JULES SEBAG

Sur l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative à l'aire d'une surface minima limitée à une courbe gauche et sur la recherche de ses solutions homogènes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1928

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1928__84__1_0>

N° D'ORDRE :
1985

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Jules SEBAG

1re THÈSE. — Sur l'Équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative a l'aire d'une surface minima limitée a une courbe gauche et sur la Recherche de ses solutions homogènes.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 1928, devant la Commission d'examen.

MM. CARTAN,		*Président.*
VESSIOT,	}	*Examinateurs.*
MONTEL,		

TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université.

14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1928

A Monsieur Villat
Professeur à la Sorbonne
avec l'expression de mes sentiments les plus respectueux et les plus reconnaissants
J. Sebag

A MON FRÈRE

A MESSIEURS CARTAN ET PAUL LÉVY

En témoignage de ma respectueuse gratitude.

A MONSIEUR HADAMARD

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage de profond respect.

PREMIÈRE THÈSE

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES PARTIELLES

RELATIVE A L'AIRE D'UNE SURFACE MINIMA LIMITÉE A UNE COURBE GAUCHE

ET SUR LA RECHERCHE DE SES SOLUTIONS HOMOGÈNES

Par JULES SEBAG

INTRODUCTION

L'objet du présent travail est l'étude de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait l'aire d'une surface minima considérée comme fonctionnelle de la forme du contour qui la limite.

De telles équations se présentent, comme extension au calcul des variations des intégrales multiples, de la théorie de Jacobi-Hamilton, extension donnée par M. Volterra(1) et reprise ensuite par M. Fréchet(2). M. Volterra avait, en particulier, considéré l'équation de Jacobi-Hamilton qui correspond au minimum de l'intégrale de Dirichlet.

Ces équations ont été ensuite étudiées *à priori* et d'une façon générale, par M. Paul Lévy(3) qui, par voie de passage du fini à l'infini, les a considérées comme limite (dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de deux fonctions arbitraires) d'un certain système de n équations aux dérivées partielles ordinaires du 1er ordre à $2n$ variables indépendantes, n augmentant indéfiniment.

M. Paul Lévy a pu ainsi étendre à ce nouveau genre d'équations les notions que l'on rencontre habituellement dans la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles, notamment les notions d'intégrabilité, de caractéristiques et celle d'inté-

(1) *Rendiconti Lincei*, 1890, 1er semestre, p. 127.

(2) *Annali di Math.*, 3e série, tome XI, p. 187.

(3) *Rendiconti del circolo Mathem. di Palermo*, 1914, 1er semestre, tome XXXVII. Voir aussi *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 2e partie, chap. V.

grale complète. Il a également montré comment on peut poser le problème de Cauchy pour une équation aux dérivées fonctionnelles partielles lorsque les conditions d'intégrabilité se trouvent satisfaites.

Généralement, les notations employées, quand il s'agit d'une fonctionnelle dépendant d'un contour fermé, sont celles indiquées par M. Hadamard et la variation première de la fonctionnelle est supposée de la forme :

$$\delta\Phi = \int_c (\Phi'_n \delta n + \Phi'_u \delta u)\, ds$$

Φ'_n et Φ'_u étant les dérivées fonctionnelles partielles.

C'est en partant de cette expression de $\delta\Phi$ que M. Paul Lévy a obtenu les conditions d'intégrabilité. Pour une équation aux dérivées fonctionnelles partielles donnée au hasard, le cas où elle satisfait aux conditions d'intégrabilité est tout à fait exceptionnel, mais ce cas est la règle quand il s'agit d'équations, comme celles que nous étudions auxquelles conduit le calcul des variations, ainsi qu'on pourrait s'en rendre compte *à priori*.

Le point de vue auquel nous nous sommes placés dans ce travail, est que la fonctionnelle considérée, ayant une signification intrinsèque, étrangère, par conséquent aux choix des axes de coordonnées, il convenait de l'étudier en considérant le contour dont elle dépend, dans l'espace, sans faire intervenir la projection de ce contour sur tel ou tel plan particulier.

Nous avons, par suite, adopté systématiquement les notations de M. Volterra, en posant :

$$\delta\Sigma = \int_c (\Sigma'_x \delta x + \Sigma'_y \delta y + \Sigma'_z \delta z)\, ds$$

les dérivées fonctionnelles partielles étant liées par la relation :

$$\Sigma'_x \frac{dx}{ds} + \Sigma'_y \frac{dy}{ds} + \Sigma'_z \frac{dz}{ds} = 0$$

ce qui nous a conduit à faire usage d'un certain trièdre mobile.

Ce point de vue est peut-être plus avantageux lorsqu'on a surtout en vue des résultats d'un caractère géométrique, en même temps qu'il conduit à des formules tout à fait symétriques.

Dans la 1re partie, nous considérons une fonctionnelle Σ dépendant d'un contour fermé C, que nous appelons aire minima et que nous supposons parfaitement déterminée par la donnée du contour (sauf dans les cas singuliers, s'il y a lieu).

Nous faisons sur cette fonctionnelle quelques hypothèses d'un caractere intuitif qui nous permettent d'abord de former l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle elle satisfait et de retrouver ensuite la définition habituelle des surfaces minima, ces surfaces se trouvant ainsi liées à l'existence des multiplicités caractéristiques.

La forme sous laquelle se présentent les éléments du 2e ordre (variations des dérivées de Σ) nous conduit à l'équation aux dérivées partielles donnée par Schwarz(1), qui régit les variations infiniment petites des surfaces minima. Nous formons également l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (généralisation de celle qui est relative au minimum de l'intégrale de Dirichlet) à laquelle satisfait la fonctionnelle $\delta^2{}_n\Sigma$, variation seconde de Σ quand le contour se déforme normalement à la surface minima.

Nous étendons ensuite la méthode employée à des équations aux dérivées fonctionnelles partielles relatives à un contour fermé, d'un type plus général et retrouvons les conditions d'intégrabilité (en utilisant toujours les notations de M. Volterra) en les rattachant à la détermination des caractéristiques.

Dans la 2e partie, nous cherchons à préciser la détermination de notre fonctionnelle en lui imposant des conditions d'homogénéité tout à fait intuitives.

Notre but, en effet, était de considérer spécialement parmi toutes les fonctionnelles Σ relatives à un contour fermé donné (dont l'ensemble forme une intégrale complète), celle qui satisfait aux conditions de continuité (imposées à la surface minima) résultant de l'énoncé du problème de Plateau. Ces conditions de continuité, nous avons cherché à les traduire par les conditions d'homogénéité dont il est question plus haut.

M. Paul Lévy(2) s'était déjà posé ce problème de la recherche des solutions homogènes pour l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait la fonction de Green (dans le cas de l'équation de Laplace).

Il a montré comment les équations qui résultent des conditions d'homogénéité, jointes aux propriétés élémentaires de la fonction de Green, permettraient la détermination de cette fonction.

Pour faire cette recherche des solutions homogènes nous nous sommes placés à un point de vue plus général, qui est celui de Jacobi-Hamilton.

Il est évident que les deux méthodes qui consistent à utiliser dans le cas du problème de Dirichlet, soit l'équation de Jacobi-Hamilton, soit l'équation de la fonction de Green, sont entièrement équivalentes.

Les conditions d'homogénéité montrent immédiatement le lien qui existe entre

---

(1) *Monatsber der Berliner Akad*, 1872, p. 718. La théorie de Schwarz est reproduite dans Duhem : *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, tome II. Paris, Hermann, 1891, page 113 et suivantes.

(2) Mémoire publié dans les *Rendiconti del circolo Mat. di Palermo*, 1912, 2e semestre, tome XXXIV. — *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 1922 (Gauthier-Villars), 2e partie, chap. III, p. 199 et suivantes.

une surface minima et la surface adjointe qui lui correspond. De là un procédé d'intégration pour obtenir, à l'aide de quadratures, les coordonnées d'un point de la surface minima la plus générale, en partant d'une surface minima particulière quelconque. Ces formules, qui ne renferment pas de symbole imaginaire, conduiraient rapidement aux principaux résultats de la théorie classsique des surfaces minima.

Elles permettent également de ramener la solution du problème de Dirichlet sur une surface minima à la résolution d'une certaine équation intégrale (de même que l'on est ramené, dans le cas du plan, à une équation de Fredholm). Mais c'est là une réduction qui paraît d'un caractère plutôt théorique.

En dernier lieu, nous cherchons la possibilité de former pour la fonctionnelle Σ un développement en série qui conduirait à la solution du problème de Plateau.

La conclusion est celle-ci : Un tel développement en série peut être obtenu (toutes réserves étant faites sur la convergence de ce développement), si l'on sait résoudre, sur une surface minima particulière, le problème dont s'est occupé M. Paul Lévy (¹) dans le cas du plan : A savoir la détermination de la fonction de Green pour un contour fermé quelconque et, à partir de ce contour, le calcul de ses variations successives. Dans le cas d'une surface minima, l'étude devrait porter sur la fonction de Green relative à l'équation de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + \frac{8U}{(1+\theta^2+\omega^2)^2} = 0.$$

En définitive le problème de Plateau se trouve ramené à une étude parallèle à celle faite par M. Paul Lévy.

Les résultats exposés dans la 1re partie aux nos 3, 4, 6 et 7, sont contenus dans le mémoire publié en 1914 et déjà cité de M. Paul Lévy (note de la page 1). Quant à l'essentiel de la méthode pour obtenir les équations des caractéristiques, il résulte évidemment des travaux de M. Paul Lévy.

Nous avons cru cependant devoir maintenir dans le texte les paragraphes qui font double emploi avec le mémoire de M. Paul Lévy afin de ne pas rompre l'unité de l'exposé.

(¹) Voir note 2 de la page 11. Voir aussi thèse 1911 (Gauthier-Villars), chap. III, p. 72 et suivantes.

PREMIERE PARTIE

FORMATION ET INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES PARTIELLES

[1] Nous appellerons Aire minima correspondant à un contour fermé C, une fonctionnelle Σ de ce contour, bien déterminée, quand C est donné (sauf dans les cas singuliers, s'il en existe) et satisfaisant à certaines conditions que nous allons poser.

Tout d'abord nous supposerons le contour C défini par trois équations :

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s)$$

s étant la longueur d'un arc variable de la courbe C comptée à partir d'une certaine origine, le sens positif de parcours sur C étant défini comme d'habitude. Nous nous plaçons dans le cas où les trois fonctions f, φ, ψ sont continues et admettent des dérivées f', f''; φ', φ''; ψ', ψ'' continues. Soit l la longueur du contour C; f, φ, ψ ainsi que leurs dérivées sont des fonctions périodiques de période l.

Cela posé, nous ferons en premier lieu, sur la fonctionnelle Σ les hypothèses suivantes :

a) Σ est une fonctionnelle *continue* du contour C (continuité en moyenne d'ordre o).

b) Elle admet des dérivées fonctionnelles partielles continues des deux premiers ordres.

c) Elle ne dépend *spécialement* d'aucun point de contour.

Dans ces conditions, sa variation première se présente sous la forme :

$$(1) \qquad \delta\Sigma = \int_C (\Sigma'_x \delta x + \Sigma'_y \delta y + \Sigma'_z \delta z)\, ds = \int_c (\mathrm{S}\,\Sigma'_x \delta x)\, ds$$

Σ'_x, Σ'_y, Σ'_z étant les dérivées fonctionnelles partielles du 1^er ordre et le signe S indiquant une sommation étendue aux trois variables x, y, z.

[2] Les trois fonctions f, φ, ψ ne sont pas indépendantes puisque leurs dérivées sont liées par la relation :

$$f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2 = 1 .$$

On doit s'attendre à ce qu'il en résulte une relation correspondante entre les trois dérivées fonctionnelles partielles Σ'_x, Σ'_y, Σ'_z. C'est la relation bien connue :

$$\Sigma'_x dx + \Sigma'_y dy + \Sigma'_z dz = S\Sigma'_x dx = 0 \tag{2}$$

qui exprime que la variation de Σ est nulle quand la courbe C ne fait que glisser sur elle-même, ou plutôt quand chaque élément de la courbe vient se substituer à l'élément infiniment voisin (ce qui est beaucoup plus général qu'un glissement en bloc de tout le contour).

Il est peut-être intéressant de remarquer que cette condition (2) revient à ceci :

Pour définir l'intégrale (1), on a divisé la courbe C en une infinité dénombrable d'éléments d'arcs $s_{i+1} - s_i$ tendant vers 0. La relation (2) traduit une propriété fondamentale de l'intégrale définie : à savoir que sa valeur $\delta\Sigma$ ne dépend pas du mode de subdivision adopté lequel reste ainsi complètement arbitraire.

Autrement dit :

Supposons qu'on veuille considérer Σ comme une fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes à savoir les coordonnées d'une infinité dénombrable de points dont l'ensemble (partout *dense*) équivaut à la donnée de la courbe C. La relation (2) exprime encore que la différentielle totale de Σ par rapport à toutes ces variables est la même quelle que soit la manière dont les points sont répartis sur la courbe C.

Ainsi la relation (2) autorise, dans une certaine mesure, à remplacer une fonctionnelle dépendant d'un contour fermé par la limite d'une fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes.

Une autre interprétation de (2) : c'est que le vecteur R de composantes (Σ'_x, Σ'_y, Σ'_z) est normal en chaque point de C à l'élément ds en ce point.

[3] Soient : u, v, w les cosinus directeurs du vecteur R et par conséquent :

$$\Sigma'_x = \mathrm{R}u, \qquad \Sigma'_y = \mathrm{R}v, \qquad \Sigma'_z = \mathrm{R}w$$

le déplacement ($\delta x, \delta y, \delta z$) représente également un vecteur $\delta\xi$ de cosinus directeurs a, b, c. Dans ces conditions :

$$\delta\Sigma = \int_C \mathrm{R} \cos\theta \, \delta\xi \, ds$$

$\cos\theta$ étant le cosinus de l'angle des deux vecteurs,

$$\cos\theta = au + bv + cw$$

R et $\delta\xi$ sont des quantités positives. $\delta\xi$ est, d'autre part, sur C une fonction de s. Pour une forme donnée à cette fonction, $\delta\Sigma$ est maximum quand : $\cos\theta = 1$ ou $a = u$, $b = v$, $c = w$, c'est-à-dire que les deux vecteurs R et $\delta\xi$ ont même direction et même sens. On a dans ce cas :

$$(\delta\Sigma)_{\max} = \int_c \mathrm{R}\,\delta\xi\,ds$$

mais alors $\delta\xi(a, b, c)$ étant, comme $\mathrm{R}(u, v, w)$, normal à l'élément ds, $\delta\xi ds$ est l'aire du rectangle élémentaire ayant pour base ds et pour hauteur $\delta\xi$, soit $d\mathcal{A}$ cette aire :

$$(\delta\Sigma)_{\max} = \int_c \mathrm{R}\,d\mathcal{A}.$$

En particulier, si la déformation du contour porte seulement sur un arc infiniment petit, on a :

$$(\delta\Sigma)_{\max} = \mathrm{R}\,d\mathcal{A}.$$

Nous ferons encore, dans ce cas, l'hypothèse suivante :

$d)$ $$(\delta\Sigma)_{\max} = d\mathcal{A}.$$

De sorte que l'on devra prendre $\mathrm{R} = 1$.

Étant donné que nous voulons définir une fonctionnelle qui représente une *aire*, cette dernière condition est assez intuitive, mais en outre, elle sera justifiée par la suite.

Cette hypothèse : $\mathrm{R} = 1$, en vertu de :

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

donne :

(3) $$\Sigma'^2_x + \Sigma'^2_y + \Sigma'^2_z = 1.$$

Dans ce qui suivra, nous pourrons partout mettre, pour simplifier, u, v, w à la place de $\Sigma'_x, \Sigma'_y, \Sigma'_z$.

En définitive, nous voyons que notre fonctionnelle doit satisfaire aux deux équations aux dérivées fonctionnelles partielles :

(4) $$\begin{gathered} \Sigma'_x dx + \Sigma'_y dy + \Sigma'_z dz = 0, \\ \Sigma'^2_x + \Sigma'^2_y + \Sigma'^2_z = 1. \end{gathered}$$

A vrai dire, la 1re de ces relations s'appliquant à n'importe quelle fonctionnelle dépendant d'un contour fermé, ne constitue pas à proprement parler une équation aux dérivées fonctionnelles partielles.

[**4**] Les deux relations (4) peuvent être remplacées par une seule, si l'on a pris soin de réduire les trois arguments $\delta x, \delta y, \delta z$ à deux seulement, ainsi que cela est possible.

Pour faire cette réduction, nous supposerons le contour C, défini au moyen de sa projection que nous appellerons C_1, sur le plan xoy, et qui sera représentée par les deux équations :

$$x = f_1(\sigma), \qquad y = \varphi_1(\sigma)$$

et par la cote z d'un point variable sur C

$$z = \psi_1(\sigma)$$

σ étant l'abscisse curviligne sur la courbe C_1 à partir d'une certaine origine.

Prenons comme sens positif sur la normale, en un point de C_1, le sens vers l'intérieur de la courbe, δn étant un déplacement infiniment petit sur cette normale, la variation du contour C_1 est connue si l'on se donne δn en fonction de σ. Si de plus, on se donne $\delta z = \delta\psi_1$ en fonction de σ, on aura défini la déformation infiniment petite la plus générale du contour C. Dans ces conditions δx et δy auront pour valeurs :

$$\delta x = -\frac{dy}{d\sigma}\delta n, \qquad \delta y = \frac{dx}{d\sigma}\delta n$$

et l'on aura pour $\delta\Sigma$:

$$\delta\Sigma = \int_C \left[\left(\Sigma'_y \frac{dx}{d\sigma} - \Sigma'_x \frac{dy}{d\sigma}\right)\frac{ds}{d\sigma}\delta n + \Sigma'_z \frac{ds}{d\sigma}\delta z\right] d\sigma$$

ou

$$\delta\Sigma = \int_c (\Sigma'_n \delta n + \Sigma'_u \delta u)\, d\sigma$$

en posant :

$$(5) \qquad \Sigma'_n = \left(\Sigma'_y \frac{dx}{d\sigma} - \Sigma'_x \frac{dy}{d\sigma}\right)\frac{ds}{d\sigma}, \qquad \Sigma'_u = \Sigma'_z \frac{ds}{d\sigma}, \qquad \delta u = \delta z;$$

Σ'_n et Σ'_u sont les dérivées fonctionnelles partielles relatives à ce nouveau système de référence.

Remarquons que

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\sigma^2} = 1 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = 1 + z'^2_\sigma$$

et éliminons Σ'_x, Σ'_y, Σ'_z entre les relations (4) et (5). Nous obtiendrons par un calcul facile [1] :

(6) $$\Sigma'^2_n + \theta^2 \Sigma'^2_u - \theta^2 = 0$$

en posant

$$\theta^2 = 1 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = 1 + z'^2_\sigma .$$

[5] Mettons encore cette équation sous une autre forme. Supposons qu'on définisse le contour C en se donnant x et y exprimés en fonction de z, z devenant ainsi une variable indépendante au sens ordinaire du mot. Nous supposerons de plus, que z est assujetti à varier entre deux limites fixes a et b $(a < b)$, a et b étant les cotes respectivement minima et maxima sur le contour C. Cela revient à dire que C, en se déformant, doit rester constamment entre les deux plans parallèles au plan xoy, ayant respectivement pour cote a et b.

Dans ces conditions, il n'y aura pas lieu de considérer la variation de $z (\delta z = 0)$ de sorte qu'alors :

$$\delta\Sigma = \int_c (\Sigma'_x \delta x + \Sigma'_y \delta y)\, ds = \int_c (u \delta x + v \delta y)\, ds .$$

Mais en vertu de :

$$Su^2 = 1 , \qquad Su\frac{dx}{ds} = 0 , \qquad S\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 .$$

On peut considérer un vecteur de cosinus directeurs : α, β, γ (normal en même temps aux deux vecteurs vecteurs (u, v, w) et $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$) tel que l'on puisse poser :

(7) $$u = \beta\frac{dz}{ds} - \gamma\frac{dy}{ds}, \qquad v = \gamma\frac{dx}{ds} - \alpha\frac{dz}{ds}, \qquad w = \alpha\frac{dy}{ds} - \beta\frac{dx}{ds}$$

---

[1] Paul Lévy. Mémoire publié en 1914 aux *Rendiconti del circolo Math. di Palermo.*

et tel que l'on ait inversement :

$$\alpha = w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}, \qquad \beta = u\frac{dz}{ds} - w\frac{dx}{ds}, \qquad \gamma = v\frac{dx}{ds} - u\frac{dy}{ds} \tag{8}$$

α, β, γ étant aussi liés par les relations :

$$\mathrm{S}\alpha^2 = 1, \qquad \mathrm{S}\alpha u = 0, \qquad \mathrm{S}\alpha\frac{dx}{ds} = 0. \tag{9}$$

On pourra écrire, dans ces conditions :

$$\delta\Sigma = \int_a^b \left[\left(\beta - \gamma\frac{dy}{dz}\right)\delta x + \left(\gamma\frac{dx}{dz} - \alpha\right)\delta y\right] dz$$

ou

$$\delta\Sigma = \int_a^b (\Sigma'_{1x}\delta x + \Sigma'_{1y}\delta y)\, dz.$$

En posant, pour éviter toute ambiguité :

$$\Sigma'_{1x} = \beta - \gamma\frac{dy}{dz}, \qquad \Sigma'_{1y} = \gamma\frac{dx}{dz} - \alpha. \tag{10}$$

En éliminant α, β, γ entre les relations (9) et (10), on aura l'équation cherchée :

$$\left(1 + x'^2_z\right)\Sigma'^2_{1x} + 2x'_z y'_z \Sigma'_{1x}\Sigma'_{1y} + \left(1 + y'^2_z\right)\Sigma'^2_{1y} = 1 + x'^2_z + y'^2_z$$

si on n'avait pas assujetti z à varier entre les limites fixes a et b, on aurait eu dans l'expression de $\delta\Sigma$ des termes en dehors du signe $\int$ correspondant aux points de C ayant pour cote a et b et la fonctionnelle Σ aurait dépendu *spécialement* de ces points. On voit ainsi l'inconvénient que comporte un tel choix de variables.

[6] Nous allons maintenant vérifier que l'équation (6) se réduit, à la limite, à l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative au minimum de l'intégrale de Dirichlet :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int\int (p^2 + q^2)\, dx dy$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Supposons que la fonction $z(\sigma)$ ainsi que sa dérivée z'_σ tendent vers o de façon que le contour C se confonde avec sa projection plane C_1. L'équation (6) devient alors, en y faisant $\frac{dz}{d\sigma} = 0$:

$$\Sigma'^2_n + \Sigma'^2_u = 1. \tag{11}$$

Parmi toutes les fonctionnelles satisfaisant à cette équation (11) et par suite, aussi, à l'équation (6), prenons celle qui représente l'aire de la courbe C_1 : soit Σ_1, pour laquelle :

$$\delta\Sigma_1 = -\int_{C_1} \delta n \, d\sigma.$$

Dans ce cas : $\Sigma'_{1n} = -1$, $\Sigma'_{1u} = 0$.

Cherchons alors ce que devient l'équation (6) pour un contour C presque plan, infiniment voisin de sa projection C_1, en supposant de plus que Σ tende vers Σ_1, $z(\sigma)$ et $z'(\sigma)$ auront pour limite o. Prenons la variation des deux membres de l'équation (6) :

$$2\Sigma'_n\delta\Sigma'_n + \theta^2\delta\Sigma'^2_u + \Sigma'^2_u\,\delta\theta^2 - \delta\theta^2 = 0 \tag{12}$$

cette variation étant prise par rapport à la fonction $z(\sigma)$, la courbe C_1 et par suite $d\sigma$ ne variant pas. Dans cette équation (12), nous devons remplacer Σ'_n et Σ'_u par leurs limites qui sont respectivement -1 et o. D'autre part :

$$\delta\theta^2 = \delta z'^2_\sigma.$$

On a alors θ^2 tendant vers 1

$$-2\delta\Sigma'_n + \delta\Sigma'^2_u - \delta z'^2_\sigma = 0$$

ou, en posant :

$$\delta\Sigma'_n = \Phi'_n, \qquad \delta\Sigma'^2_u = \Phi'^2_u, \qquad \delta z'^2_\sigma = u'^2_\sigma,$$

$$\Phi'_n = \frac{1}{2}\left(\Phi'^2_u - u'^2_\sigma\right). \tag{13}$$

Or Φ'_n, Φ'_u, u'^2_σ sont ce que deviennent les dérivées fonctionnelles Σ'_n, Σ'_u et la quantité z'^2_σ, respectivement, quand le contour C est infiniment voisin de C_1. Il en résulte que l'équation (13) est l'équation cherchée. C'est bien l'équation de

Jacobi-Hamilton relative au minimum de l'intégrale de Dirichlet. Si au lieu de Φ, on avait considéré la fonctionnelle 2Φ, minimum de l'intégrale

$$2\mathrm{I} = \int\int (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

on aurait eu pour les dérivées fonctionnelles : $2\Phi'_n$ à la place de Φ'_n et $2\Phi'_u$ à la place de Φ'_u, de sorte qu'en remplaçant Φ'_n et Φ'_u respectivement par $\frac{1}{2}\Phi'_n$ et $\frac{1}{2}\Phi'_u$ dans l'équation (13), on aurait obtenu [1] :

$$(13') \qquad \Phi'_n = \frac{1}{4}\Phi'^2_u - u'^2_\sigma .$$

M. Paul Lévy avait déduit cette dernière équation de l'équation (6) au moyen d'un développement en série. En effet, l'équation (6) peut s'écrire en y remplaçant u par λu (λ étant une constante) :

$$(13'') \qquad \frac{\Phi'^2_u}{\lambda^2} + \frac{\Phi'^2_n}{1 + \lambda^2 u} = 1 .$$

M. Paul Lévy [2] développe une solution Φ de cette équation suivant les puissances croissantes de λ^2. En exprimant que cette solution satisfait à l'équation (13″) quelle que soit la valeur de λ, il obtient une infinité d'équations aux dérivées fonctionnelles partielles, parmi lesquelles l'équation (13′) et toutes complètement intégrables en même temps que l'équation (6).

[7] Il y a lieu maintenant de chercher si l'équation :

$$(6) \qquad \Phi'^2_n + \theta^2\Phi'^2_u - \theta^2 = 0$$

est complètement intégrable.

Pour écrire les conditions d'intégrabilité, nous devons pouvoir poser, en adoptant les notations de M. Paul Lévy [3] :

$$\delta\Phi'_u = \mathrm{E}(\delta u) + \mathrm{F}(\delta n) + k\Phi'_u \delta n$$
$$\delta\Phi'_n = \mathcal{F}(\delta u) + \mathrm{G}(\delta n) + \Phi'_u u' \delta n'$$

k étant la courbure de C_1 au point considéré et $\delta n'$ la dérivée de δn par rapport à σ.

---

(1) M. Paul Lévy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 2e partie, chap. v, p. 235.
(2) Mémoire déjà cité, paru en 1914 aux *Rend. del circ. Math. di Palermo*.
(3) *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 1re partie, chap. v, p. 98.

Il est nécessaire et suffisant, pour que les conditions d'intégrabiliié soient vérifiées, que :

1° E et G soient des fonctionnelles linéaires identiques à leurs adjointes respectives;

2° F et $\mathfrak{F}$ soient des fonctionnelles linéaires adjointes l'une de l'autre.

