BENJAMIN JEKHOWSKY

Étude sur les transcendantes Fourier-Bessel à plusieurs variables

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1927
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1927__73__1_0>

N° D'ORDRE :
1949

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Benjamin JEKHOWSKY

Aide-astronome à l'Observatoire d'Alger
Docteur de l'Université de Paris
Candidat des Sciences physico-mathématiques de l'Université de Moscou

---

1re THÈSE. — ÉTUDE SUR LES TRANSCENDANTES FOURIER-BESSEL A PLUSIEURS VARIABLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1927, devant la Commission d'Examen

MM. H. ANDOYER, *Président.*
E. CARTAN, A. LAMBERT, *Examinateurs.*

IMPRIMERIE NOUVELLE DE MARSEILLE
29 et 31, rue Sainte.

1927

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen .... C. MAURAIN, Professeur, Physique du globe.

Doyens honoraires .... P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires .... P. PUISEUX. V. BOUSSINESQ. A. JOANNIS. H. LE CHATELIER. H. LEBESGUE. A. FERNBACH. A. LEDUC. G. SAGNAC.

Professeurs ....

ÉMILE PICARD ...... Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KŒNIGS .... Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT .... Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET .... Electrotechnique générale.
F. WALLERANT ..... Minéralogie.
H. ANDOYER .... Astronomie.
P. PAINLEVÉ .... Mécanique analytique et mécanique céleste.
E. HAUG .... Géologie.
Gabriel BERTRAND .. Chimie biologique.
Mme P. CURIE ...... Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY ...... Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ .... Chimie appliquée.
G. URBAIN .... Chimie minérale.
Émile BOREL ...... Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS .... Aviation.
Jean PERRIN........ Chimie physique.
Rémy PERRIER...... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM........ Physique.
M. MOLLIARD....... Physiologie végétale.
E. CARTAN.......... Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE........ Physiologie générale.
E. VESSIOT......... Théorie des groupes et calcul des variations.
A. COTTON.......... Physique générale.
J. DRACH........... Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY...... Physique.
Charles PÉREZ...... Zoologie.
Léon BERTRAND..... Géologie appliquée et géologie régionale.
R. LESPIEAU........ Théories chimiques.
E. RABAUD.......... Biologie expérimentale.
P. PORTIER......... Physiologie comparée.
É. BLAISE.......... Chimie organique.
P.-A. DANGEARD..... Botanique.
P. MONTEL......... Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT..... Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ........ Biologie maritime.
G. JULIA........... Mathématiques générales.
A. JOB............. Chimie générale.
A. MAILHE......... Etude des combustibles.
L. LUTAUD.......... Géographie physique.
Eugène BLOCH...... Physique théorique et physique céleste.

E. HÉROUARD....... Zoologie.
E. PÉCHARD......... Chimie (Enseigt P. C. N.).
V. AUGER........... Chimie analytique.
M. GUICHARD........ Chimie minérale.
A. GUILLET......... Physique.
C. MAUGUIN......... Minéralogie.
L. BLARINGHEM...... Botanique.
A. MICHEL-LÉVY.... Pétrographie.
A. DEREIMS......... Géologie.
R. DONGIER......... Physique du globe.
A. DENJOY......... Calcul différentiel et intégral.
H. BÉNARD.......... Physique (P. C. N.).

E. DARMOIS........ Physique.
G. BRUHAT......... Physique.
H. MOUTON......... Chimie physique.
L. JOLEAUD......... Paléontologie.
M. JAVILLIER .... Chimie biologique.
A. DUFOUR......... Physique (P. C. N.).
F. PICARD.......... Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY .... Zoologie.
L. DUNOYER .... Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND.... Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE........ Radioactivité.

Secrétaire ...... Daniel TOMBECK.

A MA FEMME ET A MON FILS

A

MONSIEUR PAUL APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT

RECTEUR HONORAIRE DE L'ACADÉMIE DE PARIS

Hommage de respectueuse gratitude.

A

MADAME DOROTHÉE ISAAC ROBERTS

A

MONSIEUR PH. DE ROTHSCHILD

A

MONSIEUR DAVID WEILL

Témoignage de reconnaissance.

à mes Amis

et

à tous ceux qui m'ont témoigné de la bienveillance dans mes études

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE

sur les

Transcendantes Fourier-Bessel à plusieurs variables

PREMIÈRE PARTIE

I. — *Origine des fonctions de Bessel de* n *variables*

Les fonctions de Bessel à plusieurs variables ont été introduites dans l'Analyse par M. Appell[1] dans le calcul d'une expression approchée de la fonction x de la variable t, définie par l'équation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = t \qquad (1)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction réelle continue et positive dans l'intervalle -1, $+1$, ne s'annulant ni dans l'intervalle, ni aux limites ; le radical qui figure dans le dénominateur est pris avec le signe $+$, ou le signe $-$, suivant que x croît ou décroît.

Cette relation définit x comme fonction périodique de t avec la période

$$T = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (2)$$

Ce problème, d'exprimer x par une série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$, a été traité par Weierstrass dans le Mémoire « *Ueber eine Gattung reell periodischer functionen* » (Œuvres t. 2, p. 1), mais tandis que Weierstrass fait l'inversion rigoureuse et cherche à déterminer les coefficients du développement en série trigonométrique, M. Appell commence par faire une première approximation avant l'inversion, en remplaçant la fonction $\varphi(x)$ par un polynome approché $P(x)$ dans l'intervalle -1, $+1$.

M. Appell obtient une nouvelle équation

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x)\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = t\,. \qquad (3)$$

(1) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 160, Avril 1915, p. 419.

Prenant $x_0 = +1$ et faisant le changement de variable $x = \cos u$ il vient pour le polynome P

$$P(x) = \frac{T}{2\pi}(1 - e_1 \cos u - e_2 \cos 2u - \ldots\ldots e_n \cos nu)$$

et l'équation (3) devient

$$u - e_1 \sin u - e_2 \sin 2u - \ldots\ldots e_n \sin nu - \frac{2\pi t}{T} = 0.$$

C'est le calcul direct des coefficients du développement de $x = \cos u$ et en général des $\cos ju$ ou $\sin ju$ en série de Fourier, suivant les cosinus et les sinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$, qui conduit à des intégrales que M. Appell a proposé de considérer comme la généralisation au point de vue du nombre des variables de la transcendante classique Fourier-Bessel et dont le type est

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(ku - \sum_{n=1}^{n=\pi} x_n \sin nu\right) du \tag{4}$$

l'indice k étant un entier.

M. Pérès[2] a indiqué, pour ces fonctions, les relations de récurrence qui conduisent dans le cas d'un nombre limité de variables à des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, admettant $2n$ solutions linéairement indépendantes, dont l'une est la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elle-même.

M. B. Jekhowsky[3] a donné pour la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'expression sous forme de série

$$\sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, J_{q_n}(x_n)$$

et il a indiqué certains développements se rattachant à ces fonctions.

Enfin M. Akimoff[4], en considérant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\sum_{n=1}^{n=n} \frac{x_n}{2}\left(u^n - \frac{1}{u^n}\right)}\, u^{-k-1}\, du \tag{5}$$

et répétant le raisonnement de Sonine[5] trouve pour $\alpha = \beta = -1$

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(ku - \sum_{m=1}^{m=n} x_m \sin mu\right) du - \frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\left(kv - \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \sin hmv\right)} dv \tag{6}$$

et pour $\alpha = \beta = 1$

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^k}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(ku - \sum_{m=1}^{m=n} x_m \sin mu\right) du - \frac{(-1)^k \sin k\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\left(kv - \sum_{m=1}^{m=n} x_m \sin hmv\right)} dv \tag{6'}$$

l'indice k étant quelconque.

L'intégrale (6') pour $n = 1$ se réduit à l'intégrale indiquée par Schläfli[6], et pour k entier à l'intégrale (4) de M. Appell.

---

(2) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 161, Août 1915, p. 168.
(3) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 162, Février 1916, p. 318.
(4) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 163, Juillet 1916, p. 27.
(5) *Math. Annal.*, t. XVI, 1880, p. 23.
(6) *Annali di Matemica*, t. I, p. 237.

Les résultats des recherches de M. Akimoff sont réunis dans son travail « Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leur application en mécanique ». (Leningrad 1922) (7).

Notons encore le nom de M. P. Humbert (8), qui en partant d'une des quatre fonctions hypergéométriques, savoir :

$$F_1(\alpha\,;\beta\,,\beta'\,;\gamma\,;x\,,y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{(\alpha\,,m+n)\,(\beta\,,m)\,(\beta',n)}{(\gamma\,,m+n)}\quad\frac{x^m\,y^n}{m\,!\,n\,!}$$

après avoir remplacé x , y par $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\alpha\,\beta'}$, et faisant tendre α et β' vers l'infini obtient

$$\Phi_3\,(\beta',\gamma',x\,,y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{(\beta\,.\,m)}{(\gamma\,,m+n)}\quad\frac{x^m\,y^n}{m\,!\,n\,!}$$

fonction hypergéométrique confluente.

P. Humbert trouve que la plus simple des fonctions de Bessel, après la fonction classique d'une seule variable, $J_0\,(x\,,y)$, satisfait à la même équation, que la fonction

$$e^{-iy}\;\Phi_3\left(\frac{1}{2}\,,\,1\,,\,2\,i\,y\,,\,-\frac{1}{4}\,x^2\right)$$

indiquée par cet auteur.

Nous remarquons qu'entre la fonction Φ_3 et $J_p\,(x)$ il existe une relation de la forme

$$\Phi_3\left(\frac{1}{2},\,1\,,\,2\,i\,y\,,\,-\frac{1}{4}\,x^2\right) = \sum_{p=0}^{p=+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2},\,p\right)}{p\,!}\quad\frac{(2\,i\,y)^p}{\left(\frac{x}{2}\right)^p}\;J_p\,(x)$$

De notre côté et d'une façon tout à fait indépendante (*) , nous nous sommes occupé de l'étude des transcendantes de Fourier-Bessel généralisées et avons publié nos résultats dans plusieurs Notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*.

Le présent travail se compose de deux parties.

Dans la première partie, nous avons rassemblé les résultats de nos recherches pour le cas des fonctions à plusieurs variables et d'indice k entier, et nous passons en revue le cas de l'indice k non entier quelconque, étudié par M. Akimoff.

Dans la seconde partie, pour ne pas surcharger les écritures, nous faisons l'étude de ces fonctions en nous limitant au nombre de deux variables.

II. — *Expression des fonctions de Bessel de* n *variables à l'indice quelconque entier à l'aide des fonctions de* n — 1 *variables. — Fonction génératrice.*

Prenons comme point de départ l'intégrale indiquée par M. Appell et soit

$$J_k\,(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\,(k\,u - x_1\sin u - x_2\sin 2\,u - \ldots - x_n\sin n\,u)\,du \qquad (1)$$

où k est un indice entier quelconque, la fonction de Bessel de n variables

$$x_1\,,x_2\,,x_3\,\ldots\ldots,x_{n-1}\,,x_n\,.$$

(7) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 435.

(8) *Proceedings of the royal Society of Edinburg*, vol. XLI, part. 1 n° 9, 1920-1921, p 73.

(*) Voir à ce sujet la remarque de M. Appell. *(Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 437).

