R. TAMBS LYCHE

Études sur l'équation fonctionnelle d'Abel dans le cas des fonctions réelles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1927

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1927__79__1_0>

N° d'ordre
36

Série U

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(MENTION : SCIENCES)

PAR

M. R. TAMBS LYCHE
chargé de cours
à l'école polytechnique de la Norvège

1re THÈSE. — ÉTUDES SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE D'ABEL DANS LE CAS DES FONCTIONS RÉELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 30 mars 1927 devant la Commission d'Examen

MM. M. FRÉCHET, Président
G. VALIRON, } Examinateurs.
P. FLAMANT, }

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen	P. MULLER, Professeur de chimie générale et de chimie physique.	
Doyen honoraire	E. BATAILLON.	
	MM.	
Professeurs	G. VALIRON.	Calcul différentiel et intégral,
	H. VILLAT.	Mécanique,
	M. FRÉCHET.	Analyse supérieure,
	E. ESCLANGON.	Astronomie,
	P. WEISS.	Physique générale,
	H. OLLIVIER.	Physique générale,
	E. ROTHE	Physique du Globe,
	L. HACKSPILL...	Chimie minérale,
	H. GAULT	Chimie organique,
	E. TOPSENT.	Zoologie et Anatomie comparée,
	C. HOUARD.	Botanique,
	E. TERROINE	Physiologie générale,
	J. DE LAPPARENT	Pétrographie,
	E. CHAPUT.	Géologie et Paléontologie,
	E. CHATTON	Biologie générale,
	R. THIRY	Mathématiques générales,
	E. BAUER	Physique mathématique,
	E. CORNEC.	Chimie appliquée,
	H. LABROUSTE...	Physique du Globe,
	G. RIBAUD...	Physique générale,
	F. VLES.	Physique biologique.
Chargés de cours et Maîtres de conférences.	G. FRIEDEL.	Minéralogie,
	L. BOUNOURE	Zoologie,
	G. FOEX.	Physique générale,
	G. REMPP	Physique du Globe,
	R. ROMANN.	Chimie appliquée,
	J. LAGARDE.	Botanique,
	CH. STAEHLING...	Chimie appliquée,
	FLAMANT.	Mathématiques,
	DE BEAUCHAMP.	Biologie générale,
	LACOSTE.	Physique du Globe,
	HUGEL	Chimie du Pétrole,
	H. WEISS	Physico-Chimie du Pétrole,
	MILLOUX.	Mathématiques.
	CHERMEZON.	Botanique.
Secrétaire.	E. BONTEMS.	

A

Monsieur G. VALIRON

en témoignage de ma vive reconnaissance pour l'inlassable bienveillance qu'il m'a bien voulu montrer.

ÉTUDES SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE D'ABEL DANS LE CAS DES FONCTIONS RÉELLES.

Par **R. Tambs Lyche** (Trondhjem, Norvège).

Estratto del tomo LI (1927) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*
Adunanza del 9 gennaio 1927.

Introduction.

1. *Remarques préliminaires.* — L'équation fonctionnelle d'ABEL [1]) a la forme

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c, \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée, c une constante et $\varphi(x)$ la fonction cherchée. ABEL montre qu'étant connue une solution de l'équation aux différences finies

$$\psi(z + 1) = f(\psi(z)) \tag{2}$$

on trouve la solution générale de l'équation (1) en posant $x = \psi(z)$; en effet, l'équation (1) se réduira à la forme

$$\Phi(z + 1) = \Phi(z) + c$$

avec $\Phi(z) = \varphi[\psi(z)]$. Comme exemple il traite le cas où $f(x) = x^n$ et donne la solution

$$\varphi(x) = c \cdot \frac{\log\log x}{\log n} + \Omega\left(\frac{\log\log x}{\log n}\right)$$

en désignant par $\Omega(x)$ une fonction quelconque admettant la période 1.

De plus le mémoire d'ABEL contient la remarque qu'on peut réduire à la même forme l'équation beaucoup plus générale

$$\varphi(f(x)) = F(\varphi(x))$$

[1]) N. H. ABEL, *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable* [Oeuvres complètes, édition de L. SYLOW et S. LIE, Christiania et Leipzig 1881; t. 2, p. 36-39].

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions données. C'est ce dernier fait qui donne à l'étude de l'équation (1) un intérêt considérable et qui, depuis ABEL, a provoqué un grand nombre de travaux sur cette équation.

Or on remarquera tout d'abord, qu'en général la solution de l'équation aux différences finies (2) est aussi difficile que celle de l'équation (1) elle-même. Ce sont des problèmes équivalents, et les différents auteurs ont traité, tantôt sous la forme de l'équation (1), tantôt sous la forme de l'équation (2), le problème en question. Seulement dans le cas des fonctions réelles l'équation (2) est immédiatement résoluble: en choisissant pour $\psi(z)$ une fonction quelconque dans un intervalle de longueur 1, l'équation (2) même permet de trouver la valeur de $\psi(z)$ pour z quelconque plus grand; mais cela ne fournit, en général, aucune solution de l'équation (1) proposée; on voit, par exemple, que la solution donnée par ABEL dans le cas de $f(x) = x^n$ sera en défaut pour $x < 1$. Le problème se présentera donc de deux manières complètement différentes selon que les fonctions à considérer sont des fonctions réelles ou des fonctions analytiques. C'est sous ce dernier point de vue que se sont placés tous les auteurs qui ont traité, depuis ABEL, l'équation en question. Et, puisque je me suis proposé, de traiter seulement le cas des fonctions réelles, je peux me borner ici à citer quelques-uns des plus importants travaux qui ont paru sur l'équation d'ABEL et qui donnent la solution de cette équation sous des conditions plus ou moins générales. Citons d'abord les travaux fondamentaux de M. G. KOENIGS [2]); puis A. KORKINE [3]), L. LEAU [4]), P. FATOU [5]), G. VALIRON [6]).

Quant au cas des fonctions réelles, j'ai déjà remarqué que le problème est d'une toute autre nature. Formellement la méthode indiqué par ABEL donne immédiatement la solution de l'équation; mais il reste à chercher les conditions pour qu'elle soit valable.

2. *L'équation d'*ABEL *dans le cas des fonctions réelles.* — En nous plaçant dans le cas où toutes les fonctions à considérer sont réelles, le premier problème qui se présente est de trouver les conditions dans lesquelles l'équation (1) admet une solution.

---

[2]) G. KOENIGS, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* [Annales de l'Ecole Normale, 3e série, t. 1 (1884), suppl. p. 1 41]. *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* [Annales de l'Ecole Normale, 3e série, t. 2 (1885), p. 385-404].

[3]) A. KORKINE, *Sur un problème d'interpolation* [Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 6 (1882), p. 228-242].

[4]) L. LEAU, *Etudes sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables* [Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. 11 (1897), p. 1-110].

[5]) P. FATOU, *Sur les equations fonctionnelles* [Bulletin de la société mathématique de France, t. 47 (1919), p. 161-271 et t. 48 (1920), p. 33-94 et p. 208-314].

[6]) G. VALIRON, *Sur les solutions de l'équation fonctionnelle d'*ABEL. [Bulletin des sciences mathématiques, t. 48 (1924), p. 260-265].

Il est d'abord évident qu'il n'en soit pas toujours ainsi. En considérant, p. ex., l'équation

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + c,$$

on voit qu'elle ne peut pas admettre de solution que si $c = 0$. En posant, d'autre part, $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ où α, β, γ, δ sont des constantes données, on trouve par la méthode d'Abel une solution de la forme

$$\varphi(x) = \frac{c}{\log\left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|} \log\left|\frac{(\delta - \rho_2)x - \beta}{(\delta - \rho_1)x - \beta}\right|,$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les deux racines de l'équation

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\rho + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

En supposant $c \neq 0$ et ρ_1 et ρ_2 réelles et distinctes on a ainsi une fonction satisfaisant à l'équation en question et qui est en outre continue partout, sauf au deux points qui la rendent infinie. Mais dans le cas où ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires cette solution devient illusoire, et il semble très difficile d'en trouver une autre; cela s'explique par le fait que dans ce cas toute solution s'il en existe, doit être totalement discontinue.

Avant d'aller plus loin, il faut préciser le problème; il faut tout d'abord préciser ce que l'on entend par une « solution » de l'équation proposée.

Mettons une fois pour toutes de côté le cas où la constante c a la valeur zéro. Remarquons pour cela que toute solution de l'équation

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c$$

fournit immédiatement une solution de l'équation correspondante $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$; en effet, si $\varphi_0(x)$ est une solution de la première et $\Omega(x)$ une fonction quelconque admettant l'unité pour période, la fonction $\varphi_1(x) = \Omega\left(\frac{1}{c}\varphi_0(x)\right)$ sera une solution de la seconde. L'inverse n'est certainement pas vrai; on peut p. ex. donner des solutions de l'équation $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + c$ pour $c = 0$, tandis que l'équation n'a pas de solution pour $c \neq 0$. Cette réservation faite, nous pouvons nous débarrasser de la constante c, en la supposant toujours égale à 1. En effet, l'équation (1) se réduira par la simple substitution $\varphi(x) = c\psi(x)$ à la forme

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1. \tag{3}$$

Cela posé, soit E un ensemble quelconque de nombres réels et supposons la fonction $f(x)$ définie pour toute valeur de x appartenant à E et seulement pour ces valeurs de x. Désignons, pour abréger, par $f(E)$ l'ensemble des nombres réels $f(x)$ pour tous les x appartenant à E.

Définition. — En désignant par $\mathfrak{E}$ un ensemble de nombres réels qui contient les points de E et de $f(E)$ une fonction $\varphi(x)$ définie dans $\mathfrak{E}$ s'appelle solution de l'équation (3) *si cette équation est remplie pour toute valeur de x appartenant à E.*

Alors le premier problème aura la forme:

Etant donnée une fonction réelle $f(x)$ définie dans un ensemble E, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3) admette une solution?

J'ai trouvé une réponse à ce problème [7]) en faisant usage, pour la démonstration, du célèbre théorème de ZERMELO. Or M. KURATOWSKI [8]) a remarqué qu'on peut éviter l'emploi de ce théorème, mais en admettant l'Axiome du Choix. Il ne semble pas qu'on puisse résoudre le problème ainsi posé dans toute sa généralité, sans entrer ainsi dans les hypothèses de la théorie des ensembles. En effet, il faut remarquer qu'on n'a rien dit sur la nature des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$; on doit supposer $f(x)$ définie d'une manière qui permet de la calculer pour une valeur donnée de x dans l'ensemble E; mais faire la même supposition sur la fonction $\varphi(x)$ dans $\mathfrak{E}$ serait modifier tout à fait le problème. J'ai déjà remarqué que dans certains cas l'équation (3) n'admet pas, pour $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, des solutions non totalement discontinues. Le problème général étant posé comme plus haut, on doit admettre l'existence des solutions dans ce cas; mais ces solutions seront des fonctions d'une nature extrêmement compliquée, et il ne semble pas possible, pour le moment, de calculer effectivement une telle solution.

Pour sortir de cet embarras je me suis proposé de trouver les conditions pour l'existence des solutions $\varphi(x)$ d'une nature plus spéciale. Il s'agit de trouver les conditions dans lesquelles l'équation en question admet des solutions $\varphi(x)$ *continues,* au moins dans un certain intervalle. Comme le montre l'exemple déjà deux fois mentionné cela ne s'obtient pas en faisant des suppositions de la même nature sur la fonction donnée $f(x)$; car, même dans ce cas extrêmement simple, il n'existe que des solutions totalement discontinues, et l'on trouvera d'autre part sans peine des fonctions $f(x)$ totalement discontinues pour lesquelles l'équation (3) correspondante admet des solutions continues [9]). J'ai d'abord trouvé la condition nécessaire et suffisante pour

---

7) R. TAMBS LYCHE, *Sur l'équation fonctionnelle d'*ABEL [Fundamenta Mathematicae, t. 5 (1923) p. 331-333].

8) R. TAMBS LYCHE, *Sur l'équation fonctionnelle d'*ABEL; *remarque de* M. KURATOWSKI [Fundamenta Mathematicae, t. 5 (1923) p. 332-333].

