

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

G. JUVET

**Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur  
une généralisation du théorème de Jacobi**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1926

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1926\\_\\_69\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__69__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N<sup>o</sup> D'ORDRE  
1895

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**M. G. JUVET**

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi.

2<sup>e</sup> THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

---

Soutenues le **1926**, devant la **Commission d'Examen.**

---

MM. CARTAN, *Président.*

VESSIOT, }  
MONTEL, } *Examineurs.*

---

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

*3 et 3 bis, Place de la Sorbonne*

1926

# FACULTÉ des SCIENCES de L'UNIVERSITÉ de PARIS

MM.

Doyen ..... M. MOLLIARD, *Professeur*. Physiologie végétale.

Doyen honoraire ... P. APPELL.

Profes<sup>rs</sup> honoraires.. {  
P. PUISEUX.  
V. BOUSSINESQ.  
A. JOANNIS.  
H. LE CHATELIER.  
H. LEBESGUE.  
A. FERNBACH.

Professeurs ..... {  
ÉMILE PICARD ..... Analyse supérieure et algèbre supérieure.  
G. KOENIGS ..... Mécanique physique et expérimentale.  
E. GOURSAT ..... Calcul différentiel et calcul intégral.  
P. JANET ..... Electrotechnique générale.  
F. WALLERANT ..... Minéralogie.  
H. ANDOYER ..... Astronomie.  
P. PAINLEVÉ ..... Mécanique analytique et mécanique céleste.  
E. HAUG ..... Géologie.  
Gabriel BERTRAND .. Chimie biologique.  
M<sup>me</sup> P. CURIE..... Physique générale et radioactivité.  
M. CAULLERY ..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).  
C. CHABRIÉ ..... Chimie appliquée.  
G. URBAIN ..... Chimie minérale.  
Émile BOREL ..... Calcul des probabilités et Phys. mathém.  
L. MARCHIS ..... Aviation.  
Jean PERRIN ..... Chimie physique.  
H. ABRAHAM ..... Physique.  
E. CARTAN ..... Géométrie supérieure.  
L. LAPICQUE ..... Physiologie générale  
E. VESSIOT ..... Théorie des groupes et calcul des variations.  
A. COTTON ..... Physique générale.  
J. DRACH ..... Application de l'analyse à la géométrie.  
Charles FABRY ..... Physique.  
Charles PÉREZ ..... Zoologie.  
A. LEDUC ..... Physique théorique et physique céleste.  
Léon BERTRAND ... Géologie appliquée et géologie régionale.  
R. LESPIEAU ..... Théories chimiques.  
E. RABAUD ..... Biologie expérimentale.  
P. PORTIER ..... Physiologie comparée.  
É. BLAISE ..... Chimie organique.  
P.-A. DANGEARD ... Botanique.  
C. MAURAIN ..... Physique du globe.  
P. MONTEL ..... Mécanique rationnelle.  
P. WINTREBERT ... Anatomie et histologie comparées.  
O. DUBOSCQ ..... Biologie maritime.  
M. TIFFENEAU ..... Chimie (Enseignement P.C.N.)  
G. JULIA ..... Mathématiques générales.  
A. JOB ..... Chimie générale.  
N. .... Géographie physique.

E. HÉROUARD ..... Zoologie.  
Rémy PERRIER .... Zoologie (Enseignement P.C.N.)  
G. SAGNAC ..... Physique théorique et physique céleste.  
E. PÉCHARD ..... Chimie (Enseignement P.C.N.).  
V. AUGER ..... Chimie analytique.  
M. GUICHARD ..... Chimie minérale.  
A. GUILLET ..... Physique.  
G. MAUGUIN ..... Minéralogie.  
L. BLARINGHEM ... Botanique.  
A. MICHEL-LÉVY ... Pétrographie.  
A. DEREIMS . . . . Géologie.  
R. DONGIER . . . . Physique du globe.

Secrétaire ..... Daniel TOMBECK.





**A MES PARENTS**



A Monsieur ERNEST VESSIOT

*Hommage de reconnaissance et  
de respectueux dévouement.*  
G. JUVET.





# PREMIÈRE THÈSE

---

## SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES PARTIELLES ET SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE JACOBI

---

### INTRODUCTION

---

*Le calcul fonctionnel dont le livre de M. P. Lévy <sup>(1)</sup> donne un tableau aussi complet que possible, pose un certain nombre de problèmes dont les solutions peuvent avoir les conséquences les plus heureuses tant pour l'extension du calcul fonctionnel lui-même que pour ses applications à la physique mathématique. C'est un de ces problèmes que nous avons tenté de résoudre.*

*On connaît la liaison entre les questions du calcul des variations des intégrales simples, les équations canoniques qui leur sont attachées et la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles, dite première méthode de Jacobi. Si l'on prend une intégrale multiple et qu'on écrive les conditions pour qu'elle soit stationnaire, on obtient des équations aux dérivées partielles du second ordre, qu'on peut aussi mettre sous forme canonique, mais de deux manières. De plus, il existe une équation aux dérivées fonctionnelles partielles qui généralise l'équation aux dérivées partielles dite de Jacobi, satisfaite par les intégrales simples stationnaires. Peut-on tirer parti de cette équation ou plutôt des solutions de cette équation pour la résolution des nouvelles équations canoniques, comme on tire parti des intégrales complètes de l'équation de Jacobi pour la résolution des équations canoniques classiques? Voilà le problème.*

*C'est en 1890 que M. Volterra <sup>(2)</sup> publia le premier travail sur cette question. Il portait d'une intégrale double portant sur une fonction donnée, dont les arguments étaient des fonctions inconnues de deux variables indépendantes, et les déterminants fonctionnels des fonc-*

---

<sup>(1)</sup> P. Lévy, Leçons d'Analyse fonctionnelle, Paris, 1922.

<sup>(2)</sup> Volterra : Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. Rend. dei Lincei, 1890, p. 127.

tions inconnues prises deux à deux, relativement aux deux variables indépendantes. En écrivant que l'intégrale est stationnaire, M. Volterra obtenait les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont alors les fonctions inconnues, et il donnait à ces équations une forme canonique en introduisant des variables conjuguées, et en définissant une fonction caractéristique. Ici il faut remarquer que la méthode de M. Volterra s'éloignait de la théorie élémentaire, car à chaque fonction inconnue, il faisait correspondre autant de variables conjuguées qu'il y avait de déterminants fonctionnels dans la fonction sous l'intégrale double. L'Auteur faisait remarquer ensuite que l'intégrale stationnaire dépendait de certaines lignes, c'était, comme il l'appelait, une fonction de lignes ou comme on dit, une fonctionnelle. En continuant cette généralisation, M. Volterra variait l'intégrale stationnaire et, en introduisant les dérivées fonctionnelles qu'il avait définies dans un mémoire <sup>(1)</sup> antérieur, il obtenait une équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfaisait l'intégrale stationnaire. Il généralisait ensuite le théorème de Jacobi en montrant que si l'on est à même d'obtenir une solution de cette équation, solution dépendant d'un paramètre constant, la dérivée de la solution par rapport à ce paramètre est une constante.

Plus tard, M. Fréchet <sup>(2)</sup> reprit le problème de M. Volterra, en le généralisant pour une intégrale d'ordre quelconque et en le mettant sous la forme paramétrique. Les notations étaient plus symétriques. Il définissait alors un système d'intégrales des équations canoniques dépendant de deux fois autant de constantes arbitraires qu'il y avait de déterminants fonctionnels des fonctions inconnues par rapport aux paramètres, et cela en partant d'une solution de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles, dépendant d'un nombre moitié moindre de constantes.

On voit qu'aucun de ces deux Auteurs n'introduisait dans leur généralisation les fonctions arbitraires dont doivent dépendre les solutions des équations canoniques comme il semble que la nature du problème l'exige <sup>(3)</sup>.

M. P. Lévy a obtenu sur le problème qui nous occupe des résultats importants. En particulier, on lui doit l'introduction de la notion d'intégrabilité <sup>(4)</sup>; c'est aux conditions d'intégrabilité qu'une partie de notre travail est consacrée. D'autre part, M. Lévy a défini <sup>(5)</sup> la notion d'intégrale complète d'une équation aux dérivées fonctionnelles; c'est cette notion qui nous a permis de faire intervenir les fonctions arbitraires au lieu des constantes de MM. Volterra et Fréchet et de généraliser le théorème de Jacobi.

Ajoutons encore que dans une thèse parue en 1915, <sup>(6)</sup> M. Prange a obtenu sur cette

<sup>(1)</sup> Volterra : Delle variabili complesse sugli iperspazii, Rend. dei Lincei, 1889, p. 158.

<sup>(2)</sup> Fréchet : Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton ; Ann. di Matem. 1905 (IX) p. 187. On trouve encore une brève allusion à ce problème dans : Volterra : Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles, Paris, 1912 (nouveau tirage) p. 42.

<sup>(3)</sup> Signalons le mémoire suivant :

De Donder : Sur les équations de Hamilton-Volterra ; Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1914, où l'Auteur retrouve les résultats de ses prédécesseurs et démontre un certain nombre de propositions sur les relations entre les invariants intégraux, les équations canoniques de Volterra et les intégrales stationnaires.

<sup>(4)</sup> Lévy : Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes ; Thèse, Paris, 1911.

<sup>(5)</sup> Lévy : Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles ; Rendic. di Palermo, 1913.

<sup>(6)</sup> Prange : Die Hamilton-Jacobische ; Theorie für Doppelintegrale, Göttingen, 1915.

question des résultats intéressants, en se plaçant plutôt au point de vue du calcul des variations. Il a montré, en particulier, qu'on peut obtenir une solution de l'équation aux dérivées fonctionnelles du problème, lorsqu'on connaît l'intégrale des équations lagrangiennes ; notre but est de faire précisément le contraire.

Nous avons entrepris nos recherches à propos des intégrales d'action de la relativité et avec le dessein d'en tirer une méthode d'intégration des équations d'Einstein et des équations de Maxwell généralisées.

Ce travail se compose de cinq chapitres. Les deux premiers, très brefs, sont un rappel de théories classiques. Dans le troisième, nous écrivons les conditions pour qu'une intégrale multiple soit stationnaire ; les équations de forme lagrangienne obtenues sont transformées grâce à l'introduction de variables conjuguées en nombre égal à celui des fonctions inconnues. Nous obtenons aussi une équation aux dérivées fonctionnelles partielles qui généralise l'équation de Jacobi. Le quatrième chapitre contient une étude générale des équations aux dérivées fonctionnelles partielles, résolues par rapport à la dérivée normale ; celles-ci sont étudiées : 1° sous le rapport de leur intégrabilité, et les résultats en sont immédiatement appliqués à l'équation obtenue au 3<sup>e</sup> chapitre ; nous démontrons par le calcul que cette équation est toujours intégrable ; 2° sous le rapport des modalités que leur intégration présente (intégrale complète, caractéristiques) ; nous obtenons un théorème qui est tout à fait l'équivalent du théorème classique sur l'identité des équations canoniques et des équations des caractéristiques de l'équation de Jacobi ; 3° sous le rapport de l'existence des intégrales complètes, en faisant intervenir ce que l'on sait des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. Enfin dans le dernier chapitre, nous formulons la généralisation du théorème de Jacobi avec une démonstration calquée sur la démonstration donnée par Jordan du théorème classique ; cette généralisation fait intervenir des fonctions arbitraires et non pas des constantes arbitraires.

Une note sur les fonctionnelles implicites termine ce mémoire.

Il m'est particulièrement agréable de remercier ici M. E. Vessiot auprès duquel j'ai trouvé le plus bienveillant accueil et dont les précieux conseils ne m'ont jamais fait défaut durant l'élaboration de ce travail. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour tout ce que je lui dois.





## CHAPITRE I

### Rappel de quelques théorèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

---

*Problème de Cauchy.* — Soit une équation aux dérivées partielles à  $k$  variables indépendantes, du premier ordre et à une fonction inconnue, que nous supposons résolue par rapport à l'une des dérivées partielles :

$$(1) \quad p_k = \psi(x_1, \dots, x_k, z, p_1, \dots, p_{k-1}), \quad \left( p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \right).$$

Le théorème de Cauchy affirme que sous certaines conditions d'holomorphicité, il est possible de déterminer une fonction  $z(x_1, \dots, x_k)$ , solution de (1) se réduisant pour  $x_k = f(x_1, \dots, x_{k-1})$  à la fonction  $\varphi(x_1, \dots, x_{k-1})$ . Géométriquement, cela revient à dire qu'il est possible de déterminer une multiplicité intégrale  $V_k$  à  $k$  dimensions, contenant une multiplicité  $V_{k-1}$ , à  $k - 1$  dimensions, arbitrairement donnée (ou à peu près).

*Caractéristiques.* — Le problème de Cauchy est indéterminé si la  $V_{k-1}$  donnée est un lieu de courbes sur lesquelles on ait :

$$(2) \quad dx_j + \frac{\partial \psi}{\partial p_j} dx_k = 0, \quad (j = 1, \dots, k-1)$$

et par suite :

$$dz = - \left[ \sum_{i=1}^{k-1} p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - p_k \right] dx_k$$

et si le long de ces courbes les plans tangents soient tels que :

$$(3) \quad dp_i = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p_k \right) dx_k, \quad (i = 1, \dots, k).$$

Cette indétermination provient de ce que les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$  qui permettent d'obtenir le développement de *Taylor* de la solution de *Cauchy* sont solutions d'un système d'équations linéaires dont les coefficients et les termes connus sont nuls.

Les courbes satisfaisant aux équations (2) et les suites de plans satisfaisant à (3) forment dans leur ensemble les *caractéristiques* de l'équation (1).

Les surfaces intégrales sont des lieux de caractéristiques.

D'une manière plus précise, une caractéristique est définie par des fonctions  $x_1, \dots, x_k,$

$z, p_1, \dots, p_k$  d'une seule variable, satisfaisant aux équations (2) et (3) et prenant pour une valeur de la variable des valeurs  $x_1^0, \dots, x_k^0, z^0, p_1^0, \dots, p_k^0$  données d'avance et telles que  $p_k^0 = \psi(x_1^0, \dots, x_k^0, z^0, p_1^0, \dots, p_{k-1}^0)$ . L'équation d'une surface intégrale  $z = z(x_1, \dots, x_k)$  est satisfaite par les fonctions  $x_1, \dots, x_k, z$ ; ces fonctions définissent une courbe sur cette surface, le long de laquelle les plans tangents ont des paramètres  $p_1, \dots, p_k$  qui sont précisément les  $k$  dernières fonctions définissant la caractéristique en question.

*Intégrales complètes.* — Une fonction  $z(x_1, \dots, x_k; a_1, \dots, a_k)$  dépendant de  $k$  constantes arbitraires est une intégrale complète de (1) si par élimination des constantes arbitraires, on obtient l'équation (1) et celle-là seulement. Les constantes sont alors *essentiels*.