En décomposant le cosinus qui figure sous le signe d'intégration en

$$\cos \lambda_{n-1} \cos (x_n \sin n u) + \sin \lambda_{n-1} \sin (x_n \sin n u)$$

où pour abréger l'écriture on pose

$$\lambda_{n-1} = k u - x_1 \sin u - x_2 \sin 2 u - \ldots\ldots, x_{n-1} \sin (n-1) u$$

on a

$$J_k (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda_{n-1} \cos (x_n \sin n u)\, d u + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \lambda_{n-1} \sin (x_n \sin n u)\, d u \qquad (2)$$

D'après les relations bien connues des fonctions de Bessel d'une variable, savoir :

$$\left.\begin{aligned} \cos (x_n \sin n u) &= J_0 (x_n) + 2 \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p} (x_n) \cos 2 p n u \\ \sin (x_n \sin n u) &= 2 \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p-1} (x_n) \sin (2p-1) n u \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

l'expression (2) devient

$$\begin{aligned} J_k (x_1, x_2 \ldots, x_n) = J_0 (x_n) . \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda_{n-1}\, d u &+ \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p} (x_n) . \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \cos \lambda_{n-1} \cos 2 p n u\, d u \\ &+ \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p-1} (x_n) . \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin \lambda_{n-1} \sin (2p-1) n u\, d u \end{aligned}$$

En remarquant ensuite que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda_{n-1}\, d u = J_k (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \cos \lambda_{n-1} \cos 2 p n u\, d u &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [\lambda_{n-1} - 2 p n u]\, d u + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [\lambda_{n-1} + 2 p n u]\, d u \\ &= J_{k-2pn} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + J_{k+2pn} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin \lambda_{n-1} \sin (2p-1) n u\, d u &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [\lambda_{n-1} - (2p-1) n u]\, d u - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [\lambda_{n-1} + (2p-1) n u]\, d u \\ &= J_{k-(2p-1)n} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - J_{k+(2p-1)n} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

l'expression (2) devient

$$\begin{aligned} J_k (x_1, x_2, \ldots x_n) = {} & J_0 (x_n) J_k (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \\ & + \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p} (x_n) \Big[J_{k-2pn} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + J_{k+2pn} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Big] \\ & + \sum_{p=1}^{p=+\infty} J_{2p-1} (x_n) \Big[J_{k-(2p-1)n} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) - J_{k+(2p-1)n} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \Big] \end{aligned} \qquad (4)$$

Formule générale exprimant, sous forme de série les fonctions de Bessel de n variables, à l'aide des fonctions de $n-1$ variables.

En vertu des relations connues pour les fonctions classiques

$$J_{2p}(x_n) = J_{-2p}(x_n)$$
$$J_{2p-1}(x_n) = -J_{-(2p-1)}(x_n)$$

les sommes qui figurent dans la formule (4) se transforment en

$$\sum_{p=1}^{p=+\infty}\Big[J_{2p}(x_n)\,J_{k-2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + J_{-2p}(x_n)\,J_{k+2pn}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\Big]$$

$$\sum_{p=1}^{p=+\infty}\Big[J_{2p-1}(x_n)\,J_{k-(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + J_{-(2p-1)}(x_n)\,J_{k+(2p-1)n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\Big]$$

En désignant ensuite par q_n un nombre entier prenant les valeurs de $+\infty$ à $-\infty$ on a

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\,J_{q_n}(x_n) \tag{5}$$

En appliquant cette formule à la fonction $J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ il vient

$$J_{k-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{q_{n-1}=-\infty}^{q_{n-1}=+\infty} J_{k-(n-1)q_{n-1}-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})\,J_{q_{n-1}}(x_{n-1})$$

et ainsi de suite

$$J_{k-(n-1)q_{n-1}-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) = \sum_{q_{n-2}=-\infty}^{q_{n-2}=+\infty} J_{k-(n-2)q_{n-2}-(n-1)q_{n-1}-nq_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-3})\,J_{q_{n-2}}(x_{n-2})$$

. . . .

$$J_{k-3q_3-4q_4-\ldots-nq_n}(x_1, x_2) = \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} J_{k-2q_2-3q_3-\ldots-nq_n}(x_1)\,J_{q_2}(x_2)$$

d'où en faisant les substitutions successives l'expression (5) devient

$$J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty}\ \sum_{q_3=-\infty}^{q_3=+\infty} \cdots \sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{k-2q_2-3q_3-\ldots-nq_n}(x_1)\,J_{q_2}(x_2)\ \ldots\ J_{q_n}(x_n) \tag{6}$$

Formule[9] exprimant les fonctions de Bessel à plusieurs variables sous forme de produit de séries des fonctions de Bessel à une variable.

En multipliant les deux parties de cette formule par u^k et en prenant la somme de $k = -\infty$ à $k = +\infty$ il vient

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u^k = \sum_{q_1=-\infty}^{q_1=+\infty}\ \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} \cdots \sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{q_1}(x_1)\,J_{q_2}(x_2)\ \ldots\ J_{q_n}(x_n)\,u^{q_1+2q_2+\ldots+nq_n} \tag{7}$$

ou l'on pose $k - 2q_2 - 3q_3 - \ldots - nq_n = q_1$.

Si maintenant on remplace chaque somme $\sum_{q_n=-\infty}^{q_n=+\infty} J_{q_n}(x_n)\,u^{nq_n}$ par $e^{\frac{x_n}{2}\left(u^n - \frac{1}{u^n}\right)}$ l'expression (7) devient

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,u^k = e^{\sum_{n=1}^{n=n} \frac{x_n}{2}\left(u^n - \frac{1}{u^n}\right)} \tag{8}$$

(9) B. Jekhowsky, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XLI, Février 1917.

Ce qui montre que

$$U_n = e^{\frac{x_1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right) + \frac{x_2}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right) + \ldots\ldots + \frac{x_n}{2}\left(u^n-\frac{1}{u^n}\right)} \qquad (9)$$

est la fonction génératrice des fonctions de Bessel à plusieurs variables et que ces nouvelles fonctions peuvent être définies comme dans le cas d'une variable par le développement (9).

III. — *Relations de récurrence*

En prenant la dérivée par rapport à x_n de la relation (1) du § I on a

$$\frac{d\,J_k(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d\,x_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\sin\lambda_n \sin n u\, d u = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos[\lambda_n - n u]\, d u - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos[\lambda_n + n u]\, d u \qquad (1)$$

d'ou en vertu des relations du § précédent

$$\frac{d\,J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d\,x_n} = \frac{1}{2}\Big[J_{k-n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k+n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] \qquad (2)$$

première relation de récurrence.

L'expression $\lambda_n = k u - x_1 \sin u - x_2 \sin 2u - \ldots - x_n \sin n u$ donne

$$u = \frac{1}{k}(\lambda_n + x_1 \sin u + x_2 \sin 2u + \ldots + x_n \sin n u)$$

d'où

$$k\, du = d\,\lambda_n + \sum_{n=1}^{n=n} x_n \cos n u\, d u\,.$$

En remplaçant par cette valeur $d u$ dans l'expression (1) du § précédent il vient,

$$k\,J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\lambda_n\, d\,\lambda_n + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p x_p}{\pi}\int_0^\pi \cos\lambda_n \cos p u\, d u$$

d'ou en ayant égard à

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\lambda_n\ d\,\lambda_n \qquad = 0$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos\lambda_n \cos n u\, d u = J_{k-n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{k+n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

On a

$$2k\,J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n=1}^{n=n} n\, x_n \Big[J_{k-n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{k+n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] \qquad (3)$$

Les relations (2) et (3) ont été indiquées par J. Pérès [3].

La dernière relation exige que la série

$$\sum_{n=1}^{n=n} n\,|\,x_n\,| \qquad \text{soit une série convergente.}$$

---

(4) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 163, Juillet 1916.

(3) J. Pérès loc. cit.

IV. — *Equations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables*

Les fonctions de Bessel à plusieurs variables vérifient

$$N = n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

équations linéaires distinctes du second ordre, n étant le nombre des variables.

Parmi ces équations $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations sont d'un type très simple, savoir :

$$\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_t \partial x_u} \qquad (1)$$

si $i + m = r + s$, $m - i = u - t$, $r - s = t + u$.

On obtient ces équations[2] par addition et soustraction des relations tirées des formules du § précédent qui donnent

$$(2) \quad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_m} &= \frac{1}{4}\Big(J_{k-i-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k-i+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k+i-m}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\qquad + J_{k+i+m}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big) \\
\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_r \partial x_s} &= \frac{1}{4}\Big(J_{k-r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k-r+s}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k+r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\qquad + J_{k+r+s}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big) \\
\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_t \partial x_u} &= \frac{1}{4}\Big(J_{k-t-u}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k-t+u}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{k+t-u}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\qquad + J_{k+t+u}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big)
\end{aligned}$$

Elles sont indépendantes de l'indice k .

Quant aux autres n équations, elles deviennent assez compliquées au fur et à mesure que le nombre des variables augmente.

Voici les expressions générales qui permettent de former toutes les équations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à n'importe quel nombre de variables.

Pour former ces équations, il s'agit, en se servant des relations de récurrence (2) et (3) écrites pour toutes les valeurs de k , variant de $k - r$ à $k + r$, d'éliminer entre elles les valeurs de

$$J_{k-r}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; J_{k-r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \ldots\ldots \; J_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; J_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \ldots\ldots \; J_{k+r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; J_{k+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

On trouve ainsi n relations de chacune des deux formes

$$2(k-r) J_{k-r}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n=1}^{n=n} n x_n \Big[J_{k-(n+r)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{k+(n-r)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] \qquad (3)$$

$$2(k+r) J_{k+r}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n=1}^{n=n} n x_n \Big[J_{k-(n-r)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{k+(n+r)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big] \qquad (4)$$

où l'on fait successivement $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$.

On a ainsi $2n$ relations qui, combinées deux à deux pour les mêmes valeurs de r , donnent n équations.

Le nombre des variables $n = 2q$ étant pair, en additionnant les relations (3) et (4) pour des valeurs de $r = 1, 2, \ldots\ldots (n-1), n$ on obtient q équations d'indice r pair et q équations d'indice r impair.

Chaque somme ainsi trouvée, en tenant compte de la relation (2) du § III, devient[2]

(2) Loc. cit.

(2) B. Jekhowsky, *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 170, N° 18, 1920, p. 1042.

a) Le nombre des variables est pair $n = 2q$, l'indice $r = 2m$ est pair.

$$\sum_{p=0}^{p=q-2}\Big[2(q-p)\,x_{2(q-p)}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)-m}} + 2[(q-p)-1]\,x_{2[(q-p)-1]}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(m+1)-(q-p)}} +$$

$$+ [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)-m}\,\partial x_{(q-p)-(m+1)}} + [2(q-p)-3]\,x_{2(q-p)-3}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(m+1)-(q-p)}\,\partial x_{(m+2)-(q-p)}}\Big] +$$

$$-\sum_{p=0}^{p=q-1}\Big[2(q-p)\,x_{2(q-p)}\Big\{\frac{2\,\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{q-p}} - \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)+m}}\Big\} +$$

$$+ [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\Big\{\frac{2\,\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{q-p}\,\partial x_{q-p-1}} - \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)+m}\,\partial x_{(q-p)+(m-1)}}\Big\}\Big] +$$

$$-2k\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_m} + 2m\frac{\partial J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{2m}} = 0$$

avec $m = 1, 2, 3, \dots (q-1), q$

b) Le nombre des variables est pair $n = 2q$, l'indice $r = 2m-1$ est impair.

$$\sum_{p=0}^{p=q-2}\Big[2(q-p)\,x_{2(q-p)}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)-m}\,\partial x_{(q-p)-(m-1)}} + 2[(q-p)-1]\,x_{2[(q-p)-1]}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{m-(q-p)}\,\partial x_{(m+1)-(q-p)}} +$$

$$+ [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)-m}} + [2(q-p)-3]\,x_{2(q-p)-3}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(m+1)-(q-p)}}\Big] +$$

$$+\sum_{p=0}^{p=q-1}\Big[[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)+(m-1)}} + 2[q-p]\,x_{2q-p}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)+m}\,\partial x_{(q-p)+(m-1)}}\Big] +$$

$$\frac{2(k-2\sum_{p=1}^{p=q}p\,x_{2p})}{\sum_{p=0}^{p=q-1}[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}}\Big\{\sum_{p=0}^{p=q-1}2(q-p)\,x_{2(q-p)}\frac{\partial^2 J^k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)}} + \sum_{p=0}^{p=q-2}[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)}\,\partial x_{(q-p)-1}}\Big\} +$$

$$-2k\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{m-1}\,\partial x_m} + (2m-1)\frac{\partial J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{2m-1}} +$$

$$+\left[\frac{(\sum_{p=1}^{p=q}(2p-1)\,x_{2p-1})^2 - (k-2\sum_{p=1}^{p=q}p\,x_{2p})^2}{\sum_{p=1}^{p=q}(2p-1)\,x_{2p-1}}\right] J_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

avec $m = 1, 2, 3, \dots (q-2), (q-1)$.

