TSIN-YI TCHAO

Recherches sur les fonctions inverses des fonctions algébroïdes entières à deux branches

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__85__3_0>

N° D'ORDRE
46

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la FACULTÉ des SCIENCES de l'UNIVERSITÉ
DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ DE LYON
(Mathématique)

PAR

趙 進 義

TCHAO Tsin-yi

Licencié ès sciences mathémathiques
Elève de l'Institut Franco-Chinois de Lyon

1re THÈSE :

Recherches sur les fonctions inverses des fonctions algébroïdes entières à deux branches

2me THÈSE :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 10 Mai 1928 devant la Commission d'examen.

MM. J. SIRE } JURY
H. DULAC }

LYON
Imprimerie BOSC Frères & RIOU
42, Quai Gailleton, 42

—

1928

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. Depéret, O., ✱ ✿ I., ✠, Membre de l'Institut

Assesseur

M. Kœhler, O. ✱, ✿ I., ✠, Correspondant de l'Institut.

Professeurs honoraires

MM. Vessiot, O. ✱, ✿ I.; R. Dubois, ✱, ✿ I., ✠
Gérard, O. ✱, ✿ I., ✠ C.; Rigollot, ✱, ✿ I
Vautier, ✿ I., Le Vavasseur, ✱, ✿ I.;
Offret, ✱, ✿ I., ✠.

Professeurs titulaires

MM. Depéret, O. ✱, ✿ I., ✠, Membre de l'Institut, *Géologie.*
Kœhler, O., ✱, ✿ I., ✠, Correspondant de l'Institut, *Zoologie.*
Dulac, ✱, ✿ I., *Calcul différentiel et intégral.*
Mascart, ✱, ✿ I., ✠, *Astronomie physique.*
Grignard, O., ✱, ✿ I., ✠, P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale.*
Sire, O. I., ✠, *Mécanique rationnelle et appliquée.*
Meunier, ✱, ✿ I., *Chimie industrielle.*
Couturier, ✿ I., ✠, *Chimie agricole.*
Beauverie, ✱, ✿ I., ✠, *Botanique.*
Thovert, ✱, ✿ I., ✠, *Physique.*
Cardot, *Physiologie générale et comparée.*
Vaney, ✱, ✿ I., *Zoologie.*
Longchambon, ✱, ⚘, *Minéralogie théorique et appliquée.*

Professeurs titulaires (sans chaire)

MM. Locquin, ✱, ✿ I., *Chimie générale.*
Job, ✿ I., *Chimie physique.*
Douin, *Botanique.*
Déjardin, *Physique.*
Roman, ✿ I., *Géologie.*

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. Lemarchands, O. I., *Chimie industrielle.*
Eyraud, Mathématiques.
Riche, ✿ I., *Géologie.*
Bonnet, ✿ I., *Zoologie appliquée et Zootechnie.*
Mayet, ✱, ✿ I., *Anthropologie.*
Pelosse, ✿, *Sériciculture.*
Clément, ✿ I., ✠, *Physiologie.*
Doncieux, ✿ I., *P. C. N., supérieur.*
Seyewetz, ✱, ✿ I., *Matières colorantes artificielles.*

Secrétaire

Mme Nétien, ✿.

A

MONSIEUR J. SIRE

Professeur à la Faculté des Sciences

Hommage respectueux et reconnaissant.

Préface

L'étude des fonctions inverses n'a été abordée que très récemment. Amorcée par M. Hurwitz et M. Denjoy, la théorie des fonctions inverses des fonctions entières a été approfondie par M. Boutroux, et la théorie des fonctions inverses des fonctions méromorphes par M. Iversen. La théorie des fonctions algébroïdes, étant née d'hier, va occuper une place aussi importante que la théorie des fonctions uniformes; aussi ai-je commencé à étudier les fonctions inverses des fonctions algébroïdes entières à deux branches.

Cette fonction n'admet pas en général d'autres points critiques que des points critiques algébriques et des points critiques transcendants, mais, lorsqu'une des deux branches de la fonction algébroïde entière est holomorphe au point à l'infini, elle peut admettre de plus un pôle et un seul; l'ordre de multiplicité du pôle est égal à l'unité. Suivant l'ordre de connexion du domaine Δ nous divisons les points critiques transcendants en deux grandes classes: ceux de genre zéro et ceux de genre infini. Les points critiques de la première classe sont identiques aux points critiques transcendants des fonctions inverses des fonctions entières; ceux de la deuxième aux points critiques transcendants des deux exemples de la fin de cet ouvrage. Si la fonction inverse y (x) admet $x = \alpha$ comme pôle, α sera ou bien un élément-limite de l'ensemble des abscisses des points doubles de la courbe $F(x, y) = 0$, ou bien un point critique transcendant de genre zéro pour y (x).

