J. Favard

Sur les fonctions harmoniques presque périodiques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1927

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1927__77__1_0>

Nº D'ORDRE :
1936.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. J. FAVARD

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES PRESQUE PÉRIODIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ : THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS CONTINUS FINIS.

Soutenues le 1927, devant la Commission d'examen.

MM. VESSIOT, *Président.*
MONTEL, DENJOY, } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1927

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen .... MOLLIARD, Professeur, Physiologie végétale.

Doyen honoraire .... P. APPELL.

Professeurs honoraires ... P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS, H. LE CHATELIER, H. LEBESGUE, A. FERNBACH.

Professeurs

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
HAUG	Géologie.
GABRIEL BERTRAND ..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
G. URBAIN	Chimie minérale.
EMILE BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
ABRAHAM	Physique
CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie générale.
VESSIOT.	Théorie des groupes et calcul des variations.
COTTON	Physique générale.
DRACH....	Application de l'analyse à la géométrie.
C. FABRY.	Physique.
C. PÉREZ.....	Zoologie.
A. LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
LÉON BERTRAND.....	Géologie appliquée et géologie régionale.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD..........	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD....	Botanique.
C. MAURAIN.........	Physique du globe.
P. MONTEL..........	Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT. ...	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
G. JULIA.............	Mathématiques générales.
A. JOB..............	Chimie générale.
N................. .	Géographie physique.
N...................	Chimie (Enseignement P. C. N.).

E. HÉROUARD....	Zoologie.	A. GUILLET.......	Physique.
RÉMY PERRIER....	Zoologie (Enseignnt P.C.N.)	C. MAUGUIN... ..	Minéralogie.
G. SAGNAC..	Physique théorique et physique céleste.	L. BLARINGHEM..	Botanique.
		A. MICHEL-LÉVY.	Pétrographie.
E. PÉCHARD......	Chimie (Enseignnt P.C.N.)	A. DEREIMS	Géologie.
V. AUGER.........	Chimie analytique.	R. DONGIER......	Physique du globe.
M. GUICHARD.....	Chimie minérale.		

Secrétaire .... D. TOMBECK.

81255 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A LA MÉMOIRE

DE MA MÈRE

A

MONSIEUR HARALD BOHR

PROFESSEUR A L'ECOLE ROYALE POLYTECHNIQUE
DE COPENHAGUE

A

MONSIEUR VESSIOT

ET A MES MAITRES

DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES

FONCTIONS HARMONIQUES
PRESQUE PÉRIODIQUES

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ
DE LA THÉORIE DES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES.

1. Dans trois Notes des *Comptes rendus* et dans trois Mémoires des *Acta mathematica* [1] M. H. Bohr a créé la théorie des fonctions presque-périodiques [2]. Diverses généralisations ont été indiquées par MM. Stepanoff [3] et Besicovitch [4], enfin M. Bochner [5] a donné

---

(1) H. Bohr, *Sur les fonctions presque périodiques* (*Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 737); *Sur l'approximation des fonctions presque périodiques par des sommes trigonométriques* (*Ibid.*, t. 177, 1923, p. 1090); *Sur les fonctions presque periodiques d'une variable complexe* (*Ibid.*, t. 180, 1925, p. 645); *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen* : I (*Acta mathematica*, t. 45, p. 29-127); II (*Ibid*, t. 46, 1925, p. 101-214); III (*Ibid.*, t. 47, p. 237-274).

(2) Ces fonctions contiennent, comme cas particulier, les fonctions quasi périodiques de Bohl-Esclangon : Bohl, *Magister dissertation*, Dorpat, 1893; *Journal de Crelle*, t. 131, 1906, p. 268-321. — Esclangon, *Thèse*, Paris, 1904; *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*, 1919.

(3) Stepanoff, *Sur quelques généralisations des fonctions presque périodiques* (*Comptes rendus*, t. 181, 1925, p. 90); *Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen* (*Math. Annalen*, t. 95, 1926, p. 473-498).

(4) Besicovitch, *Sur quelques points de la théorie des fonctions presque périodiques* (*Comptes rendus*, t. 181, 1925, p. 394).

(5) Bochner, *Sur les fonctions presque périodiques de Bohr* (*Comptes rendus* t. 180, 1925, p. 1156); *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen* [*Math. Annalen* (sous presse)].

des propriétés nouvelles des fonctions de M. Bohr ainsi qu'une méthode de sommation des développements analogue à celle de M. Féjer pour les fonctions périodiques.

Nous commencerons par exposer brièvement la théorie des fonctions de M. Bohr : celle des fonctions continues presque périodiques.

2. *Définition.* — Une fonction, réelle ou complexe, d'une variable réelle t, définie et continue dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$:

$$f(t) = u(t) + i\,v(t),$$

est dite presque périodique lorsqu'à tout nombre ε ($>$ o mais aussi petit que l'on veut) on peut faire correspondre une longueur

$$l = l(f, \varepsilon) > 0,$$

telle, que tout intervalle de longueur $l (t_1 < t < t_2$ avec $t_2 - t_1 = l)$ contienne au moins une presque période τ appartenant à ε, c'est-à-dire un nombre $\tau(f, \varepsilon)$ pour lequel on a l'inégalité

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon$$

dans tout l'intervalle : $-\infty < t < +\infty$.

Toute fonction presque périodique est bornée et uniformément continue dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. La somme et le produit de deux fonctions presque périodiques est encore une fonction presque périodique, il en est de même du quotient quand le dénominateur a son module supérieur à une quantité positive : c'est ce que M. Bohr exprime en disant que les fonctions presque périodiques forment une classe.

Avec $f(t)$ les fonctions $f(t+h)$, $c(f(t)$, $|f(t)|$, $|f(t)|^2$, $u(t)$ et $v(t)$ sont aussi presque périodiques. Tout polynome exponentiel de la forme

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n t},$$

où les a_n sont des constantes et les λ_n des constantes réelles, est une fonction presque périodique.

La fonction limite d'une suite uniformément convergente, dans

$$-\infty < t < +\infty,$$

de fonctions presque périodiques est aussi presque périodique : ainsi une série uniformément convergente dans tout l'intervalle

$$-\infty < t < +\infty$$

et de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

représente une fonction presque périodique.

3. Pour toute fonction presque périodique $f(t)$ il existe une valeur moyenne que nous désignerons par $\mathrm{M}\{f(t)\}$ et qui est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{M}\{f(t)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,dt,$$

dans la dernière expression c est une constante et sa convergence vers $\mathrm{M}\{f(t)\}$ a lieu uniformément en c.

Lorsque, dans la suite, nous aurons à effectuer cette opération sur des fonctions de plusieurs variables $f(x, y, z)$, nous mettrons en indice la variable par rapport à laquelle la moyenne est faite, par exemple :

$$\mathrm{M}_z\{f(x, y, z)\} = \lim_{Z \to \infty} \frac{1}{Z}\int_0^Z f(x, y, z)\,dz.$$

D'après ce que nous venons de rappeler, si $f(t)$ est presque périodique, il en est de même de $f(t)\,e^{-i\lambda t}$; par suite,

$$\mathrm{M}\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\} = a(\lambda)$$

existe également. A toute fonction presque périodique correspond une suite seulement dénombrable de nombres λ tels que $a(\lambda)$ soit différent de zéro. Désignons par $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_n \ldots$ les valeurs de λ pour lesquelles $a(\lambda) \neq 0$, l'ordre étant d'ailleurs arbitraire (avec $\Lambda_0 = 0$ si c'est nécessaire) et par $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ les valeurs moyennes correspondantes. Les nombres Λ sont appelés exposants et les A coefficients de Fourier de la fonction; formant alors la série

$$\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t},$$

nous dirons qu'elle est la série de Fourier de la fonction $f(t)$ et, pour rappeler la relation entre la fonction et la série, nous écrirons, suivant la notation d'Hurwitz :

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\prime} A_n e^{i\Lambda_n t}.$$

Dans le cas des fonctions périodiques, la série de Fourier ainsi formée est la même que celle obtenue par la méthode ordinaire. Toute fonction presque périodique réelle $f(t)$ est susceptible d'un développement de la forme

$$f(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t),$$

où les α et les β sont des constantes réelles et les λ des nombres positifs.

4. Pour une fonction presque périodique on a l' « égalité de Parseval », que M. Bohr appelle aussi « théorème fondamental », qui exprimée par

$$M\{|f(t)|^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2$$

et pour une fonction réelle

$$2M\{[f(t)]^2\} = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Si alors on convient de dire qu'une suite de fonctions presque périodiques $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, ... converge en moyenne vers une fonction presque périodique $f(t)$ lorsque

$$\lim_{n \succ \infty} M\{|f(t) - \varphi_n(t)|^2\} = 0$$

(et cela entraîne l'existence d'un nombre N, pour tout nombre ε donné, tel que si n_1 et $n_2 > N$ on ait

$$M\{|\varphi_{n_1}(t) - \varphi_{n_2}(t)|^2\} \leqq \varepsilon.$$

la relation précédente exprime que la somme des N premiers termes de la série de Fourier de la fonction converge en moyenne vers $f(t)$ lorsque N augmente indéfiniment.

De là on déduit facilement le théorème d'unicité :

Une fonction presque périodique possède une série de Fourier et la connaissance de la série suffit pour déterminer la fonction : une fonction dont la série de Fourier est identiquement nulle est aussi identiquement nulle; deux fonctions presque périodiques différentes ont deux séries de Fourier différentes.

De là aussi le calcul formel des séries de Fourier; pour la somme de deux fonctions le théorème s'obtient immédiatement à partir du calcul des coefficients; mais on a aussi les propositions : la série de Fourier du produit de deux fonctions presque périodiques s'obtient par multiplication formelle des séries de Fourier de ces deux fonctions; la série de Fourier de la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions presque périodiques s'obtient par un passage à la limite formel.

Avec $f(t)$, la fonction

$$\int_t^{c+t} f(t)\,dt \qquad (c \text{ constant})$$

est aussi presque périodique et sa série de Fourier s'obtient en exécutant formellement l'opération $\int_t^{t+c}$ sur la série de $f(t)$.

Lorsque l'intégrale indéfinie $\varphi(t) = \int f(t)\,dt$ d'une fonction presque périodique est bornée, elle est aussi presque périodique [1] (pour cela il est nécessaire, mais non suffisant, que la série de $f(t)$ n'ait pas de terme constant) et son développement s'obtient par intégration formelle :

$$\varphi(t) \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}.$$

(1) Bohl, *Journal de Crelle*, t. 131; Bohr, *loc. cit.*, I.

De là : si $f(t)$ a une dérivée presque périodique (¹), le développement de $f'(t)$ s'obtient par dérivation formelle :

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}.$$

Ces faits expriment une propriété de l'opération M que, pour rappeler, nous écrirons symboliquement :

$$\int M = M \int \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt} M = M \frac{d}{dt}.$$

3. La série de Fourier d'une fonction presque périodique ne converge pas en général; il en est cependant ainsi ici si tous ses coefficients sont positifs (ou négatifs) et dans ce cas la convergence est absolue (²);

(¹) Démontrons que si $f'(t)$ est uniformément continue, elle est aussi presque périodique.

Pour cela considérons une suite de nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ réels et qui tendent vers zéro et considérons la suite de fonctions presque périodiques :

$$\varphi_n(t) = \frac{f(t+h_n) - f(t)}{h_n} = f'(t + \theta_n h_n) \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

La fonction $f'(t)$ étant uniformément continue on peut trouver, pour chaque ε donné, un nombre δ tel que, lorsque $|t' - t| \leqq \delta$, on ait

$$|f'(t') - f'(t)| \leqq \varepsilon.$$

Mais les nombres h_n tendent vers zéro, on peut trouver un indice N tel que, pour $n \geqq N$, on ait

$$|h_n| \leqq \delta$$

et alors aussi

$$|\theta_n h_n| \leqq \delta.$$

A partir de cet indice on aura donc

$$|\varphi_n(t) - f'(t)| \leqq \varepsilon.$$

Les fonctions $\varphi_n(t)$ tendent donc uniformément vers $f'(t)$ et ce sont des fonctions presque périodiques, il en est donc de même de $f'(t)$.

(²) Bohr, *Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischen Funktionen* (*Math. Zeitschrift*, t. 23, 1925, p. 28-44).

en particulier, pour une fonction presque périodique réelle dont la série de Fourier ne contient que des cosinus avec des coefficients positifs on a

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\lambda_n t,$$

car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge.

Il en est également ainsi lorsque les exposants sont linéairement indépendants ([1]).

On doit à M. Bohr [II] le théorème général d'approximation suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(t)$ soit presque périodique est qu'elle puisse être approchée par des polynomes exponentiels de la forme

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n t},$$

et cela uniformément dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, avec une erreur aussi faible que l'on veut; on peut même choisir les λ_n uniquement dans la suite des exposants de la fonction.

MM. Bohr et Bochner ont donné deux procédés différents d'approximation : celui de M. Bohr basé sur la considération des fonctions limites périodiques à une infinité de variables, celui de M. Bochner sur une généralisation de la méthode que M. Féjer a donnée pour les fonctions continues périodiques : les séries de Fourier ordinaires. Le théorème de M. Bochner est le suivant :

La fonction presque périodique

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n e^{i\Lambda_n t}$$

([1]) C'est-à-dire lorsque entre les Λ_n il n'existe aucune relation de la forme

$$r_1 \Lambda_1 + r_2 \Lambda_2 + \ldots + r_m \Lambda_m = 0,$$

où les r sont des nombres rationnels.

peut être approchée par une suite de polynomes de la forme

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} r_n^{(N)} A_n e^{i\Lambda_n t} \qquad [r_0^{(N)} = 1],$$

où les $r_n^{(N)}$ sont des nombres rationnels qui ne dépendent que des exposants Λ_n et non des coefficients A_n.

6. Étant données une fonction f et la suite Λ_n de ses exposants, à tout nombre $\varepsilon\,(>0)$ il correspond un entier N et un nombre $\delta\,(<\pi)$ tels que toute solution des N inégalités congruentielles

$$|\Lambda_n \tau| \leqq \delta \qquad (\text{mod } 2\pi) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

soit une presque période relative à ε. Réciproquement, à tout ε donné on peut faire correspondre δ et N (pas les mêmes que précédemment) tels que les presque périodes de la fonction $f(t)$ relatives à ε soient toutes comprises parmi les solutions des N inéquations congruentielles que nous venons d'écrire.

Supposons maintenant que l'on ait distribué la suite des exposants Λ de la fonction en un nombre fini ou infini de classes linéairement indépendantes entre elles (cela veut dire qu'il n'y a pas de relation linéaire à coefficients rationnels entre des exposants de classes différentes), alors, à chaque classification des exposants correspond une décomposition et une seule de la fonction en une série absolument et uniformément convergente de fonctions presque périodiques qui ont pour exposants ceux des différentes classes :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots$$

et la série

$$|f_1(t)| + |f_2(t)| + \ldots$$

est bornée [par la borne supérieure de $f(t)$]. Ce résultat est dû à M. Bochner [1].

[1] Au moyen de cette proposition il est bien facile de montrer que toute fonction réelle presque périodique dont les exposants sont linéairement indépendants est développable suivant une série absolument convergente. Soit en

7. Un ensemble de fonctions $\varphi(t)$ presque périodiques est dit *majorisable* s'il possède les propriétés suivantes :

1° Les fonctions sont également uniformément continues : à tout ε donné on peut faire correspondre un nombre $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute fonction de l'ensemble on ait

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqq \varepsilon,$$

dès que

$$|t_1 - t_2| \leqq \delta,$$

2° Les fonctions sont également presque périodiques : à tout ε il correspond une longueur $l(\varepsilon)$ telle que dans tout intervalle de longueur l il existe au moins une presque période τ, pour toutes les fonctions de l'ensemble, relative à ε,

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \leqq \varepsilon$$

---

effet :

$$f(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(\lambda_n t - \varphi_n) \qquad (\rho_n > 0,\ 0 \leqq \varphi_n < 2\pi).$$

Puisque les λ_n sont linéairement indépendants, la série :

$$\left|\frac{\alpha_0}{2}\right| + \sum |\rho_n \cos(\lambda_n t - \varphi_n)|$$

est bornée. Or les nombres λ_n étant linéairement indépendants, on sait, d'après un théorème de Kronecker, que l'on peut trouver, quel que soit l'entier N donné, un nombre t tel que

$$|\lambda_n t - \varphi_n| \leqq \frac{\pi}{3} \qquad (\text{mod } 2\pi),\ (n = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

et pour cette valeur de t la série précédente est plus grande que

$$\left|\frac{\alpha_0}{2}\right| + \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\rho_2}{2} + \ldots + \frac{\rho_{\mathrm{N}}}{2}\right).$$

Cette série étant bornée, il en est donc de même de $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n$ et l'on a

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(\lambda_n t - \varphi_n).$$

L'importance d'un tel ensemble de fonctions réside dans la propriété suivante :

Toute suite majorisable de fonctions qui converge en moyenne vers une limite converge aussi uniformément.

Les fonctions d'un ensemble majorisable ont les mêmes exposants (à condition, bien entendu, de faire, pour certaines fonctions, quelques coefficients égaux à zéro, si cela est nécessaire).

L'ensemble constitué par un nombre fini d'ensembles majorisables est aussi majorisable; en particulier, un nombre fini de fonctions presque périodiques forme toujours un ensemble majorisable.

Les ensembles majorisables que nous rencontrerons sont les suivants : ils seront composés d'un nombre fini de fonctions $f(s, t)$ définies comme il suit :

$f(s, t)$ est définie dans la bande $-\infty < t < +\infty$; $\alpha < s < \beta$, uniformément continue, bornée et presque périodique sur chaque droite de la bande : les deux conditions qui définissent un ensemble majorisable sont alors réalisées : la continuité uniforme par hypothèse, et l'égale presque périodicité résulte de l'égale continuité et de la presque périodicité sur chaque droite. Étant donné, en effet, un nombre ε aussi petit que l'on veut, on peut diviser l'intervalle $\alpha < s < \beta$ en un nombre N de parties assez grand pour que s et s' étant deux nombres qui appartiennent à une même partie on ait

$$|f(s, t) - f(s', t)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Choisissant alors N valeurs de s : $s_1, s_2, \ldots, s_N$ chacune dans une de ces parties et considérant l'ensemble fini de fonctions $f(s_1, t), f(s_2, t), \ldots, f(s_N, t)$ presque périodiques, et par suite majorisable, on peut trouver une longueur $l\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ et des presque périodes relatives à $\frac{\varepsilon}{3}$ pour cet ensemble, alors on aura dans toute la bande $\alpha < s < \beta$

$$|f(s, t+\tau) - f(s, t)| \leqq \varepsilon.$$

Il est d'ailleurs bien facile de montrer que, dans ce cas, on peut trouver une suite dénombrable d'exposants Λ_n qui appartiennent à toutes les fonctions presque périodiques de t auxquelles la fonction $f(s, t)$ se réduit lorsqu'on fixe s.

On a en effet :

$$\mathrm{M}_t\{f(s, t)\,e^{-i\lambda t}\} - \mathrm{M}_t\{f(s', t)\,e^{-i\lambda t}\} = \mathrm{M}_t\{[f(s, t) - f(s', t)]\,e^{-i\lambda t}\};$$

or, si $|s' - s| \leqq \delta$ on a

$$|f(s, t) - f(s', t)| \leqq \varepsilon,$$

donc

$$\mathrm{M}_t\{[f(s, t) - f(s', t)]\,e^{-i\lambda t}\} \leqq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que les valeurs moyennes $a(s, \lambda)$ sont des fonctions uniformément continues de s. •

Par suite, si l'on choisit une suite dénombrable de valeurs de s partout dense sur l'intervalle $\alpha < s < \beta$ et si l'on considère l'ensemble dénombrable des fonctions presque périodiques de t ainsi obtenues, elles ont dans leur ensemble une suite dénombrable d'exposants; donc, pour une valeur quelconque de s la fonction presque périodique de t : $f(s, t)$ ne saurait en avoir d'autres d'après la continuité de $a(s, \lambda)$.

8. Nous terminerons par une remarque au sujet de l'opération M et par la démonstration d'un théorème analogue à celui qui fait l'objet d'une note du n° 4.

Soit la fonction de deux variables $f(s, t)$ que nous venons de considérer et dont nous savons de plus qu'elle a une dérivée partielle par rapport à s : $\frac{\partial f(s, t)}{\partial s}$, uniformément continue dans $\alpha < s < \beta$, cette dérivée est aussi presque périodique.

Soit en effet $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ une suite de nombres qui tendent vers zéro, la suite de fonctions presque périodiques

$$\varphi_n(s, t) = \frac{f(s + k_n, t) - f(s, t)}{k_n} = \frac{\partial}{\partial s} f(s + \theta_n k_n, t) \qquad (0 < \theta_n < 1)$$

tend uniformément vers la fonction $\frac{\partial f(s, t)}{\partial s}$. On peut en effet trouver un indice N suffisamment grand pour que

$$|k_n| < \delta$$

dès que $n \geqq N$ et pour que

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} f(s', t) - \frac{\partial}{\partial s} f(s, t) \right| \leqq \varepsilon$$

dès que $|s' - s| \leqq \delta_1'$; à partir de cet indice on aura

$$\left| \varphi_n(s, t) - \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \right| \leqq \varepsilon.$$

La convergence de la suite $\varphi_n(s, t)$ vers $\frac{\partial f(s, t)}{\partial s}$ est bien uniforme, et par cela $\frac{\partial f}{\partial s}$ est presque périodique, les coefficients de $\frac{\partial}{\partial s} f(s, t)$ s'obtiennent donc par passage à la limite formel, or

$$\mathrm{M}_t \{ \varphi_n(s, t)\, e^{-i\lambda t} \} = \frac{a(s + k_n, \lambda) - a(s, \lambda)}{k_n};$$

donc les fonctions $a(s, \lambda)$ ont une dérivée par rapport à s et l'on peut écrire :

$$\mathrm{M}_t \left\{ \frac{\partial f(s, t)}{\partial s}\, e^{-i\lambda t} \right\} = \frac{\partial}{\partial s} \mathrm{M}_t \{ f(s, t)\, e^{-i\lambda t} \};$$

c'est dire que, dans ces conditions, on peut intervertir l'ordre des opérations M_t et $\frac{\partial}{\partial s}$, ce que nous écrirons symboliquement :

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{M}_t = \mathrm{M}_t \frac{\partial}{\partial s}.$$

9. M. Bochner a également fait la théorie des fonctions presque périodiques de plusieurs variables et d'une infinité dénombrable de variables (¹). Nous donnerons sa définition dans le cas de deux variables :

Une fonction réelle ou complexe $f(x, y)$ de deux variables réelles x, y, définie et continue dans tout le plan xy est presque périodique si à tout nombre ε donné on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon)$ telle que tout carré de côté l, du plan xy et à côtés parallèles aux axes,

---

(¹) Je viens d'avoir connaissance d'un Mémoire de M. Franklin sur le même sujet paru dans un journal américain.

contienne au moins un point ξ, η tel que

$$|f(x+\xi, y+\eta) - f(x, y)| \leqq \varepsilon.$$

Toute fonction presque périodique de deux variables x et y est bornée et uniformément continue, sa section par une droite quelconque du plan est une fonction presque périodique d'une variable.

A chaque fonction correspond un développement de la forme

$$f(x, y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_{m,n}\, e^{i(\lambda_m x + \mu_n y)} \qquad (\lambda_0 = 0,\ \mu_0 = 0)$$

avec

$$\mathrm{A}_{m,n} = \mathrm{M}\left\{ f(x, y)\, e^{-i(\lambda_m x + \mu_n y)} \right\} = \lim_{\mathrm{T} \to \infty} \frac{1}{\mathrm{T}^2} \int_0^{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} f(x, y)\, e^{-i(\lambda_m x + \mu_n y)}\, dx\, dy.$$

Il y a unicité et le théorème fondamental est exprimé par

$$\mathrm{M}\left\{ |f(x, y)|^2 \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{A}_{m,n}|^2,$$

l'opération M ayant le sens que nous venons d'indiquer.

Toute fonction continue presque périodique des deux variables x et y peut être approchée uniformément par une suite de polynomes

$$\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_{m,n}\, e^{i(\lambda_m x + \mu_n y)}$$

et réciproquement.

10. Dans son troisième Mémoire des *Acta mathematica*, M. Bohr a créé la théorie des fonctions analytiques presque périodiques d'une variable complexe $z = x + iy$, sa définition est la suivante :

Une fonction analytique de z : $f(z)$, est presque périodique dans une bande parallèle à l'axe des y $(\alpha < x < \beta)$ si, à tout ε donné, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon)$ telle que tout intervalle de longueur l sur l'axe imaginaire contienne au moins une presque période

$$\eta(\varepsilon)$$

relative au nombre ε : pour tout z compris dans la bande $\alpha < x < \beta$

on a l'inégalité

$$|f(z+i\eta)-f(z)| \leqq \varepsilon.$$

Toute fonction presque périodique dans une bande est bornée dans toute bande intérieure à la première; les fonctions presque périodiques dans une bande forment une classe; les dérivées, l'intégrale, si elle est bornée, sont aussi des fonctions presque périodiques.

A toute fonction presque périodique dans une bande correspond un développement de Dirichlet composé des séries de Fourier des différentes fonctions presque périodiques de la variable y auxquelles se réduit $f(z)$ lorsque x est constant :

$$f(z) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n z},$$

où les A_n sont des constantes et les Λ_n des nombres réels et il y a unicité.

