{A}_i^* &= \mathcal{A}'_i. \end{aligned}$$

On reconnaîtra de même l'invariance de l'intégrale double:

$$(30) \quad \oint L = \iint D \varrho \, du \, dv$$

et de la forme différentielle quadratique:

$$(31) \quad Q \equiv \varrho (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \equiv -2\varrho (L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1).$$

Considérons alors les parenthèses:

$$(\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j) = \mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j - \mathcal{A}'_j \mathcal{A}'_i.$$

Ce sont des opérateurs du premier ordre que l'on peut par conséquent exprimer linéairement au moyen de deux des opérateurs \mathcal{A}'_i . Nous poserons:

$$(32) \quad \boxed{(\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j) = \omega_j \mathcal{A}'_i - \omega_i \mathcal{A}'_j.}$$

Il est clair que les coefficients $\omega_i \omega_j$ sont alors des invariants absolus. On les calcule aisément comme suit:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j) &= \mathcal{A}'_i \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \mathcal{A}_j \right) - \mathcal{A}'_j \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \mathcal{A}_i \right) \\ &= -\frac{\mathcal{A}'_i(\sqrt{\varrho})}{\varrho} \mathcal{A}_j + \frac{\mathcal{A}'_j(\sqrt{\varrho})}{\varrho} \mathcal{A}_i + \frac{1}{\varrho} (\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j). \end{aligned}$$

Or on a :

$$(A_i A_j) = \varrho_j A_i - \varrho_i A_j.$$

D'où pour ω_i l'expression :

$$(33) \quad \omega_i = \frac{A_i \sqrt{\varrho}}{\varrho} + \frac{\varrho_i}{\sqrt{\varrho}} = \frac{1}{D\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\psi_i \sqrt{\varrho}) - \frac{\partial}{\partial v} (\varphi_i \sqrt{\varrho}) \right],$$

$$i = 1, 2, 3.$$

En vertu de la relation $A'_1 + A'_2 + A'_3 = 0$ on voit comme au § 2 qu'en fait il existe une seule parenthèse, soit A'

$$A' = A'_1 A'_2 - A'_2 A'_1 = A'_2 A'_3 - A'_3 A'_1 = A'_3 A'_1 - A'_1 A'_3,$$

et l'on a par rapport aux c_i l'identité

$$(34) \quad (c_1 + c_2 + c_3) A' = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \end{vmatrix},$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont définis par (33) et ont une somme nulle.

$$(35) \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Nous verrons au § 5 que les ω_i sont les invariants absolus d'ordre minimum du réseau et que tout autre invariant est une fonction des ω_i et des invariants d'ordre supérieur qu'on obtient en appliquant aux ω_i les opérateurs invariants A'_i .

§ 4. La forme quadratique Q .

On peut considérer la forme quadratique Q définie par la formule (31) comme le carré de l'élément linéaire d'une *métrique gaussienne* liée de façon invariante au réseau. Nous allons montrer que *dans cette métrique, les courbes du réseaux se coupent mutuellement sous l'angle fixe $\frac{2\pi}{3}$.*

On peut en effet prendre comme paramètres directeurs de la courbe $L_2 = 0$ les expressions :

$$du = +\psi_2, \quad dv = -\varphi_2$$

et comme paramètres directeurs de la courbe $L_3 = 0$

$$\delta u = +\psi_3, \quad \delta v = -\varphi_3.$$

On vérifie alors sans peine que l'angle de ces deux directions est donné par la formule :

$$(36) \quad \cos \alpha = \frac{L_1(d) L_1(\delta) + L_2(d) L_2(\delta) + L_3(d) L_3(\delta)}{\sqrt{\sum L_i^2(d)} \cdot \sqrt{\sum L_i^2(\delta)}} = -\frac{1}{2}, \text{ c, q, f, d.}$$

Il s'ensuit que si l'on connaît Q et une famille de courbes du réseau $L_1 = 0$, on obtient les deux autres familles $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, en effectuant sur chaque élément linéaire de $L_1 = 0$ deux rotations d'angle $\pm 2\pi : 3$ en chaque point.

On peut se poser inversement la question suivante:

Étant donnée une métrique quelconque $ds^2 = Q$, comment doit-on choisir la famille de courbes $L_1 = 0$ pour que le réseau obtenu par la méthode précédente admette comme métrique invariablement liée à lui précisément le forme quadratique Q donnée arbitrairement?

Pour conduire aisément les calculs nous prendrons les paramètres u et v complexes et les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ comme lignes de longueur nulle de la métrique $ds^2 = Q$, de telle sorte que l'on ait:

$$(37) \quad ds^2 = Q = 2F du dv.$$

Soit ensuite:

$$(38)_1 \quad L_1 = \alpha du + \beta dv = 0,$$

l'équation différentielle qui définit la famille de courbes cherchée. Les deux autres familles du réseau devant couper la première famille sous les angles $2\pi : 3$ et $4\pi : 3$ elles sont définies par les égalités:

$$(38)_2 \quad \begin{cases} L_2 = \varepsilon^2 \alpha du + \varepsilon \beta dv, \\ L_3 = \varepsilon \alpha du + \varepsilon^2 \beta dv, \end{cases}$$

où l'on pose:

$$(39) \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad i^2 = -1, \quad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3}.$$

On calcule alors aisément les expressions suivantes:

$$(40) \quad \begin{cases} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 6\alpha\beta du dv, & D = (\varepsilon - \varepsilon^2)\alpha\beta; \\ \varrho_1 = \frac{\beta_u - \alpha_v}{(\varepsilon - \varepsilon^2)\alpha\beta}, & \varrho_2 = \frac{\varepsilon\beta_u - \varepsilon^2\alpha_v}{(\varepsilon - \varepsilon^2)\alpha\beta}, & \varrho_3 = \frac{\varepsilon^2\beta_u - \varepsilon\alpha_v}{(\varepsilon - \varepsilon^2)\alpha\beta}; \\ \varphi = \frac{\beta_u}{\beta}, & \psi = \frac{\alpha_v}{\alpha}, \end{cases}$$

et par suite

$$(41) \quad \varrho = \frac{\left[\log \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right]_{uv}}{(\varepsilon - \varepsilon^2)\alpha\beta}.$$

On peut déduire de cette formule un résultat géométrique. Si on a identiquement $\varrho \equiv 0$, on en conclut en effet:

$$\alpha : \beta = U'(u) : V'(v)$$

et par suite on voit qu'alors la famille de courbes $L_1 = 0$ est représentée par l'égalité

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

Dans le système de coordonnées considéré, ce sont les lignes de niveau d'une fonction « Potentiel » sur la surface, attendu que l'équation de Laplace s'écrit en coordonnées isotropes:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = 0.$$

Une telle famille de courbes s'appelle famille « isotherme ». On a donc le théorème suivant:

Etant donnée sur une surface une famille de courbes on peut en déduire deux autres familles de courbes coupant celles de la première famille respectivement sous les angles $\pm \frac{2\pi}{3}$. La condition nécessaire et suffisante pour que le réseau ainsi obtenu soit à configuration hexagonale est que la famille de courbes d'où l'on est parti soit isotherme.

Admettons maintenant que $\varrho > 0$. En portant dans la formule (31) les expressions de ϱ et des L_i on a la relation cherchée entre la forme Q et la famille $L_1 = 0$, sous la forme:

$$(42) \quad \frac{3}{\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{1}{F} \left(\log \frac{\alpha}{\beta} \right)_{uv} = 1.$$

Si on pose

$$(43) \quad \alpha du + \beta dv = dL(u, v),$$

on peut écrire la relation (42), au moyen de paramètres u, v absolument quelconques sur la surface, sous la forme:

$$(44) \quad \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\Delta L}{\nabla L}, L \right)}{\partial (u, v)} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

où E, F, G sont les coefficients de la forme Q :

$$Q = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

et où Δ et ∇ sont les « opérateurs de Beltrami » à savoir:

$$\nabla L = \frac{EL_v^2 - 2FL_u L_v + GL_u^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{EL_v - FL_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v + \left(\frac{GL_u - FL_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}.$$

§ 5. *Représentation canonique d'un réseau.*

Pour étudier les propriétés infinitésimales d'un réseau au voisinage d'un point régulier il est commode de considérer la représentation analytique suivante, obtenue en posant $L_3 = df(u, v)$ et prenant les deux premières familles comme courbes coordonnées, ce qui donne:

$$(45) \quad \begin{aligned} L_1 &= -f_u du + * & ; & \quad g_1 = -f_u, & \quad \psi_1 = 0; \\ L_2 &= * -f_v dv; & \quad g_2 = 0, & \quad \psi_2 = -f_v; \\ L_3 &= f_u du + f_v dv; & \quad g_3 = f_u, & \quad \psi_3 = f_v. \end{aligned}$$

D'où suivent:

$$(46) \quad A_1 = \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v}, \quad A_2 = -\frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u}, \quad A_3 = \frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v};$$

$$(47) \quad e_1 = \frac{f_{uv}}{f_u f_v}, \quad e_2 = -\frac{f_{uv}}{f_u f_v}, \quad e_3 = 0;$$

$$(48) \quad A = \frac{f_{uv}}{f_u f_v} \left(\frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v} \right);$$

$$(49) \quad \varphi = \frac{\partial}{\partial u} \log f_v, \quad \psi = \frac{\partial}{\partial v} \log f_u;$$

$$(50) \quad \begin{aligned} e &= \frac{1}{f_u f_v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{f_u}{f_v} \\ &= \frac{f_u f_v (f_v f_{uu} - f_u f_{vv}) + f_{uv} (f_u^2 f_v - f_v^2 f_u)}{(f_u f_v)^3}; \end{aligned}$$

$$(51) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{D\varrho} \frac{\partial}{\partial v} (f_u \sqrt{\varrho}), \quad \omega_2 = -\frac{1}{D\varrho} \frac{\partial}{\partial u} (f_v \sqrt{\varrho}), \\ \omega_3 &= \frac{1}{D\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial u} (f_v \sqrt{\varrho}) - \frac{\partial}{\partial v} (f_u \sqrt{\varrho}) \right]. \end{aligned}$$

La forme des égalités (45) est conservée par les deux groupes de transformations suivants:

1°) (T^*). *Changement de la fonction $f(u, v)$.*

On substitue à f une fonction $f^*(u, v)$ définie par:

$$(52) \quad f^*(u, v) = F[f(u, v)].$$

2°) (\bar{T}). *Changement de paramètres u et v conservant les lignes de coordonnées:*

$$(53) \quad u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}).$$

On peut utiliser ces deux séries de transformations pour obtenir une représentation du réseau telle qu'en un point déterminé O certaines dérivées de la fonction f s'annulent. Nous conviendrons dans ce qui suit de représenter par \hat{g} la valeur que prend une fonction $g(u, v)$ au point $O(u_0, v_0)$.

1°) (T^*). Si on calcule au moyen de (52) les dérivées de f^* on obtient:

$$(54) \quad \begin{aligned} f_u^* &= F' f_u, \\ f_{uv}^* &= F'' f_u f_v + F' f_{uv}, \\ f_{uvv}^* &= F''' f_u f_v^2 + F'' (2f_{uv} f_v + f_u f_{vv}) + F' f_{uv}, \\ &\dots \end{aligned}$$

où F', F'', F''' représentent les dérivées successives de F par rapport à f . Si l'on admet (ce qui est toujours possible en un point régulier du réseau) que l'on a au point O :

$$\overset{\circ}{f}_u \neq 0, \quad \overset{\circ}{f}_v \neq 0,$$

les formules (54) montrent que l'on peut toujours choisir la fonction F de telle manière que:

$$\overset{\circ}{f}_{uv}^* = 0, \quad \overset{\circ}{f}_{uvv}^* = 0, \quad \overset{\circ}{f}_{uvvv}^* = 0 \dots,$$

car $\overset{\circ}{F}'$ ayant été pris arbitrairement ces égalités déterminent les valeurs $\overset{\circ}{F}''', \overset{\circ}{F}''''', \overset{\circ}{F}^{IV} \dots$ et il est toujours possible de trouver une fonction dont les dérivées aient des valeurs données en un point donné.

2°) (T). Effectuons maintenant un changement de paramètres défini par les relations (53) et soit:

$$\bar{f}^*(u, v) = f^*[u(\bar{u}), v(\bar{v})].$$

Si on calcule les dérivées de f^* par rapport à \bar{u} et \bar{v} , on trouve aussitôt que les conditions (55) sont conservées, c.-à-d.:

$$(55)' \quad \overset{\circ}{f}_{uv}^* = \overset{\circ}{f}_{uvv}^* = \overset{\circ}{f}_{uvvv}^* = \dots = 0.$$

De plus on a:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\bar{u}}^* &= f_u^* \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, & \bar{f}_{\bar{v}}^* &= f_v^* \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \\ \bar{f}_{\bar{u}\bar{u}}^* &= f_{uu}^* \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + f_u^* \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^2}, & \bar{f}_{\bar{v}\bar{v}}^* &= f_{vv}^* \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right)^2 + f_v^* \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{v}^2}; \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment qu'on peut choisir les nouveaux paramètres $\bar{u} \bar{v}$ de manière à remplir les conditions suivantes :

$$(56) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{f}_u^* &= 1; & \overset{\circ}{f}_{uu}^* &= \overset{\circ}{f}_{uuu}^* = \dots = 0, \\ \overset{\circ}{f}_v^* &= 1; & \overset{\circ}{f}_{vv}^* &= \overset{\circ}{f}_{vvv}^* = \dots = 0. \end{aligned}$$

Une telle représentation pour laquelle la fonction $f(u, v)$ satisfait aux conditions (55)' et (56) sera dite : « *représentation canonique au point O.* » et avec cette représentation les invariants ϱ et ω_i ont les formes suivantes :

$$(57) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{\varrho} &= \overset{\circ}{f}_{uv}, & \overset{\circ}{\omega}_1 &= \frac{\overset{\circ}{f}_{uvw}}{2(\overset{\circ}{f}_{uv})^{3/2}}, & \overset{\circ}{\omega}_2 &= \frac{\overset{\circ}{f}_{uvw} - \overset{\circ}{f}_{uuw}}{2(\overset{\circ}{f}_{uv})^{3/2}}, \\ & & \overset{\circ}{\omega}_3 &= -(\overset{\circ}{\omega}_1 + \overset{\circ}{\omega}_2). \end{aligned}$$

Dans une telle représentation les seules dérivées jusqu'au 4^{ème} ordre qui restent arbitraires au point O sont $\overset{\circ}{f}_{uv}, \overset{\circ}{f}_{uvw}, \overset{\circ}{f}_{uuw}$. Toutefois la représentation ainsi obtenue n'est pas absolument déterminée. On pourrait en effet obtenir une normalisation de la fonction f et des paramètres u et v telle qu'en plus des conditions (55)' et (56) soit vérifiée la condition :

$$(58) \quad \overset{\circ}{\varrho} = \overset{\circ}{f}_{uv} = 1.$$

Cela tient à ce que pour assujettir f^* aux conditions (55)', $\overset{\circ}{F}$ a été choisi arbitrairement. Il s'ensuit que cette fonction f^* n'est déterminée qu'à un facteur constant près, soit k . Si on pose :

$$f'^* = f^* k$$

on voit que par la normalisation des paramètres on obtiendra ensuite :

$$\bar{f}'_{\bar{u}\bar{v}} = f'^* \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right),$$

et d'autre part les conditions $\overset{\circ}{f}'_u = \overset{\circ}{f}'_v = 1$ donnent :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^0 = \frac{1}{\overset{\circ}{f}'_u}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^0 = \frac{1}{\overset{\circ}{f}'_v}.$$

Si donc on choisit le facteur k de manière à vérifier la relation :

$$\bar{f}'_{\bar{u}\bar{v}} = \overset{\circ}{f}'_{uv} \frac{1}{\overset{\circ}{f}'_u \overset{\circ}{f}'_v} = \frac{1}{k} \overset{\circ}{f}_{uv} \frac{1}{\overset{\circ}{f}_u \overset{\circ}{f}_v} = 1$$

la nouvelle fonction f'^* et les nouveaux paramètres $\bar{u} \bar{v}$ constitueront une représentation canonique pour laquelle on aura en plus $\bar{\varrho} = 1$. La représentation ainsi obtenue est alors absolument déterminée.

Dans cette représentation les seules dérivées jusqu'au 4^{ième} ordre qui restent arbitraires sont f'_{uuv} et f'_{uvw} . Par suite il n'existe pas d'invariant d'ordre inférieur à 4 (l'ordre d'un invariant étant pris égal à l'ordre le plus élevé des dérivées de f qui y figurent), et tout invariant d'ordre 4 peut s'exprimer au moyen de ω_1 et ω_2 qui constituent donc un système complet d'invariants d'ordre minimum.

§ 6. Relations remarquables entre les ω_i .

Dans la représentation canonique, les seules dérivées du 5^{ième} ordre qui soient différentes de zéro au point O sont au nombre de trois: f'_{uuuv} , f'_{uuvv} , f'_{uvvv} . Par suite il ne saurait y avoir plus de 3 invariants du 5^o ordre indépendants. Or les expressions $A'_i \omega_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) sont de tels invariants. Au moyen des relations:

$$(59) \quad A'_1 + A'_2 + A'_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

il est possible d'exprimer ces 9 grandeurs au moyen de 4 d'entre elles, par exemple $A'_1 \omega_1$, $A'_2 \omega_2$, $A'_1 \omega_2$, $A'_2 \omega_1$. Comme il n'y a pas plus de 3 invariants indépendants, ces 4 expressions doivent être liées par une relation que nous allons établir, en partant des formules (33):

$$\omega_1 = \frac{A_1(V\bar{\varrho})}{\bar{\varrho}} + \frac{\varrho_1}{V\bar{\varrho}}, \quad \omega_2 = \frac{A_2(V\bar{\varrho})}{\bar{\varrho}} + \frac{\varrho_2}{V\bar{\varrho}}.$$

Si on forme l'expression $A_1 \omega_2 - A_2 \omega_1$ et si dans le second membre de l'égalité obtenue on tient compte des relations suivantes,

$$\begin{aligned} A_1 A_2(V\bar{\varrho}) - A_2 A_1(V\bar{\varrho}) &= \varrho_1 A_2(V\bar{\varrho}) - \varrho_2 A_1(V\bar{\varrho}), \\ A_1 \varrho_2 - A_2 \varrho_1 &= \bar{\varrho}, \end{aligned}$$

on obtient la relation:

$$A_1(\omega_2) - A_2(\omega_1) = V\bar{\varrho} \quad \text{ou} \quad A'_1 \omega_2 - A'_2 \omega_1 = 1.$$

On a ainsi les 3 relations suivantes:

$$(60) \quad \boxed{\begin{cases} A'_1(\omega_2) - A'_2(\omega_1) = 1, \\ A'_2(\omega_3) - A'_3(\omega_2) = 1, \\ A'_3(\omega_1) - A'_1(\omega_3) = 1. \end{cases}}$$

On pourrait également les obtenir à partir de l'identité bien connue de Jacobi:

$$(\mathcal{A}'_1(\mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_3)) + (\mathcal{A}'_2(\mathcal{A}'_3 \mathcal{A}'_1)) + (\mathcal{A}'_3(\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2)) \equiv 0$$

en tenant compte des formules (59) et (32).

Les égalités (60) montrent qu'il est impossible que tous les ω_i soient constants. (Ceci suppose bien entendu $q \neq 0$, seul cas dans lequel les ω_i aient été définis.) De là il suit qu'aucun réseau pour lequel on a $q \neq 0$ n'admet un groupe transitif de transformations topologiques transformant ce réseau en lui même, car pour un tel réseau les ω_i , invariants absolus, devraient être constants.

Pour $q = 0$ au contraire, c.-à-d. pour un réseau à configuration hexagonale, un tel groupe transitif existe comme on le voit immédiatement en songeant à l'équivalence d'un tel réseau avec un réseau formé de trois familles de droites parallèles.

§ 7. *Interprétation géométrique des invariants.*

La représentation analytique (45), a été obtenue en prenant les courbes de la première et de la deuxième famille comme courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, et en définissant la troisième famille de courbes par l'égalité:

$$(60) \quad f(u, v) = C.$$

Cette égalité fait correspondre à chaque courbe de la troisième famille un nombre C . Mais comme on peut remplacer la fonction f par toute autre fonction de la forme $F(f)$, on voit que cette correspondance est absolument arbitraire, de sorte qu'on peut faire subir à C une transformation quelconque:

$$(61) \quad \bar{C} = F(C).$$

Dans la représentation canonique, la fonction f — et par suite C — est déterminée par les conditions (55)' et (56). Nous considérerons dans ce qui suit une représentation «*semi-canonique*» du réseau, pour laquelle seules les conditions (56) soient réalisées, ce qui laisse subsister la possibilité d'une transformation (61) sur C .

Pour satisfaire aux conditions (56) nous avons introduit un nouveau système de paramètres u et \bar{v} qu'on peut interpréter de la manière suivante:

Remarquons d'abord que ces nouveaux paramètres n'étant définis qu'à une constante près on peut supposer que le point O a pour coordonnées $(0, 0)$. On obtient alors le nouveau système de coordonnées

en donnant au paramètre v en un point $P(u = 0, v)$ situé sur la courbe de la première famille passant par O , la valeur $C - C_0$, où C et C_0 sont les constantes définies par (60) qui correspondent respectivement aux courbes de la 3^{ème} famille passant par P et par O . La même définition s'applique à la valeur du paramètre u en un point $Q(u, v = 0)$ de sorte que pour deux points P et Q situés sur une même courbe de la 3^{ème} famille on a : $u = v$.

Dans une telle « représentation semi-canonique » la valeur de $\overset{\circ}{\rho}$ est :

$$(62) \quad \overset{\circ}{\rho} = f_{uv} - f_{vu}$$

et ρ s'interprète géométriquement de la façon suivante :

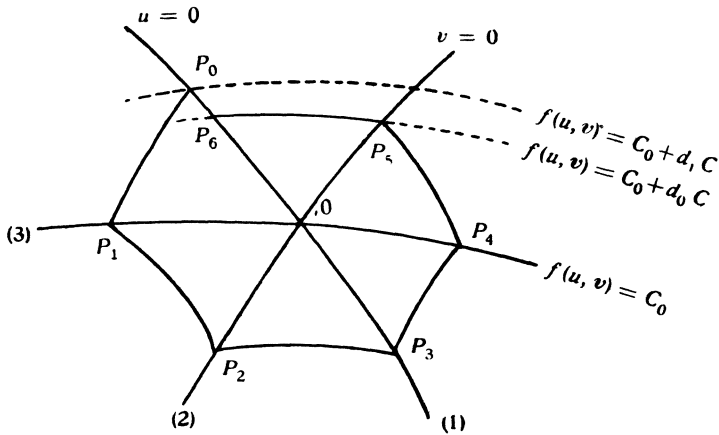


Fig. 1.

Considérons (Fig. 1) sur la courbe (1) ($u = 0$) un point $P_0(u = 0, v = v_0)$ voisin de O . Par ce point passe une seule courbe de la deuxième famille que nous traçons jusqu'à sa rencontre en P_1 avec la ligne (3) passant par O [$f(u, v) = f(0, 0) = C_0$]. Par P_1 passe une ligne de la 1^{ère} famille que nous traçons jusqu'à sa rencontre en P_2 avec la ligne (2) ($v = 0$)... et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi un contour polygonal curviligne $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ dont les côtés ($P_0 P_1$) et ($P_3 P_4$) appartiennent à la deuxième famille, les côtés ($P_1 P_2$) et ($P_4 P_5$) à la première et les côtés ($P_2 P_3$) ($P_5 P_6$) à la 3^{ème}. En général les points P_0 et P_6 ne sont pas confondus, c.-à-d. que la ligne polygonale considérée ne se ferme pas. Les coordonnées des sommets sont :

$$P_0 : (0, v_0), \quad P_1 : (u_0, v_0), \quad P_2 : (u_0, 0), \quad P_3 : (0, u_0), \\ P_4 : (v_1, u_0), \quad P_5 : (v_1, 0), \quad P_6 : (0, v_1),$$

où u_0 et v_1 sont définis par les égalités suivantes:

$$(63) \quad \begin{cases} f(u_0, v_0) = f(0, 0), \\ f(v_1, u_0) = f(0, 0). \end{cases}$$

Si on développe en série les membres de gauche dans ces deux égalités on obtient aisément les formules suivantes:

$$\begin{cases} u_0 = -v_0 + f_{uv}^{\circ} v_0^2 - \left[f_{uv}^{\circ 2} + \frac{1}{2} (f_{uvv}^{\circ} - f_{uuv}^{\circ}) \right] v_0^3 + \dots \\ v_1 = -u_0 + f_{uv}^{\circ} u_0^2 - \left[f_{uv}^{\circ 2} + \frac{1}{2} (f_{uuv}^{\circ} - f_{uvv}^{\circ}) \right] u_0^3 + \dots \end{cases}$$

D'où l'on déduit:

$$v_1 = v_0 + (f_{uuv}^{\circ} - f_{uvv}^{\circ}) v_0^3 + \dots,$$

ou en vertu de (62):

$$(64) \quad v_1 = v_0 + \overset{\circ}{\varrho} v_0^3 + \dots$$

On en conclut que $\overset{\circ}{\varrho}$ est donné par la formule:

$$(65) \quad \overset{\circ}{\varrho} = \text{Lim}_{v_0=0} \frac{v_1 - v_0}{v_0^3} = \text{Lim}_{d_0 C=0} \frac{d_1 C - d_0 C}{(d_0 C)^3}$$

où $C_0 + d_0 C$ et $C_0 + d_1 C$ sont les constantes qui correspondent comme il a été expliqué plus haut aux courbes de la 3^{ième} famille passant par P_0 et P_6 .

On voit que si l'on effectue sur C la transformation (61) le membre de droite de la formule (65) est multiplié par $\frac{1}{(F')^2}$, ce qui correspond au fait que ϱ n'est qu'un invariant relatif.

Considérons en particulier le cas d'un réseau pour lequel $\varrho \equiv 0$. Nous avons vu (§ 2) qu'un tel réseau admet une transformation topologique le transformant en trois familles de droites parallèles,

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}, \quad u + v + w = 0,$$

et on voit immédiatement que dans ce cas la ligne polygonale $P_0 P_1 \dots P_6$ se ferme toujours, même si le point P_0 n'est plus infiniment voisin du point O , pourvu toutefois que le contour polygonal $P_0 \dots P_6$ reste à l'intérieur du domaine dans lequel le réseau est défini. Inversement d'ailleurs tout réseau jouissant de cette propriété doit satisfaire en vertu de (64) à la condition $\varrho = 0$. Ceci justifie la dénomination de « réseaux à configuration hexagonale » que nous avons donnée à ces réseaux. On obtient ainsi le théorème suivant, dû à M^r Thomsen:

THÉORÈME A. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau puisse être transformé topologiquement en trois familles de droites parallèles est qu'il admette la configuration hexagonale.*

Supposons maintenant $\overset{\circ}{\varrho} \neq 0$. On voit que la quantité:

$$\overset{\circ}{\varrho} (d_0 C)^2 = \frac{d_1 C - d_0 C}{d_0 C} = \frac{d_1 C}{d_0 C} - 1$$

est invariante par toute transformation (61). Elle est égale à la moitié du carré de la longueur de l'élément linéaire OP_0 dans la métrique invariante Q précédemment définie. Dans la représentation (25) Q a en effet la forme:

$$ds^2 = Q = 2\varrho(f_u^2 du^2 + 2f_u f_v du dv + f_v^2 dv^2)$$

et la longueur de l'élément linéaire OP_0 est donnée par:

$$(66) \quad ds_1^2 = 2\overset{\circ}{\varrho} f_u^2 v^2 = 2\overset{\circ}{\varrho} (d_0 C)^2 = 2 \left[\frac{d_1 C}{d_0 C} - 1 \right].$$

On a naturellement des expressions tout à fait analogues pour les deux autres familles de courbes et le carré de la longueur d'un élément linéaire quelconque AB par rapport à la métrique Q s'obtient de la façon suivante:

On considère deux des trois courbes passant par A et les deux courbes appartenant aux mêmes familles et passant par B . Ces 4 courbes forment un quadrilatère curviligne $AMBM'$ dont l'angle MAM' mesure $2\pi : 3$ par rapport à Q . Les longueurs ds_1 de AM et ds_2 de AM' se calculent d'après (66) et la longueur de AB est alors donnée par:

$$ds^2 = ds_1^2 + 2 ds_1 ds_2 + ds_2^2.$$

On a ainsi une interprétation géométrique de la métrique Q . On a ensuite pour les opérateurs invariants \mathcal{A}'_i l'expression:

$$(67) \quad \mathcal{A}'_i = \frac{d}{ds_i},$$

où ds_i est la longueur de l'élément linéaire d'une courbe de la $i^{\text{ème}}$ famille.