9) R. TAMBS LYCHE, *Sur la solution de l'équation fonctionnelle d'*ABEL [Kristiania videnskapsselskaps forhandliger for 1924, no. 2, p. 1-6].

que l'équation (3) admette une solution continue en un point donné ξ; il s'est trouvé que cette condition entraîne en même temps l'existence d'une solution continue dans toute un intervalle de longueur finie entourant le point ξ. Mais, d'autre part, la condition remplie en deux points différents ξ_1 et ξ_2 il ne s'ensuit pas l'existence d'une solution continue en les deux points ξ_1 et ξ_2 [10]). C'est là un point sur lequel il faut insister à cause de la forme de l'équation donnée qui fait toujours intervenir à la fois les deux points x et $f(x)$. Je vais donc ajouter ici les conditions pour l'existence d'une telle solution, en cherchant les conditions pour l'existence d'une solution continue dans un intervalle donné à l'avance.

Définitions générales.

3. *Les itérées de la fonction* $f(x)$. — La fonction $f(x)$ étant définie dans l'ensemble E, soit $x=x_0$ un point tel que $x_1=f(x_0)$ appartient à E; posons alors $f_2(x_0)=f(x_1)$. En général, définissons *l'itérée n-ième* de la fonction $f(x)$ de la manière suivante.

a) L'itérée d'ordre zéro sera définie dans l'ensemble E_0 de tous les points réels par l'équation $f_0(x)=x$.

b) L'itérée d'ordre $n-1$ étant définie dans un certain ensemble E_{n-1} et désignée par $f_{n-1}(x)$, l'ensemble de tous les nombres x tels que $f_{n-1}(x)$ appartient à E sera désigné par E_n et l'itérée $f_n(x)$ d'ordre n sera définie dans E_n par l'équation $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$.

Il suit immédiatement de cette définition que $E_1=E$ et $f_1(x)=f(x)$. Les itérées d'ordre supérieur à 1 n'existent pas nécessairement.

EXEMPLES. — 1° Si E contient tous les nombres réels, on a, quel que soit n, $E_n=E_0$.

2° Soit $f(x)$ la fonction ainsi définie: E est l'ensemble de tous les nombres réels $\geqq -4$ et $\leqq +8$; soit pour $-4\leqq x<2$

$$f(x)=2x+4$$

et pour $2\leqq x\leqq 8$

$$f(x)=-2x+12.$$

On aura des itérées de tous les ordres et $E_n=E$ quel que soit $n>0$.

3° Soit E l'ensemble de tous les nombres réels sauf $x=1$ et $x=|\sqrt{2}|$. Posons

$$f(x)=1 \qquad \text{pour } x \text{ rationnel et } \neq 1$$

$$f(x)=|\sqrt{2}| \qquad \text{pour } x \text{ irrationnel et } \neq |\sqrt{2}|.$$

Les itérées d'ordre >1 n'existent pas.

---

[10]) R. TAMBS LYCHE, *Sur l'existence des solutions réelles et continues de l'équation fonctionnelle d'*ABEL [Matematikerkongressen i København 31 august — 4 september 1925. København 1925, p. 241-249].

4. *Les points de même classe et les suites parallèles.* — Soient x et y des nombres réels quelconques; s'il existe des indices m et n, $\overline{\gtrless}$ o, tels que $f_m(x) = f_n(y)$ je dis avec M. KURATOWSKI [11]) que x et y sont *de même classe*. Si, de plus, on peut choisir $m = n$ x et y seront appelés des points *associés*. J'appellerai *classe* $C(x)$ l'ensemble de tous les points y qui sont de même classe qu'un point donné x.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ — ou en abrégé (x_i) et (y_i) — deux suites de points réels. Si, quel que soit i, il existe des indices p_i et q_i tels que $f_{p_i}(x_i) = f_{q_i}(y_i)$ je dis que les suites (x_i) et (y_i) sont *parallèles*. Si, quel que soit le nombre positif N, il y a des valeurs de $i > N$ telles que p_i et q_i sont nécessairement des nombres différents, les suites parallèles (x_i) et (y_i) seront appelées *distinctes*; si, au contraire, à partir d'une certaine valeur de i on peut toujours prendre $p_i = q_i$ les suites (x_i) et (y_i) sont dites *associées*. En parlant d'une suite de points (x_i) il sera, en général, supposé que tous les points x_i de la suite sont distincts l'un de l'autre. Il y a donc lieu de considérer à part le cas où p. ex. tous les points y_i de l'une des deux suites parallèles (x_i) et (y_i) coincident avec un même point y; je dis, par conséquent, qu'une suite (x_i) est *parallèle au point* y si tous les points x_i sont de la classe $C(y)$ et s'ils sont, de plus, associés deux à deux; de même la suite (x_i), parallèle à y, est *distincte de* y si x_i et y ne sont pas associés, mais *associée à* y dans le cas contraire.

5. *Les points réguliers.* — Un point ξ sera dit *régulier* pour la fonction $f(x)$, s'il a les deux propriétés suivantes:

1° ξ n'est pas la limite commune de deux suites distinctes;

2° ξ n'est pas la limite d'une suite parallèle à ξ et distincte de ξ.

EXEMPLE. — Considérons le cas $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Par un procédé bien connu [12]) on trouve

$$f_n(x) = \frac{\alpha x + \beta - \rho_2 x - (\alpha x + \beta - \rho_1 x)\tau^n}{\gamma x + \delta - \rho_2 - (\gamma x + \delta - \rho_1)\tau^n}$$

en désignant par ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation

$$\rho^2 - (\alpha + \delta)\rho + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

et par τ la quantité $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$. Soit donc, en premier lieu, ρ_1 et ρ_2 réelles et τ différent de ± 1; en choisissant convenablement la désignation de ρ_1 et ρ_2, on peut alors supposer $|\tau| < 1$, d'où $f_n(x) \twoheadrightarrow \dfrac{\alpha x + \beta - \rho_2 x}{\gamma x + \delta - \rho_2}$ pour $n \twoheadrightarrow \infty$; mais cette dernière fonction se

---

[11]) R. TAMBS LYCHE, *Sur l'équation fonctionnelle d'*ABEL; *remarque de* M. KURATOWSKI [Fundamenta Mathematicae, t. 5 (1923) p. 332-333].

[12]) E. SCHROEDER, *Über iterierte Functionen* [Mathematische Annalen, B. 3 (1871), p. 296-322].

trouve constante, égale à $\frac{\alpha - \rho_2}{\gamma}$. — Je dis que, dans ce cas tout point réel est régulier, sauf les deux points $\frac{\alpha - \rho_1}{\gamma}$ et $\frac{\alpha - \rho_2}{\gamma}$. Soit, en effet, ξ un point quelconque, différent de ces deux points, et admettons l'existence d'un couple de suites distinctes (x_i) et (y_i) tendant toutes les deux vers ξ; on pourrait évidemment en déduire un autre couple (x'_i), (y'_i) tel que, pour chaque valeur de i, on ait $f_{p_i}(x'_i) = f_{q_i}(y'_i)$ avec p. ex. $p_i > q_i$; mais cela entraînerait ici $y'_i = f_{r_i}(x'_i)$, où $r_i = p_i - q_i > 0$. Or on déduit de la formule donnant $f_n(x)$

$$f_n(x) - x = (\gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta)\frac{\tau^n - 1}{\gamma x + \delta - \rho_2 - (\gamma x + \delta - \rho_1)\tau^n}$$

d'où pour $n > 0$

$$|f_n(x) - x| \geqq |\gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta|\frac{1 - |\tau|}{|(\gamma x + \delta)(1 - \tau^n) + \rho_2(\tau^{n-1} - 1)|}.$$

Mais on a

$$|(\gamma x + \delta)(1 - \tau^n) + \rho_2(\tau^{n-1} - 1)| \leqq 2(|\gamma x + \delta| + |\rho_2|)$$

et

$$|\gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta| = |\gamma| \cdot \left|x - \frac{\alpha - \rho_1}{\gamma}\right| \cdot \left|x - \frac{\alpha - \rho_2}{\gamma}\right|.$$

Donc $|f_n(x) - x|$ est uniformément supérieur à une quantité positive fixe lorsque x appartient à un segment qui ne renferme aucun des points $\frac{\alpha - \rho_1}{\gamma}$, $\frac{\alpha - \rho_2}{\gamma}$. Donc l'équation $y'_i = f_{r_i}(x'_i)$ deviendra impossible dès que i sera assez grand pour que $|y'_i - x'_i|$ tombe au-dessous d'une certaine limite. Puisque, en second lieu, l'équation $f_n(x) = f_n(y)$ entraîne $x = y$ le point ξ sera régulier. Quant aux points $\frac{\alpha - \rho_1}{\gamma}$, $\frac{\alpha - \rho_2}{\gamma}$, ce sont évidemment des points non réguliers; le dernier étant la limite d'une suite quelconque des nombres $f_n(x)$, les deux suites distinctes (x_i) et (y_i) qu'on obtient en posant $x_i = f_i(x)$, $y_i = f_{i+1}(x)$ ont pour limite commune ce point; choisissons d'autre part un point quelconque x différent des deux points en question et posons $f_i(\zeta_i) = x$; chaque valeur de i donne un point unique ζ_i, et ζ_i tend vers $\frac{\alpha - \rho_1}{\gamma}$; donc les deux suites distinctes obtenues en posant $x_i = \zeta_i$, $y_i = \zeta_{i+1}$ auront ce point pour limite commune.

Supposons maintenant ρ_1 et ρ_2 imaginaires. On trouve alors

$$f_n(x) = \frac{(\alpha x + \beta)\sin ns - \rho x \sin(n-1)s}{(\gamma x + \delta)\sin ns - \rho \sin(n-1)s}$$

où l'on a posé

$$\rho_1 = \rho e^{is}, \qquad \rho_2 = \rho e^{-is}; \qquad \rho > 0, \qquad 0 < s < \pi.$$

Supposons que s n'est pas commensurable avec π; alors il n'existe pas de point régulier pour $f(x)$. Soit en effet ξ un point quelconque et choisissons pour n une suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ telles que $\sin n_k s$ tende vers zéro; les points $z_k = f_{n_k}(\xi)$ tendent évidemment vers ξ; en posant alors $x_i = z_i$, $y_i = z_{i+1}$ les deux suites (x_i) et (y_i) auront ξ pour limite commune.

Conditions d'existence des solutions en général.

6. *Condition nécessaire.* — Supposons toujours la fonction réelle $f(x)$ définie dans un ensemble E et désignons par $\mathfrak{E}$ un ensemble renfermant tous les points de E et de $f(E)$.

LEMME 1. — *Pour que l'équation*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1 \tag{3}$$

admette une solution $\varphi(x)$ dans $\mathfrak{E}$ il faut que l'équation $f_n(x) = x$ ne subsiste pour aucun point x de E pour aucun indice naturel n.

Si, en effet, x_0 est un point tel que $f_n(x_0) = x_0$ pour une certaine valeur de $n > 0$ il s'ensuit d'abord que tous les points (en nombre $\geqq 1$) $x_0, f(x_0), \ldots, f_{n-1}(x_0)$ appartiennent à E; si donc $\varphi(x)$ était une solution de (3) dans $\mathfrak{E}$ on aurait

$$\varphi(x_0) = \varphi(f_n(x_0)) = \varphi(f_{n-1}(x_0)) + 1 = \varphi(f_{n-2}(x_0)) + 2 = \cdots = \varphi(x_0) + n$$

ce qui est absurde.

Supposons donc, dès maintenant, qu'on n'a jamais d'égalité de la forme $f_n(x) = x$, $n > 0$. Il s'ensuit immédiatement:

LEMME 2. — *Si, pour deux points x et y de $\mathfrak{E}$, l'équation $f_p(x) = f_q(y)$ subsiste, la différence $p - q$ a une valeur fixe, quels que soient les indices p et q remplissant cette condition.*

Si, en effet, p_1 et q_1 sont d'autres indices tels que $f_{p_1}(x) = f_{q_1}(y)$ il s'ensuit, si, pour fixer les idées, on suppose $p_1 > p$

$$f_{p_1}(x) = f_{p_1-p}(f_p(x)) = f_{p_1-p}(f_q(y)) = f_{p_1-p+q}(y).$$

Si donc on n'avait pas $q_1 = p_1 - p + q$, c'est-à-dire $p_1 - q_1 = p - q$ on aurait p. ex. $q_1 > p_1 - p + q$, d'où

$$f_{q_1}(y) = f_{p_1}(x) = f_{p_1-p+q}(y)$$

donc $f_n(z) = z$ pour $n = q_1 - p_1 + p - q$ et $z = f_{p_1-p+q}(y)$ et de même dans les autres cas possibles.