Toute fonction presque périodique dans une bande peut être approchée uniformément dans toute bande intérieure à la première par une suite de polynomes de la forme

$$\sum_{n=0}^{N} a_n e^{\lambda_n z}.$$

11. En mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

on voit que u et v sont des fonctions harmoniques presque périodiques et le développement de la fonction f fournit un développement pour les fonctions u et v.

Nous nous sommes proposé, dans le présent travail ([1]), de rechercher si toute fonction harmonique presque périodique des deux variables x et y est susceptible d'un tel développement et si une telle fonction $u(x, y)$ est toujours la partie réelle d'une fonction analytique presque périodique.

([1]) Un résumé de ce travail a fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* présentée par M. Hadamard à la séance du 22 mai 1926.

Dans le Chapitre II nous montrons qu'à toute fonction harmonique presque périodique $u(x, y)$ correspond un développement de la forme

$$u(x, y) \sim kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y]$$

avec

$$\lambda_n > 0,$$

et nous étudions les propriétés des développements ainsi trouvés ainsi que celles des fonctions qu'ils définissent.

Dans le Chapitre III nous montrons que, même dans le cas où il n'existe pas de terme en x dans le développement de u, cette fonction n'est pas toujours la partie réelle d'une fonction analytique presque périodique : ainsi se manifeste une différence entre les fonctions périodiques et les fonctions presque périodiques car, pour les premières, la condition est suffisante.

Partant d'une fonction presque périodique réelle $f(y)$ de la variable y et formant la fonction harmonique presque périodique définie et bornée dans le demi-plan $x \geqq 0$ qui se réduit à $f(y)$ quand x tend vers zéro, nous étudions la fonction conjuguée de cette fonction : elle n'est pas toujours presque périodique. En appelant conjuguée g de f, la limite, si elle existe, de cette fonction conjuguée lorsque x tend vers zéro, cette fonction g, même lorsqu'elle est continue, n'est pas forcément presque périodique; si elle l'est, elle a le développement conjugué de celui de f :

$$f(y) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n y + \beta_n \sin \lambda_n y),$$

$$g(y) \sim \frac{c}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin \lambda_n y - \beta_n \cos \lambda_n y).$$

Un des résultats de notre étude est le suivant :

Si $f(y) - \frac{\alpha_0}{2}$ satisfait à une condition de Lipschitz et a une intégrale bornée, et par suite presque périodique, alors $g(y)$ est aussi presque périodique (pour les fonctions périodiques l'intégrale de $f(y) - \frac{\alpha_0}{2}$ est toujours périodique). Si $f(y)$ a une dérivée seconde presque périodique, on est conduit à prendre, pour sa fonction conjuguée, l'intégrale d'une fonction presque périodique.

Dans le Chapitre IV nous faisons la théorie des fonctions harmoniques de trois variables presque périodiques par rapport à l'une d'elles (z) ou par rapport à deux d'entre elles (x et y) et nous établissons des développements analogues à ceux trouvés pour les fonctions de deux variables.

Enfin le Chapitre I est consacré à l'exposé de quelques propositions de la théorie des fonctions harmoniques que nous utilisons dans la suite.

Je ne saurais terminer cette Introduction sans adresser mes remercîments à M. le professeur Harald Bohr pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mes recherches, l'aide bienveillante et les nombreux conseils qu'il m'a toujours donnés.

Copenhague, février 1926.

CHAPITRE I.

QUELQUES PROPOSITIONS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS HARMONIQUES.

12. Dans ce Chapitre nous nous proposons de rappeler ou d'établir quelques propositions de la théorie des fonctions harmoniques dont nous aurons à faire usage dans la suite; nous commencerons par la théorie des fonctions de deux variables $u(x, y)$ qui satisfont à l'équation de Laplace :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Étant données deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, ayant des dérivées partielles au moins jusqu'au second ordre, définies et bornées ainsi que ces dérivées dans un domaine (D), limité par une ou plusieurs courbes fermées (C), continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre sur les courbes qui limitent ce domaine, on a la formule de Green :

$$\iint_{(D)} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy + \int_{(C)} \left(f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn}\right) ds = 0,$$

où ds désigne l'élément d'arc des différents contours que nous prenons positif, $\frac{df}{dn}$ et $\frac{dg}{dn}$ sont les dérivées des fonctions prises suivant la normale qui pénètre dans le domaine (D), le sens de parcours des contours n'ayant aucune importance.

En faisant dans cette formule $f = u$ (fonction harmonique) et $g = 1$ on obtient, comme on sait, la relation caractéristique des fonctions harmoniques

$$\int_{(C)} \frac{du}{dn}\, ds = 0.$$

Si $P(\xi, \eta)$ est un point régulier de la fonction u, en appliquant la formule précédente à un cercle de centre P et de rayon arbitraire r, mais tout entier contenu dans (D), puis en intégrant, on obtient le théorème de la moyenne ou de Gauss :

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} u(x, y)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\theta,$$

où θ est l'angle que fait un rayon du cercle avec l'axe Ox.

De ce théorème on déduit généralement la non-existence d'un maximum ou d'un minimum dans tout domaine où la fonction est régulière.

Dans les mêmes conditions que ci-dessus on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u \cos\theta\, d\theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u \sin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = \xi,\ y = \eta.$$

De là on peut déduire une borne des dérivées en fonction de la borne de u sur le cercle : si, sur le cercle, on a $|u| \leq M$, il en résulte au centre

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \leqq \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq\end{array}\right\} \frac{4}{\pi}\frac{M}{r} \qquad \text{pour } x=\xi,\ y=\eta,$$

on peut en conclure aussi l'existence de dérivées de tous ordres et le fait que toute fonction harmonique est aussi analytique.

Enfin, si l'on donne la succession $u(s)$ des valeurs que prend u sur les contours qui limitent le domaine (D), la solution du problème de Dirichlet, pour des systèmes de contours assez généraux, ainsi que pour des fonctions $u(s)$ pas trop compliquées, est donnée par

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} u\frac{dg}{dn}\,ds,$$

où $g(x, y;\ \xi, \eta)$ désigne la fonction de Green relative aux contours (C) et au point (ξ, η).

13. Nous allons dire maintenant quelques mots au sujet d'une équation aux dérivées partielles que nous rencontrerons dans la suite : il s'agit de l'équation à deux variables

$$(2) \qquad \Delta u = \lambda^2 u \qquad (\lambda \geqq 0).$$

Il est bien connu qu'une fonction satisfaisant à cette équation, définie et régulière à l'intérieur d'un contour, ne peut y avoir ni maximum positif, ni minimum négatif, et que c'est une fonction analytique des deux variables x et y. Pour une telle équation, le problème de Dirichlet ne peut admettre plus d'une solution et il en a effectivement une pour des contours assez généraux ; cette solution est donnée par

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} u\frac{dg}{dn}\,ds,$$

où $g(\lambda \,|\, x, y;\ \xi, \eta)$ (la fonction de Green relative à cette équation) est définie de la façon suivante :

1° Elle est régulière à l'intérieur du contour et sur le contour lui-même où ses dérivées sont bornées, sauf au point (ξ, η) où elle devient infinie comme $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ ($r =$ distance de (ξ, η) à un autre point) ;

2° Elle est égale à la somme de la fonction $J(r)$ qui au point $r = 0$ devient infinie comme $\log\left(\frac{1}{r}\right)$ et qui satisfait à l'équation de Bessel

$$r\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{dJ}{dr} - \lambda^2 r J = 0,$$

et de l'intégrale de l'équation (2) qui prend les mêmes valeurs que $-J(r)$ sur le contour.

Nous désignerons par C_λ un contour pour lequel la résolution du problème de Dirichlet est possible pour l'équation (2) et toutes les valeurs de $\lambda (\geqq 0)$.

14. Les fonctions harmoniques de deux variables dont nous nous occuperons seront régulières dans une bande comprise entre deux parallèles à l'axe des y : $x = x_1$, $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$.

Le théorème fondamental est, comme dans le cas des fonctions analytiques d'une variable complexe régulières dans un tel domaine, celui de Phragmén-Lindelöf [1].

Théorème de Phragmén-Lindelöf. — *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière dans la bande $x_1 \leqq x \leqq x_2$, sauf pour $|y| = \infty$ où l'on sait que l'ordre de cette fonction est $o(y^2)$; si l'on sait de plus que*

$$m \leqq u(x_i, y) \leqq M \qquad (i = 1, 2),$$

alors cette double inégalité est valable dans toute la bande.

En effet, $x^2 - y^2$ étant une solution particulière de l'équation de Laplace, considérons les deux fonctions harmoniques

$$u_1(x, y) = u - \varepsilon(x^2 - y^2),$$
$$u_2(x, y) = u + \varepsilon(x^2 - y^2),$$

où ε est un nombre positif arbitrairement choisi.

---

[1] *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta mathematica*, t. 31, 1908, p. 381-406).

Désignons alors par X^2 le plus grand des deux nombres x_1^2 et x_2^2, ou l'un de ces nombres si tous les deux sont égaux, on a

$$\begin{aligned} m - \varepsilon X^2 \leqq u_1(x_i, y) & \\ u_2(x_i, y) \leqq M + \varepsilon X^2 & \end{aligned} \qquad (i = 1, 2).$$

Or, d'après l'hypothèse faite sur l'allure de la fonction lorsque y augmente indéfiniment, on peut trouver un nombre $Y(\varepsilon)$ assez grand pour que les limitations précédentes soient encore valables dans toute la bande dès que $|y| \geqq Y$. Mais, dans le rectangle défini par les droites $x = x_1$, $x = x_2$, et $|y| = Y$, les fonctions u_1 et u_2 ne présentent ni maximum ni minimum, donc les inégalités précédentes sont valables dans toute la bande et nous en tirons

$$m - \varepsilon(X^2 - x^2 + y^2) \leqq u(x, y) \leqq M + \varepsilon(X^2 - x^2 + y^2)$$

et ceci quel que soit le nombre ε positif choisi ; or, pour un point x, y donné dans la bande, $X^2 - x^2 + y^2$ est une constante et, par suite, les inégalités précédentes ne sont possibles que si l'on a

$$m \leqq u(x, y) \leqq M.$$

15. Nous allons maintenant établir une proposition, due à M. Walther, un peu plus précise que celle que nous venons de démontrer, et qui est a celle-ci ce que le théorème des trois cercles de M. Hadamard est au théorème classique du maximum. Nous donnons en note (¹) quelques indications bibliographiques relatives à ce théorème.

(¹) J. Hadamard, *Sur les fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, 1896, p. 186-187). Le théorème des trois droites pour les fonctions analytiques a été démontré par M. Dœtsch, nous le donnons plus loin sous la forme où il nous sera utile. — G. Doetsch, *Ueber die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktionen auf Geraden* (*Mathematische Zeitschrift,* t. VIII, 1920, p. 237-240).

Pour le théorème du texte et d'autres analogues pour les fonctions de deux ou trois variables, *voir* A. Walther : *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, t. I, 1921, p. 336-338 ; t. II, 1922, p. 69-71, et *Math. Zeit.*, t. XI, 1921, p. 157-160; W. Rogosinski : *Zur Theorie der Dirichletschen Reihen* (*Math. Zeit.*, t. XX, 1924, p. 294).

THÉORÈME DES TROIS DROITES. — *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière et bornée dans la bande $x_1 \leqq x \leqq x_2$; désignons respectivement par $m(x)$, $\mathrm{M}(x)$ et $\mathfrak{M}(x)$, la borne inférieure, la borne supérieure et enfin la borne supérieure de la valeur absolue de cette fonction sur la droite x : alors $m(x)$ est une fonction concave de x, et $\mathrm{M}(x)$ et $\mathfrak{M}(x)$ en sont des fonctions convexes.*

Nous rappellerons qu'on entend par fonction concave (convexe) de la variable x, une fonction dont la courbe représentative, dans tout intervalle, ou bien se réduit à une droite, ou bien est située tout entière au-dessus (au-dessous) de la droite qui joint les points représentatifs de la fonction aux extrémités de l'intervalle; en d'autres termes, la courbe représentative tourne sa concavité vers le bas (vers le haut); toute fonction convexe ou concave dans l'intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$ est continue dans $x_1 < x < x_2$; si $f(x)$ est concave, $-f(x)$ est convexe.

Étant données deux fonctions convexes de x dans un même intervalle, si l'on définit une nouvelle fonction de x égale en chaque point à la plus grande des deux fonctions données, cette nouvelle fonction est encore une fonction convexe de x.

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois valeurs de x :

$$x_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 \leqq x_2,$$

la démonstration de notre théorème revient donc à établir les inégalités suivantes :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} m(\xi_1) & \xi_1 & 1 \\ m(\xi_2) & \xi_2 & 1 \\ m(\xi_3) & \xi_3 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0;$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{M}(\xi_1) & \xi_1 & 1 \\ \mathrm{M}(\xi_2) & \xi_2 & 1 \\ \mathrm{M}(\xi_3) & \xi_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0;$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{M}(\xi_1) & \xi_1 & 1 \\ \mathfrak{M}(\xi_2) & \xi_2 & 1 \\ \mathfrak{M}(\xi_3) & \xi_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Pour les deux premières il suffira d'appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction harmonique

$$u + kx,$$

où k est une constante ; d'après cette proposition on peut écrire :

$$(4)\qquad m(\xi_2)+k\xi_2 \geqq \text{minimum de } \{ m(\xi_1)+k\xi_1;\ m(\xi_3)+k\xi_3 \},$$

$$(5)\qquad M(\xi_2)+k\xi_2 \leqq \text{maximum de } \{ M(\xi_1)+k\xi_1;\ M(\xi_3)+k\xi_3 \}.$$

En choisissant convenablement k dans chacune de ces inégalités on peut s'arranger pour que les deux quantités placées sous les signes minimum et maximum soient égales ; il suffit de prendre, dans (4),

$$k=\frac{m(\xi_1)-m(\xi_3)}{\xi_3-\xi_1};$$

dans (5),

$$k=\frac{M(\xi_1)-M(\xi_3)}{\xi_3-\xi_1}.$$

Eu remplaçant k par ces valeurs dans les inégalités (4) et (5) on tombe sur (1) et (2) que nous nous proposions d'établir.

Quant à l'inégalité (3), nous remarquerons que l'on a

$$\mathfrak{M}(x)=\text{maximum de } \{ M(x),\ -m(x) \},$$

$\mathfrak{M}(x)$ est le maximum de deux fonctions convexes, c'est donc aussi une fonction convexe.

16. Le théorème sur la borne des dérivées que nous avons rappelé montre que si une fonction harmonique est bornée dans une bande, ses dérivées sont bornées dans toute bande intérieure. Or, si u est harmonique, il en est de même des deux fonctions

$$e^{kx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos ky+\frac{\partial u}{\partial y}\sin ky\right),$$

$$e^{kx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin ky-\frac{\partial u}{\partial y}\cos ky\right)$$

$\Big($ce sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction analytique de $z=x+iy$: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{kz}\Big)$, et si $L(x)$ désigne la borne supérieure de $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$ sur la droite x on a comme précédemment :

$$\left| e^{k\xi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}_{x=\xi_2} \cos ky + \frac{\partial u}{\partial y}_{x=\xi_2} \sin ky \right) \right| \leqq \text{maximum de } \left\{ L(\xi_1)\, e^{k\xi_1},\ L(\xi_3)\, e^{k\xi_3} \right\},$$

$$\left| e^{k\xi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}_{x=\xi_2} \sin ky - \frac{\partial u}{\partial y}_{x=\xi_2} \cos ky \right) \right| \leqq \text{maximum de } \left\{ L(\xi_1)\, e^{k\xi_1},\ L(\xi_3)\, e^{k\xi_3} \right\},$$

d'où, en élevant au carré puis ajoutant,

$$e^{2k\xi_2}\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{x=\xi_2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{x=\xi_2} \right\} \leqq \text{maximum de } \left\{ L^2(\xi_1)\, e^{2k\xi_1},\ L^2(\xi_3)\, e^{2k\xi_3} \right\}.$$

En choisissant k de manière que les quantités sous le signe maximum soient égales on en tire

$$L(\xi_1)^{(\xi_2-\xi_3)}\, L(\xi_2)^{(\xi_3-\xi_1)}\, L(\xi_3)^{(\xi_1-\xi_2)} \leqq 1,$$

ce qui exprime que $\log L(x)$ est une fonction convexe de x : c'est le théorème de Dœtsch sous la forme que nous utiliserons.

17. Théorème des valeurs moyennes. — *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière et bornée dans une bande $x_1 < x < x_2$:*

1° *Si la fonction $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ a une valeur moyenne par rapport à y sur une droite intérieure à la bande, elle en a une sur toute autre droite intérieure et cette valeur moyenne est constante, c'est dire que l'on a :*

$$M_y\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = k.$$

2° *Si u a aussi une valeur moyenne sur une droite, elle en a une sur toute autre droite intérieure et cette valeur moyenne est une fonction linéaire de x :*

$$M_y\left\{ u(x, y) \right\} = kx + l.$$

a. Supposons que, dans la bande $x_1 < x < x_2$ on ait $|u| \leqq M$ et soit $x = \xi_1$ la droite sur laquelle on sait que la valeur moyenne existe, $x = \xi_2$ une autre droite de la bande sur laquelle nous voulons prouver que la valeur moyenne existe aussi ; désignons par r la plus petite des distances de ces droites à celles qui limitent la bande, on a d'abord

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \quad , \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq \frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}.$$

Soit R le rectangle limité par les droites $x = \xi_1$, $x = \xi_2$; $y = 0$, $y = \mathrm{Y} > 0$; le long de ce rectangle on a

$$\int_{\mathrm{R}} \frac{du}{dn} ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\mathrm{Y}} \underset{(x=\xi_1)}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy - \int_0^{\mathrm{Y}} \underset{(x=\xi_2)}{\frac{\partial u}{\partial x}} dy = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, \mathrm{Y})\right] dx.$$

Le deuxième membre de cette égalité est plus petit que $\frac{8}{\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}|\xi_2 - \xi_1|$ en valeur absolue, c'est-à-dire borné, par suite :

$$\left|\frac{1}{\mathrm{Y}}\int_0^{\mathrm{Y}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_2, y)\right] dy\right| \leqq \frac{8}{\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}\frac{|\xi_2 - \xi_1|}{\mathrm{Y}},$$

en passant à la limite lorsque $\mathrm{Y} \to \infty$ on voit que la valeur moyenne du premier membre existe et est nulle; or celle de $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1, y)$ existe, il en est donc de même de celle de $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_2, y)$ et ces deux valeurs moyennes sont les mêmes.

b. Appliquons maintenant, sur le contour précédent, la formule de Green aux deux fonctions harmoniques x et $u(x, y)$, on a, en séparant comme plus haut les intégrales relatives aux côtés parallèles à l'axe des y de celles relatives aux côtés parallèles à l'axe des x,

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{Y}} \underset{(x=\xi_1)}{\left(u - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)} dy - \int_0^{\mathrm{Y}} \underset{(x=\xi_2)}{\left(u - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)} dy \\ = \int_{\xi_1}^{\xi_2} x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, \mathrm{Y}) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)\right] dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} [u(x, 0) - u(x, \mathrm{Y})]\, dx.\end{aligned}$$

Cette fois le deuxième membre est borné par

$$\frac{4}{\pi}\frac{\mathrm{M}}{r}(\xi_2 - \xi_1)^2 + 2\mathrm{M}|\xi_2 - \xi_1|,$$

donc la valeur moyenne du premier membre existe et est nulle. Mais, si u a une valeur moyenne pour $x = \xi_1$, ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$, alors trois des quantités qui figurent sous le signe $\int$ au premier membre sur quatre en ont une, donc la quatrième en a aussi une. Désignant alors par l_1 et l_2 les valeurs moyennes de u pour $x = \xi_1$ et ξ_2 on a

$$l_1 - k\xi_1 = l_2 - k\xi_2,$$

ce qui exprime que la valeur moyenne de u est une fonction linéaire de l'abscisse et l'on peut trouver l tel que

$$M_y\{u(x, y)\} = kx + l.$$

Remarque. — Nous avons trouvé que

$$\left| \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_1, y)\, dy - \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_2, y)\, dy \right| \leqq \frac{8}{\pi} \frac{M}{r} |\xi_2 - \xi_1|,$$

par suite si $\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$ est bornée sur une droite intérieure à la bande, elle est aussi bornée sur toute autre droite.

18. Nous terminerons ces considérations sur les fonctions de deux variables par une extension du théorème de Harnack.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ une suite de fonctions harmoniques définies dans la bande $x_1 \leqq x \leqq x_2$, régulières et bornées; si ces fonctions convergent uniformément vers des limites sur les droites $x = x_1$, $x = x_2$, alors ces fonctions convergent vers une fonction harmonique bornée dans l'intérieur de la bande.

Puisque ces fonctions tendent uniformément vers une limite aux extrémités de la bande, c'est que l'on peut trouver, pour $\varepsilon > 0$ donné mais aussi petit que l'on veut, un nombre N tel que pour n_1 et $n_2 > N$ on ait

$$|u_{n_1}(x_i, y) - u_{n_2}(x_i, y)| \leqq \varepsilon \qquad (i = 1, 2).$$

Or, par nos hypothèses nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Lindelöf et cette inégalité est valable dans toute la bande, la convergence uniforme vers une fonction limite

$u(x, y)$ est donc réalisée dans toute cette bande; que cette fonction est harmonique est un résultat classique qui résulte immédiatement du fait que nous avons déjà fait remarquer : savoir que les dérivées d'une fonction harmonique sont bornées à l'intérieur d'une bande uniquement par la distance du point à la frontière et par les valeurs de la fonction.

19. Nous arrivons maintenant à la théorie des fonctions $u(x, y, z)$ harmoniques de trois variables : il s'agira, dans la suite, de fonctions régulières dans des bandes comprises entre deux plans parallèles au plan des xy, ou bien dans des cylindres à génératrices parallèles à l'axe des z.

Soient deux fonctions f et g des trois variables x, y, z ayant des dérivées jusqu'au second ordre au moins et bornées ainsi que ces dérivées dans un domaine borné (D) limité par une ou plusieurs surfaces fermées (Σ) et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre sur ces surfaces, on a la formule de Green :

$$\iiint_{(D)} (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,dV + \iint_{(\Sigma)} \left(f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn}\right) d\sigma = 0$$

avec

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et où $\frac{df}{dn}$, $\frac{dg}{dn}$ sont les dérivées prises suivant la direction de la normale intérieure : celle qui pénètre dans (D), dV est l'élément de volume de ce domaine et $d\sigma$ l'élément de surface qui limite (D).

Pour deux fonctions u et v harmoniques dans (D) on a en particulier

$$\iint_{(\Sigma)} \left(u\frac{dv}{du} - v\frac{du}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Si u est harmonique et régulière dans (D) et si $P(\xi, \eta, \zeta)$ désigne un point quelconque de ce domaine et (S) une sphère de centre (P) et de rayon r tout entière contenue dans (D), on a la formule de la moyenne :

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{(S)} u\,d\sigma.$$

En passant en coordonnées polaires, c'est-à-dire en posant sur la sphère (S)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi;\qquad y = r\sin\theta\sin\varphi;\qquad z = r\cos\theta;\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi;\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi),$$

on a

$$u(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Puis

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{P}) = \frac{3}{4\pi r}\iint_{(\mathrm{S})} u\sin^2\theta\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(\mathrm{P}) = \frac{3}{4\pi r}\iint_{(\mathrm{S})} u\sin^2\theta\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}(\mathrm{P}) = \frac{3}{4\pi r}\iint_{(\mathrm{S})} u\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

et par suite en désignant par l une direction quelconque et en supposant $|u| \leqq \mathrm{M}$ sur (S),

$$|u(\mathrm{P})| \leqq \mathrm{M};\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial l}\right| \leqq \frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{M}}{r}.$$

De là on déduit le fait que la fonction u n'a ni maximum ni minimum et aussi qu'elle est analytique.

20. Visant à la fois la théorie des fonctions presque périodiques par rapport à l'une des variables et par rapport à deux des variables, nous allons démontrer deux propositions analogues aux théorèmes de Lindelöf et des trois droites. La première est due à Walther.

Théorème des trois plans. — 1° *Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique régulière dans la bande $z_1 \leqq z \leqq z_2$ sauf pour $|\rho| = \infty$ où l'on sait que son ordre ne dépasse pas $o(\rho^2)$; si l'on a de plus*

$$m \leqq u(x, y, z_i) \leqq \mathrm{M}\qquad (i = 1, 2),$$

ces limitations sont valables dans toute la bande.