L'intégrale double $\sqrt{3} \iint_S D\varrho du dv$ représente l'aire du domaine S dans la métrique Q .

On peut aussi donner des invariants ω_i l'interprétation suivante: Soient $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}$ les courbures géodésiques des 3 courbes du réseau au point O . On a:

$$(68) \quad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\omega_{i+1} - \omega_{i+2}),$$

où l'on considère comme équivalentes les valeurs des indices congrues module 3. Ces formules sont faciles à vérifier sur la représentation canonique du réseau. On pourrait en déduire une démonstration simple du fait que les ω_i ne peuvent pas tous s'annuler si $\varrho \neq 0$. En effet on en concluerait en vertu de (68) que le réseau serait formé de géodésiques de la métrique Q . Comme les trois familles de courbes se coupent mutuellement sous l'angle $2\pi : 3$, la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique formé de 3 courbes du réseau serait égale à π . Par suite en vertu du théorème de GAUSS, la courbure totale de Q serait nulle. Cette métrique serait donc euclidienne de telle sorte qu'il existerait une transformation topologique du réseau transformant le réseau considéré en un réseau formé de trois familles de droites, qui, se coupant mutuellement sous l'angle $2\pi : 3$ seraient des familles de droites parallèles. On en concluerait donc $\varrho = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse initiale $\varrho \neq 0$.

§ 8. Réseaux pour lesquels un ω_i s'annule.

On obtient une interprétation géométrique des ω_i indépendante de la métrique Q de la façon suivante:

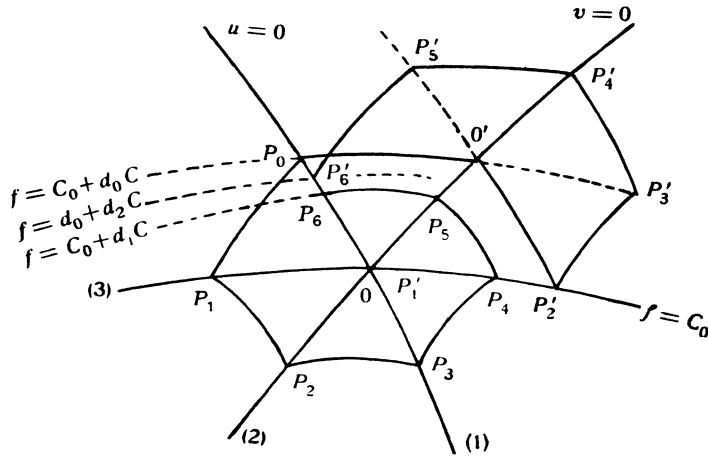


Fig. 2.

A partir du point P_0 voisin de 0 traçons comme au paragraphe précédent le contour $P_0 P_1 \dots P_6$. Par P_0 menons (Fig. 2) la ligne de la troisième famille, qui rencontre la courbe $v = 0$ au point O' . On peut

alors effectuer relativement aux trois courbes du réseau passant par O' la même construction qu'autour du point O , en traçant le contour $P_0 P'_1 P'_2 \dots P'_6$. (P'_1 et O sont confondus.) En général P_6 et P'_6 sont distincts. Désignons par v_0, v_1, v_2 , les valeurs du paramètre v sur la courbe $u = 0$ qui correspondent aux points P_0, P_6, P'_6 . En poussant dans la formule (64) le développement jusqu'aux termes du 5^o ordre on obtient dans la représentation canonique au point O :

$$(69) \quad v_1 = v_0 + f_{uuv}^{\circ} v_0^3 + v_0^4 + \dots$$

Les coordonnées du point O' et des sommets du contour $P_0 P'_1 \dots P'_6$ sont d'autre part:

$$\begin{array}{llll} O': (v_0, 0); & P_0: (v_0 v'); & P'_1: (0, 0), & P'_2: (v_0 v'); \\ P'_3: (u', v'); & P'_4: (u'_1 0); & P'_5: (v_0 v_2), & P'_6: (0_1 v_2); \end{array}$$

où v', u' , et v_2 sont définis par les relations:

$$\begin{cases} f(v_0, v') = f(0, 0), \\ f(u', v') = f(v_0, 0), \\ f(v_0, v_2) = f(u', 0). \end{cases}$$

D'où l'on déduit aisément les développements suivants:

$$(70) \quad v_2 = v_0 + f_{uuv}^{\circ} v_0^3 + (f_{uuuv}^{\circ} - f_{uuvv}^{\circ}) v_0^4 + \dots,$$

et en tenant compte de (69),

$$(71) \quad v_2 - v_1 = (f_{uuuv}^{\circ} - f_{uuvv}^{\circ}) v_0^4 + \dots$$

Or d'après (57),

$$f_{uuuv}^{\circ} - f_{uuvv}^{\circ} = 2 \hat{\omega}_2 \hat{q}^{3/2},$$

de sorte qu'on a finalement:

$$(72) \quad v_2 - v_1 = 2 \hat{\omega}_2 \hat{q}^{3/2} v_0^4 + \dots$$

Soient $C_0 + d_0 C$, $C_0 + d_1 C$, $C_0 + d_2 C$ les valeurs de la constante C qui correspondent aux trois courbes de la troisième famille passant respectivement par P_0, P_6 , et P'_6 . Les formules (65) et (72) donnent alors pour ω_2 l'expression suivante:

$$(73) \quad \omega_2 = \text{Lim}_{d_0 C=0} \frac{d_2 C - d_1 C}{d_1 C - d_0 C} \sqrt{\frac{d_0 C}{d_1 C - d_0 C}}.$$

Le second membre est invariant par rapport à toute transformation de C et fournit une interprétation géométrique de ω_2 . On a évidemment des résultats analogues pour ω_1 et ω_3 .

Si on prend comme infiniment petit principal v_0 , on voit que $v_2 - v_1$ est en général un infiniment petit d'ordre 4. Si $\omega_2 = 0$ cet ordre augmente. On peut dire que les réseaux pour lesquels cette relation est satisfaite sont caractérisés par la propriété que les points P_0 et P'_0 sont confondus (aux infiniments petits près d'ordre supérieur au 4^{ème}).

Nous allons montrer que la détermination de ces réseaux se ramène à des quadratures.

En effet, dans la représentation (45), l'égalité $\omega_1 = 0$ s'écrit:

$$(74) \quad \frac{1}{D\varrho} \frac{\partial}{\partial v} (f_u \sqrt{\varrho}) = 0 \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{1}{f_u f_v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{f_u}{f_v}.$$

De (74) on déduit:

$$\frac{\partial}{\partial v} (f_u \sqrt{\varrho}) = 0, \quad \text{d'où : } f_u^2 \varrho = U,$$

U étant une fonction de la seule variable u . On a donc:

$$(75) \quad \frac{f_u}{f_v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{f_u}{f_v} = U.$$

Introduisons une nouvelle variable \bar{u} , telle que,

$$\frac{d\bar{u}}{du} = U,$$

et posons:

$$\frac{f_v}{f_u} = \lambda.$$

L'équation (75) devient:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{u} \partial v} \log \lambda = -\lambda,$$

qui n'est autre chose que l'équation bien connue de Liouville dont la solution générale est donnée par:

$$\lambda = \frac{2 \varphi'(\bar{u}) \psi'(v)}{[\varphi(\bar{u}) + \psi(v)]^2}, \quad \text{où } \varphi'(\bar{u}) = \frac{d\varphi(\bar{u})}{d\bar{u}}.$$

Si l'on retourne à l'ancien système de variables u, v on trouve ainsi:

$$(76) \quad \lambda = \frac{f_v}{f_u} = - \frac{2 \varphi'(u) \psi'(v)}{U[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

Il s'agit maintenant d'intégrer cette équation aux dérivées partielles. On peut tout d'abord la simplifier en effectuant un changement de variables:

$$\bar{v} = \psi(v) \text{ et } \bar{u} = \bar{u}(u), \text{ avec } \frac{d\bar{u}}{du} = \frac{U}{\varphi'(u)},$$

qui permet de substituer à (76) l'équation:

$$(77) \quad \frac{f_{\bar{v}}}{f_{\bar{u}}} = - \frac{2}{[\bar{v} + \varphi(\bar{u})]^2}.$$

Les courbes intégrales cherchées sont solutions de l'équation de Riccati suivante:

$$(78) \quad 2 \frac{dv}{du} = [v + \varphi(u)]^2.$$

Elle contient une fonction arbitraire $\varphi(u)$ et on peut toujours choisir cette fonction de manière que l'équation proposée admette comme solution une fonction quelconque $\psi(u)$. Il suffit de prendre pour $\varphi(u)$ l'expression:

$$\varphi(u) = 2 \sqrt{\psi'(u)} - \psi(u).$$

Une fois ainsi connue une solution de l'équation de Riccati, la solution générale s'obtient par des quadratures. On pose

$$(79) \quad v = \psi(u) + \frac{1}{z},$$

et on obtient pour z l'équation différentielle suivante

$$z' + z \sqrt{2\psi'(u)} + \frac{1}{2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = \beta \left[- \int \frac{du}{2\beta} + C \right], \text{ où l'on a posé: } e^{-\int \sqrt{2\psi'(u)} du} = \beta.$$

Si l'on pose

$$(80) \quad \int \frac{du}{2\beta} = \theta(u), \text{ on a } \beta = \frac{1}{2\theta'}, \text{ et } z = \frac{C - \theta}{2\theta'}.$$

D'autre part on remonte de θ à ψ par les relations suivantes:

$$\int \sqrt{2\psi'} du = -\log \beta = \log 2\theta', \text{ d'où: } 2\psi' = \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2, \text{ et: } \psi = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 du.$$

Les formules (79) et (80) donnent alors pour v l'expression suivante:

$$(81) \quad v = \frac{2\theta'}{C-\theta} + \int \frac{1}{2} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 du,$$

où θ est une fonction arbitraire de u .

Cette expression se simplifie un peu si on effectue le changement de variable $\theta(u) = \bar{u}$. Il vient alors

$$(82) \quad v = \frac{2U}{C-u} + \int \frac{1}{2} \frac{U'^2}{U} du,$$

où U est une fonction arbitraire de u '.

En définitive on voit que tout réseau pour lequel $\omega_1 = 0$ peut être représenté de la façon suivante: On prend les deux premières familles de courbes comme système de coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ et on peut alors choisir les paramètres u et v de telle manière que la troisième famille de courbes soit représentée par l'équation (82).

CHAPITRE II.

Etude géométrique des réseaux à configuration hexagonale.

Laissant de côté les conditions de dérivabilité qui sont à la base des calculs du chapitre précédent, nous ferons simplement dans ce qui suit les conventions de continuité et d'uniformité suivantes:

On appellera, «*famille de courbes*», toute famille qui peut être transformée topologiquement en une famille de droites parallèles $x = \text{const.}$

On appellera «*système de coordonnées*», l'ensemble de deux familles de courbes pouvant être transformées topologiquement en deux familles de droites parallèles $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$

Enfin on appellera «*réseau de courbes*», l'ensemble de trois familles de courbes telles que deux quelconques d'entre elles forment un système de coordonnées. Bien entendu, il peut arriver que ces familles, systèmes de coordonnées ou réseaux ne soient définis qu'à l'intérieur d'un certain domaine connexe du plan.

§ 1. Démonstration géométrique du Théorème A.

Monsieur BLASCHKE a donné²⁾ du Théorème A (§ 7, Chap. I) une démonstration purement géométrique ne faisant intervenir aucune

¹⁾ Monsieur Cartan m'a fait remarquer qu'on pourrait même se débarrasser de tout signe d'intégration, car on peut toujours exprimer u , U , U' . $\int F(U' U' u) du$ où F est une fonction donnée sans aucun signe d'intégration (voir. Bull. Soc. Math. 29. 1901, p. 118—130).

²⁾ Voir. BLASCHKE, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. Mathematische Zeitschrift, p. 615 (1927).

condition de dérivabilité, dont nous rappellerons ici brièvement le principe.

On démontre successivement les 3 points suivants:

I. Si la propriété de configuration hexagonale est vérifiée par le réseau considéré on peut à partir d'un hexagone fondamental (0 1 2 3 4 5 6) de ce réseau, construire un «filet F » formé de courbes du réseau divisant le domaine dans lequel ce réseau est défini, en triangles curvilignes.

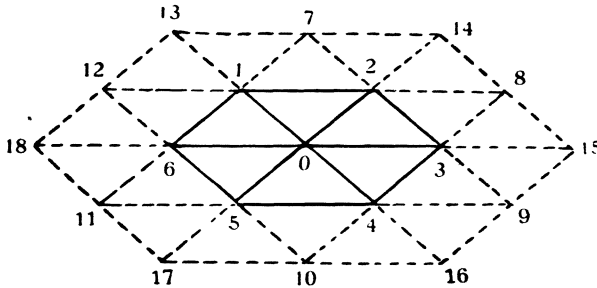


Fig. 3.

C'est ce que montre la figure ci-contre.

II. On peut réduire autant qu'on le veut les mailles de ce filet F .

Pour cela on démontre les propositions suivantes qui découlent des hypothèses de continuité et d'uniformité admises dans la définition même du réseau:

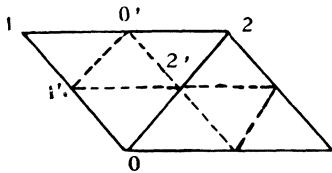


Fig. 4.

- a) On ne peut inscrire dans chaque triangle (0, 1, 2) du filet F , qu'un seul nouveau triangle formé de courbes du réseau (0' 1' 2').
- b) Ces triangles sont disposés de manière que sur chaque côté (0, 2) d'un des triangles primitifs figure un seul nouveau sommet (2').

III. Par des subdivisions successives du filet F , on obtient ainsi un ensemble de points constitué par les sommets successifs.

Tout point du domaine appartient à cet ensemble ou bien peut être considéré comme point d'accumulation de cet ensemble.

On considère alors d'une part le filet F' défini dans (I) et d'autre part un filet F'' formé de droites parallèles divisant le plan en triangles équilatéraux. Aux sommets du filet F on fait correspondre ceux du filet F'' dans l'ordre où ils se présentent dans la Fig. 3 par exemple. Puis par subdivision successive de ces 2 filets on arrive à étendre cette correspondance à tous les points du domaine F et du domaine F'' . Cette transformation réalise l'application topologique du réseau considéré sur un réseau formé par 3 familles de droites parallèles, c. q. f. d.

§ 2. *Systèmes de coordonnées se coupant diagonalement.*

De la même manière Monsieur BLASCHKE démontre le théorème suivant:

Etant donnés deux « systèmes de coordonnées » constitués par les deux familles de courbes $(C_1 C_2)$ et les deux familles $(C_3 C_4)$, nous dirons que le premier système coupe diagonalement le second si tout quadrilatère curviligne ayant pour côtés des courbes C_1 et C_2 et admettant comme première diagonale une courbe C_3 , admet forcément une courbe C_4 comme seconde diagonale. Ces 4 familles jouissent alors de la propriété suivante:

Elles sont topologiquement applicables sur 4 familles de droites parallèles

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}, \quad x + y = \text{const.}, \quad x - y = \text{const.}$$

On peut d'ailleurs ramener la démonstration de ce théorème à celle du Théorème A en remarquant que 3 quelconques des familles de courbes $C_1 C_2 C_3 C_4$ constituent un réseau à configuration hexagonale. Il existe donc une transformation topologique T appliquant les courbes C_1, C_2, C_3 , par exemple sur les droites:

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}, \quad x + y = \text{const.}$$

Mais alors T transforme C_4 en une famille de courbes formant avec $x + y = \text{const.}$ un système de coordonnées coupant diagonalement le système de coordonnées $x = \text{const.}, y = \text{const.}$ c.-à-d. en la famille des droites $x - y = \text{const.}$, c. q. f. d.

§ 3. *Réseaux de droites à configuration hexagonale.*

La recherche des réseaux de droites à configuration hexagonale pourrait se faire analytiquement par la méthode que nous utiliserons au chapitre suivant pour l'étude des réseaux de courbes applicables sur 3 familles de droites quelconques. Les calculs ne présentent aucune difficulté et l'utilisation des fonctions elliptiques permet dans ce cas d'intégrer les équations du problème. On trouve ainsi que *les seuls réseaux de droites à configuration hexagonale sont constitués, soit par les tangentes à une courbe de troisième classe, (d'un point on peut mener 3 tangentes à la courbe qui sont les 3 droites du réseau passant par ce point), soit par un faisceau de droites et les tangentes à une conique, soit par trois faisceaux de droites*: Ces deux derniers cas peuvent d'ailleurs être considérés comme des cas de décomposition du premier.

Nous nous contenterons de donner ici succinctement une démonstration géométrique de ces résultats, dont le principe est emprunté à un

mémoire de MM^{rs} SAUER et GRAF¹⁾. Elle s'appuie sur le théorème suivant dû à CHASLES :

I. Si 9 droites constituent les côtés et les diagonales d'un hexagone et si 8 d'entre elles sont tangentes à une courbe de 3^e classe, la neuvième est aussi tangente à cette courbe.

On sait d'ailleurs que 8 droites quelconques déterminent une famille de l' ∞^1 courbes de troisième classe tangentes à ces 8 droites et admettant une neuvième tangente commune: Une de ces courbes est alors parfaitement déterminée par une neuvième tangente distincte de cette tangente commune.

1°) Du Théorème I il résulte immédiatement que les tangentes à une courbe de troisième classe constituent (tout au moins dans un domaine par tout point duquel passent 3 tangentes réelles à cette courbe) un réseau à configuration hexagonale.

2°) Inversement considérons un réseau de droites R à configuration hexagonale. Soient pqr trois droites de ce réseau se coupant au point O

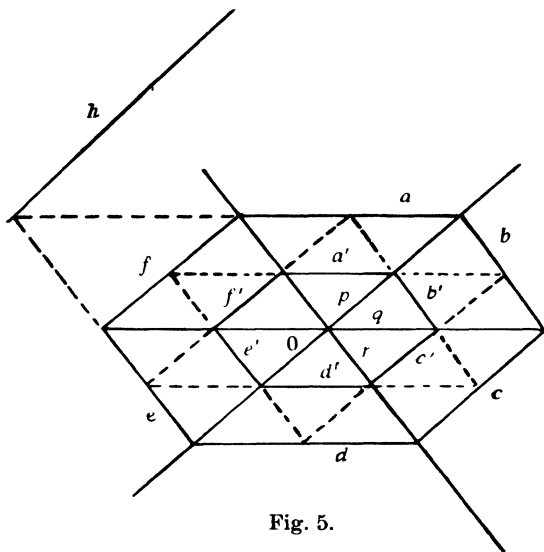


Fig. 5.

et $abcdef$ six droites formant autour du point O un hexagone dont pqr sont les diagonales. Soit d'autre part h la troisième droite du réseau passant par le point d'intersection de a et e . Les 8 droites $abcdefpq$ définissent l' ∞^1 courbes de troisième classe admettant en vertu du Théorème I, la droite r comme neuvième tangente commune. Poursuite les 10 droites obtenues en leur adjoignant la droite h définissent une

seule courbe de troisième classe K les admettant comme tangentes. Je dis que toute autre droite du réseau proposé est une tangente à cette courbe K .

En effet on peut comme au § 1 construire à partir de l'hexagone initial $abcdefpqr$ un filet F de droites du réseau divisant le plan en

¹⁾ H. GRAF et R. SAUER: Über dreifache Geradensysteme in der Ebene ..., Münchener Berichte 54 (1924), p. 119-156.

triangles et on démontre aisément qu'en vertu du Théorème I les droites de ce filet sont toutes tangentes à K .

Nous savons d'autre part qu'on peut ensuite et d'une seule manière, réduire les mailles du filet F par des subdivisions successives. On obtient ainsi des filets successifs dont les mailles sont de plus en plus petites et toute droite du réseau R ou bien appartient à un de ces filets ou bien est une « droite limite » de l'ensemble des droites ainsi définies.

Tout revient par conséquent à démontrer que les droites ainsi obtenues par des subdivisions successives du filet F sont toutes tangentes à la courbe K .

Soient par exemple $a'b'c'd'e'f'$ les droites obtenues par une première subdivision de l'hexagone $abcdef$. Ces droites $a'b'c'd'e'f'pq$ et la droite f définissent une courbe de troisième classe K' à laquelle est aussi tangente la droite r : On démontre aisément que cette courbe K' admet aussi pour tangentes les droites $abcde'fh$.

Par exemple en considérant l'hexagone ayant pour diagonales $a'f'r$ et pour côtés $f'e'qp'b'$ on voit, en vertu du Théorème I, que le sixième côté a est aussi tangent à la courbe K' !

La courbe K' ayant en commun avec K 10 tangentes est sûrement confondue avec elle, et par là même est démontrée la proposition en cause.

Il y a lieu de remarquer que cette démonstration ne suppose pas que la courbe K ne soit pas décomposée. Elle peut donc se réduire à une conique et un point ou même à 3 points, ce qui donne les cas de décomposition du réseau dont il a été question au début de ce paragraphe.

CHAPITRE III.

Etude des réseaux de courbes pouvant être transformés topologiquement en un réseau de droites.

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de courbes puisse être transformé en un réseau formé par trois familles de droites parallèles s'écrit:

$$q = 0.$$

Il est naturel de se demander à quelles conditions doit satisfaire un réseau pour qu'il existe une transformation topologique faisant correspondre aux 3 familles de courbes du réseau, 3 familles quelconques de droites (ou comme nous le dirons encore, pour que le réseau soit « topologiquement applicable » sur un réseau formé de trois familles quelconques de droites).

Le cas $q = 0$ étant élucidé, nous considérerons à cet effet un réseau pour lequel $q \neq 0$, les trois familles de courbes étant définies comme au chapitre I, par les relations

$$(1) \quad L_i = \varphi_i(u, v) du + \psi_i(u, v) dv, \quad i = 1, 2, 3,$$

choisies de manière à vérifier l'identité:

$$(2) \quad L_1 + L_2 + L_3 \equiv 0.$$

Nous avons vu qu'on peut alors définir trois opérateurs invariants:

$$(3) \quad \mathcal{A}_i = \frac{1}{D \sqrt{\rho}} \left(\psi_i \frac{\partial}{\partial u} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Si $f(u, v)$ est une fonction quelconque, on voit que $\mathcal{A}_i f$ est proportionnelle à la dérivée de f suivant la direction de la ligne $L_i = 0$. Enfin nous rappelons qu'on a les identités suivantes

$$(4) \quad \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 + \mathcal{A}'_3 \equiv 0,$$

$$(5) \quad (\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j) \equiv \mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j - \mathcal{A}'_j \mathcal{A}'_i \equiv \omega_j \mathcal{A}'_i - \omega_i \mathcal{A}'_j.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation topologique faisant correspondre au réseau considéré un réseau de droites est qu'il existe 3 fonctions de u et v , soit

$$(6) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

telles que x, y, z étant considérées comme des coordonnées rectilignes homogènes dans le plan, les courbes définies par les équations (6) dans lesquelles on suppose u et v liées par une quelconque des relations (1) soient des droites.

Considérons par exemple l'équation:

$$(7) \quad L_i = \varphi_i du + \psi_i dv = 0.$$

Elle définit, le long d'une courbe L_i , v en fonction de u . Imaginons que dans les formules (6) on ait remplacé v par cette fonction de u . On obtiendra ainsi une courbe qui devra être une droite. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'écrit

$$(8) \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2 x}{du^2} & \frac{dx}{du} \\ \frac{d^2 y}{du^2} & \frac{dy}{du} \\ \frac{d^2 z}{du^2} & \frac{dz}{du} \end{array} \right| = 0,$$

les barres verticales indiquant qu'il s'agit d'un déterminant dont les deux autres lignes se déduisent de celle qui est écrite par permutation circulaire des lettres x, y, z . D'autre part $\frac{dx}{du}$ représente la « dérivée totale » de x . On a donc en vertu de (7):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{du} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\varphi_i}{\psi_i} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\psi_i} \left(\psi_i \frac{\partial x}{\partial u} - \varphi_i \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ &= \frac{D\sqrt{\varrho}}{\psi_i} \mathcal{A}'_i(x). \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{du^2} &= \frac{D\sqrt{\varrho}}{\psi_i} \mathcal{A}'_i \left[\frac{D\sqrt{\varrho}}{\psi_i} \mathcal{A}'_i(x) \right] \\ &= \frac{D\sqrt{\varrho}}{\psi_i} \mathcal{A}'_i \left(\frac{D\sqrt{\varrho}}{\psi_i} \right) \mathcal{A}'_i(x) + \frac{D^2\varrho}{\psi_i^2} \mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_i(x). \end{aligned}$$

On en conclut, puisque $\varrho \neq 0$, que l'équation (8) est équivalente à :

$$(9) \quad |\mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_i x, \mathcal{A}'_i x, x| = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que l'on puisse trouver trois fonctions xyz de u et v satisfaisant aux trois relations (9) obtenues pour $i = 1, 2, 3$ successivement.

Nous allons voir que cette condition peut être remplacée par d'autres plus simples.

Etant donnée une fonction $f(u, v)$ nous conviendrons de poser :

$$(10) \quad \mathcal{A}'_i f = f_i, \quad \mathcal{A}'_i \mathcal{A}'_j f = f_{ij}.$$

§ 1. Equations de définition de xyz .

x, y, z étant trois fonctions de u et v , elles sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} X_{11} = a_{111} X_1 + a_{112} X_2 + \alpha_{11} X, \\ X_{12} = a_{121} X_1 + a_{122} X_2 + \alpha_{12} X, \\ X_{22} = a_{221} X_1 + a_{222} X_2 + \alpha_{22} X \end{cases}$$

dans lequel on a par exemple :

$$(11) \quad a_{112} = |x_{11} x_1 x| \text{ et } a_{221} = |x_{22} x_2 x|.$$

Si les conditions (9) sont réalisées on a donc ($i = 1, 2$):

$$(12) \quad a_{112} = 0, \quad a_{221} = 0,$$

et par suite les 3 fonctions xyz satisfont à un système d'équations de la forme :

$$(13) \quad \begin{cases} x_{11} = a_1 x_1 + \alpha_1 x, \\ x_{12} = a_{12} x_1 + a_{21} x_2 + \alpha_{12} x, \\ x_{22} = a_2 x_2 + \alpha_2 x. \end{cases}$$

Inversement d'ailleurs, étant donné un tel système d'équations aux dérivées partielles, si ce système est complètement intégrable, on peut trouver un système fondamental de solutions, soit x, y, z telles que l'on ait

$$(14) \quad \lambda = |x_1 \ x_2 \ x| \neq 0,$$

et toute autre solution du système est une combinaison linéaire et homogène de xyz à coefficients constants. De plus on voit immédiatement sur les équations (13) que le système fondamental xyz vérifie les deux premières relations (9):

$$(15) \quad |x_{11} \ x_1 \ x| = 0, \quad |x_{22} \ x_2 \ x| = 0.$$

Avant de chercher quelles nouvelles conditions entraîne la troisième relation (9) nous allons montrer qu'on peut encore simplifier le système 13.

Pour cela nous remarquerons que x, y, z devant être considérées comme des coordonnées homogènes, elles ne sont déterminées qu'à un facteur commun près. On peut chercher à profiter de cette indétermination pour simplifier le système (13): C'est ce que nous appellerons «normaliser» les coordonnées xyz .

§ 2. Normalisation des coordonnées xyz .