7. *Définition d'une base pour* $f(x)$. — J'appellerai *base pour* $f(x)$ *dans* $\mathfrak{E}$ tout ensemble $B(f)$ de points de $\mathfrak{E}$ jouissant des propriétés suivantes:

1° Il n'existe pas dans $B(f)$ deux points de même classe;

2° A chaque point x de $\mathfrak{E}$ correspond dans $B(f)$ un point b_x tel que x soit de la classe $C(b_x)$.

Supposons connue une base $B(f)$ dans E. Désignons par $\mathfrak{E}_1$ un ensemble renfermant tous les points de $\mathfrak{E}$. Formons l'ensemble $B_1(f)$ en ajoutant aux points de $B(f)$ tous les points de $\mathfrak{E}_1$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{E}$; l'ensemble $B_1(f)$ sera évidemment une base pour $f(x)$ dans $\mathfrak{E}_1$. En effet, deux points de $B_1(f)$ ne peuvent pas être de même classe; car, si x et y étaient de tels points de $B_1(f)$ on aurait $f_p(x) = f_q(y)$ où l'un au moins des indices p et q ne serait pas nul, soit $p > 0$; alors x doit appartenir à E, donc à $\mathfrak{E}$; c'est donc un point de $B(f)$; quant à q on ne pourrait pas avoir $q > 0$, car alors la conséquence serait la même pour y, ce qui n'est pas admissible d'après la définition de $B(f)$; on aurait donc $y = f_p(x) = f(f_{p-1}(x))$; mais alors le point y appartiendrait à $\mathfrak{E}$ sans appartenir à $B(f)$; y ne serait donc pas point de $B_1(f)$. D'après la formation même de $B_1(f)$ il est évident qu'à chaque point de $\mathfrak{E}_1$ correspond dans $B_1(f)$ un point de même classe.

On pourrait donc se borner à la recherche d'une base $B(f)$ dans le plus petit des ensembles $\mathfrak{E}$, c'est-à-dire l'ensemble formé par les points de E et de $f(E)$.

LEMME 3. — *Etant connue une base* $B(f)$ *pour* $f(x)$ *dans* $\mathfrak{E}$ *on obtient la solution la plus générale de l'équation*

$$(3) \qquad \varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

en choisissant une fonction réelle $\psi(x)$ *arbitrairement dans* $B(f)$ *et en posant alors*

$$(4) \qquad \varphi(x) = \psi(b_x) + p - q$$

où b_x *est l'élément de* $B(f)$ *satisfaisant pour* x *quelconque dans* $\mathfrak{E}$ *à la condition* $f_p(b_x) = f_q(x)$.

En effet, il suit d'abord du lemme 2 que la fonction $\varphi(x)$ est ainsi bien définie pour toute valeur de x dans $\mathfrak{E}$; car à un point déterminé de $\mathfrak{E}$ ne correspond qu'un seul point b_x de $B(f)$ et alors la différence $p - q$ a une valeur bien déterminée. Et d'après la définition de $B(f)$ il suit $b_{f(x)} = b_x$ pour tout point x de E; de $f_p(b_x) = f_q(x)$ s'ensuit en outre $f_{p+1}(b_x) = f_{q+1}(x) = f_q(f(x))$, donc

$$\varphi(f(x)) = \psi(b_x) + p + 1 - q = \varphi(x) + 1.$$

Si, d'autre part, $\varphi(x)$ est une solution quelconque de (3) définie dans $\mathfrak{E}$, soit x un point quelconque dans $\mathfrak{E}$ et $f_p(b_x) = f_q(x)$; les points $b_x, f(b_x), \ldots, f_{p-1}(b_x)$ et

$x_1 f(x), \ldots, f_{q-1}(x)$ appartenant nécessairement à E, il résulte de l'équation (3) qu'on a

$$\varphi(f_p(b_x)) = \varphi(b_x) + p, \qquad \varphi(f_q(x)) = \varphi(x) + q$$

donc $\varphi(x) = \varphi(b_x) + p - q$, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ a la forme (4).

8. Théorème I. — *La fonction réelle $f(x)$ étant définie dans un ensemble E il faut et il suffit pour que l'équation*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1 \tag{3}$$

admette une solution dans $\mathfrak{E}$ que l'équation $f_n(x) = x$ ne subsiste pour aucun point de E pour aucun indice naturel n.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le lemme 1. Pour établir qu'elle est suffissante il ne reste, d'après le lemme 3, qu'à montrer qu'elle entraîne l'existence d'une base pour $f(x)$ dans $\mathfrak{E}$. A cet effet j'avais appliqué le théorème de Zermelo; montrons-le, en suivant M. Kuratowski, en n'employant que l'Axiome du Choix: Formons, en effet, un ensemble $B(f)$ de la manière suivante: $B(f)$ doit contenir un point et un seul de chaque classe $C(x)$ en laissant x parcourir l'ensemble $\mathfrak{E}$. Cet ensemble, ne contenant pas deux points de même classe, sera évidemment une base pour $f(x)$; car chaque classe contenue dans $\mathfrak{E}$ ayant un représentant dans $B(f)$, il correspond à tout point x de $\mathfrak{E}$ un élément b_x de $B(f)$ tel que x sera de la classe $C(b_x)$.

Sur la distribution des points réguliers.

9. *Propriétés d'un point régulier.* — Appelons pour un moment *semi-régulier* un point ξ qui a la propriété suivante: s'il existe un couple de suites parallèles tendant toutes les deux vers ξ, celles-ci sont associées. On a alors:

Lemme 4. — *Si $z_1, z_2, \ldots, z_r, \ldots$ est une suite de points tous d'une même classe $C(a)$ et tendant vers un point semi-régulier ξ, il existe un certain indice r_0 tel que, pour $r \geqq r_0$, z_r est toujours associé à z_{r_0}.*

Désignons, en effet, par $p_{i,k}$ et $q_{i,k}$ les indices les plus petits, satisfaisant à la condition

$$f_{p_{i,k}}(z_i) = f_{q_{i,k}}(z_k).$$

On a évidemment, quel que soit i, $p_{i,i} = q_{i,i} = 0$; soit donc, pour $i = 1$, $k = k_1$ le premier indice k tel que $p_{1,k} \neq q_{1,k}$; s'il n'existe pas de tel indice k_1 le lemme est évidemment vrai; posons

$$z_1 = x_1, \qquad z_{k_1} = y_1.$$

Posons ensuite $i = k_1$ et désignons par k_2 le premier indice $k > k_2$ tel que $p_{k_1,k} \neq q_{k_1,k}$;

posons alors

$$z_{k_1} = x_2, \qquad z_{k_2} = y_2$$

et continuons de la même façon. Ou bien le procédé se termine parcequ'on arrive à un certain indice $i = k_r$ tel que $p_{k_r,k} = q_{k_r,k}$ quel que soit $k > k_r$, ou bien on trouve deux suites illimitées (x_r) et (y_r) qui seraient des suites distinctes ayant ξ pour limite commune. Mais le dernier cas étant exclu par hypothèse, le premier doit se présenter, ce qui montre que le lemme est vrai.

LEMME 5. — *Soit ξ un point semi-régulier et désignons par Q l'ensemble de tous les points d'une certaine classe $C(a)$; il existe alors une quantité positive ρ tel que tout point de Q, pour lequel $0 < |\xi - z| \leqq \rho$, est associé à un point fixe.*

Supposons, en effet, qu'il ne soit pas ainsi: donc, quel que soit $\rho > 0$ et quel que soit le point ζ de Q il se trouve dans Q un point z non associé à ζ et pour lequel $0 < |\xi - z| \leqq \rho$. Désignons donc par ζ un point quelconque de Q et par ρ_0 une quantité positive quelconque; soit z_1 un point de Q, non associé à ζ et tel que $0 < |\xi - z_1| \leqq \rho_0$; posons $|\xi - z_1| = 2\rho_1$ et soit z_2 un point correspondant pour $\rho = \rho_1$; posons $|\xi - z_2| = 2\rho_2$, et continuons de même façon; la suite $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ obtenue a tous ses points de la classe $C(a)$ et a ξ pour limite; en vertu du lemme précédent, pour un certain indice $k = \varkappa$, toujours z_k est associé à $z_\varkappa$ pour $k \geqq \varkappa$.

Posons $z_\varkappa = \pi$; le lemme étant supposé inexact, on a, quel que soit ρ, un point z de Q non associé à π et tel que $0 < |\xi - z| \leqq \rho$. Soit donc d'abord $\rho = \rho_0'$ une quantité positive quelconque et désignons par ζ_1 le point z corréspondant; en posant $|\xi - \zeta_1| = 2\rho_1'$ et en suivant le même procédé que tout à l'heure on arriverait à une nouvelle suite $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\lambda, \ldots$, qui est nécessairement distincte de (z_i); en effet ζ_i ne peut pas être associé à z_i en général, puisque z_i, pour $i \geqq \varkappa$ est associé à π, donc ζ_i serait aussi associé à π contrairement à l'hypothèse. Les deux suites (z_i) et (ζ_i) ayant ξ pour limite commune il y aurait une contradiction.

LEMME 6. — *A un point semi-régulier ξ corréspond une certaine quantité positive δ tel que tout point du segment* [13] $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ *est encore semi-régulier.*

En effet, soit Δ une quantité positive quelconque; si $\delta = \Delta$ n'a pas la propriété demandée, il doit se trouver sur le segment $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ un point η_1 non semi-régulier, donc $\neq \xi$; posons $|\xi - \eta_1| = 2\Delta_1$; si $\delta = \Delta_1$ n'a pas encore la propriété demandée soit de même $\eta_2 \neq \xi$ (et $\neq \eta_1$) un point non semi-régulier du segment $(\xi - \Delta_1, \xi + \Delta_1)$; posons $|\xi - \eta_2| = 2\Delta_2$ et continuons de même façon. Or je dis que ce procédé conduit nécessairement à une certaine quantité $\delta = \Delta_r$ ayant la propriété demandée. En effet, sinon on abutirait à une suite infinie de points (η_r) tendant

[13]) J'appelle toujours *segment* (a, b) l'ensemble des points x tels que $a \leqq x \leqq b$; l'*intervalle* $[a, b]$ est au contraire l'ensemble ouvert des points x tels que $a < x < b$.

vers ξ, tous distincts et tous non semi-réguliers; donc à chaque η_r correspondrait un couple de suites distinctes $(x_i^{(r)})$ et $(y_i^{(r)})$ ayant η_r pour limite commune; choisissons de plus les $x_i^{(r)}$ et $y_i^{(r)}$ tels que ces points ne soient jamais associés; choisissons alors pour chaque valeur de r un indice $i = i_r$ assez grand pour que $|x_{i_r}^{(r)} - \eta_r|$ et $|y_{i_r}^{(r)} - \eta_r|$ sont tous deux inférieurs à $\frac{1}{2^{r-1}}$; il s'ensuit alors

$$|x_{i_r}^{(r)} - \xi| \overline{\le} |x_{i_r}^{(r)} - \eta_r| + |\eta_r - \xi| < \frac{\Delta_1 + 1}{2^{r-1}}$$

et de même $|y_{i_r}^{(r)} - \xi| < \frac{\Delta_1 + 1}{2^{r-1}}$. Or les deux suites $(x_{i_r}^{(r)})$ et $(y_{i_r}^{(r)})$ pour $r = 1, 2, \ldots,$ seraient distinctes, et ayant ξ pour limite commune il y a une contradiction.