Pour écrire explicitement ces conditions, il faut, de l'équation (6), déduire la variation de Φ'_n; on obtient :

$$\Phi'_n = \theta\sqrt{1 - \Phi'^2_u}$$

en choisissant provisoirement le signe + devant le radical. D'où :

$$\delta\Phi'_n = \frac{u'_\sigma d\delta u}{\theta d\sigma}\sqrt{1 - \Phi'^2} - \frac{\theta\Phi'_u\delta\Phi'_u}{\sqrt{1 - \Phi'^2_u}} + \frac{ku'^2_\sigma}{\theta}\sqrt{1 - \Phi'^2_u}\,\delta n.$$

Expression de la forme :

$$\delta\Phi'_n = \mathrm{H}(\delta\Phi'_u) + \mathrm{L}(\delta u) + \mathrm{L}_1(\delta n)$$

en posant :

$$\mathrm{H}(\delta\Phi'_u) = \frac{-\theta\Phi'_u}{\sqrt{1 - \Phi'^2_u}}\delta\Phi'_u,$$

$$\mathrm{L}(\delta u) = \frac{u'_\sigma}{\theta}\sqrt{1 - \Phi'^2_u}\,\frac{d\delta u}{d\sigma},$$

$$\mathrm{L}_1(\delta n) = \frac{ku'^2_\sigma}{\theta}\sqrt{1 - \Phi'^2_u}\,\delta n.$$

Soit $\mathfrak{L}$, l'expression adjointe de L, on a :

$$\mathfrak{L}(\delta n) = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{u'_\sigma\sqrt{1 - \Phi'^2_u}}{\theta}\delta n\right).$$

On démontre alors facilement que tout revient à vérifier[1] que l'expression :

$$\mathrm{H}[\mathfrak{L}(\delta n) + k\Phi'_u\delta n] + \mathrm{L}_1(\delta n) - \Phi'_u u'_\sigma\delta n'$$

[1] Paul Lévy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 2e partie, chap. IV, page 231.

est une fonctionnelle linéaire de δn identique à son adjointe. Formons cette expression dans le cas actuel, elle est :

$$\frac{-\theta\Phi'_u}{\sqrt{1-\Phi'^2_u}}\left[-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{u'_\sigma\sqrt{1-\Phi'^2_u}}{\theta}\delta n\right)+k\Phi'_u\delta n\right]+\frac{ku'^2_\sigma}{\theta}\sqrt{1-\Phi'^2_u}\,\delta n-\Phi'_u u'_\sigma \delta n'$$

ou

$$\left[\frac{\theta\Phi'_u}{\sqrt{1-\Phi'^2_u}}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{u'_\sigma\sqrt{1-\Phi'^2_u}}{\theta}\right)-\frac{k\theta\Phi'^2_u}{\sqrt{1-\Phi'^2_u}}+\frac{ku'^2_\sigma}{\theta}\sqrt{1-\Phi'^2_u}\right]\delta n.$$

Cette expression d'où le terme en $\delta n'$ a disparu et qui est linéaire par rapport à δn est bien identique à son adjointe.

Si l'on avait pris :

$$\Phi'_n = -\theta\sqrt{1-\Phi'^2_u}.$$

Le résultat, visiblement eût été le même. On en conclut que l'équation (6) et par suite, l'équation

$$\Sigma'^2_x + \Sigma'^2_y + \Sigma'^2_z = 1$$

qui lui est équivalente sont complètement intégrables.

INTÉGRATION DE L'ÈQUATION

$$\Sigma'^2_x + \Sigma'^2_y + \Sigma'^2_z = 1.$$

Recherche des caractéristiques.

[8] Nous allons maintenant appliquer à notre équation aux dérivées fonctionnelles partielles une autre méthode, en la prenant systématiquement sous la forme :

$$S\,\Sigma'^2_x = 1.$$

Tous les calculs auront ainsi une signification indépendante du choix des axes de coordonnées. Supposons que le contour C se déforme infiniment peu de façon que l'on ait :

$$\delta x = -u\delta\xi, \qquad \delta y = -v\delta\xi, \qquad \delta z = -w\delta\xi.$$

On obtient ainsi, un autre contour C′ infiniment voisin du premier et cette déformation de C correspond à une variation de Σ égale à :

$$\delta\Sigma = -\int_C (Su^2)\,\delta\xi\,ds = -\int_C \delta\xi\,ds$$

$\delta\xi$, le long de C est une fonction de s :

$$\delta\xi = f(s)\,\delta\lambda$$

$\delta\lambda$ étant une constante infiniment petite. La courbe C′ dépend de la forme de cette fonction $f(s)$.

Le long de C′, les dérivées fonctionnelles partielles

$$\Sigma'_x = u, \qquad \Sigma'_y = v, \qquad \Sigma'_z = w$$

prendront des valeurs u', v', w' telles que :

$$u' = u + \delta u, \qquad v' = v + \delta v, \qquad w' = w + \delta w.$$

De cette courbe C′ nous pourrons encore déduire par le procédé précédent une courbe infiniment voisine C″ en prenant :

$$(\delta x)' = -u'\delta\xi', \qquad (\delta y)' = -v'\delta\xi', \qquad (\delta z)' = -w'\delta\xi'.$$

En appliquant la même loi de proche en proche, on obtiendra, à partir de C, une suite continue de courbes fermées dont l'ensemble formera une surface à deux dimensions. Nous appellerons cette surface, *surface caractéristique* correspondant à la courbe C et aux déterminations de u, v, w que l'on s'est donné arbitrairement sur cette courbe, u, v, w satisfaisant toutefois aux deux relations

$$Sudx = 0, \qquad Su^2 = 1$$

car nous verrons que cette surface caractéristique est liée à la notion de caractéristiques du 1er ordre telle qu'elle résulte des travaux de M. Paul Lévy.

Cette surface dépend apparemment de la forme des fonctions successives définissant :

$$\delta\xi, \quad \delta\xi', \quad \ldots.$$

Nous allons démontrer :

1° Qu'à une courbe fermée C donnée et un ensemble de valeurs de u, v, w également donné sur cette courbe (u, v, w étant toujours supposés liés par les relations

$Sudx = 0$, $Su^2 = 1$), il correspond (sauf dans certains cas singuliers) une surface caractéristique unique, indépendante, par conséquent, de la forme des fonctions successives $\delta\xi$, $\delta\xi'$ . . . .

2° Que c'est en cela précisément que consiste le caractère de l'équation

$$Su^2 = 1$$

d'être complètement intégrable.

3° Que toutes ces surfaces caractéristiques sont susceptibles d'une définition géométrique simple : *Ce sont exclusivement des surfaces à courbures moyenne nulle ou surfaces minima.*

4° Que la recherche de toutes ces surfaces équivaut à l'intégration de l'équation (3).

5° Que pour achever de définir notre fonctionnelle, il sera nécessaire de l'assujettir à de nouvelles conditions.

[**9**] Supposons que les équations qui définissent la courbe C renferment deux paramètres variables λ et μ. Déformons infiniment peu le contour C en faisant varier λ seul. Nous aurons :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda} = \int_C \left(Su\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right) ds.$$

Faisons maintenant varier le paramètre μ :

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \int_C ds S\left(\frac{\partial u}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + u\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right) + \int_C \left(Su\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial ds}{\partial\mu}.$$

Nous devons écrire :

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\mu\,\partial\lambda}$$

ou

$$\int_C \left(S\frac{\partial u}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right) ds + \int_C \left(Su\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)\frac{\partial ds}{\partial\lambda} = \int_C \left(S\frac{\partial u}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right) ds + \int_C \left(Su\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial ds}{\partial\mu}.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la manière dont x, y, z dépendent de λ et μ. On pourrait même choisir cette dépendance telle que la déformation du contour ne portât que sur un arc de ce contour aussi petit que l'on veut. Il en résulte que l'égalité précédente est valable pour chaque élément ds pris isolément :

$$(14)\qquad S\frac{\partial u}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \left(Su\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\frac{1}{ds}\frac{\partial ds}{\partial\mu} = S\frac{\partial u}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \left(Su\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)\cdot\frac{1}{ds}\cdot\frac{\partial ds}{\partial\lambda}$$

où l'on a :

$$\frac{\partial ds}{\partial \lambda} = S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial dx}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial ds}{\partial \mu} = S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial dx}{\partial \mu}.$$

Nous avons défini précédemment (n° 5) un vecteur de cosinus directeurs (α, β, γ) normal en même temps à l'élément ds et au vecteur (u, v, w) :

$$S\alpha\frac{dx}{ds} = 0, \qquad S\alpha u = 0, \qquad S\alpha^2 = 1.$$

Nous choisirons le sens de ce vecteur tel que le trièdre trirectangle ainsi formé par les trois vecteurs :

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \qquad (u, v, w), \qquad (\alpha, \beta, \gamma)$$

ait même orientation que le trièdre $o(xyz)$ formé par les trois axes coordonnés. De plus, nous poserons une fois pour toutes dans ce qui suivra :

$$L_e = S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{du}{ds} = -Su\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$L_n = S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{ds} = -S\alpha\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$N = S\alpha\frac{du}{ds} = -Su\frac{d\alpha}{ds}.$$

Cela étant, supposons que lorsque λ varie seul, le déplacement d'un point M quelconque de C se fasse sur la direction $(-u, -v, -w)$ de façon que l'on ait :

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -u\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -v\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = -w\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}.$$

Supposons d'autre part que μ variant seul, le déplacement de M se fasse sur le vecteur (α, β, γ) de façon que ce déplacement étant désigné par δn, on ait :

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \alpha\frac{\delta n}{\delta\mu}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \beta\frac{\delta n}{\delta\mu}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \mu} = \gamma\frac{\delta n}{\delta\mu}.$$

On aura dans ces conditions :

$$\frac{1}{ds}\cdot\frac{\partial ds}{\partial\lambda} = \frac{1}{ds}S\frac{dx}{ds}\cdot d\frac{\partial x}{\partial\lambda} = -\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}S\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds} = -L_e\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},$$

$$\frac{1}{ds}\frac{\partial ds}{\partial\mu} = \frac{1}{ds}S\frac{dx}{ds}\cdot d\frac{\partial x}{\partial\mu} = \frac{\delta n}{\delta\mu}S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{ds} = L_n\frac{\delta n}{\delta\mu}.$$

Si on se reporte, d'autre part, aux relations :

$$\mathrm{S}udx = 0, \qquad \mathrm{S}u^2 = 1$$

qui donnent par différentiation :

(15) $$\mathrm{S}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\,dx + \mathrm{S}ud\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \qquad \mathrm{S}u\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0.$$

(16) $$\mathrm{S}\frac{\partial u}{\partial \mu}\,dx + \mathrm{S}ud\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \qquad \mathrm{S}u\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0.$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\mathrm{S}u\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0,\\
\mathrm{S}u\frac{\partial x}{\partial \lambda} &= -\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\mathrm{S}u^2 - -\frac{\delta \xi}{\delta \lambda},\\
\mathrm{S}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} &= \quad \frac{\delta n}{\delta \mu}\mathrm{S}\alpha\frac{\partial u}{\partial \lambda},\\
\mathrm{S}u\frac{\partial x}{\partial \mu} &= \quad \frac{\delta n}{\delta \mu}\mathrm{S}u\alpha = 0.
\end{aligned}$$

L'équation (14) devient alors :

(17) $$\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right)\mathrm{S}\alpha\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -\mathrm{L}_n\left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right)\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right).$$

Plaçons-nous dans le cas où l'on a sur toute la courbe C

$$\frac{\delta n}{\delta \mu} \neq 0.$$

Cela revient à admettre que *le contour* C *n'est pas un contour singulier,* en d'autres termes : que le déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$ étant, sur *toute* la courbe C, différent de 0 et dirigé suivant le vecteur (α, β, γ), on obtienne ainsi des contours infiniment voisins de C, pour lesquels la fonctionnelle Σ *ne cesse pas d'avoir un sens*. Si donc $\frac{\delta n}{\delta \mu} \neq 0$ l'équation (17) donne :

(18) $$\mathrm{S}\alpha\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{ds} = -\mathrm{L}_n\left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right).$$

Nous verrons plus loin la signification géométrique de cette équation.

[**10**] Revenons à la première des équations (15) en remarquant que :

$$\mathrm{S}ud\frac{\partial x}{\partial\lambda} = -(\mathrm{S}u^2)\,d\frac{\delta\xi}{\delta\lambda} - \frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\,\mathrm{S}u\frac{\partial u}{\partial\lambda} = -d\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\,.\,\mathrm{S}u^2 = -d\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}$$

elle s'écrit :

$$\mathrm{S}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\cdot\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right).$$

En définitive nous avons le système suivant de trois équations linéaires pour déterminer :

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial v}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial w}{\partial\lambda}.$$

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{S}u\frac{\partial u}{\partial\lambda} = 0,\\ &\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial u}{\partial\lambda} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right),\\ &\mathrm{S}\alpha\frac{\partial u}{\partial\lambda} = -\mathrm{L}_n\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right).\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est égal à $+1$ d'après l'hypothèse faite sur l'orientation du trièdre trirectangle $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$, (u, v, w), (α, β, γ). Si donc on résoud le système (19), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial\lambda} &= \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right) - \alpha\mathrm{L}_n\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},\\ \frac{\partial v}{\partial\lambda} &= \frac{dy}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right) - \beta\mathrm{L}_n\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},\\ \frac{\partial w}{\partial\lambda} &= \frac{dz}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}\right) - \gamma\mathrm{L}_n\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}.\end{aligned}$$

On peut, de ces valeurs des dérivées, déduire les variations : $\delta_c u$, $\delta_c v$, $\delta_c w$ (l'indice c indiquant un déplacement sur la surface caractéristique) :

$$(20)\qquad \begin{aligned} \delta_c u &= \frac{dx}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \alpha\mathrm{L}_n\delta\xi,\\ \delta_c v &= \frac{dy}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \beta\mathrm{L}_n\delta\xi,\\ \delta_c w &= \frac{dz}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \gamma\mathrm{L}_n\delta\xi.\end{aligned}$$

[**11**] Supposons que la déformation de la courbe C amène un point M de cette courbe au point M' sur la courbe C' infiniment voisine. La position du point M' est parfaitement déterminée par la donnée de $\delta\xi$. Au point M' les dérivées fonctionnelles partielles seront :

$$u' = u + \delta_c u, \qquad v' = v + \delta_c v, \qquad w' = w + \delta_c w.$$

On voit que ce vecteur dépend pour un point M' donné de la valeur de $\frac{d\delta\xi}{ds}$ en ce point. Si $\delta\xi$ restant fixe, $\frac{d\delta\xi}{ds}$ varie, le vecteur (u', v', w') varie en direction, mais les formules (20) montrent qu'il reste constamment dans un *plan fixe* qui ne dépend que du point M' et non de la déformation qui a amené C en C'. Si donc on déforme C', à son tour, à partir de sa position actuelle, pour en déduire une courbe C'' infiniment voisine d'après la loi précédemment indiquée, le déplacement de M' *se fera dans ce plan*. Nous appellerons ce plan, le plan tangent à la caractéristique au point M', de même que le plan défini par les deux vecteurs : $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$, (u, v, w) est le plan tangent à cette même surface au point M.

[**12**] Le plan tangent en M' contient le vecteur :

$$\frac{dx}{ds} + \delta_c \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{ds} + \delta_c \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dz}{ds} + \delta_c \frac{dz}{ds}.$$

Cherchons, en effet, les cosinus directeurs $\alpha' \beta' \gamma'$ du plan déterminé par le vecteur précédent et le vecteur :

$$u' = u + \delta_c u, \qquad v' = v + \delta_c v, \qquad w' = w + \delta_c w.$$

Ils sont respectivement proportionnels aux quantités :

$$w'\left(\frac{dy}{ds} + \delta_c \frac{dy}{ds}\right) - v'\left(\frac{dz}{ds} + \delta_c \frac{dz}{ds}\right),$$
$$u'\left(\frac{dz}{ds} + \delta_c \frac{dz}{ds}\right) - w'\left(\frac{dx}{ds} + \delta_c \frac{dx}{ds}\right),$$
$$v'\left(\frac{dx}{ds} + \delta_c \frac{dx}{ds}\right) - u'\left(\frac{dy}{ds} + \delta_c \frac{dy}{ds}\right).$$

Or on a, par exemple :

$$(20') \qquad \delta_e \frac{dx}{ds} = \frac{\delta_e dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\frac{\delta_e ds}{ds} = \frac{d\delta_e x}{ds} + \mathrm{L}_e \frac{dx}{ds}\delta\xi$$
$$= \frac{d(-u\delta\xi)}{ds} + \mathrm{L}_e \frac{dx}{ds}\delta\xi = -\frac{du}{ds}\delta\xi - u\frac{d\delta\xi}{ds} + \mathrm{L}_e\frac{dx}{ds}\delta\xi$$

et des expressions analogues pour $\delta_e \frac{dy}{ds}$ et $\delta_e \frac{dz}{ds}$.

On a, dans ces conditions :

$$w'\left(\frac{dy}{ds} + \delta_e \frac{dy}{ds}\right) - v'\left(\frac{dz}{ds} + \delta_e \frac{dz}{ds}\right)$$
$$= w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds} - \mathrm{L}_n\left(\gamma\frac{dy}{ds} - \beta\frac{dz}{ds}\right)\delta\xi - \left(w\frac{dv}{ds} - v\frac{dw}{ds}\right)\delta\xi$$
$$+ \left(w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}\right)\mathrm{L}_e\delta\xi$$
$$= \alpha + \left(\mathrm{L}_n u - w\frac{dv}{ds} + v\frac{dw}{ds} + \mathrm{L}_e\alpha\right)\delta\xi.$$

Les termes non écrits étant du 2ᵉ ordre. On aura en définitive pour $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$:

$$\alpha' = \alpha + \left(\mathrm{L}_n u - w\frac{dv}{ds} + v\frac{dw}{ds} + \mathrm{L}_e\alpha\right)\delta\xi,$$
$$\beta' = \beta + \left(\mathrm{L}_n v - u\frac{dw}{ds} + w\frac{du}{ds} + \mathrm{L}_e\beta\right)\delta\xi,$$
$$\gamma' = \gamma + \left(\mathrm{L}_n w - v\frac{du}{ds} + u\frac{dv}{ds} + \mathrm{L}_e\gamma\right)\delta\xi.$$

Ces expressions peuvent être transformées ; on vérifie en effet facilement que l'on a :

$$\mathrm{S}\alpha\left(w\frac{dv}{ds} - v\frac{dw}{ds}\right) = \mathrm{S}\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds} = \mathrm{L}_e,$$
$$\mathrm{S}u\left(w\frac{dv}{ds} - v\frac{dw}{ds}\right) = 0,$$
$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\left(w\frac{dv}{ds} - v\frac{dw}{ds}\right) = -\mathrm{S}\alpha\frac{du}{ds} = -\mathrm{N}$$

d'où l'on tire, par exemple :

$$w\frac{dv}{ds} - v\frac{dw}{ds} = \mathrm{L}_e\alpha - \frac{dx}{ds}.\mathrm{N}.$$

Les expressions de $\alpha'\beta'\gamma'$ deviennent alors :

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha + \left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u\right)\delta\xi, \\
\beta' &= \beta + \left(\mathrm{N}\frac{dy}{ds} + \mathrm{L}_n v\right)\delta\xi, \\
\gamma' &= \gamma + \left(\mathrm{N}\frac{dz}{ds} + \mathrm{L}_n w\right)\delta\xi.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

On voit donc que le terme $\dfrac{d\delta\xi}{ds}$ a disparu des expressions de $\alpha'\beta'\gamma'$ ce qui prouve que le plan de cosinus directeurs $\alpha'\beta'\gamma'$ ne dépend que du point M′ et qu'il contient le vecteur (u', v', w') quelle que soit la valeur de $\dfrac{d\delta\xi}{ds}$ en M′. C'est bien le plan tangent tel qu'il a été précédemment défini. Nous appellerons α', β', γ' les cosinus directeurs en M′ de la normale à la surface caractéristique.

Tout ce qui précède fait bien présumer que la surface caractéristique balayée par le contour C quand celui-ci se déforme conformément à la loi indiquée, est bien déterminée pour un contour C donné, u, v, w étant aussi donnés sur ce contour ($\mathrm{S}udx = 0$, $\mathrm{S}u^2 = 1$) et ne dépend pas du mode de déformation du contour. Mais il est nécessaire de donner de ce fait une démonstration plus rigoureuse.

[**13**] L'ensemble des contours fermés déduits du contour initial C est déterminé, à partir de C, au moyen d'un système d'équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires qui est le suivant :

$$
\begin{aligned}
\delta_c u &= \frac{dx}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \alpha \mathrm{L}_n \delta\xi, \\
\delta_c v &= \frac{dy}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \beta \mathrm{L}_n \delta\xi, \\
\delta_c w &= \frac{dz}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - \gamma \mathrm{L}_n \delta\xi, \\
\delta_c x &= -u\delta\xi, \\
\delta_c y &= -v\delta\xi, \\
\delta_c z &= -w\delta\xi, \\
\delta_c \Sigma &= -\int_c \delta\xi\, ds.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Ce système peut être remplacé par un système équivalent déduit des formules (21)

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
\delta_e\alpha &= \left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u\right)\delta\xi,\\
\delta_e\beta &= \left(\mathrm{N}\frac{dy}{ds} + \mathrm{L}_n v\right)\delta\xi,\\
\delta_e\gamma &= \left(\mathrm{N}\frac{dz}{ds} + \mathrm{L}_n w\right)\delta\xi
\end{aligned}
$$

auquel il faut ajouter les quatre dernières équations du système (22) qui sont communes aux deux systèmes.

Nous allons vérifier que le système (22) ou le système (23) qui lui est équivalent sont complètement intégrables.

Considérons pour cela deux déplacements sur la surface caractéristique représentés par les symboles δ et δ_1 respectivement. Le système (22) donne :

$$\delta\Sigma = -\int_{\mathrm{C}} \delta\xi\, ds$$

donc :

$$
\begin{aligned}
\delta_1\delta\Sigma &= -\int_{\mathrm{C}} \delta_1\delta\xi\, ds - \int_{\mathrm{C}} \delta\xi\,\delta_1 ds\\
&= -\int_{\mathrm{C}} \delta_1\delta\xi\, ds + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{L}_e\delta_1\xi\,\delta\xi\, ds
\end{aligned}
$$

car on a :

$$(24)\qquad \frac{\delta_e ds}{ds} = -\,\mathrm{L}_e\delta\xi.$$

Comme $\delta_1\delta\xi = \delta\delta_1\xi$, on en conclut :

$$\delta_1\delta\Sigma = \delta\delta_1\Sigma.$$

La condition d'intégrabilité est donc vérifiée pour Σ.

D'autre part on n'a jamais :

$$\delta_1\delta x = \delta\delta_1 x$$

même si le système (22) est complètement intégrable. Mais il existe une quantité, qui en vertu de la condition d'intégrabilité ne doit pas changer si l'on y permute les symboles δ et δ_1. C'est l'expression :

$$(23')\qquad \delta\delta_1 x + \frac{dx}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds}\delta_1\xi.$$

Ce point est expliqué dans l'ouvrage de M. Paul Lévy(¹). Or nous avons :

$$\begin{aligned}\delta\delta_1 x &= -\delta(u\delta_1\xi) = -\delta u\delta_1\xi - u\delta\delta_1\xi \\ &= -\frac{dx}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds}\delta_1\xi - \mathrm{L}_n\alpha\delta\xi\delta_1\xi\end{aligned}$$

de sorte que la quantité (23′) se réduit à :

$$-\mathrm{L}_n\alpha\delta\xi\delta_1\xi$$

qui visiblement n'est pas modifiée si l'on échange entre eux les symboles δ et δ_1. La condition d'intégrabilité est donc vérifiée encore en ce qui concerne x, y, z. Reste à la vérifier pour u, v, w.

Nous allons pour cela mettre le système (22) sous une autre forme qui nous conduira à des propriétés remarquables de la surface caractéristique.

Posons :

$$u = +\frac{dx_0}{ds}, \qquad \frac{dx}{ds} = -u_0.$$

. . . .

Nous aurons défini ainsi 6 fonctions : x_0, y_0, z_0; u_0, v_0, w_0 satisfaisant aux relations :

$$\mathrm{S}u_0 dx_0 = 0, \qquad \mathrm{S}u_0^2 = 1$$

corrélatives de

$$\mathrm{S}u dx = 0, \qquad \mathrm{S}u^2 = 1.$$

Nous obtenons immédiatement d'après la formule (20′) :

$$\delta_e u_0 = -\delta_e\frac{dx}{ds} = +u\frac{d\delta\xi}{ds} + \left(\frac{du}{ds} - \mathrm{L}_e\frac{dx}{ds}\right)\delta\xi.$$

On a d'autre part :

$$\delta_e\frac{dx_0}{ds} = \frac{d\delta_e x_0}{ds} + \mathrm{L}_e\frac{dx_0}{ds}\delta\xi$$

(¹) *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 1^re partie, chap. V, p. 97.

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_e x_0}{ds} &= \delta_e \frac{dx_0}{ds} - \mathrm{L}_e \frac{dx_0}{ds}\delta\xi \\ &= +\delta_e u - \mathrm{L}_e u \delta\xi \\ &= +\frac{dx}{ds}\frac{d\delta_e\xi}{ds} - (\mathrm{L}_n \alpha + \mathrm{L}_e u)\,\delta\xi \\ &= -u_0 \frac{d\delta_e \xi}{ds} - (\mathrm{L}_n\alpha + \mathrm{L}_e u)\,\delta\xi .\end{aligned}$$

Posons pour un instant :

$$p = \frac{du}{ds} - \mathrm{L}_e \frac{dx}{ds}, \qquad q = \frac{dv}{ds} - \mathrm{L}_e \frac{dy}{ds}, \qquad r = \frac{dw}{ds} - \mathrm{L}_e \frac{dz}{ds}.$$

On obtient immédiatement :

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\cdot p = \mathrm{L}_e - \mathrm{L}_e = 0; \qquad \mathrm{S}up = 0; \qquad \mathrm{S}\alpha p = \mathrm{N}$$

d'où l'on déduit les valeurs de p, q, r

$$p = \alpha\mathrm{N}, \qquad q = \beta\mathrm{N}, \qquad r = \gamma\mathrm{N}.$$

D'autre part des relations évidentes

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \qquad \mathrm{S}u\frac{d^2x}{ds^2} = -\mathrm{L}_e, \qquad \mathrm{S}\alpha\frac{d^2x}{ds^2} = -\mathrm{L}_n$$

on déduit :

$$\mathrm{L}_n\alpha + \mathrm{L}_e u = -\frac{d^2x}{ds^2}.$$

. . . .

De sorte que l'on aura pour δu_0

$$\delta u_0 = +u\frac{d\delta\xi}{ds} + \alpha\mathrm{N}\delta\xi = \frac{dx_0}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \alpha\mathrm{N}\delta\xi$$

et pour $\dfrac{d\delta x_0}{ds}$:

$$\frac{d\delta x_0}{ds} = -u_0\frac{d\delta\xi}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\delta\xi = -\left(u_0\frac{d\delta\xi}{ds} + \frac{du_0}{ds}\delta\xi\right) = -\frac{d(u_0\delta\xi)}{ds}.$$

On a donc à une constante additive près :

$$\delta x_0 = -u_0 \delta\xi.$$

En résumé on voit que le système (22) est équivalent au suivant :

$$(22_0)\qquad \begin{aligned}
\delta_c u_0 &= \frac{dx_0}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \alpha N \delta\xi,\\
\delta_c v_0 &= \frac{dy_0}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \beta N \delta\xi,\\
\delta_c w_0 &= \frac{dz_0}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \gamma N \delta\xi,\\
\delta_c x_0 &= -u_0\delta\xi,\\
\delta_c y_0 &= -v_0\delta\xi,\\
\delta_c z_0 &= -w_0\delta\xi, \qquad \delta\Sigma = -\int \delta\xi\, ds.
\end{aligned}$$

Remarquons encore que N se déduit de L_u en y remplaçant $\frac{dx}{ds}\ldots$ par $-u\ldots$ ou par $\frac{dx_0}{ds}$. De sorte que nous pourrons poser :

$$N = -S\frac{d\alpha}{ds}u = -S\frac{dx_0}{ds}\frac{d\alpha}{ds} = -L_{u0}.$$

De sorte que le système (22_0) est absolument identique comme forme, et aux notations près, au système (22).

Vérifier la condition d'intégrabilité pour le système (22) en ce qui concerne les fonctions u, v, w revient à la vérifier pour le système (22_0) en ce qui concerne $\frac{dx_0}{ds}$, $\frac{dy_0}{ds}$, $\frac{dz_0}{ds}$ c'est-à-dire en ce qui concerne x_0, y_0, z_0 : ce qui est immédiat.

Nous avons ainsi établi que le système d'équations aux dérivées fonctionnelles (22) est complètement intégrable en même temps que les systèmes (23) et (22_0) qui lui sont équivalents.

Les relations qui existent entre les systèmes (22) et (22_0) seront interprétées géométriquement dans la 2e partie.

[**14**] Le système (22) étant complètement intégrable, on peut pour l'intégrer y supposer $\delta\xi$ indépendant de s, c'est-à-dire $\frac{d\delta\xi}{ds} = 0$.

Le système (22) se réduit dans ces conditions à :

$$\delta_e u = -\alpha L_n \delta\xi, \qquad \delta_e v = -\beta L_n \delta\xi, \qquad \delta_e w = -\gamma L_n \delta\xi,$$
$$\delta_e x = -u\delta\xi, \qquad \delta_e y = -v\delta\xi, \qquad \delta_e z = -w\delta\xi,$$
$$\delta\Sigma = -\int \delta\xi ds.$$

On peut alors appliquer à ce système la méthode d'approximations successives de M. Picard.