*Relations entre les intégrales complètes et les caractéristiques.* — Si l'on connaît une intégrale complète de (1), il est facile de trouver l'intégrale générale des équations différentielles des caractéristiques par des dérivations et une quadrature.

On démontre cette proposition en transformant l'équation (1) de manière qu'elle ne contienne plus la fonction inconnue, ce qui est toujours possible. Supposons que l'équation aux dérivées partielles ait la forme nouvelle :

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(x_1, \dots, x_n, t; \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

et supposons que nous possédions une intégrale complète

$$V(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1}$$

de cette équation, avec  $n+1$  constantes arbitraires dont la seule  $a_{n+1}$  soit additive. Les équations des caractéristiques de (4) sont alors :

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad \left(p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}\right),$$

$$(6) \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} p_i + \pi, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \left(\pi = \frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

L'intégrale générale des équations (5) est donnée par les équations :

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i = \text{const.}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

et l'on a ensuite :

$$(8) \quad V = \int^t \left( \sum \frac{\partial \psi}{\partial p_i} p_i - \psi \right) dt$$

et  $\pi = -\psi$ .

L'équation (8) est évidente. Tout revient à montrer que les équations (7) donnent l'intégrale générale des équations (5). Or, en suivant *Jordan* (1), on tire de (7) :

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial p_j} \right) - \left( \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

(1) *Jordan* : Traité d'Analyse, 3<sup>e</sup> éd. 1915, p. 344.

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_j} \left( \frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial p_j} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Le déterminant  $\left| \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_j} \right|$  qui est le jacobien des  $\frac{\partial V}{\partial x_j}$  par rapport aux  $a_j$  est différent de zéro puisque  $V$  est une intégrale complète; cela prouve que le système (10) n'admet que la solution nulle pour les inconnues  $\frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial p_j}$ ; donc :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_j}, \quad (j = 1, \dots, n)$$

et l'on tire de (9) :

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Les  $x_i$  et les  $p_i$  tirés de (7) sont donc solutions de (5); on peut d'autre part déterminer les  $a_i$  et les  $b_i$  de manière que les  $x_i$  et les  $p_i$  prennent des valeurs initiales données; on a donc bien l'intégrale générale de (5) au moyen des équations (7).

---



## CHAPITRE II

### Calcul des variations relatif aux intégrales simples. Théorème de Jacobi.

Les fonctions  $x_i(t)$  qui rendent l'intégrale simple :

$$(1) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} f(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n; t) dt, \quad \left( x'_i = \frac{dx_i}{dt} \right)$$

stationnaire sont solutions des équations lagrangiennes :

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si les  $x_i(t)$  sont ainsi choisies, on a  $\delta I = 0$ , lorsqu'on les varie d'une manière quelconque, entre  $t_0$  et  $t_1$ , mais en les laissant invariées en  $t_0$  et  $t_1$ . Si, au contraire, avec le même choix des  $x_i$ , on les varie aussi en  $t_0$  et  $t_1$ , on a :

$$(3) \quad \delta I = \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x'_i} \delta x_i \right]_{t_1} - \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x'_i} \delta x_i \right]_{t_0}.$$

Les équations  $x_i = x_i(t)$  représentent dans l'espace  $(x_1, \dots, x_n)$  une courbe qui est dite *extrémale* du problème de variations considéré. La variation de  $I$  lorsqu'on passe d'une extrémale à une courbe voisine ne dépend donc, d'après (3), que des variations  $\delta x_i$  aux extrémités.

Posons  $t_1 = t$  et laissons l'extrémité correspondant à  $t_0$ , fixe.  $I$  est alors une fonction de  $t$ , par l'intermédiaire des  $x_i$ , et l'on a tout d'abord :

$$(4) \quad \frac{dI}{dt} = f(x, x', t).$$

On peut ensuite calculer cette dérivée autrement. Variions l'extrémité correspondant à  $t$ , en considérant  $t$  comme une fonction inconnue au même titre que les  $x_i$ , l'espace où l'on considère les extrémales étant alors l'espace à  $(n + 1)$  dimensions  $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ . On peut, en effet, varier  $t$  dans (1) en considérant les  $x_i$  et  $t$  comme fonction d'un paramètre arbitraire  $\tau$ ; l'équation lagrangienne relative à  $t$  est alors identiquement satisfaite si les  $x_i$  satisfont aux équations (2). On a dès lors,  $I$  étant fonction des  $x_i$  et de  $t$  :

$$\delta I = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial I}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t,$$

mais par suite de (3), si  $t$  est fixe, on tire de là :

$$(5) \quad \frac{\partial I}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x'_i}.$$

Variations alors l'extrémité mobile sur une extrémale, alors :

$$\delta x_i = dx_i = x'_i dt, \quad \text{et} \quad \delta t = dt,$$

et, par suite :

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x'_i} x'_i + \frac{\partial I}{\partial t},$$

d'où d'après (4) :

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x'_i} x'_i + \frac{\partial I}{\partial t} = J$$

Faisons le changement de variables de *Poisson-Hamilton* :

$$(7) \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

et supposons que ces équations soient résolubles par rapport aux  $x'_i$ . Posons de plus :

$$H(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n; t) = \overline{\sum p_i x'_i - f},$$

la barre indiquant que dans la fonction surlignée, on a fait le changement de variables (7).

Puisque :

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i},$$

on voit que la fonction  $I(x_1, \dots, x_n; t)$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles, dite de *Jacobi* :

$$(J) \quad \frac{\partial I}{\partial t} + H(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial I}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial x_n}; t) = 0.$$

Les équations des caractéristiques de (J) correspondant aux équations (5) du chapitre précédent sont donc :

$$(8) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ces équations sont équivalentes aux équations lagrangiennes (2).

En effet, si au lieu de mettre le système (2) sous la forme normale en considérant les  $x'_i$  comme des fonctions inconnues, on introduit les fonctions inconnues  $p_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i}$ , on

voit immédiatement que le système (3) prend la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

et si l'on introduit la fonction  $H(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n; t)$  on aura :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

car :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = x'_i,$$

comme le montre l'expression de  $\delta H$  (<sup>1</sup>).

Par conséquent, *les équations lagrangiennes du problème  $\delta I = 0$ , ne sont pas autre chose que les équations des caractéristiques de (J).*

En vertu du théorème rappelé plus haut, on peut donc formuler le théorème suivant :

*Les équations des extrémales relatives à  $\delta I = 0$  sont données en termes finis par les relations :*

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial I}{\partial a_i} = b_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

*$I(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n)$  étant une intégrale complète quelconque, sans constante additive, de l'équation (J).*

Tel est l'énoncé du théorème de *Jacobi* (<sup>2</sup>) pour les questions de calcul des variations relatives à une intégrale simple.

---

(<sup>1</sup>) Cf. *Appell* : *Traité de Mécanique rationnelle*, t. 1, 3<sup>e</sup> éd. 1909, p. 501.

(<sup>2</sup>) *Jacobi*, *Vorlesungen über Dynamik*, 19<sup>te</sup> et 20<sup>te</sup> Vorlesungen. Édition de l'Acad. de Berlin, 1866, publiée sous la direction de *Clebsch*, p. 143 à 163.

## CHAPITRE III

### Calcul des variations relatif aux intégrales multiples.

La théorie qui généralise, pour le cas des intégrales multiples, la théorie de *Jacobi-Hamilton* des intégrales simples a été esquissée en partie par *M. Prange* <sup>(1)</sup> pour le cas des intégrales doubles, dépendant d'une ou de deux fonctions inconnues de deux variables. Le cas des intégrales doubles et celui des intégrales triples présentent des simplifications au point de vue du calcul, qui ne se rencontrent pas pour les intégrales d'ordre supérieur à 3. Nous traiterons ici du cas d'une intégrale  $m$  — uple; nous la supposerons étendue à un domaine  $R_m$  d'un seul tenant limité par une frontière  $C_{m-1}$  que nous appellerons indifféremment frontière, contour ou surface limite (ou courbe limite quand nous ferons  $m = 2$ ). Supposons que cette intégrale porte sur une fonction  $f$  dépendant de  $k$  fonctions  $z_1, \dots, z_k$  des variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , de leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_a} = p_{ia} \quad (i = 1, \dots, k; a = 1, \dots, m)$$

et peut-être aussi explicitement de  $x_1, \dots, x_m$  elles-mêmes. Nous admettrons que  $f$  est continue, dérivable par rapport à ses arguments et nous supposerons, en général, que les opérations que nous faisons sur  $f$  ont un sens, en particulier, que :

$$(1) \quad I = \int_{R_m} f(z_1, \dots, z_k; p_{11}, p_{12}, \dots, p_{km}; x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

a un sens lorsque les fonctions  $z$  et leurs dérivées sont continues et dérivables dans  $R_m$ .

Supposons que les fonctions  $z_i$  soient déterminées par les équations aux dérivées partielles :

$$(2) \quad \Delta_i \equiv \frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_{a=1}^{m-1} \frac{d}{dx_a} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{ia}} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, k)$$

et par la donnée des valeurs des  $z_i$  sur  $C_{m-1}$  <sup>(2)</sup>. On sait alors que si les  $z_i$  sont ainsi choisies, la variation qu'éprouve  $I$  pour des variations  $\delta z_i$  arbitraires dans  $R_m$ , mais nulles sur  $C_{m-1}$  est nulle. Désignons par  $u_i$  la fonction qui représente les valeurs de  $z_i$  sur  $C_{m-1}$ ;  $I$  est alors — si les  $z_i$  satisfont à (2) — une fonctionnelle dépendant du contour  $C_{m-1}$  et de toutes les valeurs que prennent les  $u_i$  sur  $C_{m-1}$ .

(1) *Loc. cit.*

(2) Nous discuterons plus loin [chap. IV, § c] les conditions d'existence des solutions de (2) déterminées par les données des  $z_i$  sur  $C_{m-1}$ .

Calculons la variation  $\delta'I$  de  $I$  lorsque les  $z_i$  satisfaisant à (2), les  $\delta z_i$  ne sont plus nulles sur  $C_{m-1}$ , et supposons tout d'abord que  $C_{m-1}$  reste fixe; nous avons alors :

$$(3) \quad \delta'I = \int_{R_m} \left( \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_{i=1}^{i-1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \delta p_{i\alpha} \right) dx_1 \dots dx_m;$$

mais le même calcul qui nous permet d'obtenir les équations lagrangiennes (2) nous permet de transformer  $\delta'I$ . En effet :

$$\begin{aligned} \int_{R_m} \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \delta p_{i\alpha} dx_1 \dots dx_m &= \int_{R_m} \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \frac{\partial \delta z_i}{\partial x_\alpha} dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_{R_m} \frac{d}{dx_\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \delta z_i \right) dx_1 \dots dx_m - \int_{R_m} \frac{d}{dx_\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \right) \delta z_i dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

or :

$$\int_{R_m} \frac{d}{dx_\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \delta z_i \right) dx_1 \dots dx_m = - \int_{C_{m-1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \cos(n, x_\alpha) \delta z_i d\sigma,$$

où  $(n, x_\alpha)$  est l'angle que la normale intérieure à  $C_{m-1}$  fait avec la direction positive de l'axe des  $x_\alpha$ ;  $d\sigma$  est l'élément de  $C_{m-1}$ . Par conséquent :

$$(4) \quad \delta'I = \int_{R_m} \sum_{i=1}^{i=k} \Lambda_i \delta z_i dx_1 \dots dx_m - \int_{C_{m-1}} \sum_i \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \cos(n, x_\alpha) \delta z_i d\sigma.$$

Supposons maintenant qu'à ces variations-là, nous ajoutons encore une variation du contour  $C_{m-1}$ ; nous définissons cette variation de la manière suivante. A chaque point  $P$  de  $C_{m-1}$ , nous faisons correspondre un point  $P'$  sur la normale au contour en  $P$ ; nous posons  $\delta n = \overline{PP'}$ ,  $\delta n$  étant positif si  $P'$  est à l'intérieur de  $C_{m-1}$ . La correspondance ainsi établie est bien définie si nous nous donnons  $\delta n$  comme une fonction de  $P$ , c'est-à-dire des paramètres de représentation de  $C_{m-1}$  dans l'espace  $E_m$ ; nous supposons cette fonction infiniment petite. Or sur le contour  $C'_{m-1}$  ainsi obtenu, lieu des  $P'$ , les fonctions  $u_i$  ont subi une variation, qui est égale à la variation  $\delta z_i$  que nous avons fait subir à  $z_i$  en chaque point de  $R_m$ , contour compris, lorsque nous calculons  $\delta'I$ , augmentée de la variation qu'éprouve la fonction  $z_i$  définie par (2), lorsqu'on passe de  $P$  en  $P'$ , cette nouvelle variation étant évidemment  $\frac{dz_i}{dn} \delta n$ , et, par suite,

$$(5) \quad \delta u_i = \delta z_i + \frac{dz_i}{dn} \delta n.$$

Cependant la variation  $\delta'I$  éprouvée par  $I$  lorsqu'on passe de  $C_{m-1}$  à  $C'_{m-1}$  est égale à l'intégrale de  $f$  prise sur  $R'_m$ , limitée par  $C'_{m-1}$ , moins l'intégrale de  $f$  prise sur  $R_m$ . Cette différence est manifestement :

$$(6) \quad \delta'I = - \int_{C_{m-1}} f \delta n d\sigma.$$

La variation totale de  $I$  :

$$\delta I = \delta' I + \delta'' I$$

si les  $z_i$  satisfont à (2) est, par conséquent, en tenant compte de (4), (5) et (6) :

$$(7) \quad \delta I = - \int_{C_{m-1}} \left[ \sum_i \sum_x \frac{\partial f}{\partial p_{ix}} \cos(n, x_x) \delta u_i + \left\{ f - \sum_i \sum_x \frac{\partial f}{\partial p_{ix}} \cos(n, x_x) \frac{dz_i}{dn} \right\} \delta n \right] d\sigma.$$

Or si  $I$  est une fonctionnelle dépendant de  $C_{m-1}$  et des fonctions  $u_i$ , on dira, par définition, que, si la variation totale  $\delta I$  est de la forme :

$$\delta I = \int_{C_{m-1}} \left[ \sum_i I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma,$$

les  $I'_{u_i}$  sont les dérivées fonctionnelles partielles de  $I$  par rapport aux  $u$  et que  $I'_n$  est la dérivée fonctionnelle de  $I$  par rapport au contour  $C_{m-1}$ , ou la dérivée normale de  $I$ . Conformément à cette définition, on tire de l'équation (7) :

$$(8) \quad I'_{u_i} = - \sum_x \frac{\partial f}{\partial p_{ix}} \cos(n, x_x), \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$(9) \quad I'_n = -f + \sum_i \sum_x \frac{\partial f}{\partial p_{ix}} \cos(n, x_x) \frac{dz_i}{dn}.$$

Pour la suite, il convient de modifier un peu le raisonnement que nous avons fait jusqu'ici. Décomposons le contour  $C_{m-1}$  en deux parties, qui soient chacune d'un seul tenant. Désignons par  $\Gamma_{m-1}^0$  l'une de ces parties et par  $\Gamma_{m-1}$ , l'autre. Nous supposons que  $\Gamma_{m-1}^0$  est fixe et que les valeurs des  $z_i$  sur  $\Gamma_{m-1}^0$  soient fixées une fois pour toutes ; appelons-les  $u_i^0$  ; nous réserverons la notation  $u_i$  pour les valeurs des  $z_i$  sur  $\Gamma_{m-1}$ . Cela étant, l'équation (3) subsiste, les équations (4), (6) et (7) subsistent à condition qu'on y remplace  $C_{m-1}$  par  $\Gamma_{m-1}$ . L'intégrale stationnaire  $I$  est alors une fonctionnelle dépendant de  $\Gamma_{m-1}$  et des  $u_i$  <sup>(1)</sup> ; on a dès lors :

$$\delta I = \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_i I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma,$$

et les équations (8) et (9) définissent encore les dérivées fonctionnelles de  $I$ ,  $I'_n$  étant alors la dérivée normale de  $I$  relativement à  $\Gamma_{m-1}$ .