Posons:

$$x = \sigma X, \quad y = \sigma Y, \quad z = \sigma Z.$$

On constate aisément que si x satisfait au système 13, X satisfait à un système de même forme:

$$(16) \quad \begin{cases} X_{11} = b_1 X_1 + \beta_1 X, \\ X_{12} = b_{12} X_1 + b_{21} X_2 + \beta_{12} X, \\ X_{22} = b_2 X_2 + \beta_2 X \end{cases}$$

avec:

$$(17) \quad \begin{cases} b_1 = a_1 - \frac{2\sigma_1}{\sigma}, \\ b_{12} = a_{12} - \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ b_{21} = a_{21} - \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ b_{22} = a_2 - \frac{2\sigma_2}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + a_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - \frac{\sigma_{11}}{\sigma}, \\ \beta_{12} = \alpha_{12} + a_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma} + a_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma}, \\ \beta_2 = \alpha_2 + a_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} - \frac{\sigma_{22}}{\sigma}, \end{cases}$$

où l'on pose comme convenu $\sigma_i = A'_i \sigma$, $\sigma_{ij} = A'_i A'_j \sigma$. Nous allons montrer qu'on peut choisir σ de manière à avoir:

$$(18) \quad b_1 + b_{21} = 0, \quad b_{12} + b_2 - \omega_2 = 0,$$

ou ce qui revient au même d'après (17):

$$(19) \quad a_1 + a_{21} - \frac{3\sigma_1}{\sigma} = 0, \quad a_{12} + a_2 - \omega_2 - \frac{3\sigma_2}{\sigma} = 0.$$

En effet en prenant pour λ l'expression (14), on vérifie immédiatement les relations suivantes:

$$(20) \quad \begin{cases} A'_1 \lambda = \lambda_1 = |x_{11} x_2 x| + |x_1 x_{12} x| = (a_1 + a_{21}) \lambda, \\ A'_2 \lambda = \lambda_2 = |x_{21} x_2 x| + |x_1 x_{22} x| = (a_{12} + a_2 - \omega_2) \lambda. \end{cases}$$

Il suffit de se reporter aux équations (13) et de remarquer d'autre part que l'on a:

$$(21) \quad x_{12} - x_{21} = A'_1 A'_2 x - A'_2 A'_1 x = \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2.$$

D'où:

$$(22) \quad x_{21} = (a_{12} - \omega_2)x_1 + (a_{21} + \omega_1)x_2 + \alpha_{12}x.$$

Les équations (19) pour déterminer σ se réduisent donc aux suivantes:

$$(23) \quad \frac{3\sigma_1}{\sigma} = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \frac{3\sigma_2}{\sigma} = \frac{\lambda_2}{\lambda}.$$

Il suffira de prendre par exemple $\sigma = \sqrt[3]{\lambda}$. Posons d'autre part:

$$b_1 = -b_{21} = C', \quad b_2 = \omega_2 - b_{12} = D', \quad \beta_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta, \quad \beta_3 = \gamma.$$

On voit alors que, dans le nouveau système de « coordonnées normales » que nous venons de définir, le système (16) devient:

$$(24) \quad \begin{cases} X_{11} = C' X_1 + \alpha X, \\ X_{12} = (\omega_2 - D')X - C' X_2 + \beta X, & X_{21} = -D' X_1 + (\omega_1 - C')X_2 + \beta X, \\ X_{22} = D' X_2 + X. \end{cases}$$

Au lieu de 7 coefficients arbitraires comme dans le système (16) ces équations ne comportent plus que 5 fonctions arbitraires. D'ailleurs à tout système fondamental de solutions xyz de (13) correspond un système fondamental XYZ de (24) qui vérifie bien les deux premières relations:

$$(9') \quad |A'_i A'_i X, A'_i X, X| = 0.$$

Il reste maintenant à voir quelles relations entre les coefficients du système (24) entraîne la troisième relation (9) (pour $i = 3$), c'est à dire en d'autres termes à rechercher la condition pour que la transformation topologique définie par un système fondamental de solutions XYZ fasse correspondre à la troisième famille de courbes du réseau une famille de droites.

§ 3. Conditions pour qu'à la troisième famille de courbes du réseau corresponde une famille de droites.

Cette condition s'écrit:

$$A'_3 A'_3 X, A'_3 X, X \equiv 0.$$

Or on a:

$$A'_3 = -(A'_1 + A'_2)$$

de sorte que cette condition peut s'écrire:

$$|X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}, X_1 + X_2, X| \equiv 0.$$

XYZ vérifiant le système (24), cette condition se met sous la forme:

$$|(C' + \omega_2 - 2D')X_1 + (\omega_1 - 2C' + D')X_2, X_1 + X_2, X| \equiv 0,$$

et en tenant compte du fait que $|X_1 X_2 X| \neq 0$, on obtient:

$$(25) \quad \boxed{D' = C' + \frac{1}{3}(\omega_2 - \omega_1).}$$

§ 4. Forme définitive des équations de définition.

Si on tient compte de la relation (25), on peut mettre le système (24) sous la forme suivante:

$$(26) \quad \boxed{\begin{cases} X_{11} = \left(C + \frac{1}{3}\omega_1\right) X_1 + \alpha X, \\ X_{12} = \left(\frac{2}{3}\omega_2 - C\right) X_1 - \left(C + \frac{1}{3}\omega_1\right) X_2 + \beta X, \\ X_{21} = -\left(\frac{1}{3}\omega_2 + C\right) X_1 + \left(\frac{2}{3}\omega_1 - C\right) X_2 + \beta X, \\ X_{22} = \left(C + \frac{1}{3}\omega_2\right) X_2 + \gamma X. \end{cases}}$$

La valeur de C figurant dans ces équations est égale à celle de C' figurant dans le système 24 diminuée de $\frac{1}{3}\omega_1$.

En définitive nous avons obtenu les résultats suivants:

S'il existe une transformation topologique (6) répondant à la question, on peut effectuer une « normalisation » des coordonnées homogènes xyz de manière que les nouvelles coordonnées XYZ satisfassent à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme (26). Inversement d'ailleurs, s'il est possible de trouver 4 fonctions de u et v soit C, α, β, γ telles que le système (26) soit complètement intégrable. tout système fondamental

de solutions de ce système fournira une transformation topologique transformant le réseau de courbes considéré en un réseau de droites.

Nous sommes donc ainsi ramenés à étudier les conditions d'intégrabilité du système (26).

§ 5. *Conditions d'intégrabilité du système d'équations (26).*

Pour écrire ces conditions on remarquera que l'on a :

$$\mathcal{A}'_2(\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2) - \mathcal{A}'_1(\mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_2) = \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_1(\mathcal{A}'_2) - \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2(\mathcal{A}'_2) = \omega_1 \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_2 - \omega_2 \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2.$$

D'où :

$$(27) \quad \mathcal{A}'_2(X_{12}) - \mathcal{A}'_1(X_{22}) = \omega_1 X_{22} - \omega_2 X_{12}.$$

De même :

$$(28) \quad \mathcal{A}'_1(X_{21}) - \mathcal{A}'_2(X_{11}) = \omega_2 X_{11} - \omega_1 X_{21}.$$

On aura les conditions d'intégrabilité cherchées en écrivant que les relations (27) et (28) sont identiquement vérifiées en tenant compte des équations (26).

Un calcul très simple montre que la relation (27) fournit les trois conditions suivantes :

$$(29) \quad \begin{cases} \beta = C_1 + C_2 - C^2 + \frac{5}{3} C(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{3} \left[\mathcal{A}'_2(\omega_1) + \mathcal{A}'_1(\omega_2) + \frac{2}{3} \omega_1 \omega_2 \right], \\ \gamma = -C_2 + 2C^2 - \frac{5}{3} C\omega_2 + \frac{2}{3} \left[\mathcal{A}'_2 \omega_2 + \frac{1}{3} \omega_2^2 \right], \\ \beta_2 - \gamma_1 - \gamma \left(C + \frac{4}{3} \omega_1 \right) + 2\beta \left(\frac{2}{3} \omega_2 - C \right) = 0. \end{cases}$$

Si dans la dernière de ces relations on remplace β et γ par leurs valeurs fournies par les deux premières on obtient, après simplification, la relation :

$$\begin{aligned} C_{22} + C_{12} + C_{21} - 3CC_2 - 6CC_1 + 3\omega_2 C + 3(\omega_1 + \omega_2)C_2 - 3(\omega_2 + 2\omega_1)C^2 \\ + C[\mathcal{A}'_1 \omega_2 - \mathcal{A}'_2 \omega_3 + 2\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)] \\ + \frac{1}{3} [\mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_2 \omega_1 - \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_1 \omega_2 + 2\omega_2(\mathcal{A}'_2 \omega_1 - \mathcal{A}'_1 \omega_2)] = 0. \end{aligned}$$

Si on tient compte des identités :

$$(30) \quad \begin{cases} C_{12} - C_{21} \equiv \omega_2 C_1 - \omega_1 C_2, \\ \mathcal{A}'_1 \omega_2 - \mathcal{A}'_2 \omega_1 \equiv 1, \end{cases}$$

on voit aisément que cette relation peut s'écrire :

$$(31) \quad \begin{aligned} C_{22} + 2C_{21} + C_2(3\omega_2 + 2\omega_1) + 4\omega_2 C_1 - 3CC_2 - 6CC_1 - 3(\omega_2 + 2\omega_1)C^2 \\ + C[\mathcal{A}'_2 \omega_2 + 2\mathcal{A}'_2 \omega_1 + 2\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1) - 1] - \frac{2}{3} \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$(32) \quad I_2 = - \left[C_2 + 2C_1 + C(\omega_2 + 2\omega_1) - \frac{1}{3} \right] = C_3 - C_1 + C(\omega_3 - \omega_1) + \frac{1}{3}$$

on constate que la relation (31) peut se mettre sous la forme:

$$(33) \quad \boxed{\mathcal{A}'_2 I_2 + (2\omega_2 - 3C) I_2 = 0.}$$

Il est bien évident que pour obtenir les conditions d'intégrabilité fournies par la relation (28) il suffira de permuter dans les calculs précédents les indices 1) et 2).

On obtient ainsi:

$$(29)' \quad \begin{cases} \beta = C_1 + C_2 - C^2 + \frac{5}{3} C(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{3} \left[\mathcal{A}'_2 \omega_1 + \mathcal{A}'_1 \omega_2 + \frac{2}{3} \omega_1 \omega_2 \right], \\ \alpha = -C_1 + 2C^2 - \frac{5}{3} C\omega_1 + \frac{2}{3} \left[\mathcal{A}'_1 \omega_1 + \frac{1}{3} \omega_1^2 \right], \\ \beta_1 - \alpha_2 - \alpha \left(C + \frac{4}{3} \omega_2 \right) + 2\beta \left(\frac{2}{3} \omega_1 - C \right) = 0. \end{cases}$$

Puis:

$$(31)' \quad C_{11} + 2C_{12} + C_1(3\omega_1 + 2\omega_2) + 4\omega_1 C_2 - 3CC_1 - 6CC_2 - 3(\omega_1 + 2\omega_2)C^2 + C[\mathcal{A}'_1 \omega_1 + 2\mathcal{A}'_1 \omega_2 + 2\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2) - 1] + \frac{2}{3} \omega_1 = 0.$$

On remarquera que cette relation ne se déduit pas absolument de (31) par permutation des indices 1 et 2. Cela tient à ce que les relations (30) ne sont pas symétriques par rapport à ces indices.

Si on pose:

$$(32)' \quad I_1 = C_1 + 2C_2 + C(\omega_1 + 2\omega_2) + \frac{1}{3} = C_2 - C_3 + C(\omega_2 - \omega_3) + \frac{1}{3},$$

la relation (31)' s'écrit:

$$(33)' \quad \boxed{\mathcal{A}'_1 I_1 + (2\omega_1 - 3C) I_1 = 0.}$$

En définitive nous voyons que les 3 coefficients $\alpha\beta\gamma$ sont définis en fonction de C par les relations (29) et (29)' et que d'autre part, C doit satisfaire aux deux équations aux dérivées partielles du second ordre (33) et (33)'.

Inversement, si les deux équations (33) et (33)' admettent une solution commune C , le système d'équations (26) dans lequel on suppose $\alpha\beta\gamma$ remplacées en fonction de C par leurs expressions (29) et (29)' sera complètement intégrable. A tout système de solutions fondamentales de ces équations correspondra une transformation topologique et un réseau de droites répondant à la question.

Si xyz est un système de solutions fondamental, tout autre système fondamental sera de la forme:

$$(34) \quad \begin{aligned} X &= Ax + By + Cz, \\ Y &= A'x + B'y + C'z, \\ Z &= A''x + B''y + C''z, \end{aligned}$$

les grandes lettres étant des constantes. Il s'ensuit comme on devait s'y attendre que toutes les transformations topologiques (ou les réseaux de droites) correspondant à une même valeur de C se déduisent de l'une d'entre elles (ou de l'un d'entre eux) par une transformation projective.

REMARQUE. Pour conduire les calculs précédents nous avons introduit une certaine dissymétrie en distinguant, parmi les 3 familles du réseau, 2 familles particulières correspondant aux indices 1 et 2. Cette dissymétrie n'est qu'apparente. Il suffit de remarquer qu'on peut remplacer le système (26) par le système suivant qui lui est équivalent:

$$(35) \quad \boxed{X_{ii} = \left(C + \frac{1}{3} \omega_i\right) X_i + \beta_i X} \quad i = 1, 2, 3,$$

où l'on suppose qu'on a posé:

$$(36) \quad \beta_i = -C_i + 2C^2 - \frac{5}{3} C \omega_i + \frac{2}{3} \left(A'_i \omega_i + \frac{1}{3} \omega_i^2\right).$$

Les quantités X_{ij} sont d'ailleurs données alors par les égalités:

$$(37) \quad \boxed{X_{ij} = \left(\frac{2}{3} \omega_j - C\right) X_i - \left(\frac{1}{3} \omega_i + C\right) X_j + \beta_{ij} X},$$

avec:.

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = C_i + C_j - C^2 + \frac{5}{3} C(\omega_i + \omega_j) + \frac{1}{3} [A'_j(\omega_i) + A'_i(\omega_j) + \frac{2}{3} \omega_i \omega_j].$$

D'autre part si l'on pose:

$$(38) \quad \boxed{I_i = C_{i+1} - C_{i+2} + C(\omega_{i+1} - \omega_{i+2}) + \frac{1}{3}} \quad i = 1, 2, 3,$$

où l'on considère comme équivalents les indices congrus module 3, les conditions d'intégrabilité du système (35) s'écrivent:

$$(39) \quad \boxed{A'_i I_i + (2 \omega_i - 3C) I_i = 0} \quad i = 1, 2, 3.$$

La somme des premiers membres étant $\equiv 0$, ces 3 conditions se réduisent à deux d'entre elles par ex. (33) et (33)'.

En résumé nous avons obtenu le résultat suivant:

CONCLUSION. *La condition nécessaire et suffisante pour que le réseau proposé soit topologiquement applicable sur un réseau de droites est que les équations aux dérivées partielles du second ordre (39) admettent une solution commune.*

§ 6. *Condition pour que la $i^{\text{ème}}$ famille du réseau de droites soit un faisceau de droites.*

Nous nous proposons dans ce paragraphe de rechercher à quelles conditions supplémentaires doit satisfaire la fonction C définie précédemment pour que la $i^{\text{ème}}$ famille du réseau de droites sur lequel le réseau considéré est «topologiquement applicable» soit un faisceau de droites.

Nous supposons par exemple $i = 1$ et qu'il existe une transformation topologique répondant à la question.

Soit $f(u, v) = \text{const.}$ l'intégrale générale de l'équation:

$$\varphi_1 du + \psi_1 dv = 0$$

qui définit la première famille de courbes du réseau.

En effectuant au besoin une transformation projective sur le réseau de droites, on peut supposer que les droites de la 1^{ère} famille (qui forment un faisceau) sont des droites parallèles et prendre des coordonnées cartésiennes dans le plan de façon que l'axe des y soit parallèle à ces droites. La transformation topologique considérée est alors de la forme:

$$(40) \quad \begin{cases} x = F[f(u, v)], \\ y = y(u, v), \\ z = 1. \end{cases}$$

On voit qu'avec ce système de coordonnées, les équations de définition (13) se simplifient et que l'on a:

$$(41) \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

D'autre part d'après la forme de la fonction x' on voit que:

$$x'_1(x) = 0, \text{ ou } x_1 = 0, \text{ et par suite } x_{21} = 0.$$

Or d'après les équations (13) on a:

$$x_{12} = a_{21} x_2. \quad \text{D'où: } x_{21} = (a_{21} + \omega_1) x_2,$$

et par suite:

$$(42) \quad a_{21} + \omega_1 = 0.$$

Si l'on effectue alors la « normalisation des coordonnées » les nouvelles fonctions $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ satisfont au système (16) dans lequel les coefficients sont liés à ceux du système (13) par les relations (17) qui, résolues par rapport aux a et α , donnent:

$$(43) \quad \begin{cases} a_1 = b_1 + 2 \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ a_{12} = b_{12} + \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ a_{21} = b_{21} + \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ a_2 = b_2 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - b_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma_{11}}{\sigma}, \\ \alpha_{12} = \beta_{12} - b_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma} - b_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma} + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma}, \\ \alpha_2 = \beta_2 - b_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma_{22}}{\sigma}. \end{cases}$$

La relation (42) fournit alors la condition suivante:

$$b_{21} + \omega_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma} = 0,$$

ou en tenant compte de la valeur $-(C + \frac{1}{3} \omega_1)$ de b_{21} dans les équations (35):

$$(44) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = C - \frac{2}{3} \omega_1.$$

D'autre part les conditions (41), portées dans le second groupe d'égalités (43), donnent une seule condition nouvelle.

Si en effet on fait $\alpha_1 = 0$, il vient:

$$(45) \quad \beta_1 - b_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^2 + \frac{\sigma_{11}}{\sigma} = 0.$$

En remplaçant β par sa valeur en fonction de C et des invariants du réseau fournie par la première relation (36), et $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ par sa valeur fournie par (44), on constate aisément que cette égalité est identiquement vérifiée.

La condition $\alpha_{12} = 0$ donne:

$$(46) \quad \beta_{12} - b_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma} - b_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma} + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma} = 0.$$

En tenant compte des valeurs de β_{12} , b_{12} , b_{21} dans les équations (37) et de la valeur de $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ fournie par (44) on trouve, tous calculs faits, la condition:

$$(47) \quad \boxed{I_1 = 0.}$$

Enfin la condition $\alpha_2 = 0$ donne:

$$(48) \quad \frac{\sigma_{22}}{\sigma} = 2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} \right)^2 + b_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} - \beta_2.$$

Inversement supposons qu'il existe une fonction $C(u, v)$ satisfaisant aux relations (39) et à la relation (47). Nous savons qu'alors le système d'équations de définition (35) est complètement intégrable et tout système de solutions fondamental $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ fournit une transformation topologique appliquant le réseau donné sur un réseau de droites.

Effectuons sur ces coordonnées XYZ la transformation

$$(49) \quad x = \sigma X, \quad y = \sigma Y, \quad z = \sigma Z,$$

X, Y, Z étant solutions de (35), x, y, z seront solutions d'un nouveau système d'équations aux dérivées partielles de la forme (13). Je dis qu'on peut choisir σ de manière à ce que, dans ce nouveau système, les coefficients satisfassent aux conditions:

$$(41)' \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

$$(42)' \quad a_{21} + \omega_1 = 0.$$

D'après ce qui a été dit dans la première partie de ce paragraphe les conditions $a_{21} + \omega_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$ imposent à σ les conditions (44) et (48):

$$(48)' \quad \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma} = C - \frac{2}{3} \omega_1, \\ \frac{\sigma_{22}}{\sigma} = 2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} \right)^2 + b_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} - \beta_2. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ce système est complètement intégrable en vertu des relations (39) et (47): On peut donc toujours trouver une fonction σ satisfaisant à (48)'. La condition $\alpha_{12} = 0$ est alors vérifiée en vertu de (47) et la condition $\alpha_1 = 0$ d'elle même d'après la forme de $\frac{\sigma_1}{\sigma}$. σ étant ainsi choisi, x, y, z sont solutions d'un système d'équations de la forme:

$$(13)' \quad \begin{cases} x_{11} = a_1 x_1, \\ x_{12} = -\omega_1 x_2, \\ x_{22} = a_2 x_2. \end{cases}$$

Ce système admet évidemment la solution $z = 1$. Je dis qu'on peut également en trouver une solution de la forme: $F[f(u, v)]$, c.-à-d. une solution x telle que $x_1 \equiv \mathcal{A}'_1 x \equiv 0$. Il suffit pour cela de montrer que le système suivant:

$$(50) \quad \begin{cases} x_{11} = 0, \\ x_{12} = -\omega_1 x_2 \quad \text{d'où} \quad x_{21} = 0, \\ x_{22} = a_2 x_2 \end{cases}$$

est complètement intégrable, car alors on peut toujours en trouver une solution x telle que $x_1 \equiv 0$. Or cela résulte des hypothèses faites sur C .

Ces conditions d'intégrabilité sont en effet:

$$1^\circ) \quad \mathcal{A}'_2 x_{11} - \mathcal{A}'_1 x_{21} = \omega_1 x_{21} - \omega_2 x_{11},$$

qui est vérifiée d'elle même.

$$2^\circ) \quad \mathcal{A}'_1 x_{22} - \mathcal{A}'_2 x_{12} = \omega_2 x_{12} - \omega_1 x_{22}.$$

En remplaçant x_{22} et x_{12} par leurs valeurs (50), il vient:

$$(51) \quad \mathcal{A}'_1 a_2 + \omega_1 a_2 + \mathcal{A}'_2 \omega_1 + \omega_2 \omega_1 = 0.$$

Or d'après (43) on a:

$$a_2 = b_2 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma} = C + \frac{1}{3} \omega_2 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma}.$$

Portons cette valeur dans (51): Il vient:

$$(51)' \quad C_1 + \frac{1}{3} \mathcal{A}'_1 \omega_2 + 2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} + C \omega_1 + \frac{4}{3} \omega_1 \omega_2 + 2 \omega_1 \frac{\sigma_2}{\sigma} + \mathcal{A}'_2 \omega_1 = 0.$$

Or en vertu de 44:

$$\mathcal{A}'_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right) = \frac{\sigma_{21}}{\sigma} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} + \omega_1 \frac{\sigma_2}{\sigma} - \omega_2 \frac{\sigma_1}{\sigma} = \mathcal{A}'_2 \left(C - \frac{2}{3} \omega_1 \right).$$

D'où

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} = C_2 - \frac{2}{3} \mathcal{A}'_2 (\omega_1) - \omega_1 \frac{\sigma_2}{\sigma} + C \omega_2 - \frac{2}{3} \omega_1 \omega_2.$$

Si on porte cette valeur dans (51)' on obtient aussitôt l'identité $I_1 = 0$ qui par hypothèse est vérifiée.

Si alors aux deux solutions $x = F[f(u, v)]$ et $z = 1$ du système (48) on ajoute une troisième solution $y(u, v)$ formant avec elles un système fondamental, on obtient bien une transformation topologique répondant à la question. D'où le résultat:

Un réseau étant topologiquement applicable sur un réseau de droites, la condition nécessaire et suffisante pour que la $i^{\text{ème}}$ famille de ce réseau de droites soit un faisceau s'écrit:

$$(52) \quad \boxed{I_i = 0.}$$

§ 7. APPLICATION. *Conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux premières familles de courbes d'un réseau soient topologiquement applicables sur deux faisceaux de droites, la troisième famille de courbes étant applicable sur une famille quelconque de droites.*

On les obtient en écrivant qu'il existe une fonction C satisfaisant aux relations (39) et de plus aux deux relations:

$$(53) \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.$$

Ces deux relations entraînent immédiatement les relations (39). On est donc ramené à chercher à quelles conditions les équations (53) admettent une solution C commune. Elles s'écrivent:

$$(53)' \quad \begin{cases} 2C_2 + C_1 + C(\omega_1 + 2\omega_2) + \frac{1}{3} = 0, \\ 2C_1 + C_2 + C(\omega_2 + 2\omega_1) - \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

On en tire:

$$(54) \quad \begin{cases} C_1 = -C\omega_1 + \frac{1}{3}, \\ C_2 = -C\omega_2 - \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Si on écrit la condition d'intégrabilité de ce système,

$$C_{12} - C_{21} \equiv \omega_2 C_1 - \omega_1 C_2,$$

on trouve en y remplaçant C_1 et C_2 par leurs valeurs:

$$C(\mathcal{A}'_2 \omega_1 - \mathcal{A}'_1 \omega_2) = \frac{2}{3}(\omega_1 + \omega_2)$$

c.-à-d. en vertu de la deuxième relation (30):

$$(55) \quad \boxed{C = \frac{2}{3} \omega_3.}$$

Si donc la transformation topologique cherchée existe, elle correspond à une valeur de C bien déterminée, et par suite, comme on l'a vu au § 5 elle est elle même parfaitement déterminée à une transformation projective près. Pour qu'elle existe il suffit d'ailleurs que la valeur (55) de C satisfasse aux relations (54) ce qui donne:

$$(56) \quad \boxed{\begin{cases} \mathcal{A}'_2 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 = -\frac{1}{2}, \\ \mathcal{A}'_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 = +\frac{1}{2}. \end{cases}} \quad \text{D'où: } \mathcal{A}'_3 \omega_3 + \omega_3^2 = 0.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes cherchées. Il peut paraître bizarre qu'elles ne soient pas symétriques par rapport aux indices 1 et 2. On rétablirait la symétrie en écrivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}'_2 \omega_3 + \omega_2 \omega_3 = \frac{1}{2} (\mathcal{A}'_3 \omega_2 - \mathcal{A}'_2 \omega_3), \\ \mathcal{A}'_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 = \frac{1}{2} (\mathcal{A}'_3 \omega_1 - \mathcal{A}'_1 \omega_3). \end{cases}$$

REMARQUE. La fonction C étant parfaitement déterminée d'après (55) on en conclut que *les seules transformations topologiques transformant 2 faisceaux de droites et une troisième famille de droites ne formant pas un faisceau en un réseau de même nature sont des transformations projectives.*

CHAPITRE IV.

Groupe continu de transformations topologiques admises par un réseau de courbes¹⁾.

Nous dirons qu'un réseau de courbes « admet » une transformation topologique, lorsque cette transformation laisse le réseau invariant. Nous savons déjà que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de courbes admette un groupe transitif de transformations topologiques est qu'il soit à configuration hexagonale.*

Laissant de côté ce cas où $q = 0$, nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher à quelles conditions doit satisfaire un réseau pour admettre un groupe continu de transformations. Soit

$$Uf = \varphi(u, v) \frac{\partial f}{\partial u} + \psi(u, v) \frac{\partial f}{\partial v}$$

une transformation infinitésimale. Tout revient à déterminer s'il est possible de choisir Uf de manière que les équations différentielles définissant les courbes du réseau, ou ce qui revient au même les équations aux dérivées partielles :

$$(1) \quad \mathcal{A}'_1 f = 0, \quad \mathcal{A}'_2 f = 0, \quad \mathcal{A}'_3 f = 0,$$

restent invariantes par la transformation Uf ou, comme on le dit encore, admettent Uf .

¹⁾ L'étude des transformations admises par un réseau de courbes a déjà été faite sous une autre forme par M^r CARTAN: « Annales de l'École Normale, t. 25, 1908, p. 78—83 ». L'auteur y recherche les invariants de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ par rapport au groupe infini: $x' = X$ (fonction arbitraire de x). $y' = Y$ (fonction arbitraire de y). C'est, au fond, l'étude des réseaux de courbe sous la forme canonique.

Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire aux dérivées partielles Xf admette Uf est que la parenthèse $(X, U)f$ soit proportionnelle à Xf :

$$(X, U)f = \lambda. Xf.$$

Dans le cas qui nous intéresse, il est naturel de donner à Uf une forme invariante en posant:

$$(2) \quad Uf = \alpha A'_1 f + \beta A'_2 f.$$

On est alors ramené à rechercher s'il est possible de déterminer deux fonctions de u et v , soit α et β , de manière à avoir:

$$(3) \quad (A'_i, U)f = \lambda_i A'_i f, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si l'on tient compte de la relation:

$$(4) \quad A'_i A'_j - A'_j A'_i \equiv \omega_j A'_i - \omega_i A'_j,$$

on trouve ainsi:

$$\begin{aligned} (A'_1 U)f &\equiv (A'_1 \beta - \beta \omega_1) A'_2 f + (A'_1 \alpha + \beta \omega_2) A'_1 f, \\ (A'_2 U)f &\equiv (A'_2 \alpha - \alpha \omega_2) A'_1 f + (A'_2 \beta + \alpha \omega_1) A'_2 f, \\ -(A'_3, U)f &\equiv (A'_1 + A'_2, U)f \\ &\equiv (A'_1 \beta + A'_2 \beta - \beta \omega_1 + \alpha \omega_1) A'_2 f \\ &\quad + (A'_1 \alpha + A'_2 \alpha + \beta \omega_2 - \alpha \omega_2) A'_1 f. \end{aligned}$$

Les conditions (3) donnent alors les relations suivantes:

$$(5) \quad \begin{cases} A'_1 \beta = \beta \omega_1, \\ A'_2 \alpha = \alpha \omega_2, \\ A'_1 \alpha - \alpha \omega_1 = A'_2 \beta - \beta \omega_2. \end{cases}$$

On a ainsi pour déterminer α et β un système de 3 équations linéaires aux dérivées partielles, dont il faut étudier les conditions d'intégrabilité.

