HENRI CARTAN

Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__93__1_0>

N° D'ORDRE :
2032

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. HENRI CARTAN

PROFESSEUR AU LYCÉE MALHERBE A CAEN.

1re THÈSE. — SUR LES SYSTÈMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES A VARIÉTÉS LINÉAIRES LACUNAIRES ET LEURS APPLICATIONS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1928 devant la Commission d'Examen.

MM. EMILE PICARD *Président.*
ÉMILE BOREL } *Examinateurs.*
PAUL MONTEL }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1928

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen	C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.
Doyens honoraires	P. APPELL, M. MOLLIARD.
Professeurs honoraires	V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH, A. LEDUC, R. DONGIER, E. HEROUARD.

Professeurs

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	Chimie minérale.
ÉMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
MARCHIS	Aviation.
RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
JEAN PERRIN	Chimie physique.
ABRAHAM	Physique.
M. MOLLIARD	Physiologie végétale.
E. CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie générale.
VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
C. FABRY	Physique.
C. PEREZ	Zoologie.
LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie régionale.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA	Mathématiques générales.
A. MAILHE	Étude des Combustibles.
L. LUTAUD	Géographie physique.
EUGÈNE BLOCH	Physique théorique et Physique céleste.
HENRI VILLAT	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	Géologie.
P. PASCAL	Chimie appliquée.
N.	Chimie générale.

E. PECHARD	Chimie (Enseign^{nt} P.C.N.)	G. BRUHAT	Physique.
V. AUGER	Chimie analytique.	H. MOUTON	Chimie physique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.	L. JOLEAUD	Paléontologie
A. GUILLET	Physique.	M. JAVILLIER	Chimie biologique.
C. MAUGUIN	Minéralogie.	A. DUFOUR	Physique (P. C. N.).
L. BLARINGHEM	Botanique.	F. PICARD	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
A. MICHEL-LÉVY	Pétrographie.	ROBERT-LÉVY	Zoologie.
A. DEREIMS	Géologie.	L. DUNOYER	Optique appliquée.
A. DENJOY	Calcul différentiel et intégral.	A. GUILLIERMOND	Botanique (P. C. N.).
H. BÉNARD	Physique (P. C. N.).	A. DEBIERNE	Radioactivité.
E. DARMOIS	Physique.		

Secrétaire .... D. TOMBECK.

84862 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES SYSTÈMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

A VARIÉTÉS LINÉAIRES LACUNAIRES

ET

LEURS APPLICATIONS

Introduction.

1. Émile Borel a démontré [B] (¹) en 1897 l'impossibilité d'une identité

$$X_1(x) + X_2(x) + \ldots + X_p(x) \equiv 0,$$

entre des fonctions entières, sans zéros, de la variable complexe x. Voici, plus précisément, la forme que l'on peut donner à son théorème : *Si l'on a une telle identité, ou bien les rapports mutuels des fonctions sont des constantes, — ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle, et leurs rapports mutuels sont des constantes.*

Lorsque $p = 3$, ce théorème équivaut (²) au théorème de E. Picard : « une fonction entière ne peut admettre deux valeurs exceptionnelles finies ». Or, on a complété le théorème de Picard en le « *traduisant en*

(¹) Les lettres placées entre crochets renvoient à l'Index bibliographique.

(²) En effet, si l'on avait

$$X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0,$$

la fonction $-\frac{X_1}{X_3}$, par exemple, serait entière et ne prendrait aucune des valeurs *zéro* et *un*.

termes finis », suivant une expression de A. Bloch, c'est-à-dire en établissant des propositions relatives aux fonctions holomorphes qui admettent deux valeurs exceptionnelles, et sont définies non plus dans tout le plan, mais dans le cercle-unité : je veux parler principalement du théorème de Schottky et du théorème de Landau. Ces derniers peuvent être établis, soit en partant de la fonction modulaire, soit en s'appuyant, conformément au point de vue de E. Borel, sur la théorie de la croissance des fonctions. Enfin P. Montel a démontré qu'une famille de fonctions holomorphes, admettant deux valeurs exceptionnelles fixes finies, est *normale* (1); ce théorème, d'où peuvent se déduire tous les précédents, au moins du point de vue qualitatif, sera désigné, au cours de ce travail, sous le nom de *critère de P. Montel.*

2. La « traduction en termes finis » du théorème de E. Borel, dans le cas d'un nombre quelconque de fonctions, a été abordée en 1926 par A. Bloch dans un Mémoire paru dans les *Annales de l'École Normale supérieure* [A]. Ce géomètre est arrivé à vaincre en grande partie les réelles difficultés que présente cette question, et il a obtenu un théorème qui est une généralisation immédiate du théorème de Schottky, mais qui se complique du fait de l'existence de *cas singuliers;* ces derniers n'ont été que partiellement éclaircis. Voici du moins le théorème obtenu par A. Bloch si l'on fait abstraction des cas singuliers (2) : *Soient*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots; \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots; \qquad \ldots;$$
$$k(x) = e_0 + e_1 x + \ldots,$$

n fonctions d'une variable x, holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, ne s'y annulant pas, et dont la somme n'y devient pas égale à l'unité. Les termes constants a_0, b_0, ..., e_0 sont supposés différents de l'unité, et tels

(1) Rappelons qu'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D est dite *normale* dans ce domaine, si, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite infinie qui converge uniformément dans tout domaine fermé intérieur à D, la fonction limite étant, soit une fonction holomorphe, soit la constante infinie.

(2) [A], théorème VIII, p. 309.

que la somme d'un nombre quelconque d'entre eux diffère de zéro et de l'unité. Alors les coefficients $a_1, b_1, \ldots, e_1$ *(et, d'une manière générale, les coefficients des termes de degré* i, $a_i, b_i, \ldots, e_i$*) admettent une borne supérieure dépendant uniquement de* $a_0, b_0, \ldots, e_0$ *(et de* i*).*

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence du fait suivant, qui constitue, à proprement parler, la généralisation du théorème de Schottky : dans tout cercle $|x| < \rho$, les fonctions admettent une borne supérieure qui dépend uniquement de ρ, $a_0, b_0, \ldots, e_0$.

3. Après ces travaux de A. Bloch, il manquait encore, dans le cas d'une identité de Borel [1] à p termes, un théorème analogue au critère de P. Montel dans le cas d'une identité à trois termes. C'est un théorème de ce genre que j'ai cherché à établir, sans d'ailleurs m'appuyer sur les résultats de A. Bloch, qui ne me paraissaient pas démontrés de façon certaine. J'ai jugé utile de reprendre la question dès le début. Si je n'ai pas fait subir de grandes modifications à la marche générale des idées, qui était, en quelque sorte, conforme à la nature des choses, j'ai par contre orienté ma démonstration dans un sens un peu différent, puisque A. Bloch s'était borné à considérer des systèmes de p fonctions *prenant des valeurs données à l'origine*. En m'affranchissant de cette restriction, j'ai obtenu une sorte de *critère de famille complexe normale* [2], qui laisse encore des questions en suspens lorsque $p > 4$; au contraire, le cas $p = 4$ se trouve complètement éclairci [3].

Ce n'est là, bien entendu, qu'un résultat d'ordre purement qualitatif, obtenu en somme grâce à une étude de la croissance des fonctions envisagées. Pour arriver à des résultats d'ordre quantitatif, il faudrait construire certains systèmes de fonctions automorphes de plu-

(1) Je nomme ainsi une identité de la forme

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p \equiv 0,$$

entre des fonctions holomorphes dans un certain domaine, sans zéros dans ce domaine.

(2) P. Montel nomme *famille complexe* une famille de systèmes de k fonctions f_1^α, $f_2^\alpha, \ldots, f_k^\alpha$, le symbole α servant à désigner le système de la famille considéré. La famille complexe est dite *normale* si chacune des k familles $f_1^\alpha, f_2^\alpha, \ldots, f_k^\alpha$ est normale.

(3) *Voir* Chap. IV, § 42.

sieurs variables, généralisant convenablement la fonction modulaire, et l'on n'en a pas encore trouvé ([1]).

4. Dans le Chapitre premier, je rappelle brièvement quelques points fondamentaux de la théorie des fonctions méromorphes, et je fais une première étude de la croissance des fonctions satisfaisant à une identité de Borel, en vue de la démonstration future du critère de famille complexe normale. Ce Chapitre ne contient rien d'essentiellement nouveau.

Dans le Chapitre II, j'établis un lemme énoncé sans démonstration par A. Bloch; il convenait de le démontrer, d'autant plus qu'il joue ensuite un rôle capital. Il est susceptible de diverses généralisations.

Le Chapitre III contient la démonstration du résultat fondamental : l'existence du critère de famille complexe normale dont j'ai déjà parlé. Dans le Chapitre suivant, je donne quelques exemples des applications dont il est susceptible.

Enfin, le Chapitre V est consacré à la résolution de divers problèmes d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes; cette résolution est étroitement liée à l'étude de certaines identités de Borel. J'indique, en terminant, une application du critère de famille complexe normale aux questions d'unicité.

Qu'il me soit permis de remercier M. Paul Montel de l'intérêt qu'il m'a toujours temoigné; j'espère avoir tiré profit, dans la rédaction de ce travail, de ses conseils et de ses critiques amicales, et je lui exprime ici toute ma respectueuse reconnaissance.

Index bibliographique.

[A]. A. Bloch. — Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. 43, 1926, p. 309-362).

[B]. E. Borel. — Sur les zéros des fonctions entières (*Acta mathematica*, t. 20, 1897, p. 357-396).

[C]. G. Julia. — *a*. Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables (*Acta mathematica*, t. 47, 1926, p. 53-115).

---

(1) Ce problème semble lié à celui de l'uniformisation pour les systèmes de p fonctions de p variables complexes.

b. Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (*Ann. de l'École Normale*, 3e série, t. **36**, 1919, p. 93, et t. **37**, 1920, p. 165).

[D]. S. MANDELBROJT. — Les suites de fonctions holomorphes. Fonctions entières (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. **185**, 1927, p. 1098).

[E]. P. MONTEL. — *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

[F]. ROLF NEVANLINNA. — *a*. Zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta mathematica*, t. **46**, 1925, p. 1-99).

b. Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta mathematica*, t. **48**, 1926, p. 367-391).

c. Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes dans un cercle (*Bul. de la Soc. math. de France*, t. 55, 1927, p. 92).

d. Un théorème d'unicité relatif aux fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. **181**, 1925, p. 92).

[G]. G. PÓLYA. — Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen (*Mat. Tidsskrift* B, Copenhague, 1921, p. 16-21).

[H]. G. VALIRON. — *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923).

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Rappel de quelques propositions fondamentales.

5. Nous aurons constamment à utiliser les résultats fondamentaux de la théorie des valeurs moyennes logarithmiques, fondée par F. et R. Nevanlinna [1]. Rappelons-les brièvement.

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle $|x| < 1$. La formule de Jensen s'écrit

$$(1)\qquad \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \sum_\nu \log\frac{r}{|a_\nu|} + \sum_\mu \log\frac{r}{|b_\mu|},$$

en supposant $f(0)$ fini et différent de zéro; le premier terme du

(1) *Voir*, par exemple, l'exposé complet de la théorie dans [F, *a*].

second membre représente la valeur moyenne de $\log|f(x)|$ sur la circonférence, de rayon $r<1$, ayant pour centre l'origine. Quant aux sommes qui figurent au second membre, elles sont étendues, respectivement, aux zéros a_ν et aux pôles b_μ de modules inférieurs à r, chaque zéro et chaque pôle étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Si l'on pose [1]

$$m(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$N(r, f)=\sum_\mu \log\frac{r}{|b_\mu|},$$

la relation (1) peut s'écrire

$$m(r, f)+N(r, f)=m\left(r, \frac{1}{f}\right)+N\left(r, \frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|, \tag{2}$$

ou encore

$$T(r, f)=T\left(r, \frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|, \tag{2'}$$

après avoir posé

$$T(r, f)=m(r, f)+N(r, f).$$

La quantité $T(r, f)$ caractérise la croissance de la fonction $f(x)$. On montre que c'est une fonction convexe de $\log r$, et, par suite [2], une fonction croissante de r.

6. F. et R. Nevanlinna ont démontré la relation suivante, qui géné-

---

(1) a étant un nombre positif, on pose

$$\overset{+}{\log}\,a=\log a \qquad \text{si } a\geqq 1,$$
$$\overset{+}{\log}\,a=0 \qquad \text{si } a\leqq 1.$$

(2) Car si une fonction $\varphi(r)$, définie pour $r\geqq 0$, est finie pour $r=0$, et convexe en $\log r$, elle est croissante. Soit en effet $0<r_1<r_2$, et prenons r_0 compris entre 0 et r_1. On a par hypothèse

$$\begin{vmatrix} \varphi(r_0) & \log r_0 & 1 \\ \varphi(r_1) & \log r_1 & 1 \\ \varphi(r_2) & \log r_2 & 1 \end{vmatrix}\leqq 0.$$

Il suffit de faire tendre r_0 vers zéro pour conclure

$$\varphi(r_1)\leqq\varphi(r_2).$$

ralise la relation (1) :

$$(3)\qquad \log f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{re^{i\theta}+x}{re^{i\theta}-x}\,d\theta - \sum_\nu \log\frac{r^2-\bar{a}_\nu x}{r(x-a_\nu)} + \sum_\mu \log\frac{r^2-\bar{b}_\mu x}{r(x-b_\mu)} + i\times\text{const.}$$

Cette nouvelle formule, qu'ils ont appelée *formule de Poisson-Jensen*, est valable pour tout nombre x de module inférieur à r. Selon l'usage, $\bar{a}_\nu$ désigne le nombre complexe conjugué de a_ν.

On peut en tirer l'inégalité (*cf.* [A], Lemme 4, p. 320)

$$(4)\qquad \log|f(x)| \leqq \frac{r+\rho}{r-\rho} m(r,f) - \frac{r-\rho}{r+\rho} m\left(r,\frac{1}{f}\right) - \sum_\nu \log\left|\frac{r^2-\bar{a}_\nu x}{r(x-a_\nu)}\right| + \sum_\mu \log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\mu x}{r(x-b_\mu)}\right|.$$
$$(|x|=\rho<r)$$

Pour l'obtenir, il suffit de remplacer, dans la relation (3), x par $\rho e^{i\varphi}$, et de prendre les parties réelles des deux membres; il vient

$$(5)\qquad \log|f(\rho e^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta - \sum_\nu \log\left|\frac{r^2-\bar{a}_\nu x}{r(x-a_\nu)}\right| + \sum_\mu \log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\mu x}{r(x-b_\mu)}\right|,$$

et cette relation conduit à l'inégalité (4). Les logarithmes qui figurent au second membre de (4) et (5) sont tous positifs, puisque $|x|$, $|a_\nu|$ et $|b_\mu|$ sont inférieurs à r.

Si, en particulier, $f(x)$ est holomorphe, le terme $\sum_\mu \log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\mu x}{r(x-b_\mu)}\right|$ disparaît, et l'on tire de (4)

$$(6)\qquad m\left(r,\frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^2 m(r,f) - \frac{r+\rho}{r-\rho}\log|f(x)|,$$

et *a fortiori*

$$(6')\qquad m\left(r,\frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^2 m(r,f) + \frac{r+\rho}{r-\rho}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(x)}\right|.$$

7. *Limitation de* $m\left(r,\frac{f^{(n)}}{f}\right)$. — Supposons $f(x)$ holomorphe et sans

zéros. La relation (3) se simplifie; si on la différentie, on trouve

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\frac{2re^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta}-x)^2},$$

et, d'une façon générale,

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\frac{2re^{i\theta}\,d\theta}{(re^{i\theta}-x)^{n+1}};$$

par suite, en posant $|x| = \rho$,

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \leqq \frac{2r}{(r-\rho)^2}\left[m(r,f) + m\left(r,\frac{1}{f}\right)\right],$$

$$\left|\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\right| \leqq \frac{n!\,2r}{(r-\rho)^{n+1}}\left[m(r,f) + m\left(r,\frac{1}{f}\right)\right].$$

En développant le premier membre de cette dernière inégalité, et en posant, pour abréger,

$$m(r,f) + m\left(r,\frac{1}{f}\right) = \lambda(r,f),$$

on trouve immédiatement, par récurrence, une inégalité de la forme

$$(7) \qquad \left|\frac{f^{n}(x)}{f(x)}\right| \leqq \mathrm{P}_n\left[r, \frac{1}{r-\rho}, \lambda(r,f)\right],$$

P_n étant un polynome de trois arguments, dont les coefficients sont des constantes positives ne dépendant que de n.

8. Rappelons enfin le théorème fondamental suivant :

Une famille de fonctions $f(x)$, holomorphes dans le cercle $|x| < 1$, et pour laquelle $m(r, f)$ est inférieur à un nombre fixe M *quel que soit le nombre positif r inférieur à un, et quelle que soit la fonction f de la famille, est normale.*

P. Montel [1] a donné de ce théorème une démonstration basée sur la propriété que possèdent ces fonctions de pouvoir se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions bornées [2] (Nevanlinna).

---

(1) [E], p. 44.

(2) On sait qu'une famille de fonctions bornées est normale.

Plaçons-nous *dans le cas où les fonctions n'ont pas de zéros;* c'est précisément le cas où nous nous servirons du théorème. Nous allons indiquer effectivement une borne supérieure de $|f(x)|$. Désignons en effet par $m(1, f)$ la limite vers laquelle tend $m(r, f)$ lorsque r tend vers *un*; cette limite existe, puisque $m(r, f)$ croît avec r en restant borné. Appliquons l'inégalité (4), en y permutant les lettres r et ρ, puis en faisant tendre ρ vers *un*; il vient à la limite

$$\log|f(x)| \leqq \frac{1+r}{1-r} m(1, f) - \frac{1-r}{1+r} m\left(1, \frac{1}{f}\right);$$

r désigne $|x|$.

Remplaçons f par $\frac{1}{f}$; il vient

$$\log|f(x)| \geqq \frac{1-r}{1+r} m(1, f) - \frac{1+r}{1-r} m\left(1, \frac{1}{f}\right).$$

Puisque $N(r, f)$ et $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ sont nuls, la relation (2) permet d'écrire, après un passage à la limite,

$$m\left(1, \frac{1}{f}\right) = m(1, f) - \log|f(0)|.$$

Il vient en définitive

$$(8) \qquad \begin{aligned} &-\frac{4r}{1-r^2} m(1, f) + \frac{1+r}{1-r} \log|f(0)| \\ &\leqq \log|f(x)| \leqq \frac{4r}{1-r^2} m(1, f) + \frac{1-r}{1+r} \log|f(0)|, \end{aligned}$$

et, si $m(1, f)$ est inférieur au nombre fixe M,

$$\frac{4r}{1-r^2} M + \frac{1+r}{1-r} \log|f(0)| \leqq \log|f(x)| \leqq \frac{4r}{1-r^2} M + \frac{1-r}{1+r} \log|f(0)|.$$

On en déduit que les fonctions $f(x)$ forment une famille normale. En effet, si $|f(0)|$ admet une borne supérieure valable pour toutes les fonctions de la famille, l'inégalité de droite montre que $|f(x)|$ admet une borne supérieure qui ne dépend que de r; dans le cas contraire, on peut extraire de la famille une suite infinie de fonctions, telle que les valeurs à l'origine des fonctions de cette suite tendent vers l'infini, et l'inégalité de gauche montre alors que ces fonctions convergent uniformément vers l'infini dans tout cercle $|x| < r_0$, quel que soit le nombre positif r_0 inférieur à *un*.

Si $f(0) = 1$, l'inégalité (8) prend la forme suivante :

$$|\log|f(x)|| \leq \frac{4r}{1-r^2} m(1, f);$$

on obtient ainsi, pour $\log|f(x)|$, une limitation intéressante, car elle est effectivement atteinte avec la fonction

$$f(x) = e^{\frac{4x}{1-x}};$$

un calcul facile montre en effet que l'on a

$$m(1, f) = 1$$

pour cette fonction.

II. — Étude de la croissance de p fonctions holomorphes, sans zéros, dont la somme est identique à un.

9. L'étude que nous allons faire ici servira ensuite à la démonstration du critère de famille complexe normale exposée au Chapitre III.

Soient, dans le cercle-unité, p fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_p(x)$, holomorphes, sans zéros, vérifiant l'identité

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p \equiv 1. \tag{9}$$

Reprenant une méthode de démonstration ([1]) qui, dans le cas où les fonctions F_i sont définies dans tout le plan, conduit au théorème de E. Borel (*cf.* § 1), mais l'appliquant à des fonctions définies seulement dans le cercle-unité, nous trouverons une borne supérieure pour $m(r, F_i)$.

([1]) Je m'inspirerai d'une démonstration du théorème de E. Borel donnée par R. Nevanlinna ([F, *b*], p. 381)

Supposons que l'on ait

$$D(x) \equiv \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_p \\ \dfrac{dF_1}{dx} & \dfrac{dF_2}{dx} & \dots & \dfrac{dF_p}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{d^{p-1}F_1}{dx^{p-1}} & \dfrac{d^{p-1}F_2}{dx^{p-1}} & \dots & \dfrac{d^{p-1}F_p}{dx^{p-1}} \end{vmatrix} \not\equiv 0;$$

autrement dit, supposons que les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$ ne soient liées par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants non tous nuls [1].

Différentions $p-1$ fois l'identité (9); nous obtenons un système de relations qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} & F_1 + F_2 + \dots + F_p \equiv 1, \\ & \frac{F'_1}{F_1} F_1 + \frac{F'_2}{F_2} F_2 + \dots + \frac{F'_p}{F_p} F_p \equiv 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & \frac{F_1^{(p-1)}}{F_1} F_1 + \frac{F_2^{(p-1)}}{F_2} F_2 + \dots + \frac{F_p^{(p-1)}}{F_p} F_p \equiv 0, \end{aligned}$$

et qu'on peut considérer comme un système de p équations linéaires par rapport aux p inconnues $F_1, F_2, \dots, F_p$. Le déterminant des coefficients n'est autre que

$$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{F'_1}{F_1} & \dfrac{F'_2}{F_2} & \dots & \dfrac{F'_p}{F_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{F_1^{(p-1)}}{F_1} & \dfrac{F_2^{(p-1)}}{F_2} & \dots & \dfrac{F_p^{(p-1)}}{F_p} \end{vmatrix} \equiv \frac{D}{F_1 F_2 \dots F_p}.$$

En appliquant la règle de Cramer, on trouve

$$F_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)},$$

en désignant par $\Delta_i(x)$ le mineur du déterminant Δ, relatif au $i^{\text{ième}}$ élément de la première ligne.

(1) Si $D(x)$ était identiquement nul, on se ramènerait à une identité, de la même forme que (9), entre un nombre moindre de fonctions.

Or, a et b étant deux nombres positifs, on a l'inégalité évidente

$$\overset{+}{\log}(ab) \leq \overset{+}{\log} a + \overset{+}{\log} b.$$

Par suite, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant deux fonctions méromorphes, on a

$$\overset{+}{\log} |f_1(x) f_2(x)| \leq \overset{+}{\log} |f_1(x)| + \overset{+}{\log} |f_2(x)|,$$

et, en prenant la valeur moyenne sur la circonférence $|x| = r$,

$$m(r, f_1 f_2) \leq m(r, f_1) + m(r, f_2).$$

On a donc ici

$$m(r, F_i) \leq m(r, \Delta_i) + m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right).$$

Faisons successivement $i = 1, 2, \ldots, p$, et ajoutons membre à membre; il vient

$$\sum_{i=1}^{p} m(r, F_i) \leq \sum_{i=1}^{p} m(r, \Delta_i) + pm\left(r, \frac{1}{\Delta}\right),$$

et, en désignant, pour chaque valeur de r, la plus grande des p quantités $m(r, F_i)$ par $m(r)$,

$$m(r) \leq \sum_{1}^{p} m(r, \Delta_i) + pm\left(r, \frac{1}{\Delta}\right). \tag{10}$$

Cette inégalité va permettre de limiter $m(r)$. L'idée de la démonstration est, en gros, de faire voir que le second membre est comparable à $\overset{+}{\log} m(r)$.