Éliminons les  $\frac{dz_i}{dn}$  entre ces équations. Pour cela, il convient de faire un changement de variables. Soit une famille ( $F$ ) de contours dont  $\Gamma_{m-1}^0$  et  $\Gamma_{m-1}$  soient des représentants. Désignons par :

$$(10) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_m) = \gamma_m$$

<sup>(1)</sup> Elle dépend bien aussi de  $\Gamma_{m-1}^0$  et des  $u_i^0$ , mais ces arguments n'interviennent pas dans notre raisonnement actuel, puisqu'ils sont fixes

l'équation générale de cette famille ; à chaque valeur de  $y_m$  correspond un contour déterminé. Les équations différentielles des trajectoires orthogonales de la famille ( $F$ ) sont :

$$\frac{dx_i}{dy_m} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} ; \quad (i = 1, \dots, m), \quad \left[ \lambda^2 = \frac{1}{\sum \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2} \right] ;$$

$y_m$  étant le paramètre de représentation d'une trajectoire. Admettons que, pour  $y_m = y_m^0$ , l'équation (10) représente  $\Gamma_{m-1}^0$  ; traçons sur  $\Gamma_{m-1}^0$  un réseau de lignes coordonnées :  $y_1, \dots, y_{m-1}$ . La trajectoire orthogonale passant par le point  $y_1, \dots, y_m$  de  $\Gamma_{m-1}^0$  aura pour équation :

$$(11) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_{m-1}; y_m)$$

où  $y_m$  est le paramètre variable. Ces équations où les  $y_1, \dots, y_{m-1}$  sont considérées comme des variables, définissent un changement de coordonnées (1). Cherchons le  $ds^2$  de l'espace  $E_m$  avec ces nouvelles variables. Nous aurons :

$$(12) \quad ds^2 = \sum_i \sum_k g_{ik} dy_i dy_k + g_{mm} dy_m^2.$$

Pris sur une trajectoire orthogonale, le  $ds^2$  n'est pas autre chose que le carré de la longueur  $dn$  de la normale au contour de la famille ( $F$ ) qui passe par le point considéré ; nous poserons alors :

$$dn = \sqrt{g_{mm}} dy_m$$

le signe du radical étant choisi de manière que  $dn$  soit positif lorsqu'on passe d'un point d'un contour de ( $F$ ) à l'intérieur du domaine qu'il délimite avec  $\Gamma_{m-1}^0$ .

Au moyen des nouvelles variables, les fonctions  $z_i(x_1, \dots, x_m)$  deviennent des fonctions  $\bar{z}_i(y_1, \dots, y_m)$  et  $f$  devient une fonction :

$$\bar{f} \left( \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k; \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y_{m-1}}, \frac{d\bar{z}_1}{dn}, \dots, \frac{d\bar{z}_k}{dn}; y_1, \dots, y_m \right).$$

Nous poserons  $q_{i\alpha} = \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial y_\alpha}$  ( $i = 1, \dots, k$ ;  $\alpha = 1, \dots, m-1$ ), et sur  $\Gamma_{m-1}$ , nous poserons :

$$w_i = \frac{d\bar{z}_i}{dn}, \quad (i = 1, \dots, k),$$

c'est-à-dire que les  $w_i$  sont les valeurs des dérivées normales des  $\bar{z}_i$  sur  $\Gamma_{m-1}$ . On a, d'une manière générale :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \left( \frac{d\bar{z}_i}{dn} \right)} = \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \cdot \frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial \left( \frac{d\bar{z}_i}{dn} \right)}.$$

(1) Nous supposons que les trajectoires orthogonales remplissent toute la région  $R_m$ , sans laisser de lacunes.

Or sur  $\Gamma_{m-1}$  :

$$p_{ix} = \sum_{j=1}^{i=m-1} q_{ij} \frac{\partial y_j}{\partial x_x} + \frac{d\bar{z}_i}{dn} \cos(n, x_x),$$

d'où :

$$\frac{\partial p_{ix}}{\partial \left( \frac{d\bar{z}_i}{dn} \right)} = \cos(n, x_x),$$

et par suite :

$$(13) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \left( \frac{d\bar{z}_i}{dn} \right)} = \sum_x \frac{\partial f}{\partial p_{ix}} \cos(n, x_x).$$

Les équations (8) et (9) deviennent :

$$(14) \quad I'_{u_i} = - \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i}, \quad (i = 1, \dots, k).$$

$$(15) \quad I'_n = - \bar{f} + \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} w_i,$$

puisqu'elles se rapportent à  $\Gamma_{m-1}$ . Supposons que les équations (14) soient résolubles par rapport aux dérivées normales  $w_i$ , et que l'on ait alors :

$$(16) \quad w_i = \psi_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

les  $\psi_i$  étant des fonctions des  $I'_{u_j}$ , des  $u_j$  et des dérivées des  $u_j$  par rapport aux  $y_\rho$  ( $\rho = 1, \dots, m-1$ ); l'équation (15) devient alors :

$$(17) \quad I'_n = - f = \sum_i I'_{u_i} \psi_i.$$

Posons :

$$H = - f - \sum_i I'_{u_i} \psi_i,$$

l'équation :

$$(18) \quad I'_n = H$$

est l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles qui généralise, pour les intégrales multiples, l'équation de *Jacobi-Hamilton* attachée aux intégrales simples.

\*  
\*\*

Montrons maintenant qu'il est possible de donner une forme particulière aux équations lagrangiennes (2) qui rappellent la forme canonique, non pas peut-être d'une manière très immédiate, mais du moins qui, comme la forme canonique, ne nécessite que la considéra-



tion d'une fonction qui sera précisément la fonction  $H$ . Reprenons donc les équations (2) :

$$(2) \quad \Lambda_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \frac{d}{dx_\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, k).$$

On peut les transformer au moyen du changement de variables (11), mais il est préférable de remarquer que, ces équations étant les équations des extrémales du problème de variations  $\delta I = 0$ , elles sont équivalentes aux équations que l'on obtient en écrivant que l'intégrale  $I$  est encore stationnaire, si on la transforme au moyen des équations (11). Or elle s'écrit :

$$I = \int_{R_m} \bar{f}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, q_{11}, \dots, q_{k,m-1}, \frac{q_{1m}}{\sqrt{g_{mm}}, \dots, \frac{q_{km}}{\sqrt{g_{mm}}}; y_1, \dots, y_m) \Delta dy_1 \dots dy_m,$$

$\Delta$  étant le déterminant fonctionnel de la transformation (11). On sait d'ailleurs que :

$$\Delta^2 = |g_{ik}| g_{mm},$$

$|g_{ik}|$  étant le déterminant des coefficients de la partie du  $ds^2$  qui ne dépend que de  $\bar{d}y_1, \dots, \bar{d}y_{m-1}$ . Les équations lagrangiennes définissant les fonctions  $\bar{z}_i$  qui rendent  $I$  stationnaire, s'écrivent alors :

$$\bar{\Lambda}_i \equiv \frac{\partial(\bar{f}\Delta)}{\partial \bar{z}_i} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \frac{d}{dy_\alpha} \left[ \frac{\partial(\bar{f}\Delta)}{\partial q_{i\alpha}} \right] = 0;$$

$\Delta$  ne dépendant pas des  $\bar{z}_i$ , ni des  $q_{i\alpha}$ , les équations précédentes s'écriront :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_i} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \frac{d}{dy_\alpha} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\alpha}} \right) - \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\alpha}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\alpha} = 0$$

Distinguons la variable  $y_m$  qui permet, en quelque manière, de considérer la suite des contours de (F) comme une suite de valeurs d'une variable indépendante. Pour généraliser la théorie des équations canoniques, il est tout naturel de chercher les dérivées des fonctions inconnues par rapport à la variable  $y_m$ . Nous représenterons, dans tout ce qui suivra, les indices de la suite 1, 2, ...  $m-1$ , par  $\rho$ ,  $\sigma$  ou  $\tau$  et nous poserons :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m-1} = \mathbf{S}.$$

On a dès lors :

$$\frac{d}{dy_m} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{im}} \right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_i} - \mathbf{S} \frac{d}{dy_\sigma} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \right) - \frac{1}{\Delta} \mathbf{S} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\sigma} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{im}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_m}.$$

Si l'on suppose que le contour  $\Gamma_{m-1}$  est un contour variable dans la famille (F) et si l'on suppose que toutes les fonctions qui entrent dans les équations précédentes sont considérées en un point de  $\Gamma_{m-1}$ , on pourra remplacer

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{im}} \quad \text{par} \quad \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i},$$

car on a posé  $\frac{d\bar{z}_i}{dn} = w_i$  sur  $\Gamma_{m-1}$ . Alors :

$$\frac{d}{dy_m} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{im}} \right) = \sqrt{g_{mm}} \frac{d}{dn} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \right) = \frac{d}{dn} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \right).$$

D'autre part :

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{im}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_m} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{d\Delta}{dn},$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dn} &= \frac{1}{\sqrt{|g_{\rho\sigma}|}} \frac{d\sqrt{|g_{\rho\sigma}|}}{dn} + \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \frac{d\sqrt{g_{mm}}}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} + \frac{1}{2g_{mm}^{\frac{3}{2}}} \frac{dg_{mm}}{dn} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} - \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \right), \end{aligned}$$

avec  $\gamma = |g_{\rho\sigma}| =$  déterminant des  $g_{\rho\sigma}$  ( $\rho, \sigma = 1, \dots, m-1$ ).

Les équations lagrangiennes deviennent donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \right) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \right) &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i} - \mathbf{S} \frac{d}{dy_\sigma} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \mathbf{S} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} \frac{\partial}{\partial y_m} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \right). \end{aligned}$$

Les deux derniers termes de chaque membre s'entredétruisent; posons de plus <sup>(1)</sup> :

$$(19) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial w_i} = -\varphi_i$$

et supposons que ces équations soient résolubles par rapport aux dérivées  $w_i$ . Ce changement de variables est la généralisation du changement de variables de *Poisson-Hamilton*. Une fois ce changement effectué,  $\bar{f}$ , considéré en un point de  $\Gamma_{m-1}$ , est une fonction des

$u_i$ , des  $\varphi_i$  et des  $\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial y_\rho} = \frac{\partial u_i}{\partial y_\rho}$  ( $i = 1, \dots, k, \rho = 1, \dots, m-1$ ).

Posons maintenant :

$$H \left( u_1, \dots, u_k; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \frac{\partial u_i}{\partial y_\rho} \right) = \left\{ -\bar{f} - \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i w_i \right\}$$

les accolades indiquant que dans les expressions qui y sont contenues, on doit remplacer les  $w_i$  en fonction des  $\varphi_i$ . Les équations lagrangiennes, qui s'écrivent :

$$-\frac{d\varphi_i}{dn} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i} - \mathbf{S} \frac{d}{dy_\sigma} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \right) - \frac{1}{\Delta} \mathbf{S} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} \varphi_i,$$

deviennent :

$$\frac{d\varphi_i}{dn} = \frac{\partial H}{\partial u_i} - \mathbf{S} \frac{d}{dy_\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} \right] - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} \varphi_i - \frac{1}{\Delta} \mathbf{S} \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\sigma},$$

(1) Cf. *Prange, loc. cit.*

car on a :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i} = - \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} = - \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)},$$

puisque :

$$\delta \left( \bar{f} + \sum \varphi_i w_i \right) = - \delta H = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_i w_i \delta \varphi_i + \sum_i \mathcal{S} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_{i\sigma}} \delta q_{i\sigma}.$$

Cette dernière égalité prouve encore que

$$w_i = - \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}.$$

Posons encore :

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn} = \bar{\Gamma},$$

$\bar{\Gamma}$  est une fonction du point considéré sur  $\Gamma_{m-1}$ . Remarquons que

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{d\sigma} \frac{d(d\sigma)}{dn}$$

$d\sigma$  étant l'élément de grandeur de  $\Gamma_{m-1}$ ; on a, en effet,

$$\frac{1}{d\sigma} \frac{d(d\sigma)}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} dy_1 \dots dy_{m-1}} \frac{\partial(\sqrt{\gamma} dy_1 \dots dy_m)}{\sqrt{g_{mm}} \partial y_m} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\sqrt{g_{mm}} \partial y_m} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dn}.$$

Si  $p$  est une fonction quelconque variable dans  $R_m$ , dépendant du point  $P$ , posons

$$dp = \frac{dp}{dn} dn;$$

c'est-à-dire, attachons au symbole  $d$  un sens très particulier :  $dp$  est la différentielle de  $p$  dans une dérivation normale au contour  $\Gamma_{m-1}$  de  $(F)$  qui passe par le point dont  $p$  est fonction.

Avec cette notation, les équations lagrangiennes s'écrivent :

$$du_i = - \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} dn,$$

$$d\varphi_i = \left( \frac{\partial H}{\partial u_i} - \bar{\Gamma} \varphi_i \right) dn - \mathcal{S} \frac{d}{dy_\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} dn \right] \\ + \mathcal{S} \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} \left[ \frac{\partial (dn)}{\partial y_\sigma} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_\sigma} dn \right];$$

or :

$$\frac{\partial(dn)}{\partial y_p} - \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_p} dn = dy_m \left[ \frac{\partial \sqrt{g_{mm}}}{\partial y_p} - \frac{1}{\sqrt{g_{mm}\gamma}} \frac{\partial \sqrt{g_{mm}\gamma}}{\partial y_p} \sqrt{g_{mm}} \right] \\ = \sqrt{g_{mm}} dy_m \left[ -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_p} \right],$$

et par suite, on peut écrire :

$$(20) \begin{cases} du_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} dn, \\ d\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \left[ \bar{\Gamma}_{\varphi_i} + S \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_\sigma} \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} \right] dn - S \frac{d}{dy_\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} dn \right], \end{cases}$$

Telles sont les équations de Lagrange (2) sous leur forme que nous appellerons encore canonique (1) bien que leur aspect ne soit pas aussi simple que celui des équations (11) du chapitre II.