THÉORÈME II. — *Si le point ξ n'est pas la limite commune de deux suites distinctes, il existe une quantité positive δ tel que tout point x pour lequel $0 < |\xi - x| \overline{\le} \delta$ est régulier.*

Démonstration. — Le point ξ étant semi-régulier, soit δ' une quantité positive, existant en vertu du lemme 6, tel que tout point du segment $(\xi - \delta', \xi + \delta')$ soit semi-régulier. Si donc $\delta = \delta'$ n'a pas la propriété demandée il doit exister un point u_1, tel que $0 < |\xi - u_1| \overline{\le} \delta'$, auquel correspond une suite de points $(v_k^{(1)})$ de la classe $C(u_1)$, tendant vers u_1, les points $v_k^{(1)}$ étant tous associés entre eux, mais non à u_1. Posons alors $|\xi - u_1| = 2\delta_1'$; si $\delta = \delta_1'$ n'a pas encore la propriété demandée, continuons le même procédé. Je dis qu'on doit aboutir à une certaine quantité $\delta = \delta_r'$ ayant la propriété demandée. En effet, sinon, on trouverait une suite illimitée de points $u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ tel qu'à chaque point u_r correspondrait une suite $(v_k^{(r)})$ tendant vers u_r, parallèle à u_r sans y être associée. Désignons alors par l un nombre naturel quelconque et posons

$$\frac{1}{2}|u_l - u_{l+1}| = \varepsilon_l .$$

Soit t_l un indice assez grand pour que $|u_l - v_{t_l}^{(l)}| < \varepsilon_l$; on aurait alors

$$|\xi - v_{t_l}^{(l)}| \overline{\le} |\xi - u_l| + |u_l - v_{t_l}^{(l)}| < |\xi - u_l| + \varepsilon_l$$

d'où il suit que la suite de points $\overline{u}_l = v_{t_l}^{(l)}$ tend vers ξ; d'autre côté on a

$$|\overline{u}_l - \overline{u}_{l+1}| \overline{\ge} |u_l - u_{l+1}| - |u_l - \overline{u}_l| - |u_{l+1} - \overline{u}_{l+1}| > 2\varepsilon_l - \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1} = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1} .$$

Or ε_l tend vers zéro quand l croît, donc, pour une infinité de valeurs de l la différence $\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$ sera positive; on en conclurait l'existence d'une suite infinie de points $\overline{u}_l$ tous distincts; mais $\overline{u}_l$ étant de même classe que u_l sans y être associé, le point ξ ne serait pas semi-régulier.

Du théorème II s'ensuit comme corollaire, d'abord qu'un point semi-régulier, mais non régulier est toujours isolé d'autre points de même espèce; puis qu'un point régulier n'est jamais isolé: il est toujours entouré d'autres points réguliers. Donc:

LEMME 7. — *Les points réguliers forment des intervalles dont les extrémités sont toujours des points non réguliers.*

En appliquant le lemme 5 on a encore:

LEMME 8. — *A tout point régulier ξ correspond une quantité positive ρ tel que tout point du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ de la classe $C(\xi)$ est associé à ξ.*

Terminons ce paragraphe en démontrant la proposition suivante:

THÉORÈME III. — *A tout point régulier ξ correspond une quantité positive τ ayant la propriété suivante: si le segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ contient deux points de même classe, ceux-ci sont associés.*

Démonstration. — Soit, en vertu du théorème II et du lemme 8, une quantité positive ρ telle que tout point du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ soit régulier, et telle que, de plus, tout point de ce segment appartenant à $C(\xi)$ soit associé à ξ.

Soit alors x un point quelconque de ce même segment; le point x étant régulier, on trouve de même une quantité $r > 0$ ayant les mêmes propriétés par rapport à x que ρ par rapport à ξ. Si r_0 est une telle quantité, il est de même pour tout $r < r_0$; si donc R désigne l'ensemble de tous les quantités positives ayant la même propriété que r, on pourrait imaginer deux cas: ou R est l'ensemble de tous les nombres positifs, ou bien R admet un certain maximum $r(x)$. Dans ce dernier cas tout point de l'intervalle $[x - r(x), x + r(x)]$ est régulier, et, s'il appartient à $C(x)$, il est associé à x; d'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un point χ tel que $|\chi - x| < r(x) + \varepsilon$ où χ est, ou bien non régulier, ou bien un point de $C(x)$ non associé à x.

Imaginons-nous alors que x parcourt le segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$; un des deux cas suivants doit nécessairement se présenter:

1° Il existe une quantité positive τ, tel qu'on a, quel que soit x sur ce segment, ou bien

$$r(x) > |x - \xi| + \tau$$

ou bien R n'a pas de maximum. Or, dans ce cas τ a la propriété demandée; soient, en effet, α et β deux points de même classe du segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$; en posant $x = \alpha$ il s'ensuit $r(\alpha) > |\xi - \alpha| + \tau$, si l'ensemble R correspondant a un maximum $r(\alpha)$; alors on aura

$$|\beta - \alpha| \leqq |\beta - \xi| + |\alpha - \xi| < \tau + r(\alpha) - \tau = r(\alpha)$$

donc β appartient à l'intervalle $[\alpha - r(\alpha), \alpha + r(\alpha)]$ et d'après la définition de $r(\alpha)$ β sera associé à α; si R n'a pas de maximum il suffit de choisir r assez grand pour que β se trouve dans l'intervalle $[\alpha - r, \alpha + r]$ pour aboutir au même résultat.

2° Quelle que soit la quantité positive τ il existe sur le segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$

un point x pour lequel

$$r(x) \overline{\gtrless} |\xi - x| + \tau.$$

Or, pour ces points x l'ensemble R admet évidemment un maximum, voire $r(x)$; donc, quelle que soit la quantité positive ε il existe un point z tel que $|z - x| < r(x) + \varepsilon$ et qui est, soit non régulier, soit un point de la classe $C(x)$ non associé à x.

Cela posé, supposons d'abord que la quantité ρ ne satisfasse pas aux conditions du théorème; donc on se trouve dans le cas 2°; soit par conséquent ξ_1 un point du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ tel que

$$r(\xi_1) = \rho_1 \overline{\gtrless} |\xi_1 - \xi| + \rho.$$

Considérons le segment $(\xi_1 - 2\rho_1, \xi_1 + 2\rho_1)$; d'après ce qui précède il se trouve sur ce segment [soit sur $(\xi_1 - 2\rho_1, \xi_1 - \rho_1)$, soit sur $(\xi_1 + \rho_1, \xi_1 + 2\rho_1)$] un point ξ_1' qui est, ou non régulier, ou un point de la classe $C(\xi_1)$ non associé à ξ_1. De $|\xi_1' - \xi_1| \overline{\gtrless} 2\rho_1$ et

$$|\xi_1' - \xi| \overline{\gtrless} |\xi_1' - \xi_1| + |\xi_1 - \xi| \overline{\gtrless} 2\rho_1 + \rho$$

il suit, à cause de $\rho_1 \overline{\gtrless} |\xi_1 - \xi| + \rho \overline{\gtrless} 2\rho$ qu'on a

$$|\xi_1' - \xi| \overline{\gtrless} 5\rho.$$

Considérons alors le segment $(\xi - \rho', \xi + \rho')$, où l'on a posé $\rho' = \frac{\rho}{2}$; si ρ' ne satisfait pas encore aux conditions du théorème, on se trouve encore dans le cas 2°; on considère alors le segment $(\xi - \rho'', \xi + \rho'')$ et ainsi de suite. Je dis qu'on ne peut pas indéfiniment tomber dans le cas 2°. En effet, en supposant qu'il en fût ainsi, on aurait pour chaque valeur de l'entier positif s un segment $(\xi - \rho^{(s)}, \xi + \rho^{(s)})$ où $\rho^{(s)} = \frac{\rho}{2^s}$ auquel correspondrait un couple de points ξ_s et ξ_s' tels que

$$|\xi_s - \xi| \overline{\gtrless} \rho^{(s)}, \qquad |\xi_s' - \xi| \overline{\gtrless} 5\rho^{(s)}$$

les points ξ_s' étant en partie des points non réguliers, en partie des points de même classe que ξ_s non associés à ceux-ci. Mais $5\rho^{(s)}$ tendant vers zéro quand s croît les points ξ_s' doivent, à partir d'une certaine valeur de s être tous réguliers en vertu du théorème II; donc, à partir de cette valeur de s, tous les ξ_s' seraient de même classe que les ξ_s, sans y être associés, ce qui donnerait un couple de suites distinctes (ξ_s) et (ξ_s') tendant toutes les deux vers ξ, ce qui est impossible. Donc, pour une certaine valeur de s on aura le cas 1°, ce qui donne, d'après ce qui précède, une quantité τ satisfaisant aux conditions du théorème.

REMARQUE. — On pourrait obtenir le théorème III d'une manière plus directe [14]), mais j'ai suivi ici la méthode qui vient d'être exposée pour mettre en évidence les lemmes 4 à 8, qui peuvent être utiles.

Conditions pour l'existence d'une solution continue en un point donné.

10. *Existence d'une base particulière.* — Etant toujours supposé qu'on n'a jamais une égalité de la forme $f_n(x) = x$, supposons connue une base quelconque $B(f)$ pour $f(x)$ dans l'ensemble $\mathfrak{E}$. En remplaçant dans $B(f)$ un élément quelconque par un autre point de la même classe on a évidemment de nouveau une base; je vais utiliser cette remarque pour démontrer le lemme suivant:

LEMME 9. — *Etant donné un point régulier ξ, il existe une base $B_1(f)$ pour $f(x)$ dans $\mathfrak{E}$ ayant la propriété suivante: si τ désigne la quantité positive dont le théorème III établit l'existence, il correspond à tout point x du segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ appartenant à $\mathfrak{E}$ un élément a_x de $B_1(f)$ situé sur ce même segment, et auquel x est associé.*

Désignons, en effet, par $\overline{B}$ l'ensemble de tous les points d'une base quelconque $B(f)$ ayant la propriété suivante: à chaque point $\overline{a}$ de $\overline{B}$ correspond sur le segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ au moins un point de la même classe (égal à $\overline{a}$ ou non); soit, pour chaque valeur de $\overline{a}$, $x_{\overline{a}}$ un de ces points. Désignons par $B_1(f)$ l'ensemble de tous les points suivants: 1° tout point de $B(f)$ qui n'appartient pas à $\overline{B}$; 2° tous les points $x_{\overline{a}}$. Or, $B_1(f)$ aura la propriété demandée: en effet, si x est un point quelconque du segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ appartenant à $\mathfrak{E}$, il correspond à cet x un certain élément de $B(f)$ qui est de la même classe; cet élément est donc un des points de $\overline{B}$, soit $\overline{a}$. Or, le point $x_{\overline{a}}$ correspondant appartenant à $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ est associé à x.

11. *Théorème d'existence des solutions continues aux environs d'un point donné.* — A l'aide du dernier lemme — démontré comme on le voit en appliquant encore l'Axiome du Choix — on démontrera le théorème suivant:

THÉORÈME IV. — *Si ξ est un point de $\mathfrak{E}$ non régulier pour $f(x)$ toute solution de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ définie dans $\mathfrak{E}$ sera discontinue pour $x = \xi$.*

Si, au contraire, ξ est un point régulier, il existe une quantité positive δ ayant la propriété suivante: il existe au moins une solution de l'équation considérée, définie dans $\mathfrak{E}$ et continue dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et à l'intervalle $[\xi - \delta, \xi + \delta]$. Mais il existe, d'autre part, des fonctions $f(x)$ pour lesquelles cette solution est discontinue en tout point en dehors du segment $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ même en les points réguliers.

---

[14]) R. TAMBS LYCHE, *Sur l'existence des solutions réelles et continues de l'équation fonctionnelle d'*ABEL [Matematikerkongressen i Köbenhavn 31 august — 4 september 1925. Köbenhavn 1925, p. 241-249].

Démonstration. — Le premier point se démontre sans peine; en effet, soit ξ un point non régulier et supposons l'existence d'une solution $\varphi(x)$ dans $\mathfrak{E}$, continue pour $x = \xi$. Soit alors $\varepsilon > 0$ une quantité assez petite pour que

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \frac{1}{2}$$

pour tout point x de $\mathfrak{E}$ tel que $|x - \xi| \leqq \varepsilon$; on a alors pour deux points x_1 et x_2 quelconques de $\mathfrak{E}$ sur le segment $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < 1.$$

Or, supposons d'abord l'existence d'un couple de suites distinctes (x_i) et (y_i) tendant toutes les deux vers ξ; si i est alors assez grand pour que x_i et y_i appartiennent tous les deux au segment $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ on aurait, en supposant $f_{p_i}(x_i) = f_{q_i}(y_i)$

$$|\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| = |p_i - q_i| < 1$$

donc $p_i = q_i$ contrairement à l'hypothèse. De même, si (z_i) est une suite parallèle à ξ et tendant vers ξ on aura à partir d'un certain indice i_0

$$|\varphi(z_i) - \varphi(\xi)| = |r_i - s_i| = 0$$

en supposant $f_{r_i}(z_i) = f_{s_i}(\xi)$; donc (z_i) serait associée à ξ, donc le point ξ était régulier contraire à l'hypothèse.