Si l'on pose

$$A'_1 \alpha - \alpha \omega_1 = C,$$

on voit immédiatement que α et β doivent satisfaire aux systèmes suivants:

$$(6) \quad \begin{cases} A'_1 \alpha = \alpha \omega_1 + C, \\ A'_2 \alpha = \alpha \omega_2, \end{cases} \quad (6)' \quad \begin{cases} A'_1 \beta = \beta \omega_1, \\ A'_2 \beta = \beta \omega_2 + C. \end{cases}$$

Nous conviendrons de poser dans ce qui suit:

$$A'_i C = C_i, \quad A'_i A'_j C = C_{ij}.$$

D'après la formule (4), le systèmé (6) sera complètement intégrable si la relation:

$$\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 \alpha - \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_1 \alpha = \omega_2 \mathcal{A}'_1 \alpha - \omega_1 \mathcal{A}'_2 \alpha$$

est identiquement satisfaite en tenant compte des équations (6) elles mêmes, ce qui donne:

$$\alpha (\mathcal{A}'_1 \omega_2 - \mathcal{A}'_2 \omega_1) = C_2,$$

et en tenant compte de la deuxième formule (30), Chap. I:

$$(7) \quad \alpha = C_2.$$

En opérant de même sur (6)', il vient:

$$(7)' \quad \beta = -C_1.$$

En portant ces valeurs de α et β dans (6) et (6)', on voit que C doit satisfaire aux équations:

$$(8) \quad \begin{aligned} C_{12} &= C_2 \omega_1 + C, & C_{11} &= C_1 \omega_1, \\ C_{22} &= C_2 \omega_2, & C_{21} &= C_1 \omega_2 - C. \end{aligned}$$

Tout revient donc à déterminer dans quels cas ce système admet une solution C et pour cela il suffit d'en écrire les conditions d'intégrabilité.

En vertu de (4) on doit avoir:

$$C_{12} - C_{21} = \omega_2 C_1 - \omega_1 C_2.$$

D'où en tenant compte des équations (8):

$$(9) \quad C = \omega_2 C_1 - \omega_1 C_2.$$

Si l'on tient compte de cette relation, le système (8) se réduit à:

$$(10) \quad \begin{aligned} C_{11} &= \omega_1 C_1, & C_{21} &= \omega_1 C_2, \\ C_{12} &= \omega_2 C_1, & C_{22} &= \omega_2 C_2. \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur \mathcal{A}'_1 à (9) et tenant compte de (10) il vient:

$$C_1 (\mathcal{A}'_1 \omega_2 - 1) - C_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 = 0$$

et comme $\mathcal{A}'_1 \omega_2 - \mathcal{A}'_2 \omega_1 = 1$, on a ainsi:

$$(11) \quad C_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1 - C_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 = 0.$$

De même en appliquant à (9) l'opérateur \mathcal{A}'_2 , il vient:

$$(12) \quad C_1 \mathcal{A}'_2 \omega_2 - C_2 \mathcal{A}'_1 \omega_2 = 0.$$

Pour que Uf soit une véritable transformation, il faut que $\alpha = C_2$ et $\beta = -C_1$ ne soient pas tous les deux nuls, ce qui exige que les

équations (11) et (12) admettent pour C_1 et C_2 des solutions non toutes nulles.

Remarquons tout d'abord que les coefficients de C_1 et C_2 dans (11) et (12) ne peuvent pas être tous $\equiv 0$, car on aurait :

$$A'_1 \omega_2 = A'_2 \omega_1 = 0,$$

ce qui est impossible en vertu de la deuxième identité (30) du Chap. I.

Supposons d'autre part que les coefficients de l'une des deux inconnues, C_2 par exemple, soient $\equiv 0$.

$$A'_1 \omega_1 = 0, \quad A'_1 \omega_2 \doteq 0 \quad \text{avec} \quad A'_2 \omega_1 \neq 0, \quad A'_2 \omega_2 \neq 0.$$

On déduirait alors de ces équations :

$$C_1 = 0 \quad \text{et par suite} \quad C_{21} = 0.$$

Or la troisième équation (10) devant être vérifiée, on aurait :

$$\omega_1 C_2 = 0.$$

On en tire soit $\omega_1 \equiv 0$, soit $C_2 \equiv 0$. La première hypothèse est à rejeter car on en déduirait $A'_2 \omega_1 = 0$, ce qui est impossible puisqu'on a déjà $A'_1 \omega_2 = 0$. Quant à la seconde elle est aussi à rejeter puisqu'on a déjà $C_1 = 0$.

On peut donc supposer que dans les relations (11) et (12) les coefficients de C_1 et C_2 sont $\neq 0$. Ces relations se mettent alors sous la forme :

$$(13) \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{A'_1 \omega_1}{A'_2 \omega_1} = \frac{A'_1 \omega_2}{A'_2 \omega_2}.$$

La seconde de ces égalités exprime que le déterminant fonctionnel de ω_1 et ω_2 est nul. On doit donc avoir une relation de la forme

$$(14) \quad \boxed{\omega_2 = F(\omega_1)}.$$

La première égalité (13) exprime de même que C est une fonction de ω_1 :

$$(15) \quad C = \varphi(\omega_1).$$

Exprimons que cette fonction satisfait aux relations (9) et (10). De (15) on tire :

$$(16) \quad C_1 = \varphi' A'_1 \omega_1, \quad C_2 = \varphi' A'_2 \omega_1, \quad \text{avec} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\omega_1}.$$

En portant ces valeurs dans (9) il vient :

$$(17) \quad \varphi = \varphi' (\omega_2 A'_1 \omega_1 - \omega_1 A'_2 \omega_1).$$

D'autre part en dérivant (16) et portant les valeurs de C_{11}, C_{12}, C_{22} ainsi obtenues dans les relations (10) on obtient les 3 relations suivantes:

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi'' [\mathcal{A}'_1 \omega_1]^2 & = \varphi' [\omega_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1 - \mathcal{A}'_1 \mathcal{I}'_1 \omega_1], \\ \varphi'' [\mathcal{A}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1] & = \varphi' [\omega_2 \mathcal{I}'_1 \omega_1 - \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1], \\ \varphi'' [\mathcal{A}'_2 \omega_1]^2 & = \varphi' [\omega_2 \mathcal{A}'_2 \omega_1 - \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_2 \omega_1]. \end{cases}$$

En égalant les valeurs de $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ fournies par les deux premières relations (les coefficients de φ'' sont $\neq 0$), on est conduit à l'égalité:

$$(19) \quad -\mathcal{A}'_2 \omega_1 \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1 + \omega_1 \mathcal{I}'_1 \omega_1 \mathcal{I}'_2 \omega_1 = -\mathcal{I}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_1 \mathcal{I}'_2 \omega_1 + \omega_2 (\mathcal{A}'_1 \omega_1)^2.$$

Or on a:

$$\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1 = \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 + \omega_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 - \omega_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1.$$

Et en portant cette valeur dans (19) on obtient la condition:

$$\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1 - \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1 = 0,$$

ou:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \mathcal{A}'_1(\mathcal{A}'_1 \omega_1) & \mathcal{A}'_2(\mathcal{A}'_1 \omega_1) \\ \mathcal{A}'_1 \omega_1 & \mathcal{A}'_2 \omega_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que $\mathcal{A}'_1 \omega_1$ est fonction de ω_1 :

$$(21) \quad \boxed{\mathcal{A}'_1 \omega_1 = F_1(\omega_1).}$$

De même en égalant les deux valeurs de $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ fournies par les deux dernières relations (18), on obtient la condition:

$$-\mathcal{A}'_2 \omega_1 \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1 + \omega_2 \mathcal{A}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_2 \omega_1 = -\mathcal{A}'_1 \omega_1 \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_2 \omega_1 + \omega_2 \mathcal{A}'_2 \omega_1 \mathcal{A}'_1 \omega_1.$$

Or en vertu des relations (13) les coefficients de ω_2 dans les deux membres sont égaux. D'où l'égalité:

$$(20)' \quad \begin{vmatrix} \mathcal{A}'_1(\mathcal{A}'_2 \omega_1) & \mathcal{I}'_2(\mathcal{A}'_2 \omega_1) \\ \mathcal{A}'_1 \omega_1 & \mathcal{A}'_2 \omega_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que $\mathcal{A}'_2 \omega_1$ est fonction de ω_1 :

$$(21)' \quad \boxed{\mathcal{A}'_2 \omega_1 = F_2(\omega_1).}$$

Il resterait enfin à vérifier que la valeur de $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ ainsi fournie par les équations (18) est égale à la valeur obtenue en dérivant l'égalité (17) qui définit φ . Cette vérification s'effectue sans difficulté en tenant compte de (20) et (20)'.

En définitive si les conditions (14), (21) et (21)' sont satisfaites, ce qui entraîne que tout invariant absolu du réseau quel que soit son ordre soit fonction de l'un d'eux ω_1 , il existe une fonction C et une seule satisfaisant aux équations (8): Le réseau admet un groupe continu à un paramètre de transformations topologiques. Ces résultats sont résumés dans l'énoncé suivant.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau qui n'a pas la configuration hexagonale admette un groupe continu de transformations est que tous ses invariants absolus soient fonctions de l'un d'entre eux, ω_1 par exemple. Le réseau admet alors un groupe à un paramètre, dont la transformation infinitésimale est:

$$(22) \quad \varphi' \begin{vmatrix} A'_1 f & A'_2 f \\ A'_1 \omega_1 & A'_2 \omega_1 \end{vmatrix} = 0,$$

où φ' est une fonction de ω_1 définie par l'équation:

$$(23) \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\omega_2 A'_1 \omega_1 - \omega_1 A'_2 \omega_1}.$$

Le second membre est une fonction de ω_1 et φ se détermine par une quadrature à un facteur constant près qui ne change pas le groupe continu défini par la transformation infinitésimale (22).

REMARQUE. L'équation (22) permettrait de démontrer aisément que deux quelconques des trois familles de courbes du réseau forment avec la famille des trajectoires du groupe à un paramètre, un réseau à configuration hexagonale.

Cela résulte d'ailleurs beaucoup plus simplement des considérations géométriques élémentaires suivantes.

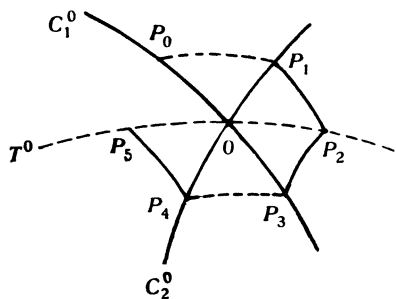


Fig. 6.

Soient deux familles de courbes C_1 et C_2 et un groupe à un paramètre laissant ces familles invariantes. Désignons par T les trajectoires de ce groupe. Nous allons montrer que le réseau (C_1, C_2, T) est à configuration hexagonale.

Considérons en effet les 3 courbes C_1^0, C_2^0, T^0 qui se coupent au point O et un point P_0 sur C_1^0 . Soit P_1 le point d'intersection de la courbe C_1^0 et de la courbe T passant par P_0 .

Il existe alors une transformation finie T du groupe considéré qui fait correspondre P_1 à P_0 . Nous désignerons par $T(A)$ le point auquel cette

transformation fait correspondre un point quelconque A . La transformation T laissant invariantes les familles de courbes C_1 et C_2 , on en conclut que les sommets successifs du contour polygonal $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ (Fig. 6) formé de courbes $C_1 C_2$ et T satisfont aux relations:

$$P_1 = T(P_0), \quad P_2 = T(O), \quad P_3 = T(P_4), \quad O = T(P_5).$$

Les points O et P_1 étant sur une même courbe C_2 , il doit en être de même des points P_5 et P_6 dont ils se déduisent par la transformation T , ce qui prouve que le réseau $(C_1 C_2 T)$ est à configuration hexagonale.

Considérons alors un réseau $(C_1 C_2 C_3)$ admettant un groupe continu à un paramètre de transformations topologiques dont les trajectoires seront désignées par T . Le réseau $(C_1 C_2 T)$ est à configuration hexagonale et peut être par suite topologiquement appliqué sur 3 familles de droites parallèles. Cette application étant réalisée, il est évident que les transformations T ne peuvent être que des translations parallèlement à une direction fixe. La troisième famille de courbes C_3 devant rester invariante, est constituée par des courbes se déduisant de l'une d'entre elles par ces translations. Le réseau proposé peut donc être représenté analytiquement par les relations:

$$u = \text{const.} \quad v = \text{const.} \quad \frac{dv}{du} = \varphi(u + v).$$

DEUXIÈME PARTIE.

Réseaux de surfaces.

CHAPITRE I.

Invariants des réseaux de surfaces.

Considérons dans l'espace un réseau de surfaces, c.-à-d. l'ensemble de 4 familles à un paramètre de surfaces que nous supposons dans le domaine où nous les considérons, continues et dérivables aussi souvent que cela nous sera nécessaire. Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les invariants d'un tel réseau par rapport à une transformation ponctuelle quelconque.

§ 1. *Les invariants relatifs π_i et l'invariant absolu π .*

Nous imaginerons les 4 familles définies dans un système de coordonnées curvilignes quelconque u, v, w par 4 relations différentielles $S_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) où les S_i sont des formes de Pfaff,

$$(1) \quad S_i = \varphi_i(u, v, w) du + \psi_i(u, v, w) dv + \theta_i(u, v, w) dw$$

dont les coefficients satisfont aux conditions d'intégrabilité:

$$(2) \quad \varphi_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial w} - \frac{\partial \theta_i}{\partial v} \right) + \psi_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial w} \right) + \theta_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} - \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \right) \equiv 0.$$

La condition (2) est nécessaire et suffisante pour que l'équation $S_i = 0$ représente une famille à un paramètre de surfaces: Nous désignerons une surface de cette famille par S_i et la ligne d'intersection de deux surfaces S_i et S_j par L_{ij} .

Les formes S_i n'étant définies qu'à un facteur près, on peut supposer qu'on les a choisies de manière à vérifier l'identité:

$$(3) \quad S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$$

ce qui entraîne:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^4 \varphi_i = \sum_{i=1}^4 \psi_i \equiv \sum_{i=1}^4 \theta_i = 0.$$

Nous poserons:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i & \varphi_j & \varphi_k \\ \psi_i & \psi_j & \psi_k \\ \theta_i & \theta_j & \theta_k \end{vmatrix} \equiv (\varphi_i \varphi_j \varphi_k).$$

Des relations (4) on déduit alors:

$$(5) \quad (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = -(\varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) = (\varphi_3 \varphi_4 \varphi_1) = -(\varphi_4 \varphi_1 \varphi_2) = D \neq 0.$$

Les S_i étant supposées «normalisées» de manière à vérifier la relation (3), on ne peut plus les multiplier que par un facteur commun $\lambda(u, v, w)$. Comme pour les réseaux de courbes, nous aurons donc à former les invariants des formes S_i par rapport aux deux groupes de transformations suivants:

1°) (\bar{T}) *Changement de variables.*

$$(6) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u} \bar{v} \bar{w}), \\ v = v(\bar{u} \bar{v} \bar{w}), \\ w = w(\bar{u} \bar{v} \bar{w}). \end{cases} \quad \mathfrak{D} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})} \neq 0.$$

2°) (T^*) *Multiplication des S_i par un facteur commun $\lambda \neq 0$.*

$$(7) \quad S_i^* = \lambda S_i; \quad \varphi_i^* = \lambda \varphi_i, \quad \psi_i^* = \lambda \psi_i, \quad \theta_i^* = \lambda \theta_i.$$

De la condition d'invariance $\bar{S}_i = S_i$, on déduit:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{\varphi}_i = \varphi_i \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \psi_i \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \theta_i \frac{\partial w}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{\psi}_i = \varphi_i \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \psi_i \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \theta_i \frac{\partial w}{\partial \bar{v}}, \\ \bar{\theta}_i = \varphi_i \frac{\partial u}{\partial \bar{w}} + \psi_i \frac{\partial v}{\partial \bar{w}} + \theta_i \frac{\partial w}{\partial \bar{w}}. \end{cases}$$

D'où:

$$(9) \quad \bar{D} = \mathfrak{D} \cdot D, \quad D^* = \lambda^3 D.$$

Considérons alors les opérateurs différentiels:

$$(10) \quad A_{ij} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \varphi_i & \psi_i & \theta_i \\ \varphi_j & \psi_j & \theta_j \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

qui satisfont aux conditions suivantes:

$$(11) \quad A_{ij} + A_{ji} \equiv 0,$$

$$(12) \quad A_{i,i+1} + A_{i,i+2} + A_{i,i+3} \equiv 0,$$

d'où il suit que tous les A_{ij} peuvent s'exprimer linéairement au moyen de 3 d'entre eux, par ex. A_{12}, A_{13}, A_{23} . Ces opérateurs se transforment par \bar{T} et T^* d'après les formules :

$$(13) \quad \bar{A}_{ij} = A_{ij}, \quad A_{ij}^* = \frac{1}{\lambda} A_{ij}.$$

Soit $f(u, v, w)$ une fonction quelconque. $A_{ij}f$ est proportionnelle à la dérivée de f suivant la direction de la ligne L_{ij} . Par suite si $f_i(u, v, w) = \text{const.}$ est l'équation d'une surface S_i , étant donné que les lignes L_{ij} et L_{ik} ayant un point commun avec cette surface sont tout entières situées sur elle, les expressions $A_{ij}f_i$ et $A_{ik}f_i$ sont identiquement nulles. Cela revient à dire que le système d'équations linéaires aux dérivées partielles :

$$A_{ij}f = 0, \quad A_{ik}f = 0$$

est un système complet, de telle sorte que la parenthèse

$$(14) \quad (A_{ij} A_{ik}) = A_{ij} A_{ik} - A_{ik} A_{ij},$$

qui est un nouvel opérateur du premier ordre, est de la forme :

$$(15) \quad \boxed{(A_{ij} A_{ik}) \equiv \alpha_{ij} A_{ik} - \alpha_{ik} A_{ij}.}$$

En vertu des relations (12) on vérifie aisément que l'on a :

$$(16) \quad (A_{i,i+1}, A_{i,i+2}) \equiv (A_{i,i+2}, A_{i,i+3}) \equiv (A_{i,i+3}, A_{i,i+1}) \equiv A_i.$$

On obtient ainsi 4 nouveaux opérateurs A_1, A_2, A_3, A_4 et on a l'identité suivante par rapport aux c_i :

$$(17) \quad (c_1 + c_2 + c_3) A_i \equiv \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \alpha_{i,i+1} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+3} \\ A_{i,i+1} & A_{i,i+2} & A_{i,i+3} \end{vmatrix}.$$

Des relations (12) on déduit sans peine que les α_{ij} satisfont à la relation :

$$(18) \quad \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i,i+2} + \alpha_{i,i+3} \equiv 0$$

et les A_i à :

$$(19) \quad A_i - A_{i+1} + A_{i+2} - A_{i+3} \equiv 0.$$

Si dans cette identité on remplace les A_i par leurs expressions (17) en fonction des A_{ij} , et que dans l'expression ainsi obtenue on exprime les

\mathcal{A}_{ij} au moyen de trois d'entre eux indépendants, par ex. $\mathcal{A}_{i,i+1}$, $\mathcal{A}_{i,i+2}$, $\mathcal{A}_{i+1,i+2}$, on obtient pour les α_{ij} l'identité suivante:

$$(20) \quad \alpha_{i+1,i} + \alpha_{i+2,i} + \alpha_{i+3,i} \equiv 0.$$

En désignant par $\bar{\mathcal{A}}_i$ et \mathcal{A}_i^* les transformées de \mathcal{A}_i par \bar{T} et T^* on déduit aisément des relations (13) les propriétés suivantes:

$$(21) \quad \bar{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_i^* = \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{A}_i - \left[\frac{1}{\lambda^3} \mathcal{A}_{ij}(\lambda) \right] \mathcal{A}_{ik} + \left[\frac{1}{\lambda^3} \mathcal{A}_{ik}(\lambda) \right] \mathcal{A}_{ij}.$$

On définit les transformées $\bar{\alpha}_{ij}$ et α_{ij}^* de α_{ij} comme il suit:

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{\mathcal{A}}_i = \bar{\alpha}_{ij} \bar{\mathcal{A}}_{ik} - \bar{\alpha}_{ik} \bar{\mathcal{A}}_{ij}, \\ \mathcal{A}_i^* = \alpha_{ij}^* \mathcal{A}_{ik}^* - \alpha_{ik}^* \mathcal{A}_{ij}^* \end{cases}$$

et de (21) on déduit alors:

$$(23) \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij}^* = \frac{1}{\lambda} \alpha_{ij} - \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{A}_{ij}(\lambda).$$

Si on forme alors les expressions symétriques:

$$(24) \quad \boxed{\pi_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji},}$$

on voit en vertu de (11) que ce sont des *invariants relatifs*. On a:

$$(25) \quad \bar{\pi}_{ij} = \pi_{ij}, \quad \pi_{ij}^* = \frac{1}{\lambda} \pi_{ij}.$$

Des égalités (18) et (20) on déduit aisément les relations suivantes:

$$(26) \quad \begin{cases} \pi_{i,i+1} = \pi_{i+2,i+3}, & \pi_{i,i+2} = \pi_{i+1,i+3}, \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} \pi_{i,i+1} + \pi_{i,i+2} + \pi_{i,i+3} = 0, \end{cases}$$

ou plus en détail:

$$(26)' \quad \begin{cases} \pi_{12} = \pi_{34}, & \pi_{13} = \pi_{24}, & \pi_{14} = \pi_{23}, \end{cases}$$

$$(27)' \quad \begin{cases} \pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} = 0. \end{cases}$$

Par suite il n'existe en fait que deux invariants π_{ij} indépendants. Si tous les π_{ij} sont $\neq 0$, on obtient un *invariant absolu* en formant le quotient de deux d'entre eux, par ex.:

$$(28) \quad \boxed{\pi = \frac{\pi_{12}}{\pi_{13}}.}$$

§ 2. Réseaux à configuration octogonale.

Les π_{ij} étant des invariants relatifs, les équations $\pi_{ij} = 0$ sont invariantes et doivent par suite exprimer une propriété géométrique du réseau. Nous allons en effet démontrer la proposition suivante.

THÉORÈME A. *La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $L_{i,i+1}$ et $L_{i+2,i+3}$ engendrent une famille de l' ∞^1 surfaces sur chacune desquelles elles forment un « système coordonnées », est que l'on ait identiquement:*

$$(29) \quad \pi_{i,i+1} \equiv \pi_{i+2,i+3} \equiv 0.$$

En effet pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système suivant d'équations aux dérivées partielles:

$$(30) \quad \mathcal{A}_{i,i+1}f = 0. \quad \mathcal{A}_{i+2,i+3}f = 0$$

soit un système complet. Car alors f étant la solution générale de ce système, on voit que le long de toute courbe $L_{i,i+1}$ ou $L_{i+2,i+3}$ on a $f = \text{const.}$ ce qui exprime que ces courbes sont tout entières situées sur les surfaces de la famille à un paramètre $f = \text{const.}$

Par suite, la parenthèse:

$$f = (\mathcal{A}_{i,i+1}, \mathcal{A}_{i+2,i+3}) \equiv \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_{i+1}$$

doit pouvoir s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de $\mathcal{A}_{i,i+1}$ et $\mathcal{A}_{i+2,i+3}$. En développant \mathcal{A}_i et \mathcal{A}_{i+1} d'après (17) et exprimant cette condition on trouve la condition (29) c. q. f. d.

THÉORÈME A'. *De même on montre aisément que*

$$(31) \quad \pi_{i,i+2} \equiv \pi_{i+1,i+3} \equiv 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes $L_{i,i+2}$ et $L_{i+1,i+3}$ engendrent une famille de l' ∞^1 surfaces.

Or en vertu de l'égalité (27) $\pi_{23} = \pi_{14} = 0$ est une conséquence immédiate des égalités $\pi_{12} = \pi_{34} = 0$ et $\pi_{13} = \pi_{24} = 0$. D'où la proposition:

THÉORÈME B. *Si les deux couples de lignes (L_{12}, L_{34}) et (L_{13}, L_{24}) engendrent deux familles à un paramètre de surfaces, les lignes (L_{14}, L_{23}) engendrent elles aussi une troisième famille de l' ∞^1 surfaces.*

Nous désignerons sous le nom de « réseau à configuration octogonale » tout réseau formé de 4 familles de plans parallèles (divisant par suite l'espace en octogones) ou bien tout réseau qui s'en déduit par une transformation topologique. En d'autres termes, ce sont des réseaux tels que par un choix convenable des coordonnées, on puisse représenter leurs 4 familles de surfaces par les équations:

(32) $u = \text{const.}, v = \text{const.}, w = \text{const.}, t = \text{const.}$
avec

$$u + v + w + t \equiv 0.$$

Des propositions A et A' on peut déduire le théorème suivant.

THÉORÈME C. *Les identités $\pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{14} \equiv 0$ caractérisent les réseaux à configuration octogonale.*

Prenons en effet les trois premières familles du réseau comme surfaces de coordonnées:

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.},$$

et supposons la quatrième famille définie par l'égalité:

$$f(u, v, w) = \text{const.}$$

Si la relation $\pi_{12} - \pi_{34} = 0$ est satisfaite, on sait en vertu de (A) que les lignes L_{12} et L_{34} engendrent une famille de surfaces ce qui revient à dire que f doit satisfaire à une relation de la forme:

$$F_1(u, v) = F_2(w, f).$$

D'où l'on conclut:

$$\frac{f_u}{f_v} = \frac{F_{1u}}{F_{1v}} = \Phi(u, v), \quad \text{où} \quad \varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

De même on conclut de $\pi_{13} = 0$ et $\pi_{23} = 0$ à des relations de la forme:

$$\frac{f_v}{f_w} = \Psi(v, w), \quad \frac{f_u}{f_w} = \Theta(u, w).$$

D'où suit:

$$\Theta(u, w) = \Phi(u, v) \cdot \Psi(v, w),$$

égalité qui n'est possible que si Φ, Ψ, Θ ont les formes suivantes:

$$\Phi = \frac{U}{V}, \quad \Psi = \frac{V}{W}, \quad \Theta = \frac{U}{W},$$

où $U V W$ sont des fonctions respectivement des seules variables u, v, w . La quatrième famille du réseau est donc définie par l'équation:

$$U du + V dv + W dw = 0,$$

et par un changement de variables évident, on peut ramener le réseau à être représenté par les équations (32).

Inversement d'ailleurs pour tout réseau à configuration octogonale les conditions figurant dans les Théorèmes A et A' sont évidemment satisfaites en sorte que tous les τ_{ij} sont nuls.

Des propositions A , A' et C on déduit le théorème suivant dû à Monsieur Blaschke.

THÉORÈME D. *Les réseaux à configuration octogonale sont caractérisés par la propriété que les lignes d'intersection de leurs surfaces se répartissent en « systèmes de coordonnées » sur 3 familles de surfaces formant elles-mêmes un « système de coordonnées » dans l'espace.*

Cependant en vertu de la proposition (B) on voit qu'une condition suffisante pour caractériser un réseau à configuration octogonale est que deux couples seulement de lignes d'intersection (L_{12} , L_{34}) et (L_{13} , L_{24}) par ex. engendrent deux familles de surfaces. Nous donnerons au chapitre suivant une démonstration purement géométrique de ce fait.

§ 3. *Nouveaux invariants pour les réseaux dont les π_{ij} ne s'annulent pas tous.*

Nous considérerons maintenant des réseaux pour lesquels les π_{ij} ne s'annulent pas tous, et nous allons montrer comment on peut former pour ces réseaux un système complet d'invariants d'ordre supérieur.

Tout d'abord on peut former un système d'opérateurs absolument invariants \mathcal{A}_{ij} . Il suffit de considérer un des invariants π_{ij} qui soit différent de zéro et de former:

$$(33) \quad \mathcal{A}'_{ij} = \frac{1}{\pi_{\alpha\beta}} \mathcal{A}_{ij}.$$

Si tous les π_{ij} sont $\neq 0$ il sera naturel de poser:

$$(33)' \quad \mathcal{A}'_{ij} = \frac{1}{\pi_{ij}} \mathcal{A}_{ij}.$$

D'autre part π étant un invariant absolu, on voit que les expressions $\mathcal{A}'_{ij}(\pi)$ constituent des invariants absolus dont 3 seulement sont indépendants.