Il convient de justifier ici ce que nous avons dit plus haut des particularités présentées par les cas  $m = 2$  et  $m = 3$ . Pour ces deux cas, il est possible, en effet, d'associer à  $\Gamma_{m-1}$ , un système de coordonnées pour lequel les courbes  $\gamma_1 = \text{const.}$  et  $\gamma_2 = \text{const.}$  (si  $m = 2$ ) ou les surfaces  $\gamma_1 = \text{const.}$ ,  $\gamma_2 = \text{const.}$ ,  $\gamma_3 = \text{const.}$  (si  $m = 3$ ) forment un système complètement orthogonal. Mais dans un espace à  $m > 3$  dimensions, on sait qu'une variété à  $m - 1$  dimensions, arbitrairement donnée ne peut en général faire partie d'un système  $m - 1$  uple orthogonal (2). Si  $\Gamma_{m-1}$  satisfait aux conditions pour que cela soit, on pourra mettre le  $ds^2$  sous la forme :

$$ds^2 = S H_\rho^2 dy_\rho^2 + H_m^2 dy_m^2,$$

et l'on a en posant :

$$\frac{1}{r_{\alpha\beta}} = \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m),$$

$$du_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} dn,$$

$$d\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \left[ S \frac{1}{r_{m\rho}} + S S \frac{H_\rho}{r_{\rho\sigma}} \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} \right] dn - S \frac{d}{dy_\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \right)} dn \right].$$

Si l'on pose encore :

$$\frac{\partial}{\partial s_\rho} = \frac{\partial}{H_\rho \partial y_\rho} \quad \text{et} \quad \bar{q}_{i.s_\rho} = \frac{\partial u_i}{\partial s_\rho},$$

(1) *M. Prange* appelle ce système, le deuxième système canonique, le premier étant celui que *M. Volterra* avait obtenu dans le mémoire de 1890.

(2) Cf. *Darboux* : Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 2<sup>e</sup> édit., Paris, 1910, p. 134.

on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} du_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} du, \\ d\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \mathbf{S} \frac{1}{r_{m\sigma}} dn - \mathbf{S} \frac{\partial}{\partial s_\rho} \left[ \frac{\partial H}{\partial \bar{q}_{i,s_\rho}} dn \right] - \mathbf{S} \mathbf{S}_{\rho \neq \sigma} \frac{1}{r_{\sigma\rho}} \frac{\partial H}{\partial \bar{q}_{i,s_\rho}} dn, \end{array} \right.$$

la dernière somme double étant prise en excluant les termes pour lesquels  $\sigma = \rho$ . On voit sans peine que cette somme disparaît quand  $m = 2$ .

En résumé les équations (18) remplacent complètement les équations aux dérivées partielles du problème de variation considéré; elles sont à proprement parler des équations aux dérivées partielles, mais leur forme permet de considérer immédiatement les  $z_i = u_i$  (sur le contour mobile  $\Gamma_{m-1}$ ) et les  $\varphi_i$  comme des fonctionnelles de  $\Gamma_{m-1}^0$  ou de l'un des contours de la famille ( $F$ ). Il est clair, d'autre part, que la forme de ces équations est indépendante du choix de la famille ( $F$ ).



## CHAPITRE IV

### Etude de l'équation :

$$(1) \quad I'_n + \Phi | [I'_{u_1}, \dots, I'_{u_k}, I, u_1, \dots, u_k; \Gamma_{m-1}; P] | = 0.$$

#### a) Conditions d'intégrabilité.

Nous avons trouvé plus haut que la fonctionnelle  $I = \int_{R_m} f dx_1 \dots dx_m$  satisfait à une équation aux dérivées fonctionnelles partielles analogue à (1), lorsque les fonctions  $z_i$  dont dépend  $f$  sont solutions des équations lagrangiennes [(2) chap. III] et qu'elles prennent sur une partie  $\Gamma_{m-1}$  du contour de  $R_m$ , considéré comme variable, les valeurs  $u_i$ . L'équation (17) trouvée plus haut ne contient pas  $I$ ,  $\Phi$  y est une fonction,  $-H$ , des arguments  $I'_{u_i}$ ,  $u_i$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial y_p}$  (1), tandis que pour généraliser, nous supposons que  $\Phi$  est une fonctionnelle des arguments  $I, u_i$ , (ce qui implique qu'elle peut dépendre des  $\frac{\partial u_i}{\partial y_p}$  qui sont des fonctionnelles des  $u_i$ ), elle dépend en outre de  $\Gamma_{m-1}$  et d'un point variable  $P$  de l'espace  $E_m$  où l'on a découpé la région  $R_m$ . En plus de cela, nous admettrons que  $\Phi$  est continue par rapport à chacun de ses arguments (2). La différentielle de  $I$  est définie par la relation :

$$(2) \quad \delta I = \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma;$$

$\delta I$  est elle-même une fonctionnelle dont on peut se proposer de rechercher la variation  $\delta_1 \delta I$  lorsqu'on varie les arguments de  $\delta I$ , soient : les  $u_i$ , les  $I'_{u_i}$ ,  $I'_n$ ,  $I$ , les  $\delta u_i$ ,  $\delta n$ , de  $\delta_1 u_i$ ,  $\delta_1 I'_{u_i}$ ,  $\delta_1 I'_n$ ,  $\delta_1 I$ ,  $\delta_1 \delta u_i$ , et  $\delta_1 \delta n$ . Cette recherche a pour but d'obtenir les conditions d'intégrabilité de (1), conditions sur lesquelles *M. P. Lévy* (3) a le premier insisté en en faisant voir l'importance. On peut admettre, en effet, que l'équation (1) fournit un certain mode de calcul d'une fonctionnelle  $I$  lorsqu'on passe d'un contour  $\Gamma_{m-1}$  à un autre contour analogue et d'un système de  $k$  fonctions  $u_i$  à un autre (choisi, par exemple, dans un certain champ fonc-

(1) Ces dérivées s'entendent par rapport à des coordonnées curvilignes sur  $\Gamma_{m-1}$ .

(2) Cf. *Lévy*, Leçons, chapitre II.

(3) Cf. Thèse, *loc. cit. passim*.

tionnel), ce passage se faisant par continuité, au moyen d'une suite de contours intermédiaires et de systèmes intermédiaires de  $u_i$ ; on peut alors se demander si le résultat obtenu est indépendant des intermédiaires. La condition d'intégrabilité d'une équation telle que (1) est la condition qui exprime que :

$$(3) \quad \delta_1 \delta I = \delta \delta_1 I$$

est une identité en vertu de l'équation (1) elle-même et cela quelles que soient les variations  $\delta$  et  $\delta_1$ . Cette condition est nécessaire. Nous nous bornerons dans ce qui suit à indiquer une condition suffisante, pour que (3) ait lieu, car il est difficile, nous paraît-il, de montrer que (3) est une identité en vertu de (1); nous pouvons faire voir que, si certaines conditions sont satisfaites, toute fonctionnelle  $I$  satisfaisant à (1), satisfait aussi à (3); ces conditions seront alors suffisantes.

La relation (3) exprime, d'une manière générale, que l'on peut intervertir les symboles de différentiation dans la recherche d'une différentielle de  $I$ , d'ordre quelconque; ces symboles de différentiation pouvant, par exemple, caractériser des variations des arguments de  $I$ , par rapport à certains paramètres dont ces arguments pourraient dépendre. Pour fixer les idées, supposons avec *M. P. Lévy* que tous les arguments de  $I$  dépendent de 2 paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ ; pour chacun de ces arguments, posons :

$$\delta = \frac{\partial}{\partial \lambda} \cdot \delta \lambda, \quad \delta_1 = \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \delta \mu.$$

$I$  qui est alors une fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  subit pour les variations  $\delta \lambda$  et  $\delta \mu$  successivement effectuées la variation :

$$\delta_1 \delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda \partial \mu} \delta \lambda \delta \mu = \delta \delta_1 I.$$

La relation (3) doit être vérifiée pour des variations aussi particulières que celles que nous venons d'envisager; comme les arguments de  $I$  peuvent dépendre d'une manière aussi compliquée que l'on veut des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , nous devons admettre que la relation (3) doit être vérifiée pour toutes les fonctionnelles  $I$  quelles que soient les variations  $\delta$  et  $\delta_1$ . Cela entraîne tout d'abord certaines relations entre  $\delta I'_{u_i}$  et  $\delta I'_n$ .

On doit avoir en vertu de (2) :

$$\delta_1 \int_{\Gamma_m} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma = \delta \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \delta_1 u_i + I'_n \delta_1 n \right] d\sigma.$$

Les variations  $\delta$  de  $I'_{u_i}$  et de  $I'_n$  sont des fonctionnelles linéaires des  $\delta u_i$  et de  $\delta n$ ; posons, en nous inspirant des notations de *M. Lévy* (1),

$$\begin{aligned} \delta I'_{u_i} &= \sum_{j=1}^{j=k} E_{ij}(\delta u_j) + F'_i(\delta n) + A_i(\delta \cdot), \\ \delta I'_n &= \sum_{j=1}^{j=k} X_j(\delta u_j) + G(\delta n) + B(\delta \cdot), \end{aligned}$$

(1) Cf. Leçons, p. 231.

les fonctionnelles  $E_{ik}$ ,  $F_i$ ,  $X_i$ ,  $G$  étant linéaires par rapport à leurs arguments, les  $A_i$  et  $B$  étant aussi linéaires, mais nous en disposerons de manière que  $E_{ik}$ ,  $F_i$ ,  $X_i$ ,  $G$  aient entre elles les relations les plus simples.

Remarquons que  $\delta d\sigma = \bar{\Gamma} d\sigma \delta n$ ,  $\bar{\Gamma}$  étant la fonction de point sur  $\Gamma_{m-1}$  égale à  $\frac{1}{\sqrt{\bar{\Gamma}}} \frac{d\sqrt{\bar{\Gamma}}}{dn}$ , si on utilise le système de coordonnées  $y_1, y_2, \dots, y_m$  défini plus haut [chap. III ; p. 10]. Cela posé, on a :

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta I &= \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum \delta_1 I_{u_i} \delta u_i + \sum I_{u_i} \delta_1 \delta u_i + \delta_1 I'_n \delta n + I'_n \delta_1 \delta n + \left( \sum I_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right) \bar{\Gamma} \delta_1 n \right] d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_i \sum_j E_{ij}(\delta_1 u_j) \delta u_i + \sum_i F_i(\delta_1 n) \delta u_i + \sum_i A_i(\delta_1) \delta u_i + \sum_i I_{u_i} \delta_1 \delta u_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_i X_i(\delta_1 u_i) \delta n + G(\delta_1 n) \delta n + B(\delta_1) \delta n + I'_n \delta_1 \delta u_i + \sum_i \bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta u_i \delta_1 n + I'_n \delta n \delta_1 n \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on échange  $\delta$  et  $\delta_1$ , il faut que cette dernière intégrale ne change pas et cela, quels que soient  $\delta$  et  $\delta_1$ . Or, on a :

$$\delta \delta_1 n = \delta_1 \delta n.$$

Considérons, en effet, une famille de contours  $\Gamma_{m-1}$ , à 2 paramètres  $y_m$  et  $\bar{y}_m$ , définie par les équations :

$$(4) \quad x_i = f_i(y_1, \dots, y_{m-1}; y_m, \bar{y}_m),$$

à chaque couple de valeurs  $y_m$  et  $\bar{y}_m$  correspond un contour et nous porterons notre attention sur l'un d'eux, celui pour lequel  $y_m = y_m^0$  et  $\bar{y}_m = \bar{y}_m^0$ .

Les équations (1) définissent, si  $\bar{y}_m$  est fixe, un changement de coordonnées  $x_i \rightarrow y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et par suite un certain  $ds^2$  :

$$ds^2 = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} g_{\rho\sigma} dy_{\rho} dy_{\sigma} + 2 \sum_{\rho} g_{\rho m} dy_{\rho} dy_m + g_{mm} dy_m^2;$$

et si  $y_m$  est fixe, un autre changement de coordonnées, et un autre  $ds^2$  :

$$\bar{ds}^2 = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \bar{g}_{\rho\sigma} dy_{\rho} dy_{\sigma} + 2 \sum_{\rho} \bar{g}_{\rho m} dy_{\rho} d\bar{y}_m + \bar{g}_{mm} d\bar{y}_m^2.$$

On sait qu'on a .

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial f_i}{\partial y_{\sigma}}, & g_{\rho m} &= \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial f_i}{\partial y_m}, & g_{mm} &= \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \right)^2 \\ \bar{g}_{\rho m} &= \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_m}, & \bar{g}_{mm} &= \sum_i \left( \frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_m} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous aurons deux variations à considérer. L'une correspondant à  $y_m$ , laissant  $\bar{y}_m$  fixe ; elle change  $y_m$  en  $y_m + dy_m$  et elle déplace les points d'un contour normalement à ce contour. Pour une telle variation on aura :



$$\delta x_i = \sum_{\rho} \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \delta y_{\rho} + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m.$$

Or ce déplacement étant orthogonal à  $\Gamma_{m-1}$ , on a :

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \delta x_i = 0, \quad (\rho = 1, \dots, m-1),$$

soit après réduction :

$$(5) \quad \sum_{\sigma} g_{\rho\sigma} \delta y_{\sigma} + g_{\rho m} dy_m = 0, \quad (\rho = 1, \dots, m-1).$$

Dans ce qui suivra nous introduirons la forme :

$$d\sigma^2 = \sum_{\rho} \sum_{\tau} g_{\rho\tau} dy_{\rho} dy_{\tau}, \quad (\rho, \tau = 1, \dots, m-1)$$

et les composantes contravariantes  $g^{\rho\tau}$  de cette forme.