Supposons maintenant que x, y, z, u, v, w soient sur C des fonctions analytiques de s. On peut alors, en utilisant la formule (24) calculer la valeur pour $\xi = 0$ des dérivées de u, v, w, x, y, z, Σ par rapport à ξ jusqu'à un ordre quelconque.

Par exemple :

$$\left(\frac{\delta^n u}{\delta\xi^n}\right)_{\xi=0}$$

est une fonction de $u, v, w, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ et de leurs dérivées successives par rapport à s jusqu'à un certain ordre, c'est-à-dire, en définitive, une fonction connue de s et des valeurs de u, v, w sur le contour

$$(Sudx = 0, \qquad Su^2 = 1).$$

On pourra donc écrire pour u un développement suivant les puissances croissantes de ξ, convergent dans un certain intervalle (ce rayon de convergence étant une fonction de s).

Dans ces conditions, u, v, w, x, y, z, seront exprimés en fonction de s et de ξ. On aura ainsi les équations de la surface caractéristique sous la forme :

$$x = f(s, \xi), \qquad y = g(s, \xi), \qquad z = h(s, \xi);$$

s devra alors être considéré comme un paramètre qui, avec ξ, détermine sur la surface un système de coordonnées curvilignes. Ce système est formé d'une famille de courbes parallèles $\xi =$ const. (parmi lesquelles le contour C lui-même) et de leurs trajectoires orthogonales qui sont les géodésiques $s =$ const.

[**15**] Du système (22) nous pouvons déduire un système d'équations aux dérivées partielles du 2e ordre définissant l'ensemble des surfaces caractéristiques de l'équation $Su^2 = 1$.

En effet si l'on fait dans le système (22)

$$\frac{d\delta\xi}{ds} = 0$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = L_{\prime\prime}\alpha, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = L_{\prime\prime}\beta, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = L_{\prime\prime}\gamma.$$

Pour éviter toute confusion, mettons η à la place de s, η étant un paramètre tel que les géodésiques considérées soient définies par $\eta =$ const. et continuons à désigner par s la longueur d'arc d'une courbe $\xi =$ const. *quelconque.* On aura dans ces conditions :

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\frac{ds}{d\eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{d^2 s}{d\eta^2}\right) : \left(\frac{ds}{d\eta}\right)^3 \qquad \text{pour} \quad \xi = \text{const.}$$

ce qui donne :

$$L_{\prime\prime} = -S\alpha\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{-S\alpha\dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}}{\left(\dfrac{ds}{d\eta}\right)^2} = \frac{-S\alpha\dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}}{S\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}.$$

D'autre part :

$$\alpha = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{S\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}$$

et deux autres formules analogues pour β et γ. En définitive les équations aux dérivées partielles qui définissent l'ensemble des surfaces caractéristiques rapportées à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales sont :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = -\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right) S\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}}{S\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 S\left(\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

auxquelles il faudra joindre les deux équations :

$$S\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 = 1.$$

Mais, évidemment ce système est de forme assez compliquée et nous verrons, dans la 2e partie, qu'on pourra définir l'ensemble des surfaces caractéristiques par un système d'équations aux dérivées partielles équivalent mais dont l'intégration sera immédiate.

[**16**] Voyons maintenant quelle est l'interprétation géométrique de l'équation (18) qui résulte de la condition d'intégrabilité, équation qui peut s'écrire :

$$S\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + S\alpha\frac{d^2 x}{ds^2} = 0.$$

Si on appelle ρ_1 le rayon de courbure d'une courbe $\eta = \text{const.}$, ϖ_1 l'angle que la normale principale à cette courbe fait avec la normale à la surface au point considéré, ρ_2, ϖ_2, les quantités analogues pour la courbe $\xi = \text{const.}$ qui coupe normalement la géodésique $\eta = \text{const.}$ au même point, l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{\cos \varpi_1}{\rho_1} + \frac{\cos \varpi_2}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbures principaux de la surface au point considéré. Donc *les surfaces caractéristiques de l'équation* :

$$S\Sigma_x'^2 = 1$$

sont des surfaces à courbure moyenne nulle ou surfaces minima.

De même la signification géométrique des trois quantités que nous avons désignées par L_c, L_n, N est immédiate.

L_c, $-L_n$, $-N$ sont respectivement, la *courbure géodésique*, la *courbure normale* et la *torsion géodésique* en un point M d'une courbe C quelconque tracée sur la surface minima.

Il existe des formules classiques(1) dans la théorie des surfaces qui donnent aux notations près :

$$\frac{\delta \alpha}{\delta \xi} = -N'\frac{dx}{ds} - uL'_n, \tag{23'}$$

. . . .

(1) Voir par exemple : VESSIOT. *Cours de Géométrie supérieure*, chapitre II, p. 29.

$-L'_n$ et $-N'$ étant respectivement la courbure normale et la torsion géodésique relatives à une courbe ($\eta =$ const.) coupant normalement la courbe C au point M.

En rapprochant les formules (23') des formules (23) on retrouve d'abord :

$$L_n + L'_n = 0$$

et ensuite :

$$N + N' = 0$$

mais cette dernière relation ne caractérise nullement les surfaces minima et est vraie pour une surface quelconque.

Nous pouvons maintenant lever, en partie, la restriction que nous avons formulée au n° 9. Nous avons supposé que la quantité $\frac{\delta n}{\partial \mu}$ devait être différente de 0 *sur toute* la courbe C.

Le fait que le système (22) qui permet la détermination de la surface caractéristique est complètement intégrable permet de remplacer cette condition par la suivante :

Il faut et il suffit qu'il existe un déplacement δn normale à la surface minima, *qui ne soit pas nul sur toute la courbe* C et tel que la fonctionnelle Σ ne cesse pas d'avoir un sens.

Sous cette forme la condition précédente est bien d'accord avec le résultat du Mémoire de Schwarz(*). Il est clair, en effet, que s'il est impossible de trouver un déplacement δn non nul sur toute la courbe C, l'équation (17) s'évanouit. Il y aura indétermination pour la surface minima passant par le contour C (cette surface satisfaisant par ailleurs aux conditions connues de continuité) et l'on ne pourra plus parler dans ces conditions de l'existence d'un minimum relatif pour l'aire Σ.

LES ÉLÉMENTS DU 2e ORDRE CORRESPONDANT A DES DÉPLACEMENTS NORMAUX A LA SURFACE CARACTÉRISTIQUE

[**17**] Revenons maintenant aux dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu}$$

nous n'avons pour les calculer que les deux équations :

$$(16) \qquad S u \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial u}{\partial \mu} dx + u d \frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = 0.$$

(*) Mémoire cité dans l'introduction.

Comme on a :

$$Sud\frac{\partial x}{\partial \mu} = Sud\left(\alpha\frac{\delta n}{\delta \mu}\right) = \frac{\delta n}{\delta \mu}Sud\alpha.$$

Le système (16) peut être remplacé par :

$$Su\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0, \qquad S\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mu} = -\frac{\delta n}{\delta \mu}Su\frac{d\alpha}{ds} = N\frac{\delta n}{\delta \mu}$$

ou

$$Su\delta_n u = 0, \qquad S\frac{dx}{ds}\delta_n u = N\delta n$$

l'indice n indiquant que les variations de u, v, w se rapportent à un déplacement normal à la surface caractéristique. Il y a donc indétermination pour le calcul de $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$ et c'est en cela que consiste la propriété fondamentale de cette surface. Supposons que la déformation de la courbe C soit purement locale et affecte seulement l'élément ds au point M. D'une manière plus précise, supposons que la déformation du contour ait lieu seulement sur un arc infiniment petit, de longueur 2ε et dont les extrémités sont symétriques par rapport au point M. Considérons la quantité :

$$\alpha\delta_n u + \beta\delta_n v + \gamma\delta_n w = S\alpha\delta_n u.$$

Supposons *provisoirement* qu'elle ait alors un sens et qu'on puisse la représenter par une expression de la forme $k(s)\delta n$:

$$S\alpha\delta_n u = k(s)\delta n$$

$k(s)$ étant une fonction *inconnue* de s. Nous aurons alors le système :

$$\begin{aligned} &S\frac{dx}{ds}\delta_n u = N\delta n, \\ &Su\delta_n u = 0, \\ &S\alpha\delta_n u = k(s)\delta n. \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \delta_n u &= \left[N\frac{dx}{ds} + \alpha k(s)\right]\delta n, \\ \delta_n v &= \left[N\frac{dy}{ds} + \beta k(s)\right]\delta n, \\ \delta_n w &= \left[N\frac{dz}{ds} + \gamma k(s)\right]\delta n. \end{aligned}$$

[**18**] Nous allons maintenant chercher les valeurs les plus générales de $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$ en considérant une déformation quelconque du contour C.

Considérons deux points quelconques de C situés à une distance finie l'un de l'autre : M et M_1 ayant respectivement pour abscisse curviligne s et s_1. Supposons que la courbe C soit affectée au point $M(s)$ d'une déformation purement locale représentée par $ds\,\delta n$. Nous aurons, au point $M_1(s_1)$ des variations de u, v, w liées par les relations :

$$(28) \qquad \mathrm{S}u_1\delta_n u_1 = 0, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta_n u_1 = 0$$

car la variation de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ en M_1 est alors nulle.

Ces équations (28) montrent que le vecteur de composantes :

$$\delta_n u_1, \quad \delta_n v_1, \quad \delta_n w_1$$

est alors dirigé suivant le vecteur $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ c'est-à-dire suivant la normale à la surface caractéristique au point M_1. On pourra donc écrire :

$$\begin{aligned}
\delta_n u_1 &= \mathrm{K}(ss_1)\,\alpha_1\,\delta n\,ds,\\
\delta_n v_1 &= \mathrm{K}(ss_1)\,\beta_1\,\delta n\,ds,\\
\delta_n w_1 &= \mathrm{K}(ss_1)\,\gamma_1\,\delta n\,ds
\end{aligned}$$

K étant une nouvelle fonction inconnue dépendant évidemment des deux points M et M_1 c'est-à-dire des deux variables s et s_1.

De même si nous considérons une déformation *purement locale* du contour C au point M_1, elle affectera u, v, w au point M, et l'on aura encore :

$$(28') \qquad \begin{aligned}
\delta_n u &= \mathrm{K}(s_1 s)\,\alpha\,\delta n_1\,ds_1,\\
\delta_n v &= \mathrm{K}(s_1 s)\,\beta\,\delta n_1\,ds_1,\\
\delta_n w &= \mathrm{K}(s_1 s)\,\gamma\,\delta n_1\,ds_1
\end{aligned}$$

en permutant dans la fonction K, s et s_1.

Mais, d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\delta n &= \alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z,\\
\delta n_1 &= \alpha_1\delta x_1 + \beta_1\delta y_1 + \gamma_1\delta z_1,
\end{aligned}$$

en considérant le déplacement δn comme résultant de trois déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ suivant les axes coordonnés. Il en résulte que :

$$(\delta_n u)_{x_1} = \mathrm{K}(s_1 s)\,\alpha\alpha_1\,\delta x_1\,ds_1$$

en désignant par $(\delta_n u)_{x_1}$ la variation de u au point M résultant d'une déformation locale de la courbe au point M_1 définie par $\delta x_1 ds_1$ (y_1 et z_1 ne subissant alors aucune variation). On aurait encore :

$$(\delta_n u_1)_x = K(ss_1)\,\alpha_1\alpha\,\delta x\,ds.$$

Considérons Σ comme une fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes : les coordonnées $x_i y_i z_i$. On voit que :

$$(\delta_n u)_{x_1} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x\,\partial x_1}\,\delta x_1\,ds_1,$$

$$(\delta_n u_1)_x = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1\,\partial x}\,\delta x\,ds.$$

La condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x\,\partial x_1} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1\,\partial x}$$

exige donc que l'on ait :

$$\frac{(\delta_n u)_{x_1}}{\delta x_1\,ds_1} = \frac{(\delta_n u_1)_x}{\delta x\,ds}$$

et huit autres relations faciles à écrire :

$$\frac{(\delta_n u)_{y_1}}{\delta y_1\,ds_1} = \frac{(\delta_n v_1)_x}{\delta x\,ds}$$

. . . .

Toutes ces conditions exigent évidemment que l'on ait :

$$K(ss_1) = K(s_1 s)$$

et inversement si cette dernière relation est vérifiée, les neuf relations précédentes et par suite les conditions d'intégrabilité se trouvent satisfaites. $K(ss_1)$ *est donc une fonction symétrique de* s *et* s_1.

[**19**] Supposons maintenant que la déformation porte sur toute la courbe C à l'exclusion d'un arc aussi petit que l'on veut dont les extrémités ont pour abscisses curvilignes $s - \varepsilon$ et $s + \varepsilon$ (s étant l'abscisse curviligne du point M et ε une quan-

tité tendant vers o). En vertu des formules (28′), il en résultera évidemment pour $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$ au point M les valeurs suivantes :

$$\delta_n u = \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\alpha(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1,$$

$$\delta_n v = \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\beta(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1,$$

$$\delta_n w = \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\gamma(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1;$$

l'indication v. p. (valeur principale) devant le signe $\int$ signifie que l'on doit exclure de l'intégrale l'intervalle infiniment petit $(s_1 - \varepsilon,\ s_1 + \varepsilon)$. Mais si l'on savait d'avance que $K(ss_1)$ est holomorphe au point $s = s_1$, il n'y aurait évidemment aucun inconvénient à écrire par exemple :

$$\delta_n u = \int_C K(ss_1)\,\alpha(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1.$$

Enfin si la déformation porte sur toute la courbe C y compris l'élément ds au point M, on aura pour les valeurs les plus générales de $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$:

$$(28'')\quad \begin{aligned} \delta_n u &= \left[N\frac{dx}{ds} + k(s)\,\alpha(s)\right]\delta n + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\alpha(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1, \\ \delta_n v &= \left[N\frac{dy}{ds} + k(s)\,\beta(s)\right]\delta n + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\beta(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1, \\ \delta_n w &= \left[N\frac{dz}{ds} + k(s)\,\gamma(s)\right]\delta n + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\gamma(s)\,\delta n(s_1)\,ds_1. \end{aligned}$$

Ces formules sont obtenues en partant de l'hypothèse faite au n° 17, à savoir que l'expression

$$S\alpha\,\delta_n u$$

quand la déformation de la courbe porte exclusivement sur l'arc infiniment petit $(s - \varepsilon,\ s + \varepsilon)$ a un sens et peut être représentée par $k(s)\delta n$. Calculons, dans le cas général, $S\alpha\delta_n u$ à l'aide des formules (28″), on a immédiatement :

$$(28''')\quad S\alpha\delta_n u = k(s)\,\delta n + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\delta n(s_1)\,ds_1$$

l'hypothèse que la fonction $k(s)$, telle que nous venons de la définir existe, n'est légitime que si l'on est sûr *a priori* que l'intégrale

$$\text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,\delta n(s_1)\,ds_1$$

a un sens. Or il peut ne pas en être ainsi, et effectivement, il n'en est pas ainsi si par exemple la fonction $K(ss_1)$ admet au point $s = s_1$ un pôle dont l'ordre de multiplicité est au moins égal à 2. Nous verrons tout à l'heure quand nous aurons précisé la signification de

$$S\alpha\delta_n u$$

la forme qu'il convient de donner à cette quantité. Tout ce que nous pouvons dire pour le moment c'est qu'elle est une fonctionnelle linéaire de δn qui, en vertu des conditions d'intégrabilité écrites plus haut (n° 18), doit être identique à son adjointe. Soit $-U_1(\delta n)$ cette fonctionnelle, nous poserons donc :

$$S\alpha\delta_n u = -U_1(\delta n)$$

et les formules (28') deviennent :

$$\delta_n u = N\frac{dx}{ds}\delta n - \alpha U_1(\delta n),$$

$$\delta_n v = N\frac{dy}{ds}\delta n - \beta U_1(\delta n),$$

$$\delta_n w = N\frac{dz}{ds}\delta n - \gamma U_1(\delta n).$$

[20] Partons maintenant de

$$\delta\Sigma = \int_C (Su\delta x)\, ds.$$

Si :

$$\delta x = \alpha\delta n, \qquad \delta y = \beta\delta n, \qquad \delta z = \gamma\delta n$$

c'est-à-dire si le déplacement de chaque point du contour C est normal à la surface caractéristique, la variation 1re de Σ est nulle :

$$\delta_n\Sigma = \int_C (Su\alpha)\,\delta n\, ds = 0.$$

Voyons ce que devient la variation 2^e :

$$\delta^2_n\Sigma = \int_C (Su\delta^2_n x + S\delta_n u\delta_n x)\, ds + \int_C (Su\delta_n x)\,\delta_n ds.$$

On a :

$$\delta^2_{\prime\prime} x = \alpha \delta^2 n, \qquad \delta^2 y = \beta \delta^2 n, \qquad \delta^2 z = \gamma \delta^2 n$$

car nous supposons que la direction (α, β, γ) reste invariable. Dans ces conditions, $\delta^2_{\prime\prime}\Sigma$ se réduit à :

$$\delta^2_{\prime\prime}\Sigma = \int_C (S\alpha\delta_{\prime\prime} u)\,\delta n\,ds = \int_C -\Gamma_1(\delta n)\,\delta n\,ds.$$

Quelle est maintenant la signification de

$$S\alpha\delta_{\prime\prime} u = -\Gamma_1(\delta n)$$

cette quantité représente l'angle infiniment petit que font entre eux les deux vecteurs

$$(u, v, w) \quad \text{et} \quad (u + \delta_{\prime\prime} u, \quad v + \delta_{\prime\prime} v, \quad w + \delta_{\prime\prime} w)$$

ou la tangente de cet angle en négligeant les infiniment petits du 2e ordre.

Supposons que le déplacement δn permette de déduire du contour C un contour infiniment voisin C'. Soient S et S' les surfaces minima infiniment voisines qui correspondent respectivement à C et C'(1). Quand on se déplace sur S, δn est une fonction des deux paramètres ξ et η précédemment définis (n° 15). Désignons par

$$\frac{\partial \delta n}{\partial \xi}$$

la dérivée de δn prise suivant la direction $(-u, -v, -w)$; ce sera la dérivée de δn prise suivant la normale intérieure à la courbe C. On vérifie alors par un calcul facile, qu'aux infiniment petits du 2e ordre près, on a :

$$S\alpha\delta_{\prime\prime} u = -\frac{\partial \delta n}{\partial \xi}$$

ou

$$\frac{\partial \delta n}{\partial \xi} = \Gamma_1(\delta n).$$

[**21**] Supposons que la surface caractéristique soit à l'intérieur de C parfaitement continue(2). Considérons deux fonctions différentes représentant δn, c'est-

---

(1) Nous supposons toujours, au moins implicitement, dans le texte, que ces surfaces sont parfaitement continues à l'intérieur des contours qui les limitent.

(2) Par surface parfaitement continue il faut entendre que la surface est continue et qu'en outre elle ne présente aucun point singulier à l'intérieur du contour qui la limite. — Voir Darboux. *Leçons sur la théorie des surfaces*, 1re partie, livre III, chap. x, p. 424.

à-dire deux contours infiniment voisins de C représentés respectivement par :

$$\delta n = U(s) \quad \text{et} \quad \delta n = V(s)$$

$U(s)$ et $V(s)$ étant des fonctions infiniment petites. Désignons alors par $U_1[U]$ et $U_1[V]$ les dérivées normales qui correspondent respectivement à $U(s)$ et $V(s)$. $U_1[U]$, par exemple, est une fonctionnelle linéaire de U identique à son adjointe. On a donc :

$$\int_C [U_1(U)V - U_1(V)U]\, ds = 0$$

c'est-à-dire :

$$\int_C \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} V - \frac{\partial V}{\partial \xi} U\right) ds = 0.$$

Ainsi :

La fonction δn satisfait à la relation de Green pour un contour fermé quelconque tracé sur la surface caractéristique, celle-ci étant parfaitement continue à l'intérieur du contour.

Si on suppose tracé sur la surface S un réseau de courbe à la fois orthogonal et isotherme, de paramètres θ et ω, $\delta n = U(\theta\omega)$ considéré sur la surface S comme fonction de θ et ω doit donc satisfaire à une équation aux dérivées partielles linéaire du 2e ordre et du type elliptique, de la forme :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + R(\theta\omega)U = 0. \tag{30}$$

Nous poserons pour simplifier dans ce qui suivra :

$$\delta n = U, \qquad \frac{\partial \delta n}{\partial \xi} = U_1, \qquad \frac{d\delta n}{ds} = U'.$$

On aura alors :

$$\delta^2_n \Sigma = -\int_C \frac{\partial U}{\partial \xi} U ds = -\int_C U_1 U ds.$$

Rappelons que l'on a identiquement (la surface minima étant parfaitement continue à l'intérieur du contour C) :

$$-\int_C U \frac{\partial U}{\partial \xi} ds = \int\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^2 + U\Delta U\right] d\theta d\omega$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire de la surface minima comprise à l'intérieur du contour C. On a d'autre part :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = -R(\theta\omega)U .$$

D'après l'équation (30) à laquelle satisfait $U = \delta n$. Il en résulte :

$$(30') \qquad \delta^2_{n}\Sigma = \int\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 - R(\theta\omega)U^2 \right] d\theta d\omega$$

et l'équation (30) exprime précisément que $U = \delta n$ est la fonction qui rend stationnaire l'intégrale double précédente.

Ainsi, si l'on se donne la suite des valeurs que prend δn sur le contour C, $\delta^2_{n}\Sigma$ *est une fonctionnelle dépendant de cette suite de valeurs, égale au minimum*(1), *de l'intégrale double qui figure au 2e membre de l'égalité* (30').

Désignons par Φ cette fonctionnelle en posant :

$$\Phi = -\int_C \frac{\partial U}{\partial \xi} U ds = \int_C U_1(U) U ds$$

$U_1(U)$ étant une fonctionnelle linéaire de $U = \delta n$, il en résulte *que* : Φ *est une fonctionnelle entière homogène et du 2e degré de toutes les valeurs que prend* U *sur le contour* C. Si donc on multiplie la fonction U par un facteur infiniment voisin de $1 : 1 + \varepsilon$, Φ doit se trouver multipliée par $(1 + \varepsilon)^2$. D'après cela la variation 1re de Φ étant :

$$\delta\Phi = \int_C (\Phi'_\xi \delta\xi + \Phi'_1 \delta U) ds$$

multiplions U par $1 + \varepsilon$ ce qui revient à écrire :

$$\delta U = \varepsilon U, \qquad \delta\xi = 0$$

le contour C étant invariable, on aura alors :

$$\delta\Phi = [(1 + \varepsilon)^2 - 1] \Phi = 2\varepsilon\Phi$$

et

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_C \Phi'_1 U ds = -\int_C U \frac{\partial U}{\partial \xi} ds$$

(1) Quand ce minimum peut être effectivement atteint.

on en conclut :

$$\Phi'_1 = -2\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

comme pour le minimum de l'intégrale de Dirichlet.

[**22**] Nous allons maintenant chercher l'expression de $\delta^2_n\Sigma = \Phi$ en fonction de U et de ses dérivées partielles et déterminer, par conséquent, la fonction R qui figure dans l'équation (30).

Mais auparavant remarquons que les équations :

$$S\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{ds} = L_n, \qquad Su\frac{d\alpha}{ds} = -N, \qquad S\alpha\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Résolues par rapport à $\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\beta}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}$ donnent par exemple :

$$\frac{d\alpha}{ds} = L_n\frac{dx}{ds} - Nu$$

d'où

$$S\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = L^2_n + N^2.$$

On déduit également des formules (23) :

$$S\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}\right)^2 = L^2_n + N^2.$$

De sorte que l'on a :

$$S\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = S\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}\right)^2 = L^2_n + N^2 = \Gamma^2$$

en désignant par Γ^2 le carré de l'une quelconque des deux courbures principales(¹). Cette dernière égalité exprime d'ailleurs le fait bien connu que la représentation sphérique d'une surface minima S réalise une représentation conforme de S sur la sphère de rayon 1.

Cela étant, considérons sur la surface minima S un contour C' infiniment voi-

---

(¹) Γ^2 représente aussi la courbure totale changée de signe.

sin du contour C et intérieur à C. On obtient C′, à partir de C au moyen du déplacement :

$$\delta_e x = -u\delta\xi, \qquad \delta_e y = -v\delta\xi, \qquad \delta_e z = -w\delta\xi.$$

L'aire de la bande comprise entre C et C′ a pour valeur :

$$\int_C d\sigma$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément d'aire :

$$d\sigma = \delta\xi ds.$$

Nous avions trouvé d'autre part :

$$\delta_e \Sigma = \delta_\xi \Sigma = -\int_C \delta\xi ds = -\int_C d\sigma.$$

On en conclut :

$$\delta_\xi \Phi = \delta_\xi \delta^2_n \Sigma = -\delta^2_n \int_C d\sigma = -\int_C \delta^2_n d\sigma.$$

Il s'agit de calculer $\delta^2_n d\sigma$ et pour cela nous chercherons à obtenir l'expression de l'élément d'aire $d\sigma'$ sur la surface S′ qui se déduit de S au moyen du déplacement δn suivant la normale.

Supposons que ce déplacement amène un point M de coordonnées x, y, z situé sur S en un point M′ de coordonnées x' y' z' situé sur S′. On a : $(\delta n = U)$

$$x' = x + \alpha U, \qquad y' = y + \beta U, \qquad z' = z + \gamma U$$

si le point M se déplace sur la courbe C, on aura pour la différentielle de x' :

$$dx' = \left(\frac{dx}{ds} + \frac{d\alpha}{ds}U + \alpha\frac{dU}{ds}\right)ds.$$

Si le déplacement de M a lieu sur la surface minima, normalement à C, tel par conséquent que :

$$\delta_e x = -u\delta\xi, \qquad \delta_e y = -v\delta\xi, \qquad \delta_e z = -w\delta\xi$$

on aura pour la variation de x' :

$$\delta x' = \left(\frac{\delta x}{\delta\xi} + \frac{\delta\alpha}{\delta\xi}U + \alpha\frac{\delta U}{\delta\xi}\right)\delta\xi = \left(\frac{\delta x}{\delta\xi} + \frac{\delta\alpha}{\delta\xi}U + \alpha U_1\right)\delta\xi.$$

On déduit de là :

$$\mathrm{S}dx'^2 = \left[\mathrm{S}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \mathrm{U}^2\mathrm{S}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right)^2 \mathrm{S}\alpha^2 + 2\mathrm{U}\left(\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{ds}\right)\right] ds^2$$
$$= (1 + \Gamma^2\mathrm{U}^2 + \mathrm{U}'^2 + 2\mathrm{L}_n\mathrm{U})\, ds^2.$$

On aura de même :

$$\mathrm{S}\partial x'^2 = \left[\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \mathrm{U}^2\mathrm{S}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right)^2 + \mathrm{U}^2_1\mathrm{S}\alpha^2 + 2\mathrm{U}\left(\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right)\right] \partial\xi^2$$
$$= (1 + \Gamma^2\mathrm{U}^2 + \mathrm{U}^2_1 - 2\mathrm{L}_n\mathrm{U})\, \partial\xi^2.$$

Formons maintenant la combinaison :

$$\mathrm{S}dx'\partial x' = \mathrm{S}\mathrm{U}\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d\alpha}{ds}\right) ds\,\partial\xi + \mathrm{U}^2\left(\mathrm{S}\frac{d\alpha}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right) ds\,\partial\xi + (\mathrm{U}_1\mathrm{U}'\mathrm{S}\alpha^2)\, ds\,\partial\xi.$$

On a :

$$\mathrm{S}\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d\alpha}{ds}\right) = \mathrm{S}\frac{dx}{ds}\left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u\right) + \mathrm{S}\left(-u\frac{d\alpha}{ds}\right) = 2\mathrm{N}$$

la quantité $\mathrm{S}\frac{d\alpha}{ds}\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}$ est rigoureusement nulle ainsi qu'on s'en assure facilement; d'ailleurs le terme qui lui correspond est du 2ᵉ ordre ainsi que le terme en $\mathrm{U}_1\mathrm{U}'$. On a donc en s'en tenant aux infiniments petits du 1ᵉʳ ordre

$$\mathrm{S}dx'\partial x' = 2\mathrm{N}\mathrm{U}\, ds\,\partial\xi.$$

On trouve, en définitive, que le sinus de l'angle des deux directions (dx', dy', dz') et $(\partial x', \partial y', \partial z')$ est :

$$\sqrt{1 - 4\mathrm{N}^2\mathrm{U}^2}$$

en négligeant sous le radical les termes d'ordre supérieur au 2ᵉ.