10. Une difficulté provient d'abord de la présence de $m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right)$, au lieu de $m(r, \Delta)$. Mais appliquons la relation (2) à la fonction $\Delta(x)$; comme elle est holomorphe, on a

$$N(r, \Delta) = 0,$$

et, par suite, *si* $\Delta(0)$ *n'est pas nul,*

$$m(r, \Delta) = m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) + N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) + \log |\Delta(0)|.$$

On en déduit, puisque $N\left(r, \frac{1}{\Delta}\right)$ est positif ou nul,

$$m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \leqq m(r, \Delta) - \log|\Delta(0)|, \tag{11}$$

et, en portant dans (10),

$$m(r) \leqq \sum_i m(r, \Delta_i) + pm(r, \Delta) - p \log|\Delta(0)|. \tag{12}$$

$\Delta_i(x)$ et $\Delta(x)$ sont des polynomes en $\frac{F'_h}{F_h}, \frac{F''_h}{F_h}, \ldots, \frac{F_h^{(p-1)}}{F_h}$, h prenant les valeurs $1, 2, \ldots, p$; d'autre part, nous pouvons appliquer l'inégalité (7) à $\left|\frac{F'_h}{F_h}\right|, \ldots, \left|\frac{F_h^{(p-1)}}{F_h}\right|$; de sorte que, désignant $|x|$ par r, et permutant dans l'inégalité (7) les lettres r et ρ, nous trouvons des inégalités de la forme

$$\Delta_i(x) \leqq Q_i\left[\rho, \frac{1}{\rho - r}, X(\rho, F_1), \ldots, X(\rho, F_p)\right],$$
$$\Delta(x) \leqq R\left[\rho, \frac{1}{\rho - r}, X(\rho, F_1), \ldots, X(\rho, F_p)\right],$$

Q_i et R désignant des polynomes de $p+2$ arguments, dont les coefficients sont des constantes positives ne dépendant que de p.

Prenons les $\overset{+}{\log}$ des deux membres dans chacune des inégalités précédentes, et servons-nous de l'inégalité presque évidente

$$\overset{+}{\log}(a_1 + a_2 + \ldots + a_\lambda) \leqq \overset{+}{\log} a_1 + \overset{+}{\log} a_2 + \ldots + \overset{+}{\log} a_\lambda + \log \lambda, \tag{13}$$

les a_i étant positifs. On trouve

$$\overset{+}{\log}|\Delta_i(x)| \leqq U_i\left[\overset{+}{\log}\rho, \overset{+}{\log}\frac{1}{\rho - r}, \overset{+}{\log}X(\rho, F_1), \ldots, \overset{+}{\log}X(\rho, F_p)\right],$$
$$\overset{+}{\log}|\Delta(x)| \leqq V\left[\overset{+}{\log}\rho, \overset{+}{\log}\frac{1}{\rho - r}, \overset{+}{\log}X(\rho, F_1), \ldots, \overset{+}{\log}X(\rho, F_p)\right],$$

U_i et V désignant des fonctions linéaires de $p+2$ arguments, dont les coefficients sont des constantes positives ne dépendant que de p. On peut d'ailleurs supprimer le terme en $\log \rho$ qui est nul, ρ étant plus petit que un; on a, en outre,

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho - r} = \log\frac{1}{\rho - r}.$$

Prenons enfin la valeur moyenne sur la circonférence $|x| = r$, et revenons à (12); il vient

$$(14) \qquad m(r) \leqq a + b \log\frac{1}{\rho - r} + c\sum_i \overset{+}{\log} X(\rho, F_i) - p \log|\Delta(0)|,$$

a, b et c étant des constantes positives qui dépendent seulement de l'entier p.

Mais on a

$$X(\rho, F_i) = m(\rho, F_i) + m\left(\rho, \frac{1}{F_i}\right),$$

et, en vertu de la relation (2),

$$(15) \qquad X(\rho, F_i) = 2m(\rho, F_i) - \log|F_i(0)|,$$

de sorte que l'inégalité (14) prend la forme

$$m(r) \leqq a' + b \log\frac{1}{\rho - r} + c\sum_i \overset{+}{\log}\left[m(\rho, F_i) - \frac{1}{2}\log|F_i(0)|\right] - p \log|\Delta(0)|.$$

C'est au moyen de cette inégalité qu'il faut conclure. Or, nous sommes gênés par la présence, au second membre, de $\Delta(0)$ et de $F_i(0)$.

Soit alors α un nombre positif fixe inférieur à $|\Delta(0)|$ et à chacune des quantités $|F_i(0)|$. L'inégalité précédente peut s'écrire, en faisant usage de l'inégalité (13),

$$m(r) \leqq a'' + b \log\frac{1}{\rho - r} + c\sum_i \overset{+}{\log} m(\rho, F_i),$$

a'' dépendant de p et de α seulement. On a donc en définitive

$$(16) \qquad m(r) \leqq A + B \log\frac{1}{\rho - r} + C \overset{+}{\log} m(\rho),$$

B et C ne dépendant que de p, et A dépendant de p et de α.

11. Il reste maintenant à introduire, au second membre, $m(r)$ au

lieu de $m(\rho)$. On y arrive grâce à une méthode classique de E. Borel, qui s'applique aux fonctions croissantes d'une variable réelle, en particulier à $m(r)$. On vérifie aisément la proposition suivante :

Les valeurs de r, supérieures à R, pour lesquelles on a, h étant un nombre positif, l'inégalité

$$m\left[r + e^{-\frac{m(r)}{h}}\right] > m(r) + h \log 2,$$

peuvent être enfermées dans des intervalles, en nombre fini ou en infinité dénombrable, dont la somme des longueurs est au plus égale à $2e^{-\frac{m(R)}{h}}$

Si donc on a ici, R étant plus petit que *un*,

$$2e^{-\frac{m(R)}{h}} < 1 - R,$$

c'est-à-dire

$$m(R) > h \log \frac{2}{1 - R},$$

il existe certainement une valeur de r, comprise entre R et 1, pour laquelle on a

$$m\left[r + e^{-\frac{m(r)}{h}}\right] \leqq m(r) + h \log 2.$$

Prenons alors

$$\rho = r + e^{-\frac{m(r)}{h}}.$$

et portons dans (16). Il vient

$$m(r) \leqq A' + \frac{B}{h} m(r) + C \overset{+}{\log} m(r),$$

A' dépendant de h. On peut choisir h assez grand pour que $\frac{B}{h}$ soit plus petit que *un*; ce choix de h dépend uniquement de l'entier p, puisque B est une constante qui ne dépend que de p. On peut alors écrire

$$m(r) \leqq A'' + C'' \overset{+}{\log} m(r),$$

d'où l'on conclut aisément

$$m(r) \leqq M,$$

M étant un nombre positif, qui ne dépend que de A'' et C'', donc de p

et α seulement. Puisque R est inférieur à r, on a *a fortiori*

$$m(\mathrm{R}) \leqq \mathrm{M}.$$

De l'étude précédente, il résulte finalement que l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m(\mathrm{R}) \leqq \mathrm{M}, \\ m(\mathrm{R}) \leqq h \log \dfrac{2}{1-\mathrm{R}}, \end{array} \right.$$

quel que soit le nombre R inférieur à *un*.

12. Nous en tirons deux propositions fondamentales, correspondant respectivement au cas d'un système unique de p fonctions F_i, et au cas d'une famille de tels systèmes.

THÉORÈME I. — *Étant donné un système de p fonctions* F_i, *on a*

$$\overline{\lim_{(r \to 1)}} \frac{m(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \leqq \lambda,$$

λ étant une constante positive fixe qui ne dépend que de p.

En effet, $h \log \dfrac{2}{1-r}$ finit par être supérieur à M lorsque r tend vers 1. On a donc, d'après (17), si r est assez voisin de *un*,

$$m(r) \leqq h \log \frac{2}{1-r},$$

h étant une constante positive fixe qui ne dépend que de p; on en déduit immédiatement le théorème ([1]).

Rappelons que, pour établir ce théorème, on a supposé $\Delta \not\equiv 0$ et $\Delta(0) \neq 0$. Nous verrons dans un instant qu'on peut s'affranchir de cette dernière hypothèse.

([1]) Dans le cas $p = 2$ (fonctions holomorphes ayant deux valeurs exceptionnelles *zéro* et *un*), l'emploi de la fonction modulaire permet de montrer [F, c] que l'on a $\overline{\lim} \dfrac{m(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \leqq 1$; il existe en outre des fonctions pour lesquelles on a $\lim \dfrac{m(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = 1$.

THÉORÈME II. — *Étant donnée une famille de systèmes de p fonctions* F_i, *si* $\Delta(0)$ *et les* $F_i(0)$ *sont supérieurs en module à un nombre positif fixe* α, *valable pour tous les systèmes de la famille, les fonctions* F_i *forment une famille complexe normale*, ce qui veut dire que toutes les fonctions F_i de même indice i forment une famille normale. D'ailleurs, les fonctions F_i, prises dans leur ensemble, forment aussi une famille normale.

En effet, $m(r)$ est inférieur au plus grand des deux nombres M et $h \log \frac{2}{1-r}$, et, par suite, admet une borne supérieure qui ne dépend que de r. Donc (*cf.* § 8) la famille est normale dans tout cercle de centre origine et de rayon r inférieur à *un*; dans ces conditions, elle est normale dans le cercle-unité, comme on le voit en appliquant le procédé diagonal classique.

13. Cherchons à élargir un peu les hypothèses restrictives faites jusqu'ici, mais en conservant toujours la condition $\Delta \not\equiv 0$.

On peut s'affranchir de l'hypothèse $\Delta(0) \neq 0$. Il existe en effet un point x_0 ($|x_0| < r_1 < 1$), tel que $\Delta(x_0) \neq 0$. On peut écrire, en vertu de (6'),

$$m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \leqq \left(\frac{r+r_1}{r-r_1}\right)^2 m(r, \Delta) + \frac{r+r_1}{r-r_1} \overset{+}{\log} \frac{1}{|\Delta(x_0)|},$$

et, si r est supérieur à un nombre fixe r_2, compris entre r_1 et *un*,

$$m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) \leqq \left(\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\right)^2 m(r, \Delta) + \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1} \overset{+}{\log} \frac{1}{|\Delta(x_0)|},$$

c'est-à-dire

$$m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right) < K\left[m(r, \Delta) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|\Delta(x_0)|}\right],$$

K étant un nombre positif qui ne dépend que de r_1 et r_2.

Cette inégalité remplacera l'inégalité (11) au cours de la démonstration précédente, qui subsiste ainsi avec ce léger changement. Le théorème I reste donc vrai.

Ce qui précède montre de plus que, dans l'énoncé du théorème II, on peut remplacer l'hypothèse

$$|\Delta(0)| > \alpha$$

par la suivante : *pour chacun des systèmes de la famille il existe, à l'in-*

térieur d'un cercle de rayon fixe r_1, ayant pour centre l'origine, un point où $|\Delta(x)| > \alpha$, ce point pouvant bien entendu changer avec le système considéré; α et r_1 sont les mêmes pour tous les systèmes de fonctions de la famille.

On peut également remplacer l'hypothèse relative aux $F_i(0)$ par la suivante :

Quelle que soit la fonction F_i appartenant à l'un quelconque des systèmes de la famille, il existe, à l'intérieur d'un cercle de rayon fixe r_1, ayant pour centre l'origine, un point où $|F_i(x)| > \alpha$.

Il suffit en effet, dans cette dernière hypothèse, de remplacer, au cours de la démonstration précédente, l'égalité (15) par une inégalité de la forme

$$X(\rho, F_i) \leqq K\left[m(\rho, F_i) + \overset{+}{\log}\frac{1}{\alpha}\right].$$

Nous désignerons dans la suite par THÉORÈME II *bis*, le théorème II ainsi complété.

Ces perfectionnements viennent d'être obtenus au moyen de l'inégalité (6'), qui se déduit de (4) lorsque $f(x)$ est holomorphe. Nous aurons besoin, plus loin, d'appliquer l'inégalité (4) à une fonction $f(x)$ ayant des pôles, et de savoir comparer les valeurs d'une expression telle que $\sum_\mu \log\left|\frac{r^2 - \bar{b}_\mu x}{r(x - b_\mu)}\right|$ pour deux valeurs différentes de x. C'est précisément ce que nous apprendrons à faire au Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

AUTOUR D'UN LEMME DE A. BLOCH.

I. — Généralisation d'un théorème de Boutroux; diverses propositions qui s'y rattachent.

14. Dans son Mémoire des *Annales de l'École Normale*, A. Bloch énonce et utilise le théorème suivant [1], extension au domaine com-

[1] [A], Lemme 5, p. 321.

plexe d'un théorème de P. Boutroux [1] s'appliquant aux polynomes d'une variable réelle : *Soit*

$$g(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

un polynome de degré n dont tous les zéros sont intérieurs au cercle-unité. A tout nombre positif $r < 1$ et à tout nombre positif γ, si petit soit-il, on peut faire correspondre un nombre H *dépendant uniquement de r et de γ (nullement des α ni de n), tel que l'inégalité*

$$|g(x)| > e^{-\mathrm{H}n}$$

soit vérifiée pour toute valeur de x inférieure à r en module, sauf peut-être pour celles comprises dans des contours de longueur totale au plus égale à γ.

A. Bloch ne semble pas être parvenu à démontrer cette proposition. Je vais en donner ici une démonstration élémentaire, qui fournit effectivement une valeur pour H; nous n'aurons pas à supposer les α_i inférieurs à *un* en module, ni x inférieur à r en module. Voici la forme précise qu'on peut donner au théorème [2] :

Théorème III. — *Soient, dans le plan, des points $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$, distincts ou non, dont le nombre n et la position sont quelconques; soit de plus h un nombre positif arbitraire. Les points* M *du plan pour lesquels on a l'inégalité*

$$\text{produit } \mathrm{MP}_1 \times \mathrm{MP}_2 \times \ldots \times \mathrm{MP}_n \leqq h^n$$

peuvent être enfermés à l'intérieur de circonférences, en nombre au plus égal à n, dont la somme des rayons est égale à $2eh$ (e désigne la base des logarithmes népériens).

15. Supposons en effet donnée une distribution de points P_i, en nombre n, et soit k un nombre positif arbitraire. Je vais tracer des cercles, en nombre au plus égal à n, dont la somme des rayons sera egale à $2k$, de façon que, M étant un point quelconque, assujetti seu-

---

(1) G. Valiron en a donné une démonstration : [H], p. 78-79.

(2) J'ai indiqué cet énoncé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 186, 1928, p. 624.

lement à n'être intérieur à aucun de ces cercles, on ait l'inégalité

$$(18) \qquad \frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{MP_i} < 1 - \log k.$$

Je suppose d'abord qu'il existe un cercle C, de rayon k, qui contienne les n points P_i à son intérieur. Je trace alors le cercle Γ de même centre et de rayon double. Il est clair que, si M n'est pas intérieur à Γ, on a

$$MP_i > k,$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{MP_i} < \log\frac{1}{k};$$

a fortiori l'inégalité (18) a lieu.

Si, au contraire, il est impossible de trouver un cercle de rayon k qui contienne les n points, je regarde si l'on peut trouver un cercle de rayon $(n-1)\frac{k}{n}$ qui contienne $n-1$ points. D'une façon générale, soit λ_1 le plus grand entier tel qu'il existe un cercle C_1, de rayon $\lambda_1\frac{k}{n}$, qui contienne λ_1 points P_i; ne considérons dorénavant, parmi les points P_i, que les points non intérieurs à C_1. Soit ensuite $\lambda_2 \leqq \lambda_1$ le plus grand entier tel qu'il existe un cercle C_2, de rayon $\lambda_2\frac{k}{n}$, qui contienne λ_2 des points restants; cessons désormais de considérer ces λ_2 points (nous dirons qu'ils « appartiennent » au cercle C_2); et ainsi de suite. A la fin des operations, on aura peut-être à envisager un ou plusieurs cercles de rayon $\frac{k}{n}$, contenant un seul des points restants.

On est ainsi conduit à envisager successivement p cercles C_1, C_2, ..., C_p, de rayons non croissants, et chaque point P_i « appartient » à l'un d'eux et à un seulement. Ces cercles sont donc en nombre au plus égal à n; d'ailleurs la somme de leurs rayons est égale à $\frac{k}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p) = k$. En outre, λ étant un entier quelconque inférieur ou égal à n, s'il existe quelque part un cercle S, de rayon $\lambda\frac{k}{n}$, qui contienne $\mu \geqq \lambda$ points parmi les n points P_i, l'un au moins de ces μ points « appartient » à un cercle C_j de rayon supérieur ou égal à $\lambda\frac{k}{n}$.

Ce fait résulte immédiatement du procédé suivi pour définir les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

Cela posé, traçons les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ respectivement concentriques aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$, et de rayons doubles. La somme des rayons des p cercles ainsi tracés est égale à $2k$. Soit maintenant M un point quelconque du plan, assujetti seulement à n'être intérieur à aucun des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$. Nous allons chercher une limite supérieure de $\frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{MP_i}$.

λ étant un entier quelconque inférieur ou égal à n, je dis que *le cercle* S_λ, *de centre* M *et de rayon* $\lambda\frac{k}{n}$, *contient au plus* $\lambda - 1$ *points* P_i.

Supposons en effet qu'un des points P_i soit intérieur à S_λ, et soit C_j le cercle auquel il « appartient ». Désignons, pour un instant, par R le rayon de S_λ, par r le rayon de C_j, et par d la distance des centres des cercles S_λ et C_j. Ces deux cercles se coupent, puisqu'il existe un point intérieur à la fois à S_λ et C_j. On a donc

$$d < R + r.$$

Mais, par hypothèse, le point M, centre de S_λ, n'est pas intérieur à Γ_j, concentrique à C_j et de rayon double; on a donc

$$2r \leq d.$$

On déduit de là

$$r < R.$$

Ainsi le rayon de C_j est plus petit que $\lambda\frac{k}{n}$. D'après la remarque faite plus haut, le cercle S_λ ne peut contenir $\mu \geq \lambda$ points P_i, et par suite en contient au plus $\lambda - 1$.

Par conséquent, il n'y a aucun point P_i à l'intérieur du cercle S_1, de centre M et de rayon $\frac{k}{n}$; il y en a un au plus à l'intérieur du cercle S_2 de rayon $2\frac{k}{n}$, ..., $\lambda - 1$ au plus à l'intérieur du cercle S_λ de rayon $\lambda\frac{k}{n}$, ..., $n - 1$ au plus à l'intérieur du cercle S_n de rayon k.

Nous majorerons donc $\sum_i \log\frac{1}{MP_i}$, en supposant qu'il y ait un point P_i à la distance $\frac{k}{n}$ du point M, un point à la distance $2\frac{k}{n}$, ..., un point à la distance $\lambda \frac{k}{n}$, ..., enfin un point à la distance k; cela fait bien n points en tout. On peut ainsi écrire

$$\frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{\mathrm{MP}_i} \leqq -\frac{1}{n}\left(\log\frac{k}{n}+\log\frac{2k}{n}+\ldots+\log\frac{\lambda k}{n}+\ldots+\log k\right)$$
$$< -\int_0^1 \log kt\,dt = 1-\log k.$$

La démonstration s'achève aussitôt; il suffit, en effet, de poser

$$\frac{k}{e}=h$$

pour retrouver l'énoncé du théorème III. La méthode utilisée a l'avantage d'indiquer comment on peut s'y prendre pour tracer effectivement les circonférences Γ_i; il importe de remarquer qu'il faut commencer par les plus grandes; la démonstration n'a pu se faire que grâce à cette précaution.

16. Mais cette méthode est susceptible d'être généralisée. Observons que, jusqu'ici, nous avons trouvé une limite supérieure de

$$\frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{\mathrm{MP}_i},$$

valable pour tout point M situé à l'extérieur de certains cercles, ou sur la circonférence de l'un quelconque de ces cercles. Si la démonstration a pu être menée jusqu'au bout, c'est *grâce à la convergence de l'intégrale* $\int_0 \log\frac{1}{r}\,dr$.

Soit maintenant $f(r)$ une fonction quelconque, définie, positive et continue pour r positif, croissante avec $\frac{1}{r}$, et infinie pour $r=0$. Je vais indiquer une limite supérieure de $\frac{1}{n}\sum_i f(\mathrm{MP}_i)$, valable encore pour tout point M extérieur à certains cercles, ou situé sur la circonférence de l'un d'entre eux. Je ne suppose même pas que l'intégrale

$$\int_0 f(r)\,dr$$

soit convergente, mais j'introduis une fonction $\varphi(r)$, définie, positive et continue pour r positif, et telle que l'intégrale

$$\int_0 f(r)\varphi(r)\,dr$$

soit convergente. L'intégrale $\int_0 \varphi(r)\,dr$ est convergente *a fortiori*; posons

$$\Phi(r) = \int_0^r \varphi(r)\,dr;$$

$\Phi(r)$ est une fonction définie pour r positif, positive et croissante, nulle pour $r = 0$. Elle possède donc une fonction inverse, soit

$$r = \Psi(t),$$

nulle pour $t = 0$, définie pour t positif et assez petit ([1]); la fonction $\Psi(t)$ est elle-même continue, positive et croissante.

k désignant un nombre positif arbitraire, je vais établir le théorème suivant :

THÉORÈME III *bis*. — *Les points* M *du plan pour lesquels on a l'inégalité*

$$\frac{1}{n}\sum_i f(\mathrm{MP}_i) \geqq \frac{\int_0^k f(t)\varphi(t)\,dt}{\int_0^k \varphi(t)\,dt} = \frac{\int_0^k f(t)\varphi(t)\,dt}{\Phi(k)}$$

peuvent être enfermés à l'intérieur de circonférences, en nombre p au plus égal à n, et de rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, vérifiant la relation

$$\sum_{j=1}^{p} \Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right) = \Phi(k).$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de reprendre la démonstration du théorème III, en considérant cette fois, au lieu des cercles de rayons $\lambda\frac{k}{n}$

(1) D'une manière précise, si $\Phi(r)$ augmente indéfiniment pour r infini, la fonction $\Psi(t)$ est définie pour toutes les valeurs positives de t; si au contraire $\Phi(r)$ tend vers une limite l lorsque r augmente indéfiniment, $\Psi(t)$ est définie pour $0 \leqq t < l$.

qui contiennent λ points, les cercles de rayons $\Psi\left[\frac{\lambda}{n}\Phi(k)\right]$ qui contiennent λ points. Ils sont en nombre p inférieur ou égal à n. Si l'on trace encore les cercles concentriques aux précédents, et de rayons doubles, leurs rayons ρ_j vérifient la relation

$$\sum_{j=1}^{p}\Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda_j}{n}\Phi(k)=\Phi(k),$$

et l'on a, pour tout point M assujetti à n'être intérieur à aucun de ces cercles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i}f(\mathrm{MP}_i)\leqq\frac{1}{n}\Big\{f\left[\Psi\left(\frac{1}{n}\Phi(k)\right)\right]+f\left[\Psi\left(\frac{2}{n}\Phi(k)\right)\right]+\ldots\\+f\left[\Psi\left(\frac{\lambda}{n}\Phi(k)\right)\right]+\ldots+f\left[\Psi(\Phi(k))\right]\Big\}\\<\int_0^1 f[\Psi(t\Phi(k))]\,dt.\end{aligned}$$

En posant

$$\Psi[t\Phi(k)]=u,$$

on trouve enfin la limitation indiquée dans l'énoncé du théorème III *bis*.

Il est clair que *les théorèmes III et III bis restent vrais pour un système de points placés dans un espace à un nombre quelconque de dimensions; il suffit de remplacer le mot « cercles » par « hypersphères »*.