Invariants relatifs q_i .

Par ailleurs on déduit aisément des relations (23) que les grandeurs:

$$(34) \quad q_i = \mathcal{A}_{ij}(\alpha_{ik}) - \mathcal{A}_{ik}(\alpha_{ij})$$

se transforment par \bar{T} et T^* de la manière suivante:

$$(35) \quad \bar{q}_i = q_i, \quad q_i^* = \frac{1}{\lambda^2} q_i.$$

On obtient ainsi 4 nouveaux invariants relatifs en posant identiquement par rapport aux c_i :

$$(36) \quad (c_1 + c_2 + c_3) \varrho_i \equiv \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \mathcal{A}_{i,i+1} & \mathcal{A}_{i,i+2} & \mathcal{A}_{i,i+3} \\ \alpha_{i,i+1} & \alpha_{i,i+2} & \alpha_{i,i+3} \end{vmatrix}$$

où les flèches indiquent que dans le développement du déterminant on doit considérer les \mathcal{A}_{ij} comme opérant sur les α_{ij} .

Ces 4 invariants relatifs ne sont d'ailleurs pas indépendants, et en tenant compte des identités (18), (19) et (20) on démontre aisément l'identité:

$$(37) \quad \boxed{\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 \equiv 0.}$$

Considérons une surface S_i . Les trois autres familles du réseau découpent sur cette surface 3 familles de courbes L_{i1}, L_{i2}, L_{i3} formant sur S_i un réseau de courbes que nous désignerons par R_i . Ce réseau est représenté analytiquement par le système des trois équations différentielles $\mathcal{A}_{i1} = 0, \mathcal{A}_{i2} = 0, \mathcal{A}_{i3} = 0$ où l'on suppose u, v, w liées par la relation $S_i = 0$. On a d'ailleurs

$$\mathcal{A}_{i1} + \mathcal{A}_{i2} + \mathcal{A}_{i3} \equiv 0$$

de sorte que l'on a ainsi une représentation du réseau de courbes R_i analogue à celle que nous avons envisagée dans l'étude des réseaux de courbes¹⁾. Les formes $\mathcal{A}_{i1}, \mathcal{A}_{i2}, \mathcal{A}_{i3}$ correspondent aux formes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$, l'opérateur \mathcal{A}_i à l'opérateur \mathcal{A} ; les α_{ij} correspondent aux expressions ϱ_j , de sorte que l'invariant ϱ_i défini par la formule (36) ci-dessus n'est pas autre chose que l'invariant ϱ qui correspond au réseau R_i . De ce qui a été dit à propos des réseaux à configuration hexagonale résulte la proposition:

THÉORÈME. *La condition $\varrho_i = 0$ exprime que le réseau R_i est un réseau à configuration hexagonale.*

D'autre part les invariants relatifs ϱ_i étant liés par l'identité (37), si 3 d'entre eux sont nuls, il en est de même du quatrième. D'où

THÉORÈME E. *Si sur 3 des familles de surfaces du réseau, les réseaux de courbes R_i correspondants sont à configuration hexagonale, les réseaux tracés sur la quatrième famille de surfaces sont aussi à configuration hexagonale.*

Des invariants relatifs ϱ_i on déduirait de nouveaux invariants absolus en les divisant par le carré d'une des quantités π_{ij} non nulles.

¹⁾ Cf. Chap. I, 1^{ère} Partie, formules (13)₂, (18)₂.

Invariants relatifs $q_{ij,hk}$.

On peut encore former d'autres invariants qui nous seront utiles par la suite, en considérant les formules (23) et formant les expressions:

$$(38) \quad q_{ij,hk} = \mathcal{A}_{ij}(\pi_{hk}) - \alpha_{ij} \pi_{hk}.$$

On vérifie sans peine les lois suivantes de transformation de ces quantités par \bar{T} et T^* :

$$(39) \quad \bar{q}_{ij,hk} = q_{ij,hk}, \quad q_{ij,hk}^* = \frac{1}{\lambda^2} q_{ij,hk}.$$

Ce sont donc des invariants relatifs, et les égalités (18), (20), (25) permettent aisément de montrer qu'ils sont liés entre eux par les relations suivantes:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{ij,hk} = q_{ij,ki}, \\ q_{ij,hk} + q_{ji,hk} = -\pi_{ij} \pi_{hk}, \\ q_{ij,hh+1} = q_{ij,h+2,h+3}, \\ q_{ij,hh+2} = q_{ij,h+1,h+3}, \\ q_{ii+1,hk} + q_{ii+2,hk} + q_{ii+3,hk} = 0, \\ q_{ij,hh+1} + q_{ij,hh+2} + q_{ij,hh+3} = 0, \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut que les $q_{ij,hk}$ peuvent tous s'exprimer en fonction de 6 d'entre eux et des π_{ij} .

Or un raisonnement analogue à celui que nous avons fait à propos des réseaux de courbes montre qu'il ne peut pas y avoir plus de 6 invariants du troisième ordre indépendants. Par suite les invariants relatifs $\mathcal{A}_{ij}(\pi)$ et q_i doivent pouvoir s'exprimer au moyen des $q_{ij,hk}$.

On démontre en effet sans peine la relation:

$$(41) \quad \mathcal{A}_{ij}(\pi) = \mathcal{A}_{ij} \left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \right) = \frac{1}{\pi_{\gamma\delta}^2} [\pi_{\gamma\delta} q_{ij,\alpha\beta} - \pi_{\alpha\beta} q_{ij,\gamma\delta}].$$

Pour trouver l'expression de q_i en fonction des $q_{ij,hk}$ nous considérerons l'identité de Jacobi bien connue:

$$(42) \quad (\mathcal{A}_{jk}(\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{ik})) + (\mathcal{A}_{ij}(\mathcal{A}_{ik}\mathcal{A}_{jk})) + (\mathcal{A}_{ik}(\mathcal{A}_{jk}\mathcal{A}_{ij})) \equiv 0.$$

Grâce à la formule (15) on peut exprimer le premier membre de cette identité comme combinaison linéaire de \mathcal{A}_{ij} , \mathcal{A}_{ik} , \mathcal{A}_{jk} et ces trois opérateurs étant linéairement indépendants, les coefficients de la combinaison ainsi obtenue doivent être identiquement nuls. On obtient de la sorte la formule suivante:

$$(43) \quad \boxed{A_{ij}(\alpha_{ki}) - A_{ik}(\alpha_{ji}) = \alpha_{ij} \alpha_{ki} - \alpha_{ik} \alpha_{ji}}$$

De là on déduit aisément les résultats suivants:

$$A_{ij}(\alpha_{ik}) - A_{ik}(\alpha_{ij}) = A_{ij}(\pi_{ik}) - A_{ij}(\alpha_{ki}) - A_{ik}(\pi_{ij}) + A_{ik}(\alpha_{ji}),$$

ou

$$(44) \quad \boxed{A_{ij}(\alpha_{ik}) - A_{ik}(\alpha_{ij}) \equiv \varrho_{ij,ik} - \varrho_{ik,ij}}$$

et par suite:

$$(45) \quad \begin{aligned} \varrho_i &\equiv \varrho_{ii+1,ii+2} - \varrho_{ii+2,ii+1} \equiv \varrho_{ii+2,ii+3} - \varrho_{ii+3,ii+2} \\ &\equiv \varrho_{ii+3,ii+1} - \varrho_{ii+1,ii+3}. \end{aligned}$$

THÉORÈME. Les deux égalités $\pi_{ij} = 0$ et $\varrho_i = 0$ entraînent la troisième égalité $\varrho_j = 0$.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\pi_{12} = 0, \quad \varrho_1 = 0.$$

On en déduit:

$$\varrho_{13,12} = A_{13}(\pi_{12}) - \alpha_{13} \pi_{12} = 0.$$

L'égalité (45) donne alors la relation:

$$(45)' \quad \varrho_1 = \varrho_{12,13} - \varrho_{13,12} = \varrho_{12,13}.$$

De même on a:

$$(45)'' \quad \varrho_2 = \varrho_{21,23} - \varrho_{23,21} = \varrho_{21,23}.$$

Or, on peut écrire en vertu des égalités (40) et des hypothèses:

$$\varrho_2 = \varrho_{21,23} = -\varrho_{21,21} - \varrho_{21,24} = -\varrho_{21,24} = -\varrho_{21,13} = \varrho_{12,13} + \pi_{12} \pi_{13} = \varrho_{12,13}.$$

Si $\varrho_1 = 0$ l'égalité (45)' entraîne

$$\varrho_{12,13} = 0$$

et par suite on a:

$$\varrho_2 = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

L'interprétation géométrique de ce théorème est évidente. Il exprime que si les lignes L_{12} , L_{34} engendrent une famille à un paramètre de surfaces π_1 et si les réseaux R_1 découpés sur les surfaces S_1 par les surfaces des 3 autres familles sont à configuration hexagonale, il en est de même des réseaux R_2 découpés sur les surfaces S_2 par les surfaces des 3 autres familles.

Géométriquement cela résulte du fait que la congruence de courbes L_{34} établit entre une surface S_1 quelconque et une surface S_2 quelconque une

correspondance ponctuelle telle qu'au réseau R_1 tracé sur S_1 correspond le réseau R_2 tracé sur S_2 . Si le premier est à configuration hexagonale, il en est forcément de même du second.

Invariants absolus $q'_{ij,hk}$.

Des invariants relatifs $q_{ij,hk}$ on déduit des invariants absolus en les divisant par le produit de deux des π_{ij} non nuls. Si tous les π_{ij} sont $\neq 0$ il sera naturel de prendre:

$$(46) \quad q'_{ij,hk} \equiv \frac{1}{\pi_{ij} \pi_{hk}} q_{ij,hk} \equiv A'_{ij} \log(\pi_{hk}) - \frac{\alpha_{ij}}{\pi_{ij}}.$$

Si l'on pose $A'_{ij} = \frac{1}{\pi_{ij}} A_{ij}$, on vérifiera sans peine les formules:

$$(47) \quad \boxed{(A'_{ij} A'_{ik}) \equiv A'_{ij} A'_{ik} - A'_{ik} A'_{ij} \equiv q'_{ik,ij} A'_{ij} - q'_{ij,ik} A'_{ik}.$$

Méthode générale pour obtenir des invariants d'ordre supérieur.

D'une manière générale, de tout invariant absolu I' on peut déduire de nouveaux invariants d'ordre plus élevé en appliquant à I' les opérateurs invariants A'_{ij} .

Un autre procédé pour obtenir de nouveaux invariants est le suivant: Soit I un invariant relatif se transformant par \bar{T} et T^* d'après les formules suivantes:

$$(48) \quad \bar{I} = I, \quad I^* = \frac{1}{\lambda^n} I.$$

On forme les quantités:

$$(49) \quad I_{ij} = A_{ij}(I) - n \alpha_{ij} I$$

et on vérifie aisément:

$$(50) \quad \bar{I}_{ij} = I_{ij}, \quad I_{ij}^* = \frac{1}{\lambda^{n+1}} I_{ij}.$$

On a ainsi des invariants relatifs d'ordre supérieur et on en déduit les invariants absolus suivants:

$$(51) \quad I'_{ij} = -\frac{1}{n I^{1+\frac{1}{n}}} I_{ij} = A_{ij} \left(\frac{1}{I^n} \right) + \frac{\alpha_{ij}}{I^{\frac{1}{n}}}.$$

Par cette méthode, on obtient par exemple les invariants absolus suivants du quatrième ordre:

$$(52) \quad \omega_{ij} = A_{ij} \left(\frac{1}{\sqrt{q_i}} \right) + \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{q_i}},$$

qui satisfont aux conditions:

$$(53) \quad \omega_{i,i+1} + \omega_{i,i+2} + \omega_{i,i+3} \equiv 0.$$

Les trois invariants $\omega_{i,i+1}$, $\omega_{i,i+2}$, $\omega_{i,i+3}$ ne sont autres que les invariants $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ du réseau de courbes R_i découpé sur la surface S_i par les surfaces des 3 autres familles.

§ 4. *Représentation canonique d'un réseau de surfaces.*

De même que pour les réseaux de courbes, on peut considérer une représentation particulière d'un réseau de surfaces, obtenue en prenant trois des familles comme système de coordonnées u, v, w , la quatrième famille de surfaces étant alors définie par l'égalité $f(u, v, w) = \text{const.}$ On obtient ainsi:

$$(54) \quad \begin{aligned} S_1 &= -f_u du & * & * & ; \quad \varphi_1 = -f_u, \quad \psi_1 = 0, \quad \theta_1 = 0; \\ S_2 &= & * & -f_v dv & * & ; \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_2 = f_v, \quad \theta_2 = 0; \\ S_3 &= & * & * & -f_w dw; \quad \varphi_3 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad \theta_3 = -f_w; \\ S_4 &= f_u du + f_v dv + f_w dw; \quad \varphi_4 = f_u, \quad \psi_4 = f_v, \quad \theta_4 = f_w. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit:

$$(55) \quad \begin{aligned} A_{12} &= -\frac{1}{f_w} \frac{\partial}{\partial w}, & A_{14} &= \frac{1}{f_w} \frac{\partial}{\partial w} - \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v}; \\ A_{13} &= +\frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v}, & A_{24} &= \frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{f_w} \frac{\partial}{\partial w}; \\ A_{23} &= -\frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u}, & A_{34} &= \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u}; \end{aligned}$$

et

$$(56) \quad \begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{f_{vw}}{f_v f_w}, & \alpha_{13} &= -\frac{f_{vw}}{f_v f_w}, & \alpha_{14} &= 0, \\ \alpha_{23} &= \frac{f_{uw}}{f_u f_w}, & \alpha_{24} &= 0, & \alpha_{21} &= -\frac{f_{uv}}{f_u f_v}, \\ \alpha_{34} &= 0, & \alpha_{31} &= \frac{f_{uv}}{f_u f_v}, & \alpha_{32} &= -\frac{f_{uv}}{f_u f_v}, \\ \alpha_{41} &= \frac{f_{uw}}{f_u f_w} - \frac{f_{uw}}{f_u f_v}, & \alpha_{42} &= \frac{f_{uw}}{f_u f_v} - \frac{f_{vw}}{f_v f_w}, & \alpha_{43} &= \frac{f_{vw}}{f_v f_w} - \frac{f_{uv}}{f_u f_v}. \end{aligned}$$

On en conclut:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi_{12} &= \pi_{34} = \frac{1}{f_w} \frac{\partial}{\partial w} \log \frac{f_v}{f_u}, \\ \pi_{23} &= \pi_{41} = \frac{1}{f_u} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{f_w}{f_v}, \\ \pi_{13} &= \pi_{24} = \frac{1}{f_v} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{f_u}{f_w}. \end{aligned} \right.$$

De même que dans le plan on voit que la forme des égalités (54) se conserve quand on effectue les transformations suivantes:

(T^*) *Changement de la fonction $f(u, v, w)$:*

$$(58) \quad f^*(u, v, w) = F[f(u, v, w)].$$

(\bar{T}) *Changement de paramètres u et v :*

$$(59) \quad u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}), \quad w = w(\bar{w}).$$

On peut alors utiliser ces deux séries de transformations pour obtenir une représentation du réseau telle qu'en un point déterminé O de l'espace les dérivées de la fonction $f(u, v, w)$ satisfassent aux conditions suivantes:

$$(60) \quad f_{uv}^0 = 1, \quad f_{uv}^0 = f_{uv}^0 = f_{uvv}^0 = \dots = 0,$$

et de plus:

$$(61) \quad \begin{aligned} f_u^0 &= 1, & f_{uu}^0 &= f_{uuu}^0 = \dots = 0, \\ f_v^0 &= 1, & f_{rv}^0 &= f_{vvv}^0 = \dots = 0, \\ f_w^0 &= 1, & f_{wv}^0 &= f_{wvw}^0 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Ces conditions étant réalisées, les transformations T^* et \bar{T} qui permettent de les obtenir sont absolument déterminées, de telle sorte qu'il est impossible de particulariser davantage la représentation analytique du réseau au point O . Nous donnerons à cette représentation le nom de «représentation canonique au point O ». Elle permet de fixer le nombre d'invariants absolus des différents ordres: C'est celui des dérivées des différents ordres de la fonction f dont les valeurs au point O ne sont pas déterminées par les égalités (60) et (61). On voit donc qu'en général il y aura: un seul invariant absolu du 2^o ordre (f_{uv}), 6 invariants absolus du 3^o ordre (f_{uv^2} , f_{v^2u} , f_{v^2v} , f_{u^2v} , f_{u^2v} , f_{uvu}) et ainsi de suite.

Il peut être commode pour conserver plus de symétrie aux résultats de considérer une «représentation semi-canonique» au point O , pour laquelle seules les conditions (61) sont réalisées, ce que l'on obtient en choisissant un système de paramètres u, v, w qu'on peut interpréter de la manière suivante:

Les surfaces de la quatrième famille sont définies par l'égalité:

$$(62) \quad f(u, v, w) = C,$$

qui fait correspondre à chaque surface de cette famille un nombre C . Les conditions (60) n'étant pas supposées réalisées, on peut d'ailleurs faire subir à C une transformation quelconque:

$$(63) \quad C = f(C),$$

de sorte que la correspondance entre les surfaces de la quatrième famille et C est tout à fait arbitraire.

Soit C_0 la constante correspondant à la surface S_4^0 passant par O et C la constante correspondant à la surface S_4 passant par un point quelconque P sur la ligne L_{23}^0 ($v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$) issue de O . Pour obtenir une représentation semi-canonique en O , il suffit de choisir comme valeur du paramètre u au point P la valeur $C - C_0$, la même définition étant valable pour les paramètres v et w sur les lignes L_{12}^0 et L_{23}^0 . Les coordonnées $u_0 v_0 w_0$ du point O sont alors nulles, et si l'on considère 3 points $P(u, 0, 0)$ $Q(0, v, 0)$ $R(0, 0, w)$ situés aux points d'intersection des lignes L_{12}^0 L_{13}^0 L_{23}^0 issues de O avec une même surface S_4 , on a pour ces 3 points:

$$(64) \quad u = v = w = C - C_0.$$

§ 5. *Interprétation géométrique des invariants π_{ij} et π .*

Soit C_0 la constante qui caractérise la surface S_4^0 passant par O et $C_0 + d_0 C$ la constante correspondant à une surface S_4 infiniment voisine de S_4^0 . Les lignes L_{23}^0 L_{12}^0 L_{13}^0 issues de O rencontrent S_4 en des points P, Q, R . Considérons la ligne L_{12} issue de R et la ligne L_{13} issue de Q : Ces deux lignes situées sur la surface S_1^0 passant par O se coupent en un point A_1 . De même la ligne L_{23} passant par Q et la ligne L_{12} passant par P se coupent au point A_2 ; la ligne L_{13} issue de P et la ligne L_{23} issue de R se coupent au point A_3 . Nous désignerons par $C_0 + d_1 C$, $C_0 + d_2 C$, $C_0 + d_3 C$ les valeurs de C correspondant aux surfaces de la quatrième famille contenant respectivement les points A_1, A_2, A_3 . Si on a pris au point O une représentation semi-canonique, on vérifie sans peine les égalités suivantes.

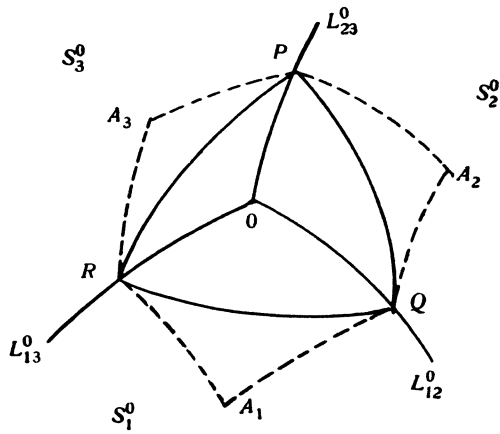


Fig. 7.

$$(65) \quad \begin{cases} d_1 C = 2 d_0 C + f_{vw}^0 (d_0 C)^2 + \dots, \\ d_2 C = 2 d_0 C + f_{ur}^0 (d_0 C)^2 + \dots, \\ d_3 C = 2 d_0 C + f_{uv}^0 (d_0 C)^2 + \dots. \end{cases}$$

Or dans cette représentation les invariants relatifs π_{ij} ont les valeurs:

$$(66) \quad \pi_{12} = f_{vw}^0 - f_{uv}^0, \quad \pi_{23} = f_{uv}^0 - f_{ur}^0, \quad \pi_{13} = f_{ur}^0 - f_{vw}^0.$$

On a donc :

$$(67) \quad \pi_{12} = \lim_{d_0 C=0} \frac{d_1 C - d_2 C}{(d_0 C)^2}, \quad \pi_{23} = \lim_{d_0 C=0} \frac{d_2 C - d_3 C}{(d_0 C)^2}, \quad \pi_{31} = \lim_{d_0 C=0} \frac{d_3 C - d_1 C}{(d_0 C)^2}$$

et par suite :

$$(68) \quad \pi = \frac{\pi_{12}}{\pi_{23}} = \lim_{d_0 C=0} \frac{d_1 C - d_2 C}{d_2 C - d_3 C}.$$

Si on effectue sur C la transformation (64) on voit que les π_{ij} sont multipliés par un même facteur, tandis que π ne change pas, ce qui correspond bien au fait que les premiers sont des invariants relatifs, tandis que π est un invariant absolu.

En particulier, si tous les π_{ij} sont nuls, on voit que les 3 points $A_1 A_2 A_3$ sont situés sur une même surface de la quatrième famille.

CHAPITRE II.

Etude géométrique des réseaux à configuration octogonale.

Dans ce chapitre nous considérerons un réseau de surfaces comme formé par 4 familles de surfaces absolument quelconques, assujetties à la seule condition que 3 quelconques d'entre elles forment, tout au moins à l'intérieur du domaine où nous les considérerons, un « système de coordonnées », c.-à-d. soient topologiquement applicables sur les plans $x, y, z = \text{const.}$ d'un système de coordonnées cartésiennes. De même quand nous dirons que deux congruences de lignes engendrent une famille à un paramètre de surfaces, il restera entendu que cette famille est topologiquement applicable sur une famille de plans parallèles, et de plus que sur chacune de ces surfaces les courbes considérées forment un « système de coordonnées », c.-à-d., sont topologiquement applicables sur deux familles de droites parallèles.

§ 1. Démonstration géométrique de la proposition B.

Conservant les notations utilisées dans le chapitre précédent, nous considérons un réseau de surfaces satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les lignes L_{12} et L_{34} engendrent une famille à un paramètre de surfaces, soit π_1 :

b) Les lignes L_{13} et L_{24} engendrent de même une famille à un paramètre de surfaces, soit π_2 :

Il s'agit alors de démontrer que les lignes L_{14} et L_{23} engendrent elles aussi une troisième famille à un paramètre de surfaces, soit π_3 .

Nous démontrerons tout d'abord la propriété suivante : Considérons les 3 surfaces $S_1^0 S_2^0 S_3^0$ passant par O , et leurs lignes d'intersection $L_{12}^0 L_{23}^0 L_{13}^0$. Soit S_4 une surface de la quatrième famille ne passant pas par O et coupant les lignes $L_{12}^0 L_{23}^0 L_{13}^0$ respectivement aux points A, B, C .

La ligne L_{13} issue de A et la ligne L_{12} issue de B se coupent en un point M de S_1^0 . On définit de même les points P et Q sur S_2^0 et S_3^0 .

α) Je dis que les trois points MPQ sont sur une même surface de la quatrième famille S_4 .

En effet en vertu de l'hypothèse (a), les points M et P appartiennent à la ligne d'intersection de la surface π_1 qui contient la ligne L_{34} passant par B et C , avec la surface S_3 passant par A . Or la ligne d'intersection d'une surface π_1 et d'une surface S_3 est une ligne L_{34} . Par suite M et P sont sur une même ligne L_{34} et par suite sur une même surface S_4 . On démontre de même qu'en vertu de l'hypothèse b) les points M et Q sont sur une même surface S_4 , ce qui entraîne la proposition (α).

De (α) il est aisé de déduire la proposition suivante:

β) Sur une surface S_2 , les lignes L_{12} , L_{23} et L_{24} forment un réseau à configuration hexagonale.

Sur une surface quelconque de la deuxième famille, soit S_2^0 prenons un point quelconque P et considérons les lignes L_{12} , L_{23} , L_{24} passant par ce point sur S_2^0 . Sur la courbe L_{23} prenons un point μ voisin de P (de manière que dans les constructions suivantes on reste dans le domaine

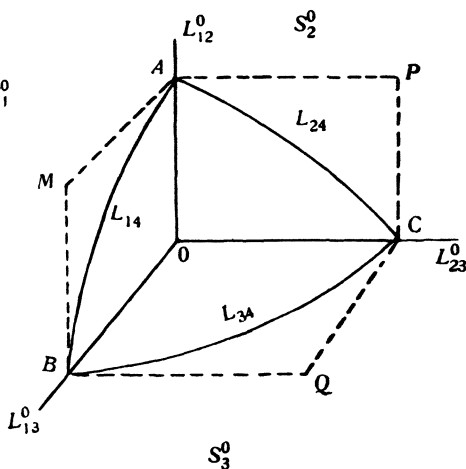


Fig. 8.

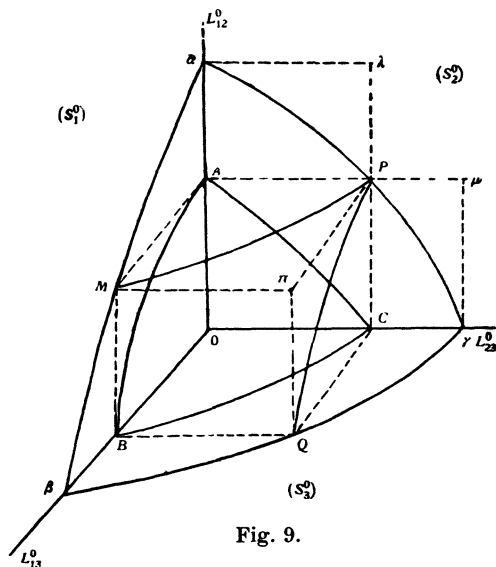


Fig. 9.

où le réseau est défini) et pour vérifier que le réseau formé par les droites L_{12} , L_{23} , L_{24} est à configuration hexagonale, construisons suivant le procédé connu le contour polygonal $\mu\gamma C A \alpha \lambda$ (Fig. 9). Il s'agit de démontrer que λ et μ sont situés sur une même ligne L_{24} .

Les lignes γC et αA se coupent sur S_2^0 en un point O et nous

considérons les surfaces S_1^0, S_2^0, S_3^0 des trois premières familles passant par ce point O . La surface S_4 passant par \overline{AC} coupe leurs lignes d'intersection $L_{12}^0 L_{23}^0 L_{13}^0$ respectivement aux points A, C, B et comme dans la démonstration de α), on peut construire les points M, P, Q qui sont tous les trois situés sur la surface S_4' passant par $\alpha\gamma$.

La surface S_1 passant par C , la surface S_2 passant par B , et la surface S_3 passant par A forment avec $S_1^0 S_2^0 S_3^0$ un parallélépipède curviligne dont π est le sommet opposé à O . On voit alors immédiatement sur la Fig. 4, qu'en vertu de la proposition α) appliquée aux 3 surfaces des 3 premières familles passant par A , les points λ et π appartiennent à une même surface S_4'' de la quatrième famille.

De même en appliquant le proposition α) aux 3 surfaces des 3 premières familles passant par C on voit immédiatement que les points π et μ appartiennent à une même surface de la quatrième famille et par suite à S_4'' .

Les points λ et μ appartenant tous deux à S_4'' sont bien situés sur une même ligne L_{24} , c. q. f. d.

De la proposition β) suit la proposition suivante.

γ) *Le réseau de courbes formé sur une surface π_1 par les lignes L_{12}, L_{34} et les lignes d'intersection de cette surface π_1 avec la famille de surfaces π_2 , est un réseau à configuration hexagonale.*

En effet la congruence des lignes L_{13} établit entre une surface π_1 et une surface S_2 une correspondance biunivoque. Cette correspondance fait correspondre respectivement aux lignes L_{12} et L_{34} situées sur π_1 , des lignes L_{12} et L_{23} situées sur S_2 . D'autre part, à une ligne d'intersection de π_1 avec une surface π_2 elle fait correspondre sur S_2 la ligne d'intersection de S_2 avec la surface π_2 considérée, c.-à-d. une ligne L_{24} . On en conclut qu'au réseau dont il s'agit dans la proposition γ) correspond le réseau dont il s'agit dans la proposition β). Le second étant à configuration hexagonale, il en est de même du premier, c. q. f. d.