On peut alors résoudre les  $(m-1)$  équations (5) par rapport aux  $\delta y_{\sigma}$  ; en posant

$A^{\tau} = \sum_{\rho} g^{\rho\tau} g_{\rho m}$  on trouve :

$$\delta y_{\tau} = -A^{\tau} dy_m.$$

On tire de là pour les composantes  $\delta x_i$  d'un déplacement orthogonal :

$$\delta x_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial y_m} - \sum_{\tau} A^{\tau} \frac{\partial f_i}{\partial y_{\tau}} \right] dy_m.$$

Pour une fonction de point :

$$\varphi(x_1, \dots, x_m; y_m, \bar{y}_m) = \Phi(y_1, \dots, y_{m-1}; y_m, \bar{y}_m)$$

on aura :

$$\delta\varphi = \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial y_m} - \sum_{\tau} A^{\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial y_{\tau}} \right] dy_m.$$

D'autre part, si l'on considère l'élément de volume de l'espace  $R_m$ , il vaut :

$$d\tau^{(m)} = \sqrt{|g_{ik}|} dy_1 \dots dy_m,$$

lorsqu'on rapporte  $R_m$  aux coordonnées  $y_1, \dots, y_m$  ;  $|g_{ik}|$  désignant le déterminant de la forme  $ds^2$ . Mais si  $d\tau^{(m-1)}$  désigne l'élément du contour  $\Gamma_{m-1}$ , on a :

$$d\tau^{(m-1)} = \sqrt{|g_{\rho\sigma}|} dy_1 \dots dy_{m-1};$$

or si  $\delta n$  représente la longueur du déplacement normal que nous avons effectué (correspondant à  $dy_m$ ), nous aurons :

$$d\tau^{(m-1)} \delta n = d\tau^{(m)},$$

et, par suite,

$$\delta n = \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}} dy_m.$$

On définit la variation  $\delta_1$  de la même manière, seulement on fait intervenir  $d\bar{s}^2$ , et l'on aura :

$$\delta_1 \psi(x_1, \dots, x_m; y_m, \bar{y}_m) = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}_m} - \sum_{\sigma} \bar{A}^{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{\sigma}} \right] d\bar{y}_m,$$

avec  $\bar{A}^{\sigma} = \sum_{\rho} g^{\rho\sigma} \bar{g}_{\rho m}$ . Appliquons cette formule à :

$$\psi = \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}},$$

nous aurons après multiplication par  $dy_m$  :

$$\delta_1 \delta n = \left[ \frac{\partial \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}}}{\partial \bar{y}_m} - \sum_{\sigma} \bar{A}^{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}}}{\partial y_{\sigma}} \right] dy_m d\bar{y}_m.$$

Cherchons la valeur de cette expression pour le contour  $\Gamma_{m-1}$  considéré. On peut supposer, sans amener de confusion avec le contour  $\Gamma_{m-1}^0$  considéré plus haut que  $\Gamma_{m-1}$  correspond à  $y_m = y_m^0$  et  $\bar{y}_m = \bar{y}_m^0$  et que pour  $y_m = y_m^0$  et  $\bar{y}_m = \bar{y}_m^0$  on ait  $g_{\rho m} = \bar{g}_{\rho m} = 0$ ; alors  $A^{\sigma} = \bar{A}^{\sigma} = 0$ . Par conséquent :

$$\delta_1 \delta n = \left[ \frac{\partial \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}}}{\partial \bar{y}_m} \right]_0 dy_m d\bar{y}_m.$$

Or :

$$|g_{ik}| = \begin{vmatrix} & & & g_{1m} \\ & & & g_{2m} \\ & & & \dots \\ & & |g_{\rho\sigma}| & \dots \\ & & & \dots \\ & & & g_{m-1,m} \\ g_{m,1} & g_{m,2} & \dots & g_{m,m-1} & g_{mm} \end{vmatrix} = g_{mm} |g_{\rho\sigma}| + \text{forme quadratique en les } g_{\rho m};$$

par conséquent :

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{|g_{ik}|}{|g_{\rho\sigma}|}}}{\partial \bar{y}_m} = \frac{\partial \sqrt{g_{mm}}}{\partial \bar{y}_m} + \text{forme linéaire en les } g_{\rho m};$$

donc :

$$\delta_1 \delta n = \left[ \frac{\partial \sqrt{g_{mm}}}{\partial \bar{y}_m} \right]_0 dy_m d\bar{y}_m.$$

Or :

$$\frac{\partial \sqrt{g_{mm}}}{\partial \bar{y}_m} = \frac{1}{2\sqrt{g_{mm}}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial \bar{y}_m} = \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_m \partial \bar{y}_m};$$

cependant :

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \right]_0 = \cos(n, x_i) \quad [\text{pour } \Gamma_{m-1}(y_m^0, \bar{y}_m^0)] ;$$

par suite :

$$\delta_1 \delta n = \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_m \partial \bar{y}_m} \cos(n, x_i) dy_m d\bar{y}_m = \delta \delta_1 n,$$

ce qui démontre notre assertion. Mais on n'a pas  $\delta_1 \delta u_i = \delta \delta_1 u_i$ .

On a, au contraire,

$$\delta_1 \delta u_i + \nabla(u_i, \delta_1 n) \delta n = \delta \delta_1 u_i + \nabla(u_i, \delta n) \delta_1 n$$

où  $\nabla(u, v)$  est le paramètre différentiel mixte de *Beltrami* pour les fonctions  $u$  et  $v$ , définies sur le contour  $\Gamma_{m-1}$  et relativement au  $ds^2$  sur ce contour.

En effet, la variation  $\delta u$  (nous supprimons l'indice) est égale, d'après les notations de la démonstration précédente à :

$$\delta u = \left[ \frac{\partial U}{\partial y_m} - \sum_{\rho} A^{\rho} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \right] dy_m = \Psi dy_m.$$

La variation  $\delta_1$  de cette expression s'écrira :

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}_m} - \sum_{\rho} \bar{A}^{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}_{\rho}} \right] dy_m d\bar{y}_m$$

et nous allons chercher les caractères de symétrie de cette expression. Or pour  $y_m = y_m^0$  et  $\bar{y}_m = \bar{y}_m^0$ , on a  $A^{\rho} = \bar{A}^{\rho} = 0$ ; par suite, pour le contour considéré, l'expression précédente s'écrit :

$$(6) \quad \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial y_m \partial \bar{y}_m} - \sum_{\rho} \frac{\partial A^{\rho}}{\partial \bar{y}_m} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \right]_0 dy_m d\bar{y}_m.$$

Mais :

$$A^{\rho} = \sum_{\sigma} g^{\sigma\rho} g_{\sigma m} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial A^{\rho}}{\partial \bar{y}_m} \right)_0 = \left[ \sum_{\sigma} g^{\sigma\rho} \frac{\partial g_{\sigma m}}{\partial \bar{y}_m} \right]_0$$

et (6) devient :

$$\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial y_m \partial \bar{y}_m} - \left\{ \sum_{\rho} \sum_{\sigma} g^{\sigma\rho} \frac{\partial g_{\sigma m}}{\partial \bar{y}_m} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \right\}_0 \right] dy_m d\bar{y}_m.$$

La quantité entre  $\left\{ \right\}_0$  est un invariant pour toutes les transformations de coordonnées sur  $\Gamma_{m-1}$ ; cela résulte de sa forme même; mais on n'en voit pas la signification. Cherchons-la. Puisque

$$\frac{\partial g_{\sigma m}}{\partial y_m} = \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{\sigma} \partial \bar{y}_m} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} + \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_m \partial \bar{y}_m} \frac{\partial f_i}{\partial y_{\sigma}},$$

on voit que :

$$\delta_i \delta u + \sum_{\rho} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{\sigma} \partial \bar{y}_m} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} dy_m d\bar{y}_m$$

est symétrique en  $\delta$  et  $\delta_i$ . Or :

$$\sum_{\rho} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{\sigma} \partial \bar{y}_m} \frac{\partial f_i}{\partial y_m}$$

est encore un invariant ; cherchons sa valeur dans un système particulier de coordonnées.

On a tout d'abord :

$$\left\{ \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{\sigma} \partial \bar{y}_m} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \right\}_0 dy_m d\bar{y}_m = \left[ \sum_i \frac{\partial(\delta_i x_i)}{\partial y_{\sigma}} \delta x_i \right]_0$$

car de

$$\delta_i x_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_m} - \sum_{\rho} \bar{A}^{\rho} \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \right] d\bar{y}_m$$

on tire :

$$\sum_i \left[ \frac{\partial(\delta_i x_i)}{\partial y_{\sigma}} \delta x_i \right]_0 = \sum_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial \bar{y}_m \partial y_{\sigma}} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} - \sum_{\rho} \sum_{\tau} \frac{\partial q_{\tau m}}{\partial y_{\sigma}} g^{\rho\tau} \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\sigma}} \frac{\partial f_i}{\partial y_m}$$

et  $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} = 0$ . De plus, si au point où l'on fait ce calcul, on prend l'axe des  $x_i$

suitant la normale, alors  $\delta_i x_c = \delta x_c = 0$ , et  $\delta_i x_m = \delta_i n$ ,  $\delta x_m = \delta n$ , l'invariant est alors :

$$\sum_{\rho} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial U}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial(\delta_i n)}{\partial y_{\sigma}} \delta n = \nabla(u, \delta_i n) \delta n$$

et par conséquent :

$$\delta_i \delta u + \nabla(u, \delta_i n) \delta n$$

est symétrique en  $\delta$  et  $\delta_i$ .

Par suite, dans l'expression de  $\delta_i \delta I$ , si l'on pose :

$$B(\delta_i \cdot) = \sum u_i \nabla(u_i, \delta_i n)$$

on sera assuré que les termes

$$\sum_i u_i \delta_i \delta u_i + B(\delta_i \cdot) \delta n$$

ne changent pas lorsqu'on intervertit  $\delta$  et  $\delta_i$ . De plus, si l'on pose :

$$A_i(\delta_i \cdot) = -\bar{\Gamma}' u_i \delta_i n,$$

il suffira d'écrire que

$$\int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_i \sum_j E_{ij}(\delta_i u_j) \delta u_i + \sum_i F_i(\delta_i n) \delta u_i + \sum_i X_i(\delta_i u_i) \delta n + G(\delta_i n) \delta n \right] d\sigma,$$

ne change pas lorsqu'on intervertit  $\delta$  et  $\delta_1$  pour être sûr que  $\delta\delta_1 I = \delta_1\delta I$ . Supposons tout d'abord que  $\delta$  et  $\delta_1$  soient des variations qui n'intéressent que les fonctions  $u_i$ , le contour  $\Gamma_{m-1}$  étant invariable; il faut alors que :

$$(7) \quad \int_{\Gamma_{m-1}} \sum_i \sum_j E_{ij}(\delta_1 u_j) \delta u_i d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} \sum_i \sum_j E_{ij}(\delta u_j) \delta_1 u_i d\sigma.$$

Il convient ici d'introduire une notion importante et utile. On dira que la *fonctionnelle*  $\mathfrak{A}_0(\xi)$  est l'adjointe de la fonctionnelle  $A(\xi)$  relativement au contour  $\Gamma_{m-1}$  si l'on a (\*) :

$$\int_{\Gamma_{m-1}} \eta(P) A[\xi(P)] d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} \xi(P) \mathfrak{A}_0[\eta(P)] d\sigma$$

quelles que soient les fonctions  $\xi(P)$  et  $\eta(P)$  du point  $P$  de  $\Gamma_{m-1}$  continues et uniformes sur  $\Gamma_{m-1}$ .

Montrons tout d'abord qu'une fonctionnelle  $A[x(P)]$  n'a qu'une seule adjointe. Si  $\mathfrak{A}_0$  et  $\mathfrak{A}'$  étaient les adjointes de  $A$ , on aurait :

$$\int A[x(P)] y(P) d\sigma = \int \mathfrak{A}_0[y(P)] x(P) d\sigma = \int \mathfrak{A}'[y(P)] x(P) d\sigma,$$

et cela quelles que soient les fonctions  $x$  et  $y$  : on a donc bien  $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}'$ .

De plus, l'adjointe de la fonctionnelle composée  $A[B\{x(P)\}]$  est  $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\{x(P)\}]$  car

$$\int A[B\{x(P)\}] y(P) d\sigma = \int B\{x(P)\} \mathfrak{A}\{y(P)\} d\sigma = \int \mathfrak{B}[\mathfrak{A}\{y(P)\}] x(P) d\sigma.$$

Enfin, l'adjointe de  $\frac{\partial x(P)}{\partial y_p}$  est  $-\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial[\sqrt{\gamma} x(P)]}{\partial y_p}$  car

$$\int \frac{\partial x(P)}{\partial y_p} z(P) d\sigma = \int \frac{\partial x}{\partial y_p} z \sqrt{\gamma} dy_1 \dots dy_{m-1};$$

or

$$\int \frac{\partial x}{\partial y_p} z \sqrt{\gamma} dy_1 \dots dy_{m-1} = \int \frac{\partial(zx\sqrt{\gamma})}{\partial y_p} dy_1 \dots dy_{m-1} - \int x \frac{\partial(z\sqrt{\gamma})}{\partial y_p} dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

Le premier terme du second membre est nul car on peut toujours supposer que la surface  $\Gamma_{m-1}$  est fermée, en complétant la définition de  $z$  et  $x$ , qu'on pose égales à zéro sur la partie de la surface qu'il faut adjoindre pour qu'elle soit fermée; alors on a bien :

$$\int \frac{\partial x(P)}{\partial y_p} z(P) d\sigma = - \int x(P) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial(z\sqrt{\gamma})}{\partial y_p} d\sigma.$$

La relation (7) devant avoir lieu pour des  $\delta u_i$  et  $\delta_1 u_i$  quelconques, il faut, en particulier, que l'on ait :

$$\int_{\Gamma_{m-1}} E_{ii}(\delta_1 u_i) \delta u_i d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} E_{ii}(\delta u_i) \delta_1 u_i d\sigma$$

---

(\*) Cf. *Levy, Leçons*, p. 91.

en faisant  $\delta u_j = \delta_1 v_j = 0$  si  $j \neq i$ , et

$$\int_{\Gamma_{m-1}} E_{ij}(\delta_1 u_j) \delta u_i d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} E_{ji}(\delta u_i) \delta_1 u_j d\sigma$$

pour  $\delta u_p = 0$  si  $p \neq i$ , et  $\delta_1 u_q = 0$ , si  $q \neq j$ , ce qui prouve que  $E_{ii}$  est identique à sa propre adjointe et que  $E_{ji}$  doit être égale à l'adjointe de  $E_{ij}$  :

$$E_{ii} = \mathcal{E}_{ii},$$

$$E_{ij} = \mathcal{E}_{ji}.$$

Si maintenant on fait tous les  $\delta u_i$  et  $\delta_1 u_i$  nuls, il faut que :

$$\int_{\Gamma_{m-1}} G(\delta_1 n) \delta n d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} G(\delta n) \delta_1 n d\sigma,$$

c'est-à-dire que  $G$  soit identique à sa propre adjointe.

Enfin, ces conditions étant réalisées, il faut encore que :

$$\int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_i F_i(\delta_1 n) \delta u_i + \sum_i X_i(\delta_1 u_i) \delta n \right] d\sigma$$

soit symétrique en  $\delta$  et  $\delta_1$ . En faisant  $\delta u_j = 0$ , sauf pour  $j = i$ ,  $\delta_1 u_i = 0$ ,  $\delta n = 0$  et  $\delta_1 n$  quelconque, il faut que

$$\int_{\Gamma_{m-1}} F_i(\delta_1 n) \delta u_i d\sigma = \int_{\Gamma_{m-1}} X_i(\delta u_i) \delta_1 n d\sigma,$$

ce qui prouve que  $X_i$  doit être l'adjointe de  $F_i$  :

$$X_i = \mathcal{F}_i.$$

Par conséquent, si les  $I'_{u_i}$  et si  $I'_n$  sont des fonctionnelles telles que :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta I'_{u_i} = \sum_{j=1}^{j=k} E_{ij}(\delta u_j) + F_i(\delta n) - \bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n \\ \delta I'_n = \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{F}_i(\delta u_i) + G(\delta n) + \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n) \end{array} \right.$$

où

$$E_{ij} = \mathcal{E}_{ji}, \quad G = \mathcal{G},$$

on est assuré que la fonctionnelle :

$$\delta J = \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum_i I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma$$

est telle que  $\delta_1 \delta I = \delta \delta_1 I$ . La démonstration que nous venons de faire prouve que ces conditions sont suffisantes, elles ne sont pas nécessaires car on aurait pu disposer des  $A_i$  et de  $B$  autrement, on eût alors obtenu d'autres conditions plus compliquées.