17. Appliquons le théorème III *bis* à deux cas particuliers.

1° *Cas où* $f(r)=\log\frac{1}{r}$. — C'est le cas examiné au début. Mais nous allons obtenir une proposition plus générale que le théorème III, qui correspond au cas où l'on prendrait $\varphi(r)=1$. Prenons cette fois

$$\varphi(r)=r^{\alpha-1},$$

α étant un nombre positif quelconque. On a

$$\Phi(r)=\frac{1}{\alpha}r^{\alpha},$$

$$\int_0^k r^{\alpha-1}\log\frac{1}{r}\,dr=\frac{1}{\alpha}k^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-\log k\right).$$

On a donc l'inégalité

$$\frac{1}{n}\sum_i \log\frac{1}{\mathrm{MP}_i} < \frac{1}{\alpha} - \log k,$$

sauf pour des points M qui peuvent être enfermés à l'intérieur de cercles de rayons ρ_j, tels que

$$\sum_j (\rho_j)^\alpha = (2k)^\alpha.$$

Si l'on pose

$$k = he^{\frac{1}{\alpha}},$$

le théorème prend la forme suivante : *Les points* M *du plan pour lesquels on a*

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{MP}_i \leqq h^n$$

peuvent être enfermés à l'intérieur de circonférences, en nombre au plus égal à n, dont la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des rayons est au plus égale à $e \times (2h)^\alpha$, quel que soit le nombre positif α.

Bien entendu, les cercles à tracer dependent de α.

2° *Cas où* $f(r) = \frac{1}{r^\lambda}$. — Ce cas est intéressant quand λ est entier et positif; car si l'on se place dans un espace à $\lambda + 2$ dimensions, $f(r)$ est une fonction harmonique. Prenons

$$\varphi(r) = r^\lambda;$$

on a

$$\Phi(r) = \frac{r^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

$$\int_0^k \frac{1}{r^\lambda} r^\lambda \, dr = k.$$

On a donc l'inégalité

$$\frac{1}{n}\sum_i \frac{1}{(\mathrm{MP}_i)^\lambda} < \frac{\lambda+1}{k^\lambda},$$

sauf en des points intérieurs à des hypersphères de rayons ρ_j, tels que

$$\sum_j (\rho_j)^{\lambda+1} = (2k)^{\lambda+1}.$$

En particulier, le cas $\lambda = 1$ est le cas du potentiel créé par des masses électriques distribuées dans l'espace à trois dimensions ; c'est la *surface* totale des sphères exceptionnelles qui est bornée, résultat pressenti par A. Bloch ([1]).

18. Voyons maintenant ce que deviennent les théorèmes III et III *bis*, lorsqu'on passe d'une distribution discontinue de points P_i, en nombre fini, à une *distribution continue*. Nous remplaçons l'expression

$$\frac{1}{n}\sum_i f(MP_i),$$

par l'intégrale

$$\int \mu(P) f(MP)\, d\sigma_P,$$

étendue à tout le plan (ou plus généralement à tout l'espace) ; l'intégration se fait par rapport au point variable P, et $d\sigma_P$ désigne l'élément d'aire dans le cas du plan, l'élément de volume dans le cas de l'espace. L'intégrale est une fonction du point M. La fonction $\mu(P)$ est une *densité* continue, positive ou nulle, telle que l'intégrale

$$\int \mu(P)\, d\sigma_P$$

soit convergente et égale à *un*. Il est clair que si la seconde intégrale est convergente, la première l'est aussi ; car, en vertu des hypothèses faites sur la fonction $f(r)$, $f(MP)$ reste bornée lorsque, M restant fixe, P s'éloigne indéfiniment.

Plaçons-nous tout de suite dans le cas général, où interviennent les fonctions φ, Φ et Ψ. Au lieu de considérer les valeurs de l'entier λ pour lesquelles il existe un cercle de rayon $\Psi\left[\frac{\lambda}{n}\Phi(k)\right]$ qui contient λ points, considérons cette fois les valeurs de u, pour lesquelles il existe ([2]) un cercle de rayon u, jouissant de la propriété suivante : l'intégrale $\int \mu(P)\, d\sigma_P$, étendue à ce cercle, est égale à $\frac{\Phi(u)}{\Phi(k)}$.

([1]) [A], p. 356.

([2]) Il se peut d'ailleurs qu'il n'y ait point de telles valeurs de u. Dans ce cas, il n'y aura aucun cercle à tracer.

Plus précisément, u étant une variable continue qui va décroître de k à zéro, soit u_1 la plus grande valeur de u jouissant de la propriété précédente; il existe donc un cercle C_1, de rayon u_1, tel que l'intégrale $\int \mu(P)\,d\sigma_P$, étendue à ce cercle, soit égale à $\frac{\Phi(u_1)}{\Phi(k)}$. Remplaçons désormais $\mu(P)$ par *zéro* en tout point du cercle C_1. Soit ensuite u_2 la plus grande valeur de u qui jouisse de la même propriété, etc. Le procédé est général. Mais, cette fois, on peut être amené à envisager une suite infinie de circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, correspondant à des valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$. Traçons les circonférences $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, concentriques aux précédentes et de rayons doubles. Si le point M n'est intérieur à aucune de ces dernières, on trouve pour l'intégrale

$$\int \mu(P) f(MP)\,d\sigma_P,$$

étendue à tout le plan, *la même limitation* que celle trouvée tout à l'heure pour $\frac{1}{n}\Sigma f(MP_i)$.

Soient d'ailleurs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ les rayons des cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$; on a $\rho_n = 2u_n$, et par suite

$$\sum_j \Phi\left(\frac{\rho_j}{2}\right) \leqq \Phi(k),$$

le premier membre étant une somme ordinaire ou une série.

Par exemple, *étant donnée, dans l'espace à trois dimensions, une distribution de charges électriques positives, de masse totale égale à un, les points de l'espace où le potentiel est supérieur à $\frac{1}{k}$ peuvent être enfermés dans des sphères de surface totale* $64\pi k^2$.

19. Revenons au cas général. On a été amené à considérer des cercles Γ_j, ou plus généralement des hypersphères Γ_j, en nombre nul, fini ou infini. Mais, si l'on connaît une borne supérieure A de $\mu(P)$ valable dans tout l'espace, on peut indiquer une *limite supérieure du nombre n des cercles ou des hypersphères* Γ_j, au moins sous certaines conditions qui seront précisées dans un instant. Cette limite dépend de A, de k, et aussi du nombre des dimensions de l'espace; c'est la première fois qu'intervient ce dernier.

Par exemple, si l'intégrale $\int_0 f(r)\,dr$ est convergente, et si l'on prend $\varphi(r)=1$, on a

$$n \leqq [\mathrm{AU}(k)]^{\frac{1}{\mu-1}},$$

$\mathrm{U}(k)$ désignant le volume de l'hypersphère de rayon k dans l'espace à μ dimensions, dans lequel nous nous plaçons par hypothèse.

En effet, s'il existe une hypersphère de rayon tk, telle que l'intégrale $\int \mu(\mathrm{P})\,d\sigma_{\mathrm{P}}$ étendue à cette hypersphère soit égale à t, comme cette intégrale est, d'autre part, inférieure ou égale à

$$\mathrm{AU}(tk)=\mathrm{A}\,t^{\mu}\,\mathrm{U}(k),$$

on a

$$t \leqq \mathrm{A}\,t^{\mu}\,\mathrm{U}(k)$$

ou

$$\frac{1}{t} \leqq [\mathrm{AU}(k)]^{\frac{1}{\mu-1}},$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé.

La limite supérieure de n se calcule d'une manière analogue dans le cas général, *à condition que* $\frac{\Phi(r)}{r^{\mu}}$ *augmente indéfiniment lorsque* r *tend vers zéro*, μ désignant toujours le nombre de dimensions de l'espace. Il en est bien ainsi dans le cas du potentiel harmonique.

II. — Application à l'étude de $\mathrm{N}_x(r, f)$.

20. Revenons aux pôles b_μ, de modules inférieurs à $r<1$, d'une fonction $f(x)$ méromorphe dans le cercle-unité, et posons, pour $|x|<r$,

$$\sum_{\mu} \log\left|\frac{r^2-\overline{b_\mu}x}{r(x-b_\mu)}\right| = \mathrm{N}_x(r, f);$$

$\mathrm{N}_x(r, f)$ se réduit à $\mathrm{N}(r, f)$ pour $x=0$. Rappelons que les logarithmes qui figurent au premier membre sont tous positifs; par suite $\mathrm{N}_x(r, f)$ est une quantité positive.

L'inégalité (4) s'écrit alors, en rétablissant $|x|$ à la place de ρ,

$$(18)\qquad \log|f(x)| \leqq \frac{r+|x|}{r-|x|}\,m(r, f) - \frac{r-|x|}{r+|x|}\,m\left(r, \frac{1}{f}\right) - \mathrm{N}_x\left(r, \frac{1}{f}\right) + \mathrm{N}_x(r, f).$$

Nous poserons également

$$T_x(r, f) = m(r, f) + N_x(r, f);$$

$T_x(r, f)$ se réduit à $T(r, f)$ pour $x = 0$.

Nous avons vu (§ 9) que l'on a

$$m(r, f_1 f_2) \leqq m(r, f_1) + m(r, f_2);$$

comme on a évidemment

$$N_x(r, f_1 f_2) \leqq N_x(r, f_1) + N_x(r, f_2),$$

on a aussi

$$T_x(r, f_1 f_2) \leqq T_x(r, f_1) + T_x(r, f_2). \tag{19}$$

Ces inégalités se généralisent pour un nombre quelconque de fonctions.

Nous allons chercher à comparer les valeurs d'une expression telle que $N_x(r, f)$, pour deux valeurs différentes de x. Pour simplifier, supposons d'abord $r = 1$, et, changeant un peu les notations, considérons l'expression

$$\sum_i \log\left|\frac{1 - \bar{t}_i x}{x - t_i}\right|,$$

les t_i étant des nombres complexes, de modules inférieurs à *un*, en nombre fini.

Cherchons une limite supérieure du quotient [1]

$$\frac{\displaystyle\sum_i \log\left|\frac{1 - \bar{t}_i x}{x - t_i}\right|}{\displaystyle\sum_i \log\left|\frac{1 - \bar{t}_i y}{y - t_i}\right|},$$

x et y étant deux nombres de modules inférieurs à $\rho < 1$.

21. Partons de la double inégalité

$$\left|\frac{|x| - |t|}{1 - |t|.|x|}\right| \leqq \left|\frac{x - t}{1 - \bar{t}x}\right| \leqq \frac{|x| + |t|}{1 + |t|.|x|},$$

qui s'établit aisément par des considérations géométriques : en effet,

---

[1] *Cf.* [A], p. 321-322.

t étant l'affixe d'un point quelconque, fixe, intérieur au cercle-unité, la transformation homographique

$$y = \frac{x - t}{1 - \bar{t}x},$$

appliquée à x, transforme la circonférence ayant son centre à l'origine, et $|x|$ pour rayon, en une autre circonférence, dont un diamètre est sur la droite joignant l'origine au point d'affixe t. Il suffit d'écrire que la distance de l'origine à un point quelconque M de cette dernière circonférence atteint son maximum et son minimum lorsque M vient respectivement aux deux extrémités de ce diamètre, pour obtenir l'inégalité précédente.

Partageons les points t_i en deux catégories, suivant que $|t_i|$ est supérieur ou inférieur à $\frac{1+\rho}{2}$.

1° *Cas où* $|t| > \frac{1+\rho}{2}$. — On a

$$\log\left|\frac{1-\bar{t}x}{x-t}\right| \leqq \log\frac{1-|t|.|x|}{|t|-|x|} = \log\left[1+(1-|t|)\frac{1+|x|}{|t|-|x|}\right]$$
$$< (1-|t|)\frac{1+|x|}{|t|-|x|} < \frac{4}{1-\rho}(1-|t|)$$

et

$$\log\left|\frac{y-t}{1-\bar{t}y}\right| \leqq \log\frac{|y|+|t|}{1+|t|.|y|} = \log\left[1-(1-|t|)\frac{1-|y|}{1+|t|.|y|}\right]$$
$$< -(1-|t|)\frac{1-|y|}{1+|t|.|y|},$$

d'où

$$\log\left|\frac{1-\bar{t}y}{y-t}\right| > (1-|t|)\frac{1-|y|}{1+|t|.|y|} > \frac{1-\rho}{2}(1-|t|).$$

On en déduit

$$(20) \qquad \log\left|\frac{1-\bar{t}x}{x-t}\right| < \frac{8}{(1-\rho)^2}\log\left|\frac{1-\bar{t}y}{y-t}\right|.$$

2° *Cas où* $t \leqq \frac{1+\rho}{2}$. — On a

$$\left|\frac{y-t}{1-\bar{t}y}\right| \leqq \frac{|y|+|t|}{1+|t|.|y|},$$

et le maximum du second membre a lieu pour $|y| = \rho$, $|t| = \frac{1+\rho}{2}$.

On trouve alors immédiatement

$$\left|\frac{y-t}{1-\bar{t}y}\right| \leq 1 - \frac{(1-\rho)^2}{4},$$

d'où

$$\log\left|\frac{1-\bar{t}y}{y-t}\right| > \frac{(1-\rho)^2}{4}.$$

Soit n le nombre des points t_i de modules inférieurs ou égaux à $\frac{1+\rho}{2}$. On a, d'après ce qui précède,

$$\sum \log\left|\frac{1-\bar{t}_i y}{y-t_i}\right| > n\frac{(1-\rho)^2}{4}, \tag{21}$$

la somme qui figure au premier membre étant étendue à ces points t_i. Mais on a évidemment

$$\sum \log\left|\frac{1-\bar{t}_i x}{x-t_i}\right| < \sum \log\frac{2}{|x-t_i|}, \tag{22}$$

les sommes étant toujours étendues aux mêmes points t_i.

Si k est un nombre positif arbitraire, on peut, en vertu du théorème III, tracer des cercles dont la somme des rayons soit égale à $4ek$, et tels que l'on ait l'inégalité [1]

$$\sum \log\frac{2}{|x-t_i|} < n\log\frac{1}{k}, \tag{23}$$

sauf peut-être lorsque le point x est intérieur aux cercles précédents.

Des inégalités (21), (22) et (23), on déduit

$$\sum \log\left|\frac{1-\bar{t}_i x}{x-t_i}\right| < \frac{4}{(1-\rho)^2}\log\frac{1}{k}\sum \log\left|\frac{1-\bar{t}_i y}{y-t_i}\right|.$$

Dans cette inégalité les sommes sont étendues aux points t_i de modules inférieurs ou égaux à $\frac{1+\rho}{2}$. Pour tout point t de module supérieur à $\frac{1+\rho}{2}$, on a l'inégalité (20). On a donc, en étendant cette fois les

---

[1] On suppose évidemment $4ek < 1$; donc $\log\frac{1}{k}$ est positif, et même plus grand que 2.

sommes à tous les points t_i,

$$\sum_i \log\left|\frac{1-\bar{t}_i x}{x-t_i}\right| < M \sum_i \log\left|\frac{1-\bar{t}_i y}{y-t_i}\right|, \tag{24}$$

M désignant le plus grand (¹) des deux nombres

$$\frac{8}{(1-\rho)^2} \quad \text{et} \quad \frac{4}{(1-\rho)^2}\log\frac{1}{k}.$$

En définitive, *l'inégalité* (24) *est vraie pour tout couple de points x et y, intérieurs au cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, exception faite peut-être pour des points x qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à $4ek$.*

Il suffit de remplacer, dans l'inégalité (24), x par $\frac{x}{r}$, y par $\frac{y}{r}$, et t_i par $\frac{b_\mu}{r}$, pour trouver l'inégalité

$$N_2(r,f) < MN_1(r,f), \tag{25}$$

M désignant cette fois le plus grand des nombres

$$\frac{8r^2}{(r-\rho)^2} \quad \text{et} \quad \frac{4r^2}{(r-\rho)^2}\log\frac{1}{k};$$

cette inégalité est valable pour tout couple de points x et y, intérieurs au cercle de rayon $\rho < r$ ayant pour centre l'origine, exception faite peut-être pour des points x qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à $4erk$, et *a fortiori* inférieure à $4ek$.

L'inégalité (25) entraîne la suivante

$$T_2(r,f) < MT_1(r,f). \tag{25'}$$

22. Ce point étant acquis, nous pouvons établir quelques théorèmes qui, si compliqués qu'ils puissent paraître, rendront ensuite de grands services.

(¹) Pratiquement, on peut prendre $M = \frac{4}{(1-\rho)^2}\log\frac{1}{k}$, puisque $\log\frac{1}{k}$ est plus grand que 2.

Théorème IV. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité, et soient r_0, ρ, γ et α des nombres positifs fixés une fois pour toutes ($\rho < r_0 < 1$). Supposons que l'inégalité*

$$|f(x)| > \alpha$$

soit vérifiée en un point x intérieur au cercle C_ρ de rayon ρ ayant pour centre l'origine; r ayant une valeur positive quelconque comprise entre r_0 et un, on a, pour tout point y intérieur au cercle C_ρ, l'inégalité

$$T_x\left(r, \frac{1}{f}\right) < K + K\, m(r, f),$$

sauf peut-être pour des points qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences (¹) *dont la somme des rayons est égale à γ. La lettre K désigne une constante positive* (²), *qui dépend seulement de r_0, ρ, γ et α.*

En effet, l'inégalité (18) permet d'écrire, puisque $N_x(r, f) = 0$,

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{r + |x|}{r - |x|} N_x\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r + |x|}{r - |x|}\right)^2 m(r, f) - \frac{r + |x|}{r - |x|} \log|f(x)|.$$

D'ailleurs,

$$-\log|f(x)| \leqq \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(x)|},$$

et, puisque

$$r > r_0, \qquad |x| < \rho,$$

on a *a fortiori*

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_x\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r_0 + \rho}{r_0 - \rho}\right)^2 m(r, f) + \frac{r_0 + \rho}{r_0 - \rho} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(x)|},$$

d'où

$$T_x\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r_0 + \rho}{r_0 - \rho}\right)^2 m(r, f) + \frac{r_0 + \rho}{r_0 - \rho} \overset{+}{\log} \frac{1}{\alpha}.$$

Il suffit de joindre à cette inégalité l'inégalité (25′) dans laquelle on aurait permuté les lettres x et y, et remplacé f par $\frac{1}{f}$, pour établir le théorème IV.

(¹) Ces circonférences dépendent de la valeur de r considérée.

(²) Nous aurions pu écrire $A + B\,m(r, f)$, mais l'introduction de la lettre unique K est aussi simple.

Théorème IV *bis*. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle-unité. Si les points x, intérieurs au cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, pour lesquels on a*

$$|f(x)| > \alpha, \tag{26}$$

ne peuvent pas être enfermés à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons soit égale à γ, on a, pour tout point y intérieur au cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, et sans exception cette fois,

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < \mathrm{K} + \mathrm{K}\mathrm{T}_y(r, f) \qquad (r > r_0).$$

Les notations du théorème précédent sont conservées.

En effet, l'inégalité (18), traitée comme tout à l'heure, permet d'écrire

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r_0+\rho}{r_0-\rho}\right)^2 \mathrm{T}_x(r, f) + \frac{r_0+\rho}{r_0-\rho} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(x)|},$$

et, d'après l'hypothèse de l'énoncé, on peut choisir x de façon que les inégalités (25') et (26) soient valables toutes deux, ce qui démontre le théorème.

Théorème IV *ter*. — *Les conditions du théorème IV bis étant maintenues, on a*

$$\mathrm{T}_y\left(r, \frac{1}{f}\right) < \mathrm{K} + \mathrm{K}\mathrm{T}_y(r, f) \qquad (r > r_0),$$

sauf peut-être pour des points qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à γ.

En effet, l'inégalité (18) permet d'écrire

$$\mathrm{T}_x\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \left(\frac{r_0+\rho}{r_0-\rho}\right)^2 \mathrm{T}_y(r, f) + \frac{r_0+\rho}{r_0-\rho} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(x)|},$$

et l'on peut choisir x de façon que l'inégalité (26) soit vérifiée en même temps que la suivante

$$\mathrm{T}_x(r, f) < \mathrm{M}\mathrm{T}_y(r, f),$$

quel que soit y de module inférieur à ρ.

Mais l'on a, pour tout point d'affixe y inférieure à ρ, sauf peut-être pour des points qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à γ, l'inégalité

$$T_y\left(r, \frac{1}{f}\right) < MT_x\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

ce qui démontre le théorème.

23. Avant de terminer ce genre de considérations, indiquons, en passant, comment l'inégalité (25) permet de compléter un théorème de S. Mandelbrojt [D]. On peut donner au théorème primitif la forme suivante :

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe, sans zéros, et de module inférieur à un dans le cercle-unité; x et y étant deux points quelconques du cercle de rayon $\rho < 1$ ayant pour centre l'origine, le quotient

$$\frac{\log|f(x)|}{\log|f(y)|}$$

admet des bornes supérieure et inférieure ne dépendant que de ρ.

Il est d'ailleurs facile de trouver leurs valeurs exactes; ce sont

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2,$$

comme le montre l'inégalité (8) où l'on fait $m(1, f) = 0$; ces bornes sont atteintes avec la fonction $e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

Voici maintenant le théorème complété :

Théorème V. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe, de module inférieur à un dans le cercle-unité, pouvant avoir des zéros; à tout nombre positif ρ inférieur à un, et à tout nombre positif γ arbitraire, on peut faire correspondre un nombre positif A, indépendant de la fonction f, et tel que l'on ait*

$$\frac{\log|f(x)|}{\log|f(y)|} \leq A$$

pour tout couple de points x et y, intérieurs au cercle de rayon ρ, ayant *pour centre l'origine, exception faite peut-être pour des points x, qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à γ.*

Soit en effet r un nombre positif compris entre ρ et 1; appliquons l'inégalité (18), en tenant compte des égalités

$$m(r, f) = 0, \qquad N_i(r, f) = 0;$$

il vient, en remplaçant x par y,

$$\log|f(y)| \leqq -\frac{r-|y|}{r+|y|} m\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_i\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

et aussi, en remplaçant f par $\frac{1}{f}$,

$$\log\frac{1}{|f(x)|} \leqq \frac{r+|x|}{r-|x|} m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_i\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Mais, puisque $|x|$ et $|y|$ sont inférieurs à ρ, les deux inégalités précédentes entraînent *a fortiori* les deux suivantes :

$$(27) \qquad \begin{cases} \log|f(y)| \leqq -\dfrac{r-\rho}{r+\rho} m\left(r, \dfrac{1}{f}\right) - N_i\left(r, \dfrac{1}{f}\right), \\ \log\dfrac{1}{|f(x)|} \leqq \dfrac{r+\rho}{r-\rho} m\left(r, \dfrac{1}{f}\right) + N_i\left(r, \dfrac{1}{f}\right). \end{cases}$$

De la première on tire en particulier

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq -\frac{r+\rho}{r-\rho} \log|f(y)|;$$

portons dans la seconde; il vient

$$-\log|f(x)| \leqq -\left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^2 \log|f(y)| + N_i\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

et, en divisant par $-\log f|(y)|$ qui est positif,

$$\frac{\log|f(x)|}{\log|f(y)|} \leqq \left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^2 + \frac{N_i\left(r, \dfrac{1}{f}\right)}{-\log|f(y)|}.$$

Or, d'après (27), on a

$$-\log|f(y)| \geqq N_1\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{\log|f(x)|}{\log|f(y)|} \leqq \left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^2 + \frac{N_e\left(r, \frac{1}{f}\right)}{N_1\left(r, \frac{1}{f}\right)}.$$

Mais, sauf peut-être pour des points x qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à γ, on a, d'après (25),

$$\frac{N_e\left(r, \frac{1}{f}\right)}{N_1\left(r, \frac{1}{f}\right)} < M,$$

M étant le plus grand des deux nombres

$$\frac{8r^2}{(r-\rho)^2} \quad \text{et} \quad \frac{4r^2}{(r-\rho)^2}\log\frac{4e}{\gamma}.$$

Il suffit de prendre r supérieur à un nombre r_1 plus grand que ρ, pour obtenir l'inégalité

$$\frac{\log|f(x)|}{\log|f(y)|} \leqq A,$$

pour tout couple de points x et y, intérieurs au cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, exception faite peut-être pour des points x qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à γ; le nombre A est égal à la plus grande des quantités

$$\left(\frac{r_1+\rho}{r_1-\rho}\right)^2 + \frac{8r_1^2}{(r_1-\rho)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{r_1+\rho}{r_1-\rho}\right)^2 + \frac{4r_1^2}{(r_1-\rho)^2}\log\frac{4e}{\gamma},$$

et, comme on peut choisir r_1 aussi voisin de *un* qu'on veut, on peut prendre A aussi voisin qu'on veut de la plus grande des quantités

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 + \frac{8}{(1-\rho)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 + \frac{4}{(1-\rho)^2}\log\frac{4e}{\gamma}.$$

Il importe de remarquer que, pour une fonction $f(x)$ donnée, les circonférences exceptionnelles à tracer dépendent du choix de r_1.