PREMIÈRE PARTIE

Etude de la fonction algébroïde entière à deux branches

1. Points critiques. — Soit x (y) la fonction multiforme à deux branches définie par l'équation

$$(1) \qquad F(x, y) = x^2 + 2a_1(y)\,x + a_2(y) = 0$$

où $a_1(y)$ et $a_2(y)$ sont des *fonctions entières* de la variable complexe y. Cette fonction, admettant en chaque point deux déterminations qui sont données par les formules

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1(y) &= -a_1(y) + \sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)} \\ x_2(y) &= -a_1(y) - \sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)}, \end{aligned}$$

est ce qu'on appelle une *fonction algébroïde entière à deux branches.* Elle admet comme points critiques algébriques les zéros d'*ordre impair* de l'équation

$$(3) \qquad a_1^2(y) - a_2(y) = 0\,;$$

si, en particulier, tous ces zéros sont d'*ordre pair* l'équation (1) définit deux fonctions distinctes et uniformes [1].

Comme (3) peut se mettre sous la forme

$$a_1^2(y) - a_2(y) = [f(y)]^2 g(y) = o$$

la *fonction entière* g(y) ayant tous ses zéros simples, les points critiques algébriques de x(y) sont donc les zéros de g(y). En général g(y) admet une infinité de zéros (ce sont des points isolés, leur seul point-limite possible est le point à l'infini), par suite x(y) admettra en général une infinité de points critiques algébriques; la surface de Riemann correspondant à x(y) sera une surface à deux feuillets admettant en général une infinité de points de ramification; cette surface est donc en général de *genre* infini, en convenant de dire que le *genre* d'une surface de Riemann à deux feuillets est infini lorsque le nombre de points de ramification est infini; elle ne pourra être de *genre* fini que si g(y) n'admet qu'un nombre fini de zéros, dans ce cas le *genre* p de la surface est le nombre défini par la relation

$$N = 2p + 1$$

qui désigne *l'ordre de connexion* de la surface.

Pour tout zéro de f(y) distinct de celui de g(y) la fonction a deux valeurs égales; les deux détermina-

(1) Dans ce cas notre question se ramène à étudier les fonctions inverses des fonctions entières; cela ne nous intéresse pas, nous l'écarterons dans la suite.

tions sont holomorphes au point correspondant b et prendront la même valeur a. Il en résulte que le point (a, b) est un *point double* de la courbe définie par l'équation (1), car on a en ce point $\frac{\partial F}{\partial x} = o$ et d'autre part $\frac{\partial F}{\partial y} = o$: si on n'a pas $\frac{\partial F}{\partial y} = o$ la fonction x (y) admettra ce point comme point critique algébrique, ce qui contredit notre hypothèse.

2. **Point à l'Infini.** — Les deux branches de la fonction x (y) admettent en général le point à l'infini comme *point singulier essentiel.* Nous allons chercher s'il peut arriver que les deux branches de x (y) soient holomorphes au point à l'infini. Alors, dans cette hypothèse on pourra tracer un cercle C concentrique à $y = 0$ et de rayon R suffisamment grand tel que les deux branches de la fonction y soient holomorphes le point à l'infini compris. Par suite, la fonction x (y) ne pourra admettre de points critiques algébriques à l'extérieur du cercle C, et le nombre de ces points est nécessairement *fini* et *pair* (1) Si $x_1(y)$ et $x_2(y)$ étaient ainsi la somme $x_1(y) + x_2(y)$ et le produit $x_1(y)\ x_2(y)$ seraient holomorphes à l'extérieur du cercle C y compris le point à l'infini;

(1) La branche $x_1(y)$ étant holomorphe à l'extérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon R suffisamment grand, la fonction x (y) n'admettra aucun point critique à l'extérieur de ce cercle. La fonction $x_1(y)$ étant uniforme le nombre de points critiques est pair à l'Intérieur du cercle C.

par suite les deux fonctions $a_1(y)$ et $a_2(y)$ seraient holomorphes à l'infini, c'est-à-dire se réduiraient à des constantes, ce qui contredit notre hypothèse. En raisonnant de même on voit que la fonction $x(y)$ ne peut être développée sous la forme

$$x(y) = \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y^{\frac{1}{p}}} + \frac{\alpha_{-2}}{y^{\frac{2}{p}}} +$$

(p désignant un entier positif), car dans ce cas le nombre des points critiques algébriques est *fini* et *impair,* la somme $x_1(y)+x_2(y)$ et le produit $x_1(y)$ $x_2(y)$ sont holomorphes au point à l'infini.