On voit, dans ces conditions, que l'élément superficiel $d\sigma'$ est donné par :

$$d\sigma' = d\sigma\sqrt{(\mathrm{S}dx'^2)(\mathrm{S}\partial x'^2)(1 - 4\mathrm{N}^2\mathrm{U}^2)}$$

ou

$$d\sigma' = d\sigma\sqrt{(1 + 2\mathrm{L}_n\mathrm{U} + \mathrm{U}'^2 + \Gamma^2\mathrm{U}^2)(1 - 2\mathrm{L}_n\mathrm{U} + \mathrm{U}^2_1 + \Gamma^2\mathrm{U}^2) - 4\mathrm{N}^2\mathrm{U}^2}$$
$$= d\sigma\sqrt{1 + \mathrm{U}'^2 + \mathrm{U}^2_1 + 2\Gamma^2\mathrm{U}^2 - 4(\mathrm{L}^2_n + \mathrm{N}^2)\mathrm{U}^2}$$
$$= d\sigma\sqrt{1 + \mathrm{U}'^2 + \mathrm{U}^2_1 - 2\Gamma^2\mathrm{U}^2}$$
$$= d\sigma\left[1 + \frac{1}{2}(\mathrm{U}'^2 + \mathrm{U}^2_1 - 2\Gamma^2\mathrm{U}^2)\right].$$

Comme, d'autre part, on doit avoir :

$$d\sigma' = d\sigma + \delta_n d\sigma + \frac{1}{2}\delta^2_n d\sigma + \ldots$$

en s'arrétant aux infiniment petits du 2^e^ ordre, on en conclut :

$$\delta_n d\sigma = 0$$

et

$$\delta^2_n d\sigma = (U'^2 + U^2_1 - 2\Gamma^2 U^2)\, d\sigma.$$

On obtient donc, en définitive :

$$(30'') \qquad \delta_\xi \Phi = -\int_C (U'^2 + U^2_1 - 2\Gamma^2 U^2)\, d\sigma = \int_C (2\Gamma^2 U^2 - U'^2 - U^2_1)\,\delta\xi\, ds.$$

On peut obtenir $\delta_\xi \Phi$ d'une autre façon, en faisant dans l'égalité :

$$\delta\Phi = \int_C (\Phi'_\xi \delta\xi + \Phi'_1\, \delta U)\, ds,$$

$$\delta U = U_1 \delta\xi.$$

On a d'ailleurs, comme nous l'avons vu :

$$\Phi'_1 = -2U_1$$

ce qui donne :

$$\delta_\xi \Phi = \int_C (\Phi'_\xi - 2U^2_1)\,\delta\xi\, ds$$

en comparant entre elles les deux valeurs de $\delta_\xi \Phi$ que nous venons d'obtenir, on a l'égalité :

$$\Phi'_\xi - 2U^2_1 = -U^2_1 - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2$$

ou

$$\Phi'_\xi = U^2_1 - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2$$

On a ainsi l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait la fonctionnelle Φ :

$$(30''') \qquad \Phi'_\xi = \frac{1}{4}\Phi'^2_1 - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2$$

qui ne diffère de l'équation obtenue au n° 6, relative au minimum de l'intégrale de Dirichlet, que par le terme $2\Gamma^2 U^2$. L'équation (30''') se réduit d'ailleurs à cette dernière équation, si la surface minima S est un plan auquel cas on a : $\Gamma^2 = 0$.

[23] De l'équation (3o″) on peut déduire la valeur de Φ, il suffirait pour cela d'étendre l'intégration à toute l'aire de la surface minima limitée par le contour C. Dans ces conditions, l'intégrale simple est remplacée par une intégrale double.

Prenons, par exemple, pour système de coordonnées curvilignes sur la surface minima, le système déjà considéré, formé par les géodésiques $\eta = \text{const.}$ et leurs trajectoires orthogonales $\xi = \text{const.}$ L'élément linéaire sera alors de la forme :

$$ds^2 = d\xi^2 + G^2(\xi\eta)\, d\eta^2$$

et l'on aura :

$$\Phi = \int\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{G^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 - 2\Gamma^2 U^2\right] G\, d\eta\, d\xi\,.$$

Si maintenant on substitue à ce système de coordonnées curvilignes, un réseau de courbes orthogonal et isotherme de paramètres θ et ω, pour lequel le ds^2 prend la forme :

$$ds^2 = \mu^2(\theta\omega)\,[d\theta^2 + d\omega^2]\,.$$

L'expression de Φ se transforme en la suivante, en vertu des propriétés d'invariance bien connues relatives au paramètre différentiel du 1^{er} ordre :

$$\Phi = \int\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^2 - 2\mu^2\Gamma^2 U^2\right] d\theta\, d\omega$$

en rapprochant cette intégrale de celle déjà considérée (3o′), on obtient la valeur de la fonction $R(\theta\omega)$

$$R(\theta\omega) = 2\mu^2\Gamma^2\,.$$

La quantité :

$$\frac{-R(\theta\omega)}{2\mu^2} = -\Gamma^2$$

est donc un invariant et représente la courbure totale.

Supposons que la représentation sphérique de la surface minima soit également rapportée aux variables θ et ω, et qu'on ait alors pour le ds^2 sur la sphère de rayon 1 :

$$S(d\alpha)^2 = \nu^2(\theta\omega)\,[d\theta^2 + d\omega^2]\,.$$

On en conclut :

$$R(\theta\,,\,\omega) = 2\mu^2\Gamma^2 = 2\mu^2 S\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = 2\mu^2\frac{S(d\alpha)^2}{ds^2} = 2\nu^2(\theta\,,\,\omega)$$

telle est encore la signification de $R(\theta\omega)$.

[**24**] Il faut maintenant que nous précisions la forme qu'il conviendrait d'attribuer à la quantité :

$$S\alpha\delta_n u = -U_1(\delta n).$$

Nous connaissons maintenant sa signification : C'est la dérivée normale[1] correspondant à une solution de l'équation (30), satisfaisant aux conditions habituelles de continuité relatives au problème de Dirichlet pour cette équation. Nous avons vu d'autre part que cette équation (30) généralise l'équation de Laplace :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = 0$$

à laquelle elle se réduit d'ailleurs quand la surface minima se réduit elle-même à un plan, auquel cas $R(\theta\omega) = 0$.

Il suffit donc de voir comment se présente la dérivée normale d'une fonction harmonique, même dans un cas particulier.

Dans le cas du cercle, par exemple, et en nous servant de l'intégrale de Poisson, nous pouvons obtenir l'expression de cette dérivée normale. Elle est de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \text{v. p.} \int_{C} K(ss_1)\,[U(s_1) - U(s)]\,ds_1.$$

Le noyau $K(ss_1)$ admettant un pôle double au point : $s = s_1$. et l'intégrale du 2ᵉ membre ayant alors parfaitement un sens grâce au facteur

$$U(s_1) - U(s)$$

qui s'annule pour $s = s_1$.

Dans le cas du plan, la nature de la singularité de la fonction K[2] est la même quel que soit le contour fermé considéré : c'est toujours un pôle double.

Il est très naturel d'admettre, au moins jusqu'à preuve du contraire, que cette singularité est encore de même nature lorsqu'on passe du cas du plan au cas d'une surface minima quelconque, c'est-à-dire de l'équation de Laplace à l'équation plus générale (30).

Le caractère de cette singularité semble, en effet, lié à la nature même du problème et être, par conséquent, indépendant des données de ce problème.

Nous admettrons donc l'existence d'un pôle double pour le noyau $K(ss_1)$.

---

(1) Dans tout ce qui suivra nous nous placerons toujours dans le cas où la dérivée normale *existe*.

(2) Lorsque la dérivée normale existe.

Il résulte, dans ces conditions, de l'expression générale de la fonctionnelle linéaire donnée par M. Hadamard, que l'on pourra poser :

$$S\alpha\delta_n u = k(s)\delta n_s + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)[\delta n_{s_1} - \delta n_s]\, ds_1$$

ou :

$$(31) \qquad U_1(U) = -k(s)U(s) - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)[U(s_1) - U(s)]\, ds_1.$$

On pourrait même obtenir une expression, un peu plus compliquée il est vrai, qui ne contiendrait pas le symbole v. p. à condition d'introduire la dérivée $\frac{dU}{ds}$ ainsi qu'une autre fonction inconnue $k'(s)$:

$$U_1 = -k(s)U(s) - k'(s)\frac{dU}{ds} - \int_C K(ss_1)\left[U(s_1) - U(s) - (s_1 - s)\frac{dU(s)}{ds}\right] ds_1.$$

Je renverrai sur ce point à l'ouvrage de M. Paul Lévy (1).

Nous adopterons, en définitive pour $S\alpha\delta_n u$, la forme (31) sur laquelle nous aurons, d'ailleurs, l'occasion de revenir dans la 2e partie. Nous y verrons que les conditions d'homogénéité permettent d'obtenir pour $S\alpha\delta_n u$, une expression plus simple d'où aura disparu la fonction $k(s)$.

PROBLÈME DE CAUCHY

[25] Nous allons d'abord chercher l'expression générale de δu, δv, δw.

Une déformation quelconque du contour C peut être considérée comme résultant de deux déplacements d'un point M quelconque de ce contour : L'un de composantes $-u\delta\xi$, $-v\delta\xi$, $-w\delta\xi$ pour lequel nous avons par exemple :

$$\delta_c u = \frac{dx}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} - L_n\alpha\delta\xi;$$

l'autre de composantes $\alpha\delta n$, $\beta\delta n$, $\gamma\delta n$ normal à la surface caractéristique et pour lequel nous pouvons écrire en raison de la forme qui vient d'être attribuée à $S\alpha\delta_n u$:

$$\delta_n u = \left[N\frac{dx}{ds} + k(s)\alpha(s)\right]\delta n_s + \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\left[\delta n_{s_1} - \delta n_s\right] ds_1.$$

(1) Paul Lévy. *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 1re partie, chapitre IV, page 69.

En vertu de la relation : $S u dx = 0$, il n'y a pas lieu, si l'on cherche la variation de la fonctionnelle Σ, de tenir compte d'un déplacement du point M dirigé suivant l'élément ds. Mais il n'en est pas de même s'il s'agit de la variation des dérivées u, v, w. On devra dans ce cas faire intervenir le déplacement du M dirigé suivant la tangente à la courbe C, pour lequel on a :

$$du = \frac{du}{ds}\, ds .$$

En conjuguant les trois variations de u qui viennent d'être obtenues, nous pourrons écrire d'une façon générale :

$$\delta u = du + \delta_c u + \delta_n u$$

ou

$$(31') \quad \delta u = \frac{du}{ds} ds + \frac{dx}{ds} \frac{d\delta\xi}{ds} - L_n \alpha \delta\xi + \left[N \frac{dx}{ds} + k(s)\alpha(s) \right] \delta n_s + \text{v. p.} \int_C K(ss_1) \left[\delta n_{s_1} - \delta n_s \right] \alpha(s)\, ds_1$$

et des expressions analogues pour δv et δw. Ces expressions de δu, δv, δw nous permettent de voir comment se pose le problème de Cauchy pour l'équation :

$$S \Sigma_x'^2 = 0 .$$

Nous aurons auparavant à faire une remarque sur les conditions d'intégrabilité écrites au n° 18. Elles nous avaient conduit à ce résultat que $K(ss_1)$ doit être une fonction symétrique de s et de s_1.

Ce résultat n'est, visiblement, pas modifié si l'on adopte pour $S\alpha\delta_n u$ la forme (31) et nous avons même dit que, d'une façon générale si on représente $S\alpha\delta_n u$ par $-U_1(\delta n)$ qui est une fonctionnelle linéaire de δn, la condition d'intégrabilité se traduit par ce fait que U_1 est identique à son adjointe.

On peut vérifier cela autrement : Dans l'expression de $\delta^2_n \Sigma$ remplaçons $S\alpha\delta_n u$ par sa valeur (31). Nous aurons :

$$(31'') \quad \delta^2_n \Sigma = \int_C (S\alpha\delta_n u)\, \delta n\, ds = \int_C k(s)(\delta n)^2 ds + \text{v. p.} \int\!\!\int K(ss_1) \left[\delta n_{s_1} - \delta n_s \right] \delta n_s\, ds_1\, ds$$

l'intégrale double est alors étendue à l'aire d'un carré de côté l (l étant la longueur du contour) et le signe v. p. signifiant que l'on doit exclure de ce champ d'intégration une bande infiniment mince suivant l'une des diagonales du carré et de largeur 2ε.

Remarquons qu'en raison de la singularité de $K(ss_1)$ on commettrait une erreur en écrivant :

$$\Sigma''_{n^2} = k(s).$$

En réalité la dérivée seconde Σ''_{n^2} est infinie. Mais on peut écrire :

$$\Sigma''_{nn_1} = K(ss_1).$$

Supposons maintenant que la déformation du contour C normalement à la surface caractéristique résulte de deux déplacements *successifs* que nous désignerons par les symboles δ et δ_1. L'égalité (31') permet alors d'écrire :

$$\delta\delta_1\Sigma = \int_C k(s)\,\delta n_s \delta_1 n_s ds + \text{v. p.} \int\int K(ss_1)\left[\delta n_{s_1} - \delta n_s\right]\delta_1 n_s ds ds_1.$$

Et l'on devra avoir :

$$\delta\delta_1\,\Sigma = \delta_1\delta\Sigma$$

ce qui exige encore que $K(ss_1)$ soit une fonction symétrique de s et s_1.

Plus généralement, on a :

$$\delta^2{}_n\Sigma = -\int_C U_1(\delta n)\,\delta n\, ds$$

d'où

$$\delta\delta_1\Sigma = -\int U_1(\delta_1 n_s)\,\delta n_s ds$$

d'où il résulte que la fonctionnelle $U_1(\delta n)$ doit être identique à son adjointe.

Nous aboutissons d'autre part à ce même résultat en vérifiant les conditions d'intégrabilité pour l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles

(30''') $$\Phi'_\Sigma = \frac{1}{2}\Phi'^2_U - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2, \qquad \left(\Phi'_U = -2U_1(\delta n)\right)$$

déjà obtenue, ce qui ne présente pas de difficulté.

[26] Cherchons maintenant à poser le problème de Cauchy pour l'équation :

$$\mathbf{S}\,\Sigma'^2_x = 1.$$

L'intégration de cette équation ne peut être considérée comme obtenue que si l'on a pu calculer les variations de u, v, w jusqu'à un ordre absolument quelconque :

$$\delta^p u, \qquad \delta^p v, \qquad \delta^p w.$$

La connaissance de ces variations permettrait alors de définir Σ par un développement en série qui, sous certaines conditions, serait convergent et déterminerait Σ comme fonctionnelle d'un contour fermé quelconque à partir du contour initial C.

De l'expression générale de δu, δv, δw (31′) il résulte que la connaissance de ces variations est ramenée à celle des variations de $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$ *à condition de faire intervenir des données complémentaires.*

Supposons qu'on se donne un ensemble continu de contours fermés (comprenant le contour C) dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi(s)$. Les coordonnées x, y, z seraient alors données comme des fonctionnelles de φ. Soient :

$$(32) \qquad \delta x = \mathrm{A}(\delta\varphi), \qquad \delta y = \mathrm{B}(\delta\varphi), \qquad \delta z = \mathrm{C}(\delta\varphi)$$

A, B, C étant des fonctionnelles linéaires de $\delta\varphi$. Supposons qu'on se donne, en outre, pour tous ces contours, l'expression de Σ en tant que fonctionnelle de φ et qu'on puisse en déduire $\delta\Sigma$ sous la forme :

$$\delta\Sigma = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{G}\,\delta\varphi\, ds$$

G dépendant de φ. C'est en cela que consistent les données complémentaires dont il a été question plus haut et qui sont nécessaires pour résoudre le problème de Cauchy.

Dans l'expression générale de $\delta\Sigma$:

$$\delta\Sigma = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{S}(u\,\delta x)\, ds$$

remplaçons δx, δy, δz par leur valeur (32) et égalons les deux expressions ainsi obtenues de $\delta\Sigma$:

$$\int_{\mathrm{C}} \left[\mathrm{S}\, u\,\mathrm{A}(\delta\varphi)\right] ds = \int_{\mathrm{C}} \left[\mathrm{S}\,\mathcal{A}(u)\right] \delta\varphi\, ds = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{G}\,\delta\varphi\, ds$$

en désignant respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les expressions adjointes de A, B, C. On déduit de là en identifiant :

$$(33) \qquad \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(v) + \mathcal{C}(w) = \mathrm{G}.$$

Cette équation, jointe aux deux relations connues :

$$\mathrm{S}u\frac{dx}{ds} = 0\,, \qquad \mathrm{S}u^2 = 1$$

permettrait de déterminer u, v, w, à moins qu'elle ne fit double emploi avec la relation :

$$\mathrm{S}u\frac{dx}{ds} = 0$$

auquel cas, il y aurait indétermination. Mais nous écarterons ce dernier cas, car l'équation (33) est, en général, une équation intégrale. Ayant donc calculé u, v, w et par suite, aussi α, β, γ, on en déduirait :

$$\delta u = p(\delta\varphi), \qquad \delta v = q(\delta\varphi), \qquad \delta w = r(\delta\varphi)$$

p, q, r étant des fonctionnelles linéaires de $\delta\varphi$.

On a ainsi l'expression générale de

$$\delta u, \qquad \delta v, \qquad \delta w$$

d'où l'on déduirait les variations de u, v, w jusqu'à un ordre quelconque.

On pourrait aussi en déduire les valeurs de :

$$\delta_n u, \qquad \delta_n v, \qquad \delta_n w$$

et plus généralement de :

$$\delta^p{}_n u, \qquad \delta^p{}_n v, \qquad \delta^p{}_n w.$$

Des formules (32) nous tirons en effet la valeur de $\delta\xi$ et δn :

(33′)
$$\begin{aligned} \delta\xi &= -\mathrm{S}u\delta x = -\mathrm{S}u\,\mathrm{A}(\delta\varphi),\\ \delta n &= \mathrm{S}\alpha\delta x = \mathrm{S}\alpha\mathrm{A}(\delta\varphi). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\mathrm{S}\alpha\delta u = \mathrm{S}\alpha p(\delta\varphi).$$

Le déplacement suivant la tangente à la courbe C que nous avons désigné par ds dans la formule (31) et que nous appellerons maintenant δs pour éviter toute confusion a pour valeur :

(34)
$$\delta s = \mathrm{S}\frac{dx}{ds}\delta x = \mathrm{S}\frac{dx}{ds}\mathrm{A}(\delta\varphi).$$

Or l'expression de $S\alpha\delta u$ peut être obtenue d'autre part à partir des égalités (31')

$$S\alpha\delta u = \left(S\alpha\frac{du}{ds}\right)\delta s - L_{n}\delta\xi + k(s)\delta n_s + \text{v. p.}\int_{C} K(ss_1)\left|\delta n_{s_1} - \delta n_s\right| ds_1$$

ou

$$S\alpha\delta u = N\delta s - L_{n}\delta\xi + k(s)\delta n_s + \text{v. p.}\int_{C} K(ss_1)\left|\delta n_{s_1} - \delta n_s\right| ds_1 .$$

Si dans le 2^e^ membre on remplace $\delta\xi$, δn, δs par leurs valeurs (33') et (34) et qu'on égale ensuite à

$$S\alpha p(\delta\varphi)$$

on obtiendra, en identifiant, des équations intégrales qui définiront $k(s)$ et $K(ss_1)$, au moins théoriquement, comme fonctionnelles de φ.

En résumé, on voit que la solution du Problème de Cauchy ainsi posé dépend avant tout de la résolution de l'équation intégrale (33).

GÉNÉRALISATION

[27] Nous allons montrer que la méthode suivie pour traiter l'équation :

$$S\Sigma_{x}'^{2} = 1 \tag{3}$$

peut être généralisée et étendue à une classe assez vaste d'équations aux dérivées fonctionnelles partielles relatives à un contour gauche fermé.

Nous partirons de cette remarque que l'égalité évidente :

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda\partial\mu} = \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\mu\partial\lambda}$$

posée au n° 9, nous a permis du *même coup* de vérifier que l'équation (3) est complètement intégrable et d'obtenir les équations aux dérivées fonctionnelles (22) de ses caractéristiques.

A quel moment, en effet, le caractère de l'équation (23) d'être complètement intégrable est-il apparu nettement?

C'est quand nous avons constaté que l'équation (17) ne renfermait pas les quantités :

$$\frac{\partial u}{\partial\mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial\mu}, \quad \frac{\partial w}{\partial\mu}, \quad \frac{\delta n}{\delta\mu}$$

et qu'elle se réduisait à une relation linéaire entre :

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial v}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial w}{\partial \lambda}$$

qui, jointe aux équations (15), a pu conduire à la détermination de ces trois dérivées.

De la possibilité de calculer ces trois dérivées résultait, d'autre part, le système (22), c'est-à-dire l'existence des caractéristiques.

On peut donc affirmer que la possibilité pour une équation aux dérivées fonctionnelles partielles d'être complètement intégrable est intimement liée à l'existence des caractéristiques de cette équation.

Il s'agit, en d'autres termes, d'inverser l'ordre suivi habituellement et de déduire les conditions d'intégrabilité du fait qu'on a pu former les équations des caractéristiques.

|28| Considérons donc une équation aux dérivées fonctionnelles partielles relative à un contour fermé :

$$F|[x, y, z, \Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z \mid \Phi]| = 0 \tag{35}$$

et supposons que Φ soit une fonctionnelle satisfaisant aux conditions *a*), *b*), *c*) posées au début, telle, par conséquent, que l'on puisse écrire :

$$\delta\Phi = \int_C (\Phi'_x \delta x + \Phi'_y \delta y + \Phi'_z \delta z)\, ds$$

C étant un contour fermé tel que nous l'avons défini au commencement.

Écrivons pour une telle fonctionnelle la condition :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \, \partial \mu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \, \partial \lambda}$$

ou

$$\int_C \left(\mathbf{S} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) ds + \int_C \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} \right) ds + \int_C \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial ds}{\partial \mu}$$
$$= \int_C \left(\mathbf{S} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) ds + \int_C \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial^2 x}{\partial \mu \, \partial \lambda} \right) ds + \int_C \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) \frac{\partial ds}{\partial \lambda}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{S} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial ds}{\partial \mu} = \mathbf{S} \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \left(\mathbf{S} \Phi'_x \frac{\partial x}{\partial \mu} \right) \frac{\partial ds}{\partial \lambda}. \tag{36}$$

Supposons que le déplacement correspondant à la variation de λ se fasse, en un point M de C, suivant une direction de cosinus directeurs (u, v, w) normale à l'élément ds au point M, et que le déplacement correspondant à la variation de μ se fasse suivant une direction à la fois normale à $ds\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ et à (u, v, w).

Soient (α, β, γ) les cosinus directeurs de cette nouvelle direction. Nous supposerons, pour fixer les idées, que le trièdre trirectangle d'axes

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \qquad (u, v, w), \qquad (\alpha\,\beta\,\gamma)$$

ait même disposition que le trièdre trirectangle formé par les axes de coordonnées. Nous continuerons à poser :

$$L_c = \mathbf{S}\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds}, \qquad L_n = \mathbf{S}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{ds}, \qquad N = \mathbf{S}\alpha\frac{du}{ds}.$$

On aura, dans ces conditions :

$$\mathbf{S}u\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \mathbf{S}u\alpha = 0, \qquad \mathbf{S}\frac{dx}{ds}\alpha = 0;$$

$$\alpha = w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}, \qquad \beta = u\frac{dz}{ds} - w\frac{dx}{ds}, \qquad \gamma = v\frac{dx}{ds} - u\frac{dy}{ds}.$$

Si alors on désigne comme précédemment par $\delta\xi$ et δn respectivement, les déplacements suivants (u, v, w) et (α, β, γ) on obtient :

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = u\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\lambda} = v\frac{\delta\xi}{\delta\lambda}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\lambda} = w\frac{\delta\xi}{\delta\lambda};$$

$$\frac{\partial x}{\partial\mu} = \alpha\frac{\delta n}{\delta\mu}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\mu} = \beta\frac{\delta n}{\delta\mu}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\mu} = \gamma\frac{\delta n}{\delta\mu}.$$

On aura encore :

$$\frac{1}{ds}\frac{\partial ds}{\partial\lambda} = \left(\mathbf{S}\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds}\right)\frac{\delta\xi}{\delta\lambda} = L_c\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},$$

$$\frac{1}{ds}\frac{\partial ds}{\partial\mu} = \left(\mathbf{S}\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{ds}\right)\frac{\delta n}{\delta\mu} = L_n\frac{\delta n}{\delta\mu}$$

et

$$\mathbf{S}\frac{\partial\Phi'_x}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \left(\mathbf{S}u\frac{\partial\Phi'_x}{\partial\mu}\right)\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},$$

$$\mathbf{S}\Phi'_x\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \left(\mathbf{S}u\Phi'_x\right)\frac{\delta\xi}{\delta\lambda},$$

(37)
$$\mathbf{S}\frac{\partial\Phi'_x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \left(\mathbf{S}\alpha\frac{\partial\Phi'_x}{\partial\lambda}\right)\frac{\delta n}{\delta\mu},$$

$$\mathbf{S}\Phi'_x\frac{\partial x}{\partial\mu} = \left(\mathbf{S}\alpha\Phi'_x\right)\frac{\delta n}{\delta\mu}.$$

Et alors la relation (36) s'écrira :

$$\left(\mathbf{S}\, u \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}\right) \frac{\delta \xi}{\delta \lambda} + \mathrm{L}_u \left(\mathbf{S}\, u \Phi'_x\right) \left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right)\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right) = \left(\mathbf{S}\, \alpha \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \lambda}\right) \frac{\delta n}{\delta \mu} + \mathrm{L}_e \left(\mathbf{S}\, \alpha \Phi'_x\right) \left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right)\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right)$$

ou

$$(37) \quad \left[\mathrm{L}_u \left(\mathbf{S}\, u \Phi'_x\right) - \mathrm{L}_e \left(\mathbf{S}\, \alpha \Phi'_x\right)\right] \left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right)\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right) = \left(\mathbf{S}\, \alpha \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right) - \left(\mathbf{S}\, u \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}\right)\left(\frac{\delta \xi}{\delta \lambda}\right).$$

[**29**] Il faut que cette équation (37) jointe aux équations obtenues en différentiant l'équation (35) et la relation :

$$(38) \qquad \mathbf{S}\, \Phi'_x \frac{dx}{ds} = 0$$

vraie pour toute fonctionnelle dépendant d'un contour fermé, puisse conduire à la détermination des caractéristiques, c'est-à-dire permettre le calcul de l'un des groupes d'inconnues

$$\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \Phi'_y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \Phi'_z}{\partial \lambda}$$

ou

$$\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}.$$

Il est nécessaire pour cela que l'équation (37) ne renferme que l'un des groupes d'inconnues, c'est-à-dire que l'un des deux termes de son second membre soit nul. Supposons que ce soit le 2e (en annulant le 1er on serait conduit au même résultat, en raison de la symétrie par rapport à λ et μ) et qu'on ait par conséquent :

$$(38') \qquad \mathbf{S}\, u \frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} = 0.$$

Il faut encore que cette dernière relation soit une conséquence des relations obtenues en différentiant les équations (35) *et* (38).

Les conditions d'intégrabilité s'obtiennent en écrivant que le système formé par ces trois équations est *indéterminé* et ne permet pas le calcul des trois dérivées

$$\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \Phi'_y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \Phi'_z}{\partial \mu}.$$

En même temps que l'on écrit ainsi les conditions d'intégrabilité, on obtient, si ces conditions sont vérifiées, une équation en u, v, w qui, jointe aux deux relations :

$$\mathrm{S}\, u \frac{dx}{ds} = 0, \qquad \mathrm{S}\, u^2 = 1$$

permet de déterminer ces trois quantités en fonction des valeurs de Φ'_x, Φ'_y, Φ'_z supposées données sur le contour, ce qui détermine le plan tangent à la surface caractéristique en un point M du contour C.

Pour fixer les idées, limitons-nous à un cas simple qui correspond aux problèmes de minimum des intégrales doubles. (La méthode présente surtout de l'intérêt lorsque la fonctionnelle Φ a une signification indépendante du choix des axes coordonnés.)