CHAPITRE III.

UN CRITÈRE DE FAMILLE COMPLEXE NORMALE.

24. Considérons, dans le cercle-unité, une famille infinie de systèmes de p fonctions $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$, $X_p(x)$, holomorphes, sans zéros, vérifiant l'identité

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p \equiv 0.$$

On pourrait affecter chaque fonction d'un symbole indiquant le système de la famille auquel elle appartient, mais nous ne le ferons pas, pour simplifier l'écriture.

Nous ne porterons notre attention que sur les rapports mutuels $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p$) *des fonctions d'un même système*. On pourrait, par exemple, supposer $X_p \equiv 1$, mais cela romprait la symétrie des notations.

Nous allons, dans ce Chapitre, établir un critère de famille complexe normale relatif à une telle famille. En réalité, ce ne sera pas tout à fait un critère de famille complexe normale, au sens adopté jusqu'ici par P. Montel; nous verrons, en effet, qu'on ne peut pas affirmer que toutes les familles $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ soient normales. Nous nous trouvons donc en présence d'une « famille complexe normale » d'un type nouveau.

25. Montrons d'abord comment certaines considérations géométriques peuvent conduire à des systèmes de p fonctions holomorphes, sans zéros, dont la somme est identiquement nulle. Nous justifierons en même temps l'expression *systèmes de fonctions à variétés linéaires lacunaires*, introduite par A. Bloch.

Plaçons-nous dans l'*espace projectif complexe* à $p-2$ dimensions; un point de cet espace possède $p-1$ coordonnées complexes homogènes. Soient

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_p = 0$$

les équations de p variétés linéaires $V_1, V_2, \ldots, V_p$, à $p-3$ dimensions. Les premiers membres de ces équations sont des formes linéaires des $p-1$ coordonnées, et $p-1$ quelconques de ces formes sont supposées linairement indépendantes. Chacune d'elles n'est définie *a priori* qu'à un facteur constant près; nous pouvons disposer de ces facteurs constants, de façon que $X_1, X_2, \ldots, X_p$ vérifient l'identité

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p \equiv 0.$$

Supposons alors que les $p-1$ coordonnées homogènes d'un point M de l'espace soient des fonctions holomorphes de la variable complexe x, définies dans le cercle-unité par exemple; si, quel que soit x, le point $M(x)$ ne vient sur aucune des p variétés $V_1, V_2, \ldots, V_p$, que nous nommerons alors *lacunaires*, et si l'on remplace, dans $X_1, X_2, \ldots, X_p$, les coordonnées du point M en fonction de x, on obtient p fonctions $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_p(x)$, holomorphes, sans zéros, dont la somme est identiquement nulle.

Pour employer le langage de P. Montel ([1]), les $p-1$ coordonnées du point M admettent p *combinaisons linéaires exceptionnelles* $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

Le cas $p = 3$ est celui d'une droite complexe (plan de la variable complexe) à trois points lacunaires, par exemple 0, 1 et ∞ (critère de P. Montel).

Le cas $p = 4$ est celui du plan projectif complexe à quatre droites lacunaires, non concourantes trois à trois.

I. — Cas de trois fonctions.

26. Avant de traiter le cas général, il sera bon de nous familiariser avec la méthode de démonstration, en l'appliquant d'abord au cas $p = 3$. Nous allons montrer que, étant donnée, dans le cercle-unité, une famille de systèmes de trois fonctions X_1, X_2, X_3, holo-

---

([1]) *Voir* par exemple [E]. Chapitre X.

morphes, sans zéros, dont la somme est identiquement nulle, il est possible d'en extraire une suite infinie de systèmes, pour laquelle les rapports mutuels $\frac{X_1}{X_2}$, $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ convergent respectivement, soit vers des fonctions holomorphes sans zéros, soit vers la constante zéro, soit vers la constante infinie ([1]). Il s'agit de *convergence uniforme dans tout domaine fermé intérieur* au domaine considéré, ici le cercle-unité, et *nous convenons, une fois pour toutes, de ne jamais envisager d'autre type de convergence que celui-là*, sauf indication contraire.

Introduisons également une convention de langage : nous dirons qu'une suite de fonctions holomorphes, sans zéros, « converge au sens strict », ou plus simplement « converge », lorsqu'elle converge vers une limite qui n'est ni la constante zéro ni la constante infinie; dans ce cas, la limite est une fonction holomorphe sans zéros, en vertu d'un théorème classique. Nous mettons donc à part le cas où la limite est égale à l'une des valeurs exceptionnelles des fonctions de la suite, ici zéro et l'infini. L'inverse d'une fonction qui « converge » « converge » aussi; le produit ou le quotient de deux fonctions qui « convergent » « converge » vers le produit ou le quotient des limites.

Dans le cas général où la suite converge vers une fonction holomorphe ou vers la constante infinie, nous dirons que la suite « converge au sens large ».

27. *Étant donnée, dans le cercle-unité, une famille infinie de systèmes de trois fonctions, holomorphes, sans zéros, vérifiant l'identité*

$$X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0,$$

nous allons faire voir qu'*on peut en extraire une suite infinie de systèmes, jouissant d'une des propriétés suivantes :*

a. Les rapports mutuels $\frac{X_1}{X_2}$, $\frac{X_1}{X_3}$ *et* $\frac{X_2}{X_3}$ « *convergent* »;

([1]) Il est à peine besoin de faire remarquer que ce fait est une conséquence directe du critère de P. Montel; car la fonction $-\frac{X_1}{X_3}$, par exemple, est holomorphe, et ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*.

b. λ, μ, ν *désignant les trois indices* 1, 2, 3 *rangés dans un certain ordre*, $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ *converge vers* -1, *et* $\frac{X_\nu}{X_\lambda}$ *et* $\frac{X_\nu}{X_\mu}$ *convergent vers zéro.*

Dans le cas *b*, nous dirons, en anticipant sur le cas général, que X_λ et X_μ sont de *première catégorie*, et X_ν de *seconde catégorie*. Dans le cas *a*, nous dirons que toutes les fonctions sont de première catégorie. Il y a, en somme, quatre circonstances possibles, suivant que les trois fonctions sont de première catégorie, ou que l'une d'elles est de seconde catégorie.

Dans le théorème précédent, nous avons énoncé des propriétés de convergence qui ont lieu dans le cercle-unité; mais il suffit, pour l'établir, de montrer qu'on peut extraire, de la famille donnée, une suite de systèmes jouissant de ces mêmes propriétés de convergence *dans un cercle de rayon quelconque* $r_0 < 1$ *ayant pour centre l'origine*. En effet, une fois ce point acquis, donnons-nous une suite infinie de cercles [1] $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, dont les rayons tendent vers *un*. Nous pouvons extraire de la famille une suite de systèmes pour laquelle un des quatre cas de convergence se trouve réalisé dans le cercle C_1; de cette suite nous pouvons extraire une suite nouvelle, pour laquelle un des quatre cas se trouve réalisé dans le cercle C_2; et ainsi de suite. Le nombre des cas possibles étant fini (quatre), l'un d'eux se trouvera réalisé pour une infinité de cercles, et le procédé diagonal fournira une suite de systèmes pour laquelle les propriétés de convergence, relatives à ce cas, auront lieu dans le cercle-unité tout entier [2].

28. Soit donc C_0 un cercle de rayon fixe $r_0 < 1$. Commençons par envisager diverses hypothèses :

1° Supposons d'abord qu'on puisse extraire de la famille une suite de systèmes pour laquelle $\frac{X_\nu}{X_\lambda}$ converge vers zéro dans le cercle C_0. Alors, en vertu de l'identité

$$1 + \frac{X_\mu}{X_\lambda} + \frac{X_\nu}{X_\lambda} \equiv 0,$$

(1) Tous les cercles dont nous parlerons désormais ont pour centre l'origine.

(2) Nous aurions pu simplifier un peu ce raisonnement; mais il présentera l'avantage de s'appliquer sans modification au cas où p est quelconque.

$\frac{X_\mu}{X_\lambda}$ converge vers -1, et $\frac{X_\nu}{X_\mu} = \frac{X_\nu}{X_\lambda} \cdot \frac{X_\lambda}{X_\mu}$ converge vers zéro dans le cercle C_0. Le théorème est donc établi dans ce cas.

2° Supposons en second lieu qu'on puisse extraire une suite pour laquelle $\frac{X_\mu}{X_\lambda}$ converge vers -1 dans le cercle C_0; alors $\frac{X_\nu}{X_\lambda}$ et $\frac{X_\nu}{X_\mu}$ convergent vers zéro, et le théorème est établi dans ce cas également.

3° Supposons enfin qu'on puisse extraire une suite pour laquelle $\frac{X_\mu}{X_\lambda}$ « converge » vers une limite différente de -1 dans le cercle C_0; alors $\frac{X_\nu}{X_\lambda} = -\left(1 + \frac{X_\mu}{X_\lambda}\right)$ « converge », et $\frac{X_\mu}{X_\nu} = \frac{\frac{X_\mu}{X_\lambda}}{\frac{X_\nu}{X_\lambda}}$ « converge » aussi.

29. Nous pouvons désormais, pour établir le théorème, exclure l'hypothèse 1°. Il existe alors un nombre positif α, jouissant de la propriété suivante : tout quotient $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$, quels que soient λ et μ pris parmi les nombres 1, 2, 3, est supérieur en module à α en un point au moins du cercle C_0, et inférieur en module à $\frac{1}{\alpha}$ en un point du même cercle; le nombre α est valable pour tous les systèmes de la famille. Deux hypothèses, qui s'excluent mutuellement, sont alors possibles :

I. *Supposons qu'on puisse extraire de la famille une suite infinie de systèmes, pour laquelle la dérivée logarithmique de $\frac{X_1}{X_2}$ reste inférieure ou égale à un* (1) *en module en tout point du cercle* C_0.

Je dis que, dans ces conditions, $\left|\frac{X_1}{X_2}\right|$ admet des bornes supérieure et inférieure fixes dans le cercle C_0. En effet, $\frac{X_1}{X_2}$ étant holomorphe et sans zéros, nous pouvons poser pour un instant

$$\frac{X_1}{X_2} = e^{f(x)},$$

$f(x)$ étant une fonction holomorphe. La dérivée $f'(x)$ a, par hypo-

(1) Au lieu de *un*, nous pourrions prendre n'importe quel nombre positif fixe.

thèse, son module inférieur ou égal à *un* en tout point du cercle C_0. Soient alors x_1 et x_2 deux points quelconques intérieurs à ce cercle; on peut les joindre par un segment de droite de longueur inférieure à $2r_0$, et l'on a donc, en intégrant,

$$|f(x_1)-f(x_2)| < 2r_0,$$
$$e^{|f(x_1)-f(x_2)|} < e^{2r_0}.$$

Or, u étant un nombre complexe, on a l'inégalité

$$|e^u| \leq e^{|u|},$$

d'où l'on déduit ici

$$|e^{f(x_1)-f(x_2)}| < e^{2r_0},$$
$$\left|\frac{e^{f(x_1)}}{e^{f(x_2)}}\right| < e^{2r_0}.$$

Appliquons cette dernière inégalité en prenant pour x_1 un point x quelconque du cercle C_0, et pour x_2 le point de ce cercle où $\left|\frac{X_1}{X_2}\right| < \frac{1}{\alpha}$. Il vient

$$\left|\frac{X_1(x)}{X_2(x)}\right| < \frac{1}{\alpha}\, e^{2r_0}.$$

On démontrerait de même l'inégalité

$$\left|\frac{X_1(x)}{X_2(x)}\right| > \alpha e^{-2r_0}.$$

Ainsi, $\left|\frac{X_1}{X_2}\right|$ admet des bornes supérieure et inférieure fixes dans le cercle C_0.

La famille des fonctions $\frac{X_1}{X_2}$ est donc normale, et l'on peut, de la suite de systèmes considérée, extraire une suite infinie pour laquelle $\frac{X_1}{X_2}$ « converge » dans le cercle C_0. On se ramène à l'une des hypothèses 2° et 3°, et le théorème est établi.

II. *L'hypothèse précédente étant exclue*, on peut appliquer le théorème II *bis* (§ 13) à l'identité

$$\frac{X_1}{X_3} + \frac{X_2}{X_3} + 1 \equiv 0.$$

En effet, chacune des fonctions $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ est supérieure en module à α en un point du cercle C_0; quant au déterminant Δ du Chapitre I, c'est ici la dérivée logarithmique $\frac{\frac{X_1}{X_3}}{\frac{X_2}{X_3}} = \frac{X_1}{X_2}$; or elle est supérieure en module à *un*, donc à un nombre fixe, en un point au moins du cercle C_0.

Par conséquent, on peut extraire de la famille une suite infinie de systèmes, pour laquelle $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ « convergent » dans le cercle C_0, et le théorème est complètement démontré.

Remarque. — Ce théorème, relatif à des fonctions de x *définies dans le cercle-unité*, reste vrai si le *domaine* de variation de x est *quelconque*, en vertu du théorème classique : *Si une famille de fonctions holomorphes est normale en chaque point* (¹) *d'un domaine, elle est normale dans tout le domaine.*

Nous n'avons pas eu besoin, jusqu'ici, des théorèmes IV, IV *bis* et IV *ter*. Ils vont intervenir dans le cas $p = 4$ et dans le cas général.

II. — Cas de quatre fonctions.

30. Introduisons d'abord, avec A. Bloch ([A], p. 318), quelques conventions de langage et d'écriture. Désignons le *wronskien* de n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la variable x, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ \frac{dX_1}{dx} & \frac{dX_2}{dx} & \ldots & \frac{dX_n}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1}X}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}X_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}X_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix},$$

par la notation $|X_1 X_2 \ldots X_n|$.

(¹) On dit qu'une famille de fonctions est *normale en un point* P, s'il existe un cercle de centre P dans lequel elle est normale.

Observons que

$$\frac{|U_1 U_2|}{U_1 U_2} = \frac{U'_2}{U_2} - \frac{U'_1}{U_1}$$

est la dérivée logarithmique de $\frac{U_2}{U_1}$. Appliquons cette remarque à

$$U_1 = |X_1 X_3 X_4 \ldots X_n|,$$
$$U_2 = |X_2 X_3 X_4 \ldots X_n|,$$

et servons-nous de l'identité [1]

$$|U_1 U_2| = |X_3 X_4 \ldots X_n| \,.\, |X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots X_n|.$$

---

[1] Pour l'établir, regardons pour un instant $|U_1 U_2|$ et $|X_1 X_2 X_3 \ldots X_n|$ comme des polynomes à n^2 variables indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n, X'_1, \ldots, X'_n, \ldots, X_1^{(n-1)}, \ldots, X_n^{(n-1)}$. Nous allons montrer que tout système de n^2 nombres qui satisfait à l'équation

$$|X_1 X_2 \ldots X_n| = 0$$

satisfait aussi à l'équation

$$|U_1 U_2| = 0;$$

comme les premiers membres de ces deux équations sont linéaires en $X_1^{(n-1)}$, il en résultera que le polynome $|U_1 U_2|$ est divisible par le polynome $|X_1 X_2 \ldots X_n|$; en égalant les coefficients de $X_1^{(n-1)}$, on trouvera l'identité cherchée.

Or, soit un système de n^2 nombres a_i^j satisfaisant à la relation

$$\begin{vmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \ldots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

nous allons faire voir que si, dans le polynome $|U_1 U_2|$, on remplace les lettres $X_i^{(j)}$ respectivement par les nombres a_i^j, on trouve zéro. En effet, les n fonctions de x

$$X_i = a_i^0 + a_i^1 x + \frac{1}{2} a_i^2 x^2 + \ldots + \frac{1}{n-1!} a_i^{n-1} x^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont liées par une relation linéaire homogène

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n \equiv 0,$$

à coefficients constants non tous nuls. Si α_1 et α_2 sont nuls, les fonctions $X_3, X_4, \ldots, X_n$ sont liées par une relation linéaire homogène; les wronskiens U_1 et U_2 sont donc identiquement nuls, et l'on a $|U_1 U_2| \equiv 0$. Si α_1 et α_2 ne sont pas nuls tous deux, les $n-1$ fonctions $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, X_3, \ldots, X_n$ sont liées par une relation linéaire homo-

Nous voyons que la fraction

$$\frac{|X_3X_4\ldots X_n|\,.\,|X_1X_2X_3X_4\ldots X_n|}{|X_1X_3X_4\ldots X_n|\,.\,|X_2X_3X_4\ldots X_n|},$$

que nous appellerons *fraction dérivée à n termes* formée avec les n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$, est la dérivée logarithmique de

$$\frac{|X_2X_3X_4\ldots X_n|}{|X_1X_3X_4\ldots X_n|}.$$

Avec n fonctions on peut former $n(n-1)$ fractions dérivées à n termes, deux à deux opposées.

Nous désignerons sous le nom de *fraction dérivée à deux termes*, une expression telle que $\frac{|X_1X_2|}{X_1X_2}$.

Il est clair que les fractions dérivées, ainsi que les expressions de la forme $\frac{|X_1X_2\ldots X_n|}{X_1X_2\ldots X_n}$, ne changent pas si l'on multiplie toutes les fonctions par une même fonction de x.

31. Cela posé, énonçons le critère de famille complexe normale que nous démontrerons ensuite :

Théorème VI. — *Étant donnée, dans le cercle-unité, une famille infinie de systèmes de quatre fonctions holomorphes, sans zéros, vérifiant l'identité*

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \equiv 0.$$

on peut en extraire une suite infinie de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée l'une des circonstances suivantes :

a. Les indices 1, 2, 3, 4 *se partagent en deux catégories, jouissant des propriétés suivantes :* 1° *le quotient de deux fonctions quelconques de*

---

gène, et l'on a donc

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 \equiv 0,$$

d'où encore

$$|U_1U_2| \equiv 0.$$

Il suffit de faire $x = 0$ dans cette dernière identité pour établir la proposition annoncée.

première catégorie « converge »; 2° *le quotient d'une fonction quelconque de seconde catégorie par une fonction quelconque de première catégorie converge vers zéro* (1); 3° comme conséquence de la propriété 2°, *le quotient de la somme des fonctions de première catégorie par l'une quelconque d'entre elles converge vers zéro*. Ajoutons qu'*il existe au moins deux indices de première catégorie*, et qu'*il peut n'exister aucun indice de seconde catégorie*.

b. Les indices se partagent en deux groupes de deux indices chacun, soient i, j et k, l. Les quotients $\frac{X_i}{X_j}$ et $\frac{X_k}{X_l}$ convergent vers -1.

Pour plus de clarté, examinons les différents cas prévus dans a. Si tous les indices sont de première catégorie, tous les quotients $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « convergent », λ et μ prenant toutes les valeurs 1, 2, 3, 4. S'il existe un seul indice de seconde catégorie, 4 par exemple, $\frac{X_1}{X_2}$, $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ « convergent », $\frac{X_4}{X_1}$, $\frac{X_4}{X_2}$, $\frac{X_4}{X_3}$ convergent vers zéro, et $\frac{X_1+X_2+X_3}{X_1}$ converge vers zéro. Enfin, s'il existe deux indices de seconde catégorie, 3 et 4 par exemple, $\frac{X_2}{X_1}$ converge vers -1, et $\frac{X_3}{X_1}$ et $\frac{X_4}{X_1}$ convergent vers zéro.

On montrerait, comme au paragraphe 27, qu'il suffit d'établir ces propriétés de convergence pour l'intérieur d'un cercle C_0 ($|x| < r_0 < 1$). Soit alors C_1 un cercle $|x| < r_1$ ($r_0 < r_1 < 1$).

32. Commençons par envisager deux hypothèses particulières.

1° *Supposons qu'on puisse extraire de la famille une suite de systèmes pour laquelle $\frac{X_l}{X_i}$ converge vers zéro dans le cercle* C_1, en désignant par i, j, k, l les quatre indices 1, 2, 3, 4 rangés dans un certain ordre. Considérons l'identité

$$\left(1+\frac{X_l}{X_i}\right)+\frac{X_j}{X_i}+\frac{X_k}{X_i}=0;$$

la fonction $\left(1+\frac{X_l}{X_i}\right)$ ne s'annule pas dans le cercle C_0, au moins à

(1) Ce sont les propriétés 1° et 2° qui servent précisément de définition aux catégories.

partir d'un certain rang. On est ainsi ramené au cas de trois fonctions holomorphes, sans zéros, à savoir

$$Y_1 = 1 + \frac{X_l}{X_i},$$
$$Y_2 = \frac{X_j}{X_i},$$
$$Y_3 = \frac{X_k}{X_i}.$$

On peut donc extraire, de la suite considérée, une nouvelle suite de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée, dans le cercle C_0, l'une des circonstances prévues au paragraphe 27. Examinons-les.

Si Y_1, Y_2, Y_3 sont de première catégorie, $\frac{Y_2}{Y_1}$, $\frac{Y_3}{Y_1}$ et $\frac{Y_3}{Y_2}$ « convergent » dans le cercle C_0 ; donc $\frac{X_j}{X_i}$, $\frac{X_k}{X_i}$, $\frac{X_k}{X_j}$ « convergent », et $\frac{X_l}{X_i}$, $\frac{X_l}{X_j}$, $\frac{X_l}{X_k}$ convergent vers zéro dans ce cercle ; en outre $\frac{X_i + X_j + X_k}{X_i}$ converge vers zéro. C'est bien là un des cas de convergence prévus au théorème VI.

Si Y_1 est de seconde catégorie, $\frac{X_i}{X_j}$ et $\frac{X_i}{X_k}$ convergent vers zéro, et *a fortiori* $\frac{X_l}{X_j}$ et $\frac{X_l}{X_k}$; en outre, $\frac{X_j}{X_k}$ converge vers -1. C'est là un des cas prévus au théorème VI.

Si enfin Y_2 ou Y_3 est de seconde catégorie, Y_3 par exemple, alors $\frac{X_k}{X_i}$ et $\frac{X_l}{X_i}$ convergent vers zéro, $\frac{X_j}{X_i}$ converge vers -1 : c'est encore un des cas prévus au théorème VI.

En définitive, le théorème VI se trouve établi pour le cercle C_0, dans l'hypothèse 1°.

2° *Supposons qu'on puisse extraire une suite de systèmes pour laquelle* $\frac{X_l}{X_i}$ *« converge » vers une limite différente de* -1 *dans le cercle* C_1.