2° *Si l'on désigne respectivement par $m(z)$, $\mathrm{M}(z)$, $\mathfrak{M}(z)$ la borne inférieure, la borne supérieure, la borne supérieure de la valeur absolue de la fonction sur le plan z : $m(z)$ est une fonction concave de z, $\mathrm{M}(z)$ et $\mathfrak{M}(z)$ en sont des fonctions convexes.*

a. Une solution particulière de l'équation $\Delta u = 0$ est en effet

$$z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

nous considérons alors les deux fonctions harmoniques

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y, z) - \varepsilon\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \\ u_2(x, y, z) &= u(x, y, z) + \varepsilon\left[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon > 0).$$

On a, sur les plans qui limitent la bande,

$$\begin{aligned} m - \varepsilon Z^2 &\leqq u_1(x, y, z_i) \\ u_2(x, y, z_i) &\leqq M + \varepsilon Z^2 \\ Z^2 &= \max.(z_1^2, z_2^2). \end{aligned} \quad (i = 1, 2),$$

D'après l'hypothèse faite sur l'ordre de croissance de u, on peut trouver un nombre R tel, que pour $\rho \geqq R$ et ε donné, les inégalités précédentes soient encore valables dans toute la bande, alors sur le cylindre de révolution autour de Oz de rayon R et limité par les deux plans z_1 et z_2, la valeur de la fonction u_1 ne surpasse pas une valeur donnée, elle ne la dépasse donc pas non plus à l'intérieur puisque la fonction n'a pas de maximum; en faisant le même raisonnement sur u_2, on voit que les inégalités précédentes sont valables dans toute la bande et par suite, quel que soit ε, on a

$$m - \varepsilon\left[Z^2 - z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \leqq u(x, y, z) \leqq M + \varepsilon\left[Z^2 - z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right].$$

Pour un point donné dans la bande la quantité entre crochets est une constante et comme l'on peut choisir ε aussi petit que l'on veut, les inégalités précédentes sont seulement possibles si l'on a

$$m \leqq u(x, y, z) \leqq M.$$

b. En appliquant cette proposition à la fonction harmonique

$$u + kz$$

et choisissant convenablement, comme tout à l'heure dans le cas de deux variables, les valeurs de k on arrive au résultat annoncé pour

$m(z)$ et $M(z)$; celui au sujet de $\mathfrak{M}(z)$ s'obtient en remarquant que

$$\mathfrak{M}(z) = \text{max. de} \left\{ M(z), \ -m(z) \right\}.$$

21. Théorème du cylindre. — *Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique définie et régulière dans un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z, et dont la base, sur le plan des xy, est constituée par un ou plusieurs contours bornés pour le système (C) desquels on sait résoudre le problème de Dirichlet.*

1° *Si l'on sait que la fonction u est bornée sur la surface du cylindre*

$$m \leqq u(x, y, z) \leqq M \qquad (\text{pour } (x, y) \text{ sur } (C)),$$

et que pour $|z| = \infty$ elle est de l'ordre $o(z^2)$ dans tout l'intérieur du cylindre, alors les inégalités précédentes sont aussi valables à l'intérieur;

2° *Si $m(x, y)$, $M(x, y)$, $\mathfrak{M}(x, y)$ désignent respectivement les fonctions harmoniques des deux variables x, y qui, sur (C), prennent en chaque point la valeur de la borne inférieure, de la borne supérieure, de la borne supérieure de la valeur absolue de la fonction sur la génératrice correspondante du cylindre (en supposant, bien entendu, que ces fonctions existent), on a* [1]

$$m(x, y) \leqq u(x, y, z) \leqq M(x, y),$$
$$|u(x, y, z)| \leqq \mathfrak{M}(x, y).$$

---

[1] Désignons par $\mathfrak{m}(x, y)$, $\mathbf{\mathfrak{M}}(x, y)$, $M(x, y)$ la borne inférieure, la borne supérieure et la borne supérieure de la valeur absolue de u sur une droite (x, y) le théorème exprime que l'on a

$$m(x, y) \leqq \mathfrak{m}(x, y); \qquad \mathbf{\mathfrak{M}}(x, y) \leqq M(x, y); \qquad M(x, y) \leqq \mathfrak{M}(x, y).$$

En adoptant une définition proposée par M. F. Riesz (*Acta Universitatis Franc. Jos.*, t. 2, p. 87-100), appelons fonction subharmonique de deux variables x, y, une fonction qui, dans le domaine où elle est définie est constamment inférieure ou égale à l'intérieur d'un contour limitant une aire intérieure au domaine, à la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs qu'elle sur le contour.

Alors, notre théorème est le suivant : $-\mathfrak{m}(x, y)$, $\mathbf{\mathfrak{M}}(x, y)$, $M(x, y)$ sont des fonctions subharmoniques des deux variables x et y.

Les fonctions subharmoniques généralisent les fonctions convexes d'une variable et sont conservées par une transformation conforme.

a. Cette fois nous choisissons, comme fonction harmonique auxiliaire, la fonction

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z^2$$

et nous considérons les deux fonctions harmoniques

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y, z) - \varepsilon\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z^2\right] \\ u_2(x, y, z) &= u(x, y, z) + \varepsilon\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)-z^2\right] \end{aligned} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Désignant par R^2 le maximum de x^2+y^2, nous avons sur la surface, pour les mêmes raisons que tout à l'heure,

$$m - \frac{\varepsilon}{2}R^2 \leqq u_1,$$
$$u_2 \leqq M + \frac{\varepsilon}{2}R^2.$$

Mais l'hypothèse faite sur l'ordre de grandeur de la fonction pour $|z| = \infty$ montre que ces inégalités sont aussi valables à l'intérieur du cylindre, le raisonnement s'achève comme précédemment et l'on parvient à

$$m \leqq u(x, y, z) \leqq M.$$

b. Appliquons ce théorème à la fonction

$$u(x, y, z) + \mu(x, y),$$

où μ désigne une fonction harmonique de x, y régulière dans le cylindre, on a

$$(1) \qquad u(x, y, z) + \mu(x, y) \geqq \text{ minimum de } \left\{ m(x, y) + \mu(x, y) \right\},$$

$$(2) \qquad u(x, y, z) + \mu(x, y) \leqq \text{ maximum de } \left\{ M(x, y) + \mu(x, y) \right\}.$$

Aux deuxièmes membres figurent seulement les valeurs de x, y relatives au contour (C), prenant alors dans (1)

$$\mu(x, y) = - m(x, y),$$

dans (2)

$$\mu(x, y) = - M(x, y),$$

on obtient sur les deux premières relations que nous nous proposions de démontrer, car les seconds membres des égalités (1) et (2) deviennent égaux à zéro,

$$m(x, y) \leqq u(x, y, z) \leqq \mathrm{M}(x, y),$$

d'où l'on tire

$$|u(x, y, z)| \leqq \text{max. de} \left\{ \mathrm{M}(x, y), -m(x, y) \right\}.$$

Mais, sur le contour (C), on a

$$\mathfrak{M}(x, y) - \mathrm{M}(x, y) \geqq 0,$$
$$\mathfrak{M}(x, y) + m(x, y) \geqq 0,$$

ces inégalités valent donc aussi à l'intérieur, et par suite

$$|u(x, y, z)| \leqq \mathfrak{M}(x, y).$$

22. Quant aux valeurs moyennes, nous avons deux propositions : l'une pour les bandes, l'autre pour les cylindres.

Théorème des valeurs moyennes sur les plans. — *Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique définie régulière et bornée dans une bande limitée par deux plans z_1 et z_2 :*

1° *Si $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ a une valeur moyenne sur un plan situé à l'intérieur de la bande, elle en a une sur tout autre plan et cette valeur moyenne est constante ;*

2° *Si, de plus, $u(x, y, z)$ a une valeur moyenne sur un plan, elle en a une sur tout autre plan et cette valeur moyenne est une fonction linéaire de z.*

C'est dire que l'on a

$$\mathrm{M}_{xy}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = k,$$
$$\mathrm{M}_{xy}\left\{ u \right\} = kz + l.$$

La démonstration est la même que dans le cas de deux variables, il faut appliquer la formule de Green à un parallélépipède, nous n'insisterons pas.

23. Théorème des valeurs moyennes pour le cylindre. — *Soit $u(x,y,z)$*

une fonction harmonique régulière et bornée dans un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z ayant pour base sur le plan des xy un système borné de contours (C).

1° *Si cette fonction a sur le contour une valeur moyenne sur chaque génératrice et s'il existe une fonction harmonique* $A(x, y)$ *prenant les mêmes valeurs que cette valeur moyenne en chaque point du contour* (C), *alors la valeur moyenne de la fonction par rapport à z existe sur toute droite intérieure au cylindre et l'on a*

$$M_z\{u(x, y, z)\} = A(x, y).$$

2° *Les dérivées partielles de u ont aussi une valeur moyenne à l'intérieur et l'on a*

$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial A}{\partial x},$$
$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = \frac{\partial A}{\partial y},$$
$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = 0.$$

a. Soient x, y un point intérieur à (C) et $g(\xi, \eta; x, y)$ la fonction de Green relative à (C) et à ce point. Autour de (x, y) construisons un cylindre de révolution (r) de rayon r petit et tout entier contenu dans (C). Appliquons alors la formule de Green aux deux fonctions u et g dans le volume compris entre ces deux cylindres, le plan des xy et un plan parallèle à celui-ci et de cote Z, on a

$$\int\int_{(C)}\left(u\frac{dg}{dn} - g\frac{du}{dn}\right)d\sigma + \int\int_{(r)} + \int_{z=0}\int_{(C)-(r)} - \int_{z=Z}\int_{(C)-(r)} = 0.$$

Les fonctions u et g sont bornées dans le domaine que nous considérons ainsi que leurs dérivées, les intégrales relatives aux plans $z = 0$ et $z = Z$ restent bornées, par suite

$$\lim_{Z \to \infty} \frac{1}{Z}\left\{\int\int_{(C)}\left(u\frac{dg}{dn} - g\frac{du}{dn}\right)d\sigma - \int\int_{(r)}\left(u\frac{dg}{dn} - g\frac{du}{dn}\right)d\sigma\right\} = 0.$$

Or, sur le contour (C), on a $g = 0$, puis g ne dépend pas de z et de plus,

$$d\sigma = ds\,dz \qquad \text{sur } (C),$$
$$d\sigma = r\,d\theta\,dz \qquad \text{sur } (r).$$

par suite,

$$\lim_{Z\to\infty} \left\{ \int_{(C)} \left[\left(\frac{1}{Z} \int_0^Z u\,dz \right) \frac{dg}{dn} \right] ds - \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{Z} \int_0^Z u\,dz \right) \frac{dg}{dr} - g \left(\frac{1}{Z} \int_0^Z \frac{du}{dr}\,dz \right) \right] r\,d\theta \right\} = 0.$$

Or, au voisinage du point, (x, y), u est uniformément continue, $\frac{du}{dr}$ est bornée ainsi que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, soit m une borne commune de leur valeur absolue; g devient infinie comme $\log \frac{1}{r}$ et $\frac{dg}{dr}$ comme $-\frac{1}{r}$; donc, si l'on fait tendre r vers zéro, on a

$$\lim_{r=0} \left\{ \left| \int_0^{2\pi} g \left(\frac{1}{Z} \int_0^Z \frac{du}{dr}\,dz \right) r\,d\theta \right| \right\} \leq \lim_{r=0} \left\{ \int_0^{2\pi} m.rg\,d\theta \right\} = 0,$$

et cela, quel que soit z, uniformément en r.

Ensuite $r\frac{dg}{dr}$ tendant uniformément vers -1 lorsque r tend vers zéro, on a uniformément en r

$$-\frac{2\pi}{Z} \int_0^Z u(x, y, z)\,dz = \lim_{r=0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{Z} \int_0^Z u\,dz \right) \frac{dg}{dr}\,r\,d\theta,$$

et par suite, on peut écrire

$$\lim_{Z\to\infty} \left\{ \int_{(C)} \left[\left(\frac{1}{Z} \int_0^Z u\,dz \right) \frac{dg}{dn} \right] ds - \frac{2\pi}{Z} \int_0^Z u(x, y, z)\,dz \right\} = 0.$$

Or, sur le contour (C), par hypothèse, la valeur moyenne de u existe sur toute droite; donc, pour Z assez grand, $\frac{1}{Z}\int_0^Z u\,dz$ diffère peu de $M_z\{u\}$ et la première intégrale tend uniformément vers

$$\int_{(C)} M_z\{u\} \frac{dg}{dn}\,ds = 2\pi A(x, y)$$

et la relation précédente montre que $\frac{2\pi}{Z}\int_0^Z u(x, y, z)\,dz$ tend uniformément vers la même limite, donc $M_z\{u(x, y, z)\}$ existe et nous pouvons écrire

$$M_z\{u(x, y, z)\} = A(x, y).$$

b. Quant aux valeurs moyennes des dérivées partielles, nous remarquerons d'abord que l'on a

$$\frac{1}{Z}\int_0^Z \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = \frac{1}{Z}\{u(x, y, Z) - u(x, y, 0)\};$$

comme u reste bornée nous en déduisons

$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = 0.$$

Quant aux autres dérivées, nous avons vu que les signes ∂ et M peuvent être permutés lorsque les dérivées sont uniformément continues, car c'est uniquement sur ce fait que repose la démonstration que nous avons donnée (n° **8**) et c'est bien le cas à l'intérieur du cylindre, par suite on a

$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}(M_z\{u\}) = \frac{\partial A}{\partial x},$$
$$M_z\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}(M_z\{u\}) = \frac{\partial A}{\partial y}.$$

24. Pour terminer, nous énoncerons l'extension du théorème de Harnack que nous avons déjà donnée dans le cas de deux variables et qui se démontre de la même manière, on a les résultats suivants :

1° Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ une suite de fonctions harmoniques définies, régulières et bornées dans une bande x_1, x_2 : si ces fonctions convergent uniformément vers des limites sur les plans x_1 et x_2, alors elles convergent uniformément vers une fonction harmonique bornée dans l'intérieur de la bande;

2° Si $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ est une suite de fonctions harmoniques définies régulières et bornées dans un cylindre borné et si ces fonctions convergent uniformément vers une fonction limite sur la surface du cylindre, elles convergent uniformément à l'intérieur vers une fonction harmonique bornée.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS HARMONIQUES PRESQUE PÉRIODIQUES DE DEUX VARIABLES.

Définition et propriétés immédiates.

25. Les lettres a, b désignent à partir de maintenant deux nombres réels différents, finis ou infinis avec, pour fixer les idées, $a < b$. Nous dirons d'une fonction $u(x, y)$ des deux variables x et y, qu'elle possède une certaine propriété dans (a, b) si elle la possède sur l'ensemble des points du plan pour lesquels $a < x < b$; nous dirons qu'elle possède une propriété dans $[a, b]$ si elle la possède dans un ensemble de points tels que $a < a_1 < x < b_1 < b$; les notations $(a, b]$ et $[a, b)$ se comprennent alors d'elles-mêmes.

Nous définirons alors les fonctions harmoniques presque périodiques des deux variables x et y de la façon suivante :

Definition. — *Une fonction harmonique $u(x, y)$ régulière dans la bande $a < x < b$ sera dite presque périodique dans (a, b) si à tout $\varepsilon > 0$ donné, mais aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon)$, telle que tout intervalle de longueur l sur l'axe des y contienne au moins une presque période η correspondant au nombre ε, c'est-à-dire que, dans (a, b), on a l'inégalité*

$$|u(x, y + \eta) - u(x, y)| < \varepsilon.$$

Toute fonction harmonique périodique est aussi presque périodique, en particulier les fonctions kx, $e^{\lambda x}\cos\lambda y$ et $e^{\lambda x}\sin\lambda y$ qui sont périodiques par rapport à y dans $(-\infty, +\infty)$ sont aussi presque périodiques.

26. Au sujet de ces fonctions nous allons démontrer d'abord quelques propositions qui légitimeront les considérations développées dans le précédent Chapitre.

THÉORÈME I. — *Toute fonction presque périodique harmonique dans* $[a, b]\,y$ *est bornée : à toute bande* (a_1, b_1) *intérieure à* $[a, b]$ *correspond un nombre* $M(a_1, b_1)$ *tel que*

$$u(x, y) \leqq M \qquad \text{dans } (a_1, b_1).$$

La fonction étant presque périodique dans (a_1, b_1), prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe une longueur $l_1 = l_1(a_1, b_1, 1)$ telle que tout intervalle de longueur l_1 sur l'axe des y contienne au moins une presque période relative à 1 ; cela veut dire que, pour toute valeur de y, il existe une valeur y^* comprise dans le segment $0, l_1$ et telle que l'on ait

$$|u(x, y) - u(x, y^*)| \leqq 1$$

dans toute la bande (a_1, b_1). Soit alors G la borne supérieure de $|u(x, y)|$ dans le rectangle $a_1 < x < b_1$, $0 < y < l_1$; $G + 1$ peut être pris pour valeur de la constante M.

On a en effet

$$|u(x, y)| \leqq |u(x, y^*)| + |u(x, y) - u(x, y^*)| \leqq G + 1.$$

Il suit de là, d'après les théorèmes sur les bornes des dérivées que nous avons rappelés, qu'une fonction harmonique presque périodique dans $[a, b]$ est aussi uniformément continue dans $[a, b]$.

D'après la définition adoptée plus haut de la presque périodicité, on voit que, pour chaque valeur de x, la fonction $u(x, y)$ se réduit à une fonction presque périodique en y; mais si l'on sait d'une fonction harmonique qu'elle est presque périodique sur chaque droite x dans une bande $[a, b]$, est-on assuré qu'elle est, par ce fait seul, presque périodique?

Nous ne répondrons qu'en partie à cette question dans le théorème suivant et aussi dans le théorème V et les corollaires qui suivront.

THÉORÈME II. — *Soit* $u(x, y)$ *une fonction harmonique régulière et bornée dans la bande* (a, b), *si cette fonction se réduit à une fonction presque périodique de* y *lorsque* $x = a$ *et lorsque* $x = b$, $u(x, y)$ *est alors presque périodique dans* (a, b) [1].

---

[1] Le fait qu'une fonction harmonique est bornée dans une bande et presque périodique sur une droite seulement de l'intérieur ne suffit pas pour entraîner

En effet, deux fonctions presque périodiques d'une variable formant toujours un ensemble majorisable, on peut trouver des presque périodes communes aux deux fonctions $u(a, y)$, $u(b, y)$.

Soit η une telle presque période relative au nombre ε auquel correspond la longueur l, considérons alors la fonction harmonique

$$u(x, y+\eta) - u(x, y),$$

elle est bornée dans (a, b), plus petite que ε en valeur absolue aux limites de la bande, donc aussi à l'intérieur : toute presque période des deux fonctions $u(a, y)$ et $u(b, y)$ relativement à ε l'est donc aussi relativement à la fonction dans (a, b); donc, dans ce domaine, $u(x, y)$ est presque périodique.

27. Théorème III. — *La somme de deux fonctions harmoniques presque périodiques dans* $[a, b]$ *est encore harmonique presque périodique; il en est de même pour la somme d'un nombre fini de telles fonctions; la fonction limite d'une suite de fonctions presque périodiques harmoniques et uniformément convergente dans* $[a, b]$ *y est encore harmonique presque périodique.*

Sur deux droites intérieures à $[a, b]$ deux fonctions harmoniques presque périodiques se réduisent à des fonctions presque périodiques d'une variable dont la somme est aussi presque périodique; de plus, comme chacune d'elles est bornée, leur somme l'est aussi et c'est une fonction harmonique qui est presque périodique aux extrémités de toute bande intérieure à la première, donc aussi presque périodique dans $[a, b]$.

De là on passe sans difficulté à la somme d'un nombre fini de fonctions; en particulier tout polynome

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N} [(a_n^+ e^{\lambda_n x} + a_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + (b_n^+ e^{\lambda_n x} + b_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y],$$

---

la presque périodicité. Il suffit de considérer par exemple $\mathfrak{I}\left[\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right]$ qui est bornée dans $[-1, +1]$, identique à 0 pour $x=0$, mais non presque périodique sur une autre droite, car elle tend uniformément vers zéro lorsque $|y|$ tend vers l'infini.

où les λ_n sont positifs et les a et les b réels, représente une fonction harmonique presque périodique dans $[-\infty, +\infty]$. Si de plus $a_n^+ = 0$ et $b_n^+ = 0$, ce polynome est presque périodique dans $[-\infty, +\infty)$ car il tend vers zéro uniformément en y lorsque x tend vers $+\infty$.

Enfin, la fonction limite d'une suite de fonctions harmoniques uniformément convergente dans (α, β) étant aussi harmonique d'après le théorème de Harnack, il suffira de prouver que, si chaque fonction de la suite est presque périodique, la limite l'est aussi.

Soient alors $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ cette suite de fonctions et u la fonction limite; par hypothèse on peut trouver un nombre N tel que, pour $n \geq N$, on ait l'inégalité suivante dans la bande (α, β) $(a < \alpha < \beta < b)$:

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si η est une presque période de u_n relative à $\frac{\varepsilon}{3}$ on a

$$\begin{aligned} u(x, y+\eta) - u(x, y) = {} & [u(x, y+\eta) - u_n(x, y+\eta)] \\ & - [u(x, y) - u_n(x, y)] \\ & + [u_n(x, y+\eta) - u_n(x, y)]. \end{aligned}$$

La valeur absolue de chacune des expressions entre crochets est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{3}$, par suite nous pouvons écrire

$$|u(x, y+\eta) - u(x, y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition. On eût pu remarquer que la suite u_n tendant vers une limite bornée u et cela uniformément, u_n tend uniformément vers une fonction presque périodique de y sur toute droite intérieure à $[a, b]$, donc u est aussi presque périodique dans $[a, b]$.

Des exemples de fonctions harmoniques presque périodiques seront, de ce fait, donnés par des séries de la forme

$$kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n^+ e^{\lambda_n x} + a_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + (b_n^+ e^{\lambda_n x} + b_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y]$$

uniformément convergentes dans $[a, b]$.

28. Théorème IV. — *Les dérivées partielles d'une fonction harmo-*

nique presque périodique dans $[a, b]$ *(ou* (a, b)*) sont harmoniques presque périodiques dans* $[a, b]$.

D'abord les dérivées d'une telle fonction sont aussi harmoniques dans $[a, b]$ et il suffira évidemment de prouver notre assertion pour les dérivées du premier ordre.

Soient alors (a_1, b_1) une bande intérieure à $[a, b]$ et r un nombre positif choisi de telle façon que la bande $(a_1 - r, b_1 + r)$ soit encore contenue dans $[a, b]$, nous allons montrer qu'il existe des presque périodes relatives à ε pour les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans la bande (a_1, b_1).

Pour cela plaçons-nous sur une droite x intérieure à (a_1, b_1) ou même sur les limites de cette bande et considérons deux points d'ordonnées y et $y + \eta$ sur cette droite : un cercle de rayon r ayant pour centre l'un de ces deux points est tout entier contenu dans

$$(a_1 - r, \ b_1 + r)$$

ou est tangent aux limites de cette bande et l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u \cos\theta \, d\theta,$$

d'où

$$\frac{\partial u(x, y+\eta)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$
$$= \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} [u(x + r\cos\theta, y + \eta + r\sin\theta) - u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)]\cos\theta \, d\theta,$$

donc si η est une presque période de u relative à $\frac{\pi}{4} r\varepsilon$ dans

$$(a_1 - r, \ b_1 + r)$$

on aura

$$\left| \frac{\partial u(x, y+\eta)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right| \quad \varepsilon$$

dans les mêmes conditions on démontre aussi que

$$\left| \frac{\partial u(x, y+\eta)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right| = \varepsilon.$$

Toute presque période de u relative à $\frac{\pi}{4} r\varepsilon$ dans $(a_1 - r, b_1 + r)$ est presque période pour ses dérivées premières relativement à ε dans (a_1, b_1), ce qui démontre le théorème.

Théorème V. — *Si l'on sait, des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ d'une fonction harmonique qu'elles sont bornées dans $[a, b]$ et presque périodiques toutes deux sur la droite x_0, alors elles sont presque périodiques dans $[a, b]$.*

Soit (a'_1, b'_1) une bande intérieure à la première et qui contient elle-même la bande (a_1, b_1) où nous voulons prouver que les dérivées partielles sont presque périodiques. Désignons par K la borne supérieure de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ dans (a'_1, b'_1) et posons

$$\begin{aligned} D^2(x, y, \eta) = & \left\{\frac{\partial[u(x, y+\eta) - u(x, y)]}{\partial x}\right\}^2 \\ & + \left\{\frac{\partial[u(x, y+\eta) - u(x, y)]}{\partial y}\right\}^2; \end{aligned}$$

dans (a'_1, b'_1) on a évidemment $|D| \leqq 2K$ et nous voulons prouver qu'il est possible de faire en sorte que $|D| \leqq \varepsilon$ dans (a_1, b_1). Or, d'après ce que nous avons vu, la borne supérieure de $\log|D|$ sur chaque droite de la bande est une fonction convexe de x; par suite, pour satisfaire à la condition que nous voulons obtenir, il faut que la borne supérieure de $\log|D|$ sur la droite x_0 ne surpasse pas un nombre facile à trouver, soit ε_1 la valeur correspondante de $|D|$.

Par suite si l'on a $|D| \leqq \varepsilon_1$ pour $x = x_0$, alors $|D| \leqq \varepsilon$ dans toute la bande (a_1, b_1); donc toute presque période relative à ε_1 pour $x = x_0$ le sera relativement à ε dans la même bande pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Corollaires : 1° *Si une fonction harmonique bornée dans $[a, b]$ a ses deux dérivées presque périodiques pour $x = x_0$ à l'intérieur de la bande, alors la fonction elle-même est presque périodique dans $[a, b]$.*

En effet, les dérivées sont presque périodiques dans $[a, b]$ et l'on a de plus sur chaque droite

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial y}\, dy,$$

u est bornée sur chaque droite donc presque périodique;

2° *Si une fonction harmonique bornée dans* $[a, b]$ *est presque périodique dans une bande intérieure* $[c, d]$, *elle est presque périodique dans* $[a, b]$.