Supposons que notre équation aux dérivées fonctionnelles partielles soit de la forme :

$$\mathrm{F}\left(\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0 \tag{39}$$

$\mathrm{F} = 0$ étant une *relation ordinaire* entre les six quantités qui y figurent. Cette équation (39) différentiée donne :

$$\mathrm{A}\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} + \mathrm{B}\frac{\partial \Phi'_y}{\partial \mu} + \mathrm{C}\frac{\partial \Phi'_z}{\partial \mu} = \mathrm{P}\frac{\partial x'}{\partial \mu} + \mathrm{Q}\frac{\partial y'}{\partial \mu} + \mathrm{R}\frac{\partial z'}{\partial \mu} \tag{40}$$

en posant :

$$x' = \frac{dx}{ds}, \qquad y' = \frac{dy}{ds}, \qquad z' = \frac{dz}{ds};$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}'_{\Phi'_x}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{F}'_{\Phi'_y}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{F}'_{\Phi'_z};$$

$$\mathrm{P} = -\mathrm{F}'_{x'}, \qquad \mathrm{Q} = -\mathrm{F}'_{y'}, \qquad \mathrm{R} = -\mathrm{F}'_{z'}.$$

L'équation (38) donne d'autre part :

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} = -\mathrm{S}\,\Phi'_x \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{dx}{ds} = -\mathrm{S}\,\Phi'_x \frac{d}{ds}\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\mathrm{S}\,\Phi'_x \frac{d}{ds}\left(\alpha \frac{\delta n}{\delta \mu}\right)$$

ou

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\frac{\partial \Phi'_x}{\partial \mu} = -\left(\mathrm{S}\,\Phi'_x \frac{d\alpha}{ds}\right)\frac{\delta n}{\delta \mu} - \left(\mathrm{S}\,\alpha \Phi'_x\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta n}{\delta \mu}\right) = \mathrm{S}_1 \tag{41}$$

en désignant par S_1 le 2e membre de cette équation. On vérifie en effet que dans ce cas particulier on a le droit de remplacer $\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{dx}{ds}$ par $\frac{d}{ds}\frac{\partial x}{\partial \mu}$, cela tient à ce que l'équation (38) est homogène par rapport aux dérivées de x, y, z.

Désignons, d'autre part, par T le 2e membre de l'équation (40), il vient :

$$\mathrm{T} = \mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{\partial x'}{\partial\mu} = \left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{d}{ds}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right) - \left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{dx}{ds}\right)\frac{1}{ds}\cdot\frac{\partial ds}{\partial\mu}.$$

Or :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right) = \frac{d}{ds}\left(\alpha\frac{\delta n}{\delta\mu}\right) = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{\delta n}{\delta\mu} + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta n}{\delta\mu}\right)$$

$$\frac{1}{ds}\cdot\frac{\partial ds}{\partial\mu} = \mathrm{L}_{n}.$$

On a donc en définitive :

$$\mathrm{T} = \left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{d\alpha}{ds}\right)\frac{\delta n}{\delta\mu} - \mathrm{L}_{n}\left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{dx}{ds}\right)\frac{\delta n}{\delta\mu} + \left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\alpha\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta n}{\delta\mu}\right).$$

La relation (38′) devant être une conséquence des équations linéaires (40) et (41), le déterminant de ces trois équations doit être nul :

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cette équation (42), le vecteur (u, v, w) doit être dans le plan formé par les deux directions : (A, B, C) et $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$. On en conclut que $\alpha\,\beta\,\gamma$ sont respectivement proportionnels aux quantités :

$$\mathrm{B}\frac{dz}{ds} - \mathrm{C}\frac{dy}{ds}, \qquad \mathrm{C}\frac{dx}{ds} - \mathrm{A}\frac{dz}{ds}, \qquad \mathrm{A}\frac{dy}{ds} - \mathrm{B}\frac{dx}{ds}$$

d'où l'on déduit les valeurs de α, β, γ et ensuite celles de u, v, w.

Ayant calculé ces six quantités et déterminé par conséquent le plan tangent à la surface caractéristique en chaque point de C (pourvu, bien entendu, que l'on se donne sur C les valeurs de $\Phi'_{,}$, Φ'_{n}, Φ'_{ζ}, ces valeurs étant toujours liées par les relations (35) et (38), il faudra encore exprimer que le système formé par les équations (38′), (40) et (41) est, *non pas impossible, mais indéterminé*.

Nous devrons avoir alors :

$$\begin{vmatrix} 0 & v & w \\ \mathrm{T} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{S}_{1} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$T\left(w\frac{dy}{ds} - v\frac{dz}{ds}\right) + S_1(vC - wB) = 0$$

c'est-à-dire :

(43) $$T\alpha + S_1(vC - wB) = 0.$$

On obtiendrait d'ailleurs par permutation circulaire par rapport à $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ $(u\,v\,w)$ (A B C) deux autres relations équivalentes à l'équation (43).

S_1 et T ayant été, d'autre part, calculés, on devra donc écrire que l'équation (43) où u, v, w α, β, γ ont les valeurs calculées plus haut est identiquement vérifiée, c'est-à-dire vérifiée quels que soient $\frac{\partial n}{\partial \mu}$ et $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)$.

On obtient ainsi les deux relations :

$$\alpha\left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{d\alpha}{ds}\right) - \mathrm{L}_n\alpha\left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\frac{dx}{ds}\right) - (vC - wB)\left(\mathbf{S}\,\Phi'_x\frac{d\alpha}{ds}\right) = 0,$$

$$\alpha\left(\mathbf{S}\,\mathrm{P}\alpha\right) - (vC - wB)\left(\mathbf{S}\,\alpha\Phi'_x\right) = 0$$

qui, si elles sont vérifiées *identiquement*, expriment que l'équation (39) est complètement intégrable.

S'il en est ainsi, nous pouvons développer pour l'équation (39) une théorie analogue à celle faite pour l'équation :

(3) $$\mathbf{S}\,\Sigma'^2_x = 1.$$

CONCLUSION

[30] Nous avons vu précédemment que le problème qui consiste à trouver une surface minima passant par un contour fermé comporte une certaine indétermination. La solution dépend du système d'équations aux dérivées fonctionnelles (22) dont l'intégration introduit une fonction arbitraire de s. Il est nécessaire, pour lever l'indétermination, de se donner la suite des valeurs que prend l'une des quantités u, v, w sur le contour ou, ce qui revient au même, la suite des plans tangents à la surface minima tout le long du contour. C'est là une question classique dont la solution est donnée au moyen des formules de Schwarz[1].

L'indétermination, comme nous l'avons vu, peut être levée autrement (problème

---

[1] DARBOUX. *Leçons sur la Théorie des surfaces*, 1re partie, livre III, chapitre VIII.

de Cauchy) si l'on se donne l'expression de x, y, z (coordonnées d'un point quelconque du contour) et de Σ considérés comme fonctionnelles d'une fonction $\varphi(s)$.

Nous avons cependant supposé au début que notre fonctionnelle Σ est bien déterminée pour chaque contour fermé, mais c'était à condition de lui imposer de nouvelles restrictions.

Ces restrictions consistent à supposer que la surface caractéristique est parfaitement continue(1) à l'intérieur du contour qui la limite. C'est le cas qui correspond au problème de Plateau, compris, il est vrai, dans un sens assez étroit.

Ce problème diffère essentiellement du problème de Cauchy. Il semble, en général, comporter une solution unique comme le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace.

Les conditions de continuité que le problème de Plateau impose à la surface minima peuvent se traduire, en ce qui concerne la fonctionnelle Σ et ses dérivées, par des conditions d'homogénéité que nous étudierons dans la 2e partie. Mais pour le moment il y a lieu de se demander à quelles conclusions, toujours en vue du problème de Plateau, nous conduisent les résultats obtenus jusqu'ici et notamment ceux qui concernent le calcul des éléments du 2e ordre pour un déplacement du contour normal à la surface caractéristique.

Supposons qu'on sache résoudre le problème de Plateau pour un contour C_1 et qu'on veuille le résoudre pour un contour C. Soient S_1 et S les surfaces minima parfaitement continues qui correspondent respectivement à C_1 et C. Supposons, d'autre part, que C puisse se déduire de C_1 au moyen d'une déformation continue.

On pourra, par exemple, considérer un ensemble continu de contours fermés dépendant d'un paramètre variable μ :

$$x = f(t, \mu), \qquad y = \varphi(t, \mu), \qquad z = \psi(t, \mu)$$

les fonctions f, φ, ψ étant continues par rapport à t et μ et telles que pour $\mu = 0$ on ait le contour C_1 et pour $\mu = 1$ le contour C.

Si l'on veut pouvoir déduire S de S_1, il faudra supposer de plus que μ variant de 0 à 1, la surface minima S_1 se déforme sans cesser de satisfaire aux conditions de continuité imposées par le problème.

Dans ces conditions le problème de la détermination de S pourra être considéré comme résolu, au moins théoriquement, si l'on a pu former pour $\mu = 0$ l'expression des dérivées successives de u, v, w

$$\frac{\partial^p u}{\partial \mu^p}, \quad \frac{\partial^p v}{\partial \mu^p}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial \mu^p}$$

(1) DARBOUX. *Leçons sur la Théorie des surfaces*, 1re partie, livre III, chap. X, p. 424.

jusqu'à un ordre quelconque. Considérons, en particulier, les dérivées du 1er ordre

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu}$$

elles pourraient se déduire facilement des variations $\delta_n u$, $\delta_n v$, $\delta_n w$, c'est-à-dire en définitive de

$$S\alpha\delta_n u = -U_1(\delta n)$$

si cette quantité était connue.

On est donc ramené à chercher la dérivée normale correspondant à une solution parfaitement continue de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + RU = 0 \tag{30}$$

connaissant la suite des valeurs de U sur le contour C, ou bien encore une solution Φ de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles :

$$\Phi'_\xi = \frac{1}{4}\Phi'^2_t - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2 \tag{30'''}$$

telle que la surface caractéristique qui correspond à Φ satisfasse aux mêmes conditions de continuité.

Le fait que la surface correspondant à la solution Φ est parfaitement continue à l'intérieur du contour qui la limite se traduit par la propriété que la fonctionnelle Φ est *homogène*, entière et du 2e degré par rapport à toutes les valeurs que prend U sur le contour ce qui donne lieu, comme nous l'avons vu, à l'égalité :

$$\Phi'_t = -2U_1 = -2\frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

C'est là un point facile à établir.

En définitive un premier pas vers la solution du problème de Plateau consistera dans la détermination de la dérivée normale

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

correspondant à une suite quelconque de valeurs de $U = \delta n$ sur le contour.

Cette question, à son tour, est en connexion étroite avec les deux suivantes :

1° Solution du problème de Dirichlet pour l'équation (30);

2° Détermination des solutions homogènes de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (30''').

Nous verrons à la fin de la 2e partie comment on peut aller plus loin et envisager la détermination des variations de u, v, w jusqu'à un ordre quelconque, ce qui conduira au développement en série susceptible de représenter la fonctionnelle Σ correspondant à un contour C et, par suite, définir la surface minima S qui répond au problème de Plateau pour le même contour.

DEUXIÈME PARTIE

LES CONDITIONS D'HOMOGÉNÉITÉ

[**31**] Parmi toutes les fonctionnelles solutions de l'équation :

$$\mathrm{S}\,\Sigma'^2_x = 1$$

nous considérerons spécialement celles qui jouissent de la propriété suivante :

Quand on remplace le contour C *par un contour semblable,* Σ *se trouve simplement multiplié par le carré du rapport de similitude.*

Comme une similitude résulte toujours d'une homothétie suivie d'un déplacement, cette condition peut se décomposer en deux autres, considérons d'abord la première :

e) Σ, considérée comme fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes : à savoir les coordonnées d'une infinité dénombrable de points M_i (formant un ensemble partout dense) situés sur la courbe C, doit être homogène et du 2e degré.

Autrement dit :

Si on multiplie toutes les coordonnées par un même facteur ρ (ce qui revient à remplacer la courbe C par une courbe homothétique, le centre d'homothétie étant l'origine o et le rapport d'homothétie étant égal à ρ) Σ doit se trouver multipliée par ρ^2.

Dans l'égalité :

$$\delta\Sigma = \int_C (\mathrm{S}u\,\delta x)\,ds \tag{1}$$

remplaçons δx, δy, δz respectivement par εx, εy, εz, ε étant une constante infiniment petite. Cela revient à multiplier toutes les coordonnées par $1 + \varepsilon$. D'après l'hypothèse e) Σ doit se trouver multipliée par $(1+\varepsilon)^2$ de sorte qu'on aura :

$$\delta\Sigma = [(1+\varepsilon)^2 - 1]\,\Sigma = 2\varepsilon\Sigma$$

en négligeant le terme du 2° ordre ε^2. Donc :

$$2\varepsilon\Sigma = \int_C \varepsilon(\mathrm{S}ux)\,ds$$

ou :

$$\Sigma = \frac{1}{2}\int_C (\mathrm{S}ux)\,ds \tag{44}$$

cette égalité traduit l'hypothèse e).

En effet si on considère Σ comme fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes et si on pose alors :

$$d\Sigma = \sum_{i=1}^{i\to\infty} \mathrm{S}\frac{\partial\Sigma}{\partial x_i}\,dx_i\,.$$

L'égalité (1) montre qu'il faudra prendre :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} = u_i\Delta s_i\,,\qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial y_i} = v_i\Delta s_i\,,\qquad \frac{\partial\Sigma}{\partial z_i} = w_i\Delta s_i \tag{44'}$$

en désignant par u_i, v_i, w_i respectivement les valeurs de u, v, w au point $\mathbf{M}_i$ et en posant :

$$\Delta s_i = \sqrt{\mathrm{S}(x_{i+1} - x_i)^2}\,.$$

Dans ces conditions, l'égalité (44) s'écrit :

$$\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i\to\infty} \mathrm{S}\,x_i\frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} \tag{44''}$$

et sous cette forme, on reconnaît le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Σ est donc homogène et du 2° degré par rapport aux variables $x_i\,y_i\,z_i$. Inversement, quand on part de (44″) et qu'on fait le passage du fini à l'infini, la propriété précédente subsiste et l'égalité (44″) conduit, à la limite, à l'égalité (44).

[32] Passons maintenant à la 2e condition $f)$: La valeur de Σ doit demeurer invariante quand on fait subir au contour C un déplacement quelconque. Autrement dit, la valeur de Σ ne change pas quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre.

Faisons dans l'égalité (1)

$$\delta x = \varepsilon + qz - ry, \qquad \delta y = \eta + rx - pz, \qquad \delta z = \zeta + py - qx$$

ε, η, ζ représentant une translation infiniment petite et p, q, r une rotation infiniment petite. Ces six quantités sont des constantes par rapport à s. On aura alors :

$$\begin{aligned}\delta\Sigma &= \int_C (Su\varepsilon)\, ds + \int_C [Su(qz - ry)]\, ds \\ &= \int_C (Su\varepsilon)\, ds + \int_C [Sp(wy - vz)]\, ds = 0.\end{aligned}$$

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient $\varepsilon, \eta, \zeta, p, q, r$ on aura nécessairement :

$$(45) \quad \begin{gathered}\int_C u\, ds = 0, \qquad \int_C v\, ds = 0, \qquad \int_C w\, ds = 0; \\ \int_C (wy - vz)\, ds = 0, \qquad \int_C (uz - wx)\, ds = 0, \qquad \int_C (vx - yq)\, ds = 0\end{gathered}$$

ces égalités expriment la propriété d'invariance pour un déplacement infinitésimal et par conséquent pour un déplacement fini quelconque, en raison du fait que l'ensemble des déplacements forme un groupe.

Si on considère Σ comme fonction d'une infinité dénombrable de variables indépendantes et si on a égard aux égalités (44'), on voit que les égalités (56) conduisent à un système de six équations linéaires aux dérivées partielles du 1er ordre à une infinité de variables indépendantes :

$$\sum_{i=1}^{i\to\infty} \frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i\to\infty} \frac{\partial\Sigma}{\partial y_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i\to\infty} \frac{\partial\Sigma}{\partial z_i} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{i\to\infty} \left(y_i \frac{\partial\Sigma}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial\Sigma}{\partial y_i} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i\to\infty} \left(z_i \frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial\Sigma}{\partial z_i} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i\to\infty} \left(x_i \frac{\partial\Sigma}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial\Sigma}{\partial x_i} \right) = 0,$$

on vérifie facilement que ce système est complètement intégrable. L'intégration simultanée de ces six équations ne présente pas, non plus, de difficulté et conduit à ce résultat évident que Σ ne dépend que des éléments invariants de la courbe C, par exemple, les distances des points M_i pris deux à deux (en ne considérant que le nombre de ces distances suffisant pour déterminer la configuration de l'ensemble des points M_i dans l'espace, c'est-à-dire $3n-6$), ou bien encore, en chaque point M (n augmentant indéfiniment) l'élément d'arc ds, la courbure et la torsion de la courbe C.

[**33**] Les formules (44) et (45) ont une interprétation évidente.

Si on considère la surface minima parfaitement continue qui passe par le contour C, u, v, w représentent (à un facteur constant près), les composantes en chaque point M de C, de la *tension superficielle*, Σ est *l'énergie potentielle* correspondant à l'ensemble de ces forces. Dans ces conditions : l'égalité (44) exprime que cette énergie potentielle est homogène et du 2e degré.

Les égalités (45) expriment que *l'ensemble des tensions superficielles appliquées au contour* C *se comporte comme un système de forces appliquées à un corps solide en équilibre.*

Ces équations (45) traduisent, en effet, que la somme des composantes des forces sur les trois axes est nulle ainsi que la somme des moments par rapport aux mêmes axes.

Quant à $\delta\Sigma$, il représente le travail élémentaire accompli par les tensions superficielles.

Revenons maintenant aux trois premières des égalités (45). On a, par exemple :

$$\int_C u\,ds = \int_C \left(\beta\frac{dz}{ds} - \gamma\frac{dy}{ds}\right) ds = 0$$

ou

$$\int_C \beta\,dz - \gamma\,dy = 0.$$

On aurait de même :

$$(46) \qquad \int_C \gamma\,dx - \alpha\,dz = 0, \qquad \int_C \alpha\,dy - \beta\,dx = 0.$$

Considérons, en particulier, la dernière de ces égalités. Elle a lieu pour *tout contour fermé* tracé sur la surface minima (à condition de supposer que la surface minima est parfaitement continue à l'intérieur du contour). L'égalité (46) exprime alors que la quantité :

$$\alpha\,dy - \beta\,dx$$

est une différentielle exacte. On retrouve ainsi l'équation classique des surfaces minima :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Plus généralement, si on considère dans l'espace, une famille quelconque de surfaces minima, α, β, γ sont alors des fonctions de point; des trois premières égalités (45) on déduit :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0. \tag{47}$$

Le 1$^{\text{er}}$ membre étant un invariant pour tout changement des axes de coordonnées (car il représente la courbure moyenne).

Cette équation (47) exprime que le champ de vecteurs $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ ainsi défini est conservatif.

Considérons donc une surface minima S parfaitement continue à l'intérieur du contour C qui la limite. Considérons, d'autre part, le cône T ayant pour sommet un point quelconque o de l'espace et pour directrice la courbe C.

Le flux du vecteur $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ à travers la surface fermée formée par S et par le cône T et relatif à une famille de surfaces minima homothétiques de S (o étant le centre d'homothétie) *est nul.*

En écrivant qu'il en est ainsi, on retrouve l'égalité (44).

En écrivant que ce résultat est indépendant de la position du point o, on retrouve les trois premières égalités (45).

Ceci nous montre que l'égalité (44) et les trois premières des égalités (45) auraient pu être obtenues par un simple raisonnement géométrique en partant de la définition classique des surfaces minima, définition traduite par l'équation (47).

[**34**] Voyons maintenant comment se traduisent les conditions *e*) et *f*) pour les éléments du 2$^{\text{e}}$ ordre :

La fonctionnelle Σ étant homogène et du 2$^{\text{e}}$ degré, les dérivées u, v, w doivent être homogènes et du degré 0.

En d'autres termes u, v, w doivent demeurer invariants lorsqu'on remplace le contour C par un contour homothétique.

Ce fait se traduit par trois égalités. Nous nous contenterons d'écrire l'égalité unique obtenue en considérant la quantité $S\alpha\,\delta u$ au lieu de $\delta u, \delta v, \delta w$ séparément. De l'égalité (31') du n° 25 on déduit :

$$S\alpha\,\delta u = N\,\delta s - L_u\,\delta\xi - k(s)\,\delta n_s + \text{v. p.}\int_c K(ss_1)\left[\delta n_{s_1} - \delta n_s\right] ds_1.$$

$\mathrm{S}\alpha\delta u$ doit être nul lorsque x, y, z subissent des variations respectives : $\delta x = \varepsilon x$, $\delta y = \varepsilon y$, $\delta z = \varepsilon z$.

Écrivons qu'il en est ainsi, en remarquant que l'on a alors :

$$\delta s = \varepsilon \mathbf{S} x \frac{dx}{ds}, \qquad \delta\xi = -\varepsilon \mathrm{S} u x, \qquad \delta n = \varepsilon \mathrm{S}\alpha x$$

il vient :

$$\text{(48)} \quad 0 = \mathrm{N}\mathbf{S} x \frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n \mathrm{S} u x + k(s)\mathrm{S}\alpha x + \text{v. p.} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)[\mathrm{S}\alpha_1 x_1 - \mathrm{S}\alpha x]\, ds_1.$$

Nous devons encore écrire que $\mathrm{S}\alpha\delta u$ est nul quand le contour C subit une translation infiniment petite de composantes ε, η, ζ. On aura dans ce cas :

$$\delta s = \mathbf{S}\varepsilon \frac{dx}{ds}, \qquad \delta\xi = -\mathrm{S}\varepsilon u, \qquad \delta n = \mathrm{S}\varepsilon\alpha.$$

$\mathrm{S}\alpha\delta u$ devant être nul quels que soient les constantes ε, η, ζ on aura les trois égalités :

$$\text{(49)} \quad \begin{aligned} 0 &= \mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u + k(s)\alpha + \text{v. p.} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)[\alpha_1 - \alpha]\, ds_1, \\ 0 &= \mathrm{N}\frac{dy}{ds} + \mathrm{L}_n v + k(s)\beta + \text{v. p.} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)[\beta_1 - \beta]\, ds_1, \\ 0 &= \mathrm{N}\frac{dz}{ds} + \mathrm{L}_n w + k(s)\gamma + \text{v. p.} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)[\gamma_1 - \gamma]\, ds_1. \end{aligned}$$

Si maintenant le contour C subit une rotation infiniment petite de composantes p, q, r, la variation de $\delta u, \delta v, \delta w$ et par suite de $\mathrm{S}\alpha\delta u$ ne sera pas nulle car le vecteur (u, v, w) subira la même rotation. On écrirait facilement les relations correspondant à ce dernier cas.

[35] Quelle est maintenant l'interprétation des égalités écrites au numéro précédent?

Cherchons la dérivée normale de la fonction :

$$\mathrm{V} = \mathrm{S}\alpha x$$

à l'aide des relations (23). On trouve immédiatement :

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \xi} = \mathbf{S} x \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \mathbf{S}\alpha \frac{\partial x}{\partial \xi} = \mathbf{S} x \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \mathbf{S}\alpha u = \mathrm{N}\mathbf{S} x \frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n \mathbf{S} u x.$$

Ainsi l'égalité (48) peut s'écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -k(s)\,V - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[V_1 - V]\,ds_1$$

ce qui établit que $V = S\alpha x$ est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + 2\Gamma^2\mu U = 0. \qquad \big(R(\theta\omega) = 2\mu(\theta\omega)\,\Gamma^2\big) \tag{30}$$

De même les égalités (49) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = -k(s)\,\alpha - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[\alpha_1 - \alpha]\,ds_1,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = -k(s)\,\beta - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[\beta_1 - \beta]\,ds_1,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = -k(s)\,\gamma - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[\gamma_1 - \gamma]\,ds_1$$

et prouvent que les fonctions α, β, γ sont encore des solutions de l'équation (30).

Passons maintenant aux égalités que nous n'avons pas écrites et qui correspondent à une rotation infiniment petite du contour C. On verrait sans difficultés que ces égalités peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\gamma y - \beta z)}{\partial \xi} &= -k(s)(\gamma y - \beta z) \\
&\qquad - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[(\gamma_1 y_1 - \beta_1 z_1) - (\gamma y - \beta z)]\,ds_1, \\
\frac{\partial(\alpha z - \gamma x)}{\partial \xi} &= -k(s)(\alpha z - \gamma x) \\
&\qquad - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[(\alpha_1 z_1 - \gamma_1 x_1) - (\alpha z - \gamma x)]\,ds_1, \\
\frac{\partial(\beta x - \alpha y)}{\partial \xi} &= -k(s)(\beta x - \alpha y) \\
&\qquad - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)\,[(\beta_1 x_1 - \alpha_1 y_1) - (\beta x - \alpha y)]\,ds_1
\end{aligned} \tag{50}$$

d'où il résulte encore que les trois quantités

$$\gamma y - \beta z, \qquad \alpha z - \gamma x, \qquad \beta x - \alpha y$$

sont des solutions de l'équation (30).

[**36**] En définitive les conditions d'homogénéité appliquées à la fonctionnelle Σ conduisent à l'égalité (44) et aux six égalités (45) dont nous avons vu la signification, appliquées aux dérivées fonctionnelles partielles u, v, w de Σ, elles conduisent à ce résultat que les sept fonctions :

$$S\alpha x, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \qquad \gamma y - \beta z, \qquad \alpha z - \gamma x, \qquad \beta x - \alpha y$$

sont des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles (30).

Ceci aurait pu nous permettre de calculer la fonction

$$R(\theta\omega) = 2\Gamma^2 \mu(\theta\omega)$$

si nous ne connaissions maintenant sa signification. En posant en effet :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2}$$

on a immédiatement :

$$R(\theta\omega) = -\frac{\Delta U}{U} = -\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = -\frac{\Delta\beta}{\beta} = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = -S\alpha\Delta\alpha$$

ou encore :

$$R(\theta\omega) = -\frac{\Delta(S\alpha x)}{S\alpha x};$$

on obtient ainsi diverses expressions de la courbure totale $-\Gamma^2$.

Quel parti pourrait-on tirer, quant à la solution du problème de Plateau, des égalités obtenues jusqu'ici comme conséquences des conditions d'homogénéité?

Il est clair d'abord que ces égalités telles qu'elles se présentent actuellement ne sauraient conduire à la détermination de la fonction $K(ss_1)$ dont dépend le problème. On peut néanmoins en tirer immédiatement les conséquences suivantes :

1° Elles permettent d'abord, dans l'expression de la dérivée normale :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -k(s)U - \text{v. p.} \int_C K(ss_1)[U_{s_1} - U_s]\, ds$$

d'éliminer la fonction $k(s)$ et d'arriver ainsi à une forme remarquable de cette dérivée normale.

Nous pouvons, par exemple pour faire cette élimination, nous servir des égalités (49) qui nous donnent tout de suite :

$$
\begin{aligned}
k(s) &= \frac{-\mathrm{N}\dfrac{dx}{ds} - \mathrm{L}_{''}u}{\alpha} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha} - 1\right] ds_1,\\
&= \frac{-\mathrm{N}\dfrac{dy}{ds} - \mathrm{L}_{''}v}{\beta} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\frac{\beta_1}{\beta} - 1\right] ds_1,\\
&= \frac{-\mathrm{N}\dfrac{dz}{ds} - \mathrm{L}_{''}w}{\gamma} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right] ds_1
\end{aligned}
$$

ce qui conduit pour $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi}$ à l'une des trois formes suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} &= \left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_{''}u\right)\frac{1}{\alpha} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\mathrm{U}_{s_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha}\mathrm{U}_s\right] ds_1,\\
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} &= \left(\mathrm{N}\frac{dy}{ds} + \mathrm{L}_{''}v\right)\frac{\mathrm{U}}{\beta} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\mathrm{U}_{s_1} - \frac{\beta_1}{\beta}\mathrm{U}_s\right] ds_1,\\
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} &= \left(\mathrm{N}\frac{dz}{ds} + \mathrm{L}_{''}w\right)\frac{1}{\gamma} - \text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\mathrm{U}_{s_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma}\mathrm{U}_s\right] ds_1
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit une forme tout à fait symétrique en multipliant les deux membres de ces trois égalités respectivement par α^2, β^2, γ^2 et en ajoutant :

$$
(51) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} = -\text{v. p.}\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(ss_1)\left[\mathrm{U}_{s_1} - \cos\omega\, \mathrm{U}_s\right] ds_1.
$$

En posant :

$$
\cos\omega = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1
$$

quantité dont la signification est évidente.