Conservons les notations précédentes. La fonction limite de Y_1, qui n'est pas identiquement nulle par hypothèse, a un nombre fini de zéros dans le cercle C_0. Isolons-les à l'aide de petites circonférences Γ_i, et soit D le domaine intérieur au cercle C_0 et extérieur à ces circonférences. A partir d'un certain rang [1], la fonction Y_1 ne s'annule pas dans D. Nous pouvons donc appliquer aux trois fonctions Y_1, Y_2, Y_3, définies dans le domaine D, le critère de convergence établi plus haut. Un raisonnement, semblable à celui qui vient d'être fait dans l'hypothèse 1°, montre que l'on peut réaliser, pour les fonctions X_1, X_2, X_3, X_4, un des cas de convergence prévus au théorème VI; la convergence a lieu dans le domaine D, mais, comme on a affaire à des fonctions holomorphes qui convergent vers des fonctions holomorphes, elle a lieu également à l'intérieur des circonférences Γ_i. Il y a donc convergence dans tout le cercle C_0, et le théorème VI est établi pour le cercle C_0, dans l'hypothèse 2°.

33. Nous pouvons désormais, pour établir le théorème dans sa généralité, exclure l'hypothèse 1°. Il existe alors un nombre positif fixe α, jouissant de la propriété suivante : tout quotient $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ est supérieur en module à α en un point du cercle C_1, et inférieur en module à $\frac{1}{\alpha}$ en un point du même cercle. Plusieurs hypothèses, qui s'excluent mutuellement, sont alors posssibles :

Hypothèse I. — *Supposons qu'on puisse extraire de la famille une suite infinie de systèmes, pour laquelle deux fractions dérivées à deux termes restent inférieures ou égales à un en module en tout point du cercle* C_1.

Soit par exemple $\frac{X_1 X_2|}{X_1 X_2}$ l'une de ces deux fractions dérivées; on peut extraire de la famille une suite pour laquelle $\frac{X_1}{X_2}$ « converge » dans le cercle C_1 (*cf.* § 29, I). Si la limite de $\frac{X_1}{X_2}$ est différente de -1, on se trouve ramené à l'hypothèse 2° du paragraphe précédent, et le théorème VI est établi pour le cercle C_0.

Dans le cas où $\frac{X_1}{X_2}$ convergerait vers -1, envisageons l'autre frac-

---

[1] Nous invoquons ici le théorème suivant : *Si une suite de fonctions holomorphes $f_n(x)$ converge vers une fonction holomorphe $f(x)$ non identiquement nulle, les zéros de $f(x)$ sont les limites des zéros de $f_n(x)$.*

non dérivée de module inférieur ou égal à *un* dans le cercle C_1, soit ———. Le théorème VI est établi, à moins encore que $\frac{X_i}{X_j}$ ne converge vers -1.

Si i ou j est égal à 1 ou 2, soit par exemple $i=1$, $j=3$, on voit que, $\frac{X_3}{X_1}$ convergeant vers -1, $\frac{X_3}{X_2}$ converge vers 1, et l'on est ramené à l'hypothèse 2°.

Sinon, on a $i=3$, $j=4$, et $\frac{X_3}{X_4}$ converge vers -1 : on est alors dans le cas b du théorème VI, qui se trouve donc établi pour le cercle C_0, dans l'hypothèse I.

Excluons maintenant cette hypothèse. Nous pouvons alors extraire, de la famille, une suite infinie S de systèmes, jouissant de la propriété suivante : chacune des six fractions dérivées à deux termes, sauf une peut-être, $\frac{|X_3X_4|}{X_3X_4}$ par exemple, est supérieure à *un* en module en un point au moins du cercle C_1, et cela quel que soit le système de la suite S.

Soit r_2' un nombre positif fixe, compris entre r_1 et *un*, et désignons par $\frac{|X_iX_j|}{X_iX_j}$ l'une quelconque des cinq fractions dérivées autres que $\frac{|X_3X_4|}{X_3X_4}$. Le théorème IV [1] permet d'écrire, pour tout nombre r compris entre r_2' et *un*, l'inégalité [2]

$$(28)\qquad T_y\left(r, \frac{X_iX_j}{|X_iX_j|}\right) < K + K\,m\left(r, \frac{|X_iX_j|}{X_iX_i}\right),$$

quasi partout, à δ près, pour les points y du cercle C_1. Par « quasi partout, à δ près », nous entendons : « pour tout point du cercle C_1, sauf peut-être pour des points qu'on peut enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons est égale à δ ». Le nombre positif δ sera fixé plus loin (§ 36).

On a *a fortiori* l'inégalité

$$(28')\qquad m\left(r, \frac{X_iX_j}{|X_iX_j|}\right) < K + K\,m\left(r, \frac{|X_iX_j|}{X_iX_j}\right).$$

---

(1) Chapitre II, § 22.

(2) On peut, sans inconvénient, supposer que le même nombre K est valable pour les cinq fractions dérivées $\frac{|X_iX_j|}{X_iX_j}$.

34. Faisons alors l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE II. — *r_2 désignant un nombre positif fixe compris entre r'_2 et un, on peut extraire, de la suite* S *définie au paragraphe précédent, une suite infinie* S′, *jouissant de la propriété suivante : chacune des trois fractions dérivées* $\frac{X_1 \mid X_1 X_2 X_3 \mid}{\mid X_1 X_2 \mid . \mid X_1 X_3 \mid}$, $\frac{X_2 \mid X_1 X_2 X_3 \mid}{\mid X_2 X_1 \mid . \mid X_2 X_3 \mid}$ et $\frac{X_3 \mid X_1 X_2 X_3 \mid}{\mid X_3 X_1 \mid . \mid X_3 X_2 \mid}$ *est quasi partout, à γ près, inférieure ou égale à un en module dans le cercle* $C_2 (\mid x \mid < r_2)$.

Le nombre positif γ sera fixé dans un instant.

Considérons alors en particulier un système, d'ailleurs quelconque, de la suite S′, et raisonnons sur ce système de fonctions. En vertu de l'hypothèse, les points du cercle C_2 où l'une quelconque des trois fractions dérivées est supérieure à *un* en module, peuvent être enfermés à l'intérieur de circonférences Γ_i, en nombre fini, dont la somme des rayons est égale à 3γ. Traçons, relativement à chaque circonférence Γ_i, les deux circonférences, ayant pour centre l'origine, qui sont tangentes à Γ_i, et excluons du cercle-unité la couronne qu'elles comprennent. L'ensemble des régions ainsi exclues est constitué par des couronnes en nombre fini, centrées à l'origine, et dont la somme des épaisseurs (¹) est au plus égale à 6γ. Il suffit d'avoir pris

$$\gamma = \frac{r_2 - r'_2}{12},$$

pour qu'il existe des régions non exclues, comprises entre les deux circonférences de rayons r'_2 et r_2, ayant pour centre l'origine; ces régions sont constituées par des couronnes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, centrées à l'origine, *dont la somme des épaisseurs est au moins égale à* $\frac{r_2 - r'_2}{2}$. En tout point de ces couronnes, les trois fractions dérivées ont leurs modules inférieurs à *un*.

Je dis que le module du quotient des valeurs de $\frac{\mid X_1 X_2 \mid}{\mid X_1 X_3 \mid}$ en deux points quelconques x_1 et x_2 d'une de ces couronnes, admet des

(¹) Nous désignons sous le nom de *couronne* la région comprise entre deux circonférences concentriques, et nous appelons *épaisseur* de la couronne la différence des rayons de ces deux circonférences.

bornes supérieure et inférieure fixes. En effet, posons pour un instant

$$\frac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|} = \varphi(x).$$

La dérivée logarithmique ([1]) de $\varphi(x)$ est inférieure ou égale à *un* en module en tout point de la couronne considérée Σ_i. Or, on peut joindre les points x_1 et x_2 par une courbe, ne sortant pas de Σ_i, dont la longueur est inférieure ou égale à un nombre fixe A, qu'on peut prendre égal à $\pi r_2 + r_2 - r'_2$ par exemple. Intégrons de x_1 à x_2 le long de cette courbe, en choisissant arbitrairement la détermination de $\log\varphi(x_1)$, et en suivant par continuité la détermination de $\log\varphi(x)$. Il vient

$$|\log\varphi(x_1) - \log\varphi(x_2)| < \mathrm{A}.$$

Il existe donc une détermination de $\log\dfrac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$, pour laquelle on a

$$\left|\log\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}\right| < \mathrm{A}.$$

Or, u étant une quantité complexe,

$$-|\log u| \leqq \log|u| \leqq |\log u|.$$

On a donc ici

$$-\mathrm{A} \leqq \log\left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}\right| \leqq \mathrm{A},$$

$$e^{-\mathrm{A}} \leqq \left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}\right| \leqq e^{\mathrm{A}}.$$

Il est ainsi démontré que le module du quotient des valeurs de $\dfrac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|}$ en deux points quelconques de la couronne Σ_i admet des bornes supérieure et inférieure fixes. Si donc la fonction $\dfrac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|}$ a son module supérieur ou égal à *un* en un point de Σ_i, elle est bornée inférieurement en module par un nombre fixe, $e^{-\mathrm{A}}$, en tout point de Σ_i; sinon, elle est bornée supérieurement.

([1]) Rappelons que la fraction $\dfrac{X_1\,|X_1X_2X_3|}{|X_1X_2|\cdot|X_1X_3|}$ est, au signe près, égale à la dérivée logarithmique de $\dfrac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|}$.

De même, étant donnée l'une quelconque des couronnes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots,$ Σ_n, chacune des fonctions $\frac{|X_2X_1|}{|X_2X_3|}$ et $\frac{|X_3X_1|}{|X_3X_2|}$ est bornée en module, soit supérieurement, soit inférieurement, en tous les points de cette couronne.

35. *N'envisageons désormais que les valeurs r des rayons des circonférences centrées à l'origine et intérieures à l'une quelconque des couronnes* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$. Nous allons montrer que l'on a, pour chacune de ces valeurs de r,

$$\left.\begin{array}{l} m\left(r, \dfrac{X_2}{X_3}\right) \\ m\left(r, \dfrac{X_3}{X_2}\right) \end{array}\right\} < K + K m\left(r, \frac{|X_1X_2|}{X_1X_2}\right) + K m\left(r, \frac{|X_1X_3|}{X_1X_3}\right), \tag{29}$$

K désignant une constante positive fixe, c'est-à-dire valable pour tous les systèmes de la suite S′ définie au paragraphe précédent [1]. Nous avons déjà, il est vrai, introduit au paragraphe 33 une constante K; mais il n'y a aucun inconvénient à écrire encore la même lettre, car, étant données plusieurs constantes positives $K_1, K_2, \ldots, K_l$, nous pourrons toujours, dans les inégalités envisagées, les remplacer par une seule, la plus grande d'entre elles, et l'appeler K. Cette notation sera très commode.

Pour établir l'inégalité (29), supposons par exemple que, pour la valeur de r considérée, la fonction $\frac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|}$ ait son module borné supérieurement sur la circonférence $|x| = r$; le cas où le module serait borné inférieurement se traiterait de même. Écrivons l'identité

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|} \cdot \frac{|X_1X_3|}{X_1X_3} \cdot \frac{X_1X_2}{|X_1X_2|},$$

et prenons la valeur moyenne, sur la circonférence $|x| = r$, des $\overset{+}{\log}$ des deux membres; il vient, puisque le module de $\frac{|X_1X_2|}{|X_1X_3|}$ est infé-

[1] Mais les valeurs de r pour lesquelles l'inégalité (29) est valable dépendent du système considéré.

rieur à un nombre fixe,

$$m\left(r, \frac{X_2}{X_3}\right) < K + m\left(r, \frac{X_1 X_3'}{X_1' X_3}\right) + m\left(r, \frac{X_1 X_2'}{X_1' X_2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité (28′), on a

$$m\left(r, \frac{X_1 X_2'}{X_1' X_2}\right) < K + K\,m\left(r, \frac{X_1 X_2'}{X_1' X_2}\right),$$

d'où

$$m\left(r, \frac{X_2}{X_3}\right) < K + m\left(r, \frac{X_1 X_3'}{X_1' X_3}\right) + K\,m\left(r, \frac{X_1 X_2'}{X_1' X_2}\right).$$

Mais, puisque $\frac{X_2}{X_1}$ a son module supérieur à α en un point du cercle C_1 (§ 33), on a

$$m\left(r, \frac{X_1}{X_2}\right) < K + K\,m\left(r, \frac{X_2}{X_1}\right),$$

et l'inégalité (29) est démontrée.

On a des inégalités analogues relativement aux fonctions $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_1}{X_2}$, et à leurs inverses.

Soit alors ρ un nombre positif quelconque inférieur à *un*; désignons par $m(\rho)$ la plus grande des six quantités $m\left(\rho, \frac{X_2}{X_3}\right)$, $m\left(\rho, \frac{X_3}{X_2}\right)$, $m\left(\rho, \frac{X_1}{X_3}\right)$, $m\left(\rho, \frac{X_3}{X_1}\right)$, $m\left(\rho, \frac{X_1}{X_2}\right)$ et $m\left(\rho, \frac{X_2}{X_1}\right)$. D'après ce qui précède, *l'inégalité*

$$m(r) < K + K\,m\left(r, \frac{X_1 X_2'}{X_1' X_2}\right) + K\,m\left(r, \frac{X_1 X_3'}{X_1' X_3}\right) + K\,m\left(r, \frac{X_2 X_3'}{X_2' X_3}\right)$$

est vérifiée pour des valeurs de r qui remplissent des intervalles, en nombre fini, dont la somme des longueurs est au moins égale à $\frac{r_2 - r_2'}{2}$.

Il suffit, maintenant, de reprendre la méthode de démonstration du Chapitre I, pour conclure que $m(r_1)$ admet [1] une borne supérieure valable pour tous les systèmes de la suite S′. On traitera, en effet, l'inégalité précédente comme on a traité l'inégalité (12) du paragraphe 10, et l'on arrivera à une inégalité de la forme (16). Puis, en désignant par R un nombre positif quelconque inférieur à r_2', on reprendra le raisonnement du paragraphe 11, à condition toutefois de

[1] r_1 est le rayon du cercle C_1, défini au paragraphe 31.

remplacer la considération de l'intervalle $1 - R$, par celle d'intervalles dont la somme est au moins égale à $\frac{r_2 - r'_2}{2}$. On trouve finalement que $m(R)$ est inférieur au plus grand des deux nombres M et $h \log \frac{4}{r_2 - r'_2}$, M et h étant deux nombres positifs, valables pour tous les systèmes de la suite S'. En particulier, $m(r_1) < m(R)$ est borné.

C. Q. F. D.

On peut donc extraire, de la suite S', une nouvelle suite pour laquelle $\frac{X_1}{X_2}$, $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ « convergent » dans le cercle C_1 de rayon r_1. Comme ces quotients ne peuvent converger tous les trois vers -1, on est ramené à l'hypothèse 2° du paragraphe 32, et le théorème VI est démontré pour le cercle C_0.

III. *Excluons enfin l'hypothèse II.*

Nous pouvons alors extraire, de la suite S définie au paragraphe 33, une suite infinie de systèmes jouissant de la propriété suivante : les points du cercle C_2, de rayon r_2, où $\frac{X_3 |X_1 X_2 X_3|}{|X_3 X_1| . |X_3 X_2|}$, par exemple, est supérieur à *un* en module, ne peuvent pas être enfermés à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons soit égale à γ.

Nous allons, dans ces conditions, trouver une limitation de

$$m\left(r, \frac{X_1 X_2 X_3}{|X_1 X_2 X_3|}\right),$$

lorsque r est supérieur à un nombre fixe r_3 compris entre r_2 et *un*.

36. On a en effet l'identité (1)

$$\frac{|X_1 X_2 X_3|}{X_1 X_2 X_3} = \frac{X_3 |X_1 X_2 X_3|}{|X_1 X_3| . |X_2 X_3|} \cdot \frac{|X_1 X_3|}{X_1 X_3} \cdot \frac{|X_2 X_3|}{X_2 X_3}, \tag{30}$$

d'où

$$m\left(r, \frac{X_1 X_2 X_3}{|X_1 X_2 X_3|}\right) \tag{31}$$
$$\leq m\left(r, \frac{|X_1 X_3| . |X_2 X_3|}{X_3 |X_1 X_2 X_3|}\right) + m\left(r, \frac{X_1 X_3}{|X_1 X_3|}\right) + m\left(r, \frac{X_2 X_3}{|X_2 X_3|}\right).$$

(1) *Cf* [A]. p. 327.

Mais le théorème IV *bis* permet d'écrire

$$(32)\qquad m\left(r, \frac{|X_1X_3|.|X_2X_3|}{X_3|X_1X_2X_3|}\right) < K + KT_x\left(r, \frac{X_3|X_1X_2X_3|}{|X_1X_3|.|X_2X_3|}\right),$$

pour tout point x du cercle C_1.

Or l'identité (30) peut prendre la forme

$$\frac{X_3|X_1X_2X_3|}{|X_1X_3|.|X_2X_3|} = \frac{|X_1X_2X_3|}{X_1X_2X_3}\cdot\frac{X_1X_3}{|X_1X_3|}\cdot\frac{X_2X_3}{|X_2X_3|},$$

d'où [*cf.* l'inégalité (19), Chap. II, § 20]

$$(33)\qquad T_x\left(r, \frac{X_3|X_1X_2X_3|}{|X_1X_3|.|X_2X_3|}\right)$$
$$\leq m\left(r, \frac{|X_1X_2X_3|}{X_1X_2X_3}\right) + T_x\left(r, \frac{X_1X_3}{|X_1X_3|}\right) + T_x\left(r, \frac{X_2X_3}{|X_2X_3|}\right).$$

D'autre part, d'après (28) et (28′), on a

$$(34)\qquad m\left(r, \frac{X_1X_3}{|X_1X_3|}\right) \leq T_y\left(r, \frac{X_1X_3}{|X_1X_3|}\right) < K + Km\left(r, \frac{|X_1X_3|}{X_1X_3}\right),$$

quasi partout, à δ près, pour les points y du cercle C_1, et

$$(35)\qquad m\left(r, \frac{X_2X_3}{|X_2X_3|}\right) \leq T_z\left(r, \frac{X_2X_3}{|X_2X_3|}\right) < K + Km\left(r, \frac{|X_2X_3|}{X_2X_3}\right)$$

quasi partout, à δ près, pour les points z du cercle C_1.

Il suffit de choisir δ assez petit, par exemple $\delta = \frac{r_1}{5}$, pour qu'il existe certainement des points communs aux points y et aux points z pour lesquels les inégalités (34) et (35) sont valables. Soit $x = y = z$ un de ces points communs. La comparaison des inégalités (31), (32), (33), (34) et (35) donne enfin

$$(36)\qquad m\left(r, \frac{X_1X_2X_3}{|X_1X_2X_3|}\right) < K + Km\left(r, \frac{|X_1X_2X_3|}{X_1X_2X_3}\right)$$
$$+ Km\left(r, \frac{|X_1X_3|}{X_1X_3}\right) + Km\left(r, \frac{|X_2X_3|}{X_2X_3}\right).$$

Appliquons alors la méthode du Chapitre I à l'identité

$$\frac{X_1}{X_4} + \frac{X_2}{X_4} + \frac{X_3}{X_4} + 1 \equiv 0;$$

il suffit de poser

$$F_1 = -\frac{X_1}{X_4}, \qquad F_2 = -\frac{X_2}{X_4}, \qquad F_3 = -\frac{X_3}{X_4},$$

et de partir de l'inégalité (10). On a ici

$$\Delta = \frac{|X_1 X_2 X_3|}{X_1 X_2 X_3},$$

et l'inégalité (36) donne une borne supérieure de $m\left(r, \frac{1}{\Delta}\right)$ à l'aide de quantités de la forme $m(r, P)$, P désignant un polynome en $\frac{F'_1}{F_1}$, $\frac{F'_2}{F_2}$, $\frac{F'_3}{F_3}$, $\frac{F''_1}{F_1}$, $\frac{F''_2}{F_2}$ et $\frac{F''_3}{F_3}$. A partir de ce moment, le raisonnement fait au Chapitre I se répète identique.

On peut donc extraire, de la suite considérée, une suite pour laquelle $\frac{X_1}{X_4}$, $\frac{X_2}{X_4}$ et $\frac{X_3}{X_4}$ « convergent » dans le cercle-unité, et *a fortiori* dans le cercle C_0; tous les rapports mutuels $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « convergent » alors, et le théorème VI est enfin démontré pour le cercle C_0.

D'après la remarque déjà faite, il se trouve établi également pour le cercle-unité tout entier.

37. De même que le critère relatif au cas $p = 3$, *le théorème VI reste vrai si le domaine de variation de x est quelconque*. Mais le raisonnement du paragraphe 29 (Remarque) n'est plus valable ici; en effet, nous ne sommes pas sûrs *a priori* de la proposition suivante : « Si le théorème VI est vrai pour tous les points d'un domaine, c'est-à-dire si tout point du domaine est centre d'un cercle pour lequel le théorème est vrai, il reste vrai pour l'ensemble du domaine. » Cela tient à ce que le théorème VI ne permet pas d'affirmer que la famille des fonctions $\frac{X_2}{X_1}$, par exemple, soit normale.

Il faut donc avoir recours à une autre méthode. Indiquons qu'il suffit de ramener le cas d'un domaine quelconque D au cas du cercle, en effectuant la représentation conforme, sur un cercle, du domaine de recouvrement simplement connexe (*Ueberlagerungsfläche*) du domaine D.

Sans nous attarder davantage au cas $p = 4$, qui sera étudié en détail au Chapitre suivant, traitons tout de suite le cas où p est quelconque.

III. — Cas général.

38. Théorème VII. — *Étant donnée, dans le cercle-unité, une famille infinie de systèmes de* p *fonctions holomorphes, sans zéros, vérifiant l'identité*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p \equiv 0,$$

on peut en extraire une suite infinie de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée l'une des circonstances suivantes :

a. Les indices 1, 2, ..., *p se partagent en deux catégories, jouissant des propriétés suivantes :* 1° *le quotient de deux fonctions quelconques de première catégorie « converge »;* 2° *le quotient d'une fonction quelconque de seconde catégorie par une fonction quelconque de première catégorie converge vers zéro;* 3° comme conséquence de la propriété 2°, *le quotient de la somme des fonctions de première catégorie par l'une quelconque d'entre elles converge vers zéro.* Ajoutons qu'*il existe au moins deux indices de première catégorie*, et qu'*il peut n'exister aucun indice de seconde catégorie.*

b. Il existe deux groupes d'indices, chaque groupe comprenant au moins deux indices; mais il peut exister des indices n'appartenant à aucun de ces deux groupes, lorsque $p > 4$. *Dans chaque groupe, on distingue encore entre les indices de première catégorie, en nombre au moins égal à deux, et les indices de seconde catégorie, qui peuvent d'ailleurs ne pas exister; et l'on peut énoncer, pour les fonctions d'un même groupe, les mêmes propriétés de convergence* 1°, 2° *et* 3° *que dans le cas a, avec cette différence que la propriété* 3° *est cette fois indépendante des autres.*

Le cas *a* est en somme le cas où il existe *un groupe unique comprenant tous les indices.*

Si l'on applique le théorème VII au cas $p = 4$, on retrouve le théorème VI, qui apparait ainsi comme un cas particulier d'un théorème plus général.

39. Comme le théorème VI, et pour la même raison, le théorème VII reste vrai si le domaine de variation de x est quelconque.

Indiquons alors rapidement la marche à suivre pour démontrer le théorème VII. On suppose qu'il a été établi pour $p-1$, lorsque le domaine de variation de x est quelconque, et l'on montre qu'il est vrai pour p, lorsque le domaine de variation de x est le cercle-unité.

Les fonctions envisagées étant supposées définies dans le cercle-unité, il suffit, comme dans les cas $p=3$ et $p=4$, d'établir les propriétés de convergence pour l'intérieur d'un cercle C_0, de rayon r_0, ayant pour centre l'origine. Soit C_1 un cercle concentrique et de rayon r_1 compris entre r_0 et *un*. Envisageons d'abord deux hypothèses particulières :

Hypothèse A. — On peut extraire de la famille une suite de systèmes pour laquelle $\frac{X_i}{X_j}$ converge vers zéro dans le cercle C_1, i et j désignant deux des indices $1, 2, \ldots, p$.