Nous allons chercher maintenant s'il peut arriver que l'une de ces deux branches de la fonction $x(y)$, $x_1(y)$ par exemple, soit holomorphe au point à l'infini. Dans cette hypothèse, la relation $a_1{}^2(y) — a_2(y)$ peut se mettre sous la forme

$$a_1^2(y) - a_2(y) = [P(y)]^2 \, Q(y),$$

$P(y)$ désignant une fonction entière quelconque et $Q(y)$ un polynome de degré pair dont tous les zéros sont à l'intérieur de C, et la branche $x_1(y)$ sera représentée à l'extérieur de C par un développement ne contenant que des puissances négatives de y

$$(4) \qquad x_1(y) = \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y} + \frac{\alpha_{-2}}{y^2} + \qquad + \frac{\alpha_{-n}}{y^n} + \qquad .$$

Elle tend vers une valeur finie α lorsque le module de y augmente indéfiniment. Si les premiers coefficients sont nuls et si le développement commence par un terme en $\frac{1}{y^m}$, le point à l'infini est un zéro d'ordre m.

Or de la relation (2) nous déduisons pour tous les points du domaine à l'infini

$$(5) \qquad \sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)} = a_1(y) + \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y} + \frac{\alpha_{-2}}{y^2} + \cdot \\ + \frac{\alpha_{-n}}{y^n} +$$

En supposant pour simplifier $a_1(0) = 0$, on a

$$(5') \qquad \sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)} = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \\ . + \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y} + \frac{\alpha_{-2}}{y^2} +$$

Il résulte donc de ce qui précède que pour obtenir une fonction x (y) dont une branche est holomorphe au point à l'infini, on prendra une fonction entière quelconque P (y) et un polynome de degré pair Q (y); on effectuera le développement en série de Laurent dans le domaine du point à l'infini de $P(y)\sqrt{Q(y)}$. Soit

$$\alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \qquad + \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y} + \frac{\alpha_{-2}}{y^2} + \cdot$$

ce développement, on prendra comme fonction entière $a_1(y)$ la partie principale de ce développement; $a_1(y)$ étant ainsi obtenu, la relation

$$a_1^2(y) - a_2(y) = [P(y)]^2 Q(y)$$

nous donne $a_2(y)$. Alors, la branche

$$x_1(y) = - a_1(y) + \sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)}$$

admettra dans le domaine du point à l'infini le développement

$$x_1(y) = \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y} + \frac{\alpha_{-2}}{y^2} + \qquad + \frac{\alpha_{-n}}{y^n} +$$

et y sera holomorphe.

Dans le cas général la fonction entière P (y) admettra une infinité de zéros qui seront tous, à l'exception d'un nombre fini, distincts de ceux de Q (y). Donc, la courbe définie par l'équation $F(x, y) = 0$ admettra une infinité de *points doubles.* Soient

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \qquad (\alpha_n, \beta_n),$$

les coordonnées de ces *points doubles;* comme pour $y = \beta_n$ on a $x_1(\beta_n) = x_2(\beta_n) = \alpha_n$ et que β_n converge vers l'infini, il en résulte que la suite de α_n a pour limite α.

Supposons que la fonction entière P (y) n'admette qu'un nombre fini de zéros; elle sera de la forme $e^{S(y)}\pi(y)$, $\pi(y)$ étant un polynome et S(y) une fonction entière ou un polynome, et nous aurons

$$\sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)} = e^{S(y)}\pi(y)\sqrt{Q(y)}.$$

Par suite, comme $\pi(y)$ et Q (y) sont des polynomes, il existe un chemin L convergeant vers l'infini le long duquel $\sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)}$ converge vers zéro. Or on a

$$x_1(y) - x_2(y) = 2\sqrt{a_1^2(y) - a_2(y)};$$

par suite le long du chemin considéré la différence $x_1(y) - x_2(y)$ convergera vers zéro. Comme le long de ce chemin $x_1(y)$ converge vers α, le long du même chemin la fonction $x_2(y)$ convergera aussi vers α.

De là la proposition suivante:

Si une des branches de la fonction $x(y)$, $x_1(y)$ *par exemple, est holomorphe et prend la valeur* α *pour* $y = \infty$, *ou bien* α *sera un élément-limite de l'ensemble des abscisses des points doubles de la courbe* $F(x, y) = 0$, *ou bien la branche* $x_2(y)$ *admettra un chemin de détermination* α.