Pour démontrer la seconde proposition du théorème, appliquons le lemme 9. Or, il est d'abord évident, qu'étant connue une quantité $\tau_0 > 0$ satisfaisant à ce lemme, il en sera de même pour toute quantité positive inférieure à τ_0; donc, ou l'ensemble de tous les nombres τ satisfaisant à ce lemme contient tous les nombres positifs, ou il admettra un certain maximum δ. Plaçons nous d'abord dans ce dernier cas; il s'ensuit l'existence d'une base $B_1(f)$ dans $\mathfrak{E}$ tel qu'à tout point x de $\mathfrak{E}$ appartenant à l'intervalle $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ correspond un élément a_x de $B_1(f)$ dans le même intervalle, associé à x. Définissons alors la fonction $\psi(x)$ dans $B_1(f)$ de la manière suivante:

1° Si a est un élément de $B_1(f)$ appartenant à l'intervalle $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ posons $\psi(a) = k$, k étant une constante, choisie à l'avance.

2° Si a' est un autre élément de $B_1(f)$ définissons $\psi(a')$ d'une manière quelconque.

Soit alors $\varphi(x)$ la solution correspondante. En désignant par x un point de $\mathfrak{E}$ quelconque dans l'intervalle $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ on a, d'après la propriété de la base $B_1(f)$, $\varphi(x) = \varphi(a_x) = k$ donc $\varphi(x)$ sera constante dans tout l'ensemble des points communs à $\mathfrak{E}$ et à l'intervalle considéré.

Dans le cas où toute valeur positive de τ satisfierait au lemme 9, le résultat sera le même; seulement se trouve-t-il alors une solution continue (et même constante) dans tout l'ensemble $\mathfrak{E}$.

Il ne reste donc qu'à démontrer qu'une solution $\varphi(x)$ continue dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et à l'intervalle $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ n'est pas toujours continue en aucun point en dehors du segment $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. L'énoncé est triviel s'il n'existe pas de points réguliers en dehors de ce segment, car c'est alors une simple conséquence du premier énoncé du théorème actuel. Il faut donc prouver l'existence de fonctions $f(x)$ telles qu'il existe de points réguliers en dehors du segment considéré $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ et telles que toute solution continue dans l'intervalle considéré est discontinue en dehors de ce segment, même aux points réguliers; or, l'importance de ce dernier énoncé du théorème sera mise en plein jour en montrant qu'il existe même des fonctions $f(x)$, définies dans l'ensemble de tous les points réels et n'admettant que de points réguliers, satisfaisant encore à cette condition. C'est en effet le cas pour la fonction $f(x)$ définie comme il suit:

Si x est un nombre rationnel, posons $f(x) = x + 1$; et si x est irrationnel posons $f(x) = x - 1$.

Il s'ensuit sans peine que deux points x et y de même classe, satisfont toujours à l'inégalité $|x - y| \geqq 1$, et par conséquent tout point est régulier. Soit alors ξ un point quelconque et $B(f)$ l'ensemble de tous les points x satisfaisant à la condition

$$\xi - \frac{1}{2} \leqq x < \xi + \frac{1}{2}.$$

Or, $B(f)$ sera une base pour $f(x)$; car, de $f_n(x) = x \pm n$ (suivant que x soit rationnel ou irrationnel) on voit qu'à tout nombre réel correspond dans $B(f)$ un point et un seul de la même classe. D'autre part, de $f(x) = x \pm 1$ il suit que la quantité δ est égale à $\frac{1}{2}$. Soit donc $\varphi(x)$ une solution quelconque, continue dans l'intervalle $\left[\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}\right]$. Soit η un point quelconque en dehors du segment $\left(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}\right)$ et désignons par m l'entier satisfaisant à la condition

$$\xi - \frac{1}{2} \leqq \eta - m < \xi + \frac{1}{2}$$

d'où $|m| \geqq 1$. Soit, pour fixer les idées, η rationnel; on aura $f_m(\eta - m) = \eta$, d'où $\varphi(\eta) = \varphi(\eta - m) + m$. Posons $\xi + \frac{1}{2} - (\eta - m) = \rho > 0$ et soit h une quantité irrationnelle inférieure à ρ; alors on aura $f_m(\eta + h) = \eta - m + h$, donc

$$\varphi(\eta + h) = \varphi(\eta + h - m) - m.$$

On aura donc

$$|\varphi(\eta + h) - \varphi(\eta)| = |\varphi(\eta + h - m) - \varphi(\eta - m) - 2m|$$
$$\overline{\gtrless}\ 2 . |m| - |\varphi(\eta + h - m) - \varphi(\eta - m)|,$$

quantité qui ne tend pas vers zéro avec h.

12. Remarque. — Il suit du théorème IV qu'une équation $\varphi\big(f(x)\big) = \varphi(x) + 1$ admettant une solution $\varphi(x)$ continue en un point ξ, admettra en même temps une solution continue dans tout un intervalle (c'est à-dire dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et à cet intervalle).

Revenons encore une fois à l'exemple déjà mentionné, où $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Nous avons trouvé que dans le cas où les racines ρ_1 et ρ_2 (voir n° 5) sont réelles et distinctes en valeur absolue, il n'y a que deux points non réguliers, mais au contraire, si ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires tout point est en général non régulier. Le théorème que nous venons de démontrer explique alors pourquoi il existe des solutions continues dans le premier cas, mais que, dans le second, cela n'a pas lieu. Mais ce théorème n'explique pas encore l'existence, dans le premier cas, de solution continues, non seulement aux environs d'un point régulier donné, mais même presque partout. Il s'agit là d'un problème dont nous allons nous occuper dans ce qui suit.

Conditions pour l'existence d'une solution continue à la fois en ξ et en $f(\xi)$.

13. *Les points parfaitement réguliers* — Dans les paragraphes précédents nous avons trouvé les conditions dans lesquelles l'équation $\varphi\big(f(x)\big) = \varphi(x) + 1$ admet une solution continue en un point donné, et nous avons vu encore que ces conditions entraînent aussi l'existence d'une solution continue dans un intervalle de longueur finie entourant le point donné. La longueur de cet intervalle étant limitée par la condition qu'il ne contienne pas deux points de même classe non associés, l'intervalle correspondant à un point ξ ne contient certainement pas le point $f(\xi)$, en supposant ξ un point de E. Or, en vue du dernier énoncé du théorème IV et la forme même de l'équation d'Abel, c'est là un grave inconvenient; en effet, pour peu que ξ soit un point de E on doit toujours considérer la fonction $\varphi(x)$ pour ces deux valeurs de x; donc on ne peut pas parler en réalité d'une solution continue, que si elle est continue à la fois dans ces deux points. Proposons nous donc de trouver dans quelles conditions l'équation admet une telle solution.

Définissons d'abord un point *parfaitement régulier* de la manière suivante: Le point $x = \xi$ sera appelé parfaitement régulier s'il a les propriétés suivantes:

1° ξ est un point régulier, appartenant à E;

2° $f(\xi)$ est un point régulier;

3° S'il existe un couple de suites parallèles (x_i) et (y_i) tendant l'une vers ξ, l'autre vers $f(\xi)$, les indices p_i et q_i satisfaisant à la condition $f_{p_i}(x_i) = f_{q_i}(y_i)$ vérifient toujours, à partir d'un certain rang, l'égalité $p_i = q_i + 1$.

Les conditions 1° et 2° sont, en vertu du théorème IV, des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution de l'espèce en considération. Or, je vais montrer que c'est la condition 3°, qu'il faut ajouter pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes.

Lemme 10. — *Si $x = \xi$ est un point parfaitement régulier, il existe des quantités positives ρ et ρ' ayant les propriétés suivantes: si x est un point du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et y un point du segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$ il existe, toutes les fois où x et y sont de même classe, un indice p tel que $f_p(y) = f_{p+1}(x)$.*

Supposons, en effet, qu'il n'y aurait pas de quantités ρ et ρ' ayant cette propriété. Soit alors, en vertu du théorème III τ et τ' des quantités positives correspondant respectivement aux deux points réguliers ξ et $f(\xi)$ telles que deux points du segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ de même classe sont associés et de même pour le segment $(f(\xi) - \tau', f(\xi) + \tau')$; puisque, par hypothèse, $\rho = \tau$, $\rho' = \tau'$ n'ont pas la propriété demandée, il y a sur le premier segment un point x_1 auquel correspond sur le second segment un certain point y_1 de même classe tel que

$$f_{p_1}(y_1) = f_{q_1}(x_1), \qquad q_1 \neq p_1 + 1$$

car, s'il n'y avait pas des points x et y de même classe sur ces segments le lemme énoncerait une trivialité. On a certainement $x_1 \neq \xi$, $y_1 \neq f(\xi)$; car, si $x_1 = \xi$ on aurait $f_{p_1}(y_1) = f_{q_1}(\xi)$, donc y_1 et $f(\xi)$ seraient de même classe, et tous les deux appartenant au segment $(f(\xi) - \tau', f(\xi) + \tau')$ ils seraient associés, donc on aurait, pour un indice n convenable, $f_n(y_1) = f_n(f(\xi))$, d'où $f_n(y_1) = f_{n+1}(x_1)$ contraire à l'hypothèse; de même, en supposant $y_1 = f(\xi)$ on aurait $f_{p_1}(f(\xi)) = f_{q_1}(x_1)$, donc, x_1 et ξ étant deux points de même classe du segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ seraient associés, d'où $f_n(x_1) = f_n(\xi)$ et puisque $x_1 \neq \xi$ on aurait $n > 0$ donc $f_n(x_1) = f_{n-1}(y_1)$ encore contraire à l'hypothèse. Posons donc

$$|x_1 - \xi| = 2\tau_1, \qquad |y_1 - f(\xi)| = 2\tau'_1.$$

Puisque, par hypothèse, $\rho = \tau_1$, $\rho' = \tau'_1$ n'ont pas la propriété demandée il s'ensuit de même l'existence de deux points x_2 et y_2 sur les segments $(\xi - \tau_1, \xi + \tau_1)$ et $(f(\xi) - \tau'_1, f(\xi) + \tau'_1)$ respectivement, tels que

$$f_{p_2}(y_2) = f_{q_2}(x_2), \qquad q_2 \neq p_2 + 1$$

et où $x_2 \neq \xi$, $y_2 \neq f(\xi)$; en continuant de cette manière on obtiendrait évidemment un couple de suites (x_i) et (y_i) de points x_i tendant vers ξ et y_i vers $f(\xi)$; mais ces suites étant parallèles, sans qu'on n'aurait $q_i = p_i + 1$ on se trouverait en contradiction avec la propriété d'un point ξ parfaitement régulier.

14. THÉORÈME V. — *Si ξ est un point régulier de E qui n'est pas parfaitement régulier, toute solution $\varphi(x)$ dans $\mathfrak{E}$ de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ continue pour $x = \xi$ est nécessairement discontinue pour $x = f(\xi)$.*

Si $x = \xi$ est un point parfaitement régulier il existe des quantités positives σ et σ' telles que l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admette au moins une solution continue à la fois dans tout l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et aux intervalles $[\xi - \sigma, \xi + \sigma]$ et $[f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma']$. Ces quantités σ et σ' ont en outre les propriétés suivantes: leur somme ne dépasse jamais la quantité $|f(\xi) - \xi|$ et l'une est une fonction non croissante de l'autre.