Le nombre des variables $n = 2q-1$ étant impair, on obtient de la même manière $q-1$, équations d'indice r pair et q équations d'indice r impair, et il vient

c) $n = 2q-1$, $r = 2m$.

$$\sum_{p=0}^{p=q-2}\Big[2(q-p-1)\,x_{2(q-p-1)}\Big\{\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)+(m-1)}} + \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)-(m-1)}} + \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(m+1)-(q-p)}}\Big\} +$$

$$+ [2(q-p)-3]\,x_{2(q-p)-3}\frac{\partial^2 (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(m+1)-(q-p)}\,\partial x_{(m+2)-(q-p)}} + [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\Big\{\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)-m}\,\partial x_{(q-p)-(m-1)}} +$$

$$-2\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_{(q-p)}\,\partial x_{(q-p-1)}}\Big\} - 2(q\ p-1)\,x_{2(q-p-1)}\frac{2\,\partial^2 J_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p-1)}}\Big] +$$

$$+\sum_{p=0}^{p=q-1}[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{(q-p)+(m-1)}\,\partial x_{(q-p)+m}} - 2k\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_m^2} + 2m\frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{2m}} = 0$$

avec $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots (q-2), (q-1)$.

d) $n = 2q-1$, $r = 2m-1$.

$$\sum_{p=0}^{p=q-2}\Bigg[2(q-p-1)\,x_{2(q-p-1)}\left\{\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{(q-p)+(m-1)}\,\partial x_{(q-p)+(m-2)}} + \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{(q-p)-m}\,\partial x_{(q-p)-(m+1)}} + \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{m-(q-p)}\,\partial x_{(m+1)-(q-p)}}\right\} +$$

$$+ [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)-m}} + [2(q-p)-3]\,x_{2(q-p)-3}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2 \ldots, x_n)}{\partial x^2_{(m+1)-(q-p)}}\Bigg] +$$

$$+\frac{2\left(k-2\sum\limits_{p=0}^{p=q-1} p\,x_{2p}\right)}{\sum\limits_{p=0}^{p=q-1}[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}}\sum_{p=0}^{p=q-2}\left[2(q-p-1)\,x_{2(q-p-1)}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x^2_{q-p-1}} + [2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{(q-p)}\,\partial x_{(q-p-1)}}\right] +$$

$$+\sum_{p=0}^{p=q-1}[2(q-p)-1]\,x_{2(q-p)-1}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x^2_{(q-p)+(m-1)}} + \left[\frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{p=q}(2p-1)\,x_{2p-1}\right)^2 - \left(k-2\sum\limits_{p=1}^{p=q-1} p\,x_{2p}\right)^2}{\sum\limits_{p=1}^{p=q}(2p-1)\,x_{2p-1}}\right] J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$-2k\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_m\,\partial x_{m-1}} + (2m-1)\frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{2m-1}} = 0$$

avec $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots (q-2), (q-1), q$.

Comme exemple, formons les équations dans le cas de $n = 3$.

On trouve les trois équations suivantes :

$$\left[\frac{4x_2(k-2x_2)}{x_1+3x_3} + x_1 + 3x_3\right]\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + 2\left[\frac{3x_3(k-2x_2)}{x_1+3x_3} + x_2\right]\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1\,\partial x_2} +$$

$$+\frac{\partial J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + 3x_3\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \left[x_1 + 3x_3 - \frac{(k-2x^2)^2}{x_1+3x_3}\right] J_k(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$2(k+2x_2)\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + (6x_3 - x_1)\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1\,\partial x_2} - 3x_3\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2\,\partial x_3} +$$

$$-2x_2\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0$$

$$\left[\frac{(k-2x_2)^2}{x_1+3x_3} - (x_1+3x_3)\right] J_k(x_1, x_2, x_3) + 2\frac{(kx_1 + 6x_2x_3)}{x_1+3x_3}\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1\,\partial x_2} +$$

$$-3\frac{\partial J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} - 3x_3\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} - x_1\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} +$$

$$-2x_2\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2\,\partial x_3} - \left[x_1 + \frac{4x_2(k-2x_2)}{x_1+3x_3}\right]\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = 0.$$

V. — *Relations différentielles vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables*

Les relations (2) et (3) du § III permettent de déduire d'autres équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur auxquelles satisfait la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ainsi la relation (2) par différentiation successive et substitution donne

$$(1)\quad 2^p \frac{\partial^p J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^p} = J_{k-pi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{p}{1} J_{k-(p-2)i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2} J_{k-(p-4)i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + (-1)^{q-1} \frac{p(p-1)\ldots(p-q+2)}{1.2\ \ldots\ (q-1)} J_{k-[p-2(q-1)]i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$\ldots + (-1)^{p-1} \frac{p(p-1)}{1.2} J_{k+(p-2)i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-1)^p J_{k+pi}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ou l'on fait $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Formule générale qui permet d'exprimer les dérivées de n'importe quel ordre de la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à l'aide de mêmes fonctions d'indices différents,

$$i = 1, 2, \ldots\ldots n;$$

q désignant le numéro d'ordre des termes du développement.

Sous forme abrégée d'écriture on a

$$(1)'\quad \frac{\partial^p J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^p} = 2^{-p} \sum_{q=1}^{q=p+1} (-1)^{q-1}\, C_p^{q-1}\, J_{k-[p-2(q-1)]i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$C_p^{q-1} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+2)}{1.2\ldots(q-1)} \qquad \text{à condition } (C_p^0 = 1)$$

avec $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ et $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ entiers.

Faisons dans l'expression (1)' successivement

$$\left.\begin{array}{l} p = 1 \\ p = 2 \\ p = 3 \\ \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

et choisissons parmi les relations que l'on obtient celles qui correspondent à

$$\left.\begin{array}{l} i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \\ \ \vdots \end{array}\right\} \quad p = 1, 3, 5, \ldots\ldots$$

on obtient la formule générale

$$(2)\quad \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{(2i-1)m}} = (2i-1) \sum_{p=1}^{p=i} \frac{2^{2(p-1)}}{2p-1} \quad \frac{\partial^{2p-1} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_m^{2p-1}}$$

avec $\quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots \dfrac{n}{2}\quad$ si n est pair

et $\quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots \dfrac{n+1}{2}\quad$ si n est impair.

Pour chaque valeur de i, m prend des valeurs entières telles que

$$0 < m(2i-1) \leq n$$

Cette formule exprime la dérivée de la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous forme finie, en fonction des dérivées d'ordre impair de la même fonction.

Si nous faisons dans cette formule $m = 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots p$, il vient

$$(3) \qquad \frac{1}{2p-1} \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{2p-1}} = \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} + \frac{2^2}{3} \frac{\partial^3 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^3} + \ldots\ldots\ldots$$

ou bien en désignant par $2p-1$ $(p = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ un nombre impair, on a :

$$\frac{2^2}{3} = \frac{2^3}{2.3} = \frac{8}{2.3} = \frac{9-1}{1.2.3} = \frac{(2p-1)^2 - 1^2}{1.2.3} \qquad \text{pour } p = 2$$

de même :

$$\frac{2^4}{5} = \frac{2^4.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = \frac{24.16}{1.2.3.4.5} = \frac{(25-1)(25-9)}{1.2.3.4.5} = \frac{(5^2-1)(5^2-3^2)}{1.2.3.4.5} =$$

$$= \frac{[(2p-1)^2 - 1^2][(2p-1)^2 - 3^2]}{1.2.3.4.5} \qquad \text{pour } p = 3$$

de sorte que la relation (3) peut s'écrire :

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2p-1} \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_{2p-1}} &= \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1} + \frac{(2p-1)^2 - 1^2}{1.2.3} \frac{\partial^3 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^3} + \\ &+ \frac{[(2p-1)^2 - 1^2]\,[(2p-1)^2 - 3^2]}{1.2.3.4.5} \frac{\partial^5 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^5} + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

avec $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

C'est l'équation donnée par M. Akimoff (1).

De la même relation (2) du § III on trouve :

$$(4) \qquad 2^{2i} \frac{\partial^{2i+1} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_m^{2i+1}} = \sum_{p=1}^{p=i+1} (-1)^{p+1} C_{2i+1}^{p-1} \frac{\partial J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{[2(i-p)+3]m}}$$

avec $C^o_{2i+1} = 1$; $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$$m = 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{n}{2(i-p)+3} \qquad \text{entier}$$

et $$o < m\,[2(i-p)+3] \leqslant n ,$$

formule qui exprime la dérivée d'ordre impair de la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à l'aide des dérivées du premier ordre de la même fonction.

Choisissons maintenant parmi les relations celles qui correspondent à

$$\left.\begin{aligned} i &= 1 \\ i &= 2 \\ i &= 3 \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}\right\} p = 2, 4, 6, \ldots\ldots$$

On obtient :

$$(5) \qquad 2^{2(i-1)} \frac{\partial^{2i} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_m^{2i}} = -\sum_{p=1}^{p=i} (-1)^p C_{2i}^{p-1} \frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x^2_{[i-(p-1)]m}}$$

où pour chaque valeur entière de $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots \dfrac{n}{i-(p-1)}$ on a :

$$m\,[i-(p-1)] \leqslant n ,$$

i prenant des valeurs entières $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ et $C^o_{2i} = 1$.

(1) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 165, p. 24, 1917.

Cette formule exprime les dérivées d'ordre pair de la fonction $J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, à l'aide des dérivées du second ordre de la même fonction.

Enfin, si dans l'expression (1) nous faisons

$$p = 2 \quad , \quad p = 2 \quad , \quad p = 4 \quad ,$$
$$i = 1 \quad , \quad i = 2 \quad , \quad i = 1 \quad ,$$

nous obtenons trois relations.

En multipliant la première par 4, puis retranchant la deuxième, on trouve d'une façon générale

$$\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{2p}^2} = 4\left[\frac{\partial^2 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^4 J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p^4}\right] \tag{6}$$

équations indépendantes de l'indice k,

avec $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{n}{2}$ si n est pair

et $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Pour $p = 1$ (6) se réduit à l'équation indiquée par M. Appell [1].

En posant dans ces expressions générales $n = 1, 2$ on obtient évidemment toutes les équations aux dérivées partielles pour les fonctions $J_k(x, y)$ qui feront l'objet dans la seconde partie de notre travail.