On peut encore remarquer que dans ce cas où la branche $x_1(y)$ est holomorphe au point à l'infini la surface de Riemann correspondant à $x(y)$ est de *genre* fini.

DEUXIÈME PARTIE

Etude de la fonction inverse

I. — Définition

3. **Eléments de y (x).** — Soit (x_0, y_0) un point analytique de la surface de Riemann R_y où la dérivée de la fonction $x(y)$ ou la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ de la fonction $F(x, y) = x^2 + 2a_1(y)x + a_2(y)$ n'est pas nulle. D'après la théorie des fonctions implicites, il existe une série entière convergente [1].

$$(6) \qquad y = P(x - x_0)$$

qui vérifie la relation

$$(1) \qquad x^2 + 2a_1(y)x + a_2(y) = 0$$

dans son cercle de convergence c_0.

(1) Nous désignons, suivant un usage répandu, par $P(x-x_0)$ une série ordonnée suivant les puissances positives de $(x-x_0)$ et égale à y_0 pour $x = x_0$.

4. Prolongement analytique. — Considérons l'ensemble des points analytiques (x, y) de la surface de Riemann R_y pour lesquels la dérivée de $x(y)$ ou la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'est pas nulle. En formant pour chacun de ces points analytiques l'élément correspondant on obtiendra un ensemble infini P d'éléments de fonction dont chacun est représenté par une série entière convergente de la forme (6). Nous allons démontrer que les éléments de cet ensemble constituent une seule fonction analytique $y(x)$ qui est, par définition, *la fonction inverse de la fonction multiforme* $x(y)$.

Pour cela, nous devons établir:

1° Que *tout prolongement analytique d'un élément de* P *fait partie de* P.

2° Qu'*étant donnés deux éléments* $P(x - x_0)$ *et* $P(x - x_n)$ *on peut passer de l'un à l'autre par prolongement analytique, c'est-à-dire en utilisant un nombre fini d'éléments de* P.

Démontrons d'abord la proposition 1°. Soient un élément analytique $P(x - x_0)$ de l'ensemble P et c_0 son cercle de convergence, $P(x - x_1)$ un prolongement analytique immédiat de $P(x - x_0)$ et c_1 son cercle de convergence; les deux cercles c_0 et c_1 auront une partie commune; comme en tout point de cette partie commune $P(x - x_0) = P(x - x_1)$ il en résulte que $P(x - x_1)$ vérifiera (1) en tout point de cette partie commune et par suite en tout point intérieur à son cercle de convergence. C'est donc un élément de l'ensemble P.

Abordons maintenant la proposition 2°. Soient $P(x - x_0)$ et $P(x - x_n)$ deux éléments analytiques de l'ensemble P et soient y_0 et y_n les valeurs prises par ces éléments respectivement en x_0 et x_n Ceci étant, comme l'ensemble des points de la surface de Riemann R_y vérifiant $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ admet le point à l'infini comme élément-limite unique, on peut donc tracer sur R_y une courbe Γ joignant les deux points (x_0, y_0) et (x_n, y_n). Alors, quand (x, y) décrira Γ le point x décrira dans son plan une certaine courbe L unissant x_0 et x_n Si $\overline{x}$ est un point quelconque de cette courbe L et si $\overline{y}$ est la valeur de la variable y au point correspondant de Γ, comme pour ces valeurs considérées de x et y $\frac{\partial F}{\partial y} \neq o$ il existe un élément analytique $P(x - \overline{x})$ de l'ensemble P dont le cercle de convergence $\overline{c}$ est concentrique au point x.

Par suite, d'après le théorème de M. Berel-Lebesgue, il existera un nombre fini de cercles $\overline{c}$ tel que tout point de L soit intérieur à l'un au moins de ces cercles. Comme les éléments analytiques correspondant à deux cercles empiétant l'un sur l'autre prennent la même valeur en leur partie commune, ils sont le prolongement analytique l'un de l'autre. Donc, on peut passer du point x_o au point x_n par prolongement analytique à l'aide d'un nombre fini d'éléments.

II. — Les points critiques

5. **Définition.** — Prolongeons maintenant l'élément (6) de la fonction y (x) suivant un chemin L partant du point x_0. Les éléments successifs de y (x) font correspondre à L sur la surface de Riemann R_y un chemin Γ. Si les rayons des cercles de convergence de ces éléments décroissent vers zéro lorsque x tend vers un point α de L, ce point est un *point critique* pour la fonction y (x).