Hypothèse B. — On peut extraire de la famille une suite pour laquelle $\frac{X_i}{X_j}$ « converge » vers une limite différente de -1 dans le cercle C_1.

Dans l'une et l'autre hypothèses, on montre, en raisonnant comme au paragraphe 32, que le théorème VII se trouve établi pour le cercle C_0, comme conséquence du théorème VII relatif à $p-1$ fonctions définies dans un domaine quelconque.

40. On exclut désormais l'hypothèse A; plusieurs hypothèses, qui s'excluent mutuellement, sont alors possibles.

Hypothèse I. — On peut extraire de la famille une suite infinie de systèmes, pour laquelle deux fractions dérivées à deux termes restent inférieures ou égales à *un* en module en tout point du cercle C_1.

En raisonnant comme dans le cas $p=4$, on voit que le théorème VII est établi pour le cercle C_0, dans l'hypothèse I.

On exclut ensuite l'hypothèse I, ce qui conduit à l'existence d'une suite infinie S_1 de systèmes, jouissant de la propriété suivante : chacune des six fractions dérivées à deux termes, sauf une peut-être, $\frac{X_{p-1}X_p'}{X_{p-1}X_p}$ par exemple, est supérieure à *un* en module en un point du cercle C_1.

On n'envisage désormais que la suite S_1, et l'on fait relativement à cette suite l'hypothèse suivante :

Hypothèse II. — r_2 étant un nombre compris entre r_1 et *un*, on peut extraire de S_1 une suite infinie de systèmes, pour laquelle il existe un groupe de trois indices i, j, k, pris parmi $1, 2, \ldots, p-1$, tels que chacune des trois fractions dérivées à trois termes formées avec X_i, X_j et X_k soit quasi partout, à γ_2 près, inférieure ou égale à *un* en module dans le cercle $C_2(|x| < r_2)$. Le nombre positif γ_2 est ensuite convenablement choisi.

On montre, comme dans le cas $p=4$, que le théorème VII est établi pour le cercle C_0, dans l'hypothèse II.

On exclut ensuite l'hypothèse II, ce qui conduit à l'existence d'une suite S_2, extraite de la suite S_1, jouissant de la propriété suivante : λ, μ, ν désignant trois quelconques des indices $1, 2, \ldots, p$, l'une au moins des trois fractions dérivées à trois termes formées avec X_λ, X_μ et X_ν, soit $\frac{|X_\lambda X_\mu X_\nu|}{X_\lambda X_\mu \cdot X_\lambda X_\nu}$, est supérieure à *un* en module en des points du cercle C_2, qu'on ne peut pas enfermer à l'intérieur de circonférences dont la somme des rayons soit égale à γ_2.

On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse III. — r_3 étant un nombre compris entre r_2 et *un*, on peut extraire de la suite S_2 une suite infinie de systèmes, pour laquelle il existe un groupe de quatre indices i, j, k, l, pris parmi $1, 2, \ldots, p-1$, tel que chacune des fractions dérivées à quatres termes formées avec X_i, X_j, X_k et X_l soit quasi partout, à γ_3 près, inférieure ou égale à *un* en module dans le cercle C_3, de rayon r_3, ayant pour centre l'origine. On écrira cette fois des identites de la forme

$$\frac{X_k}{X_l} = \frac{|X_i X_j X_k|}{|X_i X_j X_l|} \cdot \frac{X_i X_j X_l|}{X_i X_j X_l} \cdot \frac{X_i X_j X_k}{|X_i X_j X_l},$$

et l'on pourra trouver, relativement à $m\left(r, \frac{X_i X_j X_k}{X_i X_j X_k'}\right)$, une inégalité analogue à l'inégalité (36), relative à $m\left(r, \frac{X_1X_2X_3}{|X_1X_2X_3|}\right)$. On conclut encore à la validité du théorème VII pour le cercle C_0.

Le procédé est général : l'exclusion de l'hypothèse III conduit à l'existence d'une suite S_3 extraite de la suite S_2, et l'on fait, relativement à S_3, une *hypothèse IV* qui fait intervenir les fractions dérivées à cinq termes, etc.

La dernière hypothèse, qui sera la $(p-2)^{\text{ième}}$, sera relative à une suite S_{p-3}, extraite des précédentes; elle sera formulée ainsi : r_{p-2} étant un nombre compris entre r_{p-3} et *un*, on peut extraire de S_{p-3} une suite de systèmes, pour laquelle chacune des fractions dérivées à $p-1$ termes formées avec $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ reste quasi partout, à γ_{p-2} près, inférieure ou égale à *un* en module dans le cercle C_{p-2}, de rayon r_{p-2}, ayant pour centre l'origine.

On exclut enfin cette hypothèse, ce qui conduit à l'existence d'une suite S_{p-2}, extraite de S_{p-3}, pour laquelle on peut trouver une limitation de $m\left(r, \frac{X_1X_2\ldots X_{p-1}}{|X_1X_2\ldots X_{p-1}|}\right)$, en procédant comme au paragraphe 36, et en invoquant les théorèmes IV, IV *bis* et IV *ter*. Il reste alors à appliquer la méthode du Chapitre I à l'identité

$$\frac{X_1}{X_p}+\frac{X_2}{X_p}+\ldots+\frac{X_{p-1}}{X_p}+1\equiv 0,$$

pour achever la démonstration.

Nous pouvons donc considérer le théorème VII comme définitivement établi.

41. *Extension aux fonctions de plusieurs variables.* — On sait que le critère de P. Montel s'étend facilement aux fonctions de plusieurs variables complexes [1]. On peut penser que les théorèmes VI et VII sont susceptibles d'une pareille généralisation. En réalité, cela ne va pas sans de sérieuses difficultés; je suis pourtant parvenu à démontrer que *le théorème VI s'étend aux fonctions de n variables complexes x_1, $x_2, \ldots, x_n$, définies dans l'hypercylindre*

$$|x_1|<1, \quad |x_2|<1, \quad \ldots, \quad |x_n|<1.$$

---

[1] [C. *a*]; *voir* aussi [E], p. 244.

La démonstration, qui est assez longue, sera publiée dans un Mémoire ultérieur.

CHAPITRE IV.

UN CRITÈRE DE FAMILLE COMPLEXE NORMALE (*suite*).

I. — La valeur du critère lorsque $p=4$ et lorsque $p>4$.

42. Supposons $p=4$, et examinons les diverses circonstances prévues au théorème VI. Dans le cas a, si toutes les fonctions sont de première catégorie, tous les rapports $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « convergent »; s'il y a une seule fonction de seconde catégorie, tous les rapports $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « convergent au sens large ».

Au contraire, si, dans le cas a, il existe deux fonctions de seconde catégorie, X_3 et X_4 par exemple, tous les rapports $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ convergent au sens large, *sauf le rapport* $\frac{X_3}{X_4}$; ou, du moins, le théorème ne dit rien sur $\frac{X_3}{X_4}$. Il est intéressant de donner un exemple d'une suite infinie de systèmes pour laquelle $\frac{X_1}{X_2}$ converge vers -1, $\frac{X_3}{X_1}$ et $\frac{X_4}{X_1}$ convergent vers zéro, *la famille* $\frac{X_3}{X_4}$ *n'étant pas normale*. Plaçons-nous, à cet effet, dans le cercle-unité, et prenons

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= 1 - e^{n(x-2)}, \\ X_2 &= -1 - e^{2n(x-1)}, \\ X_3 &= e^{2n(x-1)}, \\ X_4 &= e^{n(x-2)}, \end{aligned}\right.$$

n étant un entier positif qui augmente indéfiniment. La famille $\frac{X_3}{X_4}$ n'est pas normale, car $\frac{X_3}{X_4} = e^{nx}$ tend vers zéro si la partie réelle de x est négative, et vers $+\infty$ si elle est positive.

Il reste enfin à examiner le cas b. Supposons, par exemple, que $\frac{X_1}{X_2}$

et $\frac{X_3}{X_4}$ convergent vers -1 ; alors le théorème ne dit rien sur $\frac{X_1}{X_3}$. Prenons, en effet,

$$\begin{cases} X_1 = -e^{nx}, \\ X_2 = e^{nx}(1 - e^{-n}), \\ X_3 = -1, \\ X_4 = 1 + e^{n(x-1)}. \end{cases}$$

La famille $\frac{X_1}{X_3}$ *n'est pas normale.* Il suffirait même de prendre $X_2 = -X_1$, et $X_4 = -X_3$, la famille $\frac{X_1}{X_3}$ n'étant pas normale.

Par conséquent, les cas dans lesquels le théorème VI ne permet pas d'affirmer que toutes les familles $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ soient normales peuvent se présenter effectivement. Il ne faut donc pas espérer trouver, lorsque $p = 4$, un critère de famille complexe normale plus complet que le théorème VI.

43. Lorsque $p > 4$, au contraire, on peut garder l'espoir de compléter le théorème VII.

Convenons d'appeler « *cas douteux* » ceux des cas prévus dans l'énoncé de ce théorème, où il existe des indices n'appartenant à aucun groupe. Supposons d'abord $p = 5$: il y a un cas douteux, celui où il existe deux groupes de deux indices chacun, 1,2 et 3,4 par exemple. Alors $\frac{X_1}{X_2}$ et $\frac{X_3}{X_4}$ convergent vers -1, et c'est tout ce que le théorème permet d'affirmer. Or, dans tous les exemples de cette circonstance que j'ai su trouver, on pouvait, de la suite envisagée, extraire une suite nouvelle pour laquelle l'un des rapports $\frac{X_5}{X_1}$ et $\frac{X_5}{X_3}$ convergeait vers zéro. Mais je ne suis point parvenu à démontrer qu'il en soit toujours ainsi [1].

---

[1] Pour tenter d'éclaircir ce point, je me suis placé dans l'hypothèse d'une suite jouissant des propriétés suivantes : $\frac{X_1}{X_2}$ et $\frac{X_3}{X_4}$ convergent vers -1, et il est impossible d'extraire de cette suite une suite nouvelle pour laquelle l'une des fonctions $\frac{X_5}{X_1}$ et $\frac{X_5}{X_3}$

D'une façon générale, p étant quelconque, le théorème suivant s'est trouvé vérifié dans tous les exemples que j'ai pu construire :

« La circonstance b du théorème VII est remplacée par la suivante : *tous* les indices se répartissent en plusieurs groupes, comprenant chacun deux indices au moins; les fonctions d'un même groupe jouissent des mêmes propriétés de convergence 1°, 2° et 3° que dans le cas a, et ces trois propriétés sont indépendantes. »

Mais, comme je viens de le dire à propos du cas $p = 5$, je n'ai pas réussi à établir ce théorème.

44. Le théorème VII garde néanmoins sa valeur dans des cas très

---

converge vers zéro. Je me permets d'indiquer ici, sans démonstration, quelques-unes des conséquences de cette hypothèse.

Posons

$$\frac{X_1}{X_5} = -Y_1, \qquad 1 - \frac{X_2}{X_1} = \varepsilon_1,$$

$$\frac{X_3}{X_5} = -Y_2, \qquad 1 - \frac{X_4}{X_3} = \varepsilon_2.$$

On a

$$\varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 = 1,$$

et, par hypothèse, les fonctions ε_1 et ε_2, qui sont holomorphes, convergent vers zéro. Alors $\varepsilon_1 \frac{Y'_1}{Y_1}$, $\varepsilon_2 \frac{Y'_2}{Y_2}$, $\varepsilon_2 \frac{Y'_1}{Y_1}$, $\varepsilon_1 \frac{Y'_2}{Y_2}$ convergent vers zéro; de même $\varepsilon_1 \left(\frac{Y'_1}{Y_1}\right)^n$, $\varepsilon_1 \left(\frac{Y'_2}{Y_2}\right)^n$, $\varepsilon_1 \left(\frac{Y''_1}{Y_1}\right)^n$, $\varepsilon_1 \left(\frac{Y'''_1}{Y_1}\right)^n$, etc., quel que soit l'entier positif n; enfin, si n est assez grand, $(\varepsilon_1)^n Y_1$, $(\varepsilon_1)^n Y_2$, $(\varepsilon_1)^n \frac{1}{Y_1}$, $(\varepsilon_1)^n \frac{Y_1}{Y_2}$ convergent également vers zéro.

En outre, supposons, pour fixer les idées, que les fonctions soient définies dans le cercle-unité, et construisons, pour chaque système de la suite, une fonction $\varphi(x)$, holomorphe dans le cercle-unité, n'y prenant pas la valeur *un*, et y admettant les mêmes zéros que la fonction ε_1, avec les mêmes ordres de multiplicité. On a alors la proposition suivante : « *La suite des fonctions* $\varphi(x)$ *converge nécessairement vers zéro dans le cercle-unité* ».

Par exemple, les zéros de ε_1 ne peuvent pas être de la forme $\frac{2iK\pi}{m}$, m augmentant indéfiniment lorsqu'on se déplace dans la suite des systèmes, car la fonction

$$\varphi(x) = 1 - e^{mx}$$

ne converge pas vers zéro.

Ces considérations montrent pourquoi il est difficile de trouver un exemple réalisant l'hypothèse envisagée.

généraux. Plaçons-nous dans le cercle-unité, pour fixer les idées, et *supposons que chacune des fonctions* X_i *de la famille prenne à l'origine une valeur fixe* a_i, *et que la somme d'un nombre quelconque des quantités* a_i *ne soit pas nulle.*

Appliquons le théorème VII. Il ne peut pas exister deux groupes d'indices (1); donc le cas a est seul possible. De plus, il n'existe pas de fonction de seconde catégorie, puisque tout quotient $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ possède, à l'origine, une valeur fixe non nulle. Par suite, *on peut extraire de la famille une suite infinie de systèmes pour laquelle tous les rapports* $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « *convergent* »; *autrement dit, toutes les familles* $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ *sont normales, et bornées dans tout domaine fermé intérieur* (2).

Le théorème VII nous donne donc une certitude dans ce cas général; on pourrait se placer également dans d'autres hypothèses, de façon à exclure la possibilité des cas douteux.

Faisons une dernière remarque : si, comme A. Bloch, nous avions systématiquement fixé les valeurs des fonctions à l'origine, nous n'aurions pas trouvé de cas douteux (3) lorsque $p = 5$; mais il s'en serait de nouveau présenté dès que $p = 6$. Il ne semble pas que A. Bloch ait soupçonné l'existence de ces cas douteux, et il énonce un théorème (4) qui ne paraît guère certain; ou, tout au moins, rien dans son Mémoire ne conduit à admettre son exactitude.

II. — Quelques applications du critère.

45. Pour fixer les idées, nous nous placerons désormais dans le cercle-unité.

---

(1) Sinon, soient $X_1, X_2, \ldots, X_h$ les fonctions d'un même groupe, X_1, par exemple, étant de première catégorie. Le quotient $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_h}{X_1}$ devrait converger vers *zero*; or il possède une valeur fixe, non nulle, à l'origine.

(2) Cette proposition était virtuellement contenue dans le théorème VII du Mémoire de A. Bloch : [A], p. 343.

(3) En effet, les fonctions $\frac{X_1}{X_2}$ et $\frac{X_3}{X_4}$ ne pourraient pas converger toutes deux vers -1, car elles devraient prendre alors la valeur -1 à l'origine; c'est impossible, puisque X_5 n'est pas nul à l'origine.

(4) [A], Theorème IX, p. 345.

Considérons une *famille de systèmes de $p-2$ fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_{p-2}$, *holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur un.* Posons

$$X_1 = F_1, \quad X_2 = F_2, \quad \ldots, \quad X_{p-2} = F_{p-2},$$
$$X_{p-1} = 1 - F_1 - F_2 - \ldots - F_{p-2}, \quad X_p = -1;$$

$X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont des fonctions holomorphes, sans zéros, et leur somme est identiquement nulle. En leur appliquant le théorème VII, on obtient un critère de famille complexe normale, relatif à la famille $F_1, \ldots, F_{p-2}$. Nous ne l'énoncerons pas dans le cas général, à cause de sa complication; bornons-nous au cas $p = 4$.

Cas d'une famille de systèmes de deux fonctions holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur un.

Soient f et g ces deux fonctions; posons

$$X_1 = f, \quad X_2 = g, \quad X_3 = 1 - f - g, \quad X_4 = -1,$$

et appliquons le théorème VI. Examinons successivement les diverses circonstances prévues dans l'énoncé de ce théorème, en commençant par le cas b.

Ce cas se subdivise en deux :

1° $\frac{X_1}{X_2}$ et $\frac{X_3}{X_4}$ convergent vers -1. Alors $\frac{f}{g}$ converge vers -1, et $f+g$ converge vers zéro.

2° $\frac{X_1}{X_3}$ et $\frac{X_2}{X_4}$ convergent vers -1. Alors g converge vers 1, et $\frac{1-g}{f}$ converge vers zéro. Le cas où $\frac{X_1}{X_4}$ et $\frac{X_2}{X_3}$ convergent vers -1 se déduit de celui-là par permutation de f et g.

Passons au cas a. Nous avons les possibilités suivantes :

1° Tous les rapports $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ « convergent ». Alors f et g « convergent ».

2° Il existe une fonction de seconde catégorie et une seule. Ce cas se subdivise en trois :

α. X_1 ou X_2 est de seconde catégorie. Si c'est X_1, g « converge », et f converge vers zéro. Si c'est X_2, f « converge », et g converge vers zéro.

β. X_3 est de seconde catégorie. Alors f et g « convergent ».

γ. X_4 est de seconde catégorie. Alors f et g convergent vers l'infini, et $\frac{f}{g}$ « converge ».

3° Il existe deux fonctions de seconde catégorie.

α. X_1 et X_2 sont de seconde catégorie. Alors f et g convergent vers zéro.

β. X_1 et X_3 sont de seconde catégorie. Alors f converge vers zéro, g converge vers 1.

Le cas où X_2 et X_3 sont de seconde catégorie se déduit de celui-là par permutation de f et g.

γ. X_1 et X_4 sont de seconde catégorie. Alors g et $\frac{g}{f}$ convergent vers l'infini.

Le cas où X_2 et X_4 sont de seconde catégorie se déduit de celui-là par permutation de f et g.

δ. X_3 et X_4 sont de seconde catégorie. Alors f et g convergent vers l'infini, et $\frac{f}{g}$ converge vers -1.

46. Tous les cas ayant été examinés, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VI *bis*. — *Étant donnée, dans le cercle-unité, une famille de systèmes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur un, on peut en extraire une suite infinie de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée l'une des circonstances suivantes :*

1° *Chacune des fonctions f et g « converge » ou converge vers zéro;*

2° *f et g convergent vers l'infini, et $\frac{f}{g}$ « converge »;*

3° *g et $\frac{g}{f}$ convergent vers l'infini*, et la circonstance analogue, obtenue en permutant f et g;

4° *$f+g$ converge vers zéro, et $\frac{f}{g}$ converge vers* -1 ;

5° *g converge vers* 1, et $\frac{g-1}{f}$ *converge vers zéro*, et la circonstance analogue, obtenue en permutant f et g.

Dans les cas 3° et 5°, la famille des fonctions f peut ne pas être normale; dans le cas 4°, il se peut qu'aucune des familles f et g ne soit normale. Pour trouver des exemples de ces circonstances, il suffit de se reporter aux exemples donnés au paragraphe 42. Ainsi le cas 3° est réalisé pour les fonctions suivantes

$$\begin{cases} f(x) = -e^{nx}, \\ g(x) = e^{n(2-x)} + e^{nx}, \end{cases}$$

en conservant les notations du paragraphe 42. Voici un exemple du cas 4° :

$$\begin{cases} f(x) = -e^{nx}, \\ g(x) = e^{nx}(1 - e^{-n}), \end{cases}$$

et un exemple du cas 5° :

$$\begin{cases} f(x) = -e^{nx}. \\ g(x) = 1 + e^{n(x-1)}. \end{cases}$$

Dans le cas 4°, il suffit même de prendre pour $f(x)$ une famille non normale de fonctions holomorphes sans zéros, et de prendre ensuite $g(x) \equiv -f(x)$. Dans le cas 5°, on peut de même prendre pour $f(x)$ une famille non normale de fonctions holomorphes sans zéros, et prendre ensuite $g(x) \equiv 1$.

Voyons ce que devient le théorème VI *bis* lorsqu'on suppose que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la famille prennent respectivement des valeurs fixes a_0 et b_0 à l'origine ($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $a_0 + b_0 \neq 1$). Les cinq circonstances possibles se réduisent alors à trois, et l'on obtient le

Théorème VI *ter*. — *Étant donnée, dans le cercle-unité, une famille de systèmes de deux fonctions $f(x)$* et *$g(x)$, holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur un, si l'on a*

$$f(0) = a_0, \qquad g(0) = b_0 \qquad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ a_0 + b_0 \neq 1).$$

a_0 et b_0 étant deux nombres fixes, on peut extraire de la famille une suite infinie de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée l'une des circonstances suivantes :

1° *f et g « convergent »;*

2° *$f+g$ converge vers zéro, et $\frac{f}{g}$ converge vers -1, ce qui exige*

$$a_0+b_0=0;$$

3° *g converge vers 1, et $\frac{g-1}{f}$ converge vers zéro, ce qui exige $b_0=1$;*

et la circonstance analogue, obtenue en permutant f et g, a_0 et b_0.

Examinons maintenant deux cas particuliers du théorème VI *bis*.

47. Considérons d'abord une suite infinie de systèmes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur *un*, et *supposons que $f(0)$ et $g(0)$ tendent vers zéro*.

Je dis que *$f+g$ converge vers zéro* (¹).

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait, de la suite considérée, extraire une nouvelle suite S, possédant la propriété (P) suivante : $|f+g|$ est supérieur à un nombre fixe α en un point au moins d'un cercle de rayon fixe r_0 ayant pour centre l'origine. Appliquons le théorème VI *bis* à la suite S : la circonstance 1° de ce théorème n'est pas possible; en effet, on ne peut pas extraire de S une suite pour laquelle f ou g « converge », puisque $f(0)$ et $g(0)$ tendent vers zéro; on ne peut pas non plus extraire une suite pour laquelle f et g convergent vers zéro, car alors $f+g$ convergerait vers zéro pour cette suite, ce qui est en contradiction avec la propriété (P). Les circonstances 2°, 3° et 5° ne sont pas possibles non plus, puisque $f(0)$ et $g(0)$ tendent vers zéro. Enfin la circonstance 4° est en contradiction avec la propriété (P).

Le théorème VI *bis* serait donc inexact pour la suite S; par conséquent, l'hypothèse qui a conduit à l'existence de cette suite est inadmissible. C. Q. F. D.

48. Considérons, en second lieu, *une suite infinie de systèmes de*

(¹) Rappelons que nous avons convenu, au paragraphe 26, de n'envisager que la *convergence uniforme dans tout domaine fermé intérieur* au domaine considéré.

deux fonctions f et g, holomorphes, sans zéros, dont la somme converge vers zéro. Je dis qu'*on peut en extraire une nouvelle suite, pour laquelle se trouve réalisée l'une des deux circonstances suivantes :*

1° *f et g convergent vers zéro;*
2° *$\frac{f}{g}$ converge vers -1.*

En effet, dans tout cercle de rayon $r < 1$, ayant son centre à l'origine, la somme $f + g$ ne prend pas la valeur *un*, au moins à partir d'un certain rang dans la suite, puisqu'elle converge vers zéro dans le cercle-unité. Appliquons donc le théorème VI *bis*.

Dans le cas 1° de ce théorème, ou bien f « converge » vers une fonction F, et alors, comme $f + g$ converge vers zéro, g « converge » vers $-$F, donc $\frac{f}{g}$ « converge » vers -1; ou bien f converge vers zéro, et alors g converge vers zéro. Dans les cas 2° et 3°, g converge vers l'infini, et, puisque $g\left(1 + \frac{f}{g}\right)$ converge vers zéro, $\frac{f}{g}$ converge vers -1. Dans le cas 4°, $\frac{f}{g}$ converge vers -1. Enfin, dans le cas 5°, g converge vers 1; par suite f converge vers -1, et $\frac{f}{g}$ converge vers -1.