Démonstration. — Montrons d'abord que l'existence d'une solution continue à la fois pour $x = \xi$ et $x = f(\xi)$ entraîne la régularité parfaite du point ξ. En effet, il s'ensuit immédiatement que ξ et $f(\xi)$ sont des points réguliers; désignons donc encore par τ et τ' les quantités positives du théorème III: donc, s'il y a sur le segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ deux points de même classe ils sont associés, et de même pour le segment $(f(\xi) - \tau', f(\xi) + \tau')$; or, tout couple de quantités plus petites que τ et τ', respectivement, a évidemment les mêmes propriétés; supposons donc τ et τ' assez petites pour que

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \frac{1}{2}, \qquad |\varphi(y) - \varphi(f(\xi))| < \frac{1}{2}$$

si x et y sont des points de $\mathfrak{E}$ satisfaisant aux conditions $|x - \xi| \overline{\le} \tau$, $|y - f(\xi)| \overline{\le} \tau'$. Alors je dis que si x et y sont des points de même classe on a pour un indice p convenable $f_p(y) = f_{p+1}(x)$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(x) &= \varphi(y) - \varphi(f(\xi)) - (\varphi(x) - \varphi(\xi)) + \varphi(f(\xi)) - \varphi(\xi) \\ &= 1 + \sigma \end{aligned}$$

où

$$|\sigma| \overline{\le} |\varphi(x) - \varphi(\xi)| + |\varphi(y) - \varphi(f(\xi))| < 1$$

donc

$$0 < \varphi(y) - \varphi(x) < 2.$$

Mais x et y étant de même classe, soient p et q des indices tels que $f_p(y) = f_q(x)$, d'où $\varphi(y) - \varphi(x) = q - p$; on a donc nécessairement $q - p = 1$.

Passons à la démonstration du second énoncé du théorème. Soit, en vertu du lemme 9, $B(f)$ une base dans $\mathfrak{E}$ ayant la propriété qu'à tout point x du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ correspond sur ce même segment un élément a_x de $B(f)$ tel que

$f_n(x) = f_n(a_x)$ pour n convenable; ici ρ désigne la première des quantités ρ et ρ' du lemme 10. Désignons par y un point quelconque du segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$; or, d'après le lemme 10, s'il y a sur le premier segment un point x de même classe que y, on a $f_p(y) = f_{p+1}(x)$; d'autre part on a $f_n(x) = f_n(a_x)$; il s'ensuit, si $n \geqq p+1$

$$f_{n-1}(y) = f_{n-p-1}(f_p(y)) = f_{n-p-1}(f_{p+1}(x)) = f_n(x) = f_n(a_x),$$

et, si $n < p+1$.

$$f_p(y) = f_{p+1}(x) = f_{p+1-n}(f_n(x)) = f_{p+1-n}(f_n(a_x)) = f_{p+1}(a_x),$$

donc, dans les deux cas, pour un indice q convenable $f_q(y) = f_{q+1}(a_x)$.

Cela posé, désignons par C l'ensemble de tous les points de $B(f)$ appartenant au segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et par $\overline{B}$ l'ensemble de tous les points $\overline{a}$ de $B(f) - C$ auxquels correspond sur le segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$ au moins un point de la même classe; soit $y_{\overline{a}}$ un de ces points. Soit alors $B_1(f)$ l'ensemble de tous les points suivants: 1°, tout point de $B(f)$ qui n'appartient pas à $\overline{B}$; 2°, tous les points $y_{\overline{a}}$. Alors $B_1(f)$ est évidemment de nouveau une base pour $f(x)$ dans $\mathfrak{E}$. Définissons ensuite la fonction $\psi(x)$ dans $B_1(f)$ comme il suit:

Si a est un point de C, posons $\psi(a) = k$, k étant une constante, choisie à l'avance;

si a' est un point de $B_1(f)$ appartenant au segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$ posons $\psi(a') = k + 1$;

si enfin a'' est un élément de $B_1(f)$ n'appartenant ni à C, ni au segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$, soit $\psi(a'')$ quelconque.

La solution $\varphi(x)$ correspondante aura la propriété demandée. En effet, $\varphi(x)$ est évidemment constante dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et au segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$; soit alors y un point quelconque de $\mathfrak{E}$ sur le segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$; s'il existe sur $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ un point x de la même classe, on a, d'après ce qui précède, $f_q(y) = f_{q+1}(x)$, donc $\varphi(y) = \varphi(x) + 1 = k + 1$; sinon, il y a un point de $\overline{B}$ de la classe $C(y)$ et à ce point correspond un point a' de $B_1(f)$ sur $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$; mais alors y et a' sont des points associés, donc $\varphi(y) = \varphi(a') = k + 1$; donc $\varphi(x)$ est encore constante dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et au segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$.

Or, les quantités ρ et ρ' satisfont évidemment à la condition $\rho + \rho' < |f(\xi) - \xi|$. Sinon, les deux segments considérés auraient en effet au moins un point α commun, ce qui est impossible, car on aurait alors pour un indice convenable $f_n(\alpha) = f_{n+1}(\alpha)$, contrairement à la supposition que l'équation $f_n(x) = x$ n'est jamais vérifiée. De plus, étant donné un couple de quantités ρ et ρ' satisfaisant aux conditions précédentes, il en sera de même pour tout couple de quantités plus petites. Il s'ensuit qu'à une valeur déterminée de ρ p. ex., l'ensemble des valeurs de ρ' telles que ρ et ρ' gardent leurs propriétés, admet un maximum σ'_ρ; et σ'_ρ sera une fonction non croissante de ρ: supposons, en effet, qu'on ait, au contraire

$$\sigma'_{\rho+h} = \sigma'_\rho + k, \qquad h > 0, \qquad k > 0$$

pour de certaines valeurs de ρ, h, k; posons $\rho'' = \sigma'_\rho + k'$ où $k' < k$; d'après la signification de σ'_ρ le couple $\rho + h$ et ρ'' ont les propriétés signalées pour ρ et ρ', tandis que ρ et ρ'' ne les auraient pas, puisque $\rho'' > \sigma'_\rho$; mais cela est impossible d'après la remarque faite plus haut.

En partant alors d'un couple ρ et ρ' quelconque, on fera croître ρ' jusqu'à $\sigma' = \sigma'_\rho$; puisque d'autre part à toute valeur de ρ' inférieure à σ'_ρ correspond de même un maximum $\sigma_{\rho'}$ des valeurs admisibles des ρ, où $\sigma_{\rho'}$ est une fonction non croissante de ρ', il s'ensuit que σ et σ' ont toutes les propriétés signalées dans le théorème; en particulier on a $\sigma + \sigma' \overline{\leq} |f(\xi) - \xi|$.

Remarquons que dans le cas où $\sigma + \sigma' = |f(\xi) - \xi|$ il s'ensuit l'existence d'une solution $\varphi(x)$ continue dans tout l'intervalle $[\xi - \sigma, f(\xi) + \sigma']$ sauf peut être au point $\xi + \sigma = f(\xi) - \sigma'$.

15. *Propriétés des quantités σ et σ'.* — Terminons ces reflexions en montrant que les quantités σ et σ' du théorème V ont toujours au moins une des quatre propriétés suivantes:

a) A un des deux points $f(\xi) \pm \sigma'$ correspond sur le segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ un autre point de même classe, mais non associé à ce point.

b) Un des deux points $f(\xi) \pm \sigma'$ est la limite d'une suite de points y'_i extérieurs au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ auxquels correspond une autre suite de points y_i tendant vers un point de ce segment et tel que (y_i) et (y'_i) sont des suites distinctes.

c) A un des points $f(\xi) \pm \sigma'$ correspond sur le segment $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$ un point x tel que $f_p(f(\xi) \pm \sigma') = f_q(x)$, p et q étant des indices ne satisfaisant pas à la condition $q = p + 1$.

d) Un des points $f(\xi) \pm \sigma'$ est la limite d'une suite de points y_i extérieurs au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ auxquels correspond une suite de points x_i tendant vers un point du segment $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$ tel que (y_i) et (x_i) sont des suites parallèles dont les indices p_i et q_i, pour lesquels $f_{p_i}(y_i) = f_{q_i}(x_i)$, ne satisfont pas à la condition $q_i = p_i + 1$.

Supposons, en effet, qu'aucun des cas *a*), *b*), *c*) ne se présente pas et voyons qu'on retombe sur le cas *d*). Or, d'après la définition de σ et σ' ces quantités ont toujours les trois propriétés suivantes:

A) L'intervalle $[\xi - \sigma, \xi + \sigma]$ ne contient pas deux points de même classe non associés.

B) L'intervalle $[f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma']$ ne contient pas deux points de même classe non associés.

C) Il n'existe pas dans l'intervalle $[\xi - \sigma, \xi + \sigma]$ un point x et dans

$$[f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma']$$

un point y, tels que $f_p(y) = f_q(x)$, $q \neq p + 1$.

D'autre part aucun couple de quantités plus grandes que σ et σ' n'ont à la fois ces propriétés. Si donc $\rho' > \sigma'$ une au moins de ces propriétés manque au couple σ, ρ'; puisque ce n'est évidemment pas la propriété *A*), ce doit être *B*) ou *C*). Supposons d'abord que c'est la propriété *B*) qui manque à ρ', quelque petite que soit la différence $\rho' - \sigma'$; donc il y a sur le segment $(f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho')$ deux points de même classe mais non associés y_1 et y'_1; ils ne peuvent pas être tous les deux intérieurs à l'intervalle $[f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma']$ par hypothèse; soit donc y'_1 extérieur à cet intervalle; si y'_1 était un des points $f(\xi) \pm \sigma'$, y_1 doit être extérieur au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ puisque on se trouverait ailleurs dans le cas *a*), exclu par hypothèse. Supposons donc y'_1 extérieur à ce segment; soit $\delta_1 > 0$ sa distance à la frontière de ce segment. Remplaçons alors ρ' par la quantité $\sigma' + \frac{\delta_1}{2} = \rho'_1$; puisque ρ'_1 n'a non plus la propriété *B*) la conséquence en sera la même: on trouve de nouveaux points y_2 et y'_2 dont y'_2 au moins extérieur au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ et qui sont de même classe mais non associés. En choisissant au lieu de ρ' la quantité $\sigma' + \frac{\delta_2}{2}$ où δ_2 est la distance de y'_2 de la frontière du segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ et en continuant de la même manière, on trouverait un couple de suites distinctes (y_i) et (y'_i) où tous les y'_i sont extérieurs au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ et dont une infinité tendraient vers un des points $f(\xi) \pm \sigma'$; les points y_i correspondants ayant au moins un point limite sur le segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ on tomberait dans le cas *b*), exclu par hypothèse.

Donc, à partir d'une certaine valeur de ρ' encore dépassant σ' la propriété *B*) est nécessairement satisfaite; c'est donc pour ces couples σ, ρ' la propriété *C*) qui est en défaut. Il y a donc dans l'intervalle $[f(\xi) - \rho', f(\xi) + \rho']$ un point y_1 auquel correspond dans l'intervalle $[\xi - \sigma, \xi + \sigma]$ un point x_1 tel que $f_{p_1}(y_1) = f_{q_1}(x_1)$ où $q_1 \neq p_1 + 1$. Le point y_1 est en outre extérieur au segment $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$; car, par hypothèse, il n'appartient pas à l'intervalle $[f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma']$; et s'il était un des points $f(\xi) \pm \sigma'$ on se trouverait dans le cas *c*), exclu par hypothèse. Soit donc δ_1 la distance de y_1 à la frontière de $(f(\xi) - \sigma', f(\xi) + \sigma')$ et choisissons $\rho' = \sigma' + \frac{\delta_1}{2}$; la conséquence sera la même, et en continuant de la même façon on trouvera un couple de suites parallèles, (x_i) et (y_i) où une infinité des y_i tendent vers un des points $f(\xi) \pm \sigma'$; les points x_i correspondants ayant au moins un point limite appartenant au segment $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$ on peut extraire des suites (x_i) et (y_i) un autre couple de suites satisfaisant à toutes les conditions du cas d).

Faisons encore les remarques suivantes: En posant $\sigma' = P(\sigma)$ nous avons vu que $P(\sigma)$ est une fonction non croissante de σ. Or, supposons qu'on soit pour $\sigma = \sigma_0$ dans un des cas a) ou b) définis plus haut. On aura alors $P(\sigma) = P(\sigma_0)$ pour $\sigma < \sigma_0$. Supposons, en effet, que $P(\sigma) > P(\sigma_0)$; alors les points $f(\xi) \pm P(\sigma_0)$ sont intérieurs à l'intervalle $[f(\xi) - P(\sigma), f(\xi) + P(\sigma)]$; mais alors on aurait dans cet intervalle au moins un couple de points de même classe, non associés, contrairement à la définition de $P(\sigma)$. Il suit de là que:

Si la fonction $P(\sigma)$ ne se réduit pas à une constante, on a, à partir d'une certaine valeur de σ, constamment un des cas c) ou d) signalés plus haut.