VI. — *Développement en série de diverses expressions algébriques au moyen des fonctions de Bessel à plusieurs variables*

Considérons à nouveau le développement (8) du § II

$$e^{\sum_{n=1}^{n=n} \frac{x_n}{2}\left(u^n - \frac{1}{u^n}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u^k \tag{1}$$

et changeons u en $\frac{1}{u}$.

On a

$$e^{-\sum_{n=1}^{n=n} \frac{x_n}{2}\left(u^n - \frac{1}{u^n}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u^{-k} \tag{2}$$

En faisant ensuite dans ces deux expressions $u = e^{\varphi i}$ avec $i = \sqrt{-1}$, il vient après addition et soustraction

$$\cos\left(\sum_{n=1}^{n=n} x_n \sin n\varphi\right) = \sum_{k=1}^{k=+\infty}\left[J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]\cos k\varphi. \tag{3}$$

$$\sin\left(\sum_{n=1}^{n=n} x_n \sin n\varphi\right) = \sum_{k=1}^{k=+\infty}\left[J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]\sin k\varphi \tag{4}$$

En différenciant l'expression (4) par rapport à φ on a

$$\cos\left(\sum_{n=1}^{n=n} x_n \sin n\varphi\right)\left(\sum_{n=1}^{n=n} x_n \cos n\varphi\right) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} k\left[J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]\cos k\varphi \tag{5}$$

d'où pour $\varphi = o$ il vient

$$\sum_{n=1}^{n=n} n\, x_n = \sum_{k=1}^{k=+\infty} k\left[J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] \tag{6}$$

(1) *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 160, 1915, p. 422.

de même l'expression (3) pour $\varphi = o$ donne[1]

$$(7) \qquad 1 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ce qui montre que pour k entier $| J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) | < 1$.

En multipliant les équations (1) et (2) membre à membre, on obtient une équation de la forme

$$(8) \qquad 1 = C_o + \sum_{k=1}^{k=+\infty} C_k u^k + \sum_{k=1}^{k=+\infty} C_{-k} u^{-k}$$

qui doit exister quel que soit u.

Donc $$C_o = 1 \;;\; C_k = o \;;\; C_{-k} = 0.$$

En développant la première de ces relations il vient

$$(9) \qquad 1 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Cette équation montre que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, étant supposées réelles, la valeur absolue de $J_o(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est plus petite que 1, et il est de même pour chaque somme

$$| J_k^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-k}^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) | < 1$$

Pour $n = 1$ le développement (9) a été indiqué par Hansen[2].

Changeons dans les expressions (3) et (4) φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\cos \left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n x_{2n-1} \cos (2n-1) \varphi - \sum_{n=1}^{n=n} x_{2n} \sin 2n\varphi \right) =$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} J_o(x_1, x_2, \ldots, x_n) &- [J_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sin \varphi \\ &- [J_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \cos 2\varphi \\ &+ [J_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-3}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sin 3\varphi \\ &+ [J_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-4}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \cos 4\varphi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et

$$\sin \left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n x_{2n-1} \cos (2n-1) \varphi - \sum_{n=1}^{n=n} x_{2n} \sin 2n\varphi \right) =$$

$$(11) \qquad \begin{aligned} &+ [J_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \cos \varphi \\ &- [J_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sin 2\varphi \\ &- [J_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-3}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \cos 3\varphi \\ &+ [J_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-4}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \sin 4\varphi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_n = -1 \;;\; n = 2, 3, \ldots \;;\; \varepsilon_1 = 1$.

En faisant dans ces deux séries $\varphi = 0$ et d'une façon générale en désignant par A_1 et A_2 les séries

$$A = \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \sum_{p=o}^{p=\frac{n}{2}-1} (-1)^p x_{2p+1} \\ A_2 &= \sum_{p=o}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p x_{2p+1} \end{aligned} \right.$$

(1) Jekhowsky, *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 164, p. 179, 1917.
(2) Hansen, *Ermittelung der absoluten Storungen*. Schriften der Sternwarte Seeburg (Gotha), 1843, p. 107.

suivant le cas de n pair ou impair, il vient

(12) $$\cos A = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k J_{2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(13) $$\sin A = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} -(-1)^k J_{2k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

On peut écrire ces deux relations sous la forme

$$\cos A = J_o(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} i^{2k} \left[J_{2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]$$

$$i \sin A = \sum_{k=1}^{k=+\infty} i^{2k-1} \left[J_{2k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-(2k-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]$$

d'où

(14) $$e^{\mp A} = J_o(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} i^k \left[(\mp 1)^k J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (\pm 1)^k J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right]$$

En différenciant les expressions (10) et (11) par rapport à φ on trouve

$$-\left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_m (2n-1) x_{2n-1} \sin(2n-1)\varphi - 2\sum_{n=1}^{n=n} n x_{2n} \cos 2n\varphi\right) \sin\left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n x_{2n-1} \cos(2n-1)\varphi - \sum_{n=1}^{n=n} x_{2n} \sin 2n\varphi\right) =$$

$$\begin{aligned}
= &- 1 \left[J_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-1}(x_1, x_2, \ldots x_n) \right] \cos \varphi \\
&+ 2 \left[J_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \sin 2\varphi \\
&+ 3 \left[J_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-3}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \cos 3\varphi \\
&- 4 \left[J_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-4}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \sin 4\varphi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et $$\left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_m (2n-1) x_{2n-1} \sin(2n-1)\varphi - 2\sum_{n=1}^{n=n} n x_n \cos 2n\varphi\right) \cos\left(\sum_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n x_{2n-1} \cos(2n-1)\varphi - \sum_{n=1}^{n=u} x_{2n} \sin 2n\varphi\right) =$$

$$\begin{aligned}
= &- 1 \left[J_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \sin \varphi \\
&- 2 \left[J_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \cos 2\varphi \\
&+ 3 \left[J_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-3}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \sin 3\varphi \\
&+ 4 \left[J_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-4}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \cos 4\varphi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

avec
$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= -1 \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots \quad ; \quad \varepsilon_1 = 1 \\
\varepsilon_m &= +1 \quad ; \quad m = 2, 3, \ldots \quad ; \quad \varepsilon_1 = -1
\end{aligned}$$

Puis en faisant $\varphi = 0$ il vient

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{n=n} 2n x_{2n}\right) \sin A = &- 1 \left[J_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&+ 3 \left[J_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-3}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&- 5 \left[J_5(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-5}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}
\left(-\sum_{n=1}^{n=n} 2n x_{2n}\right) \cos A = &- 2 \left[J_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&+ 4 \left[J_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-4}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&- 6 \left[J_6(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-6}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\left(\sum_{n=1}^{n=n} 2\,n\,x_{2n}\right)(-i\sin A) = \sum_{k=1}^{k=+\infty}(2\,k-1)\,i^{2k-1}\left[J_{2k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + J_{-(2k-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

$$\left(\sum_{n=1}^{n=n} 2\,n\,x_{2n}\right)(-\cos A) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} 2\,k\,i^{2k}\left[J_{2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J_{-2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

d'où en prenant la somme et la différence :

$$(15)\qquad e^{\pm i A} = \frac{\mp 1}{\sum\limits_{n=1}^{n=n} 2\,n\,x_{2n}} \sum_{k=1}^{k=+\infty} k\,i^k\left[(\pm 1)^{k+1} J_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (\mp 1)^k J_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]$$

VII. — *Développement d'une fonction périodique en série trigonométrique suivant les sinus et cosinus des multiples de* x

Soit
$$y = \cos p\,v \tag{1}$$
p étant un entier quelconque, une fonction qui dépend de x par l'intermédiaire de v ; x et v sont reliés entre eux par la relation
$$x = v - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2\,v - \ldots\ldots - \varepsilon_n \sin n\,v \tag{2}$$
avec
$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots\ldots + |\varepsilon_n| < 1$$

La fonction $y = \varphi(x)$ ne change pas si l'on augmente v de 2π. Elle reste finie pour toutes les valeurs de x ; par suite, étant paire, elle est développable en séries de Fourier sous forme
$$y = \frac{1}{2}A_o + \sum_{k=1}^{k=+\infty} A_k \cos k\,x \tag{3}$$
ou les coefficients A_k sont exprimés par des intégrales définies
$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \cos p\,v \cos k\,x\,d\,x\,. \tag{4}$$

L'intégration par parties donne
$$A_k = \frac{2\,p}{\pi\,k}\int_o^\pi \sin p\,v \sin k\,x\,d\,v\,.$$
ou bien après avoir remplacé x par sa valeur (2)
$$A_k = \frac{2\,p}{\pi\,k}\int_o^\pi \sin p\,v\,\sin k\,(v - \varepsilon_1 \sin v - \varepsilon_2 \sin 2\,v - \ldots\, \varepsilon_n \sin n\,v)\,d\,v =$$
$$= \frac{p}{\pi\,k}\int_o^\pi \cos(k\,v - p\,v - k\,\varepsilon_1 \sin v - k\,\varepsilon_2 \sin 2\,v - \ldots - k\,\varepsilon_n \sin n\,v)\,d\,v$$
$$-\frac{p}{\pi\,k}\int_o^\pi \cos(k\,v + p\,v - k\,\varepsilon_1 \sin v - k\,\varepsilon_2 \sin 2\,v - \ldots - k\,\varepsilon_n \sin n\,v)\,d\,v$$

On déduit de là :
$$A_k = \frac{p}{k}\left[J_{k-p}(k\,\varepsilon_1, k\,\varepsilon_2, \ldots, k\,\varepsilon_n) - J_{k+p}(k\,\varepsilon_1, k\,\varepsilon_2, \ldots, k\,\varepsilon_n)\right] \tag{5}$$

Quant au coefficient[1] A_o, il est égal à zéro pour toutes les valeurs de $p > n$, et pour toutes valeurs entières de p comprises entre o et $n+1$
$$A_o = \frac{2}{\pi}\int_o^\pi \cos p\,v\,(1 - \sum_{n=1}^{n=n} n\,\varepsilon_n \cos n\,v)\,d\,v = -p\,\varepsilon_p\,. \tag{6}$$
Pour $p = o$. $\quad A_o = 2$.

On a donc pour la fonction $\cos p v$ et par analogie pour $\sin p v$ les développements suivants : [1]

$$\cos p v = -\frac{p \varepsilon_p}{2} + p \sum_{k=1}^{k=+\infty} \left[J_{k-p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) - J_{k+p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) \right] \frac{\cos kx}{k}$$

$$\sin p v = p \sum_{k=1}^{k=+\infty} \left[J_{k-p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) - J_{k+p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) \right] \frac{\sin kx}{k} \qquad (7)$$

On peut écrire aussi ces développements sous la forme :

$$\cos p v = -\frac{p \varepsilon_p}{2} + p \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_{k-p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) \frac{\cos kx}{k}$$

$$\sin p v = p \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_{k-p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) \frac{\sin kx}{k}. \qquad (7)'$$

d'après les relations $J_{-k}(x) = J_k(-x)$ étendues aux fonctions à deux et plusieurs variables. [2]

De plus on a :

$$e^{\pm i p v} = -\frac{p \varepsilon_p}{2} \pm p \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_{k\mp p}(k\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \ldots, k\varepsilon_n) \frac{e^{ikx}}{k} \qquad (8)$$

k prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sauf $k = 0$, en ayant soin de faire

$$\frac{-p\,\varepsilon^p}{2} = 1 \qquad \text{pour } p = 0$$

La relation (8) permet de développer en série une fonction périodique de v

$$S = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k z^k \qquad (z = e^{vi})$$

sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k e^{ikx}$$

et nous pouvons donc généraliser le théorème connu de Cauchy [3] relatif aux développements en séries, savoir :

Dans te développement

$$S = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P_k z^k$$

de la fonction S finie et bien déterminée admettant la période 2π, le coefficient P_k est égal au coefficient de s^k dans le développement de la fonction

$$U_n = S\, e^{\frac{k}{2}\sum\limits_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n \left(s^n - \frac{1}{s^n}\right)} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=n} n\, \varepsilon_n \left(s^n + \frac{1}{s^n}\right) \right]$$

et au coefficient de s^{k-1} dans le développement de la fonction

$$V_n = \frac{1}{k} \frac{dS}{ds} e^{\frac{k}{2}\sum\limits_{n=1}^{n=n} \varepsilon_n \left(s^n - \frac{1}{s^n}\right)}$$

---

(1) Jekhowsky, *Bull. Astr.*, t. XXXV, 1918. p. 139 145.
(2) id. *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1331-1332.
(3) Tisserand, *Mécanique Céleste,* t. I, p. 233.
3) Cauchy, *Comptes Rendus*, t. 12, 1841, p. 88. (Œuvres, I série, t. 6. p. 21).
(3) Jekhowsky, *Comptes Rendus*. t. 166, 1918, p. 342.