La proposition est donc démontrée [1].

Il en résulte, en particulier, que *si $|f(0)|$ est supérieur à un nombre fixe α, et si $f + g$ converge vers zéro, on est sûr que $\frac{f}{g}$ converge vers -1.* En effet, de toute suite infinie extraite de la suite considérée, on peut extraire une suite pour laquelle $\frac{f}{g}$ converge vers -1; cela suffit pour conclure, en vertu d'un raisonnement classique, dont nous aurons à faire usage à diverses reprises. Exposons-le au moins une fois : si $\frac{f}{g}$ ne convergeait pas vers -1, on pourrait extraire une suite infinie $\frac{f_n}{g_n}$, telle que $\left|1 + \frac{f_n}{g_n}\right|$ soit supérieur à un nombre fixe α en un

[1] Au lieu d'invoquer le théorème VI *bis*, c'est-à-dire en somme le théorème VI, on peut donner de cette proposition une démonstration directe, qui ne fasse pas appel aux théorèmes IV et IV *bis*; elle ressemble beaucoup à la démonstration du critère relatif au cas $p = 3$ (§ 26-29).

point au moins d'un cercle fixe ($|x| < r_0 < 1$). Or, de la suite $\frac{f_n}{g_n}$, on peut extraire une suite qui converge vers -1. Il y a contradiction.

49. Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Considérons une suite infinie de systèmes de deux fonctions holomorphes p et q, admettant respectivement les valeurs exceptionnelles (¹) *fixes α et β, dont l'une au moins n'est pas nulle; si le produit pq converge vers zéro, on peut extraire, de la suite considérée, une suite infinie pour laquelle l'une des fonctions p et q converge vers zéro.*

Dans le cas où $\alpha = 0$, on peut supposer $\beta = 1$, en multipliant q par une constante. Posons

$$f = p, \qquad g = p(q-1);$$

f et g sont holomorphes, sans zéros, et leur somme converge vers zéro. D'après le paragraphe précédent, on peut extraire une suite pour laquelle l'une des fonctions f et $\left(1+\frac{g}{f}\right)$ converge vers zéro, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas où $\alpha\beta \neq 0$, on peut supposer $\alpha = \beta = 1$. Posons :

$$X_1 = p-1, \qquad X_2 = q-1, \qquad X_3 = (p-1)(q-1), \qquad X_4 = 1-pq.$$

Les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont holomorphes et ne s'annulent pas; en outre, dans tout cercle intérieur au cercle-unité, X_4 ne s'annule pas à partir d'un certain rang, puisque X_4 converge vers *un*. Cela suffit pour qu'on puisse appliquer le théorème VI aux fonctions X_1, X_2, X_3, X_4, dont la somme est identiquement nulle. L'examen de tous les cas prévus dans l'énoncé de ce théorème (²) montre que, dans l'hypothèse où pq converge vers zéro, on peut extraire, de la suite envisagée, une suite pour laquelle l'une des fonctions p et q converge vers zéro.

Remarquons enfin que le théorème serait inexact si α et β étaient

---

(¹) On dit qu'une fonction *admet la valeur exceptionnelle* α, si elle ne prend pas la valeur α.

(²) Cet examen, semblable à celui qui figure au paragraphe 45, n'offre aucune difficulté, et j'ai jugé inutile de le reproduire ici.

nuls tous les deux. Il suffirait, pour le mettre en défaut, de prendre

$$p = e^{nx}, \qquad q = e^{-n\left(x - \frac{1}{2}\right)},$$

n étant un entier positif qui augmente indéfiniment.

Indiquons, pour terminer ces applications, que si l'on a une famille de systèmes de deux fonctions holomorphes p et q, admettant respectivement les valeurs exceptionnelles fixes α et β, dont l'une au moins n'est pas nulle, et si le produit pq ne prend pas la valeur *un*, on peut énoncer un critère de famille complexe normale.

III. — Généralisation des théorèmes de Schottky et de Landau.

50. Notre critère de famille complexe normale (théorèmes VI et VII), et les théorèmes que nous venons d'en déduire, permettent de démontrer des propositions analogues au théorème de Schottky ou au théorème de Landau. Nous supposerons, pour simplifier, $p = 4$, et nous nous placerons dans le cas, envisagé aux paragraphes 45 et 46, de *deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, holomorphes, sans zéros, dont la somme ne prend pas la valeur un*. Écrivons leurs développements en série de Taylor dans le cercle-unité :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \\ g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots \\ \qquad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ a_0 + b_0 \neq 1). \end{array}\right.$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

a_0 et b_0 étant fixés, si aucune des trois quantités $a_0 + b_0$, $a_0 - 1$ et $b_0 - 1$ n'est nulle, $|f(x)|$ et $|g(x)|$ admettent, dans tout cercle $|x| < r < 1$, des bornes supérieure et inférieure qui ne dépendent que de r, a_0 et b_0.

Considérons en effet la famille (F) de tous les systèmes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, et telles que

$$f(0) = a_0, \qquad g(0) = b_0.$$

Reportons-nous au théorème VI *ter*; les cas 2° et 3° se trouvent exclus ici. Donc, de toute suite infinie extraite de la famille (F), on peut extraire une nouvelle suite pour laquelle f et g « convergent ».

Cela suffit pour démontrer la proposition annoncée, en vertu d'un raisonnement classique, semblable à celui qui est exposé à la fin du paragraphe 48.

Puisque $|f(x)|$ et $|g(x)|$ admettent une borne supérieure $M(r)$, qui ne dépend que de r, a_0 et b_0, les inégalités fondamentales

$$|a_n| \leqq \frac{M(r)}{r^n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{M(r)}{r^n},$$

où l'on donne à r une valeur fixe, $\frac{1}{2}$ par exemple, montrent que $|a_n|$ *et* $|b_n|$ *admettent une borne supérieure qui ne dépend que de* a_0, b_0, *et de* n.

Dans les cas particuliers où l'une au moins des quantités $a_0 + b_0$, $a_0 - 1$, et $b_0 - 1$ est nulle, une étude spéciale est nécessaire. Par exemple, si $a_0 = -b_0 (a_0 \neq 1, a_0 \neq -1)$, $|f+g|$, $\left|\frac{f}{g}\right|$ et $\left|\frac{g}{f}\right|$ admettent, dans tout cercle $|x| < r < 1$, des bornes supérieures qui ne dépendent que de a_0 et de r. Si $a_0 = 1 (b_0 \neq 1, b_0 \neq -1)$, $\left|\frac{f-1}{g}\right|$, $|f|$ et $\left|\frac{1}{f}\right|$ admettent des bornes supérieures qui ne dépendent que de b_0 et de r. La méthode de démonstration est toujours la même : on se ramène au théorème VI *ter* (¹).

51. Après ces généralisations du théorème de Schottky, passons au théorème de Landau.

Soient, dans le cercle $|x| < R$, deux fonctions holomorphes $f(x)$ et $g(x)$, qui ne s'annulent pas et dont la somme ne prend pas la valeur *un* :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots, \\ g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots \\ (a_0 \neq 0, \; b_0 \neq 0, \; a_0 + b_0 \neq 1). \end{array}\right.$$

(¹) Des résultats de ce genre ont déjà été indiqués par A. Bloch : [A], p. 331, théorème III. Mais nous avons voulu ici les rattacher à notre critère de famille complexe normale.

Les fonctions $f(\mathrm{R}x)$ et $g(\mathrm{R}x)$ sont définies dans le cercle $|x| < 1$, et nous pouvons leur appliquer les propositions du paragraphe précédent. On a

$$\begin{cases} f(\mathrm{R}x) = a_0 + a_1 \mathrm{R}x + \ldots, \\ g(\mathrm{R}x) = b_0 + b_1 \mathrm{R}x + \ldots. \end{cases}$$

Par conséquent, si a_0 et b_0 sont fixés, de manière qu'aucune des trois quantités $a_0 + b_0$, $a_0 - 1$ et $b_0 - 1$ ne soit nulle, $a_1 \mathrm{R}$ et $b_1 \mathrm{R}$ admettent une borne supérieure qui ne dépend que de a_0 et b_0; si a_1, par exemple, a une valeur fixe non nulle, R *admet une borne supérieure qui ne dépend que de* a_0, b_0 *et* a_1.

Les cas où l'une des trois quantités $a_0 + b_0$, $a_0 - 1$, $b_0 - 1$ est nulle demandent à être examinés séparément. Par exemple, *si* $a_0 = -b_0 (a_0 \neq 1, a_0 \neq -1)$, *et si* $a_1 + b_1$ *n'est pas nul*, R *admet une borne supérieure qui ne dépend que de* a_0 *et* $a_1 + b_1$. En effet, $(a_1 + b_1)\mathrm{R}$ est borné en fonction de a_0, puisque, dans tout cercle $|x| < r < 1$, $|f(\mathrm{R}x) + g(\mathrm{R}x)|$ est borné en fonction de a_0 et de r (*cf.* paragraphe précédent).

Si $a_0 = 1 (b_0 \neq 1, b_0 \neq -1)$, R *admet une borne supérieure qui ne dépend que de* b_0 *et* a_1. En effet, $a_1 \mathrm{R}$ est borné en fonction de b_0, puisque, dans tout cercle $|x| < r < 1$, $|f(\mathrm{R}x)|$ est borné en fonction de b_0 et de r.

Indiquons enfin que, au lieu de faire intervenir a_1 et b_1 pour limiter R, on peut faire intervenir les coefficients a_n et b_n, de rang fixe n.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons énoncé de résultats que dans les cas les plus simples, et souvent nous n'avons fait qu'esquisser les démonstrations; celles-ci se réduisent toujours, en fin de compte, à l'examen des cas prévus par le théorème VI *ter*. Les indications précédentes donnent au moins une idée du rôle joué, dans toutes ces questions, par notre critère de famille complexe normale.

CHAPITRE V.

LES IDENTITÉS DE BOREL ET LES QUESTIONS D'UNICITÉ DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES [1].

52. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans tout le plan, ou seulement au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, que nous supposerons à l'infini. Désignons par $\mathrm{E}(a)$ l'ensemble des points où la fonction $f(x)$ prend la valeur a, et, en particulier, par $\mathrm{E}(\infty)$ l'ensemble des pôles de la fonction. Dans tout ce qui suivra, *on admettra, sauf indication contraire, que chaque point de l'ensemble* $\mathrm{E}(a)$ *est compté autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation* $f(x) = a$, *si a est fini, du pôle correspondant, si a est infini.*

Lorsque deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, méromorphes dans tout le plan, admettent le même ensemble $\mathrm{E}(a)$, nous dirons qu'*elles prennent ensemble la valeur* a, ou encore que $g(x)$ *prend la valeur* a *en même temps que* $f(x)$. Il en est ainsi, en particulier, lorsque chacune des deux fonctions admet a comme valeur exceptionnelle, c'est-à-dire ne prend pas la valeur a; dans ce cas, l'ensemble $\mathrm{E}(a)$ est vide.

Nous dirons, de même, que deux fonctions, méromorphes au voisinage du point à l'infini, *prennent ensemble la valeur a au voisinage de l'infini*, s'il existe un cercle de rayon assez grand, à l'extérieur duquel les ensembles $\mathrm{E}(a)$ relatifs à ces deux fonctions coïncident. Nous conviendrons également de dire qu'une fonction $f(x)$, méromorphe au voisinage du point à l'infini, admet a comme valeur exceptionnelle, s'il existe un cercle à l'extérieur duquel $f(x)$ ne prend pas la valeur a.

[1] Certains des résultats de ce Chapitre ont été publiés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. 185, 1927, p. 1253, et t. 186, 1928, p. 624. Les affirmations des paragraphes 4 et 5 de la seconde Note sont très probablement inexactes.

53. G. Pólya et R. Nevanlinna ont été, je crois, les premiers à s'occuper de l'unicité de la détermination d'une fonction méromorphe, par la connaissance d'un nombre fini d'ensembles $E(a_1)$, $E(a_2)$, ..., $E(a_n)$, assujettis ou non à la restriction relative aux ordres de multiplicité.

R. Nevanlinna a démontré le théorème suivant (1) :

Si deux fonctions, méromorphes au voisinage du point à l'infini, supposé singulier essentiel, prennent ensemble CINQ *valeurs distinctes au voisinage de l'infini, elles sont nécessairement identiques, même lorsqu'on ne tient pas compte des ordres de multiplicité.* Une fonction méromorphe au voisinage du point à l'infini est donc complètement déterminée par la connaissance, au voisinage de ce point, de cinq ensembles $E(a_1)$, $E(a_2)$, $E(a_3)$, $E(a_4)$, $E(a_5)$.

Il est naturel de chercher à réduire ce nombre de *cinq*. On y arrive en s'appuyant sur le théorème de E. Borel, déjà cité dans l'Introduction (§ 1) :

Si l'on a une identité de la forme

$$X_1(x) + X_2(x) + \ldots + X_p(x) \equiv 0,$$

entre des fonctions entières, sans zéros, ou bien leurs rapports mutuels sont des constantes, — ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle, et leurs rapports mutuels sont des constantes.

Rappelons que, pour démontrer ce théorème, R. Nevanlinna (2) établit la proposition suivante, d'où il découle immédiatement : si les p fonctions ne sont pas liées par d'autre relation linéaire, homogène, à coefficients constants non tous nuls, que la relation donnée

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p \equiv 0,$$

tous les $m\left(r, \frac{X_\lambda}{X_\mu}\right)$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p)$ sont bornés lorsque r augmente indéfiniment, et par suite les $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ sont des constantes.

(1) [F, *d*]. G. Pólya avait établi ce théorème [G] dans le cas de deux fonctions entières, de genre fini, qui prennent ensemble quatre valeurs finies distinctes.

(2) [F, *b*], p. 381.

Or, pour montrer que $m\left(r, \frac{X_\lambda}{X_\mu}\right)$ est borné, il suffit de supposer que les fonctions sont définies au voisinage du point à l'infini, et qu'elles n'ont ni pôles ni zéros dans ce voisinage; dire que $m\left(r, \frac{X_\lambda}{X_\mu}\right)$ est borné, c'est dire que $\frac{X_\lambda}{X_\mu}$ n'a pas de singularité à l'infini. D'où une généralisation du théorème de Borel :

Si l'on a une identité de la forme

$$X_1(x) + X_2(x) + \ldots + X_p(x) \equiv 0,$$

entre des fonctions holomorphes, sans zéros, au voisinage du point à l'infini, ou bien leurs rapports mutuels sont réguliers à l'infini, — ou bien les fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions d'un même groupe est identiquement nulle, et leurs rapports mutuels sont réguliers à l'infini.

Dans les problèmes que nous allons nous poser, nous nous ramènerons systématiquement à l'étude d'une identité, à laquelle nous appliquerons ce dernier théorème. D'ailleurs, celui-ci subsiste évidemment lorsque les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ont des zéros et des pôles, pourvu qu'aucun de leurs rapports mutuels n'en possède.

54. Envisageons d'abord deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, méromorphes au voisinage du point à l'infini, supposé singulier essentiel; admettons qu'elles prennent ensemble, au voisinage de l'infini, quatre valeurs distinctes a, b, c, d, que nous pouvons supposer finies. Cherchons à voir si ces deux fonctions ne seraient pas forcément identiques.

Désignons, d'une façon générale, par (e_1, e_2, e_3, e_4) le rapport anharmonique de quatre nombres e_1, e_2, e_3, e_4 :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}\,\frac{e_2 - e_4}{e_1 - e_4},$$

et posons

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} (f, g, a, b) &= X,\\ (f, g, a, c) &= Y,\\ (f, g, a, d) &= Z. \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z sont des fonctions holomorphes, sans zéros, au voisinage du point à l'infini. Or, l'élimination de f et g entre les relations (37) conduit à une identité de Borel à six termes :

$$(a-b)(c-d)(X+YZ)+(a-c)(d-b)(Y+ZX)\\+(a-d)(b-c)(Z+XY)\equiv 0.$$

Remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs en fonction de f et g; il vient

$$\begin{aligned}(38)\qquad &(a-b)(c-d)[(f-a)(f-b)(g-c)(g-d)\\&\qquad+(g-a)(g-b)(f-c)(f-d)]\\&+(a-c)(d-b)[(f-a)(f-c)(g-b)(g-d)\\&\qquad+(g-a)(g-c)(f-b)(f-d)]\\&+(a-d)(b-c)[(f-a)(f-d)(g-b)(g-c)\\&\qquad+(g-a)(g-d)(f-b)(f-c)]\equiv 0.\end{aligned}$$

Désignons respectivement par X_1^1, X_1^2, X_2^1, X_2^2, X_3^1, X_3^2 les six termes qui figurent au premier membre de (38), dans l'ordre où ils se présentent. Ce sont des fonctions méromorphes au voisinage du point à l'infini, et leurs rapports mutuels ne possèdent ni zéros ni pôles. Nous appliquerons donc le théorème de Borel généralisé à l'identité (38); les différents cas de décomposition possibles sont les suivants :

α. Un seul groupe comprenant les six fonctions;
β. Deux groupes de trois fonctions;
γ. Un groupe de deux fonctions et un groupe de quatre;
δ. Trois groupes de deux fonctions.

Le cas β se subdivise lui-même en deux cas essentiellement distincts, suivant que les trois fonctions d'un même groupe ont leurs indices inférieurs tous différents, ou que deux de ces indices sont les mêmes. Nous prendrons, comme types de chacun de ces deux cas,

$$(\beta_1)\qquad X_1^1+X_2^1+X_3^1\equiv X_1^2+X_2^2+X_3^2\equiv 0,$$
$$(\beta_2)\qquad X_1^1+X_1^2+X_2^1\equiv X_2^2+X_3^1+X_3^2\equiv 0.$$

Le cas γ se subdivise aussi en deux cas essentiellement distincts :

$$(\gamma_1)\qquad X_1^1+X_1^2\equiv X_2^1+X_2^2+X_3^1+X_3^2\equiv 0,$$
$$(\gamma_2)\qquad X_1^1+X_2^1\equiv X_1^2+X_2^2+X_3^1+X_3^2\equiv 0.$$

Enfin, le cas δ se subdivise en trois :

$$(\delta_1) \qquad X_1^1 + X_2^2 \equiv X_1^2 + X_3^1 \equiv X_2^1 + X_3^2 \equiv 0,$$
$$(\delta_2) \qquad X_1^1 + X_1^2 \equiv X_2^1 + X_2^2 \equiv X_3^1 + X_3^2 \equiv 0,$$
$$(\delta_3) \qquad X_1^1 + X_1^2 \equiv X_2^1 + X_3^1 \equiv X_2^2 + X_3^2 \equiv 0.$$

Je dis d'abord que, u et v désignant deux quelconques des quatre nombres a, b, c, d $(u \neq v)$, si deux des six rapports anharmoniques (f, g, u, v) sont réguliers à l'infini, f et g sont identiques. Écrivons en effet

$$\left\{ \begin{aligned} (f, g, u, v) &= P(x), \\ (f, g, u_1, v_1) &= P_1(x), \end{aligned} \right.$$

P et P_1 étant des fonctions régulières à l'infini. L'élimination de g entre ces deux relations conduit à une équation, du second degré au plus en f. Si elle permettait de calculer f en fonction de P et P_1, f n'aurait pas de singularité essentielle à l'infini. Il faut donc que cette équation soit identiquement vérifiée, autrement dit, que les deux relations écrites se réduisent à une seule. Or, si l'on y regarde, pour un instant, P et P_1 comme des constantes, f et g comme des variables, elles définissent une homographie admettant les points doubles u, v, u_1 et v_1, ce qui fait au moins trois points doubles. Cette homographie se réduit donc à la transformation identique. et l'on a

$$f(x) = g(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, si l'on examine successivement les cas énumérés plus haut, en écrivant, pour chacun d'eux, que le rapport de deux fonctions d'un même groupe n'a pas de singularité à l'infini, on trouve précisément, au moins dans les cas α, β_1, β_2, γ_1, γ_2 et δ_1, que deux des six rapports anharmoniques (f, g, u, v) sont réguliers à l'infini. On en conclut $f \equiv g$.

Dans le cas δ_2, on a

$$[(f, g, b, c)]^2 \equiv 1.$$

Si $(f, g, b, c) \equiv 1$, on a $f \equiv g$. Si $(f, g, b, c) \equiv -1$, on trouve ensuite $(f, g, a, b) \equiv -1$, ce qui est impossible, en vertu de la remarque faite plus haut.

Il reste à examiner le cas δ_3. L'élimination de f et g entre les équations

$$X_2^1 + X_3^1 \equiv 0 \quad \text{et} \quad X_2^2 + X_3^2 \equiv 0$$

donne

$$[(a, b, c, d)]^2 = 1,$$

d'où

$$(a, b, c, d) = -1.$$

puisque les nombres a, b, c, d sont distincts. On trouve ensuite

$$(f, g, c, d) \equiv -1;$$

cela exige que f et g admettent a et b comme valeurs exceptionnelles; sinon f et g prendraient ensemble la valeur a, par exemple; or on n'a pas

$$(a, a, c, d) = -1.$$

55. Tous les cas ayant été examinés, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VIII. — *a, b, c, d désignant* QUATRE *nombres complexes distincts, il existe au plus une fonction, méromorphe au voisinage du point singulier essentiel à l'infini, pour laquelle* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$, $E(d)$ *coïncident respectivement, au voisinage de l'infini, avec quatre ensembles donnés* A, B, C, D. *Il y a exception si, les ensembles* A *et* B *étant vides au voisinage de l'infini, on a*

$$(a, b, c, d) = -1;$$

dans ce cas, s'il existe une fonction répondant à la question, il en existe deux, et deux seulement, $f(x)$ et $g(x)$, et l'on a

$$(f, g, c, d) \equiv -1.$$

Lorsque nous disons que deux ensembles coïncident au voisinage de l'infini, nous entendons qu'il existe un cercle de rayon assez grand, à l'extérieur duquel ils coïncident.

Convenons alors de dire que deux ensembles de points *coïncident au sens large*, lorsqu'ils ne diffèrent que par un nombre fini de points. Le théorème VIII entraîne évidemment le suivant :

THEORÈME VIII *bis*. — *Il existe au plus une fonction méromorphe dans tout le plan, non rationnelle, pour laquelle* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$, $E(d)$ *coïncident au sens large avec quatre ensembles donnés* A, B, C, D; *il y a exception si, les ensembles* A *et* B *n'ayant qu'un nombre fini de points, on a*

$$(a, b, c, d) = -1;$$

dans ce cas, s'il existe une fonction répondant à la question, il en existe deux, et deux seulement, $f(x)$ *et* $g(x)$, *et l'on a*

$$(f, g, c, d) \equiv -1.$$

Ce théorème reste vrai *a fortiori* si l'on supprime les mots « au sens large »; le cas d'exception correspond alors seulement au cas où les ensembles A et B sont vides. On retrouve ainsi un théorème dû à G. Pólya et R. Nevanlinna [1].

56. Considérons maintenant trois fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$, méromorphes au voisinage du point à l'infini, supposé singulier essentiel; admettons qu'elles prennent ensemble, au voisinage de l'infini, *trois* valeurs distinctes a, b, c, que nous pouvons supposer finies. Nous allons démontrer que deux de ces fonctions sont nécessairement identiques. Posons en effet

$$\begin{cases} (f, g, a, b) = X, \\ (f, g, a, c) = Y, \\ (f, h, a, b) = Z, \\ (f, h, a, c) = T, \end{cases}$$

et éliminons f, g, h entre ces relations; puis, dans l'identité obtenue, remplaçons de nouveau X, Y, Z, T en fonction de f, g, h. Il vient, tous calculs faits,

$$\begin{aligned} (39) \qquad & (f-a)(g-b)(h-c) + (f-b)(g-c)(h-a) \\ & + (f-c)(g-a)(h-b) - (f-c)(g-b)(h-a) \\ & - (f-a)(g-c)(h-b) - (f-b)(g-a)(h-c) \equiv 0. \end{aligned}$$

---

(1) G. Pólya [G] s'était placé dans le cas où les fonctions sont entières et de genre fini, et où l'une des quatre valeurs a, b, c, d est précisément égale à l'infini. R. Nevanlinna [F, b, p. 378] s'est ensuite placé dans le cas général des fonctions méromorphes dans tout le plan.