Nous allons démontrer que, x *tendant vers* α *suivant* L y *tend vers une des racines* β_i *de* $F(\alpha, y) = 0$, *ou vers l'infini.*

Ce théorème a été démontré par M. Iversen (1) dans le cas où F (x, y) est linéaire en x et par M. Julia (2) dans le cas où F (x,y) est entière en x.

Maintenant nous nous contentons de reprendre précisément la démonstration de M. Julia en la modifiant très légèrement.

Soient, en effet, $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n, \ldots\ldots$, la suite infinie S des racines de l'équation $F(\alpha, y) = 0$ et C un cercle de centre $y = 0$ et de rayon R arbitrairement

(1) F. IVERSEN. Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes p. 6. (Thèse HELSINGFORS 1914).

(2) G. JULIA. Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière G (x,y) = o. (*Bull. de la Société Mathé. de France 1926*).

grand, ne passant par aucun des points β_n. Ce cercle contiendra un nombre fini n de points de S. En entourant ces n points par des petits cercles c_1, c_2, ... c_n de rayons arbitrairement petits, extérieurs les uns aux autres, mais intérieurs au grand cercle C, on formera ainsi un domaine T à l'intérieur et sur le contour duquel la fonction holomorphe $F(\alpha, y)$ ne s'annulera jamais. La fonction $F(x, y)$ étant continue dans tout domaine fini du plan des x et du plan des y, y est uniformément continue; par suite, un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre positif ε' tel que pour

$$(7) \qquad |x - \alpha| \leqq \varepsilon'$$

on ait

$$|F(\alpha, y) - F(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et cela quel que soit le point y du domaine T. Comme $|F(\alpha, y)| > \varepsilon$ en tout point y de T, nous avons donc également en tout point y de T

$$|F(x, y)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

et cela quel que soit le point $|x|$ vérifiant l'inégalité (7). Il en résulte que dès que le point x dépassera la limite $|x - \alpha| = \varepsilon'$ le point correspondant $y(x)$ sera extérieur au domaine T et restera, par suite, compris soit dans un cercle c_n bien déterminé, soit dans la partie du plan extérieure à C. Ceci étant vrai quelque grand que soit le cercle C et quelque petits que soient les cercles c_n, on aura donc la proposition suivante:

Si on prolonge un élément de y (x) *suivant un chemin* L *aboutissant à un point critique* α, y *tend vers une des racines de l'équation* F $(\alpha, y) = 0$ *ou vers l'infini.*

Remarque. — Décrivons, du point α comme centre, un cercle γ_1 de rayon très petit ε_1, et prolongeons la fonction y (x) suivant tous les chemins possibles ne sortant pas de γ_1. L'ensemble des valeurs et des valeurs-limites qu'acquiert la fonction y (x) dans le 2e cas constitue sur R_y un *domaine d'indétermination* D qui tend vers le point à l'infini lorsque ε_1 tend vers zéro.

6 **Points critiques algébriques.** — Plaçons nous d'abord dans le cas où, x tendant vers le point α, y tend vers une limite finie β. Alors β sera racine de l'équation

$$(8) \qquad F(\alpha, y) = 0$$

et la racine de l'équation (8) qui pour $x = \alpha$ prend la valeur β ou bien est holomorphe ou bien admet α comme *point critique algébrique.* La première éventualité ne peut se présenter puisque α est un point singulier. Donc, *si la limite de* y *est finie lorsque* x *tend vers* α, *le point* $x = \alpha$ *est un point critique algébrique, et* α *est alors l'abscisse de l'un des points* *communs aux deux courbes* $F(x, y) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Comme l'ensemble des points communs à ces courbes est *dénombrable*, il en résulte donc que l'ensemble des *points critiques algébriques* est toujours *dénombrable*.

7. **Pôle.** — Plaçons nous maintenant dans le cas où y tend vers l'infini lorsque x tend vers le point critique α, et cherchons si α pourrait être un *pôle*. Alors, au voisinage de ce point $y(x)$ s'écrit

$$(9) \qquad y = \frac{\beta_0 + \beta_1 (x - \alpha) + \beta_2 (x - \alpha)^2 + \quad}{(x - \alpha)^p},$$

p désignant *l'ordre de multiplicité du pôle,* d'où il suivrait pour la fonction $x(y)$ dans le voisinage du point à l'infini un développement de la forme

$$(10) \qquad x(y) = \alpha + \frac{\alpha_{-1}}{y^{\frac{1}{p}}} + \frac{\alpha_{-2}}{y^{\frac{2}{p}}} + \quad .$$

Or cette relation ne peut être remplie, d'après n° 2, que pour une seule branche de la fonction $x(y)$: le nombre p est égal à l'unité. Donc, *lorsqu'une branche de* $x(y)$ *est holomorphe au point à l'infini la fonction inverse* $y(x)$ *peut admettre un pôle et un seul; l'ordre de multiplicité du pôle est égal à l'unité.*

Pour former une fonction $y(x)$ admettant un *pôle* on n'aurait qu'à déterminer d'abord les fonctions entières $a_1(y)$ et $a_2(y)$ suivant les conditions indiquées au n° 2 et puis on constituerait la fonction $y(x)$.