Les deux dérivées premières de la fonction sont en effet presque périodiques sur toute droite intérieure à $[c, d]$.

Le développement des fonctions harmoniques presque périodiques.

29. Nous avons vu qu'à chaque fonction presque périodique $f(y)$ d'une variable réelle correspondait un développement de la forme

$$f(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n y + \beta_n \sin \lambda_n y),$$

où les α et β sont des nombres réels et les λ_n des nombres positifs et que, si l'on sait d'un tel développement qu'il est celui d'une fonction presque périodique, il n'existe qu'une telle fonction qui lui appartienne. D'autre part, une fonction harmonique presque périodique se réduit à une fonction presque périodique de la variable y sur toute droite x intérieure à la bande où elle est définie; nous allons donc chercher quelle est la forme des coefficients α et β considérés comme fonctions de x et nous en déduirons un développement analogue à celui que M. Bohr appelle « développement de Dirichlet » pour les fonctions analytiques.

En somme, comme chaque terme du développement doit être lui-même harmonique, nous nous proposons de montrer qu'à chaque fonction harmonique presque périodique correspond un développement et un seul de la forme suivante :

$$u(x, y) \sim kx + l + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[(A'_n e^{\lambda_n x} + A_n e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y \right.$$
$$\left. + (B'_n e^{\lambda_n x} + B_n e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y \right],$$

où les A et B sont des constantes réelles et les λ_n des nombres positifs, et tel aussi que, si l'on sait d'un tel développement qu'il est celui d'une fonction harmonique presque périodique dans une bande, la fonction soit déterminée par cela même d'une façon univoque.

30. Soit donc $u(x, y)$ la fonction harmonique presque périodique dans $[a, b]$, dont nous nous proposons de trouver le développement.

Tout d'abord, quant au terme qui ne contient pas y, il est égal sur chaque droite x à la valeur moyenne M_y de la fonction sur cette droite. Or $\frac{\partial u}{\partial x}$ étant aussi presque périodique, $M_y\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$ existe aussi sur toute droite et nous avons vu que, dans ces conditions,

$$M_y\{u(x, y)\} = kx + l.$$

Pour les termes en $\cos\lambda_n y$, et $\sin\lambda_n y$, il faut montrer d'abord qu'une suite dénombrable seulement est nécessaire : cela résulte, comme nous l'avons vu, de la continuité uniforme de u, mais cela résultera aussi de la forme des coefficients de ces termes, forme que nous allons rechercher.

Nous arriverons très simplement à ce résultat en appliquant la formule de Green aux deux fonctions $u(x, y)$ et $e^{\pm\lambda x}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{matrix}\right\}$ le long du rectangle que nous avons déjà eu l'occasion de considérer, et formé par deux droites intérieures à la bande $[a, b]$: $x = x_1$, $x = x_2$, et par $y = 0$ et $y = Y$, puis en faisant croître Y indéfiniment; appliquons-la par exemple aux deux fonctions $u(x, y)$ et $e^{-\lambda x}\cos\lambda y$, on a

$$\int_{\substack{0\\ x=x_1}}^{Y} - \int_{\substack{0\\ x=x_2}}^{Y} \left(-\lambda u\, e^{-\lambda x}\cos\lambda y - e^{-\lambda x}\cos\lambda y\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy$$
$$- \int_{\substack{x_1\\ y=0}}^{x_2} + \int_{\substack{x_1\\ y=Y}}^{x_2} \left(-\lambda u\, e^{-\lambda x}\sin\lambda y - e^{-\lambda x}\cos\lambda y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx = 0.$$

Soient K une limite supérieure de $|\lambda u|$ et de $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$, L une limite supérieure de $e^{-\lambda x}$ dans la bande (x_1, x_2) de largeur $l = |x_2 - x_1|$ où nous opérons, les deux intégrales $\int_{x_1}^{x_2}$ sont bornées au moyen de ces trois nombres, on a en effet

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} -\lambda u e^{-\lambda x} \sin\lambda y \, dx\right| \leq \text{K.L.}l,$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial y} e^{-\lambda x} \cos\lambda y \, dx\right| \leq \text{K.L.}l$$

et, par suite,

$$\left|\frac{1}{\text{Y}}\left[\int_{\substack{0\\ x=x_1}}^{\text{Y}} - \int_{\substack{0\\ x=x_2}}^{\text{Y}} \left(-\lambda u e^{-\lambda x} \cos\lambda y - e^{-\lambda x} \cos\lambda y \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\right]\right| \leq \frac{4k.\text{L}.l}{\text{Y}}.$$

Or, puisque u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $e^{-\lambda x}\cos\lambda y$ sont des fonctions presque périodiques de la variable y pour $x = x_1$ et $x = x_2$, sous les deux signes $\int$ figurent seulement des fonctions qui ont des valeurs moyennes et l'inégalité précédente nous montre, par passage à la limite, que ces valeurs moyennes sont les mêmes :

$$\underset{(x=x_1)}{\text{M}_y}\left\{e^{-\lambda x}\cos\lambda y\left(\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = \underset{(x=x_2)}{\text{M}_y}\left\{e^{-\lambda x}\cos\lambda y\left(\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\},$$

c'est-à-dire que $\text{M}_y\left\{e^{-\lambda x}\cos\lambda y\left(\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}$ ne dépend pas de x, c'est seulement une fonction de λ que nous désignerons par λA^+ et nous écrirons

$$\text{M}_y\left\{\cos\lambda y\left(\lambda u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = \lambda\text{A}^+ e^{\lambda x}. \tag{1}$$

On obtiendrait de même par application de la formule de Green aux deux fonctions u et $e^{\lambda x}\cos\lambda y$

$$\text{M}_y\left\{\cos\lambda y\left(\lambda u - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} = \lambda\text{A}^- e^{-\lambda x}. \tag{2}$$

En ajoutant les égalités (1) et (2) puis en divisant par $2\lambda(\neq 0)$ on obtient

$$\mathrm{M}_y \{ u \cos\lambda y \} = \frac{1}{2} \{ \mathrm{A}^+ e^{\lambda x} + \mathrm{A}^- e^{-\lambda x} \}$$

et l'on montrerait, d'une façon tout à fait analogue, que l'on a

$$\mathrm{M}_y \{ u \sin\lambda y \} = \frac{1}{2} \{ \mathrm{B}^+ e^{\lambda x} + \mathrm{B}^- e^{-\lambda x} \}.$$

Les A et les B sont des fonctions de λ seulement déterminées, bien entendu, par la fonction u; or, une quantité de la forme de celles qui figurent dans le deuxième membre des égalités précédentes ne peut s'annuler deux fois en x sans être identiquement nulle; par conséquent si λ n'est pas exposant pour deux fonctions presque périodiques de la variable y auxquelles se réduit u pour deux valeurs de x, λ ne sera pas non plus exposant pour toute autre valeur de x; donc les exposants des diverses fonctions presque périodiques de y auxquelles $u(x, y)$ se réduit pour x donné dans la bande $[a, b]$ se trouvent parmi les exposants qui appartiennent à l'ensemble de deux fonctions seulement, ces exposants sont donc dénombrables et le calcul précédent nous montre comment il sera possible de calculer les A et les B dès que l'on connaîtra le développement de la fonction sur deux droites; les développements sur les autres droites proviennent tous d'un même développement de la forme

$$u(x, y) \sim kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\mathrm{A}_n^+ e^{\lambda_n x} + \mathrm{A}_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y + (\mathrm{B}_n^+ e^{\lambda_n x} + \mathrm{B}_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y \}$$

que nous appelons développement de la fonction u et nous dirons que les λ_n sont les exposants de la fonction dans la bande $[a, b]$, k, l, A et B seront appelés les coefficients.

Bien entendu, une fonction presque périodique dans deux bandes différentes n'y possède pas nécessairement deux développements identiques et alors, comme nous le montrerons plus loin, il est nécessaire, ou bien que la fonction ait des points singuliers entre les deux bandes ou bien qu'elle y devienne infinie, mais ce dernier cas est seulement une possibilité et la question reste ouverte.

Remarquons tout de suite qu'une fonction harmonique périodique, de période p a nécessairement un développement de la forme

$$kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(A_n^+ e^{n\frac{2\pi}{p}x} + A_n^- e^{-n\frac{2\pi}{p}x} \right) \cos n \frac{2\pi}{p} y + \left(B_n^+ e^{n\frac{2\pi}{p}x} + A_n^- e^{-n\frac{2\pi}{p}x} \right) \sin n \frac{2\pi}{p} y \right\},$$

car les exposants des différentes fonctions périodiques obtenues en faisant x constant sont tous de la forme $n\frac{2\pi}{p}\cdot$

31. De ce que nous avons déjà vu au sujet des fonctions d'une variable, et du développement obtenu, nous allons déduire quelques conséquences.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Sur chaque droite x de la bande $[a, b]$ on a l'égalité de Parseval*

$$M_y \{ [u(x, y)]^2 \} = (kx + l)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x})^2 + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x})^2].$$

THEOREME D'UNICITE. — *Si deux fonctions harmoniques presque périodiques $u(x, y)$ et $v(x, y)$ dans une même bande $[a, b]$ ont le même développement, alors ces deux fonctions sont identiques.*

En effet, sur une droite quelconque x intérieure à $[a, b]$, les fonctions u et v se réduisent à deux fonctions presque périodiques de y qui ont le même développement et qui, par suite, coïncident; u et v coïncident sur toute droite intérieure à $[a, b]$: elles sont identiques.

D'après la méthode même qui nous a servie à trouver le développement d'une fonction harmonique presque périodique, nous voyons que, pour obtenir le développement de la somme d'un nombre fini de telles fonctions, il suffira d'ajouter formellement les développements de ces fonctions. De même le développement de la limite u d'une suite de fonctions harmoniques presque périodiques uniformément convergente $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$, s'obtiendra par un passage à la limite formel, car on peut en effet trouver un nombre N tel que, pour $n \geq N$

on ait $|u - u_n| \leqq \varepsilon$ dès que ε est donné, et cela entraîne les inégalités

$$\left| \mathrm{M}_y \left\{ (u - u_n) \right\} \right| \leqq \varepsilon,$$
$$\left| \mathrm{M}_y \left\{ (u \cos\lambda y - u_n \cos\lambda y) \right\} \right| \leqq \varepsilon,$$
$$\left| \mathrm{M}_y \left\{ (u \sin\lambda y - u_n \sin\lambda y) \right\} \right| \leqq \varepsilon$$

qui expriment le théorème si l'on fait tendre ε vers zéro. En particulier toute série uniformément convergente dans $[a, b]$ de la forme

$$kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n^+ e^{\lambda_n x} + a_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y + (b_n^+ e^{\lambda_n x} + b_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y \right\}$$

est le développement de sa somme car nous savons déjà que cette somme est presque périodique, et le théorème précédent nous apprend que son développement ne saurait être que celui que nous venons d'écrire.

Enfin les développements des dérivées partielles de $u(x, y)$ s'obtiennent par dérivation formelle du développement de la fonction, il suffit de le montrer pour les dérivées premières et cela est déjà une conséquence de ce que nous avons montré au sujet de la permutation des signes ∂ et M, mais cela peut s'établir facilement par un calcul direct.

Pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ il suffit de retrancher au lieu d'ajouter les égalités (1) et (2) qui ont permis de trouver le développement de u et l'on a

$$\mathrm{M}_y \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos\lambda y \right\} = \frac{\lambda}{2} (\mathrm{A}^+ e^{\lambda x} - \mathrm{A}^- e^{-\lambda x}),$$

et de même

$$\mathrm{M} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \sin\lambda y \right\} = \frac{\lambda}{2} (\mathrm{B}^+ e^{\lambda x} - \mathrm{B}^- e^{-\lambda x})$$

on a vu de plus, dans le premier Chapitre, que

$$\mathrm{M}_y \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = k.$$

Quant à $\frac{\partial u}{\partial y}$, on a d'abord

$$\frac{1}{\mathrm{Y}} \int_0^{\mathrm{Y}} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{\mathrm{Y}} [u(x, y) - u(x, 0)].$$

d'où, puisque u est bornée,

$$M\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = 0,$$

ensuite, en intégrant $u\cos\lambda y$ par parties,

$$\frac{1}{Y}\int_0^Y u\cos\lambda y\,dy = \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\lambda}u\sin\lambda Y\right] - \frac{1}{Y}\int_0^Y \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\lambda y\,dy$$

et ceci montre que

$$-\lambda M_y\{u\cos\lambda y\} = M_y\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\sin\lambda y\right\},$$

de même

$$\lambda M_y\{u\sin\lambda y\} = M_y\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\cos\lambda y\right\}.$$

Ces diverses relations établissent l'exactitude de notre assertion.

A propos de l'ensemble des fonctions presque périodiques de y que l'on déduit de u en fixant x, nous savons que cet ensemble est majorisable car $u(x, y)$ étant uniformément continue dans $[a, b]$, ces fonctions sont également uniformément continues et $u(x, y)$ étant presque périodique, ces fonctions sont également presque périodiques.

De là le théorème d'approximation :

Théorème d'approximation. — *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique régulière dans $[a, b]$, pour qu'elle y soit aussi presque périodique, il est nécessaire et suffisant qu'on puisse l'approcher uniformément dans $[a, b]$ par des polynomes de la forme*

$$k x + l + \sum_{1}^{N} [(a_n^{+} e^{\lambda_n x} + a_n^{-} e^{-\lambda_n x})\cos\lambda_n y + (b_n^{+} e^{\lambda_n x} + b_n^{-} e^{-\lambda_n x})\sin\lambda_n y].$$

On peut même choisir les polynomes d'approximation tels que leurs exposants soient parmi ceux de la fonction $u(x, y)$ que l'on se propose d'approcher.

Que la condition est suffisante, cela résulte immédiatement du fait que les polynomes d'approximation que nous avons choisis sont eux-mêmes des fonctions harmoniques presque périodiques et du fait que la fonction limite d'une telle suite de fonctions qui converge uniformément dans $[a, b]$ est aussi presque périodique.

Que la condition est nécessaire, va résulter du fait que l'ensemble des fonctions de y auxquelles u se réduit pour x donné est majorisable.

Nous savons, en effet, qu'on peut approcher toutes les fonctions d'un tel ensemble uniformément dans tout l'intervalle $-\infty < y < +\infty$ et avec la même erreur par des polynomes de la forme

$$kx + l + \sum_{n=1}^{N} r_n(a_n^{(x)} \cos\lambda_n y + b_n^{(x)} \sin\lambda_n y),$$

où les $a_n^{(x)}$ et les $b_n^{(x)}$ désignent, pour abréger l'écriture, les fonctions de x que nous avons déjà trouvées et où les r_n sont des nombres rationnels réels qui ne dépendent que de l'approximation ε demandée, du nombre N des termes du polynome et de la bande (a_1, b_1) intérieure à $[a, b]$ où nous nous sommes proposé de faire l'approximation, mais non des fonctions en particulier.

Mais cela veut dire que, dans toute bande (a_1, b_1) intérieure à $[a, b]$ on a

$$\left| u(x, y) - (kx + l) - \sum_{1}^{N} \Big[r_n \Big((A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y \Big) \Big] \right| \leqq \varepsilon,$$

et cette inégalité achève la démonstration.

32. Jusqu'ici nous avons seulement trouvé le développement d'une fonction harmonique presque périodique $u(x, y)$ et nous ne nous sommes pas préoccupé de savoir si ce développement convergeait : en général il n'en est rien et tout ce que l'on peut affirmer c'est la convergence en moyenne d'un tel développement, au sens que nous avons donné à cette expression dans l'introduction.

Nous allons cependant indiquer quelques cas où l'on peut conclure à la convergence.

En premier lieu, il y a celui où le développement ne contient que des termes en $\cos\lambda y$ et où les coefficients de ces termes sont tous positifs dans une bande intérieure à celle où le développement est valable ;

il y a également le cas où les λ_n sont linéairement indépendants, la convergence absolue est également assurée.

Un autre cas est celui où l'on sait que le développement converge sur deux droites x_1 et x_2 intérieures à la bande où ce développement est valable, alors on peut trouver un nombre N tel que, pour $n \geqq N$ on ait

$$\left| u(x_i, y) - (kx_i + l) - \sum_{1}^{n} \left(a_n^{(i)} \cos \lambda_n y + b_n^{(i)} \sin \lambda_n y\right) \right| \leqq \varepsilon$$
$$(i = 1, 2),$$

et par suite la fonction harmonique presque périodique

$$u(x, y) - (kx + l) - \sum_{1}^{n} \left(a_n^{(i)} \cos \lambda_n y + b_n^{(i)} \sin \lambda_n y\right)$$

est plus petite que ε en valeur absolue pour $x = x_1$ et $x = x_2$, cette limite est donc aussi valable dans (x_1, x_2).

Nous indiquerons enfin un autre cas qui contient celui des fonctions périodiques comme cas particulier : c'est celui où la série

$$\sum e^{-\lambda_n \delta}$$

est convergente pour tout δ positif.

Soient en effet x_0 une droite quelconque intérieure à $[a, b]$, $\delta > 0$ un nombre tel que la bande $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ soit contenue dans $[a, b]$ et $M = M(x_0, \delta)$ une limite supérieure de la valeur absolue des dérivées du premier ordre de u dans $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Alors, ne tenant pas compte du terme en $kx + l$ qui n'altère en rien la convergence, on a, dans $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$|\lambda_n(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x})| \leqq M,$$
$$|\lambda_n(A_n^+ e^{\lambda_n x} - A_n^- e^{-\lambda_n x})| \leqq M,$$

d'où

$$|A_n^+ e^{\lambda_n x}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n},$$
$$|A_n^- e^{-\lambda_n x}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n}.$$

En faisant $x = x_0 + \delta$ dans la première de ces inégalités et $x = x_0 - \delta$ dans la deuxième, on a

$$|A_n^+ e^{\lambda_n x_0}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n} e^{-\lambda_n \delta},$$

$$|A_n^- e^{-\lambda_n x_0}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n} e^{-\lambda_n \delta},$$

et le même raisonnement montre que

$$|B_n^+ e^{\lambda_n x_0}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n} e^{-\lambda_n \delta},$$

$$|B_n^- e^{-\lambda_n x_0}| \leqq \frac{2M}{\lambda_n} e^{-\lambda_n \delta}$$

Or, d'après l'hypothèse de la convergence de la série $\Sigma e^{-\lambda_n \sigma}$, les λ_n ne sauraient avoir aucun point limite à distance finie, et la série est absolument convergente dans $[a, b]$. Il est nécessaire et suffisant pour cela que, les λ_n étant rangés en une suite croissante, $\frac{\lambda_n}{\log n}$ augmente indéfiniment avec n.

33. Étant donné un développement d'une fonction $u(x, y)$ harmonique presque périodique, nous ne nous sommes pas encore demandés dans quelle bande il était valable : car il est valable dans $[a, b]$ mais peut être valable dans une autre bande plus grande et nous savons qu'il vaut dans toute bande, contenant la première, où la fonction reste presque périodique.

Une fonction donnée peut, nous l'avons déjà dit, avoir plusieurs développements valables dans différentes bandes qui n'empiètent pas les unes sur les autres : c'est ce qui aura lieu, par exemple, si la fonction possède des points singuliers distribués entre deux bandes où elle est presque périodique et les fonctions périodiques fournissent facilement, comme on le sait, des exemples de cette possibilité. Une autre éventualité, mais dont la possibilité n'est pas prouvée, est celle où la fonction, quoique régulière dans une bande, est bornée et presque périodique dans deux bandes attenantes à celle-ci : il est nécessaire alors que la fonction ne soit pas bornée dans la première bande. Nous allons cependant démontrer que, dans ce cas, la fonction a nécessairement deux développements différents dans les deux bandes où elle est presque périodique. Pour cela il nous sera nécessaire d'établir d'abord la proposition aux limites que voici :

THÉORÈME. — *Si, sur les deux droites $x = x_1$ et $x = x_2$ on donne deux fonctions presque périodiques de y : $f_1(y)$ et $f_2(y)$, il existe alors une fonction harmonique bornée et une seule qui est régulière dans la bande (x_1, x_2) et qui prend sur les droites x_1 et x_2 les valeurs $f_1(y)$ et $f_2(y)$ et cette fonction est presque périodique.*

Cette fonction existe et est unique : c'est un résultat bien connu et qui se démontre facilement; en effet, une transformation conforme de la forme $e^{i(kz+l)}$ transforme la bande (x_1, x_2) en un demi-plan, puis une inversion transforme ce demi-plan en un cercle et le problème que l'on a à résoudre sur ce cercle est le suivant : Trouver une fonction harmonique bornée dans le cercle et qui prenne sur sa circonférence les mêmes valeurs qu'une fonction donnée bornée et continue sauf en deux points. Ce problème est un cas particulier de l'un de ceux qu'a résolus M. Fatou ([1]) et il n'a qu'une solution. Cette fonction est unique : cela peut aussi être démontré au moyen du théorème de Lindelöf car, s'il existait deux fonctions de cette sorte, leur différence serait nulle pour $x = x_1$ et $x = x_2$ et bornée dans l'intérieur de la bande, donc nulle partout. Cette fonction est presque périodique, en effet une presque période commune aux deux fonctions de y à laquelle elle se réduit pour $x = x_1$ et $x = x_2$, relativement à ε, l'est aussi relativement à ε dans toute la bande (théorème II).

De ce théorème nous allons donner une autre démonstration : une construction effective de la fonction que nous cherchons. Pour cela nous supposerons, ce que l'on peut toujours faire à condition de supposer certains coefficients égaux à zéro, que les fonctions $f_1(y)$ et $f_2(y)$, auxquelles la fonction doit se réduire pour $x = x_1$ et $x = x_2$,

---

([1]) P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta math.*, t. 30, 1906, p. 335-400).

ont les mêmes exposants et les développements suivants :

$$(1) \qquad f_1(y) \sim \alpha_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos\lambda_n y + B_n^{(1)} \sin\lambda_n y,$$

$$(2) \qquad f_2(y) \sim \alpha_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cos\lambda_n y + B_n^{(2)} \sin\lambda_n y,$$

et nous déterminerons d'abord les constantes k, l; A_n^+, A_n^-; B_n^+, B_n^- par les équations suivantes :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{r} k x_i + l = \alpha_i \\ A_n^+ e^{\lambda_n x_i} + A_n^- e^{-\lambda_n x_i} = A_n^{(i)} \\ B_n^+ e^{\lambda_n x_i} + B_n^- e^{-\lambda_n x_i} = B_n^{(i)} \end{array} \right. \qquad (i = 1, 2;\ n = 1, 2;\ \ldots),$$

ce qui est toujours possible car, lorsque $x_1 \neq x_2$, aucun des déterminants des systèmes de deux équations que l'on a à résoudre ne s'annule. Je dis alors que le développement

$$k x + l + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y]$$

est celui d'une fonction harmonique presque périodique : la fonction annoncée.

En effet, deux fonctions formant toujours un ensemble majorisable, on peut les approcher uniformément par deux suites de polynomes :

$$\varphi_1^{(N)}(y) = \alpha_1 + \sum_{n=1}^{N} r_n^{(N)} (A_n^{(1)} \cos\lambda_n y + B_n^{(1)} \sin\lambda_n y),$$

$$\varphi_2^{(N)}(y) = \alpha_2 + \sum_{n=1}^{N} r_n^{(N)} (A_n^{(2)} \cos\lambda_n y + B_n^{(2)} \sin\lambda_n y).$$

Formons alors les polynomes harmoniques trigonométriques suivants :

$$u^{(N)}(x, y) = k x + l + \sum_{n=1}^{N} r_n^{(N)} [(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos\lambda_n y + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin\lambda_n y].$$

Chacun de ces polynomes représente une fonction harmonique presque périodique bornée dans (x_1, x_2) par les valeurs qu'elle prend aux extrémités de la bande et qui sont précisément, à cause des relations (3) $\varphi_1^{(N)}$ et $\varphi_2^{(N)}$. Donc, les polynomes $u^{(N)}(x, y)$ forment une suite de fonctions harmoniques qui converge uniformément vers f_1 et f_2 pour $x=x_1$ et $x=x_2$; ils convergent donc uniformément dans toute la bande vers une fonction harmonique et cette fonction est presque périodique : cela résulte du théorème sur la convergence des suites, ou bien, si l'on veut, du fait que la fonction se réduit à deux fonctions presque périodiques de y aux extrémités de la bande.

Arrivons maintenant au théorème que nous avions en vue et que M. Bohr, pour les fonctions analytiques, appelle théorème d'unicité généralisé :

Théorème. — *Soient, dans deux bandes* $[a, b]$ *et* $[c, d]$ *qui ne chevauchent pas (c'est-à-dire que l'on a, par exemple,* $a < b < c < d$*), deux fonctions harmoniques presque périodiques* $u_1(x, y)$ *et* $u_2(x, y)$ *qui ont respectivement dans chacune de ces bandes deux développements formellement identiques : ces fonctions proviennent d'une même fonction harmonique régulière et presque périodique dans toute la bande* $[a, d]$.