Nous sommes dès lors en mesure d'obtenir les conditions d'intégrabilité de l'équation

(1); suivons pour cela, en la généralisant, la méthode qu'a indiquée *M. Lévy*. Calculons  $\delta I'_n$  à partir de l'équation (1) en variant tous les arguments. Nous en tirons :

$$(9) \quad \delta I'_n = \sum_i K_i(\delta I'_{u_i}) + \sum_i L_i(\delta u_i) + M(\delta n) \quad (1).$$

les  $K_i$ ,  $L_i$  et  $M$  étant des fonctionnelles linéaires de leurs arguments respectifs. Remplaçons  $\delta I'_n$  et les  $\delta I'_{u_i}$  par leurs expressions (6), il vient :

$$(10) \quad \begin{aligned} & \sum_i \mathcal{F}_i(\delta u_i) + G(\delta n) + \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n) \\ &= \sum_i K_i \left[ \sum_j E_{ij}(\delta u_j) \right] + \sum_i K_i \left[ F_i(\delta n) \right] - \sum_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + \sum_i L_i(\delta u_i) + M(\delta n). \end{aligned}$$

En identifiant les termes en  $\delta u_i$  et  $\delta n$ , on trouve les relations suivantes qui permettent de calculer les  $\mathcal{F}_i$  et  $G$  :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_i(\delta u_i) = \sum_j K_j \left[ E_{ji}(\delta u_i) \right] + L_i(\delta u_i) \\ G(\delta n) + \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n) = \sum_i K_i \left[ F_i(\delta n) \right] - \sum_i K_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + M(\delta n). \end{array} \right.$$

Les premières de ces équations permettent de calculer les  $F$  qu'on reporte ensuite dans la dernière ; on a :

$$(12) \quad F_i(\delta u_i) = \sum_j E_{ij} \left[ \mathcal{K}_j(\delta u_i) \right] + \mathcal{L}_i(\delta u_i)$$

et

$$\begin{aligned} G(\delta n) - \sum_i \sum_j K_i \left[ E_{ij} \left\{ \mathcal{K}_j(\delta n) \right\} \right] &= M(\delta n) - \sum_i K_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) \\ &+ \sum_i K_i \left[ \mathcal{L}_i(\delta n) \right] - \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n). \end{aligned}$$

Le premier membre est identique à son adjointe, car l'adjointe de

$$\sum_i \sum_j K_i \left[ E_{ij} \left\{ \mathcal{K}_j(\delta n) \right\} \right] \quad \text{est} \quad \sum_i \sum_j K_j \left[ E_{ji} \left\{ \mathcal{K}_i(\delta n) \right\} \right];$$

ces deux expressions sont identiques car  $E_{ij} = E_{ji}$  et l'on peut échanger les indices de sommation. Il faut donc que le second membre soit aussi identique à son adjointe.

La condition d'intégrabilité de (1), c'est donc que la fonctionnelle :

$$M(\delta n) - \sum_i K_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + \sum_i K_i \left[ \mathcal{L}_i(\delta n) \right] - \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n)$$

---

(1) On a remplacé  $\delta I$  par sa valeur.

soit identique à son adjointe. Cette condition est suffisante, car alors  $G$  sera identique à son adjointe, les  $\mathcal{F}_i$  et les  $F_i$  seront déterminés par les relations (11) et (12) et ce sont des fonctionnelles adjointes 2 à 2. Enfin on a tenu compte dans ces calculs de ce que  $E_{ij} = \mathcal{E}_{ji}$ , par conséquent la dérivée  $I'_n$  définie par (1) peut être associée à des fonctionnelles  $I'_{u_i}$  dont on sait qu'elles sont les dérivées fonctionnelles par rapport aux  $u_i$  d'une certaine fonctionnelle  $I$ , pour former une fonctionnelle :

$$\delta I = \int_{\Gamma_{m-1}} \left[ \sum I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma$$

telle que  $\delta_1 \delta I = \delta \delta_1 I$ .

Il s'ensuit donc qu'une équation telle que (1) donnée au hasard ne saurait être forcément intégrable ; on est assuré qu'elle l'est si  $\Phi$  satisfait à la condition que nous venons d'obtenir et que nous allons immédiatement particulariser pour le cas de l'équation aux dérivées fonctionnelles (18) du chapitre III. Nous supposons donc que  $\Phi$  est une fonction

des arguments  $I'_{u_i}$ ,  $u_i$ ,  $\frac{\partial u_i}{\partial y_\rho}$  et du point courant sur  $\Gamma_{m-1}$ , définie par la relation :

$$\Phi = -H \left( I'_{u_1}, \dots, I'_{u_k}; u_1, \dots, u_k; \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial y_{m-1}}; P \right) = - \left\{ \sum \frac{d\bar{z}_i}{dn} I'_{u_i} + f \right\}$$

l'accolade indiquant que l'on doit effectuer dans les fonctions qui y sont incluses le changement de variables (19) du chapitre III, qui généralise le changement de variables de

*Poisson-Hamilton*, c'est-à-dire qu'on exprime les  $\frac{d\bar{z}_i}{dn}$  en fonction des  $I'_{u_i}$  par les équations :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \left( \frac{d\bar{z}_i}{dn} \right)} = -I'_{u_i}.$$

L'équation aux dérivées fonctionnelles (1) est ainsi particularisée : (1)

$$I'_n = H(I'_{u_1}, \dots, I'_{u_k}; u_1, \dots, u_k; q_{11}, \dots, q_{k, m-1}; P).$$

Pour tirer de là les fonctionnelles  $K_i$ ,  $L_i$ ,  $M$ , il convient de prendre la forme :

$$I'_n = - \sum_i w_i I'_{u_i} - f \left[ u_1, \dots, u_k, \mathcal{S}_\sigma \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_1} + w_1 \cos(n, x_1) \dots \right. \\ \left. \mathcal{S}_\sigma \frac{\partial u_k}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_m} + w_k \cos(n, x_m); P \right]$$

où  $w_i$  remplace  $\frac{d\bar{z}_i}{dn}$  et où on a remplacé dans  $f$  les dérivées  $p_{ij}$  par leurs expressions :

$$p_{ij} = \mathcal{S}_\rho \frac{\partial u_i}{\partial y_\rho} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_j} + w_i \cos(n, x_j).$$

---

(1) Remarquons que les dérivées  $I'_n$  et  $I'_{u_i}$  sont relatives à  $\Gamma_{m-1}$ ,  $q_{i\sigma}$  étant la dérivée par rapport à  $y_\sigma$  de  $u_i$ , sur  $\Gamma_{m-1}$ .



On peut écrire pour abrégé :

$$I'_n = - \sum w_i I'_{u_i} - f \left[ u_j ; \mathcal{S} \frac{\partial u_j}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} + w_j \cos(n, x_r) ; P \right].$$

Remarquons, d'autre part, que l'équation  $I'_n = H$  remplace le système :

$$I'_n = - \sum w_i I'_{u_i} - f, \quad \frac{\partial f}{\partial w_i} = - I'_{u_i} \quad (i = 1, \dots, k),$$

on a, dès lors :

$$\begin{aligned} \delta I'_n &= - \sum w_i \delta I'_{u_i} - \sum I'_{u_i} \delta w_i \\ &- \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i - \sum_i \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \delta \left\{ \mathcal{S} \frac{\partial u_j}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} + w_j \cos(x_r, n) \right\} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dn} \delta n, \end{aligned}$$

le dernier terme s'entendant aisément. Les termes en  $\delta w_i$  s'entredétruisent, car :

$$- I'_{u_i} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \cos(x_r, n) = 0 \quad (1).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \delta I'_n &= - \sum w_i \delta I'_{u_i} - \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i \\ (14) \quad &- \sum_i \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \left\{ \mathcal{S} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \delta \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} + \mathcal{S} \frac{\partial u_j}{\partial y_\sigma} \delta \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} + w_j \delta \cos(x_r, n) \right\} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dn} \delta n, \end{aligned}$$

or :

$$\delta \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} = \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \delta u_i,$$

on tire de (14)

$$L_i(\delta u_i) = - \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i - \sum_r \mathcal{S} \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial y_\sigma} (\delta u_i),$$

$$K_i(\delta I'_{u_i}) = - w_i \delta I'_{u_i},$$

$$M(\delta n) = - \sum_i \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \left[ \mathcal{S} \frac{\partial u_i}{\partial y_\sigma} \delta \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} + w_i \delta \cos(x_r, n) \right] - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dn} \delta n.$$

Or la condition d'intégrabilité obtenue plus haut exprime que la fonctionnelle :

$$(15) \quad M(\delta n) - \sum_i K_i[\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n - \mathcal{L}'_i(\delta n)] - \sum I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n)$$

doit être identique à son adjointe.

Mais cette fonctionnelle, linéaire en  $\delta n$ , contient dans le cas qui nous occupe, des

(1) Cf. p. 11, éq. (13).

termes de la forme :

$$A \delta n \quad \text{et} \quad A^\sigma \frac{\partial(\delta n)}{\partial y_\sigma},$$

où  $A$  et  $A^\sigma$  sont des fonctions de point sur  $\Gamma_{m-1}$ . Les termes  $A \delta n$  sont toujours identiques à leurs adjointes ; il faut, dès lors, pour que la condition d'intégrabilité soit satisfaite, que les coefficients de  $\frac{\partial(\delta n)}{\partial y_\sigma}$  forment une somme identiquement nulle. Il suffit donc de prendre dans chacun des termes de (15), le coefficient de  $\frac{\partial(\delta n)}{\partial y_\sigma}$ . Remarquons que tout d'abord <sup>(1)</sup> :

$$\mathcal{L}_i(\delta u_i) = -\frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i + \mathcal{S}_\sigma \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \left[ \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \sqrt{\gamma} \delta u_i \right]}{\partial y_\sigma}$$

Le terme de  $\sum K_i[L_i(\delta n)]$  qui nous intéresse est donc

$$-\sum_i \sum_r w_i \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \mathcal{S}_\sigma \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \frac{\partial(\delta n)}{\partial y_\sigma},$$

son coefficient est :

$$-\sum_i \sum_r w_i \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \quad (a).$$

On a d'autre part :

$$\frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} = \mathcal{S}_\alpha g^{\sigma\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$$

car de :

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial y_\rho} = g_{\sigma\rho} \quad \text{on tire} \quad \mathcal{S}_\sigma \sum_i g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial y_\rho} = \delta_{\rho}^{\tau} \begin{cases} = 0, & \text{si } \tau \neq \rho \\ = 1, & \text{si } \tau = \rho \end{cases},$$

puis :

$$\mathcal{S}_\rho \mathcal{S}_\sigma \sum_i g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial y_\rho} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_k} = \mathcal{S}_\rho \delta_{\rho}^{\tau} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_k} = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_k};$$

d'où ;

$$\sum_i \mathcal{S}_\sigma g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} \cdot \delta_i^k - \sum_i \mathcal{S}_\sigma g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_k},$$

<sup>(1)</sup> Il pourrait y avoir ici une petite difficulté dans la recherche de  $\mathcal{L}_i(\delta u_i)$  car on doit prendre l'adjointe d'une dérivée et comme le contour  $\Gamma_{m-1}$  du texte n'est pas fermé, il faut supposer qu'à  $\Gamma_{m-1}$  on adjoint un contour qui le ferme, et que sur ce nouveau contour  $\delta u_i = 0$  ; alors si l'on suppose encore que  $\delta u_i$  est continue sur tout le nouveau contour, l'adjointe de la dérivée est bien ce que nous donnons ici.

mais :

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = 0,$$

donc :

$$\sum_\sigma g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_k}{\partial y_\sigma} = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_k}.$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\delta \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} = \delta \left[ \sum_\tau g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_r}{\partial y_\tau} \right] = \sum_\tau \delta g^{\sigma\tau} \frac{\partial x_r}{\partial y_\tau} + \sum_\tau g^{\sigma\tau} \delta \frac{\partial x_r}{\partial y_\tau};$$

$g^{\sigma\tau}$  est une fonction rationnelle des  $g_{\lambda\mu}$ , et nous avons :

$$\delta g_{\lambda\mu} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda} \delta \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \delta \frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda};$$

mais :

$$\delta \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} = \frac{\partial}{\partial y_\mu} (\delta x_i) = \frac{\partial}{\partial y_\mu} [\cos(x_i, n) \delta n] = B \delta n + \cos(x_i, n) \frac{\partial \delta n}{\partial y_\mu},$$

$B \delta n$  désignant un terme où  $\delta n$  est en facteur, par conséquent :

$$\delta g_{\lambda\mu} = B \delta n + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\lambda} \cos(x_i, n) \frac{\partial \delta n}{\partial y_\mu} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \cos(x_i, n) \frac{\partial \delta n}{\partial y_\lambda};$$

mais :

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu} \cos(x_i, n) = 0 \quad [\text{condition d'orthogonalité}]$$

et par suite :

$$\delta g_{\lambda\mu} = B \delta n;$$

il en est donc de même de  $\delta g^{\sigma\tau}$ .

Ces calculs nous permettent de mettre  $M(\delta n)$  sous la forme :

$$M(\delta n) = B \delta n - \sum_j \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{jr}} \left[ \sum_\tau \sum_\rho \frac{\partial u_j}{\partial y_\tau} g^{\tau\sigma} \cos(x_r, n) \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} + w_j \delta \cos(x_r, n) \right].$$

On voit dans (15) que les termes :

$$- \sum_i I_{u_i} \sum_\rho \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \frac{\partial u_i}{\partial y_\rho} \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} - \sum_i \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \sum_\tau \sum_\sigma \frac{\partial u_i}{\partial y_\tau} g^{\tau\sigma} \cos(x_r, n) \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma},$$

s'entredétruisent car :

$$I_{u_i} = - \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{ir}} \cos(x_r, n).$$

Il reste donc le terme (a) et le terme qui provient de

$$- \sum_j \sum_r \frac{\partial f}{\partial p_{jr}} w_j \delta \cos(x_r, n).$$

Il suffit de montrer que :

$$- \mathbf{S} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_r} \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} - \delta \cos(x_r, n) = (\mathbf{S})$$

est de la forme  $B \delta n$ .

Nous allons faire voir que  $(\mathbf{S})$  est nulle.