8. **Points transcendants.** — Du n° précédent on voit que la fonction y (x) admettant de *pôle* est un cas particulier. Le point critique α est donc en général un *point transcendant* (cf. p. 22). D'où on conclut que *si* y *tend vers l'infini lorsque* x *tend vers le point critique* α *suivant* L, *ce point est en général un point transcendant pour* y (x).

Nous avons vu que, si α est un *point transcendant* de y (x), il y a sur la surface de Riemann R_y un chemin Γ s'étendant vers l'infini sur lequel x (y) tend vers α. Réciproquement, s'il existe un chemin Γ sur la surface de Riemann R_y convergeant vers l'infini tel que le point (x, y) décrivant ce chemin x tende vers α, ce point α est en général un *point transcendant* pour y (x). En effet, à Γ correspond dans le plan des x un chemin L tendant vers le point α. L'élément $P(x - x_0)$ de y (x) correspondant à un point (x_0, y_0) de Γ pourra être prolongé suivant L jusqu'au point α, en convenant de contourner les points critiques algébriques par des arcs de cercles infiniment petits, de telle sorte que y (x) décrive le chemin Γ en s'éloignant vers l'infini lorsque x tend vers α. C'est donc un *point transcendant*.

Le chemin Γ décrit par y (x) lorsque la variable x tend vers le point transcendant α suivant L est appelé d'après M. Valiron *chemin de détermination*, et α *valeur asymptotique* de la fonction x (y). Nous pouvons donc énoncer:

Les points transcendants de la fonction y (x) *font* *partie de l'ensemble des valeurs asymptotiques de la fonction* x (y).

De tout ce qui précède on a la proposition suivante:

La fonction y (x) *n'admet pas en général d'autres points critiques que des points critiques algébriques et des points transcendants, mais, lorsqu'une des deux branches de la fonction* x (y) *est holomorphe au point à l'infini, elle peut admettre de plus un pôle et un seul; l'ordre de multiplicité du pôle est égal à l'unité.*

III. — Le domaine Δ

9. **Définition.** — Soit dans le plan des x un cercle c de rayon r et de centre un point quelconque α. Comme, d'après le théorème de M. Remoundos il existe au plus trois valeurs exceptionnelles à distance finie pour lesquelles l'équation $F(x, y) = 0$ n'admet qu'un nombre fini de racines ou aucune racine, on peut toujours choisir le point x intérieur à c de telle façon que l'équation admette une infinité de racines. Alors, nous considérons l'un des éléments analytiques relatifs à ce point x et prolongeons-le analytiquement suivant tous les chemins possibles ne sortant pas de c. L'ensemble des valeurs et des va-

leurs-limites qu'acquiert la fonction $y(x)$ constitue sur la surface de Riemann R_y un *domaine* Δ. Les éléments de $y(x)$ (y compris les éléments algébriques) correspondant aux points y situés à l'intérieur de Δ définissent dans le cercle c une portion de cette fonction.

Le domaine Δ, qui peut s'étendre à l'infini, n'admet d'autres contours que les courbes γ qui correspondent à la circonférence c. Sur chacun de ces contours on a donc

$$(11) \qquad |x(y) - \alpha| = r$$

tandis que l'inégalité

$$(12) \qquad |x(y) - \alpha| < r$$

subsiste en tout point compris dans le domaine Δ.

Sur la surface de Riemann R_y il peut y avoir plusieurs domaines: comme tous les autres points de R_y vérifient la relation

$$(13) \qquad |x(y) - \alpha| > r,$$

ils feront partie d'un autre domaine Δ', à l'intérieur duquel subsiste cette même inégalité, tandis que la relation (11) est vérifiée sur son contour.

L'ensemble des deux domaines Δ et Δ' remplit toute la surface de Riemann R_y. En général aucun de ces domaines ne peut renfermer intérieurement le point à l'infini, car dans ce cas l'une des inégalités (12) et (13) serait vérifiée dans le voisinage du point à l'infini, ce qui contredit la propriété fondamentale de la singularité essentielle. Mais, lorsqu'une des branches de la fonction x (y) est holomorphe au point à l'infini ils peuvent bien renfermer intérieurement le point à l'infini.