Choisissons dans $[a, b]$ une droite x_1 et dans $[c, d]$ une droite x_2 toutes les deux intérieures à chacune des bandes. Formons alors la fonction harmonique presque périodique dans (x_1, x_2) qui, aux extrémités de la bande, se réduit à $u_1(x_1, y)$ et $u_2(x_2, y)$; son développement sera précisément celui qui est commun aux deux fonctions u_1 et u_2 car la détermination de ces coefficients doit être faite au moyen d'équations analogues au système (3) et cette détermination se fait d'une façon univoque : les A et B déterminés de cette façon seront précisément ceux qui sont communs aux deux fonctions.

La troisième fonction $u(x, y)$ ainsi obtenue a le même développement que u_1 dans $(x_1, b]$ et par suite, coïncide avec cette fonction dans toute cette bande, donc aussi dans tout le domaine d'existence de u_1 et réciproquement : le domaine d'existence de u est domaine d'existence de u_1; de même $u(x, y)$ coïncide avec u_2 dans $[c, x_2)$. Par suite u_1 et u_2 sont le prolongement l'une de l'autre et la fonction u définie seulement dans (x_1, x_2) peut être prolongée dans $[a, d]$.

Ainsi, étant donnée une fonction harmonique presque périodique dans une bande, le développement qu'elle y possède la représente dans une bande maxima où elle est presque périodique. En dehors de cette bande, ou bien la fonction présente des points singuliers, ou bien devient infinie ([1]) lorsque $|y|$ augmente indéfiniment, ou bien cesse d'exister; si elle redevient presque périodique c'est avec un développement différent du premier.

34. En vue du problème de la décomposition, dont nous allons nous préoccuper maintenant, et de l'étude de la fonction conjuguée d'une fonction harmonique presque périodique qui fera l'objet du Chapitre suivant, nous allons traiter le problème aux limites qui consite à déterminer une fonction harmonique presque périodique bornée dans un demi-plan et se réduisant à une fonction presque périodique donnée sur une droite. Nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème. — *Soit*

$$f(y) \sim A + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y)$$

une fonction presque périodique réelle de la variable y, il existe une fonction harmonique presque périodique $u(x, y)$ continue pour $x \geqq 0$, régulière pour $x > 0$, qui se réduit à $f(y)$ pour $x = 0$ et reste bornée

---

([1]) Nous présentons ici une remarque à propos de cette éventualité.

Soit u une fonction harmonique presque périodique dans $[a, b]$ et dans $[c, d]$ $(a < b < c < d)$ et qui n'est pas bornée, quoique régulière, dans (b, c). Nous choisissons deux droites x_1 et x_2 intérieures à $[a, b]$ et à $[c, d]$ et nous construisons la fonction harmonique presque périodique qui pour $x = x_1$ et $x = x_2$ se réduit à $u(x_1, y)$ et $u(x_2, y)$, soit $\mathfrak{u}(x, y)$ cette fonction. Considérons la différence

$$U(x, y) = u(x, y) - \mathfrak{u}(x, y),$$

c'est une fonction harmonique régulière dans (x_1, x_2) et nulle pour $x = x_1$ et $x = x_2$, elle peut donc être prolongée au delà de ces droites par la méthode des images et nous voyons que :

U est une fonction harmonique entière périodique par rapport à x et presque périodique par rapport à y dans des bandes telles que $(x_1, b]$ et $[c, x_2)$: c'est un exemple d'une telle fonction qu'il suffirait de donner pour prouver la possibilité de l'éventualité dont nous nous occupons.

dans le demi-plan des x positifs. De plus cette fonction tend uniformément vers A *lorsque x augmente indéfiniment et son développement est donné par*

$$u(x, y) \sim \mathrm{A} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y + \mathrm{B}_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y).$$

Cette fonction, si elle existe, est unique, car, s'il en existait deux, leur différence serait harmonique, régulière pour $x > 0$, continue pour $x \geqq 0$, nulle pour $x = 0$ et bornée dans tout le demi-plan $x > 0$; on pourrait alors la prolonger par le principe des images dans le demi-plan $x < 0$ et l'on obtiendrait ainsi une fonction harmonique régulière dans tout le plan et bornée, donc une constante qui serait nulle puisque la fonction est précisément nulle pour $x = 0$. C'est aussi une conséquence de la convexité de $\mathfrak{M}(x)$ car cette fonction est bornée quel que soit $x = \xi$ très grand et nulle pour $x = 0$, donc

$$\mathfrak{M}(x) \leqq x \frac{\mathfrak{M}(\xi)}{\xi};$$

pour x donné on peut prendre ξ assez grand pour que le deuxième membre de cette inégalité soit aussi faible que l'on veut, par suite $\mathfrak{M}(x) = 0$. Que cette fonction existe est un fait bien connu dont nous allons donner deux différentes démonstrations :

1° D'après le théorème sur l'approximation des fonctions presque périodiques, nous pouvons trouver une suite de polynomes

$$\varphi_m(y) = \mathrm{A} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(m)} (a_n^{(m)} \cos \lambda_n y + b_n^{(m)} \sin \lambda_n y)$$

qui converge uniformément vers $f(y)$ lorsque m augmente indéfiniment.

Formons la suite de polynomes harmoniques trigonométriques :

$$u_m(x, y) = \mathrm{A} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} e^{-\lambda_n x} (a_n^{(m)} \cos \lambda_n y + b_n^{(m)} \sin \lambda_n y)$$

qui tendent uniformément vers A lorsque x augmente indéfiniment.

D'après le théorème sur la convexité de la borne supérieure de la valeur absolue d'une fonction harmonique, on peut écrire :

$$\underset{x \geqq 0}{\text{borne sup.}} |u_{m_1} - u_{m_2}| = \underset{-\infty < y < +\infty}{\text{borne sup.}} |\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}|.$$

Il suit de là que les polynomes u_m tendent uniformément vers une limite u quand m tend vers l'infini et dans tout le demi-plan $x \geqq 0$: c'est la fonction que nous cherchions. Elle tend en effet vers $f(y)$ lorsque x tend vers zéro et vers A lorsque x tend vers $+\infty$ puisque u_m tend lui-même vers A ; de plus c'est la limite d'une suite de fonctions harmoniques bornées dans tout le demi-plan et qui tendent uniformément vers des limites presque périodiques pour $x = 0$ et lorsque x augmente indéfiniment : c'est donc aussi une fonction harmonique presque périodique.

Quant à son développement, il s'obtient à partir de la suite des polynomes u_m par passage à la limite, or $a_n^{(m)}$ et $b_n^{(m)}$ tendent respectivement vers A_n et B_n puisque φ_m tend vers $f(y)$: c'est donc bien celui que nous avions annoncé.

2° La démonstration que nous donnons ci-dessous est destinée à préparer les raisonnements du prochain Chapitre.

A partir de la fonction donnée $f(y)$ formons l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\frac{x\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}.$$

Elle a un sens pour toute valeur de x et de y puisque $f(\eta)$ est bornée et elle représente une fonction harmonique en x et y, je dis que pour $x > 0$ c'est la fonction $u(x, y)$.

a. Elle est en effet régulière pour $x > 0$ et bornée dans tout le demi-plan $x > 0$ par la borne G de la valeur absolue de $f(y)$;

b. Lorsque x tend vers zéro, elle tend vers $f(y)$: c'est aussi un fait bien connu dont la démonstration tient en quelques lignes.

Par une transformation linéaire évidente, nous avons, en effet :

$$u(x, y) - f(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x\eta + y) - f(y)]\frac{d\eta}{1+\eta^2},$$

f étant uniformément continue on peut trouver un nombre δ tel que pour $|y'-y| \leqq \delta$ on ait

$$|f(y')-f(y)| \leqq \varepsilon,$$

quel que soit le nombre ε donné, désignons alors par η_1 un nombre positif tel que

$$\frac{2G}{\pi\eta_1} \leqq \varepsilon$$

et choisissons x assez petit pour que

$$x\eta_1 < \delta.$$

Partageons alors l'intervalle d'intégration en trois autres comme il suit :

$$u(x,y)-f(y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-\eta_1} + \int_{\eta_1}^{+\infty} + \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} [f(x\eta+y)-f(y)] \frac{d\eta}{1+\eta^2}\right\}.$$

Dans l'intervalle $-\eta_1, \eta_1$ on a

$$|x\eta| < \delta,$$

donc

$$|f(x\eta+y)-f(y)| \leqq \varepsilon,$$

et par suite

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\eta_1}^{+\eta_1} [f(x\eta+y)-f(y)] \frac{d\eta}{1+\eta^2}\right| \leqq \varepsilon;$$

dans les deux autres intervalles on a

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\eta_1}\right| \leqq \frac{2G}{\pi}\int_{-\infty}^{-\eta_1} \frac{d\eta}{1+\eta^2} \leqq \varepsilon;$$

pour la même raison

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\eta_1}^{+\infty}\right| \leqq \varepsilon,$$

et par suite

$$|u(x,y)-f(y) \leqq 3\varepsilon,$$

c'est-à-dire que cette différence est plus petite qu'un nombre arbitraire dès que x est assez petit.

3° Cette fonction est presque périodique. Soit en effet Y une presque période de $f(y)$ relative à ε, on a

$$u(x, y+\mathrm{Y}) - u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(y+\mathrm{Y}) - f(y)\} \frac{x\,d\eta}{x^2+(y-\eta)^2}$$

et de

$$|f(y+\mathrm{Y}) - f(y)| \leqq \varepsilon,$$

on conclut immédiatement que

$$|u(x, y+\mathrm{Y}) - u(x, y)| \leqq \varepsilon;$$

que cette fonction tend uniformément vers une limite quand x augmente indéfiniment, cela paraît plus difficile à démontrer au moyen de cette seule expression.

Du théorème que nous venons de démontrer, découle immédiatement la proposition suivante : Si le développement d'une fonction harmonique presque périodique dans une bande $[a, b]$ n'a que des exposants négatifs (positifs), alors la fonction existe et est presque périodique dans tout le demi-plan $[a, \infty)$ $((-\infty, b])$ et elle tend uniformément soit vers une limite, soit vers l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ $(-\infty)$.

Occupons-nous seulement du cas des exposants tous négatifs et débarrassons-nous d'abord du terme en $kx+l$ s'il existe, il restera alors un développement ne contenant plus que des termes en $e^{-\lambda x}\cos\lambda y$ et $e^{-\lambda x}\sin\lambda y$; soit x_1 une droite de la bande $[a, b]$, considérons la fonction $u(x_1, y)$ et formons ainsi que nous venons de le faire la fonction $u_1(x, y)$ qui, pour $x = x_1$, se réduit à $u(x_1, y)$.

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}(\mathrm{A}_n \cos\lambda_n y + \mathrm{B}_n \sin\lambda_n y)$$

est le développement de $u(x, y)$ dans $[a, b]$, celui de u_1 dans $(x_1, +\infty)$ sera le même car ce sera

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x_1} e^{-\lambda_n(x-x_1)}(\mathrm{A}_n \cos\lambda_n y + \mathrm{B}_n \sin\lambda_n y).$$

Les deux fonctions u et u_1 ont le même développement dans $(x_1, b]$, elles coïncident donc dans cette bande et par suite dans tout leur domaine d'existence : c'est-à-dire que u existe et est presque périodique dans $[a, +\infty)$.

35. Quant à l'allure à l'infini, d'après ce que nous avons montré, la fonction $u_1(x, y)$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini et, par suite, la fonction d'où nous sommes partis tend uniformément, soit vers une constante, soit vers l'infini comme kx.

Nous allons maintenant établir les réciproques de ces propositions en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique presque périodique dans $[x_0, +\infty]$, alors trois cas peuvent se présenter :*

A. *$u(x, y)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini ;*
B. *$u(x, y)$ tend vers l'infini comme kx ;*
C. *$u(x, y)$ prend toute valeur donnée à l'avance ;*

ils correspondent aux trois éventualités suivantes :

α. *les exposants de $u(x, y)$ sont tous négatifs et il n'y a pas de terme en x ;*
β. *les exposants sont tous négatifs mais il y a un terme en x ;*
γ. *il y a des exposants positifs.*

Nous avons vu que les cas (A) et (B) sont effectivement possibles et réalisés dans les éventualités (α) et (β), il reste à montrer qu'en dehors de ces cas, le cas (C), seul, est possible.

Pour cela nous choisissons un nombre M et nous supposons que la fonction ne prend pas la valeur M dans le demi-plan $x > x_0$: c'est-à-dire qu'elle restera constamment ou bien supérieure ou bien inférieure à M. Supposons que ce soit la première éventualité qui se présente, alors on a

$$x(x, y) - M \geqq 0 \qquad (x > x_0).$$

Cela posé, formons la quantité

$$M_y\{(1 \pm \cos\lambda y)[u(x, y) - M]\} = kx + l - M \pm \left(\frac{A^+}{2} e^{\lambda x} + \frac{A^-}{2} e^{-\lambda x}\right).$$

Que l'on prenne le signe + ou le signe — devant $\cos\lambda y$, la quantité qui figure sous le signe M, est toujours non négative dans tout le demi-plan $x > x_0$, sa valeur moyenne elle aussi est non négative; or, dans le deuxième membre le terme $\frac{A^-}{2} e^{-\lambda x}$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, on peut donc choisir x assez grand pour que, ε étant donné, on ait

$$\left| \frac{A^-}{2} e^{-\lambda x} \right| < \varepsilon$$

et alors, il est nécessaire que l'on ait à partir de cette valeur de x

$$kx + l - M - \left| \frac{A^+}{2} \right| e^{\lambda x} \geqq -\varepsilon,$$

et cela n'est possible que si, pour toute valeur de λ, on a $A^+ = 0$. On montrerait de même que l'on doit avoir $B^+ = 0$, par suite la fonction $u(x, y) - M$ n'a que des exposants négatifs et elle tend vers l'infini comme kx ou vers une constante quand x tend vers l'infini. Le cas où l'on aurait constamment $u(x, y) - M \leqq 0$ se traite de la même façon, seul le cas (C) est donc possible et les raisonnements que nous venons de faire montrent de plus qu'il est effectivement réalisé lorsque, parmi les exposants, il s'en trouve de positifs. Les trois hypothèses s'excluant mutuellement, le théorème est complètement établi.

56. Pour clore ce Chapitre il nous reste à parler d'un problème auquel nous avons déjà fait allusion et qui est le suivant :

Étant donnée une fonction presque périodique de y sur la droite $x = a$ et une autre sur la droite $x = b (a < b)$, on a vu qu'il existait deux fonctions bornées harmoniques presque périodiques, l'une dans $(a, +\infty)$, l'autre dans $(-\infty, b)$ et la somme de ces deux fonctions est harmonique presque périodique dans (a, b); si, inversement, nous nous donnons une fonction harmonique presque périodique dans (a, b) nous sommes conduits à nous demander si elle est décomposable en la somme de deux fonctions de cette sorte ([1]).

Retranchant d'abord, si cela est nécessaire, le terme en $kx + l$, le

([1]) Pour une fonction harmonique périodique, on sait que cette décomposition est toujours possible (théorème de Laurent).

problème revient à trouver deux fonctions harmoniques s'annulant l'une pour $x \to +\infty$, l'autre pour $x \to -\infty$. L'une de ces fonctions n'aura que les exposants négatifs de la fonction dont nous sommes partis, l'autre que les exposants positifs. Afin de simplifier l'écriture nous supposerons que $a = 0$ et $b = 1$, cas auquel on peut toujours se ramener par une transformation linéaire sur x et y qui conserve les fonctions harmoniques : une translation et une homothétie.

Soient alors f_0 et f_1 les fonctions presque périodiques de y auxquelles se réduit la fonction que nous nous proposons de décomposer pour $x = 0$ et $x = 1$: le problème revient alors à rechercher s'il existe deux autres fonctions presque périodiques $\varphi_0(y)$ et $\varphi_1(y)$ telles que

$$\varphi_0(y) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\frac{dt}{1+(y-t)^2} = f_0(y).$$

$$\varphi_1(y) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\,\frac{dt}{1+(y-t)^2} = f_1(y).$$

Par addition et soustraction on tire de ces deux équations

$$\varphi_0(y) + \varphi_1(y) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0(t) + \varphi_1(t)]\,\frac{dt}{1+(y-t)^2} = f_0(y) + f_1(y),$$

$$\varphi_0(y) - \varphi_1(y) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0(t) - \varphi_1(t)]\,\frac{dt}{1+(y-t)^2} = f_0(y) - f_1(y).$$

Nous sommes ainsi conduits à l'étude de l'équation intégrale

$$\varphi(y) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{dt}{1+(y-t)^2} + f(y),$$

pour $\lambda = \pm 1$ et il se trouve que précisément $\lambda = +1$ est valeur singulière et c'est même la plus petite en valeur absolue. Toutes les valeurs de λ supérieures à 1 sont aussi valeurs singulières et les solutions qui y correspondent sont de la forme $\cos(\alpha y + \beta)$, où $\alpha = \log \lambda$. Ce noyau a donc les mêmes propriétés que le noyau de M. Picard, mais son étude est facilitée par la représentation de l'intégrale au moyen des fonctions harmoniques. Notre intention n'est pas de faire ici l'étude de l'équation intégrale à laquelle nous sommes arrivés ; mais il nous a paru intéressant de la signaler ; nous allons entre-prendre le problème de la réduction par des raisonnements d'un tout autre ordre. Nous donnons en note quelques indications relatives au noyau ([1]).

([1]) La méthode des approximations successives converge, lorsque $f(y)$ étant bornée et continue, λ est plus petit que 1 en valeur absolue. Posant, en effet,

$$\varphi(y) = f(y) + \lambda f^{(1)}(y) + \lambda^2 f^{(2)}(y) + \ldots + \lambda^n f^{(n)}(y) + \ldots,$$

on a

$$f^{(n)}(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-1)}(t)\frac{dt}{1+(y-t)^2}.$$

Si G est la borne supérieure de $|f|$ on a alors

$$|f^{(1)}| \leqq G, \qquad \ldots, \qquad |f^{(n)}| \leqq G, \qquad \ldots,$$

et, par suite, le développement de φ converge dès que $|\lambda| < 1$.

A partir de $f(y)$ construisons la fonction harmonique $u(x, y)$ qui se réduit à $f(y)$ pour $x = 0$ et est bornée dans le demi-plan $x > 0$, on a

$$f^{(1)}(y) = u(1, y), \qquad f^{(2)}(y) = u^{(1)}(1, y) = u(2, y), \qquad \ldots;$$

$$f^{(n)}(y) = u(n, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-8}^{+\infty} f(t)\frac{n\,dt}{n^2+(y-t)^2}.$$

En posant, comme d'habitude,

$$K(t, y) = \frac{1}{1+(y-t)^2},$$

le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré est

$$K^{(n)}(t, y) = \frac{n}{n^2+(y-t)^2}.$$

$\lambda = 1$ est une valeur singulière à laquelle correspond la fonction fondamentale $\varphi = 1$.

$\lambda = -1$ n'est pas valeur singulière, car construisant la fonction $u(x, y)$ à partir de la solution φ de l'équation sans second membre, on en déduit

$$u(0, y) = -u(1, y),$$

d'où, puisque u peut tout aussi bien être définie par les valeurs qu'elle prend sur la droite $x = 1$,

$$u(x, y) = -u(x+1, y) = u(x+2, y),$$

u est harmonique, bornée dans le demi-plan positif et périodique par rapport

37. Nous allons montrer que si $u(x, y)$ n'est pas décomposable, en tout cas $\frac{\partial u}{\partial x}$ l'est.

Pour cela, dans la bande $[a, b]$ où $u(x, y)$ est définie nous choisissons deux droites intérieures D_1 et D_2 d'abscisses d_1 et d_2 $(d_1 < d_2)$ et nous rappelons que l'on a dans la bande (d_1, d_2) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} = \; & \frac{1}{2\pi}\int_{D_2}\left[\frac{\partial \log r}{\partial x}\underset{(x=d_2)}{\frac{\partial u}{\partial x}} - u\,\frac{\partial}{\partial x}\underset{(x=d_2)}{\left(\frac{d\log r}{dx}\right)}\right]d\eta \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_{D_1}\left[\frac{\partial \log r}{\partial x}\underset{(x=d_1)}{\frac{\partial u}{\partial x}} - u\,\frac{\partial}{\partial x}\underset{(x=d_2)}{\left(\frac{d\log r}{dx}\right)}\right]d\eta.\end{aligned}$$

Or, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(D)} u\,\underset{(x=d_2)}{\frac{d\log r}{dx}}\,d\eta$$

représente la fonction harmonique qui dans le demi-plan $x > d_2$ reste bornée et se réduit à $u(d_2, y)$ pour $x = d_2$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{D} u\,\frac{\partial}{\partial x}\underset{x=d)}{\left(\frac{d\log r}{dx}\right)}\,d\eta$$

converge donc egalement dans tout un demi-plan et elle est égale à la dérivée par rapport à x de la fonction dont nous venons de parler ou

---

à x, c'est donc une constante qui doit être nulle pour que l'on ait

$$u(x, y) = -u(x+1, y).$$

$\lambda > 1$ est aussi valeur singulière, car pour

$$\varphi(y) = \cos(\alpha y + \beta)$$

on a, d'après la théorie des fonctions harmoniques,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\alpha y + \beta)\frac{dt}{1+(y-t)^2} = e^{\ \alpha}\cos(\alpha y + \beta),$$

il suffit alors de prendre $\alpha = \log\lambda$ pour se convaincre que λ est valeur singulière.

à cette dérivée changée de signe. Remarquons aussi que

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = -\frac{d \log r}{\underset{(x=d_2)}{dx}},$$

donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{D_2} \frac{\partial \log r}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,d\eta$$

a un sens et reste bornée dans tout demi-plan puisque $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée dans $[a, b]$. Donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{D_2}\left[\frac{\partial \log r}{\partial x}\,\underset{(x=d_2)}{\frac{\partial u}{\partial x}} - u\frac{\partial}{\partial x}\left(\underset{(x=d_2)}{\frac{d \log r}{dx}}\right)\right]d\eta$$

a un sens dans tout le demi-plan $x < d_2$ et y représente une fonction harmonique bornée, soit $\mathfrak{U}_2(x, y)$, de même, l'intégrale relative à D_1 représente une fonction harmonique dans le demi-plan $x > d_1$, soit $\mathfrak{U}_1$ cette fonction changée de signe, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2,$$

la décomposition est effectuée.

Si u est elle-même décomposable en deux fonctions u_1 et u_2 on devra avoir

$$u = u_1 + u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \mathfrak{U}_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \mathfrak{U}_2.$$

Partant d'une fonction harmonique presque périodique, les intégrales dont nous avons parlé représentent toutes, elles aussi, des fonctions presque périodiques et $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ sont presque périodiques.

Si u_1 et u_2 sont bornées, alors elles sont aussi presque périodiques; démontrons-le par exemple pour u_1, soit $\mathfrak{V}_1$ la fonction conjuguée de $\mathfrak{U}_1$ définie à une constante près par $-\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mathfrak{V}_1$, elle est aussi bornée dans le demi-plan $x > d_1$ et nous verrons, dans le Chapitre suivant, que, dans ce cas, elle est aussi presque périodique; or on a

$$u_1(x, y) = -\int_0^y \mathfrak{V}_1(x, y)\,dy + \text{fonction de } x;$$

donc dire que u_1 est bornée équivaut à dire que $\int_0^y \mathfrak{V}_1(x, y)dy$ est bornée; sous le signe $\int$ figure une fonction presque périodique qui a, par hypothèse une intégrale bornée, donc aussi presque périodique et u_1 est presque périodique sur toute droite.

Remarquons aussi que, si l'on se propose de résoudre le problème au moyen des équations intégrales que nous avons signalées en se plaçant sur des droites intérieures à $[a, b]$ et que si l'on trouve des solutions bornées pour ces équations, ces solutions seront presque périodiques : c'est un résultat qu'il semble difficile de démontrer *a priori*.

Un criterium permettant d'affirmer que la décomposition est possible est le suivant : si les exposants λ_n n'ont pas zéro pour point limite, la décomposition est toujours possible.

Considérons en effet la fonction analytique presque périodique

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y};$$

ses exposants n'ont pas zéro pour point limite et M. Bohr (III) a démontré que, dans ce cas, ses intégrales sont aussi presque périodiques ; en choisissant bien entendu les intégrales qui n'ont pas de terme constant, on voit que u est la dérivée d'une fonction harmonique presque périodique, donc elle est décomposable.

38. Il nous reste à donner un exemple de fonction harmonique presque périodique et indécomposable. M. Bohr a déjà donné un exemple de fonction analytique indécomposable, la partie réelle de la fonction qu'il a construite est aussi indécomposable.

Nous allons donner ici un exemple que nous reprendrons dans le prochain Chapitre.

Soit la fonction

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y + B_n(e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y],$$

où les λ_n sont linéairement indépendants et tendent vers zéro; pour qu'elle représente une fonction presque périodique dans $(-1, +1)$, il faut que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [|A_n| + |B_n|] \operatorname{sh} \lambda_n$$

converge, ce qui permet en même temps d'écrire le signe $=$ au lieu du signe $\sim$.

Je dis que cette fonction est indécomposable lorsque $\Sigma[|A_n| + |B_n|]$ diverge.