On a, en effet, les identités :

$$(16) \quad \mathbf{S}_\sigma \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \delta_i^j \begin{cases} = 0, & \text{si } j \neq i \\ = 1, & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Or, on a tout d'abord :

$$(17) \quad \frac{\partial x_j}{\partial y_m} = \sqrt{g_{mn}} \cos(n, x_j);$$

multiplions (16) par  $\cos(n, x_j)$  et sommons par rapport à  $j$ , il vient :

$$\sum_j \cos(n, x_j) \frac{\partial x_j}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \cos(n, x_i),$$

car :

$$\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} \cos(n, x_j) = 0.$$

Par conséquent, à cause de (17), on a :

$$\sum_j \cos^2(n, x_j) \sqrt{g_{mm}} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \cos(n, x_i),$$

mais

$$\sum_j \cos^2(n, x_j) = 1$$

d'où

$$(18) \quad \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \cos(n, x_i).$$

Ces relations permettent d'écrire les identités (16) sous la forme :

$$\mathbf{S}_\sigma \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_i} + \cos(n, x_i) \cos(n, x_j) = \delta_i^j.$$

Appliquons l'opération  $\delta$  aux deux membres :

$$\mathbf{S}_\sigma \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} \delta \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_j} + \mathbf{S} \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_i} \delta \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} + \cos(n, x_i) \delta \cos(n, x_j) + \cos(n, x_j) \delta \cos(n, x_i) = 0$$

Multiplions par  $\cos (n, x_j)$  et sommons par rapport à  $j$ , mais auparavant rappelons que :

$$\begin{aligned} \sum_j \cos (n, x_j) \delta \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} &= \sum_j \cos (n, x_j) \frac{\partial}{\partial y_\sigma} [\cos (n, x_j) \delta n] \\ &= \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} + \delta n \sum_j \cos (n, x_j) \frac{\partial \cos (n, x_j)}{\partial y_\sigma} = \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} \quad (1). \end{aligned}$$

et que :

$$\sum_j \cos (n, x_j) \frac{\partial x_j}{\partial y_\sigma} = 0.$$

La sommation donne alors :

$$\sum_\sigma \frac{\partial y_\sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma} + \delta \cos (n, x_i) = 0,$$

c'est-à-dire précisément  $(S) = 0$ .

La condition d'intégrabilité est donc satisfaite car en changeant de système de coordonnées, on ne peut pas introduire de termes en  $\frac{\partial \delta n}{\partial y_\sigma}$ .

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

*L'intégrale stationnaire  $I = \int_{R_m} f dx_1 \dots dx_m$  satisfait à une équation aux dérivées fonctionnelles partielles.*

$$I'_n = - \left\{ \sum I'_{u_i} w_i + f \right\}$$

*qui est toujours intégrable, quelle que soit la fonction  $f$ .*

\*  
\*\*

#### b) Intégrales complètes et caractéristiques.

Avant d'aborder la théorie des caractéristiques de l'équation aux dérivées fonctionnelles que nous avons obtenue au chapitre III, il convient de faire quelques remarques sur les solutions qu'une équation générale comme l'équation (1) du § a du présent chapitre peut présenter.

Considérons tout d'abord une fonctionnelle  $I = F | [u_1, \dots, u_n, \Gamma; u_1^0, \dots, u_k^0, \Gamma^0] |$  dépendant de 2 contours  $\Gamma$  et  $\Gamma^0$  et de deux systèmes de  $k$  fonctions  $u_1, \dots, u_k$ , et

(1) Car  $\sum \cos^2 (x_j, n) = 1$ .

$u_1^0, \dots, u_k^0$  définies respectivement sur  $\Gamma$  et sur  $\Gamma^0$ . Si l'on forme les dérivées fonctionnelles sur  $\Gamma$  :

$$I'_{u_i} = F'_{u_i} \quad I'_n = F'_n,$$

on pourra se proposer, si cela a un sens, d'éliminer les  $k$  fonctions  $u_i^0$  et le contour  $\Gamma^0$  entre ces  $k + 1$  équations et l'équation  $I = F$ . On obtiendra alors une relation entre les  $I'_{u_i}$ ,  $I'_n$  et  $I$  qui, résolue par rapport à  $I'_n$  aura la forme (1). On se rend compte que cette indication est assez vague. Nous allons la particulariser en supposant que dans l'expression de  $I$ , le contour  $\Gamma^0$  est fixe. On cherchera alors à éliminer les  $u_i^0$  entre les équations  $I'_{u_i} = F'_{u_i}$  et  $I'_n = F'_n$ . Si cela est possible, on obtiendra une équation aux dérivées fonctionnelles partielles ne contenant pas  $I$ , le contour  $\Gamma^0$  n'y jouant plus aucun rôle puisqu'il est censé être fixe.

Nous dirons qu'une fonctionnelle  $F$  dépendant de  $2k$  fonctions arbitraires  $u_i^0$  et  $u_i$ , et d'un contour variable  $\Gamma$ , est une intégrale complète d'une équation aux dérivées fonctionnelles partielles, où  $I$  ne figure pas, si l'élimination des  $u_i^0$  entre les équations :

$$I'_n = F'_n \quad \text{et} \quad I'_{u_i} = F'_{u_i}$$

conduit à l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles donnée et à celle-là seulement (1).

La différentielle  $\delta_1 I$  d'une intégrale complète prend la forme (2) :

$$(1) \quad \delta_1 I = \int_{\Gamma} \left[ \sum_i I'_{u_i} \delta_1 u_i + I'_n \delta_1 n \right] d\sigma + \int_{\Gamma^0} I''_{u_i^0} \delta_1 u_i^0 d\sigma^0,$$

les  $I'_{u_i}$  pouvant dépendre des  $u_i^0$  comme d'ailleurs les  $I''_{u_i^0}$  peuvent dépendre des  $u_j$  et de  $\Gamma$ . Cherchons des conditions auxquelles doivent satisfaire les variations des dérivées de  $I$  pour que l'on ait  $\delta \delta_1 I = \delta_1 \delta I$ . A première vue, il semble que l'on pourrait gagner en simplicité en ramenant l'intégrale le long de  $\Gamma^0$  qui figure dans (1) à une intégrale le long de  $\Gamma$ , en posant  $d\sigma^0 = \frac{\sqrt{\gamma^0}}{\sqrt{\gamma}} d\sigma$  et en exprimant les  $u_i^0$  et les  $u_i$  au moyen des seules variables  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , par l'intermédiaire d'une famille ( $F$ ) dont  $\Gamma$  et  $\Gamma^0$  seraient des représentants. En fait, on altérerait le caractère intrinsèque des calculs et il vaut mieux conserver la forme (1) pour  $\delta_1 I$ .

Posons alors :

$$\delta I'_{u_i} = \sum_j E_{ij}(\delta u_j) + \sum_j E''_{ij}(\delta u_j^0) + F'_i(\delta n) + A_i(\delta.),$$

$$\delta I''_{u_i^0} = \sum_j M_{ij}(\delta u_j) + \sum_j M''_{ij}(\delta u_j^0) + N_i(\delta n),$$

$$\delta I'_n = \sum_i X_i(\delta u_i) + \sum_i X''_i(\delta u_i^0) + G(\delta n) + B(\delta.).$$

(1) Pour ces éliminations, voir la note à la fin de ce mémoire.

(2) On est obligé d'écrire  $\delta_1 I$  au moyen de 2 contours car les  $u_i$  et les  $u_i^0$  sont des groupes de fonctions qui peuvent être considérées sur deux contours différents ; la définition que nous venons de donner de l'intégrale complète ne suppose qu'un contour  $\Gamma$  dans l'expression de  $F$ , mais on doit distinguer pour la suite 2 contours pour fixer les dérivées  $I'_{u_i}$  et les dérivées  $I''_{u_i^0}$ .

Les fonctionnelles qui figurent dans les seconds membres sont linéaires par rapport à leurs arguments ; on disposera des  $A_i$  et de  $B$  de façon à avoir des relations simples. On a :

$$\begin{aligned} \delta\delta_1 I = & \int_{\Gamma} \left[ \sum_i \sum_j E_{ij}(\delta u_j) \delta_1 u_i + \sum_i \sum_j E_{ij}^0(\delta u_j^0) \delta_1 u_i + \sum_i F_i(\delta n) \delta_1 u_i + \sum_i A_i(\delta \cdot) \delta_1 u_i \right. \\ & + \sum_i X_i(\delta u_i) \delta_1 n + \sum_i X_i^0(\delta u_i^0) \delta_1 n + G(\delta n) \delta_1 n + B(\delta \cdot) \delta_1 n \\ & + \sum_i I_{u_i} \delta \delta_1 u_i + I_n \delta \delta_1 n + \bar{\Gamma} \left( \sum_i I_{u_i} \delta_1 u_i + I_n \delta_1 n \right) \delta n \left. \right] d\sigma \\ + \int_{\Gamma^0} & \left[ \sum_i \sum_j M_{ij}(\delta u_j) \delta_1 u_i^0 + \sum_i N_i(\delta n) \delta_1 u_i^0 + \sum_i \sum_j M_{ij}^0(\delta u_j^0) \delta_1 u_i^0 \right. \\ & \left. + \sum_i C_i(\delta \cdot) \delta_1 u_i^0 + \sum_i I'_{u_i} \delta \delta_1 u_i^0 \right] d\sigma^0. \end{aligned}$$

Ce second membre doit être symétrique en  $\delta$  et  $\delta_1$ , si l'on particularise  $\delta$  et  $\delta_1$ , en ne les faisant porter que sur  $\Gamma$  et les  $u_i$ , on trouve, en prenant :

$$\begin{aligned} A_i(\delta \cdot) &= -\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n, \\ B(\delta \cdot) &= \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n), \end{aligned}$$

que :

$E_{ij}$  est identique, sur  $\Gamma$ , à l'adjointe de  $E_{ji}$ ,  $X_i$  à l'adjointe de  $F_i$  et que  $G$  est sa propre adjointe.

En faisant porter  $\delta$  et  $\delta_1$  sur les  $u_i^0$  seulement, on trouve que :

$M_{ij}^0$  est, sur  $\Gamma^0$ , l'adjointe de  $M_{ji}^0$  ; il faut remarquer ici que  $\delta\delta_1 u_i^0 = \delta_1 \delta u_i^0$  puisque  $\Gamma^0$  est invariable (1).

Il suffit d'écrire ensuite que l'ensemble des termes restants :

$$\int_{\Gamma} \sum_i \sum_j \left[ E_{ij}^0(\delta u_j^0) \delta_1 u_i + \sum_i X_i^0(\delta u_i^0) \delta_1 n \right] d\sigma + \int_{\Gamma^0} \left[ \sum_i \sum_j M_{ij}(\delta u_j) \delta_1 u_i^0 + \sum_i N_i(\delta n) \delta_1 u_i^0 \right] d\sigma^0,$$

est symétrique en  $\delta$  et  $\delta_1$ . En particulierisant encore  $\delta$  et  $\delta_1$ , on doit avoir :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} E_{ij}^0(\delta u_j^0) \delta_1 u_i d\sigma &= \int_{\Gamma^0} M_{ji}(\delta_1 u_i) \delta u_j^0 d\sigma^0, \\ \int_{\Gamma} X_i^0(\delta u_i^0) \delta_1 n d\sigma &= \int_{\Gamma^0} N_i(\delta_1 n) \delta u_i^0 d\sigma^0. \end{aligned}$$

Il convient alors de définir une nouvelle notion. Soient deux fonctionnelles  $A^0$  et  $\bar{A}$

---

(1) En fait, nos hypothèses sur  $\Gamma^0$  reviennent à dire que les  $u_i^0$  sont donnés sur un autre contour que  $\Gamma$ , et que  $\Gamma$  est seul variable, entraînant dans sa variation, les variations des  $u_i$ .

dépendant de deux contours  $\Gamma$  et  $\Gamma^0$ , à la fois, la première étant linéaire sur  $\Gamma^0$ , la seconde sur  $\Gamma$ . On dira que  $\bar{A}$  est l'associée de  $A^0$  par rapport aux deux contours  $\Gamma$  et  $\Gamma^0$ , si l'on a :

$$\int_{\Gamma} A^0[x^0(P^0)]y(P)d\sigma_P = \int_{\Gamma^0} \bar{A}[y(P)]x^0(P^0)d\sigma_{P^0};$$

on a mis en évidence les arguments dont  $A^0$  et  $\bar{A}$  dépendent linéairement. Cette relation doit avoir lieu pour toutes les fonctions  $x^0(P^0)$  et  $y(P)$  pour lesquelles  $A^0$  et  $\bar{A}$  ont un sens, ainsi que les intégrales précédentes.

Une fonctionnelle  $A^0$  n'admet qu'une seule associée par rapport à  $\Gamma$  et  $\Gamma^0$ , car si  $\bar{B}$  était aussi une associée de  $A^0$ , on aurait :

$$\int_{\Gamma^0} \left\{ \bar{A}[y(P)] - \bar{B}[y(P)] \right\} x^0(P^0)d\sigma_{P^0} = 0,$$

quelle que soit  $x^0(P^0)$ ; cela entraîne  $\bar{A} = \bar{B}$ . On peut montrer d'ailleurs que

$$\bar{A}[y(P)] = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma^0}} \mathfrak{A}^0[y(P)],$$

$\mathfrak{A}^0$  étant l'adjointe de  $A^0$  sur  $\Gamma^0$ .

On voit donc que  $M_{ij}$  est l'associée de  $E_{ji}^0$ , ( $M_{ij} = \bar{E}_{ji}^0$ ) et que  $N_i$  l'est de  $X_i^0$ , ( $N_i = \bar{X}_i^0$ ).

On est donc assuré que  $\delta\delta_1 I = \delta_1\delta I$  si

$$\begin{aligned} \delta I_{u_i} &= \sum_j E_{ij}(\delta u_j) + \sum_j E_{ij}^0(\delta u_j^0) + F_i(\delta n) - \Gamma I_{u_i}' \delta n, \\ \delta I_{u_i^0} &= \sum_j \bar{E}_{ji}^0(\delta u_j) + \sum_j M_{ij}^0(\delta u_j^0) + \bar{X}_i(\delta n), \\ \delta I_n &= \sum_i \mathcal{F}_i(\delta u_i) + \sum_i X_i^0(\delta u_i^0) + G(\delta n) + \sum_i I_{u_i}' \nabla(u_i, \delta n), \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{E}_{ji} = E_{ij}, \quad G = \mathcal{G} \quad \text{sur } \Gamma$$

et

$$\mathcal{M}_{ji}^0 = M_{ij}^0 \quad \text{sur } \Gamma^0.$$

Ces résultats permettront de donner du théorème généralisé de *Jacobi* une démonstration calquée sur celle que nous avons donnée, d'après *Jordan*, du théorème classique.