Avant de passer à la démonstration de la proposition B , nous établirons encore le lemme suivant, que nous aurons à utiliser:

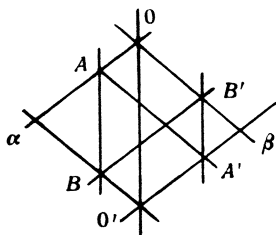


Fig. 10.

LEMME. Soit un réseau de courbes à configuration hexagonale. Considérons le quadrilatère curviligne $\alpha O \beta O'$ dont les côtés $(\alpha O, \beta O')$ appartiennent à la première famille de courbes du réseau, les côtés $(\beta O, \alpha O')$ à la deuxième famille et dont la diagonale OO' est une courbe de la troisième famille. A et B étant deux points de αO et $\alpha O'$ situés sur une même courbe de la troisième famille, traçons les courbes $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$

appartenant respectivement à la deuxième et à la première famille de courbes du réseau et coupant respectivement $\beta O'$ et $\beta O'$ aux points A'

et B' . Les points A' et B' sont situés sur une même courbe de la troisième famille.

Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que ce lemme est évident pour le réseau de droites parallèles sur lequel le réseau considéré est topologiquement applicable.

On peut alors démontrer la proposition B comme il suit: En vertu des hypothèses $a)$ et $b)$, si on prend deux points O et O' sur la ligne d'intersection OO' d'une surface π_1^0 et d'une surface π_2^0 , les surfaces du réseau passant par O et les surfaces du réseau passant par O' forment un octaèdre curviligne. Soit $OO'ABCD$ cet octaèdre dans lequel les lignes AB, CD sont des lignes L_{14} et les lignes AD, BC des lignes L_{23} .

Pour démontrer la proposition B , il suffit de démontrer que toute ligne L_{23} rencontrant la ligne AB rencontre aussi la ligne CD qui au fond est une ligne L_{14} quelconque s'appuyant sur AD .

Prenons donc un point M quelconque sur AB et considérons la ligne L_{23} passant par M . La surface π_2 passant par M coupe OA et $O'A$

en deux points ω et ω' et soit $\omega\omega'$ la courbe d'intersection de cette surface π_2 avec la surface $\pi_1^0 (AOCO')$. D'après la remarque faite au début de cette démonstration les surfaces du réseau passant par ω et ω' forment un octaèdre curviligne, soit $\omega AMPN\omega'$, et le sommet P opposé à A se trouve dans la surface π_1^0 . Les courbes $\omega P (L_{31})$ et $\omega' P (L_{12})$ rencontrent OC et $O'C$ en deux points Ω et Ω' . En vertu de la proposition $\gamma)$ et du lemme démontrés précédemment, on voit que Ω et Ω' sont situés sur une droite d'intersection de la surface π_1^0 avec une sur-

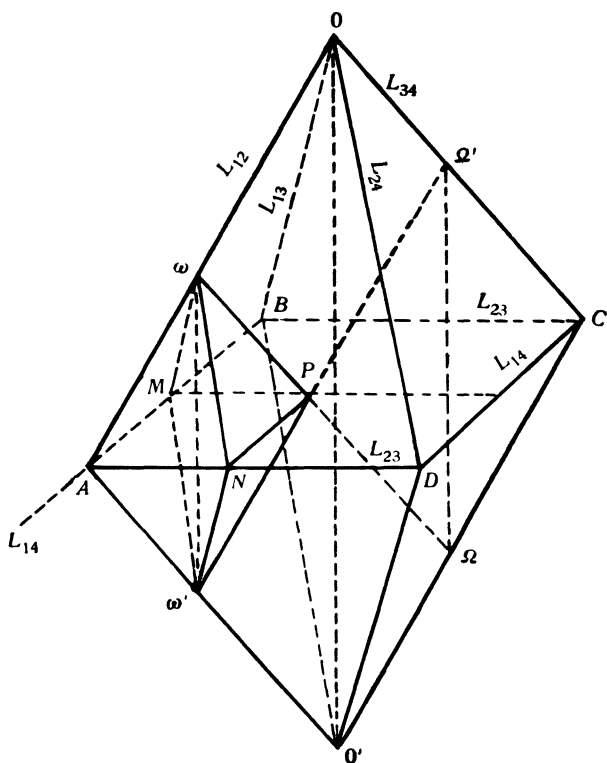


Fig. 11.

face π_2 . Par suite les surfaces du réseau passant par ces 2 points Ω et Ω' forment un octaèdre qui admet évidemment comme sommets opposés P et C . La ligne L_{23} passant par P , soit MP doit donc rencontrer la ligne L_{14} passant par C , c.-à-d. CD , et la proposition B est ainsi démontrée.

§ 2. Démonstration géométrique de la proposition C .

Etant donné un réseau de surfaces satisfaisant aux 3 conditions que les couples de lignes $(L_{12} L_{34})$ $(L_{13} L_{24})$ $(L_{14} L_{23})$ engendrent 3 familles à un paramètre de surfaces π_1, π_2, π_3 , il s'agit de montrer que les 4 familles de surface du réseau sont topologiquement applicables sur 4 familles de plans parallèles.

Monsieur BLASCHKE¹⁾ a donné de cette proposition une élégante démonstration géométrique à laquelle nous renvoyons le lecteur.

§ 3. Réseaux de plans à configuration octogonale.

La proposition C permet très simplement de déterminer les réseaux de plans dont les 4 familles de plans sont topologiquement applicables sur 4 familles de plans parallèles.

Soit, en effet, un tel réseau. Les surfaces S_i sont alors des plans, et les lignes L_{ij} des droites. Le réseau étant à configuration octogonale la proposition C montre que les 3 couples de droites $(L_{12} L_{34})$, $(L_{13} L_{24})$, $(L_{14} L_{23})$ engendrent 3 familles de surfaces π_1, π_2, π_3 qui, étant doublement réglées, sont des quadriques. Mais on sait que tout plan passant par une génératrice d'une quadrique est tangent à cette quadrique. D'où il suit que le plan S_1 par exemple qui contient les droites L_{12}, L_{13}, L_{14} est tangent aux trois quadriques π_1, π_2, π_3 admettant ces droites comme génératrices. On voit donc que les 3 familles de quadriques $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ admettent l' ∞^1 plans tangents communs S_1 . On démontre de même que les familles de l' ∞^1 plans, S_2 et S_3 sont des plans tangents communs à π_1, π_2, π_3 . Ceci n'est évidemment possible que si ces quadriques $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ appartiennent à un même faisceau tangentiel de quadriques, le réseau proposé étant constitué par les plans tangents communs aux quadriques de ce faisceau. D'où le théorème.

THÉORÈME F. *Les seuls réseaux de plans présentant la configuration octogonale sont les réseaux constitués par les plans tangents communs aux quadriques d'un faisceau tangentiel.*

Inversement tout réseau ainsi formé présente la configuration octogonale.

Bien entendu le théorème est encore vrai si le faisceau tangentiel considéré est dégénéré. En particulier on voit ainsi que le seul cas

¹⁾ BLASCHKE. Topologische Fragen der Differentialgeometrie II. Achtfachgewebe. *Mathematische Zeitschrift* 28 (1928), S. 158—160.

où un réseau formé par 4 faisceaux de plans présente la configuration octogonale est celui où les axes des 4 faisceaux de plans forment un quadrilatère plan ou gauche.

Ceci conduit à se demander à quelles conditions doit satisfaire un réseau quelconque pour que ses 4 familles de surfaces soient topologiquement applicables sur 4 faisceaux de plans dont les axes ne forment pas un quadrilatère gauche. C'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

On pourrait donner de la proposition *F* une démonstration analytique simple en utilisant la méthode qui nous servira au chapitre suivant. On serait ainsi conduit à une représentation paramétrique du réseau faisant intervenir les fonctions elliptiques.

CHAPITRE III.

Conditions nécessaires et suffisantes pour que les 4 familles de surfaces d'un réseau soient topologiquement applicables sur 4 faisceaux de plans.

La méthode qui nous a servi pour étudier les conditions d'applicabilité d'un réseau de courbes sur 3 familles de droites quelconques peut s'appliquer à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de surfaces soit topologiquement applicable sur 4 familles quelconques de plans. Toutefois, on obtient ainsi des équations fort compliquées qu'il semble difficile d'étudier. Aussi nous contenterons nous dans ce chapitre d'envisager le cas particulier où les 4 familles de plans considérées sont des faisceaux de plans.

§ 1. *Premières conditions nécessaires.*

De l'interprétation géométrique des équations $q_i = 0$ (§ 3, chap. I) il résulte que ces équations doivent être satisfaites pour tout réseau topologiquement applicable sur 4 faisceaux de plans. Dans tout réseau formé de 4 faisceaux de plans, 3 des familles de surfaces découpent en effet sur une surface quelconque de la quatrième famille un réseau de courbes à configuration hexagonale.

Une première série de conditions nécessaires s'exprime donc par les égalités.

(1)
$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0,$$

ou ce qui revient au même

(2)
$$A_{ij}(\alpha_{ik}) - A_{ik}(\alpha_{ij}) = 0. \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

§ 2. *Equations de définition de la transformation topologique.*

Pour simplifier les écritures nous poserons:

(3)
$$A_{12} = A_3, \quad A_{23} = A_1, \quad A_{31} = A_2 \quad \text{et} \quad A_{if} = f_i.$$

La relation: $A_{ij}A_{ik} - A_{ik}A_{ij} = \alpha_{ij}A_{ik} - \alpha_{ik}A_{ij}$ donne ainsi:

$$(4) \quad \begin{cases} A_1A_2 - A_2A_1 = -\alpha_{31}A_1 - \alpha_{32}A_2, \\ A_2A_3 - A_3A_2 = -\alpha_{12}A_2 - \alpha_{13}A_3, \\ A_3A_1 - A_1A_3 = -\alpha_{23}A_3 - \alpha_{21}A_1. \end{cases}$$

Pour que le réseau considéré soit topologiquement applicable sur 4 familles quelconques de plans, il faut et il suffit que l'on puisse trouver 4 fonctions de u, v, w soit:

$$(5) \quad x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad t = t(u, v, w),$$

telles que x, y, z, t étant considérées comme des coordonnées projectives dans l'espace, les surfaces définies par les équations (5) dans lesquelles on suppose u, v, w liées successivement par les 4 conditions

$$(6) \quad S_i = \varphi_i(u, v, w)du + \psi_i(u, v, w)dv + \theta_i(u, v, w)dw = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

soient 4 familles de plans.

Cherchons par exemple à quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour que la troisième famille $S_3 = 0$ soit une famille de plans.

Il faut et il suffit pour cela qu'on puisse trouver des fonctions $ABCD$ constantes sur toute surface S_3 et telles que la relation:

$$(7) \quad Ax + By + Cz + Dt = 0$$

soit identiquement satisfaite quand on y suppose u, v, w liées par la relation $S_3 = 0$. En posant comme convenu $A_i x = x_i$, $A_i A_j x = x_{ij}$, on en déduit:

$$(8) \quad \begin{cases} Ax_i + By_i + Cz_i + Dt_i = 0 & i = 1, 2, \\ Ax_{ij} + By_{ij} + Cz_{ij} + Dt_{ij} = 0 & i, j = 1, 2. \end{cases}$$

D'où les conditions:

$$(9) \quad |x_{11} x_1 x_2 x| = 0, \quad |x_{12} x_1 x_2 x| = 0, \quad |x_{22} x_1 x_2 x| = 0,$$

les expressions figurant dans les premiers membres étant les déterminants obtenus en y ajoutant les 2 lignes qui se déduisent de celle qui est écrite par permutation circulaire des lettres x, y, z .

Inversement d'ailleurs, si ces conditions sont réalisées, la transformation (5) réalise l'application de la troisième famille de surfaces du réseau sur une famille de plans.

De la même manière on obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation (5) réalise l'application des deux premières familles du réseau sur deux familles de plans, soit:

$$(9)' \quad \begin{cases} |x_{22} x_2 x_3 x| = 0, & |x_{23} x_2 x_3 x| = 0, & |x_{33} x_2 x_3 x| = 0, \\ |x_{33} x_3 x_1 x| = 0, & |x_{31} x_3 x_1 x| = 0, & |x_{11} x_3 x_1 x| = 0. \end{cases}$$

Si les conditions (9) et (9)' sont réalisées, on voit que les 4 fonctions x, y, z, t constituent un système fondamental de solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, de la forme:

$$(10) \begin{cases} x_{11} = a_{11} x_1 + \beta_{11} x, \\ x_{22} = a_{22} x_2 + \beta_{22} x, \\ x_{33} = a_{33} x_3 + \beta_{33} x, \\ x_{12} = (a_{12} - \alpha_{31}) x_1 + a_{21} x_2 + \beta_{12} x, & x_{21} = a_{12} x_1 + (a_{21} + \alpha_{32}) x_2 + \beta_{12} x, \\ x_{23} = (a_{23} - \alpha_{12}) x_2 + a_{32} x_3 + \beta_{23} x, & x_{32} = a_{23} x_2 + (a_{32} + \alpha_{13}) x_3 + \beta_{23} x, \\ x_{31} = (a_{31} - \alpha_{23}) x_3 + a_{13} x_1 + \beta_{31} x, & x_{13} = a_{31} x_3 + (a_{13} + \alpha_{21}) x_1 + \beta_{31} x, \end{cases}$$

que nous écrivons de manière à satisfaire aux conditions d'intégrabilité fournies par les relations (4), à savoir:

$$(11) \begin{cases} x_{12} - x_{21} = -\alpha_{31} x_1 - \alpha_{32} x_2, \\ x_{23} - x_{32} = -\alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3, \\ x_{31} - x_{13} = -\alpha_{23} x_3 - \alpha_{21} x_1. \end{cases}$$

Inversement supposons que le système (10) soit complètement intégrable. Tout système de solutions fondamentales x, y, z, t vérifie les relations (9) et (9)' et détermine par suite une transformation topologique réalisant l'application des 3 premières familles de surfaces du réseau sur 3 familles quelconques de plans.

§ 3. Normalisation des coordonnées homogènes $xyz t$.

Les coordonnées x, y, z, t étant homogènes, on peut les multiplier par un facteur commun et choisir ce facteur de manière à simplifier les équations de définition (10). Si on pose:

$$(12) \quad x = \sigma X$$

on voit que x vérifiant le système (10), X vérifiera un système de même forme. Nous supposons que le système d'équations auxquelles satisfait X se déduit du système (10) en y substituant aux lettres minuscules des lettres majuscules. Les coefficients A_{ij} et B_{ij} de ce nouveau système sont liés aux coefficients a_{ij} et β_{ij} de l'ancien par les relations suivantes:

$$(13) \quad \begin{cases} a_{11} = A_{11} + 2 \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ a_{22} = A_{22} + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ a_{33} = A_{33} + 2 \frac{\sigma_3}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12} = A_{12} + \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ a_{23} = A_{23} + \frac{\sigma_3}{\sigma}, \\ a_{31} = A_{31} + \frac{\sigma_1}{\sigma}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{21} = A_{21} + \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ a_{32} = A_{32} + \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ a_{13} = A_{13} + \frac{\sigma_3}{\sigma}, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \beta_{11} = B_{11} - A_{11} \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^2, \\ \beta_{22} = B_{22} - A_{22} \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{\sigma_{22}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} \right)^2, \\ \beta_{33} = B_{33} - A_{33} \frac{\sigma_3}{\sigma} + \frac{\sigma_{33}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma} \right)^2, \\ \beta_{12} = B_{12} - (A_{12} - \alpha_{31}) \frac{\sigma_1}{\sigma} - A_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2}, \\ \beta_{23} = B_{23} - (A_{23} - \alpha_{12}) \frac{\sigma_2}{\sigma} - A_{32} \frac{\sigma_3}{\sigma} + \frac{\sigma_{23}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma^2}, \\ \beta_{31} = B_{31} - (A_{31} - \alpha_{23}) \frac{\sigma_3}{\sigma} - A_{13} \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{\sigma_{31}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sigma^2}. \end{cases}$$

Supposons le système (10) complètement intégrable et soit alors x, y, z, t un système fondamental de solutions, c.-à-d. tel que l'on ait:

$$d \equiv |x_1 x_2 x_3 x| \neq 0.$$

Le système d'équations aux majuscules admet alors 4 solutions fondamentales $X = \frac{1}{\sigma} x$, $Y = \frac{1}{\sigma} y$, $Z = \frac{1}{\sigma} z$, $T = \frac{1}{\sigma} t$ et on a:

$$(15) \quad D \equiv |X_1 X_2 X_3 X| \equiv \frac{1}{\sigma^4} d \neq 0.$$

D'autre part on vérifie sans peine les relations:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d_1}{d} \equiv a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ \frac{d_2}{d} \equiv a_{22} + a_{32} + a_{12} \\ \frac{d_3}{d} \equiv a_{33} + a_{13} + a_{23} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{D_1}{D} \equiv A_{11} + A_{21} + A_{31} \equiv \frac{d_1}{d} - 4 \frac{\sigma_1}{\sigma}, \\ \frac{D_2}{D} \equiv A_{22} + A_{32} + A_{12} \equiv \frac{d_2}{d} - 4 \frac{\sigma_2}{\sigma}, \\ \frac{D_3}{D} \equiv A_{33} + A_{13} + A_{23} \equiv \frac{d_3}{d} - 4 \frac{\sigma_3}{\sigma}. \end{cases}$$

On voit immédiatement que si l'on choisit pour σ la valeur $d^{1/4}$, les coefficients A_j vérifient le système suivant de relations:

$$(17) \quad \begin{cases} A_{11} + A_{21} + A_{31} \equiv 0, \\ A_{22} + A_{32} + A_{12} \equiv 0, \\ A_{33} + A_{13} + A_{23} \equiv 0. \end{cases}$$

Nous supposons qu'on a effectué cette «normalisation» des coordonnées x, y, z, t et il nous reste à chercher à quelles nouvelles conditions doivent satisfaire les coefficients A_j pour que la transformation:

$$(18) \quad X = X(u, v, w), \quad Y = Y(u, v, w), \quad Z = Z(u, v, w), \quad T = T(u, v, w),$$

où ces fonctions sont solutions du système (10) avec majuscules, qui réalise déjà l'application des 3 premières familles de surfaces du réseau sur 3 familles quelconques de plans, réalise aussi l'application de la quatrième famille de surfaces du réseau sur une famille de plans.

§ 4. *Conditions pour que la transformation (18) réalise l'application de la quatrième famille du réseau sur une famille de plans.*

Ces conditions sont:

$$(19) \quad \begin{aligned} & |A_{41} A_{41} X, A_{41} X, A_{42} X, X| = 0, \\ & |A_{41} A_{42} X, A_{41} X, A_{42} X, X| = 0, \\ & |A_{42} A_{42} X, A_{41} X, A_{42} X, X| = 0. \end{aligned}$$

En remarquant que l'on a:

$$A_{41} = A_3 - A_2, \quad A_{42} = A_1 - A_3, \quad A_{43} = A_2 - A_1,$$

on vérifiera sans peine que les conditions (19) imposent aux coefficients A_{ij} de satisfaire aux relations suivantes:

$$(20) \quad \begin{cases} A_{22} - 2A_{32} - 2A_{23} + A_{33} \equiv \alpha_{13} - \alpha_{12}, \\ A_{33} - 2A_{13} - 2A_{31} + A_{11} \equiv \alpha_{21} - \alpha_{23}, \\ A_{11} - 2A_{21} - 2A_{12} + A_{22} \equiv \alpha_{32} - \alpha_{31}. \end{cases}$$

§ 5. *Forme définitive des équations de définition.*

Les relations (20) jointes aux relations (17) montrent que les coefficients A_{ij} peuvent s'exprimer en fonction de 3 quantités K_1, K_2, K_3 par les formules suivantes:

$$(21) \quad \begin{cases} 8A_{32} = 3K_1 + K_2 - (3\alpha_{13} + \alpha_{31}), & 8A_{23} = -(3K_1 + K_2) + 3\alpha_{12} + \alpha_{21}, \\ 8A_{13} = 3K_2 + K_3 - (3\alpha_{21} + \alpha_{12}), & 8A_{31} = -(3K_2 + K_3) + 3\alpha_{23} + \alpha_{32}, \\ 8A_{21} = 3K_3 + K_1 - (3\alpha_{32} + \alpha_{23}), & 8A_{12} = -(3K_3 + K_1) + 3\alpha_{31} + \alpha_{13}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A_{11} = K_2 - K_3 + \alpha_{32} - \alpha_{23}, \\ 4A_{22} = K_3 - K_1 + \alpha_{13} - \alpha_{31}, \\ 4A_{33} = K_1 - K_2 + \alpha_{21} - \alpha_{12}. \end{cases}$$

En définitive nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau proposé soit topologiquement applicable sur 4 familles quelconques de plans est que l'on puisse trouver 9 fonctions de u, v, w soit: $B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12}, K_1, K_2, K_3$ telles que le système définitif:

$$(22) \quad \begin{cases} X_{11} = A_{11} X_1 + B_{11} X, \\ X_{22} = A_{22} X_2 + B_{22} X, \\ X_{33} = A_{33} X_3 + B_{33} X, \end{cases} \quad \begin{cases} X_{12} = (A_{12} - \alpha_{31}) X_1 + A_{21} X_2 + B_{12} X, \\ X_{23} = (A_{23} - \alpha_{12}) X_2 + A_{32} X_3 + B_{23} X, \\ X_{31} = (A_{31} - \alpha_{23}) X_3 + A_{13} X_1 + B_{31} X, \end{cases}$$

En les égalant, il vient:

$$(23) \quad \boxed{\mathcal{A}_1[A_{21} - A_{31} + \pi_{23}] = (A_{21} - A_{31} + \pi_{23})[-2(A_{31} + A_{21}) + \alpha_{23} - \alpha_{32}].}$$

De même on obtient 4 expressions pour B_{23} .

$$(I_1) \quad B_{23} = \mathcal{A}_3(A_{22}) - \mathcal{A}_2(A_{23}) - A_{23}A_{32} + \alpha_{12}(A_{32} - A_{22}) - 2\alpha_{13}A_{23} + \alpha_{12}\alpha_{13},$$

$$(II_1) \quad B_{23} = \mathcal{A}_2(A_{33}) - \mathcal{A}_3(A_{32}) - A_{23}A_{32} + \alpha_{13}(A_{33} - A_{23}) + 2\alpha_{12}A_{32} + \alpha_{12}\alpha_{13},$$

$$(III_1) \quad B_{23} = \mathcal{A}_2(A_{13}) - A_{12}(A_{23} - A_{13}) - A_{13}A_{32} - \alpha_{31}(A_{13} - A_{23}) \\ - \alpha_{21}(A_{32} - A_{12}) + \alpha_{12}A_{12} + \mathcal{A}_2(\alpha_{21}) - \alpha_{31}\pi_{12},$$

$$(III_2) \quad B_{23} = \mathcal{A}_3(A_{12}) + A_{13}(A_{12} - A_{32}) - A_{12}A_{23} - \alpha_{31}(A_{13} - A_{23}) \\ - \alpha_{21}(A_{32} - A_{12}) - \alpha_{13}A_{13} - \mathcal{A}_3(\alpha_{31}) - \alpha_{21}\pi_{13}.$$

En égalant les deux dernières expressions de B_{23} , il vient:

$$(24) \quad \begin{aligned} & \mathcal{A}_3(A_{12}) - \mathcal{A}_2(A_{13}) \\ & = \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13} + \mathcal{A}_3(\alpha_{31}) + \mathcal{A}_2(\alpha_{21}) - \alpha_{31}\pi_{12} + \alpha_{21}\pi_{13}. \end{aligned}$$

Or on a en vertu de la formule (43). Chap. I:

$$\mathcal{A}_3(\alpha_{31}) + \mathcal{A}_2(\alpha_{21}) = \mathcal{A}_{12}(\alpha_{31}) - \mathcal{A}_{13}(\alpha_{21}) = \alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{21}.$$

D'où:

$$\mathcal{A}_3(\alpha_{31}) + \mathcal{A}_2(\alpha_{21}) - \alpha_{31}\pi_{12} + \alpha_{21}\pi_{13} = 0.$$

De sorte que (24) devient identique à l'une des relations (III)₃, c.-à-d.:

$$(25) \quad \boxed{\mathcal{A}_3(A_{12}) - \mathcal{A}_2(A_{13}) = \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13}.}$$

On retombe sur la même relation en égalant les deux premières valeurs de B_{23} . Si l'on égale la première et la troisième il vient après quelques réductions:

$$(26) \quad \boxed{\begin{aligned} & \mathcal{A}_2(A_{13} + A_{23}) + \mathcal{A}_3(A_{32} + A_{12}) \\ & = (A_{23} - A_{13} - \pi_{12})(A_{12} - A_{32} - \pi_{13}) + \alpha_{12}(A_{12} + A_{32}) \\ & \quad - \alpha_{13}(A_{13} + A_{23}) - \mathcal{A}_{31}(\alpha_{21}) - \alpha_{13}\alpha_{21}. \end{aligned}}$$

Chacune des relations (23), (25), (26) donne par permutation des indices 1, 2, 3 un groupe de relations.

Le groupe des relations H. — Enfin on obtiendrait deux autres groupes de relations contenant les dérivées secondes des coefficients A_{ij} en remplaçant les B_{ij} par leurs valeurs, en fonction des A_{ij} , dans les relations (I)₃ et (II)₃. Nous les désignerons par relations H et nous nous dispenserons de les écrire en nous contentant de faire remarquer qu'elles

sont identiquement satisfaites dès que les coefficients A_{ij} satisfont aux conditions supplémentaires, déterminées au paragraphe suivant, qui expriment que les familles de plans sur lesquelles le réseau est applicable sont des faisceaux de plans.

Si dans les relations (23), (25) et (26) on remplace les A_{ij} par leurs expressions en fonction de K_1, K_2, K_3 fournies par les formules (21), on obtient les conditions suivantes:

$$(23)' \quad A_1(K_2 + K_3 + \pi_{23}) = \frac{1}{2}(K_2 + K_3 + \pi_{23})(K_2 - K_3 + \alpha_{23} - \alpha_{32}).$$

Si l'on tient compte des relations:

$$(27) \quad \begin{cases} A_{ij}(\alpha_{ik}) - A_{ik}(\alpha^i_j) = 0, \\ A_{ij}(\alpha_{ki}) - A_{ik}(\alpha_{ji}) \equiv \alpha_{ij}\alpha_{ki} - \alpha_{ik}\alpha_{ij}, \\ A_{ij}(\pi_{\alpha\beta}) - \alpha_{ij}\pi_{\alpha\beta} \equiv \varrho_{ij,\alpha\beta}, \end{cases}$$

on voit sans peine que les relations (26) et (27) deviennent:

$$(25)' \quad 3(A_2K_2 + A_3K_3) + (A_2K_1 + A_3K_1) = 3(\alpha_{13}K_2 - \alpha_{12}K_3) + (\alpha_{12} - \alpha_{13})K_1.$$

$$(26)' \quad -A_2K_2 - A_3K_3 + A_3K_1 - A_2K_1 = (K_1 + K_2 + \pi_{12})(K_1 + K_3 + \pi_{13}) + \alpha_{12}(K_1 - K_3) - \alpha_{13}(K_2 - K_1) + 2\varrho_{13,12}.$$

En définitive la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau [satisfaisant aux conditions (1)] soit topologiquement applicable sur 4 familles de plans quelconques est que l'on puisse trouver 3 fonctions de u, v, w , soit K_1, K_2, K_3 , satisfaisant aux 3 groupes de relations obtenues en permutant circulairement les indices dans les équations (23)' (25)' et (26)' et aux deux groupes de relations H que nous n'avons pas écrites.

Nous allons maintenant rechercher à quelles conditions supplémentaires doivent satisfaire ces fonctions K_1, K_2, K_3 pour que les 4 familles de plans en question soient des faisceaux. La méthode étant la même qu'au Chapitre III. 1^o Partie, nous l'exposerons le plus brièvement possible.

§ 7. Conditions supplémentaires pour que la première famille du réseau soit topologiquement applicable sur un faisceau de plans.