On obtiendrait évidemment d'autres formes pour la dérivée normale en se servant des égalités (48) et (50). Mais la forme (51) paraît particulièrement simple et commode, c'est elle que nous adopterons définitivement.

Dans ces conditions, les égalités déduites des conditions d'homogénéité peuvent s'écrire sous une forme différente. Nous nous bornerons à réécrire l'égalité (48)

$$
(52) \qquad \mathrm{N}\mathop{\mathrm{S}} x\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_{''}\mathrm{S}ux = \text{v. p.}\int_{c} \mathrm{K}(ss_1)\left[\mathrm{S}\alpha_1 x_1 - \cos\omega\, \mathrm{S}\alpha x\right] ds_1.
$$

2° Cette égalité, si la fonction $K(ss_1)$ était connue, deviendrait une équation intégro-différentielle permettant de déterminer $u, v, w, \alpha, \beta, \gamma$ en tenant compte, bien entendu, des relations connues qui lient ces six quantités :

$$Su^2 = 1, \qquad S\alpha^2 = 1, \qquad \mathbf{S} u \frac{dx}{ds} = 0, \qquad Su\alpha = 0, \qquad \mathbf{S} \alpha \frac{dx}{ds} = 0.$$

Ainsi une conséquence des conditions d'homogénéité c'est qu'on pourrait obtenir les dérivées u, v, w de Σ, si on connaissait la fonction $K(ss_1)$ *sans intégration*, c'est-à-dire qu'alors on est ramené à une équation intégro-différentielle et non pas à une équation aux dérivées fonctionnelles comme on aurait pu s'y attendre *à priori*.

3° L'égalité (52) permettrait de déterminer la fonction $K(ss_1)$ dans un cas particulier intéressant : Celui où le contour C serait constitué par deux cercles de rayons r et r' respectivement, ayant leur centre sur l'axe des z et situés dans des plans parallèles au plan xoy. Par ces deux cercles passe une surface minima (de révolution) parfaitement continue et une seule. Les équations des deux cercles étant alors :

$$x = r \cos \omega, \qquad y = r \sin \omega, \qquad z = a;$$
$$x = r' \cos \omega, \qquad y = r' \sin \omega, \qquad z = a'.$$

La fonction $K(ss_1)$ se réduirait à une fonction d'une seule variable indépendante qui serait la différence $\omega - \omega_1$ soit $K'(\omega - \omega_1)$; cette fonction, l'égalité (52) par exemple, deviendrait alors une équation intégrale à laquelle satisferait la fonction $K'(\omega - \omega_1)$.

La principale difficulté que l'on rencontrerait dans un tel problème est la singularité de la fonction $K(\omega - \omega')$.

On pourrait s'inspirer pour résoudre cette question de la méthode employée par M. Paul Lévy[1] dans un cas analogue. Il s'agissait, dans le cas du cercle, de déterminer la dérivée seconde $\mathcal{G}^a{}_b$ de la fonction de Green en utilisant les conditions d'homogénéité auxquelles satisfait cette fonction. M. Paul Lévy fait usage d'un procédé qui consiste à utiliser des développements en séries de Fourier, divergents pour représenter les fonctions singulières telles que notre fonction $K(ss_1)$.

Nous laisserons, pour le moment, ce cas particulier pour montrer comment les conditions d'homogénéité conduisent immédiatement à la surface adjointe d'une surface minima donnée.

LA SURFACE ADJOINTE

[**37**] Sur le contour C, u, v, w sont des fonctions de s. Posons comme nous l'avons fait au n° 13 :

(53) $$u = \frac{dx_0}{ds}, \qquad v = \frac{dy_0}{ds}, \qquad w = \frac{dz_0}{ds}$$

égalités qui définissent les trois fonctions x_0, y_0, z_0.

On aura dans ces conditions :

(1) $$\delta\Sigma = \int_C \mathrm{S}\,\delta x\, dx_0.$$

La relation (44) devient :

(54) $$\Sigma = \frac{1}{2}\int_C \mathrm{S}x\,dx_0.$$

Intégrons par parties :

(54_0) $$\Sigma = -\frac{1}{2}\int_C \mathrm{S}x_0\,dx = \frac{1}{2}\int_C \mathrm{S}x_0(-dx).$$

On déduit, d'autre part, de (44)

$$\delta\Sigma = \frac{1}{2}\int_C \mathrm{S}(x\,\delta\,dx_0 + \delta x\,dx_0).$$

Si on rapproche cette égalité de (1), on trouve :

$$\delta\Sigma = \int_C \mathrm{S}x\,\delta\,dx_0$$

et en intégrant par parties :

(1_0) $$\delta\Sigma = -\int_C \mathrm{S}\,\delta x_0\,dx = \int_C \mathrm{S}\,\delta x_0(-dx).$$

Les relations :

(4) $$\mathrm{S}u\,dx = 0, \qquad \mathrm{S}u^2 = 1$$

peuvent s'écrire :

$$(4_0) \qquad S\,dx_0\,dx = 0, \qquad S(dx_0)^2 = S(dx)^2$$

relations symétriques en dx et dx_0 ....

D'autre part, le contour C étant fermé, on a évidemment :

$$(55) \qquad \int_C dx = 0, \qquad \int_C dy = 0, \qquad \int_C dz = 0$$

mais les trois premières équations (45) donnent corrélativement :

$$(55_0) \qquad \int_C dx_0 = 0, \qquad \int_C dy_0 = 0, \qquad \int_C dz_0 = 0.$$

Les trois autres relations (45) s'écrivent :

$$(56) \quad \int_C y\,dz_0 - z\,dy_0 = 0, \quad \int_C z\,dx_0 - x\,dz_0 = 0, \quad \int_C x\,dy_0 - y\,dx_0 = 0$$

mais si on intègre par parties, elles deviennent :

$$(56_0) \quad \int_C y_0\,dz - z_0\,dy = 0, \quad \int_C z_0\,dx - x_0\,dz = 0, \quad \int_C x_0\,dy - y_0\,dx = 0.$$

Par conséquent :

Entre les quantités :

$$\Sigma,\ x,\ y,\ z,\ x_0,\ y_0,\ z_0$$

d'une part et les quantités :

$$\Sigma,\ x_0,\ y_0,\ z_0\ -x,\ -y,\ -z$$

d'autre part, il existe la plus parfaite symétrie.

Le point de l'espace qui a pour coordonnées

$$x_0(s), \qquad y_0(s), \qquad z_0(s)$$

décrit, quand s varie, une courbe C_0 qui est *fermée* comme la courbe C, ainsi que cela résulte des formules (55_0). A chaque point M de C correspond un point M_0 de C_0 et inversement.

Soient ds et ds_0 les éléments d'arc pris aux points M et M_0 respectivement, les formules (4_0) montrent que ds et ds_0 sont perpendiculaires l'un à l'autre et que de plus :

$$ds_0 = \pm ds.$$

Les deux courbes C et C_0 ont même longueur d'arc (le sens de parcours, seul, peut différer) et la correspondance entre M et M_0 est *univoque*.

Remarquons d'ailleurs que si le contour C est donné sur la surface minima S, C_0 sera connu à une translation près, puisque les trois fonctions

$$x_0(s), \qquad y_0(s), \qquad z_0(s)$$

sont déterminées chacune à une constante additive près.

[**38**] Faisons l'hypothèse $ds_0 = + ds$, on verra que l'hypothèse $ds_0 = - ds$ conduirait aux mêmes résultats. Alors l'égalité (1_0) s'écrit :

$$(57) \qquad \delta\Sigma = -\int_{C}\left(\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\,\delta x_0\right)ds = \int_{C_0}\left[\mathrm{S}\left(-\frac{dx}{ds}\right)\delta x_0\right]ds_0 .$$

Ainsi : la variation $\delta\Sigma$ de Σ peut être obtenue en déformant infiniment peu le contour C_0. Donc : Σ peut être considérée comme fonctionnelle du contour C_0 aussi bien que du contour C.

Considérée comme fonctionnelle du contour C, Σ admet en chaque point de ce contour des dérivées :

$$(53) \qquad u = \frac{dx_0}{ds_0}, \qquad v = \frac{dy_0}{ds_0}, \qquad w = \frac{dz_0}{ds_0}$$

satisfaisant aux deux relations :

$$\mathrm{S}\,u\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \mathrm{S}\,u^2 = 1 .$$

Considérée comme fonctionnelle du contour C_0, Σ admet, en chaque point M_0 de ce contour des dérivées fonctionnelles partielles u_0, v_0, w_0 qui, d'après (57), sont :

$$(53_0) \qquad u_0 = -\frac{dx}{ds}, \qquad v_0 = -\frac{dy}{ds}, \qquad w_0 = -\frac{dz}{ds}$$

et qui satisfont, par conséquent, aux deux relations :

$$\mathrm{S}\,u_0\frac{dx_0}{ds_0} = 0, \qquad \mathrm{S}\,u_0^2 = 1 .$$

Ainsi Σ, considérée à l'un ou l'autre point de vue, satisfait à la même équation aux dérivées fonctionnelles partielles :

$$\mathrm{S}\,\Sigma'^2_x = 1 .$$

Les formules déjà obtenues établissent, d'autre part, entre ces deux aspects de Σ la plus étroite correlation. Quand le contour C se déforme en restant sur la surface caractéristique S, C_0 se déforme en restant sur une surface caractéristique S_0 qui correspond à S. La démonstration rigoureuse de ce fait résulte immédiatement du système d'équations aux dérivées fonctionnelles (22_0) que nous avons obtenu dans la première partie et qui est correlatif du système (22).

Ce système (22_0) montre que le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) se déplace sur une surface S_0 qui est encore une surface minima. Il y a correspondance biunivoque entre S et S_0 en raison de la symétrie des équations et des formules obtenues.

Nous dirons que S et S_0 sont deux surfaces minima adjointes l'une de l'autre.

Si S est donnée S_0, comme nous l'avons déjà remarqué, est connue à une translation près.

D'ailleurs les formules :

$$\delta\Sigma = \int_C (\mathrm{S}u\,\delta x)\,ds = \int_{C_0} (\mathrm{S}u_0\,\delta x_0)\,ds_0$$

montrent que si le point M, du contour C, se déplace sur S tel que l'on ait :

$$\delta x = -u\,\delta\xi, \qquad \delta y = -v\,\delta\xi, \qquad \delta z = -w\,\delta\xi$$

il en résulte pour Σ une variation :

$$\delta\Sigma = -\int_C \delta\xi\,ds = -\int_C \delta\xi\,ds_0$$

et qu'on devra en même temps attribuer à $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ les valeurs :

$$\delta x_0 = -u_0\,\delta\xi, \qquad \delta y_0 = -v_0\,\delta\xi, \qquad \delta z_0 = w_0\,\delta\xi$$

pour retrouver la même valeur de $\delta\Sigma$.

Remarquons que la quantité

$$\mathrm{N} = -\mathrm{S}u\frac{d\alpha}{ds} = -\mathrm{S}\frac{dx_0}{ds_0}\frac{d\alpha}{ds} = -\mathrm{L}_{u_0}$$

qui représente la torsion géodésique changée de signe de la courbe C représente, en même temps, la courbure normale sur la courbe C_0.

En effet, appelons α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de la normale à S_0 au point M_0 de C_0, on a :

$$\alpha_0 = \alpha, \qquad \beta_0 = \beta, \qquad \gamma_0 = \gamma$$

car on a, par exemple :

$$\alpha_0 = w_0 \frac{dy_0}{ds_0} - v_0 \frac{dz_0}{ds_0} = \left(-\frac{dz}{ds}\right) v - \left(-\frac{dy}{ds}\right) w = w \frac{dy}{ds} - v \frac{dz}{ds} = \alpha .$$

Il en résulte que :

$$N = -L_{n_0} = -\mathbf{S} \frac{dx_0}{ds_0} \frac{d\alpha_0}{ds_0}$$

ce qui établit la propriété signalée plus haut.

De là on déduit immédiatement le résultat classique ;

Aux lignes de courbures tracées sur une surface minima correspondent les lignes asymptotiques sur la surface adjointe et vice versa.

On voit donc que les deux surfaces S et S_0 se correspondent point par point de manière qu'aux points correspondants les plans tangents soient parallèles et que les éléments linéaires correspondants soient perpendiculaires entre eux, ainsi qu'il résulte de l'équation :

$$(4_0) \qquad \mathbf{S} dx\, dx_0 = 0 .$$

Je dis de plus que S et S_0 sont applicables l'une sur l'autre. On a, en effet, $ds_0 = ds$ pour les éléments linéaires qui se correspondent sur les deux surfaces. D'ailleurs si l'on dérive la relation :

$$\mathbf{S} u \frac{dx}{ds} = \mathbf{S} \frac{dx_0}{ds_0} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$$

on obtient :

$$\mathbf{S} u \frac{d^2 x}{ds^2} = \mathbf{S} u_0 \frac{d^2 x_0}{ds_0^2}$$

relation qui exprime qu'aux deux points correspondants : M sur C et M_0 sur C_0, les *courbures géodésiques sont égales.*

On peut le voir autrement en remarquant que les relations établies plus haut :

$$(53') \qquad N = -L_{n_0}, \qquad L_n = N_0$$

donnent

$$N^2 + L_n^2 = N_0^2 + L_{n_0}^2$$

ou

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2$$

d'où il résulte que les *courbures totales sont les mêmes aux points correspondants de* S *et* S_0.

[39] Supposons que le contour C, ou même seulement une portion de ce contour, fasse partie d'un réseau orthogonal et isotherme tracé sur la surface S. La correspondance que nous venons d'établir entre S et S_0 montre que C_0 (ou la portion considérée de C_0) fera aussi partie d'un réseau orthogonal et isotherme tracé sur S_0. Cela résulte de ce que S et S_0 sont applicables l'une sur l'autre.

Les deux réseaux se correspondent, si bien qu'on peut adopter pour définir l'un et l'autre les mêmes paramètres variables θ et ω.

Rapportons les deux surfaces, chacune au réseau qui lui correspond. Nous aurons :

$$\begin{array}{llll} \text{pour} \quad S & x = f(\theta\omega), & y = \varphi(\theta\omega), & y = \psi(\theta\omega); \\ \text{pour} \quad S_0 & x_0 = f_0(\theta\omega), & y_0 = \varphi_0(\theta\omega), & z_0 = \psi_0(\theta\omega) \end{array}$$

avec :

$$S\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \omega} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2,$$

$$S\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\frac{\partial x_0}{\partial \omega} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\right)^2 = S\left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega}\right)^2.$$

Supposons que les courbes C et C_0 soient des courbes $\omega = \text{const.}$ (pour ces deux courbes, ω a la même valeur). Les courbes qui coupent orthogonalement C (sur S) et C_0 (sur S_0) seront alors des courbes $\theta = \text{const.}$

Désignons par la lettre d une différentielle correspondant à un déplacement sur une courbe $\omega = \text{const.}$, et par la lettre δ une différentielle relative à un déplacement sur une courbe $\theta = \text{const.}$

Les formules (53) et (53_0) montrent que :

$$(54) \qquad \begin{aligned} u &= -\frac{\delta x}{\delta \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \omega} : \frac{\delta \xi}{\delta \omega} = \frac{dx_0}{ds_0} = \frac{\partial x_0}{\partial \theta} : \frac{ds_0}{d\theta}, \\ u_0 &= -\frac{\delta x_0}{\delta \xi_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial \omega} : \frac{\delta \xi_0}{\delta \omega} = -\frac{dx}{ds} = -\frac{\partial x}{\partial \theta} : \frac{ds}{d\theta} \end{aligned}$$

et d'autre part nous avons adopté l'hypothèse : $ds_0 = +ds$, d'où il résulte que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = -\frac{\partial \xi_0}{\partial \omega}, \qquad \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds_0}{d\theta}.$$

Le fait que nous avons affaire à un réseau à la fois orthogonal et isotherme exige, d'autre part, que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds_0}{d\theta}, \qquad \frac{\partial \xi_0}{\partial \omega} = \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{ds_0}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}.$$

Dans ces conditions, les formules (54) donnent :

$$\frac{\partial x_0}{\partial \theta} = -\frac{\partial x}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial \omega} = \frac{\partial x}{\partial \theta}.$$

Il est évident que ces formules seront vraies pour tout couple de points correspondants sur la surface minima et son adjointe.

En définitive, la correspondance entre S et S_0 se traduira par les équations :

$$(55)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial \theta} &= -\frac{\partial x}{\partial \omega}, & \frac{\partial x_0}{\partial \omega} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial y_0}{\partial \theta} &= -\frac{\partial y}{\partial \omega}, & \frac{\partial y_0}{\partial \omega} &= \frac{\partial y}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial z_0}{\partial \theta} &= -\frac{\partial z}{\partial \omega}, & \frac{\partial z_0}{\partial \omega} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

obtenues en raisonnant sur v, v_0; w, w_0, comme nous l'avons fait sur u et u_0. Si l'on élimine x_0, y_0, z_0 entre ces six équations, en écrivant par exemple :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \theta\, \partial \omega} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial \omega\, \partial \theta},$$

on obtient :

$$(56)\qquad \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} = 0, \\ \Delta y &= \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} = 0, \\ \Delta z &= \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} = 0 \end{aligned}$$

auxquelles il faudra joindre les équations :

$$(57)\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \omega} = 0, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 = \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2.$$

On aura de même pour x_0, y_0, z_0

$$(56_0)\qquad \begin{aligned} \Delta x_0 &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \omega^2} = 0, \\ \Delta y_0 &= \frac{\partial^2 y_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial \omega^2} = 0, \\ \Delta z_0 &= \frac{\partial^2 z_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial \omega^2} = 0. \end{aligned}$$

$$(57_0)\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\frac{\partial x_0}{\partial \omega} = 0, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\right)^2 = \mathrm{S}\left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega}\right)^2.$$

Ainsi : x, y, z aussi bien que x_0, y_0, z_0 sont des fonctions harmoniques de θ et ω. Le système d'équations aux dérivées partielles (56) et (57) définit l'ensemble des surfaces caractéristiques. Il est équivalent au système déjà obtenu au n° 15 alors que la surface était supposée rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales.

FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX SURFACES MINIMA ET A LEURS VARIATIONS INFINITÉSIMALES

[**40**] Le système d'équations aux dérivées partielles que nous venons d'obtenir est d'une intégration immédiate. Soient en effet :

$$x_1(\theta\omega), \qquad y_1(\theta\omega), \qquad z_1(\theta\omega)$$

une *solution particulière quelconque de ce système*, et soient, d'autre part :

$$\mathrm{A}(\theta\omega), \qquad \mathrm{B}(\theta\omega)$$

deux fonctions harmoniques de θ et ω adjointes l'une de l'autre. C'est-à-dire telles que l'on ait :

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \theta}$$

à cela près *quelconques*. Prenons :

$$(58)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= \mathrm{A}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} - \mathrm{B}\frac{\partial x_1}{\partial \omega}, & \frac{\partial x}{\partial \omega} &= \mathrm{A}\frac{\partial x_1}{\partial \omega} + \mathrm{B}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \mathrm{A}\frac{\partial y_1}{\partial \theta} - \mathrm{B}\frac{\partial y_1}{\partial \omega}, & \frac{\partial y}{\partial \omega} &= \mathrm{A}\frac{\partial y_1}{\partial \omega} + \mathrm{B}\frac{\partial y_1}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \mathrm{A}\frac{\partial z_1}{\partial \theta} - \mathrm{B}\frac{\partial z_1}{\partial \omega}, & \frac{\partial z}{\partial \omega} &= \mathrm{A}\frac{\partial z_1}{\partial \omega} + \mathrm{B}\frac{\partial z_1}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\theta\,\partial\omega} = \frac{\partial^2 x}{\partial\omega\,\partial\theta}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\theta\,\partial\omega} = \frac{\partial^2 y}{\partial\omega\,\partial\theta}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\theta\,\partial\omega} = \frac{\partial^2 z}{\partial\omega\,\partial\theta}$$

et que :

$$x(\theta\omega), \qquad y(\theta\omega), \qquad z(\theta\omega)$$

est la solution la plus générale (réelle) des systèmes (56) et (57).

Introduisons la surface adjointe :

$$S_{10}, \qquad x_{10}(\theta\omega), \qquad y_{10}(\theta\omega), \qquad z_{10}(\theta\omega)$$

de la surface :

$$S_1, \qquad x_1(\theta\omega), \qquad y_1(\theta\omega), \qquad z_1(\theta\omega).$$

On a par exemple :

$$\frac{\partial x_{10}}{\partial\theta} = -\frac{\partial x_1}{\partial\omega}, \qquad \frac{\partial x_{10}}{\partial\omega} = \frac{\partial x_1}{\partial\theta}$$

et des relations analogues entre les autres dérivées (55). Dans ces conditions, les formules (58) donnent x, y, z au moyen de simples quadratures.

On a, en effet :

$$\begin{aligned} dx &= A\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial x_1}{\partial\omega}\,d\omega\right) + B\left(-\frac{\partial x_1}{\partial\omega}\,d\theta + \frac{\partial x_1}{\partial\theta}\,d\omega\right), \\ &= A\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial x_1}{\partial\omega}\,d\omega\right) + B\left(+\frac{\partial x_{10}}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial x_{10}}{\partial\omega}\,d\omega\right), \\ &= A\,dx_1 + B\,dx_{10}. \end{aligned}$$

On aura, en définitive :

$$(59)\qquad \begin{aligned} x &= \int A\,dx_1 + B\,dx_{10}, \\ y &= \int A\,dy_1 + B\,dy_{10}, \\ z &= \int A\,dz_1 + B\,dz_{10}. \end{aligned}$$

Les quantités sous le signe $\int$ étant, comme on l'a vu, des différentielles totales exactes.

On peut prendre comme fonctions harmoniques A et B adjointes l'une de l'autre :

$$A = \frac{\partial F}{\partial \theta}, \qquad B = \frac{\partial F}{\partial \omega}$$

$F(\theta, \omega)$ étant une fonction harmonique quelconque. Dans ces conditions, les formules (59) s'écrivent :

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\partial F}{\partial \theta}\, dx_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega}\, dx_{10}, \\ y &= \int \frac{\partial F}{\partial \theta}\, dy_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega}\, dy_{10}, \\ z &= \int \frac{\partial F}{\partial \theta}\, dz_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega}\, dz_{10}. \end{aligned} \tag{60}$$

D'autre part, on voit facilement que l'on peut prendre à la place de θ et ω, x_{10} et x_1 comme paramètres d'un réseau orthogonal et isotherme tracé sur S ou sur S_0. En effet, supposons que l'on prenne comme variables indépendantes x_{10} et x_1 et voyons si l'on peut alors satisfaire au système (55) et (57). On aura :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial x_{10}} = 0, \qquad \frac{\partial x_{10}}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial x_{10}}{\partial x_{10}} = 1$$

ce qui prouve que les deux premières équations du système (55) sont satisfaites. Les autres deviennent :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y_{10}}{\partial x_{10}} = -\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial y_{10}}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_{10}}; \\ &\frac{\partial z_{10}}{\partial x_{10}} = -\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial z_{10}}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial x_{10}} \end{aligned} \tag{61}$$

et l'on voit alors que les équations (57) qui deviennent :

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_{10}} + \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_{10}} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_{10}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_{10}}\right)$$

entraînent, en vertu de (61) :

$$\frac{\partial y_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial y_{10}}{\partial x_{10}} + \frac{\partial z_{10}}{\partial x_1} \frac{\partial z_{10}}{\partial x_{10}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial y_{10}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{10}}{\partial x_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y_{10}}{\partial x_{10}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{10}}{\partial x_{10}}\right)^2$$

ce qui prouve que $\theta = x_{10}$, $\omega = x_1$ définit un réseau orthogonal et isotherme sur la surface S, aussi bien que sur la surface S_0. Une des familles de ce réseau est composée de sections faites dans la surface par des plans perpendiculaires à l'axe ox.

Il est évident que l'on aurait pu prendre comme paramètres y_{10} et y_1 ou z_{10} et z_1.

Comme la propriété précédente ne dépend pas du choix des axes de coordonnées, on peut dire d'une façon générale :

Une série de plans parallèles découpe sur une surface minima une famille de courbes qui appartiennent à un réseau orthogonal et isotherme.

Ce résultat est classique dans la théorie des surfaces minima (1).

Si dans les formules (59) on prend :

$$A = \frac{\partial F}{\partial z_1}, \qquad B = \frac{\partial F}{\partial z_{10}}$$

F étant une fonction harmonique quelconque de z_1 et z_{10}. On obtient :

$$(62) \qquad \begin{aligned} x &= \int \frac{\partial F}{\partial z_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial z_{10}} dx_{10}, \\ y &= \int \frac{\partial F}{\partial z_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial z_{10}} dy_{10}, \\ z &= \int \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial F}{\partial z_{10}} dz_{10} = F(z_1 z_{10}). \end{aligned}$$

On pourra donc se donner arbitrairement z au moyen d'une fonction harmonique quelconque de z_1 et z_{10}, x et y en résulteront immédiatement à l'aide de quadratures.

[**41**] Les formules (58) et (59) réalisent entre les deux surfaces S_1 et S *une correspondance par plans tangents parallèles.*

En effet, α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale en un point M de S, les relations :

$$\mathrm{S}\alpha \frac{\partial x}{d\theta} = 0, \qquad \mathrm{S}\alpha \frac{\partial x}{\partial \omega}$$

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1re partie, p. 321.

entraînent, en vertu des formules (58),

$$\mathbf{S}\alpha\frac{\partial x_1}{\partial\theta}=0,\qquad \mathbf{S}\alpha\frac{\partial x_1}{\partial\omega}=0.$$

Formons le ds^2 de la surface S :

$$ds^2=\mathrm{S}dx^2=\mathrm{A}^2ds_1^2+\mathrm{B}^2ds_{10}^2+2\mathrm{AB}\,\mathrm{S}dx_1dx_{10}.$$

Mais comme les deux surfaces S_1 et S_{10} sont adjointes l'une de l'autre, on a :

$$ds_1^2=ds_{10}^2,\qquad \mathrm{S}dx_1dx_{10}=0.$$

Donc

$$ds^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,ds_1^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,ds_{10}^2. \tag{63}$$

La correspondance considérée réalise entre S *et* S_1 *ou entre* S *et* S_{10} *une représentation conforme des deux surfaces l'une sur l'autre.*

Si l'on veut de plus que S et S_1 soient *applicables* l'une sur l'autre, il faudra pouvoir choisir A et B telles que :

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=1.$$

Dans ce cas, les fonctions harmoniques A et B adjointes l'une de l'autre devront nécessairement se réduire à des constantes, et l'on pourra prendre, φ étant une constante arbitraire :

$$\mathrm{A}=\cos\varphi,\qquad \mathrm{B}=\sin\varphi.$$

Les formules (58) se réduiront alors à

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\cos\varphi\frac{\partial x_1}{\partial\theta}-\sin\varphi\frac{\partial x_1}{\partial\omega},$$
$$\frac{\partial x}{\partial\omega}=\cos\varphi\frac{\partial x_1}{\partial\omega}+\sin\varphi\frac{\partial x_1}{\partial\theta},$$
. . . .

En faisant varier φ de 0 à 2π :

On aura une série continue de surfaces minima applicables l'une sur l'autre.

Elles sont dites surfaces associées. Si on fait, en particulier : $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-\frac{\partial x_1}{\partial\omega},\qquad \frac{\partial x}{\partial\omega}=\frac{\partial x_1}{\partial\theta},$$
. . . .

On retrouve la surface adjointe. Pour $\varphi = 0$, on obtient la surface S elle-même.

Revenons au cas général et cherchons le cosinus de l'angle que font entre eux deux éléments linéaires correspondants, l'un sur S et l'autre sur S_1, on aura :

$$\cos \varpi = \frac{S dx\, dx_1}{\sqrt{(S dx^2)(S dx_1^2)}} = \frac{A\, S dx_1^2 + B\, S dx_1\, dx_{1n}}{ds\, ds_1} = \frac{A\, ds_1^2}{ds_1^2 \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

Cet angle ϖ est donc le même pour tous les éléments linéaires qui se croisent en un point M *de la surface* S (¹).

[**42**] Nous avons rapidement déduit des formules (58) les quelques résultats classiques précédents pour montrer que ces formules sont très commodes. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que les transformations représentées par les formules (58) ou (59) *forment un groupe*.