10. Δ **fini.** — *Dans le cas où le domaine* Δ *est fini il comprend au moins une racine de* F (α, y) : lorsque le cercle c varie d'une façon continue, il en est de même du domaine Δ; donc, quand r tend vers zéro Δ se réduit à un point qu'il comprend; puisque le domaine d'indétermination se réduit à un point, ce point est *à priori* une racine de F (α, y). Par suite, si le domaine Δ ne comprend aucune racine de F (α, y) il s'étend nécessairement à l'infini. En particulier, si le point α est un *point transcendant* le domaine Δ s'étend à l'infini. Nous n'occuperons dans la suite que les domaines Δ s'étendant à l'infini.

11. Δ **Infini.** — Deux circonstances peuvent se présenter:

1° A partir d'une certaine valeur de r, le nombre de points de ramification à l'intérieur de Δ est fini. Alors, en prenant r suffisamment petit on peut toujours supposer que Δ ne renferme aucun point de ramification. Dans ce cas, en disposant convenablement des coupures le domaine Δ s'étendra sur un seul feuillet et sera un domaine *simplement connexe,* et le point singulier α sera de même nature que les points singuliers des fonctions inverses des fonctions entières étudiés par M. Iversen dans la thèse; nous disons qu'il est de *genre zéro.*

2° Le domaine Δ comprend toujours quel que soit r à son intérieur au moins un point de ramification, par suite il en comprendra toujours une infinité quel que soit r. Il s'étendra donc toujours sur deux feuillets et son *ordre de connexion* sera infini. Dans ce cas il existera sur R_y un chemin Γ convergeant vers l'infini tel que les deux déterminations $x_1(y)$ et $x_2(y)$ tendent vers α. Par conséquent, pour un tel point singulier $a_1(y)$ et $a_2(y)$ tendront respectivement vers $-\alpha$ et α^2 lorsque y s'éloignera à l'infini suivant le chemin Γ. Il résulte donc de ce qui précède que pour qu'il existe des domaines Δ d'*ordre de connexion infini*, il est nécessaire qu'il existe dans le plan des y des chemins Γ convergeant vers l'infini tel que $a_1(y)$ et $a_2(y)$ tendent respectivement vers des limites finies a_1 et a_2 et que l'équation

$$x^2 + 2\,a_1\,x + a_2 = o$$

admette une racine double. Si α est cette racine double nous disons que α est une *valeur asymptotique double*. Donc, *pour qu'il existe un domaine Δ d'ordre de connexion infini il est nécessaire qu'il existe au moins une valeur asymptotique double*. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, car il peut arriver que α soit *valeur asymptotique double* sans que le domaine Δ s'étende sur deux feuillets; dans ce cas on aura deux domaines Δ superposés tel qu'il soit impossible de passer de l'un à l'autre en traçant à l'intérieur de Δ de cercle. Dans ce cas on a deux points singuliers de *genre zéro* qui coïncident avec le même point.

Exemple. — Considérons la fonction y (x) définie par l'équation

$$x^2 + 2\,x\,y\,e^y + e^{2y} = o\ ;$$

elle admet le point $x = 0$ comme valeur asymptotique double, car en ce poinit le discriminant

$$a_1^2\,(y) - a_2\,(y) = e^{2y}\,(y^2 - 1)$$

converge vers zéro lorsque y s'éloigne indéfiniment suivant tout rayon issu de l'origine et faisant un angle aigu avec l'axe négatif. Le domaine Δ correspondant à un cercle de centre $x = 0$ s'étend sur les deux demi-feuillets négatifs de R_y et comprend au plus un point de ramification $y = -1$. Il est donc à connexion simple. D'après ce qui précède on voit que, en prenant r suffisamment petit, on peut toujours supposer que Δ ne renferme aucun point de ramification. Par suite, le domaine Δ ne peut s'étendre sur deux feuillets en disposant convenablement des coupures.

Mais il peut se faire que dans ce cas le domaine Δ s'étende toujours sur deux feuillets. Nous disons que le point singulier α est de *genre infini*. Maintenant nous allons donner deux exemples de *points critiques transcendants de genre infini* tel que pour l'un d'eux l'équation $F(\alpha, y) = 0$ n'admette aucune racine dans Δ, tandis que pour l'autre elle admet une infinité de racines.