En choisissant convenablement le système fondamental de solutions des équations (22) [ce qui revient à effectuer une transformation projective dans l'espace $XYZT$] et en multipliant ces solutions $XYZT$ par un facteur convenable σ , on doit pouvoir s'arranger de manière que le faisceau de plans considéré ait pour équation $x = \sigma X = \text{const.}$ tandis qu'on choisit σ

de manière à avoir $\sigma T = t = 1$. La transformation (5) réalisant l'application topologique cherchée est alors de la forme:

$$(28) \quad \begin{cases} x = F[f(u, v, w)], \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \\ t = 1, \end{cases}$$

où $f(u, v, w) = \text{const.}$ représente la première famille de surfaces du réseau.

En somme les conditions nécessaires et suffisantes cherchées s'obtiennent en écrivant qu'on peut déterminer un facteur σ tel que le système d'équations (10) dont les coefficients se déduisent de ceux du système (22) par les relations (13) et (14) admette deux solutions de la forme:

$$(29) \quad x = F[f(u, v, w)] \quad \text{et} \quad t = \text{const.}$$

Pour que le système (10) admette la solution $t = \text{const.}$, il faut que:

$$(30) \quad \beta_{iz} = 0, \quad \beta_{vj} = 0.$$

D'autre part, toute solution $x = F[f(u, v, w)]$ satisfait aux conditions:

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 0$$

et par suite à:

$$x_{13} = 0, \quad x_{12} = 0.$$

Pour que le système (10) admette une telle solution, il faut que l'on ait:

$$(31) \quad a_{13} + \alpha_{21} = 0, \quad a_{12} - \alpha_{31} = 0.$$

En se reportant aux formules (13) et (14), on voit que les conditions (30) et (31) entraînent les suivantes:

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{\sigma_2}{\sigma} = \alpha_{31} - A_{12}, \\ \frac{\sigma_1}{\sigma} = -\alpha_{21} - A_{13}, \end{cases} \quad (32)' \quad \begin{cases} B_{11} - A_{11} \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma} \right)^2 = 0, \\ B_{22} - A_{22} \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{\sigma_{22}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma} \right)^2 = 0, \\ B_{33} - A_{33} \frac{\sigma_3}{\sigma} + \frac{\sigma_{33}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_3}{\sigma} \right)^2 = 0, \end{cases}$$

$$(32)'' \quad \begin{cases} B_{12} - (A_{12} - \alpha_{31}) \frac{\sigma_1}{\sigma} - A_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} = 0, \\ B_{33} - (A_{23} - \alpha_{12}) \frac{\sigma_2}{\sigma} - A_{32} \frac{\sigma_3}{\sigma} + \frac{\sigma_{23}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma^2} = 0, \\ B_{31} - (A_{31} - \alpha_{23}) \frac{\sigma_3}{\sigma} - A_{13} \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{\sigma_{31}}{\sigma} - 2 \frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Si on remplace dans la seconde formule (32)' $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ par la valeur qu'en donne (32), on obtient

$$B_{22} = \mathcal{A}_2 (A_{12} - \alpha_{31}) + (A_{12} - \alpha_{31})^2 + A_{22} (\alpha_{31} - A_{12}),$$

qui n'est autre que la formule (II₂), identiquement vérifiée par hypothèse.

On verrait de même que la seconde équation (32)' et la seconde équation (32)'' sont identiquement vérifiées en vertu des conditions d'intégrabilité.

En remplaçant dans la première équation (32)'' $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ par $\alpha_{31} - A_{12}$ il vient:

$$(33) \quad B_{12} = \mathcal{A}_1 (A_{12} - \alpha_{31}) + A_{21} (\alpha_{31} - A_{12}).$$

Or en vertu des conditions d'intégrabilité (I₁), on a déjà:

$$(34) \quad B_{12} = \mathcal{A}_2 (A_{11}) - \mathcal{A}_1 (A_{12}) - A_{12} A_{21} + \alpha_{31} (A_{31} - A_{11}) - 2 \alpha_{32} A_{12} + \alpha_{31} \alpha_{32}.$$

En égalant ces 2 valeurs, il vient:

$$(35) \quad \boxed{2\mathcal{A}_1(A_{12}) + \mathcal{A}_2(A_{21} + A_{31}) = \alpha_{31}(A_{21} + A_{31}) - 2\alpha_{32}A_{12} + \mathcal{A}_1(\alpha_{31}) + \alpha_{31}\alpha_{32}.$$

De même en remplaçant dans la troisième équation (32)'' $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ par $-\alpha_{21} - A_{13}$ et remarquant que l'on a

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)_3 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma}\right)_1 = -\alpha_{23} \frac{\sigma_3}{\sigma} - \alpha_{21} \frac{\sigma_1}{\sigma},$$

on obtient aisément:

$$B_{31} = \mathcal{A}_1 (\alpha_{21} + A_{13}) - A_{31} (\alpha_{21} + A_{13}).$$

Or les conditions d'intégrabilité (II₁) donnent:

$$B_{31} = \mathcal{A}_3 (A_{11}) - \mathcal{A}_1 (A_{13}) - A_{13} A_{31} + 2 \alpha_{23} A_{13} + \alpha_{21} (A_{11} - A_{31}) + \alpha_{23} \alpha_{31}.$$

En égalant ces deux valeurs de B_{31} , on obtient après réduction:

$$(36) \quad \boxed{2\mathcal{A}_1(A_{13}) + \mathcal{A}_3(A_{21} + A_{31}) = 2\alpha_{23}A_{13} - \alpha_{21}(A_{21} + A_{31}) - \mathcal{A}_1(\alpha_{21}) + \alpha_{13}\alpha_{21}.$$

Inversement d'ailleurs, si l'on suppose réalisées les conditions d'intégrabilité du système (22) ainsi que les 2 conditions (35) et (36), on démontre par un raisonnement analogue à celui qui a été fait au Chapitre III (1^e Partie), que les équations:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma} = \alpha_{31} - A_{12}, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} = -\alpha_{21} - A_{13}, \quad B_{11} - A_{11} \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma} - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 = 0,$$

permettent de trouver un facteur σ tel que le système (10) se déduisant du système (22) par les relations (13) et (14) admette deux solutions de la forme (29). Les conditions (35) et (36) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes que nous nous proposons de chercher dans ce paragraphe.

En remplaçant dans (35) et (36) les A_j par leurs valeurs en fonction de K_1, K_2, K_3 (formules 21), ces relations deviennent:

$$\begin{array}{l} (35)' \quad A_2 (K_3 - K_2) - A_1 (3K_3 + K_1) = \alpha_{31} (K_3 - K_2) + \alpha_{32} (3K_3 + K_1), \\ (36)' \quad A_1 (3K_2 + K_1) + A_3 (K_3 - K_2) = \alpha_{23} (3K_3 + K_1) - \alpha_{21} (K_3 - K_2). \end{array}$$

§ 8. *Conditions nécessaires et suffisantes pour que le réseau proposé soit topologiquement applicable sur 4 faisceaux de plans.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la deuxième et la troisième famille de surfaces du réseau soient applicables sur des faisceaux de plans se déduisent de (35)' et (36)' par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. D'ailleurs, si toutes ces conditions [y compris les conditions d'intégrabilité de (22) et les conditions (1)] sont réalisées, il est clair que la transformation topologique fournie par la résolution du système (22) réalisant l'application du réseau sur 4 familles de plans dont trois sont des faisceaux, la quatrième est aussi un faisceau. En effet d'après la condition $q_1 = 0$, le réseau des droites découpées sur un plan du premier faisceau, par les deux autres faisceaux et la quatrième famille de plans est à configuration hexagonale. Ce réseau de droites se compose de deux faisceaux de droites et d'une troisième famille qui doit être forcément un faisceau. La quatrième famille de plans coupant les 3 premiers faisceaux de plans suivant des faisceaux de droites ne peut être qu'un faisceau de plans.

En résumé la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau proposé soit topologiquement applicable sur 4 faisceaux de plans est que l'on puisse trouver 3 fonctions K_1, K_2, K_3 satisfaisant aux conditions (23)', (25)', (26)', (35)', (36)' et à celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

Nous rappelons que si les conditions (35)' et (36)' sont satisfaites, le groupe de conditions d'intégrabilité H que nous n'avons pas écrit est identiquement vérifié: C'est une pure question de calculs.

§ 9. *Conditions nécessaires et suffisantes pour que deux des faisceaux de plans aient leurs axes dans un même plan.*

En appliquant la méthode déjà utilisée au § 7, on peut aisément trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que, les conditions

du paragraphe précédent étant supposées remplies, les deux premiers faisceaux de plans, par exemple, aient leurs axes dans un même plan.

Il faut et il suffit pour cela qu'on puisse déterminer un facteur σ de manière que le système d'équations (10) admette 3 solutions de la forme:

$$x = x[f_1(u, v, w)], \quad y = y[f_2(u, v, w)], \quad t = 1,$$

$f_1 = \text{const.}$, $f_2 = \text{const.}$ étant les équations des deux premières familles de surfaces du réseau. On démontre sans difficulté qu'il faut et qu'il suffit pour cela d'ajouter aux conditions précédemment trouvées, la condition:

$$K_1 + K_2 + \pi_{12} = 0.$$

D'une manière générale, s'il est possible de trouver 3 fonctions $K_1 K_2 K_3$ satisfaisant aux conditions (23)', (25)', (26)', (35)', (36)' et à celles qui s'en déduisent par permutation circulaire, et si de plus ces 3 fonctions satisfont à l'égalité

$$(37) \quad \boxed{K_i + K_j + \pi_{ij} = 0} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Les axes du $i^{\text{ème}}$ et du $j^{\text{ème}}$ faisceau de plans sont concourants.

On démontre de la même manière, et sans aucune difficulté que la condition nécessaire et suffisante pour que l'axe du faisceau de plans sur lequel est applicable la quatrième famille du réseau rencontre l'axe du faisceau de plans sur lequel est applicable la $i^{\text{ème}}$ famille du réseau ($i = 1, 2, 3$) s'écrit:

$$(38) \quad \boxed{K_j + K_h = \pi_{jh}} \quad j \neq h \neq i.$$

Pour plus de simplicité nous désignerons dorénavant les axes des 4 faisceaux de plans sur lesquels sont supposées applicables les familles du réseau par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Pour que les axes $\Delta_1 \Delta_2$ soient concourants, ainsi que les axes $\Delta_3 \Delta_4$ on voit d'après les conditions (37) et (38) que l'on doit avoir à la fois

$$K_1 + K_2 + \pi_{12} = 0, \quad K_1 + K_2 = \pi_{12},$$

ce qui exige que l'on ait:

$$(39) \quad \pi_{12} = 0, \quad K_1 + K_2 = 0.$$

On devait s'attendre à trouver la condition $\pi_{12} = 0$, d'après sa signification géométrique: Les droites L_{12} d'intersection des plans des deux premiers faisceaux, et les droites L_{34} d'intersection des plans des deux derniers faisceaux, engendrent en effet le faisceau de plans dont l'axe est la droite joignant le point de concours de Δ_1 et Δ_2 , au point de concours de Δ_3 et Δ_4 .

En utilisant toujours le même procédé, on démontre ensuite aisément que les conditions (39) étant réalisées, si l'on a de plus $K_1 = K_2 = 0$, le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 est situé dans le plan déterminé par Δ_3 et Δ_4 . Si au contraire les conditions (39) étant réalisées, on a de plus $K_3 = 0$, c'est le point d'intersection de Δ_3 et Δ_4 qui se trouve dans le plan déterminé par Δ_1 et Δ_2 . Enfin si l'on a à la fois $\pi_{12} = 0$ et $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ le point de concours de Δ_1 et Δ_2 est dans le plan (Δ_3, Δ_4) et inversement le point de concours de (Δ_3, Δ_4) est dans le plan (Δ_1, Δ_2) .

§ 10. Calcul des fonctions $K_1 K_2 K_3$.

Revenons aux conditions (23)' (25)' (26)' (35)' (36)' trouvées précédemment. Nous allons voir qu'en les combinant on peut en déduire aisément les valeurs de K_1, K_2, K_3 en fonction des invariants du réseau.

Les relations (35)' et (25)' donnent:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_2 K_3 - 3 \mathcal{A}_1 K_3 - (\mathcal{I}_1 K_1 + \mathcal{I}_2 K_2) = \alpha_{31} (K_3 - K_2) + \alpha_{32} (3 K_3 + K_1), \\ 3 (\mathcal{A}_2 K_2 + \mathcal{A}_1 K_1) + \mathcal{A}_2 K_3 + \mathcal{A}_1 K_3 = 3 (\alpha_{31} K_2 - \alpha_{32} K_1) + (\alpha_{31} - \alpha_{32}) K_3. \end{cases}$$

On en tire:

$$(40) \quad \mathcal{I}_2 K_3 - 2 \mathcal{I}_1 K_3 = \alpha_{31} K_3 + 2 \alpha_{32} K_3.$$

De même la relation (25)' et une relation se déduisant par permutation circulaire de (35)' donnent:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_2 K_2 + \mathcal{I}_1 K_1 + 3 \mathcal{A}_2 K_3 - \mathcal{A}_1 K_3 = \alpha_{31} (3 K_3 + K_2) - \alpha_{32} (K_1 - K_3), \\ 3 (\mathcal{A}_2 K_2 + \mathcal{A}_1 K_1) + \mathcal{A}_2 K_3 + \mathcal{I}_1 K_3 = 3 (\alpha_{31} K_2 - \alpha_{32} K_1) + (\alpha_{31} - \alpha_{32}) K_3. \end{cases}$$

D'où l'on déduit:

$$(41) \quad 2 \mathcal{A}_2 K_3 - \mathcal{A}_1 K_3 = 2 \alpha_{31} K_3 + \alpha_{32} K_3.$$

De (40) et (41) on déduit:

$$(42) \quad \mathcal{A}_1 K_3 = -\alpha_{32} K_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 K_3 = \alpha_{31} K_3,$$

et en portant ces valeurs dans (25)' il vient:

$$(43) \quad \mathcal{A}_2 K_2 + \mathcal{A}_1 K_1 = \alpha_{31} K_2 - \alpha_{32} K_1.$$

On voit qu'en définitive les fonctions $K_1 K_2 K_3$ sont assujetties aux relations suivantes que l'on déduit de (42) et de (43) par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

$$(44) \quad \boxed{\begin{cases} \mathcal{A}_2 K_1 = -\alpha_{13} K_1, & \mathcal{A}_3 K_2 = -\alpha_{21} K_2, & \mathcal{A}_1 K_3 = -\alpha_{32} K_3, \\ \mathcal{A}_3 K_1 = \alpha_{12} K_1, & \mathcal{A}_1 K_2 = \alpha_{23} K_2, & \mathcal{A}_2 K_3 = \alpha_{31} K_3, \\ \mathcal{I}_1 K_1 + \mathcal{A}_3 K_3 = \alpha_{23} K_1 - \alpha_{21} K_3, \\ \mathcal{A}_2 K_2 + \mathcal{A}_1 K_1 = \alpha_{31} K_2 - \alpha_{32} K_1, \\ \mathcal{A}_3 K_3 + \mathcal{A}_2 K_2 = \alpha_{12} K_3 - \alpha_{13} K_2. \end{cases}}$$

Ces relations étant satisfaites, il en est de même des relations (25)' (35)' et (36)'. D'autre part, en les portant dans (23)' et tenant compte des relations $\pi_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}$, il vient:

$$K_2^2 - K_3^2 = 2A_1(\pi_{23}) - (\alpha_{23} + \alpha_{32})\pi_{23} = 2A_{23}(\pi_{23}) - (\alpha_{23} + \alpha_{32})\pi_{23},$$

ou encore:

$$K_2^2 - K_3^2 = \varrho_{23,23} - \varrho_{32,23} = 2\varrho_{23,23} + \pi_{23}^2.$$

Par permutation circulaire on obtient ainsi:

$$(45) \quad \begin{aligned} K_1^2 - K_2^2 &= 2\varrho_{12,12} + \pi_{12}^2, & K_2^2 - K_3^2 &= 2\varrho_{23,23} + \pi_{23}^2, \\ K_3^2 - K_1^2 &= 2\varrho_{31,31} + \pi_{31}^2. \end{aligned}$$

De même, en portant les expressions (44) dans la relation (36)' on obtient:

$$(46) \quad \boxed{\begin{aligned} (K_1 + K_2)(K_1 + K_3) &= -2\varrho_{13,12} - \pi_{13}\pi_{12}, \\ (K_2 + K_3)(K_2 + K_1) &= -2\varrho_{21,23} - \pi_{21}\pi_{23}, \\ (K_3 + K_1)(K_3 + K_2) &= -2\varrho_{32,31} - \pi_{32}\pi_{31}. \end{aligned}}$$

En retranchant la première équation (46) de la dernière, il vient:

$$(47) \quad K_3^2 - K_1^2 = 2\varrho_{13,12} - 2\varrho_{32,31} + \pi_{12}\pi_{13} - \pi_{31}\pi_{32}.$$

Or on a, en vertu des formules (45) du chapitre I:

$$\varrho_{32,31} - \varrho_{31,32} = \varrho_3 = 0,$$

et en vertu des formules (40) du même chapitre:

$$\varrho_{31,32} = \varrho_{13,23} - \pi_{13}\pi_{23}.$$

On en conclut que (47) prend la forme:

$$K_3^2 - K_2^2 = 2\varrho_{13,12} + 2\varrho_{13,23} + \pi_{13}(\pi_{12} + \pi_{23}).$$

Mais on a:

$$\varrho_{13,12} + \varrho_{13,23} = -\varrho_{13,13} \quad \text{et} \quad \pi_{12} + \pi_{23} = -\pi_{13}.$$

D'où:

$$K_3^2 - K_2^2 = -2\varrho_{13,13} - \pi_{13}^2 = 2\varrho_{31,13} + \pi_{13}^2,$$

qui n'est autre que l'une des formules (45). Ces formules (45) sont donc des conséquences directes des relations (46) combinées avec les relations $\varrho_i = 0$.

On pourrait penser qu'en écrivant les conditions d'intégrabilité des équations (44) on obtiendrait de nouvelles relations pour les K_i . Les conditions d'intégrabilité donnent:

$$(48) \quad (2\varrho_{12,13} + \pi_{12}\pi_{13})(K_2 + K_3) = (2\varrho_{23,21} + \pi_{23}\pi_{21})(K_3 + K_1)$$

et les analogues, conditions qui découlent immédiatement des relations (46).

Nous poserons pour simplifier l'écriture:

$$2\varrho_{ij,ik} + \pi_{ij}\pi_{ik} = -\mu_i \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k.$$

1°) Cas où les expressions μ_i sont toutes différentes de zéro.

Si tous les μ_i sont $\neq 0$, on déduit des relations (46) les relations suivantes:

$$(49) \quad \boxed{(K_i + K_j)^2 = \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_k} \quad i \neq j \neq k.}$$

On en conclut qu'au point de vue de la réalité, la transformation cherchée n'est possible que si l'on a:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 > 0.$$

Les relations (49) permettent alors de calculer K_1, K_2, K_3 en fonction des invariants μ_1, μ_2, μ_3 et en portant les expressions ainsi obtenues dans les égalités (44) on obtiendra en fonction des invariants relatifs $\varrho_{ij,ik}$ et π_{ij} des conditions qui adjointes aux conditions (1) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$ seront nécessaires et suffisantes pour que le réseau proposé soit topologiquement applicable sur 4 faisceaux de plans.

On voit d'après (49) qu'on pourra choisir pour $K_1 + K_2$ l'une quelconque des deux valeurs $\pm \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3}}$, après quoi les équations (46) détermineront $K_1 + K_3$ et $K_2 + K_3$ sans ambiguïté, et par suite K_1, K_2, K_3 . Mais on voit immédiatement que si K_1, K_2, K_3 sont les solutions obtenues en prenant le signe + devant $\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3}}$, les solutions du système (46) obtenues en prenant le signe - seront $-K_1, -K_2, -K_3$ et fourniront quand on les porte dans (44) les mêmes conditions. Les conditions nécessaires et suffisantes trouvées sont donc déterminées d'une manière unique.

Inversement étant donné un réseau pour lequel ces conditions sont remplies, il lui correspondra deux systèmes de valeurs opposées pour K_1, K_2 et K_3 , qui fourniront par suite deux systèmes distincts d'équations aux dérivées partielles (22). Chacun de ces systèmes définira à une transformation projective près, un réseau formé de 4 faisceaux de plans sur lequel le réseau considéré est applicable. Par suite, aux trans-

formations projectives près, le problème admet deux solutions. Il en résulte en particulier qu'il existe une transformation non projective transformant 4 faisceaux de plans (tels que les expressions μ_i soient $\neq 0$) en 4 faisceaux de plans.

REMARQUE. Les conditions que nous venons d'étudier étant réalisées pour un réseau dont les expressions μ_i sont différentes de zéro, il peut arriver que les axes des faisceaux de plans sur lesquels le réseau proposé est applicable occupent des positions particulières.

Supposons, par exemple, que les équations (46) admettent un premier système de solutions K_1, K_2, K_3 vérifiant la relation:

$$(50) \quad K_1 + K_2 + \pi_{12} = 0.$$

A ce système de solutions correspond un réseau formé de 4 faisceaux de plans tels que les axes Δ_1 et Δ_2 soient concourants, ainsi que cela résulte des considérations développées au § 9.

Le second système de solutions des équations (46) se déduit du premier par changement de signe, et vérifie par suite la relation:

$$(51) \quad K_1 + K_2 = \pi_{12}.$$

Il lui correspond des faisceaux de plans tels que les axes Δ_3 et Δ_4 soient concourants.

On voit ainsi que si dans l'un des deux systèmes de faisceaux de plans sur lesquels le réseau proposé est applicable, deux des axes Δ_i, Δ_j sont concourants, dans l'autre système de faisceaux de plans les deux autres axes Δ_k, Δ_h sont aussi concourants ($i \neq j \neq k \neq h, ijkh = 1, 2, 3, 4$).

En particulier si dans le premier système les axes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ forment un triangle, dans le second système l'axe Δ_4 rencontre les 3 axes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Dans ce dernier cas les conditions nécessaires et suffisantes d'applicabilité prennent une forme très simple. Le système (46) doit en effet admettre alors un système de solutions K_1, K_2, K_3 tel que:

$$K_1 + K_2 + \pi_{12} = 0, \quad K_2 + K_3 + \pi_{23} = 0, \quad K_3 + K_1 + \pi_{31} = 0;$$

ce qui donne immédiatement:

$$(52) \quad K_1 = \pi_{23}, \quad K_2 = \pi_{31}, \quad K_3 = \pi_{12}.$$

En portant ces valeurs dans les équations (46) et (44) on trouve aisément les conditions suivantes¹⁾:

¹⁾ Ces relations sont un cas particulier des suivantes exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les 3 premières familles d'un réseau étant applicables sur 3 faisceaux de plans dont les axes sont dans un même plan, la 4^e soit applicable sur une famille de plans quelconque:

$$\varrho_1 = -\varrho_{21,23} = \varrho_{13,23}, \quad \varrho_2 = -\varrho_{21,13} = \varrho_{23,13}, \quad \varrho_3 = -\varrho_{31,12} = \varrho_{32,12}.$$

$$(53) \quad \begin{array}{l} \varrho_{13,23} = 0, \quad \varrho_{21,31} = 0, \quad \varrho_{32,12} = 0, \\ \varrho_{12,23} = 0, \quad \varrho_{23,31} = 0, \quad \varrho_{13,23} = 0, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0, \end{array}$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que le réseau soit topologiquement applicable sur un système de 4 faisceaux de plans dont les axes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ forment un triangle, ou bien rencontrent l'axe Δ_4 .

2°) Réseau pour lesquels une des expressions μ_i est nulle.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\mu_1 = 0.$$

La première équation (46) donne alors soit $K_1 + K_2 = 0$, soit $K_1 + K_3 = 0$. Dans un cas comme dans l'autre les équations (46) montrent que une autre au moins des quantités μ_i doit être nulle. Le problème de l'application sur 4 faisceaux de plans n'est donc possible que si deux au moins des expressions μ_i sont nulles.

a) Supposons par exemple qu'un réseau satisfasse aux conditions:

$$(54) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 \neq 0.$$

Les deux premières équations (46) donnent alors:

$$(55) \quad K_1 + K_2 = 0.$$

On en déduit:

$$A_3(K_1 + K_2) = 0,$$

et en se reportant aux relations (44) on voit qu'on est ainsi conduit à la relation:

$$\alpha_{12} K_1 - \alpha_{21} K_2 = 0,$$

ou en vertu de (55)

$$\pi_{12} K_1 = 0.$$

On en déduit soit $\pi_{12} = 0$, soit $K_1 = 0$. Or si $K_1 = 0$ on tire de (55) $K_2 = 0$. La dernière catégorie d'équations (44) dans laquelle on introduit ces 2 valeurs nulles de K_1 et K_2 donnerait alors:

$$A_3 K_3 = -\alpha_{21} K_3, \quad A_3 K_3 = \alpha_{12} K_3. \quad \text{D'où} \quad \pi_{12} K_3 = 0.$$

Or K_3 ne peut pas être nul, car on déduirait de la troisième équation (46) $\mu_3 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse (54). Par suite le réseau proposé doit satisfaire à la condition

$$(56) \quad \pi_{12} = 0,$$

pour que le problème soit possible.

La troisième équation (46) donne alors en tenant compte de (55):

$$(57) \quad K_3^2 - K_2^2 = \mu_3.$$

D'autre part $K_1 K_2 K_3$ doivent satisfaire aux équations (44) qui, en tenant compte de (55), se réduisent à:

$$(58) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 K_1 = \alpha_{23} K_1, \\ \mathcal{A}_2 K_1 = -\alpha_{13} K_1, \\ \mathcal{A}_3 K_1 = \alpha_{12} K_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_1 K_3 = -\alpha_{32} K_3, \\ \mathcal{A}_2 K_3 = \alpha_{31} K_3, \\ \mathcal{A}_3 K_3 = \alpha_{12} K_3. \end{cases}$$

En appliquant l'opérateur \mathcal{A}_1 aux deux membres de (57) et tenant compte de (58) il vient:

$$(59) \quad 2\alpha_{32} K_3^2 + 2\alpha_{23} K_1^2 = -\mathcal{A}_1(\mu_3).$$

On peut supposer $\pi_{23} \neq 0$ sans quoi le réseau serait à configuration octogonale. Les équations (57) et (59) permettent alors de calculer K_1^2 et K_3^2 .

1°) Si aucune de ces 2 quantités n'est nulle, la résolution de ce système conduit à 2 valeurs opposées pour K_1 et 2 valeurs opposées pour K_3 . En les combinant deux à deux, on obtient ainsi 4 solutions qui portées dans les équations (58) donnent les mêmes *conditions nécessaires et suffisantes cherchées*.

On voit donc que si le problème est possible, il admet en général 4 solutions et d'après ce qui a été dit au § 9 on constate que pour chacun des 4 réseaux de plans sur lequel le réseau proposé est applicable, les axes $\Delta_1 \Delta_2$ sont concourants, ainsi que les axes $\Delta_3 \Delta_4$.

2°) Si dans la résolution du système (57), (59) l'une des deux quantités K_3 ou K_1 est nulle, le nombre de solutions du problème se réduit à deux. Le réseau proposé n'est plus applicable que sur 2 systèmes de 4 faisceaux de plans.

Si $K_3 = 0$, pour chacun de ces systèmes le point d'intersection de Δ_3 et Δ_4 se trouve dans le plan déterminé par Δ_1 et Δ_2 qui sont aussi concourants.

Si $K_1 = 0$ on a aussi $K_2 = 0$, les axes Δ_1 et Δ_2 sont concourants de même que Δ_3 et Δ_4 , le point de concours de $\Delta_1 \Delta_2$ étant dans le plan (Δ_3, Δ_4).

b) *Supposons que le réseau satisfasse aux conditions $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$.*

Les équations (46) montrent alors que deux des quantités $K_i + K_j$ doivent être nulles. Supposons par exemple que l'on ait:

$$(60) \quad K_1 + K_2 = 0, \quad K_1 + K_3 = 0.$$

On en déduirait:

$$\mathcal{A}_3(K_1 + K_2) = 0, \quad \mathcal{A}_2(K_1 + K_3) = 0,$$

et en tenant compte des relations (44) et (60)

$$\pi_{12} K_1 = 0, \quad \pi_{13} K_1 = 0.$$

Comme on laisse de côté le cas $\pi_{12} = \pi_{13} = 0$ où le réseau aurait la configuration octogonale, on en déduit, $K_1 = 0$, d'où d'après (60):

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0.$$

Les conditions (44) et (46) sont alors identiquement satisfaites et le problème admet une seule solution.