Désignons par T(A, B) la transformation qui correspond à deux fonctions harmoniques A et B adjointes l'une de l'autre. On voit que

$$T(AB)\,T(A'B') = T(A'B')\,T(AB);$$

c'est là une propriété remarquable du groupe : on peut intervertir l'ordre des opérations. On sait qu'il n'en est pas toujours ainsi, en général. De plus, on vérifie facilement que l'on a (symboliquement) :

$$T(AB) \,.\, T\left(\frac{A}{A^2 + B^2}, \frac{-B}{A^2 + B^2}\right) = 1$$

c'est-à-dire que ces deux transformations effectuées successivement donnent la transformation identique (²).

On pourrait donc obtenir les propriétés générales des surfaces minima en cherchant parmi toutes les propriétés de la surface particulière S_1 (choisie à volonté) celles qui restent invariantes par rapport au groupe de transformations T(A, B).

En particulier soit la proposition :

La représentation sphérique d'une surface minima réalise une représentation conforme de la surface sur la sphère de rayon 1.

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1re partie, pages 329, 330 et 331.

(²) De là on peut conclure que la correspondance entre les deux surfaces S_1 et S est *biunivoque*.

Il suffit de l'établir pour une surface minima particulière S_1 quelconque, on l'aura du même coup démontrée pour la surface minima la plus générale.

Considérons maintenant la transformation :

$$T(1 + \varepsilon f, \varepsilon\varphi)$$

obtenue en faisant :

$$A = 1 + \varepsilon f, \qquad B = \varepsilon\varphi$$

ε étant une constante infiniment petite, f et φ deux fonctions harmoniques de θ et ω adjointes l'une de l'autre. C'est là une transformation infinitésimale si l'on suppose que f et φ renferment un paramètre variable.

On a :

$$(64) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= (1 + \varepsilon f)\frac{\partial x_1}{\partial \theta} - \varepsilon\varphi\frac{\partial x_1}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} &= (1 + \varepsilon f)\frac{\partial x_1}{\partial \omega} + \varepsilon\varphi\frac{\partial x_1}{\partial \theta}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

La surface minima $S(x, y, z)$ diffère dans ce cas infiniment peu de la surface $S_1(x_1, y_1, z_1)$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \delta\frac{\partial x}{\partial \theta} &= \varepsilon\left(f\frac{\partial x}{\partial \theta} - \varphi\frac{\partial x}{\partial \omega}\right), \\ \delta\frac{\partial x}{\partial \omega} &= \varepsilon\left(f\frac{\partial x}{\partial \omega} + \varphi\frac{\partial x}{\partial \theta}\right). \end{aligned}$$

Revenons aux formules (59) et supposons que les intégrales qui y figurent soient prises le long du contour C_1 (correspondant à C sur la surface S_1). Ces formules permettront alors de déduire le contour C des contours C_1 et C_{10} :

$$(65) \qquad \begin{aligned} x_{s_1} - x_{s_1=0} &= \int_0^{s_1} A\,dx_1 + B\,dx_{10} = \int_0^{s_1}\left(A\frac{dx_1}{ds_1} + Bu_1\right)ds_1, \\ y_{s_1} - y_{s_1=0} &= \int_0^{s_1} A\,dy_1 + B\,dy_{10} = \int_0^{s_1}\left(A\frac{dy_1}{ds_1} + Bv_1\right)ds_1, \\ z_{s_1} - z_{s_1=0} &= \int_0^{s_1} A\,dz_1 + B\,dz_{10} = \int_0^{s_1}\left(A\frac{dz_1}{ds_1} + Bw_1\right)ds_1. \end{aligned}$$

Si maintenant, ayant égard à ces formules, on applique à la surface S la transformation infinitésimale précédente, on a :

$$(66)\qquad \begin{aligned}
\delta x - (\delta x)_{s=0} &= \varepsilon \int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds,\\
\delta y - (\delta y)_{s=0} &= \varepsilon \int_0^s \left(f\frac{dy}{ds} + \varphi v \right) ds,\\
\delta z - (\delta z)_{s=0} &= \varepsilon \int_0^s \left(f\frac{dz}{ds} + \varphi w \right) ds.
\end{aligned}$$

[**43**] Soit un point M sur le contour C de la surface minima S, et M_1 le point correspondant sur la surface infiniment voisine S_1, déduite de S au moyen de la transformation infinitésimale du numéro précédent.

Cherchons les projections, que nous appellerons

$$\delta s, \qquad \delta\xi, \qquad \delta n$$

du déplacement $\overline{MM_1}$ sur les vecteurs :

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right); \qquad (-u, \; -v, \; -w); \qquad (\alpha, \beta, \gamma)$$

respectivement. On a immédiatement :

$$\delta s = \mathbf{S}\frac{dx}{ds}\delta x, \qquad \delta\xi = -\mathbf{S}u\delta x, \qquad \delta n = \mathbf{S}\alpha\delta x.$$

Posons pour simplifier :

$$\varepsilon p(s) = \mathbf{S}\frac{dx}{ds}(\delta x)_{s=0}, \qquad -\varepsilon q(s) = \mathbf{S}u(\delta x)_{s=0}, \qquad \varepsilon r(s) = \mathbf{S}\alpha(\delta x)_{s=0}$$

p, q, r étant des fonctions de s dépendant linéairement des trois constantes arbitraires :

$$(\delta x)_{s=0}, \qquad (\delta y)_{s=0}, \qquad (\delta z)_{s=0}$$

On trouve :

$$(67)\qquad \begin{aligned}
\delta s &= \varepsilon\mathbf{S}\frac{dx}{ds}\int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds + \varepsilon p(s),\\
\delta\xi &= -\varepsilon\mathbf{S}u\int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds + \varepsilon q(s),\\
\delta n &= \varepsilon\mathbf{S}\alpha\int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds + \varepsilon r(s).
\end{aligned}$$

On déduit de là l'expression de la dérivée normale :

$$\frac{\partial \delta n}{\delta \xi} = -\mathrm{S}\alpha\delta_n u = \mathrm{U}_1 .$$

La relation évidente : $\mathrm{S}u\alpha = 0$ permet d'écrire :

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{S}u\delta_n \alpha$$

et il s'agit de calculer $\delta_n \alpha$, $\delta_n \beta$, $\delta_n \gamma$.

Supposons que le déplacement du point M se fasse normalement à la surface S. Au contour C sur S correspond alors un contour C′ sur S′, et au point M sur C, un point M′ sur C′.

M_1 étant toujours le point de S_1 déduit de M au moyen de la correspondance par plans tangents parallèles, $T(1+\varepsilon f, \varepsilon\varphi)$, α, β, γ prennent en M_1 les mêmes valeurs qu'en M. Il en résulte que les variations de ces trois quantités, $\delta_n \alpha, \ldots$, quand on passe de M à M′, sont les mêmes que celles qui correspondent au déplacement M_1M' sur la surface S_1. On pourra donc écrire (en négligeant les infiniment petits du 2[e] ordre) :

$$\delta_n \alpha = (\delta\alpha)_{\mathrm{MM}'} = (\delta\alpha)_{\mathrm{M}_1\mathrm{M}'} = \delta_\xi \alpha + \delta_s \alpha = \left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u\right)\delta\xi + \frac{d\alpha}{ds}\delta s$$

$\delta\xi$ et δs étant les projections de MM_1 (ou de $\mathrm{M}_1\mathrm{M}'$) calculées plus haut (67). On aura par conséquent :

$$\mathbf{S}u\delta_n \alpha = \mathrm{L}_n \delta\xi + \mathbf{S}u\frac{d\alpha}{ds}\,.\,\delta s = \mathrm{L}_n\delta\xi - \mathrm{N}\delta s$$

ou

$$\mathrm{U}_1 = \mathbf{S}u\delta_n\alpha = -\varepsilon\mathbf{S}\mathrm{L}_n u \int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u\right) ds - \varepsilon\mathbf{S}\mathrm{N}\frac{dx}{ds}\int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u\right) ds + \left(\mathrm{L}_n q + \frac{d\alpha}{ds}\,.\,p\right)\varepsilon$$

ou

$$(68)\quad \begin{aligned} \mathrm{U}_1 &= -\varepsilon\mathbf{S}\left(\mathrm{N}\frac{dx}{ds} + \mathrm{L}_n u\right)\int_0^s \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u\right) ds + \left(p\frac{d\alpha}{ds} + q\mathrm{L}_n\right)\varepsilon \\ &= -\varepsilon\mathbf{S}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta\xi}\right)\int \left(f\frac{dx}{ds} + \varphi u\right) ds + \left(p\frac{d\alpha}{ds} + q\mathrm{L}_n\right)\varepsilon \end{aligned}$$

nous aurons bientôt à utiliser cette formule.

[**44**] Si l'on emploie la transformation :

$$T(A, B)$$

on peut obtenir facilement l'expression de la courbure normale $-L_n$ et de la torsion géodésique $-N$ en un point M de la surface S en fonction de leurs valeurs $-L_{n_1}$ et $-N_1$ au point correspondant M_1 de la surface S_1. Nous avions en effet obtenu, (59) et (63),

$$dx = A\,dx_1 + B\,dx_{10},$$
$$ds = \sqrt{A^2 + B^2}\,ds_1$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dx}{ds} = \left(A\frac{dx_1}{ds_1} + B\frac{dx_{10}}{ds_1}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

On obtiendrait également sans difficulté la relation suivante :

$$u = \frac{dx_0}{ds} = \left(-B\frac{dx_1}{ds_1} + A\frac{dx_{10}}{ds_1}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

D'autre part, $\alpha\ \beta\ \gamma$ ont même valeur en M et M_1, leurs différentielles, également. On aura donc, par exemple :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha_1}{ds_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Si alors dans les expressions :

$$L_n = \mathrm{S}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{ds}, \qquad N = -\mathrm{S}\,u\frac{d\alpha}{ds}$$

on remplace $\dfrac{dx}{ds}\ldots,\ u\ldots,\ \dfrac{d\alpha}{ds}\ldots$ par leurs valeurs qui viennent d'être calculées, on trouve :

$$L_n = \frac{1}{A^2 + B^2}\left(A\,\mathrm{S}\frac{dx_1}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1} + B\,\mathrm{S}\frac{dx_{10}}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1}\right),$$
$$N = \frac{1}{A^2 + B^2}\left(-B\,\mathrm{S}\frac{dx_1}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1} + A\,\mathrm{S}\frac{dx_{10}}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)$$

et comme on a :

$$\mathrm{S}\frac{dx_1}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \mathrm{L}_{n1}, \qquad \mathrm{S}\frac{dx_{10}}{ds_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1} = \mathrm{S}u_1\frac{d\alpha_1}{ds_1} = -\mathrm{N}_1,$$

on obtient en définitive :

$$\text{(69)} \qquad \mathrm{L}_n = \frac{\mathrm{AL}_{n1} - \mathrm{BN}_1}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}, \qquad \mathrm{N} = \frac{-\mathrm{AN}_1 - \mathrm{BL}_{n1}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$$

d'où

$$\Gamma^2 = \frac{\Gamma_1^2}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$$

formules qui généralisent les relations (53').

Si maintenant nous remplaçons la transformation T(AB) par la transformation infinitésimale $\mathrm{T}(1 + \varepsilon f, \varepsilon\varphi)$, nous obtenons les variations infiniment petites de L_n et N :

$$\text{(70)} \qquad \delta\mathrm{L}_n = -\varepsilon(f\mathrm{L}_n + \varphi\mathrm{N}), \qquad \delta\mathrm{N} = \varepsilon(f\mathrm{N} - \varphi\mathrm{L}_n).$$

Mais nous aurons besoin plutôt, dans la suite, des variations $\delta_n\mathrm{L}_n$ et $\delta_n\mathrm{N}$ correspondant à un déplacement δn sur la normale.

Posons encore comme nous l'avons déjà fait :

$$\delta n = \mathrm{U}, \qquad \frac{d\delta n}{ds} = \mathrm{U}', \qquad \frac{d^2\delta n}{ds^2} = \mathrm{U}'', \qquad \frac{\partial\delta n}{\partial\xi} = \mathrm{U}_1$$

nous aurons les formules suivantes qui nous seront utiles. D'abord :

$$\text{(71)} \quad \delta_n\frac{dx}{ds} = \frac{d\delta_n x}{ds} - \mathrm{L}_n\frac{dx}{ds}\mathrm{U} = \frac{d(\alpha\mathrm{U})}{ds} - \mathrm{L}_n\frac{dx}{ds}\mathrm{U} = \alpha\mathrm{U}' + \frac{d\alpha}{ds}\mathrm{U} - \mathrm{L}_n\frac{dx}{ds}\mathrm{U}.$$

Ensuite nous avons les relations :

$$\mathrm{S}\alpha\delta_n\alpha = 0, \qquad \mathrm{S}u\delta_n\alpha = \mathrm{U}_1$$

auxquelles il faut joindre la suivante :

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\delta_n\alpha = -\mathrm{U}',$$

que l'on établirait facilement en faisant varier l'égalité

$$\mathrm{S}\frac{dx}{ds}\alpha = 0.$$

On a donc le système :

$$\mathbf{S}\frac{dx}{ds}\delta_n\alpha = -U', \qquad \mathbf{S}u\delta_n\alpha = U_1, \qquad \mathbf{S}\alpha\delta_n\alpha = 0$$

d'où l'on déduit par conséquent :

$$\delta_n\alpha = -\frac{dx}{ds}U' + uU_1. \tag{72}$$

$$\delta_n\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\delta_n\alpha}{ds} - L_n\frac{d\alpha}{ds}U = -\frac{d^2x}{ds^2}U' - \frac{dx}{ds}U'' + \frac{du}{ds}U_1 + u\frac{dU_1}{ds} - L_n\frac{d\alpha}{ds}U. \tag{73}$$

Si alors dans l'expression :

$$\delta_n L_n = \mathbf{S}\left(\frac{d\alpha}{ds}\delta_n\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}\delta_n\frac{d\alpha}{ds}\right)$$

on remplace $\delta_n\frac{dx}{ds}$, $\delta_n\frac{d\alpha}{ds}$ par les valeurs calculées, on obtient :

$$\delta_n L_n = (N^2 - L_n^2)U - U'' + L_e U_1 \tag{74}$$

L_e étant la courbure géodésique. On calculerait de même $\delta_n N$.

[45] Nous avons obtenu le contour C_1 qui se déduit de C au moyen de la transformation infinitésimale : $T(1 + \varepsilon f, \varepsilon\varphi)$.

Nous aurons besoin, dans la suite, de connaître le contour, que nous appellerons $\mathcal{C}$, sur la surface S qui correspond à C' au moyen de la même transformation infinitésimale.

En d'autres termes C' étant déduit de C au moyen d'un déplacement δn normal à la surface, nous chercherons sur la surface S un contour correspondant point par point au contour C' tel qu'en deux points correspondants de C' et $\mathcal{C}$ les plans tangents à S_1 et S soient parallèles.

Soit $\mathcal{M}$ le point de $\mathcal{C}$ qui correspond au point M' de $\mathcal{C}'$. En $\mathcal{M}$ et M' les valeurs de $\alpha\ \beta\ \gamma$ doivent être les mêmes.

D'autre part le point $\mathcal{M}$ s'obtiendra, à partir du point M, au moyen de deux déplacements sur la surface S, déplacements que nous désignerons encore par δs et $\delta\xi$, le premier suivant la tangente, le second suivant la normale au contour C en M. Il en résulte qu'au point $\mathcal{M}$, α, par exemple, aura pour valeur :

$$\alpha + \delta_\xi\alpha + \delta_s\alpha = \alpha + \left(N\frac{dx}{ds} + L_n u\right)\delta\xi + \frac{d\alpha}{ds}\delta s$$

et nous avons vu, d'autre part, au numéro précédent que la valeur de α au point M' est égale à :

$$\alpha + \delta_n \alpha = \alpha - \frac{dx}{ds} U' + u U_1 .$$

En égalant, nous obtenons le système :

$$\left(N \frac{dx}{ds} + L_n u\right) \delta\xi + \frac{d\alpha}{ds} \delta s = - \frac{dx}{ds} U' + u U_1 ,$$
$$\left(N \frac{dy}{ds} + L_n v\right) \delta\xi + \frac{d\beta}{dz} \delta s = - \frac{dy}{ds} U' + v U_1 ,$$
$$\left(N \frac{dz}{ds} + L_n w\right) \delta\xi + \frac{d\gamma}{ds} \delta s = - \frac{dz}{ds} U' + w U_1 .$$

Ces trois équations en $\delta\xi$ et δs ne sont pas indépendantes et se réduisent à 2 seulement, comme on le voit en multipliant les deux membres de la première par α, ... et en ajoutant.

Le système précédent est équivalent au suivant

$$\begin{aligned} N \delta\xi + L_n \delta s &= - U', \\ L_n \delta\xi - N \delta s &= \quad U_1 \end{aligned}$$

ainsi qu'on le voit facilement. On aura donc, en résolvant :

$$(75) \qquad \begin{aligned} \delta s &= -(\quad L_n U' + N U_1) \cdot \frac{1}{L_n^2 + N^2} , \\ \delta\xi &= \quad (- N U' + L_n U_1) \cdot \frac{1}{L_n^2 + N^2} \end{aligned}$$

ce qui détermine complètement le contour $\mathcal{C}$.

RÉDUCTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'ÉQUATION (30) A LA RÉSOLUTION D'UNE CERTAINE ÉQUATION INTÉGRALE

[**46**] Nous avons obtenu au n° 43 les égalités suivantes :

$$(76) \qquad \begin{aligned} \delta n = U &= \varepsilon \mathsf{S} \alpha \int_0^s \left(f \frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds + \varepsilon r , \\ \frac{\partial \delta n}{\partial \xi} = U_1 &= - \varepsilon \mathsf{S} \left(N \frac{dx}{ds} + L_n u \right) \int_0^s \left(f \frac{dx}{ds} + \varphi u \right) ds + \left(p \frac{d\alpha}{ds} + q L_n \right) \varepsilon . \end{aligned}$$

Dans les 2^e membres de ces formules figurent les deux fonctions harmoniques (conjuguées l'une de l'autre) $f(\theta, \omega)$ et $\varphi(\theta, \omega)$ des paramètres qui définissent sur la surface minima un système orthogonal et isotherme. Nous avons vu que l'on obtient également un tel système de courbes en prenant comme paramètres les quantités :

$$z \quad \text{et} \quad z_0 = \int w ds.$$

Plus généralement on peut adopter comme paramètres d'un système orthogonal et isotherme sur la surface S les quantités :

$$\theta = ax + by + cz, \qquad \omega = ax_0 + by_0 + cz_0$$

a, b, c étant trois constantes quelconques.

Il en résulte que sur le contour C, f et φ ne dépendent que des coordonnées x, y, z et de u, v, w.

Supposons maintenant que les deux fonctions harmoniques f et φ, dépendent de toutes les valeurs prises sur le contour C par une fonction de s, $\rho(s)$ continue. La 1^re des relations (76) devient alors une équation fonctionnelle entre $U(s)$ et $\rho(s)$ dans laquelle figurent les trois constantes arbitraires $(\delta x)_{s=0}$, $(\delta y)_{s=0}$, $(\delta z)_{s=0}$.

Supposons que l'on sache résoudre cette équation fonctionnelle au moyen d'une méthode d'approximations successives et que l'on en déduise ainsi pour $\rho(s)$ une suite uniformément convergente :

$$\rho_0(s), \quad \rho_1(s), \quad \ldots, \quad \rho_i(s), \quad \ldots$$

$\rho_i(s)$ dépendant de toute la suite des valeurs par $U(s)$ sur le contour C, suite qui est supposée donnée. Si alors dans l'expression de U_1 (76) on remplace successivement $\rho(s)$ par les approximations $\rho_0(s), \ldots, \rho_i(s)$, on obtiendra pour la dérivée normale une suite uniformément convergente :

$$U_{10}, \quad U_{11}, \quad \ldots, \quad U_{1i}, \quad \ldots.$$

Dans ces conditions, le problème de Dirichlet pour l'équation :

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + 2\Gamma^2 \mu U = 0 \qquad \left(R(\theta\omega) = 2\Gamma^2 \mu(\theta\omega)\right)$$

pourra être considéré comme résolu.

Supposons maintenant que l'on puisse résoudre *formellement* la relation fonctionnelle qui existe entre $U(s)$ et $\rho(s)$ de façon à obtenir l'expression de $\rho(s)$ en tant que fonctionnelle (on peut faire dépendre f et φ de ρ de manière que cette fonctionnelle soit linéaire) de $U(s)$.

Si, alors on substitue dans l'expression de U_1 on obtiendra par identification le noyau $K(ss_1)$ qui figure dans la relation :

$$U_1 = -\text{v. p.} \int_C K(ss_1)[U(s_1) - \cos \omega U(s)]\, ds_1 .$$

[**47**] Quand on fait la substitution dont il est question plus haut, ε s'élimine. Nous pouvons donc sans inconvénient faire dans les formules $\varepsilon = 1$.

La façon la plus commode de faire dépendre les fonctions harmoniques f et φ d'une fonction $\rho(s)$ est de prendre pour f un potentiel de double couche :

$$f(\theta\omega) = \int_C \rho(s) \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, ds \tag{77}$$

en posant :

$$r = \sqrt{(a-\theta)^2 + (b-\omega)^2}$$

a et b étant les coordonnées curvilignes d'un point situé sur la surface S, à l'intérieur du contour C (S étant supposée parfaitement continue à l'intérieur de C).

Dans l'intégrale (77) on suppose que ce point (a, b) tende vers un point $M(\sigma)$ du contour C, pour lequel $s = \sigma$. Mais alors, on sait que l'intégrale (77) subit une discontinuité égale à $\pi\rho(\sigma)$.

$f(\theta, \omega)$ ayant la détermination précédente, on doit prendre pour $\varphi(\theta\omega)$

$$\varphi(\theta\omega) = \int_C \rho(s) \frac{d}{ds} \log \frac{1}{r}\, ds \tag{78}$$

et quand le point (a, b) tend vers le point $M(\sigma)$ l'intégrale (78) tend vers :

$$\text{v. p.} \int_C \rho(s) \frac{d}{ds} \log \frac{1}{r}\, ds$$

En résumé, nous pouvons dans les équations (76) prendre pour f et φ :

$$\begin{aligned} f &= \int_C \rho(s) \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, ds + \pi\rho(\sigma), \\ \varphi &= \text{v. p.} \int_C \rho(s) \frac{d}{ds} \log \frac{1}{r}\, ds. \end{aligned} \tag{79}$$

Cette dernière intégrale a un sens, car l'élément différentiel admet un pôle simple au point $s = \sigma$.

Dans ces conditions la 1^{re} des équations (76) devient, en y faisant $\varepsilon = 1$.

$$U(\sigma) = \mathbf{S}\alpha(\sigma)\left[\int_0^\sigma \frac{dx}{ds}\,d\sigma \int_C \rho(s)\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,ds + \int_0^\sigma u(\sigma)\,d\sigma \int \rho(s)\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r}\,ds\right]$$
$$+ \pi \mathbf{S}\alpha(\sigma)\int_0^\sigma \rho(\sigma)\frac{dx}{d\sigma}\,d\sigma + r(\sigma)$$

ou :

$$(80) \qquad U(\sigma) = \int_C H(s\sigma)\rho(s)\,ds + \pi\mathbf{S}\alpha(\sigma)\int_0^\sigma \rho(\sigma)\frac{dx}{d\sigma}\,d\sigma + r(\sigma)$$

en posant :

$$H(s\sigma) = \mathbf{S}\alpha(\sigma)\int_0^\sigma \left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial \xi} + u(\sigma)\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r}\right)ds.$$

Permutons s et σ, nous obtenons :

$$(80) \qquad U(s) = \int_C H(\sigma s)\rho(\sigma)\,d\sigma + \pi\mathbf{S}\alpha(s)\int_0^s \rho(s)\frac{dx}{ds}\,ds + r(s).$$

Quant à la 2^e équation (76) elle devient :

$$(81) \quad U_1(s) = \int_C \mathcal{H}(\sigma s)\rho(\sigma)\,d\sigma - \pi\mathbf{S}\left(N\frac{dx}{ds} + L_n u\right)\int_0^s \rho(s)\frac{dx}{ds}\,ds + p\frac{d\alpha}{ds} + qL_n$$

en posant :

$$\mathcal{H}(\sigma s) = -\mathbf{S}\left(N\frac{dx}{ds} + L_n u\right)\int_0^s\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial\xi} + u(s)\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r}\right)ds$$

Nous n'avons pas écrit le symbole v. p. dans les équations (80) et (81). Mais il est clair qu'il faut exclure du champ d'intégration relatif aux intégrales qui figurent dans les seconds membres de ces équations les points pour lesquels $|s-\sigma| < \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on veut, et à cette condition l'interversion des signes $\int$ est légitime.

En définitive, le problème de Dirichlet pour l'équation (30) est ainsi ramené à la résolution de l'équation intégrale (80). La principale difficulté que l'on rencontrerait, si on voulait entreprendre l'étude de cette équation, réside dans la singularité de la fonction :

$$\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r}.$$

De sorte que la réduction du problème de Dirichlet à la résolution de l'équation (80) présenterait un intérêt plutôt théorique.

SOLUTIONS INFINIMENT VOISINES

[**48**] La possibilité d'obtenir la solution correspondant à des contours infiniment voisins d'un contour donné dépend de la solution préalable du problème de Dirichlet pour l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + 2\Gamma^2 \mu U^2 = 0 \qquad \left(R(\theta\omega) = 2\Gamma^2 \mu(\theta\omega)\right) \tag{30}$$

nous supposons donc que l'on s'est donné sur le contour C une suite continue de valeurs

$$\delta n = U(s)$$

et qu'en utilisant l'équation intégrale (80), ou par tout autre moyen, on soit parvenu à déterminer la dérivée normale

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

qui correspond à ces données.

Considérons alors une déformation infiniment petite du contour C qui *s'effectuerait sur la surface minima*. Cette déformation sera complètement déterminée si l'on se donne, en fonction de s, le déplacement $\delta\xi$ d'un point quelconque de C.

Cherchons, dans ce cas, la variation qui en résulte pour la dérivée normale U_1. Nous nous contenterons d'indiquer le résultat du calcul, mais nous en donnerons ensuite deux vérifications par des voies différentes. On trouve :

$$\delta_\xi U_1 = -U' \frac{d\delta\xi}{ds} + (L_c U_1 - 2\Gamma^2 U - U'')\delta\xi = -\frac{d}{ds}(U'\delta\xi) + (L_c U_1 - 2\Gamma^2 U)\delta\xi. \tag{82}$$

Vérifions ce résultat. Dans la 1re partie, au n° 22, nous avons considéré la fonctionnelle :

$$\Phi = -\int_C U_1 U \, ds \tag{82'}$$

et nous avons calculé sa variation $\delta_\xi \Phi$, ce qui nous a conduit d'abord à la détermination de la fonction $R(\theta\omega)$, qui figure dans l'équation (30)

$$R(\theta\omega) = 2\Gamma^2 \mu(\theta\omega)$$

et en second lieu à l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait la fonctionnelle Φ,

(30''') $$\Phi'_\xi = \frac{1}{4}\Phi'^2_U - U'^2 + 2\Gamma^2 U^2,$$

Mais nous aurions pu calculer autrement $\partial_\xi \Phi$ si nous avions alors connu l'expression de $\partial_\xi U_1$. On a en effet :

$$\partial_\xi \Phi = -\int_C \left(U\,\partial_\xi U_1 + U_1\,\partial U + U_1 U \frac{\partial_\xi ds}{ds} \right) ds$$

$$= -\int_C (U\,\partial_\xi U_1 + U_1\,\partial U - U_1 U L_c\,\partial\xi)\, ds$$

où l'on doit remplacer $\partial_\xi U$ par $U_1\partial\xi$ et $\partial_\xi U_1$ par sa valeur trouvée plus haut. Il en résulte alors pour $\partial_\xi \Phi$

$$\partial_\xi \Phi = -\int_C \left[-U\frac{d}{ds}(U'\partial\xi) - 2\Gamma^2 U^2\partial\xi + U_1^2\partial\xi \right] ds$$

ou, en intégrant par parties le 1er terme sous le signe $\int$:

$$\partial_\xi \Phi = -\int_C (U'^2 + U_1^2 - 2\Gamma^2 U^2)\,\partial\xi\, ds$$

ce qui est précisément le résultat trouvé au n° 22.

D'autre part, si dans la relation (82) nous remplaçons U_1 par sa valeur (82') : $U_1 = -\frac{1}{2}\Phi'_U$, nous obtenons :

(83) $$\partial_\xi \Phi'_U = 2\frac{d}{ds}(U'\partial\xi) + L_c \Phi'_U\,\partial\xi + 4\Gamma^2 U\,\partial\xi$$

relation qui, jointe aux formules (82') et (82''), définit les multiplicités caractéristiques de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (30'''). On retrouve d'autre part ces mêmes équations lorsqu'on cherche directement les équations de ces caractéristiques [1]. Ce qui constitue une 2e vérification.