DEUXIÈME PARTIE

I. — *Transcendantes Fourier-Bessel à deux variables*

Reprenons l'étude de ces fonctions en nous limitant au nombre de deux variables.

Avant tout, comme la fonction classique à une variable, la fonction de Bessel à deux variables s'exprime par la série entière convergente pour toutes les valeurs de la variable sous la forme [18]

$$(A) \qquad J_k(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k-2p}\left(\frac{y}{2}\right)^{p}}{\Gamma(1+k-2p)\,\Gamma(1+p)}\left[1+\sum_{q=1}^{q=+\infty}(-1)^q \sum_{n=0}^{n=q}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(q-n)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}}{(q-n)!\,(k-2p+q-n)!\,(p+n)!\,n!}\right]$$

que l'on trouve après le développement de l'exponentielle dans la relation (8) du § II dans laquelle on pose $n = 2$ et $x_2 = y$, savoir

$$(1) \qquad e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x,y)\, u^k$$

avec la convention pour les factoriells :

$$0! = 1 \; ; \quad (p+0)! = 1 \; ; \quad (k-2p+0)! = 1$$

La même relation (1) permet encore de donner une autre expression de la fonction $J_k(x,y)$ sous forme de produit des polynômes $v_k(x,y)$ ..... définis par le développement

$$(2) \qquad e^{\frac{x}{2}u+\frac{y}{2}u^2} = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{u^k}{2^k\,k!}\, v_k(x,y)$$

où

$$v_k(x,y) = k! \sum_{m=0}^{m=\frac{k}{2}} 2^m \frac{x^{k-2m}\,y^m}{(k-2m)!\,m!} \qquad (k \text{ pair})$$

$$v_k(x,y) = k! \sum_{m=0}^{m=\frac{k-1}{2}} 2^m \frac{x^{k-2m}\,y^m}{(k-2m)!\,m!} \qquad (k \text{ impair})$$

sont des polynômes appartenant à la classe des polynômes de P. Appell [19].

(18) B. Jekhowsky, *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1331.
(19) P. Appell, *Annales de l'Ecole Normale*, 2e série, t. 9, 1880.

En effet, remplaçons dans le développement (2) u par $-\frac{1}{u}$ et y par $-y$, nous trouvons

$$(3) \qquad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{u}+\frac{y}{u^2}\right)} = \sum_{r=0}^{r=+\infty} (-1)^r \frac{v_r(x,-y)}{2^r\, r\,!} u^{-r}$$

puis en multipliant (2) par (3) on a

$$(4) \qquad e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=0}^{k=+\infty} (-1)^r \frac{v_k(x,y)\, v_r(x,-y)}{2^{k+r}\, k\,!\; r\,!} u^{k-r}$$

d'où par comparaison avec la série (1), l'on déduit :

$$J_k(x,y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m v_{k+m}(x,y)\, v_m(x,-y)}{2^{k+2m}(k+m)\,!\; m\,!}$$

ou bien

$$(B) \qquad J_k(x,y) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{v_{k+m}(x,y)\, v_m(-x,-y)}{2^{k+2m}\,\Gamma(k+m+1)\; m\,!}$$

l'indice k étant un entier positif.

Enfin on a encore

$$(C) \qquad J_k(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{W_m^{(k)}(x,y)}{m\,!}$$

où $\left[\frac{m}{2}\right]$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{m}{2}$ et où les $W_m^{(k)}(x,y)$, $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ sont des polynômes de degré m en x et y définis par les développements

$$(5) \qquad \begin{aligned} (x \sin\varphi + y \sin 2\varphi)^q &= \frac{1}{2} W_q^{(0)}(x,y) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} W_q^{(k)}(x,y) \cos k\varphi \\ (x \sin\varphi + y \sin 2\varphi)^{q+1} &= \sum_{k=1}^{k=+\infty} W_{q+1}^{(k)}(x,y) \sin k\varphi \end{aligned}$$

Les séries (A), (B), (C), ainsi que celle que l'on déduit de la série (6) du § II écrites pour $n = 2$, c'est-à-dire

$$(D) \qquad J_k(x,y) = \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} J_{k-2q_2}(x)\; J_{q_2}(y)$$

permettent de calculer la valeur de la fonction $J_k(x,y)$ d'indice k entier, avec le degré de précision que l'on veut.

Les séries (B) et (C) pour le cas de plusieurs variables ont été indiquées par M. Akimoff [20].

La série (A) comme la série (B) permet de déduire les propriétés suivantes [18] de la fonction $J_k(x,y)$.

$$(6) \qquad \begin{aligned} J_k(x,y) &= (-1)^k J_{-k}(x,-y) \\ J_k(x,y) &= (-1)^k J_k(-x,y) \\ J_k(x,y) &= J_{-k}(-x,-y) \end{aligned}$$

et en rapprochant les deux premières

$$J_k(-x,y) = J_{-k}(x,-y)$$

(20) M. Akimoff, *Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 165, 1917, p. 23.

(18) B. Jekhowsky, loc. cit.

II. — *Equations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions* $J_k(x, y)$

En nous rapportant aux formules générales du § IV, première partie, et faisant $n = 2$, nous trouvons :

$$(s)\qquad \begin{aligned} &2(k+2y)\frac{\partial^2 J_k(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial J_k(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial^2 J_k(x,y)}{\partial x\,\partial y} - 2y\frac{\partial^2 J_k(x,y)}{\partial y^2} = 0 \\ &x\frac{\partial J_k(x,y)}{\partial x} + 2xy\frac{\partial^2 J_k(x,y)}{\partial x\,\partial y} + [x^2 + 4y(k-2y)]\frac{\partial^2 J_k(x,y)}{\partial x^2} + [x^2 - (k-2y)^2]\,J_k(x,y) = 0 \end{aligned}$$

système de deux équations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions $J_k(x, y)$.

En désignant, comme il est d'usage, par z la fonction $J_k(x, y)$ et par p, q, r, s, t les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, le système (s) se ramène à la forme suivante :

$$(s')\qquad \begin{aligned} t &= a_1(x,y)\,r + a_2(x,y)\,p + a_3(x,y)\,q + a_4(x,y)\,z \\ s &= b_1(x,y)\,r + b_2(x,y)\,p + b_3(x,y)\,q + b_4(x,y)\,z \end{aligned}$$

avec

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1(x,y) &= \frac{x^2+8ky}{4y^2} & b_1(x,y) &= -\frac{x^2+4y(k-2y)}{2xy} \\ a_2(x,y) &= \frac{x}{4y^2} & b_2(x,y) &= -\frac{1}{2y} \\ a_3(x,y) &= -\frac{1}{y} & b_3(x,y) &= 0 \\ a_4(x,y) &= \frac{x^2-(k-2y)^2}{4y^2} & b_4(x,y) &= -\frac{x^2-(k-2y)^2}{2xy} \end{aligned}$$

Le système (s') est équivalent au système des quatre équations aux différentielles totales définissant les quatre fonctions z, p, q, r de x et y :

$$(s'')\qquad \begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy \\ dp &= r\,dx + s\,dy \\ dq &= s\,dx + t\,dy \\ dr &= u\,dx + v\,dy \end{aligned}$$

ou $u = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $v = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$, s, t, u, v étant exprimées linéairement par z, p, q, r, d'après les équations (s) et celles que l'on déduit en différenciant par rapport à x et y.

Les quatre conditions d'intégralité du système (s'') se réduisent à une seule, exprimée par la relation

$$(2)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\right)}{\partial x}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q + \frac{\partial u}{\partial p}s + \frac{\partial u}{\partial q}t + \frac{\partial u}{\partial r}v = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p + \frac{\partial v}{\partial p}r + \frac{\partial v}{\partial q}s + \frac{\partial v}{\partial r}u$$

Ici la condition (2) est remplie, le système (s') est donc complètement intégrale et nous pouvons appliquer le théorème de Bouquet [21].

(21) Bouquet, *Bull. Sciences math.*, t. III, 1872, pp. 265-274.

(21) MM. Appell et Rampé de Fériet, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, pp. 44 et suivantes. Paris 1926. Gauthier-Villars, éditeurs

D'après ce théorème notre système admet un système d'intégrales holomorphes dans le voisinage de chaque point régulier $x = x_e$, $y = y_o$ savoir

$$z = z_o + \frac{x - x_o}{1} p_o + \frac{y - y_o}{1} q_o + \frac{(x - x_o)^2}{1.2} r_o + \dots$$

$$p = p_o + \frac{x - x_o}{1} r_o + \dots$$

$$q = q_o + \dots$$

$$r = r_o + \dots$$

où z_o, p_o, q_o, r_o sont des constantes arbitraires.

Il en résulte que dans le domaine de chaque point régulier, c'est-à-dire celui pour lequel les coefficients des équations ne sont pas égales à ∞, la solution générale du système (3) comprend quatre intégrales fondamentales z_1, z_2, z_3, z_4

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4$$

ou C_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ sont des constantes.

Une intégrale z_1 est la fonction $J_k(x\ y)$ elle-même.

III. — *Expressions des fonctions* $J_k(x, y)$ *pour le cas d'indice* k *quelconque*

Considérons maintenant l'indice k quelconque réel ou complexe ; par analogie avec les fonctions d'une seule variable, on peut chercher les solutions du système (s) sous forme d'une intégrale courviligne

$$(1) \qquad I_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b U\, u^{-k-1}\, du$$

où $U = e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)}$ et a et b sont des nombres constants qu'il faut définir.

Si dans l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x_n} u^{-k-1}\, du \qquad \begin{array}{l}(n = 1, 2)\\ x_1 = x_1\\ x_2 = y\end{array}$$

nous intervertissons le signe de la dérivation avec le signe de l'intégration, cette intégrale sera égale à

$$\frac{\partial I_k}{\partial x_n}$$

Si d'autre part nous effectuons la différentiation sous le signe d'intégrale, la même intégrale sera égale à

$$\frac{1}{2}(I_{k-n} - I_{k+n})$$

En effet, pour chaque point régulier du système (s) en se donnant une valeur arbitraire de J_k^o ainsi que les valeurs de $\frac{\partial J_k^o}{\partial x}$, $\frac{\partial J_k^o}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 J_k^o}{\partial x\, \partial y}$ on peut déterminer pour ce point les valeurs des dérivées $\frac{\partial^2 J_k^o}{\partial x\, \partial y}$, et en différenciant les équations (s) exprimer à l'aide de J_k^o, $\frac{\partial J_k^o}{\partial x}$ ..... toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur de la fonction $J_k(x, y)$.