Les réseaux de cette catégorie sont caractérisés par les relations

$$(61) \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.$$

Les premières s'écrivent:

$$2 \varrho_{13,12} + \pi_{12} \pi_{13} = 0, \quad 2 \varrho_{21,23} + \pi_{21} \pi_{23} = 0, \quad 2 \varrho_{31,32} + \pi_{31} \pi_{32} = 0.$$

On en déduit:

$$\varrho_{13,23} = -\varrho_{31,32} - \pi_{31} \pi_{32} = -\frac{1}{2} \pi_{31}, \quad \pi_{32}.$$

D'une manière générale les conditions (61) sont équivalentes à

$$(62) \quad \boxed{\varrho_i = 0, \quad \varrho_{ij,hk} = -\frac{1}{2} \pi_{ij} \pi_{hk}.}$$

1°) *Supposons tout d'abord que tous les π_{ij} soient $\neq 0$.*

De (62) on tire:

$$\frac{1}{\pi_{ij} \pi_{\alpha\beta}} \varrho_{ij, \alpha\beta} = \frac{1}{\pi_{ij} \pi_{\gamma\delta}} \varrho_{ij, \gamma\delta} = \varrho'_{ij}.$$

D'où

$$\pi_{\gamma\delta} A_{ij}(\pi_{\alpha\beta}) = \pi_{\alpha\beta} A_{ij}(\pi_{\gamma\delta}),$$

ou

$$A_{ij} \left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \right) = 0.$$

Ce qui montre que l'invariant absolu $\pi = \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}}$ est constant.

D'ailleurs les conditions (62) sont équivalentes à:

$$(63) \quad \boxed{\pi = \text{const.}, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.}$$

En effet de la première égalité (63) on remonte à:

$$\frac{1}{\pi_{ij} \pi_{\alpha\beta}} \varrho_{ij, \alpha\beta} = \frac{1}{\pi_{ij} \pi_{\gamma\delta}} \varrho_{ij, \gamma\delta} = \varrho'_{ij}.$$

D'autre part on a:

$$(64) \quad \varrho'_{ij} + \varrho'_{ji} = \frac{1}{\pi_{ij} \pi_{\alpha\beta}} (\varrho_{ij, \alpha\beta} + \varrho_{ji, \alpha\beta}) = -1.$$

Enfin la deuxième série d'égalités (63) donne:

$$\frac{1}{\pi_{ij}\pi_{ik}} q_i = \frac{1}{\pi_{ij}\pi_{ik}} (q_{ij,ik} - q_{ik,ij}) = 0, \text{ ou } q'_{ij} = q'_{ik} = q'_i.$$

L'égalité (64) devient:

$$q'_i + q'_j = -1.$$

Et elle est satisfaite pour $i, j = 1, 2, 3$. On en conclut que $q'_1 = q'_2 = q'_3 = -\frac{1}{2}$ et par suite:

$$q_{ij,hk} = -\frac{1}{2} \pi_{ij}\pi_{hk}.$$

Les relations (62) et (63) sont donc bien équivalentes. Nous retrouverons ces réseaux au chapitre suivant et nous en donnerons alors une interprétation géométrique simple.

Remarquons simplement, pour l'instant, que les conditions (63) étant réalisées, les équations (46) et (44) admettent un système unique de solutions toutes nulles $K_1 = K_2 = K_3 = 0$. Les 4 faisceaux de plans sur lesquels sont applicables les 4 familles de surfaces du réseau sont donc parfaitement déterminées, aux transformations projectives près. On en conclut en particulier que tout réseau de 4 faisceaux de plans de l'espèce considérée n'est transformable en un réseau de même nature que par des transformations projectives.

2°) *Supposons maintenant que l'un des π_i soit nul.*

Par exemple soit $\pi_{12} = 0$. Le réseau proposé sera topologiquement applicable sur 4 faisceaux de plans tels que les axes $\Delta_1 \Delta_2$ soient concourants ainsi que les axes $\Delta_3 \Delta_1$, le point de concours des axes $\Delta_1 \Delta_2$ étant dans le plan $\Delta_3 \Delta_1$ et le point de concours des axes $\Delta_3 \Delta_1$ étant dans le plan $\Delta_1 \Delta_2$. C'est ce qui résulte de ce qui a été dit à la fin du § 9. Les conditions nécessaires et suffisantes (62) se réduisent alors à

$$(65) \quad \pi_{12} = 0, \quad q_i = 0, \quad 2q_{31,31} + \pi_{31}^2 = 0,$$

et l'application topologique est déterminée, aux transformations projectives près, d'une seule manière.

CHAPITRE IV.

Réseaux de surfaces admettant un groupe continu transitif de transformations topologiques.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de rechercher tous les réseaux de surfaces qui «admettent» un groupe transitif de transformations topologiques.

Il est clair tout d'abord que tout réseau de surfaces à configuration octogonale jouit de cette propriété: Il suffit de songer à l'applicabilité d'un tel réseau sur un réseau formé par 4 familles de plans parallèles

pour voir qu'il admet un groupe transitif à 4 paramètres. Mais nous allons voir que, contrairement à ce qui se passe dans le plan, il en existe d'autres que nous allons déterminer.

Pour cela nous remarquons que si un réseau de surfaces admet un groupe continu transitif de transformations topologiques, tous les invariants absolus de ce réseau doivent être constants, et laissant de côté le cas déjà élucidé des réseaux à configuration octogonale, nous distinguerons deux cas.

I. *Aucun des invariants π_{ij} n'est nul.*

Il existe alors des opérateurs différentiels invariants:

$$(1) \quad \mathcal{A}'_{ij} = \frac{1}{\pi_{ij}} \mathcal{A}_{ij}$$

satisfaisant aux conditions: (2° Partie, Chapitre I)

$$(2) \quad \mathcal{A}'_{ij} \mathcal{A}'_{ik} - \mathcal{A}'_{ik} \mathcal{A}'_{ij} = \varrho'_{ik,ij} \mathcal{A}'_{ij} - \varrho'_{ij,ik} \mathcal{A}'_{ik},$$

avec:

$$(3) \quad \varrho'_{ij,hk} = \frac{1}{\pi_{ij} \pi_{hk}} \varrho_{ij,hk} = \mathcal{A}'_{ij} (\log \pi_{hk}) - \frac{\alpha_{ij}}{\pi_{ij}}.$$

Une première condition pour que le réseau admette un groupe transitif de transformations est que l'invariant absolu $\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}}$ soit constant. On doit donc avoir:

$$(4) \quad \mathcal{A}'_{ij} \left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \right) = 0.$$

Or on peut écrire: .

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}'_{ij} \left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \right) &= \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \mathcal{A}'_{ij} (\log \pi_{\alpha\beta}) - \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} \mathcal{A}'_{ij} (\log \pi_{\gamma\delta}) \\ &= \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\pi_{\gamma\delta}} [\varrho'_{ij,\alpha\beta} - \varrho'_{ij,\gamma\delta}], \end{aligned}$$

de telle sorte que l'égalité (4) fournit les conditions suivantes:

$$(6) \quad \varrho'_{ij,\alpha\beta} = \varrho'_{ij,\gamma\delta},$$

quels que soient $\alpha\beta\gamma\delta$. Nous poserons:

$$(7) \quad \varrho'_{ij,\alpha\beta} = \varrho'_{ij},$$

et remarquerons qu'en vertu des formules (40) du chapitre (I) on a:

$$(8) \quad \varrho'_{ij} + \varrho'_{ji} = -1.$$

Avec ces notations les relations (2) se réduisent à:

$$(9) \quad \mathcal{A}'_{ij} \mathcal{A}'_{ik} - \mathcal{A}'_{ik} \mathcal{A}'_{ij} = \varrho'_{ik} \mathcal{A}'_{ij} - \varrho'_{ij} \mathcal{A}'_{ik}.$$

Toute transformation infinitésimale peut se mettre sous la forme:

$$(10) \quad Uf = \beta_{12} A'_{12} f + \beta_{23} A'_{23} f + \beta_{31} A'_{31} f.$$

Pour que cette transformation infinitésimale laisse le réseau invariant, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(11) \quad (A'_{ij}, U) = \lambda_{ij} A'_{ij}.$$

En donnant à (i, j) successivement les valeurs $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, et tenant compte des relations (9), on obtient ainsi les équations suivantes:

$$(12) \quad \begin{aligned} A'_{12} \beta_{23} &= -\varrho'_{21} \beta_{23}, & A'_{23} \beta_{31} &= -\varrho'_{32} \beta_{31}, & A'_{31} \beta_{12} &= -\varrho'_{13} \beta_{12}, \\ A'_{12} \beta_{31} &= \varrho'_{12} \beta_{31}, & A'_{23} \beta_{12} &= \varrho'_{23} \beta_{12}, & A'_{31} \beta_{23} &= \varrho'_{31} \beta_{23}, \end{aligned}$$

et l'on a alors:

$$(13) \quad \begin{cases} (A'_{12} U) = (A'_{12} \beta_{12} + \varrho'_{23} \beta_{23} - \varrho'_{13} \beta_{31}) A'_{12}, \\ (A'_{23} U) = (A'_{23} \beta_{23} + \varrho'_{31} \beta_{31} - \varrho'_{21} \beta_{12}) A'_{23}, \\ (A'_{31} U) = (A'_{31} \beta_{31} + \varrho'_{12} \beta_{12} - \varrho'_{32} \beta_{23}) A'_{31}. \end{cases}$$

D'autre part, on a par exemple:

$$A'_{14} = \frac{1}{\pi_{14}} A_{14} = -\frac{1}{\pi_{14}} (A_{12} + A_{13}) = -\frac{\pi_{12}}{\pi_{14}} A'_{12} - \frac{\pi_{13}}{\pi_{14}} A'_{13}.$$

Comme le rapport de deux invariants π_{ij} est constant, on en conclut:

$$(14) \quad (A'_{14}, U) = -\frac{\pi_{12}}{\pi_{14}} (A'_{12}, U) - \frac{\pi_{13}}{\pi_{14}} (A'_{13}, U).$$

En tenant compte des relations (12) et (13) on trouve ainsi aisément que les conditions $(A'_{i4}, U) = \lambda_{i4} A'_{i4}$ fournissent les conditions suivantes:

$$(15) \quad \begin{aligned} A'_{12} \beta_{12} + \varrho'_{23} \beta_{23} - \varrho'_{13} \beta_{31} &= A'_{23} \beta_{23} + \varrho'_{31} \beta_{31} - \varrho'_{21} \beta_{12} \\ &= A'_{31} \beta_{31} + \varrho'_{12} \beta_{12} - \varrho'_{32} \beta_{23}. \end{aligned}$$

Nous poserons:

$$(16) \quad A'_{12} \beta_{12} = \varrho'_{12} \beta_{12} + C_{12}, \quad A'_{23} \beta_{23} = \varrho'_{23} \beta_{23} + C_{23}, \quad A'_{31} \beta_{31} = \varrho'_{31} \beta_{31} + C_{31}.$$

Les relations (15) montrent alors que les quantités C_{12} , C_{23} , C_{31} sont liées par les relations:

$$(17) \quad \boxed{C_{12} + \beta_{31} = C_{23} + \beta_{13} = C_{31} + \beta_{23}.}$$

En définitive on voit que l'on obtiendra les transformations infinitésimales laissant le réseau invariant, en recherchant les solutions β_{12} , β_{23} , β_{31} , C_{12} , C_{23} , C_{31} du système d'équations (17) et (18) qui suit:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}'_{12} \beta_{12} = \varrho'_{12} \beta_{12} + C_{12}, \\ \mathcal{A}'_{23} \beta_{12} = \varrho'_{23} \beta_{12}, \\ \mathcal{A}'_{31} \beta_{12} = -\varrho'_{13} \beta_{12}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}'_{23} \beta_{23} = \varrho'_{23} \beta_{23} + C_{23}, \\ \mathcal{A}'_{31} \beta_{23} = \varrho'_{31} \beta_{23}, \\ \mathcal{A}'_{12} \beta_{23} = -\varrho'_{21} \beta_{23}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}'_{31} \beta_{31} = \varrho'_{31} \beta_{31} + C_{31}, \\ \mathcal{A}'_{12} \beta_{31} = \varrho'_{12} \beta_{31}, \\ \mathcal{A}'_{23} \beta_{31} = -\varrho'_{32} \beta_{31}. \end{array} \right.$$

Si le réseau admet un groupe continu transitif de transformations les invariants absolus ϱ'_{ij} doivent être constants. C'est ce que nous supposons dans ce qui suit. D'autre part les coefficients β_{ij} ne peuvent pas être reliés par une relation finie.

Ecrivons alors les conditions d'intégrabilité du système (18) en appliquant les formules (9). La condition:

$$\mathcal{A}'_{31} \mathcal{A}'_{32} - \mathcal{A}'_{32} \mathcal{A}'_{31} = \varrho'_{32} \mathcal{A}'_{31} - \varrho'_{31} \mathcal{A}'_{32},$$

appliquée aux 2 dernières équations du premier groupe donne en tenant compte de la constance des ϱ'_{ij} la relation:

$$(19) \quad (\varrho'_{31} \varrho'_{23} - \varrho'_{32} \varrho'_{13}) \beta_{12} = 0.$$

Or pour que le groupe soit transitif, β_{12} doit être $\neq 0$. On en conclut que l'on a :

$$\varrho'_{31} \varrho'_{23} = \varrho'_{32} \varrho'_{13}.$$

En procédant de même pour les autres conditions d'intégrabilité, on trouve ainsi les conditions suivantes:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho'_{31} \varrho'_{23} = \varrho'_{32} \varrho'_{13}, \\ \mathcal{A}'_{23} C_{12} = -\varrho'_{23} (\varrho'_{12} + \varrho'_{21}) \beta_{12}, \\ \mathcal{A}'_{13} C_{12} = 0 \end{array} \right.$$

et celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

En vertu des relations (8) on a :

$$(21) \quad \varrho'_{13} + \varrho'_{31} = -1, \quad \varrho'_{23} + \varrho'_{32} = -1$$

et en remplaçant dans la première relation (20), ϱ'_{13} et ϱ'_{32} par leurs valeurs tirées de (21) on obtient:

$$(22) \quad \varrho'_{31} + \varrho'_{23} + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \varrho'_{31} = -1 - \varrho'_{23} = \varrho'_{32}.$$

Il est clair qu'on doit avoir de même les relations se déduisant des précédentes par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. On en déduit sans peine:

$$(23) \quad \varrho'_{12} = \varrho'_{21} = \varrho'_{23} = \varrho'_{32} = \varrho'_{31} = \varrho'_{13} = -\frac{1}{2}.$$

Les autres relations (20) donnent alors:

$$(24) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{31} C_{12} = 0, \\ \mathcal{A}'_{23} C_{12} = -\frac{1}{2} \beta_{12}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{12} C_{23} = 0, \\ \mathcal{A}'_{31} C_{23} = -\frac{1}{2} \beta_{23}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{23} C_{31} = 0, \\ \mathcal{A}'_{12} C_{31} = -\frac{1}{2} \beta_{31}. \end{cases}$$

Mais les relations (17) permettent d'écrire, par exemple:

$$\mathcal{A}'_{23} (C_{12} + \beta_{31}) = \mathcal{A}'_{23} (C_{31} + \beta_{23}).$$

D'où:

$$\mathcal{A}'_{23} \beta_{31} = \mathcal{A}'_{23} \beta_{23},$$

et en tenant compte des équations (18), il vient:

$$(25) \quad \begin{cases} C_{23} = \frac{1}{2} [\beta_{23} + \beta_{31} - \beta_{12}], \\ C_{31} = \frac{1}{2} [\beta_{31} + \beta_{12} - \beta_{23}], \\ C_{12} = \frac{1}{2} [\beta_{12} + \beta_{23} - \beta_{31}]. \end{cases}$$

Ces 3 quantités vérifient identiquement les relations (17). Si on les porte dans les équations (20) celles-ci deviennent en tenant compte des conditions (23):

$$(26) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{12} \beta_{12} = \frac{1}{2} (\beta_{23} - \beta_{31}), \\ \mathcal{A}'_{23} \beta_{12} = -\frac{1}{2} \beta_{12}, \\ \mathcal{A}'_{31} \beta_{12} = \frac{1}{2} \beta_{12}, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. On obtient ainsi pour les β_{12} un système d'équations de définition qui est complètement intégrable. Ce système ne contenant aucune relation finie entre les β_{ij} , définira un groupe continu transitif à 3 paramètres laissant invariant le réseau proposé.

En résumé nous obtenons le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau dont tous les π_{ij} sont $\neq 0$ admette un groupe continu transitif de transformations topologiques est que tous ses invariants absolus du second ordre $\varrho'_{ij,kl}$ soient égaux à $-\frac{1}{2}$.

On a vu au § 10 du chapitre précédent que ces conditions équivalent aux suivantes: L'invariant absolu π est constant et tous les invariants relatifs ϱ_i sont nuls.

$$(27) \quad \pi = \text{const.}, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.$$

On retrouve donc ici les réseaux considérés au § 10 du Chapitre III, ce qui nous permettra d'en donner une interprétation géométrique simple.

Nous avons vu en effet au chapitre précédent qu'un réseau satisfaisant aux conditions (27) est topologiquement applicable sur un réseau formé par 4 faisceaux de plans. Ce dernier doit donc admettre lui aussi un groupe continu de transformations topologiques. Or, nous avons fait remarquer au même endroit que ces transformations topologiques ne peuvent être que des transformations projectives. Celles-ci laissant invariants les 4 faisceaux de plans, doivent laisser invariants les 4 axes de ces faisceaux et par suite les quadriques formées par les droites qui s'appuient sur 3 de ces axes. Elles ne pourront constituer un groupe transitif que si les axes des 4 faisceaux de plans sont 4 génératrices d'un même système d'une quadrique. Il est clair qu'alors le sous-groupe du groupe projectif qui laisse invariante cette quadrique et les génératrices du système auquel appartiennent les 4 axes des faisceaux satisfait bien aux conditions du problème.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les réseaux dont tous les invariants π_{ij} sont $\neq 0$ et qui de plus satisfont aux conditions

$$(28) \quad \pi = \text{const.}, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$$

sont caractérisés par la propriété d'être topologiquement applicables sur un réseau formé par 4 faisceaux de plans dont les axes sont 4 génératrices d'un même système d'une quadrique. Ils admettent un groupe transitif à 3 paramètres de transformations topologiques.

On peut aisément vérifier qu'un tel réseau satisfait bien aux conditions (28) en mettant les 4 faisceaux de plans sous la forme :

$$x = u, \quad z = vy, \quad \frac{x - \alpha y}{1 - \alpha z} = w, \quad \frac{x - \beta y}{1 - \beta z} = \text{const.},$$

ce qui est toujours possible par un choix convenable du système de coordonnées. La représentation canonique du réseau s'obtient alors en prenant pour fonction définissant la quatrième famille :

$$(29) \quad f(u, v, w) = \frac{u(1 - vw) - k(u - w)}{1 - vw - kv(u - w)},$$

où k représente le rapport anharmonique des 4 génératrices de la quadrique prises pour axes des 4 faisceaux de plans. On vérifie aisément sur (29) les conditions (28).

On remarquera en particulier que l'invariant π du réseau n'est autre que le rapport anharmonique k .

II. Un des invariants π_{ij} est nul.

Supposons par exemple :

$$(30) \quad \pi_{12} = 0, \quad \text{et posons:} \quad \pi_{13} = -\pi_{23} = \pi \neq 0.$$

Nous considérerons alors les opérateurs invariants \mathcal{A}'_{ij} et les invariants ϱ'_{ij} définis par les relations:

$$(31) \quad \mathcal{A}'_{ij} = \frac{1}{\pi} \mathcal{A}_{ij}, \quad \varrho'_{ij} = \mathcal{A}'_{ij} (\log \pi) - \frac{\alpha_{ij}}{\pi} = \frac{1}{\pi^2} \varrho'_{ij, 13}.$$

On vérifiera sans peine les relations:

$$\mathcal{A}'_{ij} \mathcal{A}'_{ik} - \mathcal{A}'_{ik} \mathcal{A}'_{ij} = \varrho'_{ik} \mathcal{A}'_{ij} - \varrho'_{ij} \mathcal{A}'_{ik}.$$

Elles sont analogues aux relations (9) du paragraphe précédent. Seulement dans le cas présent, les ϱ'_{ij} ne vérifient plus les relations (8). On a en effet:

$$(32) \quad \varrho'_{ij} + \varrho'_{ji} = -\frac{\pi_{ij}}{\pi}.$$

D'où:

$$(33) \quad \varrho'_{12} + \varrho'_{21} = 0, \quad \varrho'_{13} + \varrho'_{31} = -1, \quad \varrho'_{23} + \varrho'_{32} = +1.$$

D'autre part remarquons que si le réseau proposé admet un groupe transitif de transformations, il en est évidemment de même sur chacune des surfaces, du réseau de courbes qu'y découpent les 3 autres familles de surfaces du réseau. Ce qui entraîne d'après ce qu'on a vu au Chapitre I:

$$(34) \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0.$$

On aura donc (formule 44, Chap. I, 2^{ième} Partie):

$$\varrho_i = \varrho_{i, ik} - \varrho_{ik, ij} = 0$$

et par suite:

$$\varrho_{12, 13} = \varrho_{13, 12} = 0,$$

car $\varrho_{13, 12} = \mathcal{A}_{13} (\pi_{12}) - \alpha_{13} \pi_{12} = 0$, puisque $\pi_{12} = 0$.

D'où en vertu de (33):

$$(35) \quad \varrho'_{12} = \varrho'_{21} = 0.$$

De même on a: $\varrho_{31, 12} = \varrho_{32, 31}$ et en vertu de (33)

$$(36) \quad \varrho'_{32} = -\varrho'_{31}, \quad \varrho'_{23} = -\varrho'_{13}.$$

D'ailleurs si le réseau admet un groupe transitif de transformations les invariants absolus ϱ'_{ij} doivent être constants.

En procédant comme au paragraphe précédent, on est conduit à rechercher les solutions $\beta_{12} \beta_{23} \beta_{31} C_{12} C_{23} C_{31}$ du système:

$$(37) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{12} \beta_{12} = C_{12}, \\ \mathcal{A}'_{23} \beta_{12} = \varrho'_{23} \beta_{12}, \\ \mathcal{A}'_{31} \beta_{12} = -\varrho'_{13} \beta_{12}, \end{cases} \begin{cases} \mathcal{A}'_{23} \beta_{23} = \varrho'_{23} \beta_{23} + C_{23}, \\ \mathcal{A}'_{31} \beta_{23} = \varrho'_{31} \beta_{23}, \\ \mathcal{A}'_{12} \beta_{23} = 0, \end{cases} \begin{cases} \mathcal{A}'_{31} \beta_{31} = \varrho'_{31} \beta_{31} + C_{31}, \\ \mathcal{A}'_{12} \beta_{31} = 0, \\ \mathcal{A}'_{23} \beta_{31} = -\varrho'_{32} \beta_{31}, \end{cases}$$

auquel il faut adjoindre les relations:

$$(38) \quad C_{12} + \beta_{31} = C_{23} = C_{31} - \beta_{23}.$$

Les conditions d'intégrabilité du système (37) donnent en tenant compte des relations (35) et (36):

$$(39) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{23} C_{12} = 0, \\ \mathcal{A}'_{13} C_{12} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{31} C_{23} = -\varrho'_{31} \beta_{23}, \\ \mathcal{A}'_{21} C_{23} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'_{12} C_{31} = 0, \\ \mathcal{A}'_{32} C_{31} = 0. \end{cases}$$

Des relations (38) on déduit alors:

$$\mathcal{A}'_{13} (C_{12} + \beta_{31}) = \mathcal{A}'_{13} C_{23},$$

qui donne en tenant compte de (37) et (39):

$$(40) \quad C_{31} = -\varrho'_{31} (\beta_{31} + \beta_{23}).$$

De même on a:

$$\mathcal{A}'_{12} C_{23} = \mathcal{A}'_{12} (C_{31} - \beta_{23}),$$

qui est identiquement satisfaite et

$$\mathcal{A}'_{23} (C_{12} + \beta_{31}) = \mathcal{A}'_{23} (C_{31} - \beta_{23}),$$

qui donne:

$$(41) \quad C_{23} = \varrho'_{13} \beta_{23} - \varrho'_{31} \beta_{31}.$$

Les relations (38) sont identiquement satisfaites si, prenant pour $C_{31} C_{23}$ les valeurs fournies par (40) et (41) on prend pour C_{12} la valeur suivante:

$$(42) \quad C_{12} = \varrho'_{13} (\beta_{23} + \beta_{31}).$$

En portant ces valeurs de $C_{12} C_{31} C_{23}$ (37) on obtient alors un système d'équations homogènes qui est *complètement intégrable*. Le réseau proposé admet donc un groupe transitif à 3 paramètres de transformations et par suite, on a le résultat suivant:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau dont l'un des π_{ij} est nul admette un groupe continu transitif de transformations sont:

$$(43) \quad e_i = 0, \quad \varrho'_{ij, ik} = \text{const.}$$

Il y a lieu de remarquer d'ailleurs que les conditions (43) ne sont pas toutes indépendantes: Elles sont toutes vérifiées dès que l'on a par exemple:

$$(44) \quad \pi_{12} = 0, \quad e_1 = e_2 = e_3 = 0, \quad \varrho'_{13} = \text{const.}$$

On remarquera en particulier que ces conditions sont vérifiées si l'on a $\varrho'_{13} = -\frac{1}{2}$, c.-à-d. pour un réseau satisfaisant aux conditions (65) du chapitre précédent. Le réseau proposé est alors applicable sur 4 faisceaux de plans dont les axes $\Delta_1 \Delta_2$ sont concourants ainsi que $\Delta_3 \Delta_4$, le point de concours de deux de ces axes étant dans le plan défini par les 2 autres. C'est le seul cas où un réseau satisfaisant aux conditions (44) est topologiquement applicable sur des faisceaux de plans.

Si l'on considère la représentation canonique du réseau, les deux premières séries de conditions (44) donnent les relations:

$$\frac{\partial}{\partial w} \log \frac{f_v}{f_u} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{f_v}{f_u} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} \log \frac{f_w}{f_v} = \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} \log \frac{f_u}{f_w} = 0.$$

On en conclut sans aucune difficulté qu'on peut choisir les paramètres u, v, w de manière à mettre le réseau sous la forme:

$$(45) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}, \quad w + \varphi(u+v) = \text{const.},$$

où $\varphi(z)$ est une fonction quelconque. Si l'on écrit alors que ϱ'_{13} est constant, on est conduit pour cette fonction φ à une condition de la forme:

$$\frac{\varphi''' \varphi'}{\varphi''^2} = K, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad \varphi''' = \frac{d^3\varphi}{dz^3}.$$

On en conclut aisément que φ est une puissance d'une fonction linéaire de z . Par un choix convenable des paramètres u, v, w on voit ainsi que tout réseau satisfaisant aux conditions (44) peut se mettre sous la forme:

$$(46) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}, \quad w + (u+v)^m = \text{const.},$$

où m est différent de 0 et de +1. Le cas où $m = -1$ correspond à la valeur $-\frac{1}{2}$ de ϱ'_{13} , et nous avons vu qu'alors le réseau est applicable sur 4 faisceaux de plans.

En résumé les seuls réseaux admettant un groupe continu transitif de transformations topologiques sont les suivants:

- I. Les réseaux à configuration octogonale, qui admettent un groupe continu transitif à 4 paramètres.
- II. Les réseaux suivants qui admettent un groupe continu transitif à 3 paramètres:
 - 1°) Réseaux applicables sur 4 faisceaux de plans dont les axes sont 4 génératrices d'un même système d'une quadrique.
 - 2°) Réseaux applicables sur 4 faisceaux de plans dont les axes $\Delta_1 \Delta_2$ sont concourants ainsi que les axes $\Delta_3 \Delta_1$, le point de concours des deux axes $\Delta_1 \Delta_2$ étant dans le plan défini par les deux autres $\Delta_3 \Delta_4$ et inversement.
 - 3°) Réseaux représentables sous la forme:

$$(46) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}, \quad w + (u+v)^m = \text{const.}$$

avec m différent de 0, +1, et -1.