1^er^ exemple. — Considérons la fonction y (x) définie par l'équation

$$(14) \qquad x^2 + 2\,x\,e^y \cos y + \frac{1}{2}\,e^{2y} = 0\;;$$

elle admet les points $x = 0$, $x = \infty$ comme points transcendants, car en ces points l'équation (14) n'admet aucune racine. La fonction $x(y)$ admet deux déterminations

$$x_1(y) = -\,e^y \cos y + e^y \sqrt{\cos^2 y - \frac{1}{2}}$$

$$x_2(y) = -\,e^y \cos y - e^y \sqrt{\cos^2 y - \frac{1}{2}}$$

et une infinité de points critiques algébriques

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\,\pi}{2},$$

k désignant un nombre entier quelconque. La surface de Riemann R_y est donc de genre infini. Le domaine Δ correspondant au cercle c de centre $x = 0$ s'étend sur les deux demi-feuillets négatifs de R_y et comprend une infinité de points de ramification quelque petit que soit le cercle c. Le long de chaque chemin sur lequel $x(y)$ tend vers zéro, $a_1(y) = e^y \cos y$ et $a_2(y) = \frac{1}{2}\,e^{2y}$ convergent vers zéro.

En dérivant l'équation (14) par rapport à y et éliminant x entre (14) et sa dérivée on a

$$(15) \qquad 2 \cos 2\,y - 1 = 0$$

Les zéros de cette équation

$$y = \pm\,\frac{\pi}{6} \pm 2\,h\,\pi \qquad (h \text{ entier} > 0)$$

définissent avec (14) les points critiques algébriques de $y(x)$. Cela nous montre qu'à l'intérieur du domaine Δ on peut trouver une infinité de zéros de (15); par suite, *au voisinage du point transcendant* $x = 0$ *on peut trouver une infinité de points critiques algébriques.*

2^{me} exemple. — Considérons la fonction $y(x)$ définie par l'équation

$$(16) \qquad x^2 + 2\,x\,e^y \cos y + e^{2y} \sin^2 y = o\,;$$

elle admet le point $x = 0$, $x = \infty$ comme points transcendants. Comme pour $x = \infty$ l'équation (16) n'admet aucune racine, il est donc de genre du cas précédent. La fonction $x(y)$ admet deux déterminations

$$x_1(y) = -\,e^y \cos y + e^y \sqrt{\cos 2\,y}$$

$$x_2(y) = -\,e^y \cos y - e^y \sqrt{\cos 2\,y}$$

et une infinité de points critiques algébriques

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\,\pi}{2} \qquad (k \text{ entier} > o \text{ ou } < o)$$

La surface de Riemann R_y est donc de genre infini. Le domaine Δ correspondant au cercle c de centre $x = 0$ s'étend sur les deux demi-feuillets négatifs de R_y et comprend une infinité de points de ramification quelque petit que soit le cercle c. Le long de chaque chemin sur lequel $x(y)$ tend vers zéro, $a_1(y) = e^y \cos y$ et $a_2(y) = e^{2y} \sin^2 y$ convergent vers zéro.

En dérivant l'équation (16) par rapport à y on a

(17) $x(\cos y - \sin y) + e^y(\cos y + \sin y)\sin y = o$

Eliminons x entre (16) et (17); nous obtenons

(18) $\sin y - \sin^2 y + \sin y \cos y + 2\cos^3 y = o$

qui définit avec (17) les points critiques algébriques de y(x). Elle admet d'ailleurs

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \text{ entier} > o \text{ ou } < o)$$

comme zéros. Comme pour $x = 0$ l'équation (16) admet une infinité de racines $x = k\pi$ dans le domaine Δ, le point $x = 0$ ne peut qu'être *point-limite* des points critiques algébriques. Chaque branche de $y_\Delta(x)$ est holomorphe ou algébrique au point $x = 0$. Donc, dans ce cas la variable x ne peut tendre vers le point $x = 0$ à moins de s'enrouler une infinité de fois autour de ce point en tournant autour d'une infinité de points critiques algébriques convergeant vers $x = 0$.

Remarque. — Il résulte donc de ce qui précède que les points critiques transcendants peuvent se partager en deux grandes classes: 1re classe comprenant les points critiques transcendants de genre zéro identiques aux points critiques transcendants des fonctions inverses des fonctions entières ; 2e classe les points critiques transcendants de genre infini. Les exemples précédents nous montrent que dans le domaine d'un tel point $x = \alpha$ la fonction $F(\alpha, y)$ peut admettre aucun zéro ou une infinité de zéros.

TABLE DES MATIERES

Préface 7

Première partie :

Etude de la fonction algébroïde entière à deux branches 9

Deuxième partie :

Etude de la fonction inverse.................. 17

I. — Définition 17

II. — Les points critiques 20

III. — Le domaine 25