[**49**] Ayant ainsi obtenu une première expression de $\partial_\xi U_1$, on peut en chercher une seconde en faisant varier infiniment peu les deux membres de l'égalité [2].

$$U_1 = -\int K(ss_1)[U(s_1) - \cos\omega\, U(s)]\, ds_1 .$$

---

(1) Pour la recherche des caractéristiques, voir Paul Lévy, *Leçons d'analyses fonctionnelles*, 2e partie, chapitres IV et V.

(2) Dans ce qui suivra nous omettrons d'écrire le symbole v. p. devant le signe $\int$ pour ne pas surcharger les écritures.

La déformation du contour se faisant dans les mêmes conditions que précédemment, on trouve ainsi :

$$
(84)\qquad
\begin{aligned}
-\delta_\xi U_1 = {} & \int_C \delta_\xi K[U(s_1) - \cos\omega\, U(s)]\, ds_1 \\
& + \int_C K[\delta_\xi U(s_1) - \cos\omega\, \delta_\xi U(s) - U(s)\, \delta_\xi \cos\omega]\, ds_1 \\
& - \int_C K[U(s_1) - \cos\omega\, U(s)]\, L_{c_1} \delta\xi_1\, ds_1 .
\end{aligned}
$$

En désignant respectivement par L_{c_1} et $\delta\xi_1$ les valeurs de L_c et $\delta\xi$ au point $s = s_1$ et l'on doit dans le second membre remplacer $\delta_\xi U(s_1)$ par $U_1(s_1)\,\delta\xi_1$ et $\delta_\xi U(s)$ par $U_1(s)\delta\xi$. D'autre part, il est inutile, pour notre objet, de former explicitement :

$$\delta_\xi \cos\omega = \delta_\xi S \alpha\alpha_1 .$$

Il suffit de remarquer que c'est une expression de la forme :

$$A\delta\xi_1 + B\delta\xi$$

A et B étant des fonctions de s et de s_1 faciles à calculer.

On obtient, dans ces conditions, en égalant les valeurs que nous venons de trouver pour $\delta_\xi U_1$ (82) et (84) :

$$
(85)\qquad
\begin{aligned}
& \int_C \delta_\xi K[U(s_1) - \cos\omega\, U(s)]\, ds_1 \\
= {} & -\int_C K[U_1(s_1)\,\delta\xi_1 - \cos\omega\, U_1(s)\,\delta\xi - U(s)\, A\delta\xi_1 - U(s)\, B\delta\xi]\, ds_1 \\
& + \int_C K[U(s_1) - \cos\omega\, U(s)]\, L_{c_1} \delta\xi_1\, ds_1 + \frac{d}{ds}(U'\delta\xi) - (L_c U_1 - 2\Gamma^2 U)\,\delta\xi .
\end{aligned}
$$

Nous avons là une relation importante et que nous utiliserons dans la suite(¹).

La détermination de la fonction $K(ss_1)$ correspondant à un groupe fermé C tracé sur la surface minima est un problème plus difficile que le problème de Dirichlet, car elle suppose que l'on ait obtenu l'expression générale de la dérivée normale en tant que fonctionnelle linéaire de $U(s)$.

Mais il faut remarquer que si K est connue, la relation précédente (85) doit pouvoir définir la valeur de $\delta_\xi K$, fonctionnelle linéaire de $\delta\xi$.

En effet, cette relation a lieu quelle que soit la forme de la fonction $U(s)$, c'est-à-dire que $U(s)$ y figure comme fonction arbitraire.

(¹) Pour tirer quelque parti d'une telle relation il ne faut pas oublier de séparer nettement dans $K(ss_1)$ et $\delta_\xi K$, la partie holomorphe et le terme infini.

Ainsi $\delta_\xi K$ est impliquée dans une relation renfermant une fonction arbitraire $U(s)$ (K et $\delta_\xi K$ étant indépendantes de $U(s)$). On peut donc envisager, au moins théoriquement, la détermination de cette fonctionnelle $\delta_\xi K$ et par suite, de proche en proche, celle de toutes ses variations successives :

$$\delta_\xi^2 K, \qquad \delta_\xi^3 K, \qquad \ldots, \qquad \delta_\xi^l K.$$

Quant à la possibilité de déterminer effectivement $K(ss_1)$ ainsi que ses variations successives, elle pose, pour une surface minima, c'est-à-dire pour l'équation (30) un problème analogue à celui qu'a traité M. Paul Lévy pour la fonction de Green relative à l'équation de Laplace.

[**50**] Soit une surface minima S, parfaitement continue à l'intérieur du contour C qui la limite. Appliquons-lui la transformation $T(AB)$. Nous en déduirons une surface minima S_1 limitée par un contour C_1 et l'on peut toujours supposer, si les fonctions harmoniques A et B sont continues, que S_1 est aussi parfaitement continue à l'intérieur de la courbe C_1.

Entre S et S_1 nous établissons ainsi une correspondance ponctuelle biunivoque jouissant des propriétés suivantes :

1° Deux points correspondants sur les deux surfaces : M sur S et M_1 sur S_1, sont déterminés par un même couple de valeurs attribuées aux paramètres θ et ω qui définissent sur chacune des surfaces un réseau orthogonal et isotherme.

2° Aux points M et M_1 les plans tangents sont parallèles; en ces deux points α, β, γ prennent les mêmes valeurs.

3° Soient ds et ds_1 deux éléments linéaires correspondants, issus de M et de M_1 respectivement. Le rapport $\dfrac{ds_1}{ds}$ est constant et ne dépend que de la position du point M. On a :

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

4° De même l'angle que font entre eux ds et ds_1 est une fonction de θ et ω, et a une valeur bien déterminée en chaque point de la surface.

Cela étant, on peut établir le résultat suivant :

Soit une fonction (que nous supposerons continue)

$$\delta n = U(s)$$

donnée sur le contour C et soit $U_1(s)$ la dérivée normale correspondante en chaque point de C, que l'on obtient en résolvant le problème de Dirichlet pour l'équation (30)

$$U_1 = -\int_C K(s\sigma)[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\, d\sigma$$

(le symbole v. p. étant sous-entendu). Si on cherche à résoudre le même problème sur la surface S_1, avec les mêmes données sur le contour C_1, c'est-à-dire en prenant

$$\delta n_1 = V(s_1) = U(s)$$

on aura :

$$V_1 = -\int_{C_1} K_1(s_1\sigma_1)[V_1(\sigma_1) - V(s_1)\cos\omega]\, d\sigma_1,$$

$\cos\omega$ étant le même aussi bien sur C que sur C_1.

Posons, d'une façon générale :

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\delta\xi}{\delta\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\tau(s)}.$$

je dis que l'on aura aux points correspondants M sur C et M_1 sur C_1

$$\frac{V_1(s_1)}{U_1(s)} = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\tau(s)}.$$

La chose est presque évidente. En effet, en deux points correspondants quelconques M et M_1, les fonctions $U(\theta\omega)$ et $V(\theta\omega)$ (solutions du problème de Dirichlet correspondant à la donnée de $U(s)$ sur C ou de $V(s_1)$ sur C_1) prennent la même valeur. Ces deux fonctions sont identiques. Si on considère alors sur S un point M′ voisin de M et son homologue M'_1 sur S_1, on aura :

$$U_{M'} - U_M = V_{M'_1} - V_{M_1} = U_{M'_1} - U_{M_1}.$$

D'autre part, on peut choisir M′ suffisamment voisin de M et par suite M'_1 suffisamment voisin de M_1 pour que le rapport :

$$\frac{\overline{M_1M'_1}}{\overline{MM'}}$$

diffère de $\tau(\theta\omega)$ de moins de ε, ε étant aussi petit que l'on veut et l'on a :

$$\frac{U_{M'_1} - U_{M_1}}{\overline{M_1M'_1}} = \frac{U_{M'} - U_M}{\overline{MM'}} \cdot \frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'_1}}.$$

Si par exemple le point M est sur le contour C et que $\overline{MM'}$ soit un élément dirigé sur la normale intérieure à C, M_1 sera situé sur C_1 et $\overline{M_1M'_1}$ sera de même dirigé suivant la normale intérieure à C_1 en vertu des propriétés de la correspondance T(AB) rappelées plus haut. Dans ces conditions, si $\overline{MM'}$ tend vers o, les quantités :

$$\frac{U_{M'_1} - U_{M_1}}{\overline{M'_1M_1}}, \qquad \frac{U_{M'} - U_M}{\overline{MM'}}, \qquad \frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'_1}}$$

tendent respectivement vers :

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} = V_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} = U_1, \qquad \frac{1}{\tau(s)}$$

et l'on aura à la limite :

$$V_1 = \frac{U_1}{\tau(s)}. \tag{86}$$

La propriété énoncée plus haut est donc établie.

Il en résulte :

$$V_1 = \frac{U_1}{\tau(s)} = -\int_{C_1} K_1(s_1\sigma_1)[V(\sigma_1) - V(s_1)\cos\omega]\,d\sigma_1$$
$$= -\int_{C_1} K_1[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\,\tau(\sigma)\,d\sigma$$

ou

$$U_1 = -\int K_1[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\,\tau(s)\,\tau(\sigma)\,d\sigma$$
$$= -\int K[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\,d\sigma.$$

Cette égalité ayant lieu quelle que soit la fonction $U(s)$, on en conclut :

$$K_1(s_1\sigma_1) = \frac{K(s\sigma)}{\tau(s)\,\tau(\sigma)}. \tag{87}$$

[**51**] Si l'on suppose que la surface S_1 soit infiniment voisine de S, déduite de S au moyen de la transformation infinitésimale :

$$T(1 + \varepsilon f, \ \varepsilon\varphi)$$

on aura :

$$\tau(s) = \sqrt{(1 + \varepsilon f)^2 + \varepsilon^2\varphi^2} = 1 + \varepsilon f$$

en négligeant les termes du 2ᵉ ordre. On en déduit :

$$K_1 = K + \delta K = \frac{K(s\sigma)}{(1+\varepsilon f_s)(1+\varepsilon f_\sigma)} = \frac{K(s\sigma)}{1+\varepsilon(f_s+f_\sigma)} = K(s\sigma)[1-\varepsilon(f_s+f_\sigma)]$$

d'où

$$\delta K = -\varepsilon K(s\sigma)(f_s+f_\sigma).$$

Considérons maintenant le contour C', obtenu au moyen d'un déplacement

$$\delta n = U(s)$$

normal à la surface minima.

Rappelons que d'après les résultats obtenus au n° 45 la transformation

$$T(1+\varepsilon f,\ \varepsilon\varphi)$$

fait correspondre à C' un contour $\mathcal{C}$ situé sur la surface minima, infiniment voisin de C et défini par les fonctions :

$$(75)\qquad \begin{aligned} \delta s &= -\frac{L_n U' + N U_1}{L_n^2 + N^2} = -\frac{L_n U' + N U_1}{\Gamma^2},\\ \delta\xi &= -\frac{N U' - L_n U_1}{L_n^2 + N^2} = -\frac{N U' - L_n U_1}{\Gamma^2} \end{aligned}$$

qui mesurent le déplacement d'un point M du contour C quand celui-ci se déforme à partir de sa position actuelle pour coïncider avec $\mathcal{C}$.

L'élément ds a pour valeur sur C' :

$$ds + \delta_n ds = (1 + L_n U)\, ds$$

et sur $\mathcal{C}$:

$$ds + \delta_\xi ds + \delta_s\delta_\xi ds = \left[1 - \left(L_c + \frac{dL_c}{ds}\delta s\right)\delta\xi\right] ds = (1 - L_c\delta\xi)\, ds$$

en négligeant toujours les infiniment petits du 2ᵉ ordre. On en conclut la valeur du rapport :

$$\tau(s) = \frac{1 + L_n U}{1 - L_c\delta\xi} = 1 + L_n U + L_c\delta\xi$$

en n'oubliant pas que $\delta\xi$ est donné par sa valeur (75).

Posons pour abréger

$$\zeta(s) = L_n U + L_c\delta\xi.$$

On aura en désignant par K' la fonction $K(s\sigma)$ qui correspond au contour C' et par $\mathcal{K}$ celle qui correspond à son homologue $\mathcal{C}$.

$$K'(s\sigma) = \frac{\mathcal{K}(s\sigma)}{[1+\zeta(s)][1+\zeta(\sigma)]} = \mathcal{K}(s\sigma)[1-\zeta(s)-\zeta(\sigma)].$$

Or on a d'autre part :

$$K' = K + \delta_n K,$$

$$\mathcal{K}(s\sigma) = K + \frac{\partial K}{\partial s}\delta s + \frac{\partial K}{\partial \sigma}\delta\sigma + \delta_\xi K.$$

On déduit de là :

$$(88) \qquad \delta_n K = -K[\zeta(s)+\zeta(\sigma)] + \frac{\partial K}{\partial s}\delta s + \frac{\partial K}{\partial \sigma}\delta\sigma + \delta_\xi K$$

δs et $\delta\xi$ ayant les valeurs (75).

Cette équation (88) permettrait de calculer les variations successives de K

$$\delta_n K, \quad \delta_n^2 K, \quad \ldots, \quad \delta_n^i K$$

si on connaissait les valeurs de K sur le contour ainsi que les variations successives :

$$\delta_\xi K, \quad \delta_\xi^2 K, \quad \ldots, \quad \delta_\xi^i K.$$

[**52**] On peut remarquer que pour former $\delta_n U_1$, il n'est nullement nécessaire d'avoir déterminé $\delta_\xi K$, la connaissance de K suffit. On a, en effet :

$$U_1 = -\int_C K[U(\sigma) - \cos\omega\, U(s)]\, d\sigma$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta_n U_1 = & -\int_C \delta_n K[U(\sigma) - \cos\omega\, U(s)]\, d\sigma \\ & -\int_C K[\delta_n U(\sigma) - \cos\omega\, \delta_n U(s) - U(s)\delta_n \cos\omega]\, d\sigma \\ & -\int_C K[U(\sigma) - \cos\omega\, U(s)]\, L_{n\sigma} U(\sigma)\, d\sigma \end{aligned}$$

ou en remplaçant $\delta_n K$ par sa valeur calculée plus haut[1] :

$$
(89)\quad
\begin{aligned}
\delta_n U_1 = &-\int_C \delta_\xi K[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\, d\sigma \\
&+ \int_C \left\{ K[\zeta(s) + \zeta(\sigma)] - \frac{\partial K}{\partial s}\delta s - \frac{\partial K}{\partial \sigma}\delta\sigma \right\} [U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\, d\sigma \\
&- \int_C K[\delta_n U(\sigma) - \cos\omega\, \delta_n U(s) - U(s)\delta_n \cos\omega]\, d\sigma \\
&- \int_C K[U(\sigma) - \cos\omega U(s)]\, L_{n\sigma} U(\sigma)\, d\sigma .
\end{aligned}
$$

Or la première intégrale qui figure au 2ᵉ membre, nous connaissons son expression (85) obtenue au nº 49.

Elle dépend de K, U, U_{n}', δs, $\delta\xi$. Il n'y aurait qu'à remplacer cette première intégrale par sa valeur (85) et on obtiendrait ainsi pour $\delta_n U_1$ une expression qui ne dépend pas de $\delta_\xi K$.

Dans le 2ᵉ membre de la relation (89) $\delta_n U(\sigma)$, $\delta_n U(s)$ sont des données du problème. Quant à $\delta_n \cos\omega$ il serait facile de calculer sa valeur en fonction de U, $\dot{U}'$, U_1. Enfin rappelons encore qu'il faudra remplacer δs et $\delta\xi$ par leur valeur (75).

En définitive, l'expression de $\delta_n U_1$ en tant que fonctionnelle linéaire de $\delta_n U(s)$ est connue en même temps que le noyau $K(s\sigma)$.

Il n'en est pas de même si l'on veut déterminer la variation seconde $\delta^2_n U_1$ et, *a fortiori*, les variations successives :

$$\delta^3_n U_1, \quad \ldots, \quad \delta^i_n U_1 .$$

En faisant le calcul de ces variations, on introduira les variations $\delta^p_\xi K$ jusqu'à l'ordre $i-1$.

En résumé :

Si l'on a pu déterminer sur une surface minima S parfaitement continue et à partir du contour C qui la limite, la suite :

$$K, \quad \delta_\xi K, \quad \delta^2_\xi K, \quad \ldots, \quad \delta^{i-1}_\xi K$$

---

[1] Il y a lieu de remarquer que si l'on admet que $K(s)$ est de la forme $\frac{H}{(s-\sigma)^2}$ + fonc. holomorphe les quantités $\frac{\partial K}{\partial s}\delta s$, $\frac{\partial K}{\partial \sigma}\delta\sigma$ auront chacune un pôle triple au point $s = \sigma$ mais qu'en ce point la somme $\frac{\partial K}{\partial s}\delta s + \frac{\partial K}{\partial \sigma}\delta\sigma$ s'annule.

on pourra en déduire par des opérations de différentiations successives, les variations :

$$\delta_u \mathrm{K}, \quad \delta_u^2 \mathrm{K}, \quad \ldots, \quad \delta_u^i \mathrm{K}$$

et par conséquent la suite :

$$\delta_u \mathrm{U}_1, \quad \delta_u^2 \mathrm{U}_1, \quad \ldots, \quad \delta_u^{i+1} \mathrm{U}_1$$

D'où résultera l'existence et même la possibilité de déterminer les solutions infiniment voisines d'une solution donnée.

LE PROBLÈME DE PLATEAU

[**53**] Supposons qu'on se donne un contour fermé C et qu'on se propose de trouver la surface minima S, parfaitement continue, qui passe par C (problème de Plateau).

Voici comment nous pourrions envisager la solution d'un tel problème.

Prenons pour surface minima initiale, l'hélicoïde gauche à plan directeur. C'est une surface particulièrement commode pour l'object que nous avons en vue.

Soit donc la surface définie par les équations :

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega, \qquad z = h\omega$$

h étant une constante. Si h tend vers o, l'hélicoïde tend vers un plan (le plan de xy) sans jamais cesser d'être une surface minima. Il en résulte d'après ce que nous avons vu au n° 6, que z considéré comme fonction de x et y est une fonction harmonique. On sait d'ailleurs que c'est la seule surface minima qui jouisse de cette propriété. De plus, la singularité d'une telle surface est bien connue, c'est une ligne singulière : l'axe des z.

En posant

$$\rho + \sqrt{\rho^2 + h^2} = e^\theta$$

nous aurons l'élément linéaire de l'hélicoïde sous la forme :

$$ds^2 = \left(\frac{e^\theta + h^2 e^{-\theta}}{2}\right)(d\theta^2 + d\omega^2).$$

θ et ω sont donc les paramètres d'un réseau orthogonal et isotherme (les hélices d'une part, les génératrices rectilignes de l'autre).

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs d'un point de la surface, on aura par exemple :

$$\gamma = \frac{e^{2\theta} - h^2}{e^{2\theta} + h^2}$$

et par suite :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = -\frac{8h^2 e^{2\theta}}{(e^{2\theta} + h^2)^2} = -\mathrm{R}(\theta\omega).$$

Il en résulte qu'avec ce choix de variables, l'équation (30) devient :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\omega^2} + \frac{8h^2 e^{2\theta}}{(e^{2\theta} + h^2)^2}\mathrm{U} = 0. \tag{90}$$

Considérons maintenant le cylindre, que nous désignerons par D, qui projette lo courbe donnée C sur le plan xoy. Il coupe l'hélicoïde suivant une suite de courbes fermées. Nous prendrons l'une d'elles $\mathcal{C}$, celle par exemple qui est la plus voisine du plan xoy. Nous pouvons toujours supposer que h a été pris assez petit et que l'axe oz soit extérieur à l'aire limitée sur l'hélicoïde par le contour $\mathcal{C}$.

Nous pouvons alors concevoir une suite continue de contours fermés situés sur le cylindre D et dépendant d'un paramètre variable λ :

$$z = f(s\lambda)$$

(s étant l'abscisse curviligne sur le contour $\mathcal{C}$) telle que pour $\lambda = 0$ on ait le contour $\mathcal{C}$ et pour $\lambda = 1$ le contour donné C.

Faisons alors varier λ à partir de sa valeur initiale 0 :

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial \lambda}\delta\lambda.$$

On aura ainsi obtenu un contour $\mathcal{C}'$, sur le cylindre D, infiniment voisin de $\mathcal{C}$. Soient respectivement δs, $\delta\xi$, δn, les projections de δz sur les vecteurs :

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right); \qquad (-u, -v, -w); \qquad (\alpha, \beta, \gamma)$$

en un point $\mathcal{M}$ du contour $\mathcal{C}$. On aura :

$$\begin{aligned} \delta s &= \frac{dz}{ds}\delta z = \frac{dz}{ds}\cdot\frac{\partial f}{\partial\lambda}\delta\lambda, \\ \delta\xi &= -w\delta z = -w\frac{\partial f}{\partial\lambda}\delta\lambda, \\ \delta n &= \gamma\delta z = \gamma\frac{\partial f}{\partial\lambda}\delta\lambda. \end{aligned} \tag{91}$$

Quand on passe du contour $\mathcal{C}$ au contour infiniment voisin $\mathcal{C}'$, la fonctionnelle K subit une variation que nous désignerons par $\delta_\zeta \mathrm{K}$ et l'on aura(¹) :

$$\delta_\zeta \mathrm{K} = \delta_n \mathrm{K} + \delta_\xi \mathrm{K} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial s}\delta s + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \sigma}\delta\sigma .$$

Supposons qu'on ait pu déterminer sur l'hélicoïde la fonction $\mathrm{K}(s\sigma)$ qui correspond au contour $\mathcal{C}$ ainsi que ses variations successives $\delta^i_\xi \mathrm{K}$ (fonctionnelles entières et homogènes de $\delta\xi$) correspondant à la déformation continue de $\mathcal{C}$ sur l'hélicoïde. On en déduira $\delta_n \mathrm{K}$ comme nous l'avons vu au nº 52 puisque la quantité

$$\delta n = \mathrm{U}(s) = \gamma \frac{\partial f}{\partial \lambda}\delta\lambda$$

est maintenant donnée en fonction de s sur le contour (λ et $\delta\lambda$ étant alors considérées comme des constantes).

Il en résulte que l'on saura alors déduire des calculs que nous avons faits aux nºˢ 51 et 52 la variation $\delta_\zeta \mathrm{K}$ et, de proche en proche, les variations successives $\delta^i_\zeta \mathrm{K}$. En effet si l'on a calculé $\delta^p_\zeta \mathrm{K}$ on en déduira :

$$\delta^{p+1} s, \qquad \delta^{p+1} \xi, \qquad \delta^{p+1} n$$

car la connaissance de $\delta^p_\zeta \mathrm{K}$ implique celle de

$$\delta^p_\zeta \frac{dz}{ds}, \qquad \delta^p_\zeta w, \qquad \delta^p_\zeta \gamma$$

et permet d'obtenir :

$$\delta^{p+1}_\zeta \frac{dz}{ds}, \qquad \delta^{p+1}_\zeta w, \qquad \delta^{p+1}_\zeta \gamma .$$

La détermination des variations $\delta^i_\zeta \mathrm{K}$ donnera immédiatement les dérivees successives :

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \lambda}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^i \mathrm{K}}{\partial \lambda^i} .$$

En définitive, on obtiendra ainsi pour U_1 donc pour u, v, w, donc pour la fonctionnelle Σ un développement en série suivant les puissances croissantes de λ.

Évidemment, il ne peut pas être question ici d'établir les conditions de conver-

---

(¹) δs et $\delta\sigma$ ayant alors les valeurs (91) qu'il ne faut pas confondre avec les valeurs (75).

gence de ce développement. Il nous suffira d'avoir indiqué la possibilité de la former par un processus opératoire qui ne comporte que des différentiations successives.

Si le domaine de convergence de cette série s'étend jusqu'au contour C, on arrivera en C avec des valeurs bien déterminées pour u, v, w. C'est-à-dire qu'on aura déterminé alors, la suite des plans tangents le long du contour C, ce qui résout le problème.

CONCLUSION

[54] Nous nous étions posé le problème de déterminer la fonctionnelle Σ pour un contour C par les conditions habituelles de continuité qu'impose l'énoncé du problème de Plateau.

Nous avons cherché à traduire ces conditions de continuité par des conditions d'homogénéité relative à la fonctionnelle Σ et à ses dérivées et nous avons reconnu que les équations ainsi obtenues ne sont pas susceptibles de conduire à la solution. Elles fournissaient néanmoins certains résultats intéressants que nous avons utilisés.

En dernier lieu nous avons été conduits à ce résultat qu'il est possible d'obtenir la solution du problème de Plateau au moyen d'un développement en série si l'on suppose préalablement la formation des variations successives $\delta^i_\xi K$ pour un contour fermé quelconque situé sur une surface minima particulière (nous avons choisi l'hélicoïde), le contour se déformant continument sur cette surface.

C'est donc, en définitive, la question qui reste à résoudre. Elle dépend de l'étude approfondie de l'équation (30).

Nous avons déjà obtenu une forme explicite de cette équation au numéro précédent, mais ce n'est pas celle que l'on considère habituellement.

Prenons comme surface minima particulière la surface minima d'Enneper[1] :

$$
\begin{aligned}
x &= 3\theta + 3\theta\omega^2 - \theta^3, \\
y &= 3\omega + 3\omega\theta^2 - \omega^3, \\
z &= 3\theta^2 - 3\omega^2.
\end{aligned}
$$

Calculons les cosinus directeurs de la normale au moyen des relations :

$$
\mathrm{S}\,\alpha \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \qquad \mathrm{S}\,\alpha \frac{\partial x}{\partial \omega} = 0, \qquad \mathrm{S}\,\alpha^2 = 1.
$$

---

(1) DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1re partie, page 317.

On trouve :

$$\alpha = \frac{2\theta}{1+\theta^2+\omega^2}, \qquad \beta = \frac{2\omega}{1+\theta^2+\omega^2}, \qquad \gamma = \frac{\theta^2+\omega^2-1}{1+\theta^2+\omega^2}.$$

On vérifie alors que θ et ω sont les paramètres d'un réseau orthogonal et isotherme tracé sur la surface et que l'on a :

$$R(\theta\omega) = -\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = -\frac{\Delta\beta}{\beta} = -\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = -S\alpha\Delta\alpha = \frac{8}{(1+\theta^2+\omega^2)^2}.$$

De sorte que l'équation (30) prend la forme :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \frac{8U}{(1+\theta^2+\omega^2)^2} = 0 \tag{92}$$

qui a été donnée par Schwarz dans son mémoire sur les variations infiniment petites des surfaces minima.

Cette équation, comme nous le savons, reste invariante lorsqu'on applique à la surface minima (qui est ici la surface d'Enneper) la transformation $T(A, B)$. Elle est donc valable pour une surface minima quelconque, mais elle implique un choix particulier du système orthogonal et isotherme auquel est rapportée la surface.

Comme nous l'avons déjà dit, le problème de la détermination de $K(s\sigma)$ et de ses variations successives est tout à fait analogue à celui qu'a traité M. Paul Lévy (1) à propos de la fonction de Green relative à l'équation de Laplace.

M. Paul Lévy part de l'équation aux dérivées fonctionnelles, donnée par M. Hadamard, à laquelle satisfait la fonction de Green, et cherche à déterminer celle-ci au moyen des conditions d'homogénéité jointes aux propriétés élémentaires de cette fonction : la nature de sa singularité, etc...

Il semble donc qu'en suivant la voie tracée par M. Paul Lévy et en faisant pour la fonction de Green de l'équation (92) une étude parallèle à celle qu'il a faite pour la fonction de Green relative à l'équation de Laplace, on puisse être conduit à des résultats intéressants en ce qui concerne le problème de la détermination de la fonction $K(s\sigma)$ et de ses variations successives $\delta_z K$, $\delta_z^2 K$...

Il semble, aussi, si l'on veut être conduit à une détermination de la solution au moyen des conditions d'homogénéité, qu'il soit nécessaire de faire intervenir une fonctionnelle qui, comme la fonction de Green dépende non seulement du contour, mais encore d'un point intérieur, et de ne pas se borner, comme nous l'avons fait, au point de vue de Jacobi-Hamilton.

C'est en effet la possibilité de faire varier ce point intérieur qui permet aux conditions d'homogénéité d'être *équivalentes* aux conditions habituelles de continuité qu'impose la nature du problème.

---

(1) Paul Lévy. Ouvrages et mémoires cités dans les notes, pages 4 et 6.