Désignons respectivement par X_1^1, X_1^2, X_1^3, $-X_2^1$, $-X_2^2$, $-X_2^3$ les six termes qui figurent au premier membre de (39), dans l'ordre où ils se présentent. Ce sont des fonctions méromorphes au voisinage du point à l'infini, et leurs rapports mutuels ne possèdent ni zéros ni pôles. On va leur appliquer, comme tout à l'heure, le théorème de Borel généralisé.

On remarque d'abord que si les deux rapports anharmoniques (f, g, a, b) et (f, g, a, c) sont réguliers à l'infini, on a $f \equiv g$. On fait en outre la remarque suivante : Si l'on a une identité

$$X_1^p - X_2^q \equiv 0,$$

p et q désignant deux quelconques des indices 1, 2, 3, différents ou non, deux des trois fonctions f, g, h sont identiques. Par exemple, l'identité

$$X_1^1 - X_2^1 \equiv 0$$

donne

$$(f-a)(g-b)(h-c) \equiv (f-c)(g-b)(h-a),$$

et, par suite, comme $g-b$ n'est pas identiquement nul, $f \equiv h$.

Cela posé, on examine les cas de décomposition suivants :

α. Un seul groupe comprenant les six fonctions;

β. Deux groupes de trois fonctions :

$$(\beta_1) \qquad X_1^1 + X_1^2 + X_1^3 \equiv X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 \equiv 0,$$

$$(\beta_2) \qquad X_1^1 + X_1^2 - X_2^3 \equiv X_1^3 - X_2^1 - X_2^2 \equiv 0;$$

γ. Un groupe de deux fonctions et un groupe de quatre; d'après une remarque précédente, il est inutile d'envisager le cas où les indices inférieurs des deux fonctions du premier groupe sont différents. On examinera donc seulement le cas suivant :

$$X_1^1 + X_1^2 \equiv X_1^3 - X_2^1 - X_2^2 - X_2^3 \equiv 0;$$

δ. Trois groupes de deux fonctions; mais il est inutile d'envisager ce cas, puisque, dans l'un au moins des trois groupes, les deux fonctions ont des indices inférieurs différents.

Si, dans chacun des cas α, β_1, β_2 et γ, on écrit que le rapport de deux fonctions d'un même groupe n'a pas de singularité à l'infini, on trouve que deux des trois fonctions f, g, h sont identiques, en vertu de la remarque relative aux rapports anharmoniques. D'où le

THÉORÈME IX ([1]). — *Il existe au plus* DEUX *fonctions, méromorphes au voisinage du point singulier essentiel à l'infini, pour lesquelles* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ *coïncident respectivement, au voisinage de l'infini, avec* TROIS *ensembles donnés* A, B, C.

57. Ce théorème entraîne le suivant :

THÉORÈME IX *bis*. — *Il existe au plus deux fonctions méromorphes dans tout le plan, non rationnelles, pour lesquelles* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ *coïncident au sens large avec trois ensembles donnés* A, B, C.

Le théorème subsiste *a fortiori* si l'on supprime les mots « au sens large ».

En particulier, il existe au plus deux fonctions, méromorphes dans tout le plan, ayant un nombre fini de zéros et de pôles ([2]), et pour lesquelles $E(1)$ coïncide au sens large avec un ensemble donné. Or, s'il en existe une, soit $f(x)$, il en existe une autre, $\frac{1}{f(x)}\cdot$ Donc la connaissance de l'ensemble $E(1)$ détermine les zéros et les pôles, qui sont d'ailleurs interchangeables. D'ailleurs, si $f(x)$ a au moins un zéro ou un pôle, les zéros de $f(x)$ et $\frac{1}{f(x)}$ ne coïncident pas. D'où le

THÉORÈME X. — *Il existe au plus une fonction $f(x)$, méromorphe dans tout le plan, admettant au sens large un ensemble* $E(1)$ *donné, ayant un nombre fini de pôles, et des zéros donnés en nombre fini, pourvu qu'elle possède au moins un zéro ou un pôle.*

Dans le cas d'une fonction $f(x)$ n'ayant ni pôles ni zéros, il existe une fonction et une seule, admettant le même ensemble $E(1)$ que $f(x)$, et n'ayant ni pôles, ni zéros : c'est $\frac{1}{f(x)}\cdot$ Nous retrouvons là un théo-

---

([1]) Lorsque j'ai publié ce théorème dans les *Comptes rendus*, deux cas particuliers en avaient seulement été envisagés jusque-là : le cas des fonctions entières admettant deux valeurs exceptionnelles (Pólya et Nevanlinna), et le cas des fonctions entières d'ordre fini non entier [F, *b*, p. 387]. R. Nevanlinna a publié ensuite ce même théorème dans les *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 289.

([2]) Les zéros et les pôles ne sont pas donnés.

rème dû à G. Pólya (¹) dans le cas des fonctions entières de genre fini, et étendu par R. Nevanlinna [F, b, p. 388] aux fonctions entières de genre quelconque. D'après ces deux auteurs, le théorème est vrai même si l'on fait abstraction des ordres de multiplicité des racines de l'équation

$$f(x)=1.$$

Nous venons de supposer, pour simplifier, $a=0$, $b=\infty$, $c=1$; il va sans dire que l'on passe de ce cas au cas général par une transformation homographique.

Théorème XI (²). — *Étant donnés trois ensembles* A, B, C *quelconques, il n'existe pas, en général, de fonction méromorphe dans tout le plan, pour laquelle* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ *coïncident respectivement avec* A, B, C.

Nous allons même montrer davantage : il n'existe pas, en général, de fonction pour laquelle, $E(a)$ coïncidant avec A, $E(b)$ et $E(c)$ coïncident au *sens large* avec B et C. En effet, en vertu du théorème IX *bis*, il existe au plus deux fonctions pour lesquelles $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ coïncident au sens large avec A, B, C; soient $E_1(a)$ et $E_2(a)$ les ensembles $E(a)$ relatifs à ces fonctions, si elles existent. Prenons alors un ensemble quelconque A′, distinct de $E_1(a)$ et $E_2(a)$, et assujetti à coïncider au sens large avec A. Il n'existe aucune fonction pour laquelle, $E(a)$ coïncidant avec A′, $E(b)$ et $E(c)$ coïncident au sens large avec B et C.

En particulier, *il n'existe pas en général de fonction méromorphe dans tout le plan, ayant des zéros et des pôles en nombre fini, et admettant un ensemble* $E(1)$ *donné.*

Revenons au théorème IX. S'il existe deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, méromorphes au voisinage du point à l'infini, et prenant ensemble trois valeurs au voisinage de l'infini, 0, 1 et ∞ par exemple, on peut écrire

$$\frac{f-1}{g-1}=U, \qquad \frac{g}{f}\,\frac{f-1}{g-1}=V,$$

(¹) G. Pólya (*Deutsche Math. Ver.*, t. 32, 1923, p. 16) énonce ce théorème sous la forme suivante : *Si les points où deux polynomes prennent des valeurs entières coïncident, leur somme ou leur différence est constante.*

(²) Il est à peine besoin de rappeler qu'on peut toujours construire une fonction, méromorphe dans tout le plan, admettant deux ensembles $E(a)$ et $E(b)$ donnés, par exemple admettant des zéros et des pôles donnés.

d'où l'on tire

$$(40)\qquad f=\frac{1-U}{1-V},\qquad g=\frac{1-\frac{1}{U}}{1-\frac{1}{V}},$$

U et V étant des fonctions holomorphes, sans zéros, au voisinage du point à l'infini. Réciproquement, U et V étant deux telles fonctions, les formules (40) définissent deux fonctions f et g prenant ensemble les valeurs 0, 1 et ∞ au voisinage de l'infini.

En particulier, les deux fonctions

$$f(x)=\frac{1-e^{5x}}{1-e^{2x}},\qquad g(x)=\frac{1-e^{-5x}}{1-e^{-2x}}$$

sont méromorphes dans tout le plan, possèdent les mêmes ensembles E(0), E(1) et E(∞), et *n'admettent d'ailleurs aucune valeur exceptionnelle* [1].

58. Considérons maintenant quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2, méromorphes au voisinage du point à l'infini supposé singulier essentiel; admettons qu'au voisinage de l'infini, ces quatre fonctions prennent ensemble deux valeurs finies a et b, que f_1 et f_2 prennent ensemble la valeur c, et que g_1 et g_2 prennent ensemble la valeur c. Nous pouvons supposer c infini.

On est alors ramené à l'étude de l'identité à huit termes

$$(41)\qquad \begin{aligned}&(f_1-a)(g_1-b)+(f_2-a)(g_2-b)\\&+(g_1-a)(f_2-b)+(g_2-a)(f_1-b)\\&-(f_1-b)(g_1-a)-(f_2-b)(g_2-a)\\&-(g_1-b)(f_2-a)-(g_2-b)(f_1-a)\equiv 0.\end{aligned}$$

Le rapport de deux termes quelconques est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de l'infini. Les cas de décomposition à examiner sont très nombreux; dans la plupart d'entre eux, on trouve que deux des quatre fonctions sont identiques, mais il y a également des cas assez nombreux où il n'en est rien.

Les hypothèses précédentes étant maintenues, supposons en outre

(1) Au contraire, nous avons vu que deux fonctions qui prennent ensemble *quatre valeurs* possèdent nécessairement deux valeurs exceptionnelles (théorème VIII).

que les fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 prennent une infinité de fois chacune des valeurs a et b. Dans ces conditions, il suffit que $\frac{f_1-a}{f_2-a}$ soit régulier à l'infini, pour que f_1 et f_2 soient identiques; en effet, f_1 prenant une infinité de fois la valeur b, $\frac{f_1-a}{f_2-a}$ prend une infinité de fois la valeur *un*, et par suite est identique à *un*. C. Q. F. D.

Cette remarque facilite l'examen de tous les cas de décomposition, et l'on arrive à la conclusion suivante : deux des fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 sont identiques, sauf dans le cas où l'on a

$$(42) \qquad \frac{f_1-a}{f_1-b} = -\frac{g_1-a}{g_2-b}, \qquad \frac{f_2-a}{f_2-b} = -\frac{g_2-a}{g_1-b},$$

ce qui entraîne inversement

$$\frac{g_1-a}{g_1-b} = -\frac{f_1-a}{f_2-b}, \qquad \frac{g_2-a}{g_2-b} = -\frac{f_2-a}{f_1-b}.$$

Remarquons d'ailleurs que si l'on a deux fonctions g_1 et g_2, prenant ensemble les valeurs a, b et ∞, les formules (42) définissent deux fonctions f_1 et f_2, prenant ensemble les valeurs a, b et ∞; de plus les quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 prennent ensemble les valeurs a et b.

59. L'étude précédente conduit au théorème suivant :

Théorème XII. — *a et b désignant deux nombres complexes finis et distincts, considérons la famille de toutes les fonctions méromorphes au voisinage du point à l'infini, et admettant, au voisinage de l'infini, deux ensembles* E(a) *et* E(b) *donnés, dont chacun contient une infinité de points. Étant donné un ensemble* M *quelconque de points, il existe au plus* UNE *fonction de la famille pour laquelle* E(∞) *coïncide avec* M *au voisinage de l'infini, sauf peut-être pour* DEUX *ensembles exceptionnels*[1] M_1 *et* M_2, *pour chacun desquels il existe deux fonctions; en outre, s'il y a un ensemble exceptionnel, il y en a deux.*

Supposons, en effet, qu'il existe un ensemble exceptionnel M_1, et

---

[1] Nous ne considérons pas comme distincts deux ensembles qui coïncident au voisinage de l'infini.

soient g_1 et g_2 les deux fonctions de la famille pour lesquelles $E(\infty)$ coïncide avec M_1; nous savons, d'après le théorème IX, qu'il n'existe pas plus de deux telles fonctions. Les formules (42) nous font alors connaître deux fonctions f_1 et f_2 de la famille, qui admettent un même ensemble $E(\infty)$, soit M_2; c'est un second ensemble exceptionnel.

Il n'y en a pas d'autre. Soient en effet M_3 un ensemble exceptionnel, h_1 et h_2 les fonctions correspondantes; si M_3 ne coïncide pas avec M_1, les fonctions g_1, g_2, h_1, h_2 sont distinctes, et l'on a alors, d'après l'étude précédente,

$$\frac{h_1-a}{h_1-b}=-\frac{g_1-a}{g_2-b}, \qquad \frac{h_2-a}{h_2-b}=-\frac{g_2-a}{g_1-b},$$

et, par suite, $h_1=f_1$, $h_2=f_2$. Donc, si M_3 ne coïncide pas avec M_1, il coïncide avec M_2. Le théorème XII est complètement démontré.

Nous avons admis, il est vrai, que les ensembles M_1 et M_2 ne coïncidaient pas au voisinage de l'infini; pour s'en assurer, il suffit de vérifier (1) que chacune des fonctions f_1 et f_2, définies par les formules (42), est distincte de chacune des fonctions g_1 et g_2.

Par exemple, on ne peut pas avoir $f_1 \equiv g_1$; on aurait alors en effet

$$g_1+g_2 \equiv 2b;$$

c'est impossible, puisque g_1 et g_2 prennent ensemble la valeur a, et la prennent effectivement.

60. Appliquons le théorème XII au cas des fonctions méromorphes dans tout le plan; nous y avions supposé a et b finis et c infini; nous allons, cette fois, pour rendre le théorème plus frappant, supposer $a=0$, $b=\infty$, $c=1$. Nous obtenons alors le

Théorème XII *bis*. — *Considérons la famille de toutes les fonctions méromorphes dans tout le plan, pour lesquelles* $E(0)$ *et* $E(\infty)$ *coïncident au sens large avec deux ensembles infinis donnés* (2). *Étant donné un*

(1) Cela suffit, car, si les quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 sont distinctes, comme elles admettent, d'autre part, les mêmes ensembles $E(a)$ et $E(b)$, elles ne peuvent admettre toutes le même ensemble $E(\infty)$, en vertu du théorème IX.

(2) Ces fonctions sont de la forme $\varphi(x)R(x)e^{G(x)}$, φ étant une fonction méromorphe

ensemble M *quelconque, il existe au plus une fonction de la famille pour laquelle* E(1) *coïncide avec* M *au sens large, sauf peut-être pour deux ensembles exceptionnels* (1) M_1 *et* M_2, *pour chacun desquels il existe deux fonctions; en outre, s'il y a un ensemble exceptionnel, il y en a deux.*

Enfin, on peut reprendre l'étude de l'identité (41), dans le cas où les fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 du paragraphe 58 sont méromorphes dans tout le plan. Mais, au lieu de supposer que ces fonctions prennent une infinité de fois chacune des valeurs a et b, il suffit de supposer qu'elles prennent au moins une fois chacune des valeurs a et b. Si alors $\frac{f_1-a}{f_2-a}$ est constant, on en conclut $f_1 \equiv f_2$, et la démonstration s'achève comme précédemment. On a donc le théorème suivant :

Théorème XII *ter*. — *Considérons la famille de toutes les fonctions méromorphes dans tout le plan, admettant des zéros et des pôles donnés, et admettant au moins un zéro et au moins un pôle. Étant donné un ensemble* M *quelconque, il existe au plus une* (2) *fonction de la famille pour laquelle* E(1) *coïncide avec* M, *sauf peut-être pour deux ensembles exceptionnels* M_1 *et* M_2, *pour chacun desquels il existe deux fonctions; s'il y a un ensemble exceptionnel, il y en a deux.*

Nous pouvons ajouter ici : *Pour une distribution donnée de zéros et de pôles, il n'existe pas, en général, d'ensemble exceptionnel.* En effet, il n'en existe pas lorsque les zéros et les pôles donnés sont en nombre fini, en vertu du théorème X. Laissons de côté le cas où il y aurait un nombre fini de pôles et une infinité de zéros, par exemple, et venons au cas où les pôles, ainsi que les zéros, sont en nombre infini. Désignons par A l'ensemble des pôles, par B l'ensemble des zéros. En vertu du théorème XII *bis*, il existe au plus deux couples de fonctions, f_1 et f_2, g_1 et g_2, pour lesquelles E(∞) et E(0) coïncident *au sens large* avec A et B, et telles, en outre, que les ensembles E(1) relatifs à f_1 et à f_2 coïncident au sens large, et que les ensembles E(1)

---

donnée, qui admet des zéros et des pôles en nombre infini, $R(x)$ une fonction rationnelle arbitraire, et $G(x)$ une fonction entière arbitraire

(1) Définis chacun à un nombre fini de points près.

(2) Et, en général, il n'en existe pas, en vertu du théorème XI.

relatifs à g_1 et g_2 coïncident au sens large. Prenons alors deux ensembles A′ et B′ quelconques, coïncidant au sens large avec A et B, et tels que l'ensemble A′ ne soit identique à aucun des quatre ensembles E(∞) relatifs à chacune des quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2. Il est clair que, si l'on considère maintenant la famille des fonctions ayant pour pôles les points de A′, et pour zéros les points de B′, il n'y a pas d'ensemble E (1) exceptionnel pour cette famille.

61. Nous allons étudier maintenant un problème d'un genre nouveau, relatif non plus à un système de fonctions prenant ensemble certaines valeurs, mais à une famille infinie de tels systèmes. Au lieu d'avoir à considérer une seule identité de Borel, nous aurons à en considérer une infinité, et nous leur appliquerons le critère de famille complexe normale du Chapitre III. Bornons-nous, pour rester dans le cas simple d'une identité à quatre termes, au problème suivant :

Trouver un critère de famille complexe normale pour une famille de systèmes de deux fonctions $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *holomorphes dans un domaine* D, *n'y prenant pas la valeur zéro, et y prenant ensemble la valeur un.*

Posons

$$\frac{\varphi - 1}{\psi - 1} = \lambda;$$

λ est une fonction holomorphe, sans zéros, et nous avons l'identité

$$\varphi - 1 + \lambda - \lambda\psi \equiv 0,$$

à laquelle nous appliquons le théorème VI. Il suffit d'envisager toutes les circonstances prévues dans l'énoncé de ce théorème; nous n'indiquerons pas le détail de cette discussion; nous en avons déjà fait de semblables [1]. On trouve le théorème suivant :

THÉORÈME XIII. — *Étant donnée une famille de systèmes de deux fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$, *holomorphes, sans zéros, et prenant ensemble la*

---

[1] *Voir*, par exemple, Chapitre IV, § 43.

valeur un, on peut en extraire une suite infinie de systèmes, pour laquelle se trouve réalisée l'une des circonstances suivantes :

1° φ *et* ψ *convergent au sens large;*

2° $\varphi - 1$, $\frac{\varphi - 1}{\psi - 1}$ *et* $\psi \frac{\varphi - 1}{\psi - 1}$ *convergent vers zéro, — et la circonstance analogue, obtenue en permutant* φ *et* ψ;

3° $\frac{\varphi}{\psi}$ *et* $\frac{\varphi - 1}{\psi - 1}$ *convergent vers un;*

4° $\varphi\psi - 1$, $\frac{\varphi\psi - 1}{\varphi - 1}$ *et* $\frac{\varphi\psi - 1}{\psi - 1}$ *convergent vers zéro.*

62. Le théorème précédent permet de démontrer le

THEORÈME XIV. — *Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, holomorphes et sans zéros au voisinage du point à l'infini, supposé singulier essentiel. Si l'on peut trouver une suite infinie de couronnes circulaires C_n, homothétiques entre elles et s'éloignant à l'infini, de façon que, dans chacune d'elles, les fonctions f et g prennent ensemble la valeur un, on a nécessairement*

$$f(x) \equiv g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \equiv \frac{1}{g(x)}.$$

Indiquons sommairement la démonstration.

Considérons la couronne C_n comme transformée d'une couronne fixe C_0 par une substitution linéaire $x' = S_n(x)$. Envisageons alors, dans la couronne C_0, la famille des fonctions

$$\varphi_n(x) = f[S_n(x)]$$

et

$$\psi_n(x) = g[S_n(x)],$$

et appliquons-leur le théorème XIII. Le cas 1° ne peut se présenter, car l'une des fonctions $f(x)$ et $\frac{1}{f(x)}$ serait bornée sur une infinité de circonférences s'éloignant à l'infini, donc serait constante. De même, le cas 2° ne peut se présenter, car f ou g serait identique à *un*. Dans le cas 3°, on a nécessairement $f(x) \equiv g(x)$. Dans le cas 4° enfin, on a $f(x)g(x) \equiv 1$. Le théorème est démontré. Il complète le théorème de G. Pólya et R. Nevanlinna déjà cité (§ 57).

61. On peut encore le compléter de la façon suivante :

Théorème XV. — *Soient deux fonctions distinctes $f(x)$ et $g(x)$, holomorphes et sans zéros au voisinage du point singulier essentiel à l'infini. Supposons*

$$f(x)\,g(x) \not\equiv 1.$$

Soit alors une suite arbitraire de nombres complexes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ qui tendent vers l'infini. Étant donnée une circonférence Γ ayant son centre à l'origine et un rayon arbitraire, il existe un point z_0 sur cette circonférence, et une suite infinie $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_n}, \ldots$ extraite de la suite précédente, qui jouissent de la propriété suivante :

C *désignant un cercle de centre z_0 et de rayon arbitrairement petit, et $C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots, C_{k_n}, \ldots$ désignant les cercles homothétiques de* C *par rapport à l'origine, dans les rapports respectifs $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_n}, \ldots$, la fonction $\dfrac{f-1}{g-1}$ a au moins un zéro ou un pôle dans chacun des cercles C_{k_n} à partir d'un certain rang.*

On sait que G. Julia (¹) a démontré des théorèmes analogues en partant du principe : « si une famille de fonctions n'est pas normale dans un domaine, il existe au moins un point du domaine où elle n'est pas normale. » Ici, le raisonnement est forcément un peu différent; voici, exposée très brièvement, la suite des idées.

Supposons que, étant donné un point quelconque z sur la circonférence Γ, on puisse trouver un cercle C de centre z, jouissant de la propriété suivante : de toute suite infinie extraite de la suite σ_n, on peut extraire une nouvelle suite infinie $\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}, \ldots, \sigma_{\lambda_n}, \ldots$, telle que la fonction $\dfrac{f-1}{g-1}$ n'ait ni pôles ni zéros dans chacun des cercles $C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, \ldots, C_{\lambda_n}, \ldots$. En invoquant le théorème de Borel-Lebesgue, on peut être ramené au cas d'application du théorème XIV. On aurait donc

$$f(x) \equiv g(x) \qquad \text{ou} \qquad f(x) \equiv \frac{1}{g(x)},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

(¹) [C, *b*].

Par conséquent, il existe sur Γ un point z_0, qui jouit de la propriété suivante : étant donné un cercle C quelconque, de centre z_0, on peut trouver une suite infinie σ_{μ_n} telle que, dans chacun des cercles C_{μ_n}, la fonction $\frac{f-1}{g-1}$ ait au moins un zéro ou un pôle. Prenons alors une suite infinie de cercles, de centre z_0, dont les rayons tendent vers zéro ; pour chacun d'eux nous avons une suite σ_{μ_n}. La suite diagonale fournit la suite σ_{k_n} de l'énoncé, et le théorème est démontré.

Vu et approuvé :

Paris, le 3 octobre 1928.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 3 octobre 1928.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.