Si elle l'était, ce serait en effet, en la somme des deux fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x} (A_n \cos \lambda_n y + B_n \sin \lambda_n y)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x} (A_n \cos \lambda_n y + B_n \sin \lambda_n y).$$

Mais aucune de ces séries n'est celle d'une fonction presque périodique, car, pour $x = 0$ elles réduisent toutes deux à

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n y + B_n \sin \lambda_n y)$$

et ce développement ne peut être celui d'une fonction presque périodique de y que si la série $\Sigma[|A_n| + |B_n|]$ converge, puisque les λ_n sont linéairement indépendants, et cela est contraire à l'hypothèse.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS CONJUGUÉES DES FONCTIONS HARMONIQUES PRESQUE PÉRIODIQUES.

39. Nous arrivons maintenant au problème qui a donné lieu à ces recherches et qui est, comme nous l'avons déja dit, de voir si les fonctions harmoniques presque périodiques peuvent toujours être considérées comme étant la partie réelle des fonctions analytiques presque périodiques, nous montrerons qu'il n'en est rien, ce qui justifie les recherches du précédent Chapitre.

Nous nous occuperons aussi du problème suivant : une fonction presque périodique $f(y)$ étant donnée, nous avons formé la fonction harmonique presque périodique bornée par le demi-plan $x \geqq 0$ et se réduisant à $f(y)$ pour $x = 0$; nous rechercherons alors dans quelles conditions la fonction conjuguée de cette fonction est presque périodique et aussi dans quelles conditions la limite de cette fonction, lorsque x tend vers zéro, est presque périodique. Ce problème est, comme on va le voir, intimement lié à celui de l'intégration et nous formerons des exemples des diverses éventualités dont la discussion mettra en évidence la possibilité.

En somme, les problèmes que nous allons aborder sont les suivants:

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique presque périodique dans $[a, b]$:

$$(1)\qquad u(x, y) \sim kx + l + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n^+ e^{\lambda_n x} + A_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \right.$$
$$\left. + (B_n^+ e^{\lambda_n x} + B_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y \right].$$

Le développement de cette fonction est la partie réelle d'un développement, purement formel, en $z = x + iy$.

$$kz + (l + ih) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n^+ - iB_n^+) e^{\lambda_n z} + (A_n^- + iB_n^-) e^{-\lambda_n z} \right],$$

ce développement est-il celui d'une fonction analytique presque périodique dans une bande intérieure à $[a, b]$? Il faut d'abord qu'il n'y ait pas de terme en z dans le développement, mais nous verrons que cela n'est pas suffisant; dans le cas où cela a lieu, alors la partie imaginaire v de la fonction dont nous avons écrit le développement a le développement suivant :

$$(2)\qquad v(x, y) \sim h + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n^+ e^{\lambda_n x} - A_n^- e^{-\lambda_n x}) \sin \lambda_n y \right.$$
$$\left. - (B_n^+ e^{\lambda_n x} - B_n^- e^{-\lambda_n x}) \cos \lambda_n y \right],$$

et nous montrerons que si $v(x, y)$ est presque périodique, elle a effectivement le développement que nous venons d'écrire.

Quant au deuxième problème, il se pose de la façon suivante :

A partir de

$$f(y) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y),$$

nous formons

$$u(x, y) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}(A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y);$$

alors si la fonction conjuguée $v(x, y)$ de u est presque périodique, elle aura pour développement

$$v(x, y) \sim C - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}(A_n \sin\lambda_n y - B_n \cos\lambda_n y),$$

et le problème auquel nous nous attacherons surtout sera de reconnaître si le développement

$$C - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\lambda_n y - B_n \cos\lambda_n y)$$

est celui d'une fonction presque périodique.

40. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique presque périodique dans une bande $[a, b]$ (ou (a, b)), sa fonction conjuguée $v(x,y)$ est définie à une constante près par les équations

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et elle est régulière elle aussi dans $[a, b]$ ou (a, b). Au sujet de cette fonction nous allons démontrer le théorème que nous avions annoncé au sujet de son développement.

Théorème. — *Si la fonction $v(x, y)$ est presque périodique, le développement de $u(x, y)$ ne contient pas de terme en x et le développement de v est le conjugué de celui de u :*

En effet, pour une fonction presque périodique harmonique, telle que v, on doit avoir :

$$\mathrm{M}_y\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\} = \mathrm{M}_y\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0.$$

Or nous avons vu que

$$\mathrm{M}_y\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = k,$$

ce qui nécessite $k = 0$.

Ensuite, d'après la propriété de permutation des signes M et ∂, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{M}_y\left\{ v \begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix}\right\} = \mathrm{M}_y\left\{\frac{\partial v}{\partial x}\begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix}\right\} = \mathrm{M}_y\left\{-\frac{\partial u}{\partial y}\begin{Bmatrix}\cos\lambda y\\ \sin\lambda y\end{Bmatrix}\right\},$$

et ces égalités nous montrent immédiatement que si u a le développement (1) dans $[a, b]$, v ne saurait en avoir d'autre que (2) si elle est presque périodique dans une bande intérieure à $[a. b]$. Si $v(x, y)$ est presque périodique dans une bande intérieure à $[a, b]$, elle y est bornée sur toute droite, or, pour $x = x_0$, on a

$$v(x_0, y) = \int_{(x=x_0)} \frac{\partial u}{\partial x}\, dy,$$

et nous avons vu (n° **17**) que si $\int \frac{\partial u}{\partial x} dy$ est bornée sur une droite intérieure à $[a, b]$, elle est bornée sur toute autre droite de la bande; de plus, $\frac{\partial u}{\partial x}$ étant presque périodique dans $[a, b]$, son intégrale sur chaque droite est aussi presque périodique, si elle est bornée; donc $v(x, y)$ est presque périodique dans $[a, b]$ dès qu'elle est, ou bien bornée, ou bien presque périodique sur une droite de l'intérieur.

41. Quels sont les cas où l'on pourra affirmer qu'il en est ainsi ?

Si la série formée formellement converge uniformément, il en sera bien ainsi.

Dans le cas où les exposants sont tels que $\Sigma e^{-\lambda_n \delta}$ converge quel que soit δ positif, nous avons montré que les termes $|A^{\pm} e^{\pm \lambda x}|$, $|B^{\pm} e^{\pm \lambda x}|$ étaient plus petits que ceux d'une série convergente; par suite la série conjuguée de celle de u sera elle-même absolument convergente et représentera la fonction $v(x, y)$ conjuguée de u.

Nous allons démontrer que, plus généralement, si les exposants λ_n

n'ont pas zéro pour un de leurs points limites, $v(x,y)$ est aussi presque périodique.

Nous avons vu, en effet, que, dans ces conditions, la fonction est décomposable en deux autres : l'une définie dans $(-\infty, b]$ et l'autre dans $[a, +\infty)$ et il en est de même de la fonction analytique de $z = x + iy$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = {}^{-}(z) + f^{+}(z),$$

où $f^{-}(z)$ est régulière et presque périodique dans $(-\infty, b]$ et n'a que des exposants positifs qui n'ont pas zéro pour un de leurs points limites; mais, dans ces conditions, M. Bohr (III) a démontré que $\int f^{-}(z)\,dz$ est bornée et presque périodique elle aussi dans $(-\infty, b]$. Le raisonnement est le même pour $f^{+}(z)$ et alors on voit que

$$u(x, y) + i\,v(x, y) = f(z) = \int f'(z)\,dz = \int [f^{-}(z) + f^{+}(z)]\,dz$$

est presque périodique dans $[a, b]$, il est donc nécessaire pour cela que $v(x, y)$ soit aussi presque périodique.

Nous citerons également le cas où l'intégrale $\int_0^y u(x,y)dy$ est bornée et par suite presque périodique, sur deux droites de la bande $[a, b]$ (et par suite dans toute la bande comme nous allons le voir). La fonction harmonique

$$U(x, y) = \int_0^y u(x, y)\,dy - \int_{x_0}^{x} (x - \xi)\frac{\partial u}{\partial y}(\xi, 0)\,d\xi$$

a pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = u(x, y),$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, 0)\,d\xi = v(x, y) - v(x_0, 0).$$

Or la fonction $\int_0^y u(x,y)dy$ est presque périodique sur deux droites à l'intérieur de la bande; $U(x, y)$ est donc presque périodique dans la bande formée par ces deux droites, il en est de même de ses dérivées partielles et de $v(x, y)$ dans cette même bande, par suite dans toute la bande $[a, b]$. La fonction U a ses dérivées presque périodiques dans $[a, b]$ et par suite bornées, et comme $\int \frac{\partial U}{\partial y} dy$ est bornée dans une bande, U est bornée dans $[a, b]$, donc presque périodique et nous avons le résultat que nous avions annoncé concernant $\int u(x, y) dy$.

42. Il ne nous reste plus qu'à donner un exemple de fonction indécomposable dont la fonction conjuguée n'est pas presque périodique, car, dans la suite, nous aurons l'occasion de donner des exemples de ce genre pour les fonctions définies dans un demi-plan.

Reprenons à cet effet la fonction que nous avons considérée au n° **38** :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n x} - e^{-\lambda_n x})(A_n \cos \lambda_n y + B_n \sin \lambda_n y),$$

où les λ_n sont linéairement indépendants et où la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [|A_n| + |B_n|] \operatorname{sh} \lambda_n$$

converge, alors la fonction précédente est presque périodique dans $(-1, +1)$; nous avons vu qu'elle est indécomposable lorsque

$$\sum [|A_n| + |B_n|]$$

diverge, mais, dans ces conditions, si sa fonction conjuguée $v(x, y)$ était presque périodique on aurait

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n x} + e^{-\lambda_n x})(A_n \sin \lambda_n y - B_n \cos \lambda_n y);$$

pour $x = 0$ ce développement devrait converger absolument, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses.

43. Venons maintenant au deuxième problème : nous donnons une fonction $f(y)$ presque périodique sur l'axe des y; nous avons déjà montré qu'il existe une seule fonction harmonique presque périodique dans le demi-plan positif, uniformément bornée et se réduisant à $f(y)$ pour $x=0$.

Nous avons trouvé :

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{x\,dt}{x^2+(y-t)^2},$$

et si

$$f(y)\sim A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n y+B_n\sin\lambda_n y),$$

alors

$$u(x, y)\sim A_0+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n x}(A_n\cos\lambda_n y+B_n\sin\lambda_n y)$$

si $v(x, y)$ est aussi presque périodique, son développement sera

$$v(x, y)\sim C-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n x}(A_n\sin\lambda_n y-B_n\cos\lambda_n y),$$

où la constante C est indéterminée. Nous allons exprimer une fonction conjuguée au moyen d'une intégrale, ce qui facilitera la discussion et la recherche des conditions pour que $v(x, y)$ soit presque périodique.

Pour cela choisissons un nombre ρ quelconque positif et définissons deux nouvelles fonctions $f_0(y)$ et $f_1(y)$ par les conditions suivantes :

$$f_0(y)=\begin{cases} f(y) & \text{pour } |y|\leqq\rho,\\ 0 & \text{pour } |y|>\rho;\end{cases}$$

$$f_1(y)=\begin{cases} 0 & \text{pour } |y|\leqq\rho,\\ f(y) & \text{pour } |y|>\rho.\end{cases}$$

On a évidemment

$$f(y)=f_0(y)+f_1(y).$$

Cela posé, considérons les deux expressions

$$v_0(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,\frac{(t-y)\,dt}{x^2+(t-y)^2},$$

$$v_1(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\left[\frac{t-y}{x^2+(t-y)^2}-\frac{1}{t}\right]dt.$$

La première définit une fonction bornée sur toute droite d'abscisse positive. Soit en effet G une limite supérieure de $|f(t)|$, on a :

$$|v_0(x, y)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho} G \frac{|t-y|\,dt}{x^2+(t-y)^2}.$$

Si y est dans l'intervalle $-\rho$, $+\rho$, on voit que

$$|v_0(x, y)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho} G \frac{|t-y|}{x^2}\,dt \leqq \frac{2}{\pi}\frac{G\rho^2}{x^2} \qquad (-\rho < y < \rho).$$

Pour y extérieur à l'intervalle $-\rho$, $+\rho$, on a :

$$\begin{aligned}|v_0(x, y)| &\leqq \frac{G}{\pi} \max \left\{ \frac{1}{2}\log\frac{x^2+(\rho-y)^2}{x^2+(\rho+y)^2},\ \frac{1}{2}\log\frac{x^2+(\rho+y)^2}{x^2+(\rho-y)^2} \right\} \qquad \left(y \begin{cases} <-\rho \\ > \ \ \rho\end{cases}\right) \\ &\leqq \frac{G}{\pi}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+\rho^2}+\rho}{x}\right).\end{aligned}$$

Ensuite cette fonction est harmonique dans tout le demi-plan positif, car elle y a visiblement des dérivées de tous ordres et le noyau $\dfrac{t-y}{x^2+(t-y)^2}$ est la partie imaginaire de la fonction analytique $\dfrac{1}{z-it}$ dont $\dfrac{x}{x^2+(t-y)^2}$ est la période réelle.

La deuxième expression définit également une fonction harmonique dans le demi-plan positif car le noyau est la partie imaginaire de

$$\frac{1}{z-it}+\frac{1}{it}=\frac{z}{it(z-it)},$$

et alors, pour $|z| \geqq R$, on a :

$$\left|\frac{t-y}{x^2+(t-y)^2}-\frac{1}{t}\right| \leqq \frac{|z|}{|t|\,\big||t|-|z|\big|} \leqq \frac{R}{t^2\left|1-\dfrac{R}{|t|}\right|}.$$

Or, x, y étant donnés, on peut choisir $|t|$ de façon que

$$\frac{R}{|t|} < 1-\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

dès que t surpasse une certaine valeur, ceci nous montre, puisque $f(t)$ est bornée, que l'intégrale qui définit $v_1(x, y)$ a un sens ; le même procédé montre aussi qu'elle a des dérivées de tous les ordres, elle est par suite harmonique puisque le noyau l'est.

Montrons que la fonction

$$v(x, y) = v_0(x, y) + v_1(x, y)$$

est l'une des fonctions conjuguées de la fonction $u(x, y)$.

Les fonctions $\dfrac{1}{z - it}$ et $\dfrac{z}{it(z - it)}$ ont toutes deux pour partie réelle $\dfrac{x}{x^2 + (y - t)^2}$, par conséquent les fonctions

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) \frac{x\,dt}{x^2 + (y - t)^2},$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \frac{x\,dt}{x^2 + (y - t)^2}$$

ont respectivement pour l'une de leurs conjuguées v_0 et v_1 et d'autre part on a évidemment

$$u = u_0 + u_1$$

et par suite une fonction conjuguée de u sera

$$v = v_0 + v_1.$$

Indiquons l'expression suivante de v :

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{K}(t; x, y)\,dt$$

avec

$$\mathrm{K}(t; x, y) = \begin{cases} \dfrac{t - y}{x^2 + (t - y)^2} & \text{pour } |t| \leqq \rho, \\ \dfrac{t - y}{x^2 + (t - y)^2} - \dfrac{1}{t} & \text{pour } |t| > \rho. \end{cases}$$

Nous avons déjà montré que si v est bornée, elle est aussi presque périodique et nous avons vu que v_0 est bornée sur toute droite du demi-plan positif, par suite; pour que v soit bornée, il faudra que v_1 le soit et il suffira même qu'elle le soit sur une seule droite.

44. Un cas particulier simple est celui où la fonction $f(t)$ a une dérivée bornée [ce sera le cas si, au lieu de partir de $f(t)$, nous partons de la valeur de $u(x, y)$ pour x positif quelconque], ou même si la fonction satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α $(0 < \alpha \leqq 1)$; c'est-à-dire si l'on peut trouver un nombre δ et une constante M tels que

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqq M |t_2 - t_1|^\alpha$$

dès que

$$|t_2 - t_1| \leqq \delta.$$

Faisant tendre alors ρ vers zéro on pourra écrire :

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{t-y}{x^2+(t-y)^2} - \frac{1}{t}\right] dt,$$

en entendant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\rho \to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{\rho}^{+\infty}\right\}.$$

Car, quel que soit ρ, l'expression que nous avons obtenue précédemment définit une fonction conjuguée de u et, d'après les limitations obtenues pour $v_0(x, y)$, cette dernière fonction tend uniformément vers zéro dans tout demi-plan $x > x_0$ $(x_0 > 0)$.

Alors, dans ce cas, l'intégrale

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{t-y} - \frac{1}{t}\right] dt$$

existe également (en prenant, au voisinage de $t = 0$ et $t = y$ les valeurs principales de cette intégrale comme nous l'avons fait pour v, c'est-à-dire que, en supposant par exemple y positif, nous posons

$$g(y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{\rho}^{y-\rho} + \int_{y+\rho}^{+\infty}\right].$$

Or, on a

$$v(x, y) - g(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{-x^2\,dt}{(t-y)[x^2+(t-y)^2]},$$

et cette fonction est bornée sur toute droite du demi-plan positif car

$$\begin{aligned} v(x, y) - g(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y)\left(\frac{t}{x^2+t^2} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{\rho}^{+\infty} + \int_{-\rho}^{+\rho}\right] \\ &\qquad (0 < \rho \leqq \delta), \end{aligned}$$

mais

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\rho}\right| \text{ ou } \left|\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{+\infty}\right| \leq \frac{G}{2\pi}\log\left(1+\frac{x^2}{\rho^2}\right)$$

et

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho}\right| \leq \frac{2M\rho^\alpha}{\pi.\alpha}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $v(x, y)$ soit bornée dans le demi-plan des x positifs est donc que $g(y)$ le soit également.

Remarquons maintenant qu'étant donné un nombre positif ε quelconque, on peut trouver les nombres x et ρ de façon à satisfaire à la fois aux inégalités

$$o < \rho \leqq \delta,$$

$$\frac{G}{\pi}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{2M\rho^\alpha}{\pi\alpha} \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$|v(x, y) - g(y)| \leqq \varepsilon,$$

et d'après la forme de ces inégalités nous voyons que si elles sont satisfaites pour une certaine valeur de x positive, elles le seront pour les valeurs plus petites. Par suite $v(x, y)$ tend uniformément vers $g(y)$ lorsque x tend vers zéro. De plus, si $g(y)$ est bornée, elle est presque périodique, car, sur la droite x que nous avons déterminée par les inégalités précédentes, $v(x, y)$ est presque périodique; soit η une de ses presque périodes relative à ε, on aura

$$\begin{aligned}|g(y+\eta) - g(y)| \leqq |g(y+\eta) - v(x, y+\eta)| \\ + |v(x, y+\eta) - v(x, y)| + |v(x, y) - g(y)| \leqq 3\varepsilon,\end{aligned}$$

η est une presque période de $g(y)$ relative à 3ε, nombre arbitrairement petit.

Soit alors

$$v(x, y) \sim C - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}(A_n \sin\lambda_n y - B_n \cos\lambda_n y)$$

le développement de v, les fonctions presque périodiques de y auxquelles cette fonction se réduit pour des valeurs de x qui tendent vers zéro, tendent uniformément vers $g(y)$, donc

$$g(y) \sim C - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\lambda_n y - B_n \cos\lambda_n y).$$

Nous appellerons fonction conjuguée $g(y)$ de la fonction $f(y)$, la limite (définie à une constante près), si elle existe, de la fonction harmonique $v(x, y)$ lorsque x tend vers zéro.

Le résultat trouvé peut s'énoncer ainsi :

Si $f(y)$ satisfait à une condition de Lipschitz, la condition nécessaire et suffisante pour que $v(x,y)$ soit presque périodique est que sa fonction conjuguée $g(y)$ soit elle aussi presque périodique.

45. Nous signalerons également un autre cas simple, celui où $\int_{\rho}^{\infty}$ et $\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(t)}{t}\, dt$ existent qui, combiné avec le résultat précédent, nous fournira un criterium nous permettant d'affirmer que la fonction conjuguée de $f(y)$ est aussi presque périodique.

Dans les conditions où nous nous plaçons maintenant, les précautions que nous avons prises pour mettre $v(x, y)$ sous forme d'intégrale ne sont plus nécessaires. Nous avons trouvé

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, K(t;\, x, y)\, dt;$$

mais dans ce cas l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{(t-y)}{x^2 + (t-y)^2}\, dt$$

a un sens et la différence entre cette fonction de x et y et la fonction v est

$$\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{\rho}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt,$$

c'est-à-dire une constante; alors la deuxième intégrale que nous venons d'écrire est aussi une fonction conjuguée de u, c'est celle que nous choisirons maintenant et nous écrirons, car il ne peut y avoir ambiguïté,

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{(t-y)}{x^2+(t-y)^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y)\frac{t}{x^2+t^2}\,dt,$$

Quand les intégrales $\int_{-\infty}^{-\rho}$ et $\int_{\rho}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ auront-elles un sens? Cela arrivera lorsque $f(t)$ a une intégrale bornée ou si, plus généralement,

$$\int f(t)\,dt = o(|t|^{1-\alpha}) \qquad (0 < \alpha \leq 1),$$

et pour cela il est nécessaire que $f(t)$ ait une valeur moyenne nulle mais cela n'est nullement suffisant ainsi que nous le verrons sur des exemples et nous aurons en même temps le résultat suivant :

Si petit que soit le nombre positif α, il est possible de déterminer des fonctions presque périodiques $f(t)$ à une valeur moyenne nulle et telles que leurs intégrales ne restent pas toujours inférieures à $|t|^{1-\alpha}$.

Remarquons aussi que nous pouvons toujours supposer que la valeur moyenne de $f(t)$ est nulle; cela revient simplement à retrancher une constante à la fonction $u(x, y)$ et cela a un effet semblable sur $v(x, y)$.

Plaçons-nous donc dans le cas où $v(x, y)$ peut être mise sous la forme précédente et cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $v(x, y)$ soit bornée.

Posons

$$h(y) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{f(t+y)}{t}\,dt + \int_{\rho}^{+\infty}\frac{f(t+y)}{t}\,dt\right] \qquad (\rho > 0).$$

Si $\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ a un sens, il en est de même de $\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t+y)}{t}\,dt$ car, en posant

$$F(t) = \int f(t)\,dt,$$

on a

$$\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t+y)-f(t)}{t}\,dt = \int_{\rho}^{\infty}\frac{F(t+y)-F(t)}{t^2}\,dt - \frac{F(\rho+y)-F(\rho)}{\rho}.$$

Or on a vu dans l'Introduction que

$$F(t+y) - F(t) = \int_t^{t+y} f(t)\,dt$$

est presque périodique, l'intégrale du deuxième membre de cette égalité a donc un sens et le même raisonnement montre que

$$\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{f(t+y)}{t}\,dt$$

a aussi un sens, ce qui prouve l'existence de la fonction $h(y)$.

Mais la fonction

$$\begin{aligned} &v(x,y) - h(y) \\ &\quad = \frac{1}{\pi}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{\rho}^{+\infty}\right) f(t+y)\left(\frac{t}{x^2+t^2} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_{-\rho}^{+\rho} f(t+y)\frac{t}{x^2+t^2}\,dt\right] \end{aligned}$$

est bornée sur chaque droite $x > 0$, car on a

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\rho}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{+\infty}\right| \leqq \frac{G}{2\pi}\log\left(1+\frac{x^2}{\rho^2}\right),$$

et

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho}\right| \leqq \frac{G}{\pi}\log\left(1+\frac{\rho^2}{x^2}\right),$$

d'où il suit que

$$|v(x,y) - h(y)| \leqq \frac{G}{\pi}\log\left[\left(1+\frac{\rho^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\rho^2}\right)\right],$$

ce que nous énoncerons :

Lorsque les intégrales $\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{f(t)}{t}\,dt$ ont un sens, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $v(x,y)$ soit presque périodique est que $h(y)$ reste bornée.

Cette dernière condition est réalisée lorsque $f(t)$ a une intégrale bornée, car on a

$$h(y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{F(t+y)}{t^2}\,dt + \int_{\rho}^{+\infty}\frac{F(t+y)}{t^2}\,dt\right\} + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{F(y-\rho)}{\rho} - \frac{F(y+\rho)}{\rho}\right\}.$$

Si $|F(t)| < H$ on a

$$h(y) < \frac{4}{\pi}\frac{H}{\rho}.$$

Nous donnons, dans la suite, un exemple de fonction pour laquelle $h(y)$ existe sans être bornée.

Enfin, si $f(t)$ satisfait à une condition de Lipschitz, la condition peut s'énoncer en disant que

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+y)}{t}\, dt \qquad \left[\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\alpha \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty}\right)\right]$$

doit être bornée, car si l'on a pris $\rho < \delta$, on a

$$|h(y) - g(y)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{f(t+y)}{t}\, dt\right| \leq \frac{2\mathrm{M}\rho^{\alpha}}{\pi.\alpha},$$

et l'on démontre, comme dans le numéro précédent, que $g(y)$ est la limite de $v(x, y)$ lorsque x tend vers zéro et que cette fonction est presque périodique si elle est bornée.

Nous donnerons un exemple de fonction pour laquelle $h(y)$ est bornée sans que $g(y)$ soit presque périodique.

Nous avons vu que $h(y)$ est bornée lorsque $f(t)$ a une intégrale bornée, nous avons donc le résultat suivant :

Si une fonction presque périodique a une intégrale bornée et si elle satisfait à une condition de Lipschitz, sa série conjuguée est celle d'une fonction presque périodique.