En effet, si $P(\sigma)$ n'est pas constante, soient σ_1 et $\sigma_2 > \sigma_1$ des valeurs de σ telles que $P(\sigma_2) < P(\sigma_1)$; alors on doit avoir, d'après ce qui précède, un des cas c) ou d) pour $\sigma = \sigma_2$; soit alors $\sigma_3 > \sigma_2$; si pour $\sigma = \sigma_3$ on avait un des cas a) ou b) on aurait $P(\sigma) = P(\sigma_3)$ pour $\sigma < \sigma_3$, donc aussi $P(\sigma_1) = P(\sigma_2) = P(\sigma_3)$ contrairement à l'hypothèse.

Conditions d'existence des solutions continues dans un certain ensemble d'intervalles.

16. *Le rang mutuel de deux points.* — En reprenant les considérations des paragraphes précédents on voit sans peine qu'elles s'appliquent avec une légère modification pour obtenir la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admette une solution continue en deux points ξ et η quelconques de même classe. Si, en effet, ξ et η satisfont à une égalité de la forme $f_p(\eta) = f_{p+r}(\xi)$ où r est un entier (positif, nul ou négatif) et p un entier $\geqq 0$, il faut et il suffit pour cela que ξ et η soient réguliers et que tout couple de suites parallèles (x_i) et (y_i) tendant vers ξ et η respectivement, ait la propriété suivante: à partir d'une certaine valeur de i les indices p_i et q_i satisfaisant à la relation $f_{p_i}(y_i) = f_{q_i}(x_i)$ remplissent la condition $q_i = p_i + r$. Je dis dans ce cas que η est *du rang r par rapport à ξ*.

Supposons alors que ξ et η soient des points réguliers qui ne sont pas de la même classe, et plaçons-nous d'abord dans le cas où il n'existe pas de couple de suites parallèles tendant vers ξ et η respectivement. Soient τ et τ' des quantités positives telles que, si le segment $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ contient deux points de même classe, ceux-ci sont associés, et de même pour le segment $(\eta - \tau', \eta + \tau')$. Il est presque évident qu'on peut, dans ce cas, déterminer des quantités positives ρ et ρ' ayant la propriété suivante: si les segments $(\xi - \rho', \xi + \rho)$ et $(\eta - \rho', \eta + \rho')$ contiennent un couple de points de même classe, l'un d'eux est toujours un des points ξ ou η. Car, sinon, on trouverait évidemment un couple de suites parallèles comme il n'en existe pas d'après l'hypothèse. Or je dis qu'en ce cas il faut et il suffit pour l'existence d'une solution continue en ξ et en η, qu'il existe un entier fixe r tel que toute suite (y_i) de points de la classe $C(\xi)$ tendant vers η satisfasse, à partir d'une certaine valeur de i, à la condition $f_{p_i}(y_i) = f_{p_i+r}(\xi)$ et qu'inversement toute suite (x_i) de points de la classe $C(\eta)$ tendant vers ξ satisfasse de même, à partir d'une certaine valeur de i à la condition $f_{p_i+r}(x_i) = f_{p_i}(\eta)$. Je dirai dans ce cas encore que η est *du rang r par rapport à* ξ. (Si les segments $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et $(\eta - \rho', \eta + \rho')$ ne contiennent pas de points de même classe r est évidemment quelconque).

Il est, en effet, évident que les quantités ρ et ρ' peuvent être choisies assez petites pour que deux points x et y de même classe appartenant à $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et $(\eta - \rho', \eta + \rho')$ respectivement satisfassent à une équation de la forme $f_p(y) = f_{p+r}(x)$. Cela posé, la demonstration s'achève de la même manière que pour le second énoncé du théorème V.

En supposant toujours ξ et η réguliers mais non de même classe, supposons maintenant qu'il existe au moins un couple de suites parallèles (x_i) et (y_i) tendant vers ξ et η respectivement. Si alors, quelles que soient ces suites, il existe un entier fixe r, tel qu'à partir d'une certaine valeur de i on a toujours une relation de la forme $f_{p_i}(y_i) = f_{p_i+r}(x_i)$ je dis encore que η est *du rang r par rapport à* ξ.

17. *Solution continue en deux points quelconques.* — On aura alors les analogues suivantes du lemme 10 et du théorème V:

LEMME 11. — *Si des deux points réguliers ξ et η le second est du rang r par rapport à ξ il existe des quantités ρ et ρ' ayant la propriété suivante: si x est un point du segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et y un point du segment $(\eta - \rho', \eta + \rho')$ il existe, toute fois où x et y sont de même classe un indice p pour lequel on a $f_p(y) = f_{p+r}(x)$.*

THÉORÈME VI. — *En désignant par ξ et η des points réguliers, s'il n'existe pas d'entier r tel que η soit du rang r par rapport à ξ toute solution de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$, continue en un des points ξ, η est nécessairement discontinue en l'autre.*

S'il existe, au contraire, au moins un entier r tel que η est du rang r par rapport à ξ il existe des quantités positives ρ et ρ' telles que l'équation considérée admette au moins une solution continue à la fois dans l'ensemble commun à $\mathfrak{E}$ et aux segments $(\xi - \rho, \xi + \rho)$ et $(\eta - \rho', \eta + \rho')$.

Pour la démonstration complète on n'aura qu'à répéter dans les différents cas des considérations analogues à celles qui ont permis d'établir le lemme 10 et le théorème V, ce que je ne réproduirai pas ici.

18. *Système régulier d'intervalles.* — Cela posé, on peut d'après le lemme 11, dire que le segment $(\eta - \rho', \eta + \rho')$ est du rang r par rapport au segment $(\xi - \rho, \xi + \rho)$. Mais remarquons maintenant, qu'étant donné trois segments (a, b), (a', b') et (a'', b'') où le second est du rang r par rapport au premier et le troisième du rang s par rapport au second, on ne peut pas établir que le troisième ait aucun rang par rapport au premier; et même s'il est ainsi, il n'est pas certain que ce rang t remplisse la condition $t = r + s$. Or, on trouve sans peine que l'existence d'une solution continue dans les trois segments exige qu'il existe au moins un système de rangs r, s, t remplissant cette condition. C'est seulement dans le cas où les trois segments contiennent des points de même classe que cela a nécessairement lieu.

Appelons donc *système régulier d'intervalles* tout système d'intervalles, en nombre fini ou infini, tel que, pour trois intervalles quelconques du système existent des rangs r, s, t satisfaisant à la condition $t = r + s$.

Lemme 12. — *Désignons par (I_n), $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ un système régulier d'intervalles; il existe une certaine base $\overline{B}(f)$ ayant la propriété suivante: si x_k est un point de l'intervalle I_k il y a dans $\overline{B}(f)$ un élément correspondant a, appartenant à un intervalle I_l ou $l \leqq k$; si $l = k$, x_k et a sont associés et si $l < k$ il y a un certain nombre entier $r_{k,l}$ tel que tout couple de points x et y de même classe dans I_k et I_l respectivement, satisfont à une égalité de la forme $f_p(y) = f_q(x)$ où $p = q + r_{k,l}$; ces entiers $r_{k,l}$ satisfont d'ailleurs identiquement à la condition*

$$r_{k,l} = r_{k,m} + r_{m,l}$$

quels que soient k, l, m.

Soit, en effet, $B(f)$ une base quelconque pour $f(x)$ et supposons qu'on ait déjà démontré l'existence d'une base $B_k(f)$ ayant les propriétés suivantes:

Si l est un entier positif $\leqq k$ et x_l un point quelconque de I_l il correspond à x_l un certain élément a de $B_k(f)$ appartenant à un intervalle I_m avec $m \leqq l$; si $m = l$, x_l et a sont associés, et si $m < l$ on a $f_{q+r_{l,m}}(a) = f_q(x_l)$ et tout couple de points de même classe, x, y, appartenant à I_l et I_m respectivement satisfait à une égalité de cette même forme.

Si $k = 1$ on retombe dans un cas déjà traité. Cela posé, soit C_k l'ensemble de tous les points de $B_k(f)$ appartenant à un quelconque des intervalles $I_1, \ldots, I_k$, et désignons par $\overline{B}_k$ l'ensemble de tous les points de $B_k(f) - C_k$ ayant la propriété suivante: à tout point $\overline{a}_k$ de $\overline{B}_k$ correspond dans I_{k+1} au moins un point de la même classe; soit $x_{\overline{a}_k}$ un tel point. Désignons alors par $B_{k+1}(f)$ l'ensemble de tous les points suivants: 1°, tout point de $B_k(f)$ n'appartenant pas à $\overline{B}_k$; 2°, tous les points $x_{\overline{a}_k}$.

Soit alors x_l un point quelconque de l'intervalle I_l où l est un des nombres 1, 2, ..., k. Or, l'élément correspondant de $B_{k+1}(f)$ appartient à C_k, donc à $B_k(f)$; donc $B_{k+1}(f)$ a les mêmes propriétés que $B_k(f)$ par rapport aux intervalles $I_1, \ldots, I_k$. Soit alors x_{k+1} un point quelconque de I_{k+1} et a l'élément correspondant de $B_{k+1}(f)$.

Si a est un point $x_{a_k}^-$ les points x_{k+1} et a sont associés; sinon a ne peut pas appartenir à $B_k(f) - C_k$; car si a était un point de cet ensemble il y correspondrait dans I_{k+1} le point x_{k+1} de même classe, donc a serait élément de $\overline{B}_k$, et étant élément de $B_{k+1}(f)$ appartiendrait à I_{k+1}; mais alors a serait un point $x_{a_k}^-$. Donc, a appartenant à $B_k(f)$ sans appartenir à $B_k(f) - C_k$ est élément de C_k, donc c'est un point d'un intervalle I_l où $l \leqq k$. On a donc dans I_l et I_{k+1} les éléments a et x_{k+1} de même classe, donc $f_p(x_{k+1}) = f_q(a)$ où $q = p + r_{k+1,l}$, et alors tout couple x, y de points de même classe dans ces intervalles satisfait à une égalité de la même forme.

Or, puisque d'après la définition d'un système régulier d'intervalles les entiers $r_{k,l}$ satisfont évidemment à la condition $r_{k,l} = r_{k,m} + r_{m,l}$, on peut, quel que soit k, former une base ayant les propriétés signalées. Si le nombre d'intervalles I_n est infini on conclut par induction transfinie l'existence d'une base satisfaisant aux conditions du lemme.

19. *Solution continue dans un système régulier d'intervalles.* — Nous avons déjà remarqué que l'existence d'une solution continue dans un système d'intervalles assez petits entraîne la régularité de ce système. A l'aide du lemme 12 on montrera sans peine l'inverse:

LEMME 13. — *Etant donné un système régulier d'intervalles, il existe au moins une solution continue dans ce système.*

Définissons, en effet, la fonction $\psi(x)$ dans $\overline{B}(f)$ de la manière suivante: soit c une constante quelconque et supposons $\psi(x)$ déjà définie pour tout point de $\overline{B}(f)$ appartenant à un des intervalles $I_1, \ldots, I_k$ et en particulier, qu'on ait défini $\psi(a) = c$, si a est un point de $\overline{B}(f)$ appartenant à I_1. Soit alors $a^{(k+1)}$ un élément de $\overline{B}(f)$ appartenant à I_{k+1}. Posons alors

$$\psi(a^{(k+1)}) = c + r_{k+1,1}.$$

La fonction $\varphi(x)$ correspondante sera constante dans chaque intervalle I_n, ce qu'on constatera sans peine. Remarquons d'autre part que tous les nombres $r_{k,l}$ ne sont pas nécessairement tout-à-fait déterminés parcequ'il peut se faire que le rang d'un intervalle par rapport à un autre est arbitraire. Dans ce cas le système (I_n) tombera en plusieurs systèmes partiels; alors la fonction $\psi(x)$ peut être définie de plusieures manières. Sans m'occuper de ces questions je terminerai ce paragraphe par la proposition suivante, qui n'est que le résultat des lemmes précédents:

THÉORÈME VII. — *Etant donné un intervalle I quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admette une solution continue* par intervalles *dans I est qu'on puisse diviser I en un système régulier d'intervalles partiels.*

20. *Remarques finales.* — Toutes les solutions particulières de l'équation considérée qui ont servi a montrer l'existence des solutions d'une certaine espèce, sont, non seulement continues, mais même constantes, dans des intervalles de longueur finie. Or, pour trouver les conditions pour l'existence d'une solution continue dans tout un intervalle donné, ces solutions ne suffissent plus Il faudrait pour cela envisager des solutions qui varient d'un point à l'autre Remarquons donc que la circonstance qui nous a amenés à considérer ces solutions constantes par intervalles, est la possibilité que les points associés à un point donné peuvent former un ensemble infini dans tout intervalle entourant ce point; et la solution doit avoir la même valeur en tous points associés entre eux. Il n'est donc pas sans intérêt de remarquer qu'il existe des fonctions $f(x)$ pour lesquelles tout point de l'ensemble E est la limite d'une suite de points associés, et pour lesquelles l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admet une solution continue dans tout l'ensemble $\mathfrak{E}$ considéré.