On obtient ainsi le développement de la fonction $J_k(x, y)$ en série suivant les puissances de $x - x_o$, $y - y_o$.

Ceci montre que l'intégrale (1) pour toutes les valeurs de a et b satisfait à l'équation (2) du § III de la première partie, savoir

$$(2) \qquad \frac{\partial J_k}{\partial x_n} = \frac{1}{2}\left(J_{k-n} - J_{k+n} \right)$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\partial U}{\partial u} u^{-k}\, du$$

D'une part, l'intégration par parties donne

$$\left| \frac{1}{2\pi i} U u^{-k} \right|_a^b + k\, I_k$$

D'autre part, en effectuant la différentiation sous le signe d'intégrale on trouve

$$\frac{x}{2}\left(I_{k-1} + I_{k+1} \right) + 2\frac{y}{2}\left(I_{k-2} + I_{k+2} \right)$$

Il en résulte que l'intégrale (1) qui satisfait toujours à l'équation (2) va satisfaire aussi à l'équation (3) c'est-à-dire

$$(3) \qquad 2\, k\, I_k = \sum_{n=1}^{n=2} n\, x_n \left[I_{k-n} + I_{k+n} \right]$$

à condition de choisir les constantes a et b telles que

$$(4) \qquad \left| U u^{-k} \right|_a^b = 0 .$$

En répétant le raisonnement de Sonine[22] et en désignant par $R(t)$ la partie réelle d'une quantité complexe t, par α et β, deux constantes telles que

$$(5) \qquad \begin{array}{lll} R(x\,\alpha^1) < 0 & R(x\,\beta^1) < 0 & \\ R(y\,\alpha^2) < 0 & R(y\,\beta^2) < 0 & \text{et } \rho = e^{\frac{i\pi}{2}} \end{array}$$

la condition (4) fournit trois systèmes des valeurs pour les limites de a et b, savoir :

$$(6) \qquad \begin{array}{lll} 1) & a = \infty\,\alpha & ,\quad b = \infty\,\beta \\ 2) & a = \dfrac{0}{\rho\,\beta} & ,\quad b = \dfrac{0}{\rho\,\alpha} \\ 3) & a = \dfrac{0}{\rho\,\beta} & ,\quad b = \infty\,\alpha \end{array}$$

où le signe ∞ désigne une valeur positive réelle infinie.

Conformément à cela on obtient trois solutions particulières du système (2) et (3) sous forme d'intégrales définies, à savoir :

$$(7) \qquad I'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,\alpha}^{\infty\,\beta} e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

$$(8) \qquad I''_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{0}{\rho\,\beta}}^{\frac{0}{\rho\,\alpha}} e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

---

(22) Sonine, loc. cit.

$$(9) \qquad I'''_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{o}{\rho\beta}}^{\infty\alpha} e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

où $u^k = e^{k \log u}$ et $\log u$ est réel pour u réel positif.

Si maintenant on choisit le chemin d'intégration sous forme d'une ligne sans nœuds allant à l'infini, ou venant ou revenant au point $u = o$, en posant

$$\beta = \alpha e^{\frac{2\pi i}{2}}$$

et remplaçant dans cette expression α successivement par

$$\alpha_0 = \alpha \; ; \quad \alpha_1 = \alpha e^{\pi i}$$

Les intégrales (7) et (8) donneront quatre solutions indépendantes les unes des autres du système (2) et (3)

$$(10) \qquad J_k^{(0)}(x, y) \quad , \quad J_k^{(1)}(x, y)$$

$$(11) \qquad J_k^{(2)}(x, y) \quad , \quad J_k^{(3)}(x, y)$$

où l'indice k n'est pas un entier.

En faisant la somme des intégrales (10) on trouve

$$(12) \qquad J_k^{(0)}(x, y) + J_k^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

Pour k entier, le chemin curviligne d'intégration, partant du point $\infty\alpha$ et revenant au même point, en suivant la même direction après avoir contourné le point $u = o$ (sans cela l'intégrale serait égale à zéro), se réduit à un contour arbitraire fermé autour de ce même point, et l'intégrale (12) devient

$$J_k(x, y)$$

En prenant la somme des intégrales (11) on trouve

$$(13) \qquad J_k^{(2)}(x, y) + J_k^{(3)}(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{o}{\rho\alpha}}^{\frac{o}{\rho\alpha}} e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

Pour k entier, comme précédemment cette intégrale devient $J_k(x, y)$.

Par conséquent, pour k entier on a

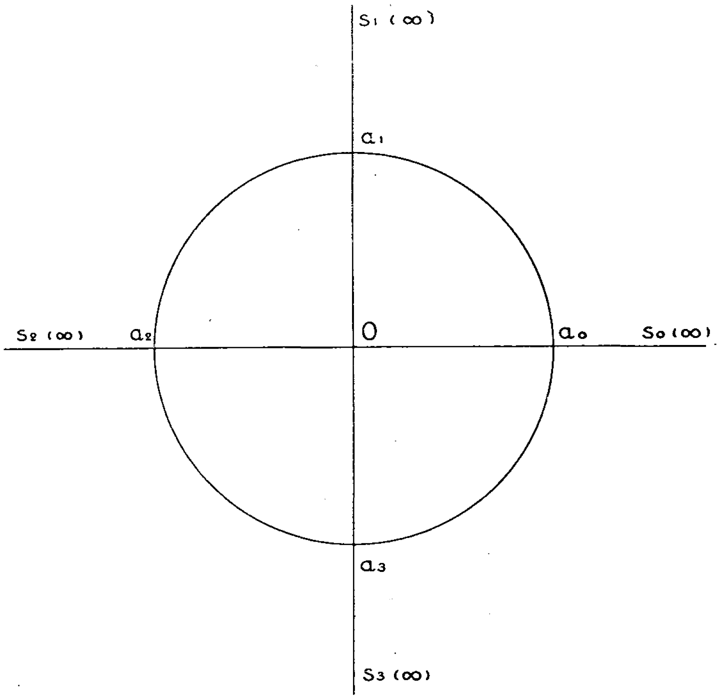
$$(14) \qquad J_k^{(0)}(x, y) + J_k^{(1)}(x, y) = J_k^{(2)}(x, y) + J_k^{(3)}(x, y)$$

Cette relation montre qu'on peut prendre comme nouvelle solution, linéairement indépendante des autres, du système des équations (2) et (3), l'intégrale (7)

$$(15) \qquad H_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{o}{\rho\alpha}}^{\infty\alpha} e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

(7) Akimoff, loc. cit. (pour n variables).

En effet, prenons un cercle de rayon 1 décrit autour du point O et soit a_0, a_1, a_2, a_3, les points d'intersection de ce cercle



avec les droites passant par l'origine O et formant avec l'axe réel positif Os les angles 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Soit encore

$$\text{(16)} \qquad I_{(c)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)} u^{-k-1}\, du$$

c désignant un chemin d'intégration quelconque arbitrairement choisi parmi ceux qui conduisent O en O ou s en O par exemple.

D'après ces notations on a

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} J_k^{(0)}(x, y) &= I(s_0\ a_0\ a_1\ a_2\ s_2) \\ J_k^{(1)}(x, y) &= I(s_2\ a_2\ a_3\ a_0\ s_0) \\ J_k^{(2)}(x, y) &= I(O,\ a_1\ a_2\ a_3\ O) \\ J_k^{(3)}(x, y) &= I(O,\ a_1\ a_0\ a_1\ O) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_k(x, y) &= J_k^{(0)}(x, y) + J_k^{(1)}(x, y) = I(s_0\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_0\ s_0) \\ J_k^{(4)}(x, y) &= J_k^{(2)}(x, y) + J_k^{(3)}(x, y) = I(O\ \ a_3\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ O) \\ H_k(x, y) &= I(O\ \ a_3\ a_0\ s_0) \end{aligned}$$

d'où d'après notre convention sur la valeur de $u^k = e^{k \log u}$ il vient

$$
\begin{aligned}
&J_k(x, y) = I(a_3\, a_0) - I(a_3\, a_2\, a_1\, a_0) + (1 - e^{2k\pi i})\, I(a_0\, s_0) \\
(18) \qquad &J_k^{(4)}(x, y) = (1 - e^{-2k\pi i})\, I(o\, a_3) + I(a_3\, a_0) - e^{-2k\pi i}\, I(a_3\, a_2\, a_1\, a_0) \\
&H_k(x, y) = I(O\, a_3) + I(a_3\, a_0) + I(a_0\, s_0)
\end{aligned}
$$

où les facteurs $e^{2k\pi i}$ proviennent de la rotation du point $u = o$ autour de l'origine.

Des relations (18) on tire

$$(19) \qquad J_k^{(4)}(x, y) - J_k(x . y) = (1 - e^{-2k\pi i})\, H_k(x, y)$$

Cette relation montre que la troisième solution $H_k(x, y)$ s'exprime linéairement au moyen de deux autres.

En suivant le raisonnement de Sonine on trouve pour $H_k(x, y)$ l'expression

$$(20) \qquad H_k(x, y) = e^{-k\pi i}\, \frac{J_{-k}(x, -y) - e^{-k\pi i}\, J_k(x, y)}{1 - e^{-2k\pi i}}$$

ou bien

$$= \frac{J_{-k}(x, -y) - e^{-k\pi i}\, J_k(x, y)}{2\, i \sin k\pi}$$

qui est la généralisation de la fonction de Hankel pour le cas de n variables indiquée par Akimoff (7).

Elle conduit à la fonction généralisée

$$Y_k(x, y) = \frac{\cos k\pi\, J_k(x, y) - J_{-k}(x, -y)}{\sin k\pi}$$

de Neumann (23).

IV. — *Expressions de la fonction* $J_k(x, y)$ *sous forme d'intégrales entre les limites réelles*

Considérons à nouveau l'intégrale (7) du § précédent

$$(1) \qquad J_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)}\, u^{-k-1}\, du$$

et proposons-nous de la transformer de façon que le chemin d'intégration devienne réel.

En posant $\qquad \alpha = \beta = e^{(\psi - 2\pi) i}$

imaginons à nouveau un cercle de rayon égal à un et ayant l'origine des coordonnées comme centre.

Soit a le point d'intersection de ce cercle avec une droite $s(\infty)$ passant par l'origine et formant l'angle ψ avec l'axe réel positif.

L'intégrale (1) devient alors

$$(2) \qquad 2\pi i\, J_k(x, y) = e^{2k\pi i} \int_s^a + \int_{(a, a)} + \int_a^s$$

le chemin d'intégration (a, a) étant une circonférence parcourue dans le sens positif de $\varphi = \psi - 2\pi$ jusqu'à $\varphi = \psi$ de sorte que sur ce chemin d'intégration $u = e^{\varphi i}$.

---

(22) Sonine, loc. cit.
(23) Niels Nielsen, p. 11, 16 et 124.
(7) Akimoff, loc. cit.