Si une fonction presque périodique $f(y)$ a une dérivée presque périodique $f'(y)$, partant de $f'(y)$ on peut refaire les raisonnements que nous avons faits, mais une fonction qui satisfait à une condition de Lipschitz est uniformément continue, par suite si $f'(y)$ satisfait à une condition de cette nature, elle est aussi presque périodique, donc :

1° *Si une fonction presque périodique possède une dérivée vérifiant une condition de Lipschitz, on est conduit à lui attribuer pour fonction conjuguée l'intégrale d'une fonction presque périodique ;*

2° *Si une fonction presque périodique a des dérivées bornées jusqu'à l'ordre n (ou si sa dérivée d'ordre $n-1$ satisfait à une condition de Lipschitz) sa fonction conjuguée a des dérivées presque périodiques jusqu'à l'ordre $n-1$ comme la fonction elle-même.*

Nous terminerons ici l'étude générale des fonctions conjuguées et avant de passer aux exemples, nous voulons indiquer un criterium permettant de reconnaître si une fonction presque périodique a une intégrale bornée; l'importance de ce cas est mise en évidence par les considérations précédentes.

46. Théorème. — *Une fonction presque périodique réelle à valeur moyenne nulle*

$$f(y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y),$$

dont les exposants λ_n n'ont pas zéro pour une de leurs limites, a une intégrale presque périodique elle aussi.

Formant en effet la fonction harmonique presque périodique dans $(0, \infty)$

$$u(x, y) \sim \sum_{n=1} e^{-\lambda_n x}(A_n \cos\lambda_n y + B_n \sin\lambda_n y),$$

nous avons vu dans la première partie de ce Chapitre qu'elle a pour conjuguée dans $(0, \infty)$ une fonction presque périodique; soit

$$v(x, y) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}(A_n \sin\lambda_n y - B_n \cos\lambda_n y)$$

celle qui tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

D'après le résultat de M. Bohr, que nous avons rappelé, plusieurs fois déjà, la fonction analytique

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

a une intégrale presque périodique dans $(0, \infty)$ soit $F(z)$, celle qui s'annule à l'infini

$$F(z) = U(x, y) + i V(x, y) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x} = u, \frac{\partial V}{\partial x} = v\right)$$

et dont le développement s'obtient par intégration formelle de celui de $f(z)$ sans introduire de terme constant. Pour x positif donné, $U(x, y)$ se réduit à une fonction presque périodique de y; d'autre part, on a

$$U(x_2, y) - U(x_1, y) = (x_2 - x_1)\frac{\partial U}{\partial x}(\xi, y)$$
$$[\xi = \theta x_1 + (1-\theta)x_2;\ 0 < \theta(x_1, x_2, y) < 1].$$

Or puisque

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u$$

on a

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leq |f(y)| \leq G,$$

donc

$$|U(x_2, y) - U(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1| G,$$

et cette inégalité montre que $U(x, y)$ tend uniformément vers une limite lorsque x tend vers zéro, cette limite est donc une fonction presque périodique qui, ayant le développement limite de celui de U lorsque x tend vers zéro, a celui qui se déduit de celui de $f(y)$ par intégration formelle : c'est dire que $f(y)$ a une intégrale presque périodique.

47. Nous donnons ici quelques exemples destinés à illustrer les différents cas dont la discussion a mis la possibilité en évidence.

I. *Exemples de fonctions telles que* $\int_\rho^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ *n'ait pas de sens.* — Nous donnerons deux exemples :

Premier exemple. — Considérons la fonction presque périodique définie par la série absolument convergente

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\lambda_n t + B_n \sin\lambda_n t)$$

avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{|A_n| + |B_n|\} \text{ convergente} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0;$$

il sera en outre commode de supposer $A_n > 0$ et la discussion mettra en évidence la condition que la série dont le terme général est $A_n|\log\lambda_n|$ doit être divergente.

On a

$$\int_\rho^T \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_\rho^T A_n \frac{\cos\lambda_n t}{t}\,dt + \int_\rho^T B_n \frac{\sin\lambda_n t}{t}\,dt\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \int_{\lambda_n\rho}^{\lambda_n T} \frac{\cos t}{t}\,dt + B_n \int_{\lambda_n\rho}^{\lambda_n T} \frac{\sin t}{t}\,dt\right\}.$$

Or, on sait qu'il existe une constante K telle que

$$\left|\int_{\lambda_n\rho}^{\lambda_n T} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < K$$

et que les intégrales $\int_{\lambda_n\rho}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ont un sens, par suite les termes qui proviennent des sinus dans l'opération que nous faisons convergent uniformément vers des limites, ainsi que leur somme, lorsque T augmente indéfiniment et l'on peut écrire

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{\lambda_n\rho}^{\lambda_n T} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{\lambda_n\rho}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = L \qquad \left(|L| < K \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\right).$$

Il reste seulement à s'occuper des termes en cosinus; puisque les λ_n tendent vers zéro, on aura, à partir d'un certain indice n, $\lambda_n\rho < \frac{\pi}{3}$, alors

$$\int_\rho^T \frac{\cos\lambda_n t}{t}\,dt = \int_{\lambda_n\rho}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\lambda_n T} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Or, pour les indices n tels que $\lambda_n T > \frac{\pi}{3}$, on peut déterminer une constante K_1, indépendante de T et telle que

$$\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\lambda_n T} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| < K_1.$$

Mais, pour ces indices, on a de $\lambda_n\rho$ à $\frac{\pi}{3}$, $\cos t \geqq \frac{1}{2}$, d'où il suit

$$\int_{\lambda_n\rho}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{t}\,dt > \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{\lambda_n\rho}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{3\rho}\right).$$

Donc, lorsque

$$\lambda_n \rho < \frac{\pi}{3} \leq \lambda_n T,$$

on peut déterminer une constante K_2 positive qui dépend seulement de ρ et telle que

$$\int_\rho^T \frac{\cos\lambda_n t}{t} dt > \frac{1}{2} \left| \log \lambda_n \right| - K_2.$$

Pour les autres termes tels que $\lambda_n T < \frac{\pi}{3}$, on a

$$\int_\rho^T \frac{\cos\lambda_n t}{t} dt = \int_{\lambda_n \rho}^{\lambda_n T} \frac{\cos t}{t} dt > 0,$$

et par suite

$$\int_\rho^T \frac{f(t)}{t} dt > \sum{}^\star \frac{A_n}{2} \log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) - K_2 \sum_{n=1}^{r} A_n - K \sum_{n=1}^{\infty} | B_n |,$$

où le signe $\Sigma^\star$ indique la sommation faite pour toutes les valeurs de n telles que

$$\lambda_n \rho < \frac{\pi}{3} \leq \lambda_n T,$$

et, si l'on fait croître T indéfiniment, cette somme contiendra un nombre de termes de plus en plus grand et comme la série $\Sigma A_n \log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ diverge, l'intégrale $\int_\rho^T \frac{f(t)}{t} dt$ augmente indéfiniment avec T.

Cependant cette fonction a pour conjuguée une fonction presque périodique

$$g(t) = -\sum_{n=1}^{r} (A_n \sin\lambda_n t - B_n \cos\lambda_n t).$$

Deuxième exemple. — Considérons la somme

$$f_m(t) = \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots + \frac{\sin mt}{m},$$

on sait que l'on a

$$|f_m(t)| \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = C,$$

ceci quels que soient l'entier m et la valeur de la variable réelle t.

Considérons alors la fonction presque périodique représentée par la série absolument convergente

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m f_m(\lambda_m t) \qquad \left(\sum |\varepsilon_m| \text{ convergente}\right).$$

Nous allons montrer qu'il est possible de choisir les λ_m de telle sorte que l'intégrale dont nous nous occupons n'ait pas de sens.

La fonction f étant mise sous la forme d'une série uniformément convergente, l'intégration peut être faite terme à terme et l'on a

$$\begin{aligned}\int_\rho^T \frac{f(t)}{t}\,dt &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \int_\rho^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left[\int_\rho^T \frac{\sin\lambda_m t}{t}\,dt + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\int_\rho^T \frac{\sin 2\lambda_m t}{t}\,dt + \ldots + \frac{1}{m}\int_\rho^T \frac{\sin m\lambda_m t}{t}\,dt\right].\end{aligned}$$

D'abord la fonction ne doit pas avoir d'intégrale bornée ; c'est-à-dire que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m}\left(\frac{\cos\lambda_m t}{1} + \frac{\cos 2\lambda_m t}{2^2} + \ldots + \frac{\cos m\lambda_m t}{m^2}\right)$$

ne doit pas être le développement d'une fonction presque périodique, si alors nous supposons que ε_m est positif et que les λ_m sont linéairement indépendants afin d'éviter les réductions dans ce développement, celui-ci ne contient que des termes en cosinus avec des coefficients positifs; pour être celui d'une fonction presque périodique il doit converger absolument et, pour que cela n'ait pas lieu il faut que $\sum \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m}$ diverge car

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m} < \sum_{m=1}^{M} \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) < \frac{\pi^2}{6}\sum_{m=1}^{M} \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m}.$$

De plus, nous allons être amenés à faire tendre les λ_n vers zéro et alors, à partir d'un certain indice on aura

$$\left|\int_{\rho}^{\mathrm{T}} \frac{\sin \lambda_n t}{t}\, dt\right| = \left|\int_{\lambda_n \rho}^{\lambda_n \mathrm{T}} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leqq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt;$$

pour que la limite de l'intégrale n'existe pas il faut que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$$

diverge et nous avons finalement les conditions

$$\varepsilon_m > 0; \quad \sum \varepsilon_m \text{ converge}; \quad \sum \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m} \text{ diverge}; \quad \sum \varepsilon_m \log m \text{ diverge}.$$

Pour simplifier encore, nous allons nous arranger de façon qu'il soit possible de substituer 0 à la limite inférieure ρ que nous avions primitivement choisie. On a, si toutefois les opérations que nous faisons ont un sens :

$$\int_0^{\rho} \frac{f(t)}{t}\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left[\int_0^{\lambda_m \rho} \frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\lambda_m \rho} \frac{\sin t}{t}\, dt + \ldots + \frac{1}{m}\int_0^{m\lambda_m \rho} \frac{\sin t}{t}\, dt\right];$$

en remarquant que $\left|\frac{\sin t}{t}\right| < 1$ on a

$$0 < \int_0^{\rho} \frac{f(t)}{t}\, dt < \rho \sum_{m=1}^{\infty} m \lambda_m \varepsilon_m;$$

pour que soit légitime ce que nous venons de faire, il suffira que $m\lambda_m$ soit borné, d'où la nouvelle condition

$$m\lambda_m < \mathrm{K},$$

et dans ce cas il est loisible de prendre 0 pour limite inférieure de l'intégrale au lieu de ρ, c'est ce que nous ferons. Alors tous les termes qui figurent dans l'intégrale que nous étudions sont maintenant positifs. D'autre part $\int_0^{\tau} \frac{\sin t}{t}\, dt$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque τ augmente indéfiniment et l'on peut trouver un nombre Θ tel que, pour $\tau \geqq \Theta$ on ait

$$\int_0^\tau \frac{\sin t}{t}\,dt > 1$$

et, puisque nous supposons que les λ_n tendent vers zéro, pour tout nombre entier M, on peut trouver T tel que $\lambda_m \mathrm{T} > \Theta$ lorsque $m \leqq \mathrm{M}$, alors on aura

$$\int_0^{\mathrm{T}} \frac{f(t)}{t}\,dt > \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \varepsilon_m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right) > \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \varepsilon_m \log m$$

qui grandit au delà de toute limite en vertu de nos hypothèses.

Remarquons que la fonction $f(t)$ n'a pas pour conjuguée une fonction presque périodique car celle-ci aurait alors pour développement :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left(\frac{\cos\lambda_m t}{1} + \frac{\cos 2\lambda_m t}{2} + \ldots + \frac{\cos m\lambda_m t}{m}\right),$$

série en cosinus à coefficients positifs qui n'est pas absolument convergente, donc ne peut représenter une fonction presque périodique.

De même si, à partir de $f(t)$, nous construisons la fonction $u(x, y)$, puis la fonction conjuguée v de u, v n'est pas non plus presque périodique, car son développement serait

$$v(x, y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \left[e^{-\lambda_m x} \cos\lambda_m y + \frac{e^{-2\lambda_m x} \cos 2\lambda_m y}{2} + \ldots + \frac{e^{-m\lambda_m x} \cos m\lambda_m y}{m}\right],$$

et cette série n'est absolument convergente pour aucune valeur de x puisque $m\lambda_m < \mathrm{K}$.

II. *Fonctions à intégrale non bornée, telles que* $\int_\rho^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ *ait un sens et à* $h(y)$ *bornée.* — Nous donnerons encore deux exemples, le premier d'une fonction telle que non seulement $h(y)$ est bornée mais encore telle que $g(y)$ est bornée, le deuxième d'une fonction telle que $h(y)$ est bornée sans que $g(y)$ le soit.

Premier exemple. — Fonction à $g(y)$ bornée.

Nous prenons la fonction définie par la série absolument convergente

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t),$$

et où nous supposons les λ_n linéairement indépendants et tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Cette fonction a bien une fonction conjuguée bornée

$$g(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\lambda_n t-B_n\cos\lambda_n t).$$

En reprenant le calcul fait tout à l'heure à propos du premier exemple, on voit que la convergence ou la divergence de

$$\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

est donnée par les termes en

$$\int_{\lambda_n\rho}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{t}\,dt;$$

or, comme $|\cos t|<1$, on a

$$\int_{\lambda_n\rho}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{t}\,dt<\log\left(\frac{\pi}{3\rho}\,\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

donc si $|A_n|.|\log\lambda_n|$ est le terme général d'une série convergente, alors

$$\int_{\rho}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

a un sens et il en est de même de

$$\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Pour que $f(t)$ n'ait pas d'intégrale bornée, il faudra de plus que

$$\sum\left|\frac{A_n}{\lambda_n}\right|+\left|\frac{B_n}{\lambda_n}\right|$$

soit divergente; en définitive les conditions à réaliser sont les suivantes :

$$\sum \{ |A_n| + |B_n| \} \quad \text{convergente},$$

$$\sum |A_n| \times |\log \lambda_n| \quad \text{convergente},$$

$$\sum \left|\frac{A_n}{\lambda_n}\right| + \left|\frac{B_n}{\lambda_n}\right| \quad \text{divergente}.$$

Un calcul immédiat prouve d'ailleurs que, dans ce cas, $g(y)$ est bornée et l'on trouve précisément la série conjuguée.

Deuxième exemple. — $h(y)$ est bornée mais $g(y)$ n'est pas presque périodique.

Il suffit de prendre pour $f(y)$ une fonction périodique dont la fonction conjuguée n'est pas continue, dans ce cas $h(y)$ est bornée mais $g(y)$ n'existe pas; ce sera aussi le cas pour la fonction

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m f_m(\lambda_m t) \qquad \left(\text{avec } \varepsilon_m \geqq 0 ; \ \sum \varepsilon_m \text{ convergente}\right),$$

et où les λ_m sont tous plus grands qu'une constante λ; dans ce cas la fonction a une intégrale bornée, c'est une conséquence du théorème que nous avons démontré à ce sujet ou, aussi, du fait que

$$\sum \frac{\varepsilon_m}{\lambda_m} \text{ converge.}$$

Si

$$\sum \varepsilon_m \log m \quad \text{divergente},$$

alors

$$\sum \varepsilon_m g_m(\lambda_m t)$$

ne saurait être le développement d'une fonction presque périodique.

III. *Fonction à* $\int_\rho^\infty \frac{f(t)}{t}$ *existant et à* $h(y)$ *non bornée.* — Nous reprenons la fonction définie par la série

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m f_m(\lambda_m t)$$

avec

$$\sum |\varepsilon_m| \quad \text{convergente}$$

et

$$\sum |\varepsilon_m| \log m \quad \text{divergente.}$$

Nous supposons de plus que les $|\varepsilon_m|$ forment une suite monotone ainsi que les $|\varepsilon_m| \log m$ et que les ε_m ont des signes alternés, par exemple :

$$\varepsilon_m \begin{cases} > 0 & \text{si } m = 2\mu + 1; \\ < 0 & \text{si } m = 2\mu, \end{cases}$$

alors

$$\sum \varepsilon_m \log m \quad \text{convergente.}$$

Nous avons vu que, pourvu que les λ_m tendent assez rapidement vers zéro, il était loisible de prendre o au lieu de ρ pour limite inférieure de l'intégrale dont nous nous occupons.

Or, d'autre part, il est facile de montrer qu'à partir d'une certaine valeur A on a

$$\left| \frac{\pi}{2} - \int^{t} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \frac{2}{t} \qquad (t > \mathrm{A}),$$

il est donc possible de trouver une suite monotone de quantité A_n, supérieure à A et tendant vers l'infini de façon que

$$\mathrm{A}_n \sum_{n+1}^{\infty} |\varepsilon_n|$$

tende vers zéro :

$$\mathrm{A}_n > \mathrm{A}, \qquad \mathrm{A}_{n+1} > \mathrm{A}_n, \qquad \lim_{n \succ \infty} \mathrm{A}_n = \infty,$$

$$\lim_{n \succ \infty} \mathrm{A}_n \sum_{n+1}^{\infty} |\varepsilon_n| = 0,$$

et alors si les λ_n tendent vers zéro :

$$\frac{\mathrm{A}_n}{\lambda_n} < \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\lambda_{n+1}}, \qquad \lim_{n \succ \infty} \frac{\mathrm{A}_n}{\lambda_n} = \infty.$$

Supposons que T tombe entre $\frac{A_n}{\lambda_n}$ et $\frac{A_{n+1}}{\lambda_{n+1}}$ on a

$$\int_0^T \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m \int_0^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt + \varepsilon_{n+1}\int_0^T \frac{f_{n+1}(\lambda_{n+1} t)}{t}\,dt + \sum_{m=n+2}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt.$$

Or on a

$$\sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m \int_0^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right) + R_n(T)$$

avec

$$|R_n(T)| < 2\sum_{n=1}^{n} \frac{|\varepsilon_m|}{\lambda_m T}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}\right)$$

$$< \frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{n} \frac{|\varepsilon_m|}{\lambda_m T} < \frac{\pi^2}{3}\,\frac{1}{A_n}\sum_{m=1}^{n} |\varepsilon_m| < \frac{K_1}{A_n}.$$

Puis

$$\left|\varepsilon_{n+1}\int_0^T \frac{f_{n+1}(\lambda_{n+1} t)}{t}\,dt\right| < |\varepsilon_{n+1}|\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
$$< K_2\,|\varepsilon_{n+1}|\log(n+1),$$

$$\left|\sum_{m=n+2}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt\right| < \sum_{m=n+2}^{\infty} |\varepsilon_m|\, m\lambda_m T.$$

Nous choisirons maintenant les λ_m tels que

$$(m+1)\lambda_{m+1} \leqq \lambda_m.$$

Alors

$$\left|\sum_{m=n+2}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^T \frac{f_m(\lambda_m t)}{t}\,dt\right| < A_{n+1}\sum_{m=n+2}^{\infty} |\varepsilon_n|.$$

Finalement on a

$$\int_0^T \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right) + \mathcal{R}_n(T)$$

avec

$$|\mathfrak{R}_n(\mathrm{T})| < \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{A}_n} + \mathrm{K}_2|\varepsilon_{n+1}|\log(n+1) + \mathrm{A}_{n+1}\sum_{m=n+2}^{\infty}|\varepsilon_n|;$$

lorsque T augmente indéfiniment il en est de même de n et $\mathfrak{R}_n(\mathrm{T})$ tend vers zéro, donc :

$$\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right),$$

car la convergence de la série qui figure au deuxième membre est assurée par la convergence simultanée des deux séries

$$\sum|\varepsilon_m| \quad \text{et} \quad \sum\varepsilon_m\log m.$$

Si la fonction $\varphi(x,y)$ était presque périodique, elle aurait pour développement

$$\varphi(x,y) \sim \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m\left(e^{-\lambda_m x}\cos\lambda_m y + \frac{e^{-2\lambda_m x}\cos 2\lambda_m y}{2} + \ldots + \frac{e^{-m\lambda_m x}\cos m\lambda_m y}{m}\right).$$

Introduisons encore la condition nouvelle que les λ_m sont linéairement indépendants, alors d'après le théorème de M. Bochner (nº **6**), pour toute valeur positive de x, la série des valeurs absolues des termes devrait être bornée; c'est-à-dire que, pour $y=0$, la série suivante devrait être convergente :

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\varepsilon_m|\left(\frac{e^{-\lambda_m x}}{1} + \frac{e^{-2\lambda_m x}}{2} + \ldots + \frac{e^{-m\lambda_m x}}{m}\right).$$

Or $m\lambda_m < \mathrm{K}$ et la série

$$\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\mathrm{K}x}|\varepsilon_m|\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$$

à termes plus petits serait aussi convergente, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses.

Par suite $\varphi(x,y)$ n'est pas presque périodique et $h(y)$ ne saurait être bornée.

CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS HARMONIQUES PRESQUE PÉRIODIQUES DE TROIS VARIABLES.

Les fonctions presque périodiques par rapport à la variable z seulement.

48. Nous nous occuperons d'abord des fonctions harmoniques presque périodiques par rapport à la variable z seulement, et nous les supposons définies dans un cylindre borné D à génératrices parallèles à l'axe des z limité par une surface dont la trace sur le plan des xy est un contour (C) formé par une ou plusieurs courbes fermées.

Nous dirons d'une fonction qu'elle possède une certaine propriété dans le cylindre (D) lorsqu'elle la possède à l'intérieur de D; nous dirons qu'elle possède une propriété dans le cylindre [D] lorsqu'elle la possède dans tout cylindre (D_d) intérieur à D et tel que la distance de tout point de D_d à la surface de D soit au moins égale à d, et ceci quel que soit d.

Nous adopterons la définition suivante :

Définition. — Une fonction harmonique $u(x, y, z)$ régulière dans un cylindre (D) sera dite presque périodique dans ce cylindre si à tout nombre ε positif donné, mais aussi petit que l'on veut, correspond une longueur $l(\varepsilon)$ telle que tout intervalle de longueur l sur l'axe des z contienne au moins une presque période ζ relative à ε et à la fonction u dans tout le cylindre (D) : c'est-à-dire que dans (D) on doit avoir

$$|u(x, y, z+\zeta) - u(x, y, z)| \leqq \varepsilon.$$

Nous dirons qu'une fonction est presque périodique dans [D] si, quel que soit d, elle est presque périodique dans (D_d).

Toute fonction harmonique périodique dans (D) y est aussi presque périodique, en particulier les fonctions

$$A_\lambda(x, y)\cos\lambda z \quad \text{et} \quad B_\lambda(x, y)\sin\lambda z,$$

où A et B sont des solutions de l'équation (II) (n° **13**) régulières dans (C) :

$$\text{(II)} \qquad \Delta U(x, y) = \lambda^2 U(x, y).$$

Les mêmes propositions que nous avons démontrées, dans le cas de deux variables, peuvent être étendues ici et les démonstrations sont les mêmes; toutefois nous ne possédons pas de théorème analogue au théorème de Dœtsch : il nous sera par suite impossible de démontrer qu'une fonction harmonique bornée dans [D] et presque périodique dans un cylindre ($D^\star$) intérieur au premier est aussi presque périodique dans [D].

Théorème I. — *Toute fonction harmonique presque périodique en z dans un cylindre* [D] *y est bornée : c'est-à-dire qu'à tout cylindre* D_d *intérieur à* [D] *il correspond un nombre* $K(d)$ *tel que l'on ait dans* (D_d)

$$|u(x, y, z)| \leq K(d).$$

Le raisonnement se fait comme dans le cas de deux variables en choisissant $\varepsilon = 1$ et en appliquant le principe de la non-existence du maximum.

Considérons ensuite la fonction dans un cylindre ($D_{d+\delta}$); on a vu que, dans ce cylindre, les dérivées de la fonction étaient bornées en valeur absolue par la quantité $\frac{3}{2} \cdot \frac{K}{\delta}$, par suite : toute fonction harmonique presque périodique en z dans un cylindre [D] y est uniformément continue.

Théorème II. — *Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique régulière et bornée dans le cylindre* (D), *si cette fonction se réduit à une fonction presque périodique sur la surface de* (D), *elle est presque périodique dans tout le cylindre.*

Prenons d'abord le cas où le contour (C) se réduit à une seule courbe fermée et soit s une abscisse curviligne sur ce contour, alors, sur (C), $u(x, y, z)$ se réduit à une fonction $u(s; z)$ que nous supposons presque périodique en z : c'est dire qu'on peut trouver des presque périodes ζ relatives à tout nombre ε et telles que, pour les s :

$$|u(s;\, z+\zeta) - u(s;\, z)| \leqq \varepsilon,$$

mais la fonction harmonique

$$u(x, y, z+\zeta) - u(x, y, z)$$

est bornée dans (D), donc la limitation précédente vaut dans tout l'intérieur.

Supposons maintenant que le contour (C) se compose de plusieurs courbes fermées en nombre fini : (c_1), (c_2), ..., (c_n); sur ces contours la fonction u se réduit à n fonctions : $u(s_1;\, z)$, $u(s_2;\, z)$, ..., $u(s_n;\, z)$ et nous avons vu qu'il est possible de trouver des presque périodes relatives à tout nombre ε, communes à ces n fonctions; le théorème est donc également vrai dans ce cas.

Théorème III. — *La somme d'un nombre fini de fonctions harmoniques presque périodiques en z dans un cylindre* [D] *est encore presque périodique; la fonction limite d'une suite de fonctions harmoniques presque périodiques en z dans* [D] *et uniformément convergente est encore presque périodique en z dans* [D].