D'autre part, le cas le plus simple à traiter, est celui où l'on peut diviser l'intervalle donné en intervalles partiels, chacun ne contenant plus de points associés; dans ce cas la formation d'une base est immédiate, et on aura alors la solution générale de l'équation d'Abel sans peine.

Exemples.

Pour mettre en lumière les notions des paragraphes précédents, je vais traîter succinctement quelques exemples.

21. *Premier exemple.* — Désignons par E l'ensemble des points x tels que $-8 \leqq x < 4$ et définissons la fonction $f(x)$ dans E en posant

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{pour} \quad -8 \leqq x \leqq 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 6 \quad \text{»} \quad 2 < x < 4.$$

Or, l'ensemble $f(E)$ contient les points du segment $(0, 5)$; soit donc $\mathfrak{E}$ le segment $(-8, 5)$. Pour les itérées de $f(x)$ on aura

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x + 6 \quad \text{pour} \quad -8 \leqq x \leqq -4$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 4 \quad \text{»} \quad -4 < x < 0$$

tandis que les autres itérées n'existent pas.

Tout point de $\mathfrak{E}$ est régulier, sauf $x = 0$ et $x = 4$. Pour $x = 0$ on a p. ex. les deux suites distinctes $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2^{n-2}}\right)$ qui tendent toutes les deux vers 0.

Les points du segment $(-8, -4)$ forment une base $B(f)$ dans $\mathfrak{E}$, ce que l'on voit sans peine.

Les intervalles $[-8, 0]$, $[0, 4]$, $[4, 5]$ forment un système régulier, puisque un quelconque entre eux ne contient pas deux points de même classe non associés, et d'autre part le second a le rang 1 et le troisieme le rang 2 par rapport au premier et le troisième le rang 1 par rapport au second. L'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admet donc des solutions continues dans tout l'ensemble $\mathfrak{E}$, sauf aux points non réguliers 0 et 4. D'ailleurs une telle solution s'obtient en prenant pour $\psi(x)$ une fonction continue quelconque dans $B(f)$.

22. *Deuxième exemple.* — Définissons la fonction $g(x)$ sur le segment $(-4, 8)$ en posant

$$g(x) = 2x + 4 \qquad \text{pour} \qquad -4 \leqq x \leqq 2$$

$$g(x) = -2x + 12 \qquad \text{»} \qquad 2 < x \leqq 8.$$

Il existe des itérées de tous les ordres et les $g_n(x)$ appartiennent toujours au segment $(-4, 8)$; pour les calculer, le plus commode sera d'écrire un nombre x du segment $(-4, 8)$ sous la forme

$$x = -4 + 12\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_r}{2^r} + \cdots\right)$$

où tous les α_r sont égaux à 0 ou 1. Soit alors n un nombre naturel quelconque et posons

$$\alpha_r = \beta_r^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad \alpha_r = 1 - \beta_r^{(n)}$$

suivant que $\alpha_n = 0$ ou $\alpha_n = 1$. Alors on trouve sans peine

$$g_n(x) = -4 + 12\left(\frac{\beta_{n+1}^{(n)}}{2} + \frac{\beta_{n+2}^{(n)}}{2^2} + \cdots + \frac{\beta_{n+r}^{(n)}}{2^r} + \cdots\right).$$

De là on trouve la condition pour qu'un point x satisfasse à l'équation $g_n(x) = x$, ce qui donne pour l'ensemble de ces points la formule

$$x_{n,i} = -4 + 12\frac{2i}{2^n - 1}$$

où i est un entier quelconque entre 1 et $2^{n-1} - 1$.

Cela posé, soit E l'ensemble de tous les points du segment $(-4, 8)$ sauf les points $x_{n,\iota}$ — en nombre dénombrable — définis plus haut. Définissons la fonction $f(x)$ dans E en posant $f(x)=g(x)$ pour tout point de E. Il s'ensuit $f_n(x)=g_n(x)$ pourvu que $f_n(x)$ existe. Or, si x est un nombre irrationnel les itérées de tout ordre existent, tandis que, pour x rationnel, le développement de x considéré plus haut sera périodique à partir d'un certain terme, ce qui entraîne que, pour une valeur convenable de n, $f_n(x)$ est un des points $x_{n,\iota}$, donc les itérées d'ordre supérieur à n n'existent plus.

Soit $\mathfrak{E}$ le segment $(-4, 8)$; l'équation $f_n(x) = x$ n'étant jamais satisfaite pour $n > 0$, il doit exister des solutions de l'équation $\varphi\big(f(x)\big) = \varphi(x) + 1$ dans $\mathfrak{E}$. Mais on constatera facilement qu'aucun point de $\mathfrak{E}$ n'est régulier; donc toute solution doit être totalement discontinue.

23. *Troisième exemple.* — Soit E l'ensemble des points du segment $(-4, 26)$ sauf les deux points -4 et 6. Définissons $f(x)$ dans E en posant

$$f(x) = 2x + 4 \qquad \text{pour} \qquad -4 < x \leq 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 9 \qquad \text{»} \qquad 2 < x \leq 26, \qquad x \neq 6.$$

Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des points du segment $(-4, 26)$. Posons, pour abréger

$$\eta_k = -4 + \frac{6}{2^{k-1}}, \qquad \eta'_k = 26 - \frac{12}{2^{k-1}}$$

$$\xi_k = -4 + \frac{10}{2^k}, \qquad \xi'_k = 26 - \frac{20}{2^k}$$

et soit

i_0 l'ensemble des points x tels que $\eta_1 < x < \eta'_1$

i_k » » » » » » $\eta_{k+1} < x \leq \eta_k$

i'_k » » » » » » $\eta'_k \leq x < \eta'_{k+1}$

On a alors pour $f_n(x)$ les formules suivantes

$$\begin{array}{l} \text{Dans } i_k \\ (k=0, 1, 2, \ldots) \\ x \neq \xi_k \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} f_n(x) = 2^n(x+4) - 4 & \text{pour} & n \leq k, \\ f_n(x) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} [2^k(x+4) - 10] + 6 & \text{»} & n > k, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Dans } i'_k \\ (k=1, 2, 3, \ldots) \\ x \neq \xi'_k \end{array} \left\{ \begin{array}{lr} f_n(x) = -2^{n-2}(x-26)-4 & \text{pour } \quad 0 < n \leqq k, \\ f_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-} [-2^{k-2}(x-26)-10]+6 & \text{»} \qquad n > k, \end{array} \right.$$

$$f_n(\xi_k) = \xi_{k-n} \qquad \text{pour} \qquad n \leqq k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$f_n(\xi'_k) = \xi_{k-n+i} \qquad \text{»} \qquad n \leqq k+1, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

tandis que les itérées d'ordre supérieur à k et $k+1$, respectivement, n'existent pas pour les points ξ_k et ξ'_k, puisque $\xi_0 = 6$ n'appartient pas à E. Enfin $f(26) = -4$ et les itérées d'ordre > 1 n'existent pas pour $x = 26$.

On constatera sans peine que les seuls points non réguliers dans $\mathfrak{E}$ sont les points -4, 26 et les points ξ_k et ξ'_k.

Considérons alors l'intervalle $[\xi_1, \xi_0] = [1, 6]$: je dis qu'on peut le diviser en un système régulier d'intervalles; prenons, en effet, pour points de division les points

$$\pi_k = 1 + \frac{1}{4^k}, \qquad \pi'_k = 6 - \frac{4}{4^k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et posons

$$I_1 = [\pi_1, \pi'_1], \qquad I_{2r} = [\pi_{r+1}, \pi_r], \qquad I_{2r+1} = [\pi'_r, \pi'_{r+1}].$$

On constatera sans peine que l'intervalle I_q a le rang $r_{q,p} = 2\left(\left[\frac{q}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ par rapport à I_p et l'on a, pour des indices quelconques

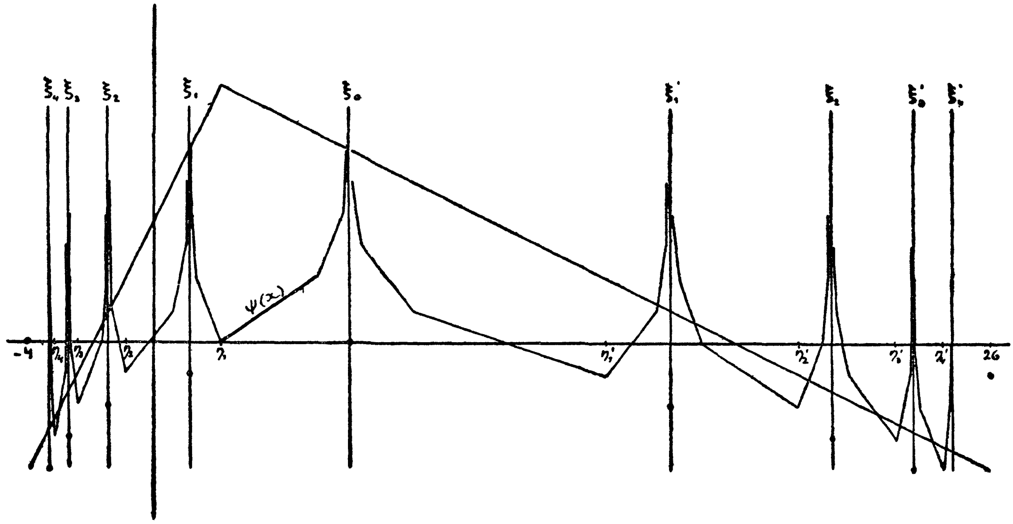
$$r_{s,p} = r_{s,q} + r_{q,p}.$$

On verra qu'on peut même diviser tout l'intervalle $[-4, 26]$ en un seul système régulier d'intervalles. Il existe donc des solutions de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ continues par intervalles dans tout l'ensemble $\mathfrak{E}$; cependant, ces solutions doivent être discontinues, au moins aux points -4, 26, ξ, ξ'_k.

On établira facilement qu'une base $B(f)$ pour $f(x)$ dans $\mathfrak{E}$ est formée par l'ensemble des points suivants: 1°, le points x tels que $2 \leqq x < 5$; 2° les points -4 et 6. Pour un point x tel que $2 \leqq x < 6$ supposons $\pi'_q \leqq x < \pi'_{q+1}$; alors le point $a_x = 4^q(x-6)+6$ sera un point de $B(f)$ et $x = f_{2q}(a_x)$. Si x appartient à $[6, 14]$ le point $y = f(x)$ est dans $[2, 6]$ donc a_y est de la classe $C(x)$. Pour les points de i_k et i'_k une certaine itérée sera un point déjà étudié

En choisissant $\psi(x)$ dans $B(f)$ de manière à être continue dans $[2, 5]$ la solution $\varphi(x)$ correspondante sera continue par intervalles dans $\mathfrak{E}$; si, de plus, $\psi(x)$ est choisie telle que $\lim\limits_{x \to 5} \psi(x) = \psi(2) + 2$ la solution $\varphi(x)$ sera continue partout dans $\mathfrak{E}$ sauf aux points non réguliers — 4, ξ_k, ξ'_k, 26.

La figure donne l'aspect d'une telle solution.



Trondhjem, 3 janvier 1927.

R. TAMBS LYCHE.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Définitions générales.

Conditions d'existence des solutions en général.

Sur la distribution des points réguliers.

Conditions pour l'existence d'une solution continue en un point donné.

Conditions pour l'existence d'une solution continue à la fois en ξ et en $f(\xi)$.

Rend. Circ. Matem. Palermo, t. LI (1927). — Stampato il 26 marzo 1927.

Conditions d'existence des solutions continues dans un certain ensemble d'intervalles.

Exemples.