En faisant avec Sonine dans la première et dans la troisième intégrale $u = e^{\theta + \psi i}$ et en remarquant que ces deux intégrales diffèrent seulement d'un facteur $-e^{2k\pi i}$,
on trouve pour leur somme

$$(3) \qquad 2i(-e^{k(\pi-\psi)i}\sin k\pi)\int_0^\infty e^{\frac{x}{2}(e^{\theta+\psi i} - e^{-(\theta+\psi i)}) + \frac{y}{2}(e^{2(\theta+\psi i)} - e^{-2(\theta+\psi i)}) - k\Theta}\, d\Theta$$

Quant à la seconde intégrale, en posant

$$\begin{array}{lll} & \varphi = \psi - \pi + \sigma & \text{de sorte que} \\ \text{pour} & \varphi = \psi - 2\pi & \sigma = -\pi \\ \text{et pour} & \varphi = \psi & \sigma = \pi \end{array}$$

On a

$$(4) \qquad i\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) + \frac{y}{2}(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}) - ki\varphi}\, d\varphi = i\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{ix\sin\varphi + iy\sin 2\varphi - ki\varphi}\, d\varphi$$

$$= i\,e^{k(\pi-\psi)i}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ix\sin(\psi+\sigma) + iy\sin 2(\psi+\sigma) - ki\sigma}\, d\sigma$$

d'où en réduisant l'intégration aux limites 0 et π il vient

$$(5) \qquad i\,e^{k(\pi-\psi)i}\left\{\int_0^\pi e^{-ix(\sin\psi\cos\sigma + \cos\psi\sin\sigma) + iy(\sin 2\psi\cos 2\sigma + \cos 2\psi\sin 2\sigma) - ki\sigma}\, d\sigma\right.$$
$$\left. + \int_0^\pi e^{-ix(\sin\psi\cos\sigma - \cos\psi\sin\sigma) + iy(\sin 2\psi\cos 2\sigma - \cos 2\psi\sin 2\sigma) + ki\sigma}\, d\sigma\right\}$$

$$= 2i\,e^{k(\pi-\psi)i}\int_0^\pi e^{-ix\sin\psi\cos\sigma + iy\sin 2\psi\cos 2\sigma}\cos(x\cos\psi\sin\sigma - y\cos 2\psi\sin 2\sigma + k\sigma)\, d\sigma$$

et l'on a pour $J_k(x, y)$ l'expression

$$(6) \qquad J_k(x,y) = \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{\pi}\left\{\int_0^\pi e^{-ix\sin\psi\cos\sigma + iy\sin 2\psi\cos 2\sigma}\cos(x\cos\psi\sin\sigma - y\cos 2\psi\sin 2\sigma + k\sigma)\, d\sigma\right.$$
$$\left. - \sin k\pi\int_0^\infty e^{\frac{x}{2}(e^{\theta+\psi i} - e^{(\theta+\psi i)}) + \frac{y}{2}(e^{2(\theta+\psi i)} - e^{-2(\theta+\psi i)}) - k\Theta}\, d\Theta\right.$$

où comme précédemment on suppose

$$R(x\,e^{\psi i}) < 0 \quad , \quad R(y\,e^{2\psi i}) < 0$$

avec le choix de ψ cette formule est applicable pour toutes les valeurs de x et y différentes de zéro.

Cette formule, dans le cas d'une variable, a été indiquée par Sonine, et dans le cas de plusieurs variables par Akimoff.

En posant dans l'intégrale (6) $\psi = \pi$ ou $\psi = 0$

avec $\qquad R(-x) < 0 \qquad R(y) < 0$

on trouve l intégrale (6) du § 1 (première partie).

De même pour

$$R(x) < 0 \qquad R(y) < 0.$$

on a l'intégrale (6') pour le cas d'une variable indiquée par Schläfli, et pour le cas de n variables et k entier par P, Appell.

Enfin pour des valeurs imaginaires de x et y on peut prendre $\psi = \frac{\pi}{2}$

avec $\qquad R(ix) < 0 \quad , \quad R(i^2 y) < 0.$

ou bien $\psi = \frac{3\pi}{2}$

avec $\qquad R(-i)x < 0 \quad , \quad R(-i)^2 y < 0.$

et l'on obtient d'autres expressions pour la fonction $J_k(x, y)$ analogues aux précédentes.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces intégrales.

V. — *Système fondamental d'intégrales des équations* (s) *dans le voisinage du point singulier* $y = o$

L'expression de la fonction $J_k(x, y)$ ou bien $J_k^{(p)}(x, y)$. ($p = 0, 1, 2, 3$) sous forme d'intégrale définie montre que les points singuliers de ces fonctions sont déterminées par les équations

$$x = \infty \quad , \quad y = \infty \quad \text{et} \quad y = 0$$

Ces fonctions reprennent les mêmes valeurs lorsqu'une des deux variables fait un tour dans le domaine complexe de la variable, soit dans le sens direct autour du point singulier correspondant c'est-à-dire $x = \infty$ ou $y = \infty$, soit dans le sens négatif autour du point $y = o$.

Supposons que la variable y fasse un tour dans le sens direct autour du point $y = \infty$, ou ce qui est la même chose, dans le sens négatif, autour du point $y = o$. L'argument de y augmente de 2π et vu la condition

$$R(y\alpha^2) < 0$$

α augmentera de $\frac{2\pi}{2}$, et les fonctions

$$J_k^{(0)}(x, y) \quad , \quad J_k^{(1)}(x, y) \quad \text{se changent en} \quad J_k^{(1)}(x, y) \quad , \quad J_k^{(2)}(x, y)$$

Quant aux fonctions

$$J_k^{(3)}(x, y) \quad ; \quad J_k^{(1)}(x, y) \quad \text{elles deviennent} \quad e^{2\pi k i} J_k^{(2)}(x, y) \quad , \quad e^{-2k\pi i} J_k^{(0)}(x, y)$$

Ceci montre que chaque fonction

$$J_k^{(m)}(x, y) \qquad \text{ou} \qquad J_k^{(n+m)}(x \ \ y)$$

se déduit d'une seule d'entre elles, soit

$$J_k^{(0)}(x, y) \qquad \text{ou} \qquad J_k^{(n)}(x, y) \qquad\qquad (n = 1, 2)$$

au moyen des circulations de la variable x ou y dans le sens négatif effectuée m fois $[m = o, 1)$ autour du point singulier $y = o$

Donc, en donnant à x une valeur arbitraire, constante et finie, on peut chercher conformément à la méthode de Fuchs, un système d'intégrales fondamentales dans le voisinage du point singulier $y=o$ admettant un multiplicateur constant μ, soit

$$\bar{I}_k(x, y) = \mu\, I_k(x, y) \tag{1}$$

En désignant par un trait au-dessus de la lettre $\bar{I}_k^{(p)}(x, y)$, $(p = 0, 1, 2, 3)$, les nouvelles valeurs que prennent les fonctions, ou éléments du système quand le tour est accompli, on a

$$\bar{J}_k^{(0)}(x, y) = J_k^{(1)}(x, y) \quad ; \quad \bar{J}_k^{(1)}(x, y) = e^{-2\pi k i} J_k^{(0)}(x, y)$$

$$\bar{J}_k^{(1)}(x, y) = J_k^{(2)}(x, y) \quad ; \quad \bar{J}_k^{(3)}(x, y) = e^{-2\pi k i} J_k^{(2)}(x. y)$$

Mais pour k non entier toute solution des équations différentielles du système (3) peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental et il vient

$$(2) \quad \begin{aligned} I_k(x, y) &= \lambda_0 J_k^{(0)}(x, y) + \lambda_1 J_k^{(1)}(x, y) + \lambda_2 J_k^{(2)}(x, y) + \lambda_3 J_k^{(3)}(x, y) \\ \bar{I}_k(x, y) &= \lambda_0 \bar{J}_k^{(0)}(x, y) + \lambda_1 \bar{J}_k^{(1)}(x, y) + \lambda_2 \bar{J}_k^{(2)}(x, y) + \lambda_3 \bar{J}_k^{(3)}(x, y) \end{aligned}$$

De ces équations et de l'équation (1) on tire

$$(3) \quad (\lambda_1 e^{-2\pi k i} - \lambda_0 \mu) J_k^{(0)}(x, y) + (\lambda_0 - \lambda_1 \mu) J_k^{(1)}(x, y) + (\lambda_3 e^{2\pi k i} - \lambda_2 \mu) J_k^{(2)}(x, y) + (\lambda_2 - \lambda_3 \mu) J_k^{(3)}(x, y) = 0$$

d'où comme les $J_k^{(p)}(x, y)$ $(p = 0, 1, 2, 3)$ sont linéairement indépendantes, on conclut :

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 e^{-2\pi k i} - \lambda_0 \mu &= 0 \\ \lambda_0 - \lambda_1 \mu &= 0 \\ \lambda_3 e^{2\pi k i} - \lambda_2 \mu &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \mu &= 0 \end{aligned}$$

et enfin, après l'élimination des λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, nous obtenons deux équations équivalentes à l'équation fondamentale de Fuchs, savoir

$$(5) \quad \begin{aligned} e^{-2\pi k i} - \mu^2 &= 0 \\ e^{2\pi k i} - \mu^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ayant ainsi quatre valeurs différentes de μ

$$(6) \quad \begin{aligned} \mu_0 &= e^{\frac{-2\pi k i}{2}} & \mu_2 &= e^{\frac{2\pi k i}{2}} \\ \mu_1 &= e^{\frac{-2\pi(k-1)i}{2}} & \mu_3 &= e^{\frac{2\pi(k+1)i}{2}} \end{aligned}$$

qui permettent de déterminer quatre systèmes des valeurs de λ_p $(p = 0, 1, 2, 3)$

$$(7) \quad \begin{matrix} \lambda_0^{(0)}, & \lambda_1^{(0)}, & 0, & 0 \\ \lambda_0^{(1)}, & \lambda_1^{(1)}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_2^{(2)}, & \lambda_3^{(2)} \\ 0, & 0, & \lambda_2^{(3)}, & \lambda_3^{(3)} \end{matrix}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_p^{(q)} &= \lambda_0\, \mu_q^{-p} \\ \lambda_{n+p}^{(n+q)} &= \lambda_n\, \mu_{n+q}^{-p} \end{aligned}$$

$p = 0, 1 \ldots n-1$; $q = 0, 1 \ldots n-1$ et $n = 2$

on trouve pour le système fondamental d'intégrales ou dans le voisinage du point $y = o$ le système suivant

$$
\begin{aligned}
I_k^{(0)}(x, y) &= J_k^{(0)}(x, y) + \mu_0^{-1} J_k^{(1)}(x, y) \\
I_k^{(1)}(x, y) &= J_k^{(0)}(x, y) + \mu_1^{-1} J_k^{(1)}(x, y) \\
I_k^{(2)}(x, y) &= J_k^{(2)}(x, y) + \mu_2^{-1} J_k^{(3)}(x, y) \\
I_k^{(3)}(x, y) &= J_k^{(2)}(x, y) + \mu_3^{-1} J_k^{(3)}(x, y)
\end{aligned}
$$

s''

VI. — *Formule d'addition des fonctions* $J_k(x, y)$

L'intégrale (7) du § III, si nous remplaçons successivement x par $x + x_1$ et y par $y + y_1$, devient

(1) $$I(x + x_1, y + y_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\frac{x}{2}(u - \frac{1}{u}) + \frac{y}{2}(u_2 - \frac{1}{u_2})} . e^{\frac{x_1}{2}(u - \frac{1}{u}) + \frac{y_1}{2}(u_2 - \frac{1}{u_2})} u^{-k-1} du$$

avec les conditions :

(2) $$R[(x + x_1)\alpha] < o \quad , \quad R[(x + x_1)\beta] < o.$$
$$R[(y + y_1)\alpha^2] < o \quad , \quad R[(y + y_1)\beta^2] < o$$

De ces relations on tire

(2) $$R\left[x_1 \alpha (1 + \frac{x}{x_1})\right] < o \quad , \quad R\left[x_1 \beta (1 + \frac{x}{x_1})\right] < o$$
$$R\left[y_1 \alpha^2 (1 + \frac{y}{y_1})\right] < o \quad , \quad R\left[y_1 \beta_2 (1 + \frac{y}{y_1})\right] < o.$$

ce qui montre que pour chaque valeur des x et y en admettant que le

$$\text{mod.}\ \frac{x}{x_1} < 1 \qquad ; \qquad \text{mod.}\ \frac{y}{y_1} < 1$$

seraient satisfaites non seulement les conditions (2), mais aussi les conditions telles que

(3) $$R[x_1 \alpha] < o \quad ; \quad R[x_1 \beta] < o$$
$$R[y_1 \alpha^2] < o \quad ; \quad R[y_1 \beta^2] < o.$$

Par conséquent, en développant l'exponentielle, qui figure sous le signe d'intégration, en série, il vient

(4) $$I_k(x + x_1, y + y_1) = \sum_{q_2 = -\infty}^{q_2 = +\infty} J_{q_2}(x, y) \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\frac{x_1}{2}(u - \frac{1}{u}) + \frac{y_1}{2}(u^2 - \frac{1}{u^2})} u^{q_2 - k - 1} du$$

c'est-à-dire

(4)' $$I_k(x + x_1, y + y_1) = \sum_{q_2 = -\infty}^{q_2 = +\infty} J_{k - q_2}(x_1, y_1)\, J_{q_2}(x, y)$$

qui est la formule d'addition des fonctions $J_k(x, y)$.