Deux fonctions u_1 et u_2, par exemple, sur la surface d'un cylindre (D_d), se réduisent à deux fonctions $u_1(s;\, z)$ et $u_2(s;\, z)$ presque périodiques par rapport à z; leur somme est aussi presque périodique en z et nous sommes ramenés au théorème précédent.

Par suite toute fonction de la forme

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N} [A_{\lambda_n}(x, y)\cos\lambda_n z + B_{\lambda_n}(x, y)\sin\lambda_n z],$$

où les A et les B sont des fonctions régulières dans (C) et telles que

$$\Delta \begin{Bmatrix} A_{\lambda_n} \\ B_{\lambda_n} \end{Bmatrix} = \lambda_n^2 \begin{Bmatrix} A_{\lambda_n}, \\ B_{\lambda_n}, \end{Bmatrix}$$

est une fonction presque périodique.

Pour la fonction limite d'une suite de fonctions harmoniques presque périodiques uniformément convergente, la démonstration est tout à fait la même que celle que nous avons donnée dans le cas de deux variables, en utilisant ici, bien entendu, l'extension du théorème de Harnack donnée dans le cas de trois variables.

Donc, toute série uniformément convergente dans un cylindre [D] et de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{A}_{\lambda_n}(x, y) \cos\lambda_n z + \mathrm{B}_{\lambda_n}(x, y) \sin\lambda_n z]$$

représente une fonction presque périodique dans ce cylindre.

Théorème IV. — *Les dérivées partielles d'une fonction harmonique presque périodique en z dans* [D] *sont aussi presque périodiques dans* [D].

Faisons par exemple la démonstration pour $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot$

Dans le cylindre (D_{d+r}) cette dérivée a pour expression (n° **19**) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{4\pi r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u \sin^2\theta \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y, z+\zeta)}{\partial x} &- \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \\ = \frac{3}{4\pi r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} &[u(x + r\sin\theta\cos\varphi, y + r\sin\theta\sin\varphi, z + \zeta + r\cos\theta) \\ &- u(x + r\sin\theta\cos\varphi, y + r\sin\theta\sin\varphi, z + r\cos\theta)] \\ &\times \sin^2\theta\cos\varphi \, d\theta \, d\varphi.\end{aligned}$$

Si l'on choisit ζ presque période de u dans (D_d) relativement à $\frac{3}{2} r\varepsilon$, on aura

$$\left|\frac{\partial u(x, y, z+\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

Le développement des fonctions harmoniques de trois variables presque périodiques par rapport à la seule variable z.

49. Ainsi que nous l'avons fait pour les fonctions de deux variables, nous allons chercher pour les fonctions dont nous venons de parler un développement de la forme

$$u(x, y, z) \sim A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [A_{\lambda_n}(x, y) \cos \lambda_n z + B_{\lambda_n}(x, y) \sin \lambda_n z]$$

avec

$$\text{(I)} \qquad \Delta A_0(x, y) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \Delta \begin{cases} A_{\lambda_n} \\ B_{\lambda_n} \end{cases} = \lambda_n^2 \begin{cases} A_{\lambda_n}, \\ B_{\lambda_n}, \end{cases}$$

et avec unicité comme nous l'avons expliqué à propos des fonctions de deux variables.

Sur toute droite (x, y) intérieure au cylindre $[D]$ où la fonction est définie, la fonction u se réduit à une fonction presque périodique de la seule variable z et, grâce à la continuité uniforme de u dans $[D]$, l'ensemble de ces fonctions d'une variable est majorisable, donc une suite seulement dénombrable d'exposants λ_n sera nécessaire pour le développement de ces diverses fonctions et les coefficients de ces exposants satisferont à l'équation (II) ainsi que nous allons le montrer.

Nous avons déjà montré (n° **25**) que A_0 est une fonction harmonique de x et de y; cherchons la forme du coefficient de $\cos \lambda z$.

Pour cela choisissons un cylindre $(\mathcal{D})$ intérieur à $[D]$ et limité par un contour $(\mathcal{C})$ et appliquons la formule de Green à la fonction $u(x, y, z) \cos \lambda z$ et à la fonction $g(\lambda | \xi, \eta; x, y)$ relative au point (ξ, η) et à $(\mathcal{C})$ à l'intérieur du cylindre limité par les deux plans $z = 0$ et $z = Z$, par la surface du cylindre $(\mathcal{D})$ et par la surface d'un cylindre de révolution (r), de rayon très petit r, autour de la droite (ξ, η) comme axe.

On a

$$\iint_{(\mathcal{D})} + \iint_{(r)} \left[u \cos \lambda z \frac{dg}{dn} - g \frac{d(u \cos \lambda z)}{dn} \right] d\sigma + \iiint_{(\mathcal{D})-(r)} 2\lambda g \frac{\partial}{\partial z}(u \sin \lambda z)\, dV = 0.$$

Occupons-nous d'abord de l'intégrale triple, on a, puisque g ne dépend pas de z :

$$\iiint_{(\mathcal{D})-(r)} 2\lambda g \frac{\partial}{\partial z}(u \sin \lambda z)\, dV = \iint_{(\mathcal{C})-(r)} 2\lambda g\, u(x, y, Z) \sin \lambda Z\, dx\, dy.$$

Soient $\mathcal{G}(r)$ une limite supérieure du module de g et G celle de u dans le domaine où nous opérons, on a évidemment en désignant par $\mathfrak{S}$ l'aire de $(\mathcal{C})$

$$\iiint_{(\mathcal{D})-(r)} 2\lambda g \frac{\partial}{\partial z}(u \sin\lambda z)\, dV \leqq 2\lambda\, \mathcal{G}(r)\, G\, \mathfrak{S}.$$

Lorsque l'on fera tendre r vers zéro il n'en résultera aucune difficulté car, dans le cylindre (r), on a

$$g = \log\frac{1}{r} + g_1,$$

et par suite l'intégrale triple reste bornée; alors, lorsque nous ferons croître z indéfiniment, la valeur moyenne de cette intégrale sera nulle et l'on a par suite

$$\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{Z}\left\{\iint_{(\mathcal{D})}\left[u\cos\lambda z\frac{dg}{dn} - g\frac{d(u\cos\lambda z)}{dn}\right]d\sigma + \iint_{(r)}\left[u\cos\lambda z\frac{dg}{dn} - g\frac{d(u\cos\lambda z)}{dn}\right]d\sigma\right\} = 0.$$

Or, sur la surface de $(\mathcal{D})$, on a

$$d\sigma = ds\, dz$$

et sur celle de (r)

$$d\sigma = r\, d\theta\, dz,$$

en remarquant tout de suite que $g = 0$ sur le contour $(\mathcal{C})$ et effectuant d'abord l'intégration par rapport à z, puis passant à la limite comme nous l'avons déjà fait au n° **23** :

$$\int_{(\mathcal{C})} M_z\{u\cos\lambda z\}\frac{dg}{dn}ds = -\int_0^{2\pi}\left[M_z\{u\cos\lambda z\}\frac{dg}{dn} - gM_z\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\right]r\, d\theta.$$

Passant ensuite à la limite pour $r = 0$, il vient :

$$M_z\{u(\xi, \eta, z)\cos\lambda z\} = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathcal{C})} M_z\{u\cos\lambda z\}\frac{dg}{dn}ds,$$

et cette relation nous montre que la valeur moyenne de $u(x, y, z)\cos\lambda z$, sur chaque droite (x, y) intérieure à $(\mathcal{D})$, est une fonction de x et de y

qui satisfait à l'équation (II). Le raisonnement peut être conduit de la même façon pour $M_z\{u \sin\lambda z\}$, et si l'on pose

$$M_z\{u \cos\lambda z\} = \frac{1}{2} A_\lambda(x, y),$$

$$M_z\{u \sin\lambda z\} = \frac{1}{2} B_\lambda(x, y),$$

on voit que la fonction u est susceptible d'un développement tel que celui que nous avions annoncé.

50. Sur chaque droite (x, y) on a le théorème fondamental et l'égalité de Parseval s'écrit ici :

$$M_z\{u^2(x, y, z)\} = A_0^2(x, y) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{\lambda_n}^2(x, y) + B_{\lambda_n}^2(x, y)\},$$

de là le théorème d'unicité :

THÉORÈME D'UNICITÉ. — *Si deux fonctions harmoniques des trois variables x, y, z, presque périodiques en z dans un cylindre* [D] *ont le même développement, elles sont identiques.*

Elles coïncident, en effet, sur chaque droite (x, y) de l'intérieur.

Le développement de la somme de plusieurs fonctions s'obtient par addition formelle des développements; le développement de la limite d'une suite uniformément convergente s'obtient par un passage à la limite formel; les développements des dérivées partielles s'obtiennent par dérivation formelle grâce aux règles signalées de permutation des signes ∂ et M.

Nous avons vu que l'ensemble des fonctions de z auxquelles u se réduit lorsqu'on fixe x et y est majorisable dans le cylindre [D], par suite on peut approcher simultanément et uniformément ces fonctions par des polynomes de la forme

$$A_0 + \sum_{n=1}^{N} r_{\lambda_n}(A_{\lambda_n}\cos\lambda_n z + B_{\lambda_n}\sin\lambda_n z),$$

et nous obtenons la proposition :

THÉORÈME D'APPROXIMATION. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction harmonique bornée dans un cylindre* [D] *y soit aussi presque périodique par rapport à z est que l'on puisse l'approcher uniformément dans tout cylindre intérieur au premier par des polynomes de la forme*

$$\mathcal{A}_0 + \sum_{n=1}^{N} (\mathcal{A}_{\lambda_n} \cos \lambda_n z + \mathcal{B}_{\lambda_n} \sin \lambda_n z),$$

où les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}$ satisfont à l'équation (II) et sont régulières dans ($\mathcal{C}$).

Nous venons de voir que la condition est nécessaire, elle est aussi suffisante, d'après la proposition sur la limite d'une suite de fonctions uniformément convergente telles que celles que nous venons d'écrire.

Les cas de convergence du développement sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable : ceux où l'on peut conclure à la convergence absolue; c'est, par exemple, le cas où les λ_n sont linéairement indépendants; ce sera aussi le cas où les λ_n possèdent un exposant de convergence p; car, puisque les dérivées de u sont aussi presque périodiques, si l'on désigne par M_p une limite supérieure de la valeur absolue de $\dfrac{\partial^p u}{\partial z^p}$ dans un cylindre intérieur à [D] on a évidemment

$$\left| M_z \left\{ \frac{\partial^p u}{\partial z^p} \begin{Bmatrix} \cos \lambda z \\ \sin \lambda z \end{Bmatrix} \right\} \right| = \left| \frac{1}{2} \lambda^p \begin{Bmatrix} A_\lambda \\ B_\lambda \end{Bmatrix} \right| \leqq M_p,$$

d'où

$$\begin{matrix} |A_\lambda| \\ |B_\lambda| \end{matrix} \leqq \frac{2 M_p}{\lambda^p}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ |A_{\lambda_n}| + |B_{\lambda_n}| \} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 M_p}{\lambda_n^p}.$$

En particulier le développement d'une fonction périodique en z et harmonique dans [D] y converge absolument.

Remarquons enfin que la convergence du développement sur la surface d'un cylindre entraîne sa convergence à l'intérieur, car alors, à tout ε donné, correspond un nombre N tel que, sur la surface du cylindre on ait

$$\left| u(x, y, z) - A_0 - \sum_{n=1}^{N} (A_{\lambda_n} \cos \lambda_n z + B_{\lambda_n} \sin \lambda_n z) \right| \leq \varepsilon,$$

mais la fonction que nous venons d'écrire est bornée, parce que presque périodique, sa valeur absolue est moindre que ε sur la surface du cylindre, donc aussi à l'intérieur.

51. Au sujet de ces fonctions nous allons encore résoudre le problème aux limites suivant :

Théorème. — *Sur la surface d'un cylindre* (D) *on donne une suite majorisable de fonctions presque périodiques en* z : $u(s; z)$; *alors, si le problème de Dirichlet, pour l'équation* (II), *peut être résolu pour la base* (C) *du cylindre* (D) *et pour les fonctions qui figurent dans la démonstration, il existe une fonction harmonique presque périodique en* z : $u(x, y, z)$, *régulière dans* (D) *et qui se réduit à* $u(s; z)$ *sur la surface.*

Soit en effet

$$u(s; z) \sim A_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{\lambda_n}(s) \cos \lambda_n z + B_{\lambda_n}(s) \sin \lambda_n z]$$

la suite majorisable donnée; ces fonctions peuvent être approchées uniformément par des polynomes

$$P(s; z) = A_0(s) + \sum_{n=1}^{N} r_n^{(N)} [A_{\lambda_n}(s) \cos \lambda_n z + B_{\lambda_n}(s) \sin \lambda_n z].$$

Construisons maintenant les fonctions $A_{\lambda_n}(x, y)$ et $B_{\lambda_n}(x, y)$ régulières dans (C) et se réduisant sur le contour aux fonctions $A_{\lambda_n}(s)$ et $B_{\lambda_n}(s)$ et considérons les polynomes

$$P_N(x, y, z) = A_0(x, y) + \sum_{n=1}^{N} r_n^{(N)} [A_{\lambda_n}(x, y) \cos \lambda_n z + B_{\lambda_n}(x, y) \sin \lambda_n z];$$

ce sont des fonctions harmoniques presque périodiques qui se réduisent à $P_N(s; z)$ sur la surface du cylindre (D); or, dès que n_1 et n_2 sont supérieurs à un certain nombre N, on a

$$|P_{n_1}(s; z) - P_{n_2}(s; z)| \leqq \varepsilon,$$

et par suite aussi dans (D)

$$|P_{n_1}(x, y, z) - P_{n_2}(x, y, z)| \leqq \varepsilon,$$

la suite $P_N(x, y, z)$ converge donc uniformément dans (D) vers une fonction harmonique presque périodique en z.

Les fonctions harmoniques presque périodiques par rapport à deux des variables : x et y.

32. *Définition.* — Une fonction harmonique $u(x, y, z)$, régulière dans une bande limitée par deux plans parallèles à celui des $xy (z_1 < z < z_2)$, sera dite presque périodique par rapport aux deux variables x et y si, à tout ε positif donné, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon)$ telle que, dans une bande intérieure à la première, et dans tout carré de côtés parallèles aux axes des x et des y et de longueur l, il existe au moins un point ξ, η tel que l'on ait

$$|u(x+\xi, y+\eta, z) - u(x, y, z)| \leqq \varepsilon$$

dans toute la bande intérieure choisie.

Pour chaque valeur de z, la fonction u se réduit à une fonction presque périodique des deux variables x et y et est susceptible d'un développement de la forme

$$u(x, y, z) \sim A_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}(z)\, e^{i\lambda_m x + i\mu_n y} \qquad (|\lambda_m| + |\mu_n| > 0).$$

Cette fois, nous conservons le développement sous la forme imaginaire qui est plus simple que le développement complet en termes réels qui exigerait de longues écritures, mais, bien entendu, les exposants λ et μ peuvent être positifs ou négatifs.

Tous les théorèmes précédemment démontrés sont valables pour ces fonctions. Toute fonction harmonique presque périodique par rapport aux deux variables x et y et dans une bande $[z_1, z_2]$ y est bornée et uniformément continue, ses dérivées partielles y sont elles-mêmes presque périodiques; la somme de plusieurs fonctions, la limite d'une suite uniformément convergente de telles fonctions, est encore harmonique presque périodique; toute fonction harmonique régulière et bornée dans une bande (z_1, z_2) qui se réduit à une fonction presque périodique des deux variables x et y pour $z = z_1$ et $z = z_2$ est presque périodique dans toute la bande.

Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas précédent, nous n'insisterons pas et nous allons nous attacher à la détermination des fonctions $A_{m,n}(z)$.

Pour $A_0(z)$ qui est la valeur moyenne de la fonction par rapport à x et y, nous avons déjà montré (n° **22**) que

$$A_0(z) = kz + l.$$

Pour la recherche des autres fonctions, il ne sera pas nécessaire ici de prendre autant de précautions que dans le cas du cylindre, il nous suffira d'appliquer la formule de Green aux deux fonctions u et $e^{-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z - i\lambda x - i\mu y}$, dans un parallélépipède rectangle limité par les deux plans z et z' et dont la base sur un plan parallèle à xy sera un carré de côtés parallèles aux axes des x et des y et de longueur L et dont un sommet sera sur l'axe des z.

On trouve, par passage à la limite, comme dans le cas de deux variables,

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^2} \int\int \left[-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, u - \frac{\partial u}{\partial z} \right] e^{-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z - i\lambda x - i\mu y} dx\, dy = -A^+ \sqrt{\lambda^2+\mu^2},$$

c'est-à-dire

$$M_{xy} \left\{ \left(u\sqrt{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) e^{-i\lambda x - i\mu y} \right\} = A^+ \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, e^{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z},$$

On trouve de même, par application de la formule de Green dans le même domaine aux fonctions u et $e^{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z-i\lambda x-i\mu y}$,

$$\mathrm{M}_{xy}\left\{\left(u\sqrt{\lambda^2+\mu^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)e^{-i\lambda x-i\mu y}\right\}=\mathrm{A}^-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,e^{-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z},$$

d'où, par addition,

$$\mathrm{M}_{xy}\{u\,e^{-i\lambda x-i\mu y}\}=\mathrm{A}^+e^{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z}+\mathrm{A}^-e^{-\sqrt{\lambda^2+\mu^2}z},$$

où A^+ et A^- sont des quantités qui dépendent seulement de λ et de μ, par suite

$$\mathrm{A}_{m,n}(z)=\mathrm{A}^+_{m,n}e^{\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}z}+\mathrm{A}^-_{m,n}e^{-\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}z},$$

et nous arrivons ainsi à un développement de la fonction qui nous permet, comme tout à l'heure, d'établir les règles de calcul formel et de démontrer un théorème d'unicité et un théorème d'approximation.

53. Nous terminerons en résolvant, pour ces fonctions, deux problèmes aux limites, l'un d'eux nous fournira, comme corollaire, le théorème d'unicité généralisé.

Théorème I. — *Sur les deux plans $z=z_1$ et $z=z_2$ on donne deux fonctions presque périodiques des deux variables x et y : il existe une fonction harmonique presque périodique des deux variables x et y, régulière dans (z_1, z_2) et se réduisant aux deux fonctions données aux limites de cette bande.*

Comme nous l'avons fait dans le cas de deux variables, nous déterminons d'abord les constantes k, l, A^+ et A^- par les équations suivantes où $\mathrm{A}^{(i)}_{m,n}$ désignent les coefficients des fonctions données pour $z=z_i$:

$$kz_i+l=\mathrm{A}^{(i)}_0 \qquad (i=1,2),$$
$$\mathrm{A}^+_{m,n}e^{\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}z_i}+\mathrm{A}^-_{m,n}e^{-\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}z_i}=\mathrm{A}^{(i)}_{m,n} \qquad (i=1,2),$$

et nous formons le développement

$$kz + l + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{m,n}^{+} e^{\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}\,z} + A_{m,n}^{-} e^{-\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}\,z} \right] e^{i\lambda_m x + i\mu_n y},$$

c'est celui de la fonction cherchée.

En effet, les deux fonctions que nous avons données peuvent être approchées simultanément et uniformément par une suite de polynomes de la forme

$$P_{M,N}^{(i)}(x, y) = A_0^{(i)} + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} r_{m,n}^{(M,N)} A_{m,n}^{(i)} e^{i\lambda_m x + i\mu_n y}.$$

Alors les polynomes

$$P_{M,N}(x, y, z) = kz + l + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} r_{m,n}^{(M,N)} \left[A_{m,n}^{+} e^{\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}\,z} + A_{m,n}^{-} e^{-\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}\,z} \right] e^{i\lambda_m x + i\mu_n y}$$

sont des fonctions harmoniques presque périodiques par rapport aux deux variables x et y. D'autre part, par hypothèse, on peut trouver deux nombres M et N tels que

$$| P_{m_1,n_1}^{(i)}(x, y) - P_{m_2,n_2}^{(i)}(x, y) | \leqq \varepsilon \qquad (i = 1, 2),$$

dès que

$$\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \geqq M, \qquad \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \geqq N,$$

et alors on aura, dans toute la bande (z_1, z_2),

$$| P_{m_1,n_1}(x, y, z) - P_{m_2,n_2}(x, y, z) | \leqq \varepsilon.$$

Donc les polynomes $P_{M,N}(x, y, z)$ tendent uniformément vers une limite dans cette bande : vers la fonction harmonique presque périodique annoncée.

La généralisation du théorème de Lindelöf que nous avons donnée montre de plus que c'est la seule fonction harmonique bornée régulière dans (z_1, z_2) et se réduisant aux fonctions données pour $z = z_1$ et $z = z_2$.

Ce théorème va nous donner le théorème d'unicité généralisé.

THÉORÈME D'UNICITÉ GÉNÉRALISÉ. — *Soient u_1 et u_2 deux fonctions harmoniques presque périodiques par rapport aux deux variables x et y dans deux bandes qui n'empiètent pas l'une sur l'autre $[a, b]$ et $[c, d]$ $(a < b < c < d)$, et qui ont respectivement dans chacune de ces bandes le même développement (cela veut dire les mêmes valeurs de k, l, A^+, B^+, A^-, B^-), alors ces fonctions sont le prolongement l'une de l'autre et proviennent d'une même fonction presque périodique dans $[a, d]$ avec le développement commun.*

Choisissant en effet deux valeurs de z, α et β telles que : $a < \alpha < b$ et $c < \beta < d$, u_1 et u_2 se réduisent respectivement pour $z = \alpha$ et $z = \beta$ à deux fonctions presque périodiques des deux variables x et y. Formons alors la fonction u qui se réduit à celles-ci pour $z = \alpha$ et $z = \beta$ et qui est harmonique presque périodique dans (α, β); les constantes k, l, A^+, A^-, B^+, B^- que l'on déterminera ainsi sont précisément celles qui sont communes aux deux fonctions u_1 et u_2. Dans (α, b) les deux fonctions u_1 et u ont le même développement, donc elles y coïncident et par suite elles coïncident partout; de même les fonctions u_2 et u coïncident dans $[c, \beta]$, donc partout, donc les fonctions u_1 et u_2 sont les mêmes et le développement est valable dans toute la bande $[a, d]$.

THÉORÈME II. — *Dans le plan $z = 0$, on donne une fonction $f(x, y)$ presque-périodique par rapport aux deux variables x et y; il existe une fonction harmonique régulière et bornée pour $z > 0$, tendant vers $f(x, y)$ lorsque z tend vers zéro et vers une limite lorsque z tend vers l'infini.*

Soit en effet

$$f(x, y) \sim A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} e^{i\lambda_m x + i\mu_n y}$$

la fonction donnée, formons le développement

$$u(x, y, z) \sim A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} e^{-\sqrt{\lambda_m^2 + \mu_n^2} z + i\lambda_m x + i\mu_n y},$$

je dis que c'est celui d'une fonction harmonique presque périodique.

Formons en effet une suite de polynomes d'approximation de $f(x, y)$

$$P_{M,N}(x, y) = A_0 + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} r_{m,n}^{(M,N)} A_{m,n} e^{i\lambda_m x + i\mu_n y}$$

et la suite de fonctions harmoniques

$$P_{M,N}(x, y, z) = A_0 + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} r_{m,n}^{(M,N)} A_{m,n} e^{-\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}\,z + i\lambda_m x + i\mu_n y}.$$

Pour $z = 0$, $P_{M,N}(x, y, z)$ se réduit à $P_{M,N}(x, y)$ qui tend vers $f(x, y)$ lorsque M et N augmentent indéfiniment et lorsque z augmente indéfiniment $P_{M,N}(x, y, z)$ tend uniformément vers A_0.

Or, on peut trouver un couple de nombres M et N tels que

$$|P_{m_1,n_1}(x, y) - P_{m_2,n_2}(x, y)| \leqq \varepsilon,$$

dès que

$$\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \geqq M, \qquad \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \geqq N,$$

Mais, la fonction

$$P_{m_1,n_1}(x, y, z) - P_{m_2,n_2}(x, y, z)$$

est bornée dans le demi-espace $z > 0$ et tend vers zéro lorsque z augmente indéfiniment; donc, on a aussi, dans tout le demi-espace $z > 0$, grâce à la convexité de la borne supérieure de la valeur absolue,

$$|P_{m_1,n_1}(x, y, z) - P_{m_2,n_2}(x, y, z)| \leqq \varepsilon.$$

Par conséquent les polynomes $P_{M,N}(x, y, z)$ tendent vers une fonction harmonique $u(x, y, z)$ presque périodique par rapport aux deux variables x et y et qui, elle-même, tend vers $f(x, y)$ lorsque z tend vers zéro; son développement s'obtient à partir de ceux de $P_{M,N}(x, y, z)$, par passage à la limite; c'est celui que nous avons écrit plus haut.

Cette fonction est la seule fonction harmonique régulière et bornée dans le demi-espace $z > 0$ et qui tend vers $f(x, y)$ lorsque z tend vers zéro, comme dans le cas de deux variables, ce fait est une conséquence du principe des images ou de la convexité de la fonction $\mathfrak{M}(z)$.

Les résultats précédents s'obtiennent aussi en partant de l'expression de u sous forme d'intégrale

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\,d\xi\,d\eta.$$