Ce développement exige que

(5) $$\text{mod.}\ x < \text{mod.}\ y \quad \text{et} \quad \text{mod.}\ x_1 < \text{mod.}\ y_1$$

Pour une variable cette formule est indiquée par Schläfli (5).

Une généralisation de cette formule pour le cas de plusieurs variables a été donnée par M. Akimoff.

Pour l'indice k entier le chemin curviligne d'intégration dans l'expression de $J_k(x, y)$ sous forme d'intégrale se réduit à un contour fermé autour de l'origine et la condition (5) disparaît.

Reprenons le développement 1 du § I.

$$(6) \qquad e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x, y)\, u^k$$

et faisons $x = o$, il vient d'une part

$$(7) \qquad e^{\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(o, y)\, u^k$$

avec

$$J_k(o. y) = \frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} \cos(ku - y \sin 2u)\, du$$

D'autre part

$$(8) \qquad e^{\frac{y}{2}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{q_2-\infty}^{q_2=+\infty} J_{q_2}(y)\, u^{2q_2}$$

En comparant (7) et (8) on a pour l'indice k multiple de q_2, $k = 2q_2$

$$(9) \qquad J_k(o, y) = J_{q_2}(y)$$

et

$$(10) \qquad J_k(o, y) = 0$$

dans tous les autres cas.

Si maintenant dans la formule (4)' nous posons

$$x_1 = y = o \qquad \text{et} \quad y_1 = y$$

on a

$$(11) \qquad J_k(x, y) = \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} J_{k-q_2}(o, y)\, J_{q_2}(x)$$

Cette expression en tenant compte des relations (9) et (10) devient

$$(11)' \qquad J_k(x, y) = \sum_{q_2=-\infty}^{q_2=+\infty} J_{\frac{k-q_2}{2}}(y)\, J_{q_2}(x)$$

ou bien

$$(11)'' \qquad J_k(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} J_{k-2m}(x)\, J_m(y)$$

qui est la formule (D) du § 1.

---

(5) Schläfli. Sulle relazione tra diversi integrali definiti. *Annali di Matematica*, t. I, 1868, p. 237.
(4) Akimoff. *Comptes rendus*, t. 163, p. 28.
(22) Sonine, Loc. cit.

VII. — *Développement en série à l'aide des fonctions de Bessel à deux variables*

Dans le § VI de la première partie de ce travail, nous avons indiqué plusieurs développements en série de diverses expressions algébriques au moyen des fonctions de Bessel à plusieurs variables.

Il suffit de faire dans ces séries $n = 2$, pour obtenir celles qui correspondent aux développements à l'aide de fonctions à deux variables.

C'est ainsi, en faisant dans les séries (3) et (4), $\varphi = 0, \frac{\pi}{2} \ldots\ldots$
on obtient les développements pour 1, $\cos x$, $\sin x$, ...
à l'aide des fonctions $J_k(x, y)$.

Les séries (6) et (7) sont des généralisations des certains développements indiqués par C Neumann.

Nous indiquerons quelques autres.

a) En multipliant membre à membre l'égalité

(1) $$e^{\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(x, y)\, u^k$$

et la suivante :

(2) $$e^{\frac{x}{2} u^{-1} + \frac{y}{2} u^{-2}} = \sum_{r=0}^{=+\infty} \frac{v_r(x, y)}{2^r\, r!}\, u^{-r}$$

puis en comparant les termes de mêmes puissances de ce nouveau développement avec les termes du développement

(3) $$e^{\frac{x}{2} u + \frac{y}{2} u^2} = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{u^k}{2^k\, k!}\, v_k(x, y)$$

on trouve

(4) $$\frac{v_k(x, y)}{2^k\, k!} = \sum_{r=0}^{r=+\infty} \frac{v_r(x, y)}{2^r\, r!}\, J_{k+r}(x, y)$$

Ce développement pour le cas d'une variable a été indiqué par Lommel.

b) Remplaçons dans le développement (1) x et y par

$$x\,(t^1 + t^{-1}) \quad \text{et} \quad y\,(t^2 + t^{-2})$$

il vient d'une part

(5) $$e^{\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k\left[x\,(t^1 + t^{-1}),\ y\,(t^2 + t^{-2})\right] u^k$$

D'autre part

(6) $$e^{\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\left(u - \frac{1}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\left(u^2 - \frac{1}{u^2}\right)} = e^{\frac{x}{2}\left(t\,u - \frac{1}{t\,u}\right) + \frac{y}{2}\left((t\,u)^2 - \frac{1}{(t\,u)^2}\right)}\ e^{\frac{x}{2}\left(\frac{u}{t} - \frac{t}{u}\right) + \frac{y}{2}\left(\frac{u^2}{t^2} - \frac{t^2}{u^2}\right)}$$

Par conséquent

(7) $$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k\left[x\,(t + t^{-1}),\ y\,(t^2 + t^{-2})\right] u^k = \sum_{p_1=-\infty}^{p_1=+\infty} J_{p_1}(x, y)\, t^{p_1}\, u^{p} \sum_{p_2=-\infty}^{p_2=+\infty} J_{p_2}(x, y)\, t^{p_2}\, u^{-p_2}$$

D'où, en comparant les coefficients des termes de mêmes puissances de u, on a

$$p_2 = p_1 + k \tag{8}$$

$$J_k \left[x(t + t^{-1}), y\left((t^2 + t^{-2}\right) \right] = \sum_{p_1=-\infty}^{p_1=+\infty} J_{p_1}(x, y)\, J_{-p_1+k}(x, y)\, t^{2p_1-k} \tag{9}$$

Posons dans cette formule $t = e^{i\varphi}$ et changeons k et p successivement en $2k$ et $p + k$ puis en $2k + 1$ et $p + k + 1$.

On tire deux formules

$$(10)\quad \begin{cases} J_{2k}(2x\cos\varphi, 2y\cos 2\varphi) = \left[J_k(x, y) \right]^2 + 2 \displaystyle\sum_{p_1=1}^{p_1=+\infty} J_{k+p_1}(x, y)\, J_{k-p_1}(x, y) \cos 2p_1\varphi \\ J_{2k+1}(2x\cos\varphi, 2y\cos 2\varphi) = 2 \displaystyle\sum_{p_1=0}^{p_1=+\infty} J_{k+p_1+1}(x, y)\, J_{k-p_1}(x, y) \cos(2p_1+1)\varphi \end{cases}$$

pour le cas d'une variable indiquées par Schläfli.

De ces relations (10) on tire

$$\frac{1}{\pi}\int_o^\pi J_{2k}(2x\cos\varphi, 2y\cos 2\varphi) \cos 2p_1\varphi = J_{k+p_1}(x, y)\, J_{k-p_1}(x, y) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_o^\pi J_{2k+1}(2x\cos\varphi, 2y\cos 2\varphi) \cos(2p_1+1)\varphi = J_{k+p_1+1}(x, y)\, J_{k-p_1}(x, y) \tag{12}$$

La première de ces intégrales en posant $p = o$ donne

$$\left[J_k(x, y) \right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_o^\pi J_{2k}(2x\cos\varphi, 2y\cos 2\varphi)\, d\varphi \tag{13}$$

Cette formule pour le cas d'une variable est donnée par C. Neumann (23').

De même, si dans la série (7) du § VI, nous remplaçons $x_1\, x_2, \ldots\ldots$ successivement par $2x_1\cos\varphi$, $2x_2\cos 2\varphi \ldots.$, puis intégrons entre o et π après avoir multiplié les deux parties par $\cos 2p\varphi$ ou $\cos(2p + 1)\varphi$, nous obtiendrons d'autres séries sous forme de produits des fonctions de Bessel à plusieurs variables.

Les séries ainsi obtenues sont des généralisations des séries de C. Neumann, Kapteyn et Schlemlich.(24)

(c) Si l'on change dans (1) u en $-u^{-1}$ et si l'on multiplie cette nouvelle expression par la primitive, il vient

$$e^{\frac{2x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k J_k^2(x, y) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} B_k u^k + \sum_{k=1}^{k=+\infty} B_{-k} u^{-k} \tag{14}$$

(23') C. Neumann, *Theorie der Bessel'schen Fonctionen*, 1867, p. 39.

(24) Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel. *Annales de l'Ecole Normale*, 3e série, t. 10, 1893.

Mais
$$e^{\frac{2x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(2x)\, u^k$$

D'où, en développant et égalant les termes indépendants de u on a

$$J_0(2x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k J_k^2(x, y) \tag{15}$$

En prenant la dérivée par rapport à x ou y, on trouve deux formules intéressantes

$$\text{(16)} \quad \begin{cases} J_1(2x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^{k-1} J_k(x, y)\, J_{k-1}(x, y) \\ 0 = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k J_k(x, y) \frac{\partial J_k(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

Cette dernière formule exprime une fonction qui dans un domaine déterminé prend une seule valeur — zéro.

Enfin si dans l'exponentielle de la relation (1) on remplace x et y par $2x$ et $2y$, puis qu'on identifie avec le carré de l'exponentielle, on obtient [18].

$$J_{\mp k}(2x\ 2y) = \varepsilon_k \sum_{p=0}^{p=+\infty} J_{\mp(k+p)}(x, y)\, J_{\pm p}(x, y) \tag{17}$$

avec $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$.

Formule de duplication de l'argument pour la fonction $J_k(x, y)$

Pour une variable, cette formule se réduit à la formule de E. Lommel [25].

(18) Jekhowsky, *Comptes rendus*, loc. cit.
(25) E. Lommel. *(Besselsche Funetionnen*, p. 31, 48 (§ 12, 15).

Vu et approuvé :

Paris, le 14 mai 1927.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

C. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 mai 1927.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

S. CHARLÉTY.

ERRATA

Page 2, la formule (4) : Au lieu de $\sum\limits_{n=1}^{n=\pi}$, il faut lire : $\sum\limits_{n=1}^{n=n}$

Page 2, ligne 15 : Au lieu de $J_{q_n}(xn)$, il faut lire : $J_{q_n}(x_n)$

Page 16, ligne 10 : Au lieu de $\frac{-p\,\varepsilon^{p}}{2} = 1$, il faut lire $\frac{-p\,\varepsilon_{p}}{2} = 1$

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DEUXIÈME PARTIE