Il convient maintenant de transposer le problème de *Cauchy* pour une équation telle que (1, § a), dont on suppose, bien entendu, qu'elle satisfasse aux conditions d'intégrabilité. On cherchera une solution  $I$  de cette équation, qui se réduise pour le contour arbitraire  $\mathcal{C}^0$  à une fonctionnelle arbitraire  $I_0$ , dépendant de  $k$  fonctions arbitraires  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . Les



$u_i$  sont définies dans  $R_m$  et elles sont choisies dans un champ fonctionnel donné *a priori*. Pour un choix des  $u_i$ , il est facile de calculer leurs valeurs sur  $\mathcal{C}^0$ . On peut déterminer  $\delta I$  lorsqu'on donne aux  $u_i$  des variations  $\delta u_i$  <sup>(1)</sup> qui ne les font pas sortir du champ fonctionnel choisi et qu'on fait varier  $\mathcal{C}^0$  à l'intérieur d'une famille  $(F)$ . On cherche à calculer ensuite  $\delta^2 I$ ,  $\delta^3 I$ , etc..., et par suite de la définition des différentielles successives d'une fonctionnelle <sup>(2)</sup>, on a, pour la valeur de  $I$  sur le nouveau contour  $\mathcal{C}$  :

$$(2) \quad I = I_0 + \delta I + \frac{1}{2} \delta^2 I + \dots$$

Le problème qui nous occupe peut donc se formuler de la manière suivante : Trouver un développement (2) satisfaisant à (1, § a) étant donné le premier terme  $I_0$ . Le langage géométrique imaginé par M. Lévy fournira un énoncé plus intuitif.

Supposons que la donnée de  $k$  fonctions  $u_1, \dots, u_k$ , d'un contour  $\Gamma$ , et de la fonctionnelle  $I | [u_1, \dots, u_k; \Gamma] |$  définisse un être mathématique que nous nommerons un « point ». Une équation de la forme :

$$(3) \quad I = I | [u_1, \dots, u_k; \Gamma] |,$$

si l'on imagine que les  $u_i$ , et  $\Gamma$  soient des arguments variables, dont les premiers peuvent prendre toutes les valeurs possibles à l'intérieur d'un champ fonctionnel, et dont le dernier varie à l'intérieur d'une famille  $(F)$ , définit un ensemble de « points » qu'on appelle une « surface » fonctionnelle  $S_{k+1}$  dépendant de  $k+1$  variables indépendantes. Si  $I$  ne dépend que d'une des « coordonnées »  $u_1, \dots, u_k$  ou  $\Gamma$ , de  $\Gamma$  par exemple, et les  $u_i$  dépendant aussi de  $\Gamma$ , — fonctionnellement bien entendu, — on dira que les équations :

$$\begin{cases} I = I | [\Gamma] | \\ u_i = u_i | [\Gamma] | \end{cases} \quad (i = 1, \dots, k)$$

définissent une « courbe »  $S_1$ . Une surface  $S_{k+1}$  contient une courbe  $S_1$ , si l'équation de  $S_{k+1}$  se réduit à la première équation de  $S_1$ , lorsqu'on remplace dans l'équation de  $S_{k+1}$  les  $u_i$  par leurs valeurs données par les  $k$  dernières équations de  $S_1$ . On peut encore définir les surfaces  $S_{j+1}$  ( $j < k$ ) comme un « lieu de points » :

$$(4) \quad I = I | [v_1, v_2 \dots v_j; \Gamma] |,$$

les fonctions  $v_j$  étant choisies dans un champ fonctionnel, et les  $u_i$  étant des fonctionnelles dépendant des  $j$  fonctions  $v_1, \dots, v_j$  et de  $\Gamma$  :

$$(5) \quad u_i = u_i | [v_1, \dots, v_j; \Gamma] | \quad (i = 1, \dots, k).$$

Une  $S_{k+1}$  contient une  $S_{j+1}$  si l'équation (3) de la  $S_{k+1}$  se réduit à l'équation (4) de la  $S_{j+1}$ , lorsqu'on assujettit les arguments  $u_i$  de (3) à satisfaire aux équations (5).

<sup>(1)</sup> C'est même la donnée du champ fonctionnel qui définit les  $\delta u_i$ . Par exemple, si le champ fonctionnel est formé de fonctions  $u_i$  dépendant d'un paramètre  $\alpha$ , on aura  $\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} \delta \alpha$ , à quoi il

faudra ajouter la différentielle  $du_i = \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ , s'il y a lieu.

<sup>(2)</sup> Cf. Lévy, Leçons, p. 79.

Le problème de *Cauchy* revient donc au problème suivant : Trouver une  $S_{k+1}$ , solution de (1, § a) qui contiendra une  $S_k$  donnée.

Reprenons les calculs qui permettent de trouver  $\delta I, \delta^2 I, \dots$ . Nous avons :

$$\delta I = \int_{\mathcal{C}^0} \left[ \sum I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma,$$

les  $I'_{u_i}$  et  $I'_n$  étant ici les dérivées fonctionnelles de  $I_0$ . On a ensuite :

$$\delta^2 I = \delta \int_{\mathcal{C}^0} \left[ \sum I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] d\sigma.$$

Ce seront les formules (8) du chapitre IV, § a, qui permettront de calculer les  $\delta I'_{u_i}$  pourvu que l'on connaisse les  $E_{ij}$ , les  $F_i$ , et  $G$ . Or sur  $\mathcal{C}^0$ , on peut déterminer les variations  $[\delta I'_{u_i}]$  et  $[\delta I'_n]$ , les premières se déterminant à partir de  $I_0$  et la dernière, en différentiant (1, § a) et en tenant compte des premières. Or, on sait qu'en vertu de l'équation (1, § a) elle-même, on a

$$\mathcal{F}_i(\delta u_i) = \sum_{j=1}^{j=k} K_j [E_{ji}(\delta u_i)] + L_i(\delta u_i)$$

et que, par conséquent :

$$F_i(\delta u_i) = \sum_{j=1}^{j=k} E_{ij} [\mathcal{J}C_j(\delta u_i)] + L_i(\delta u_i);$$

d'autre part :

$$G(\delta n) = \sum_{i=1}^{i=k} K_i [F_i(\delta n)] - \sum_{i=1}^{i=k} K_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + M(\delta n) - \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n),$$

ou, puisque  $G$  est identique à son adjointe :

$$G(\delta n) = \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{F}_i [\mathcal{J}C_i(\delta n)] - \sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{J}C_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + \mathcal{N}(\delta n) - adj. \sum_{i=1}^{i=k} I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n).$$

Par conséquent, en substituant dans les équations (8, § a),  $[\delta I'_{u_i}]$  à  $\delta I'_{u_i}$  et  $[\delta I'_n]$  à  $\delta I'_n$ , et en remplaçant  $F_i, \mathcal{F}_i$  et  $G$  par leurs valeurs, il vient :

$$[\delta I'_{u_i}] = \sum_j E_{ij} \{ \delta u_j + \mathcal{J}C_j(\delta n) \} + L_i(\delta n) - \bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n,$$

$$[\delta I'_n] = \sum_j \mathcal{F}_j \{ \delta u_j + \mathcal{J}C_j(\delta n) \} - \sum_i \mathcal{J}C_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + \mathcal{N}(\delta n) - adj. \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n).$$

Or, par suite des conditions d'intégrabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\delta n) - \sum_i \mathcal{J}C_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) - adj. \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n) + \sum_i I'_{u_i} \nabla(u_i, \delta n) \\ = M(\delta n) - \sum_i K_i (\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + \sum_i K_i [L_i(\delta n)] - \sum_i L_i [\mathcal{J}C_i(\delta n)]. \end{aligned}$$

Par conséquent .

$$[\delta I'_n] = \sum_j \mathcal{F}_j \{ \delta u_j + \mathcal{K}_j(\delta n) \} - \sum_j K_j(\bar{\Gamma} I'_{u_j} \delta n) + M(\delta n) + \sum_j K_j[\mathcal{L}_j(\delta n)] - \sum_j L_j[\mathcal{K}_j(\delta n)].$$

Ces relations doivent permettre d'obtenir, si on sait les résoudre, les fonctionnelles  $E_{i_j}$  et  $\mathcal{F}_j$  sur la  $S_k$  donnée. Cela pourrait être possible pour autant que l'on n'ait pas :

$$\delta u_j + \mathcal{K}_j(\delta n) = 0.$$

Les équations précédentes seraient alors impossibles ou indéterminées ; elles seraient indéterminées, et par suite, le problème de *Cauchy* pourrait aussi l'être, seulement au cas où l'on aurait :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\delta I'_{u_i}] = \mathcal{L}_i(\delta n) - \bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n, \\ [\delta I'_n] = - \sum_j K_j(\bar{\Gamma} I'_{u_j} \delta n) + M(\delta n) + \sum_i K_i[\mathcal{L}_i(\delta n)] - \sum_i L_i[\mathcal{K}_i(\delta n)]. \end{array} \right.$$

Comme pour la théorie des équations aux dérivées partielles, nous abandonnons ici le problème de *Cauchy* tant pour ce qui est de la convergence du développement (2) et de son prolongement, que pour ce qui est de la détermination des  $\delta^n I$  pour  $n > 2$  (1). Reprenons les conditions d'indétermination (6) et interprétons-les géométriquement. Si la  $S_k$  par où doit passer la  $S_{k+1}$ , solution de *Cauchy* est un lieu de courbes telles que l'on ait pour chacune d'elles :

$$(7) \quad \delta u_i + \mathcal{K}_i(\delta n) = 0 ;$$

on peut être assuré, qu'en aucun point de  $S_k$ , on ne peut déterminer univoquement les fonctionnelles  $E_{i_j}$ ,  $\mathcal{F}_i$  et  $G$ . Il convient pour être plus intuitif encore, de généraliser le langage géométrique.

On dira que la donnée de  $I, u_1, \dots, u_k, \Gamma, I_{u_1}, \dots, I'_{u_k}, I'_n$  définit un élément de contact dans l'« espace » où nous avons défini les points  $(I, u_1, \dots, u_k, \Gamma)$ . Deux éléments de contact tels que les nombres qui les définissent sont infiniment voisins 2 à 2, sont dits unis si l'on a :

$$\delta I = \int_{\Gamma} \left[ \sum_i I'_{u_i} \delta u_i + I'_n \delta n \right] ds.$$

Deux éléments de contact voisins sur une  $S_{k+1}$  sont unis ; nous dirons que chacun d'eux est tangent à la  $S_{k+1}$  au point considéré.

Etant donné une équation  $I'_n + \Phi = 0$  comme (1, § a) nous dirons qu'un élément de contact en est un élément de contact intégral si l'équation précédente est satisfaite par les « coordonnées » de cet élément.

Considérons alors les équations :

$$(8) \quad \delta u_i + \mathcal{K}_i(\delta n) = 0,$$

---

(1) Nous ne chercherons pas si l'indétermination se poursuit dans le calcul des éléments d'ordre supérieur, comme cela a lieu pour les équations aux dérivées partielles.

$$(9) \quad \begin{cases} [dI'_{u_i}] = \mathcal{L}_i(\delta n) - \bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n, \\ [dI'_n] = - \sum_i K_i(\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) + M(\delta n) + \sum_i K_i[\mathcal{L}_i(\delta n)] - \sum_i L_i[\mathcal{J}K_i(\delta n)]. \end{cases}$$

Ce sont des équations aux dérivées fonctionnelles ordinaires ; nous supposons qu'elles sont intégrables. Elles déterminent alors des multiplicités d'éléments de contact que nous appellerons *caractéristiques*. Une caractéristique est bien déterminée par la donnée de ses coordonnées initiales  $I, u_1, \dots, u_k, I'_{u_1}, \dots, I'_{u_k}, I_n$  pour un contour initial donné (cf. *infra*, théorème  $\alpha$ ), mais, comme d'après une remarque de *M. Lévy* <sup>(1)</sup>, les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites par des éléments de contact quelconques, il faut que les coordonnées initiales définissent un élément de contact intégral.

D'après une autre remarque de *M. Lévy* <sup>(2)</sup>, qu'il a faite d'ailleurs pour d'autres équations, mais qu'on peut appliquer *mutatis mutandis* à notre étude, les équations (8) expriment que les fonctionnelles  $E_{ij}, \mathcal{F}_i, G$  disparaissent des équations qui devraient les déterminer. Les équations (9) expriment qu'il y a indétermination pour les recherches de ces fonctionnelles et non pas impossibilité. Si alors on cherche les caractéristiques situées sur une  $S_{k+1}$ , solution de (I, § a), telle que, en chacun de ses points  $I$  ait une différentielle seconde  $\delta^2 I$ , alors les équations (9) sont une conséquence de (8) et de (I, § a).

On peut d'ailleurs faire voir que la dernière équation (9), est une conséquence des  $k$  premières équations (9), des équations (8) et de (I, § a) même si l'on cherche des caractéristiques qui ne sont pas situées sur une surface intégrale. En effet, de (I, § a), on tire :

$$[\delta I'_n] = \sum_i K_i \left\{ [\delta I'_{u_i}] \right\} + \sum L_i(\delta u_i) + M(\delta n).$$

Remplaçons  $[\delta I'_{u_i}]$  et  $\delta u_i$  par leurs expressions il vient :

$$[\delta I'_n] = \sum_i K_i[\mathcal{L}_i(\delta n)] - \sum_i K_i(\bar{\Gamma} I'_{u_i} \delta n) - \sum_i L_i[\mathcal{J}K_i(\delta n)] + M(\delta n),$$

ce qui démontre notre affirmation.

En admettant toujours l'intégrabilité des équations des caractéristiques, on peut démontrer, en suivant pas à pas les démonstrations de *M. P. Lévy* <sup>(3)</sup> les deux théorèmes :

$\alpha$ ) *La donnée d'un élément de contact intégral, détermine parfaitement une caractéristique* <sup>(4)</sup>.

$\beta$ ) *Toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques.*

Sur une caractéristique,  $u_i$ , les  $I'_{u_i}, I'_n$  sont des fonctionnelles du contour variable  $\Gamma$ .

<sup>(1)</sup> *Lévy*, Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles, Rendic. di Palermo, t. 37-1914, p. 41 du tirage à part.

<sup>(2)</sup> Leçons, p. 219.

<sup>(3)</sup> Cf. Leçons p. 220-221.

<sup>(4)</sup> Il s'agit ici d'un élément de contact intégral non singulier ; un élément singulier est précisément défini par la condition que le théorème d'existence des équations (8) et (9) soit en défaut. Pour ces éléments, il peut y avoir plusieurs caractéristiques les contenant [Cf. Leçons, p. 220].

Lorsqu'on passe d'un point de  $\Gamma$  au point correspondant [par la trajectoire orthogonale] du contour voisin, on a  $\delta u_i = \frac{du_i}{dn} \delta n$ ; on désignera cette variation par  $du_i$  et les équations des caractéristiques s'écrivent dès lors :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} du_i + \mathcal{K}_i(dn) = 0, \\ [dI'_{u_i}] = \mathcal{L}_i(dn) - \bar{\Gamma} I'_{u_i} dn, \\ [dI'_n] = - \sum_i K_i(\bar{\Gamma} I'_{u_i} dn) + M(dn) + \sum_i K_i[\mathcal{L}_i(dn)] - \sum_i L_i[\mathcal{K}_i(dn)]. \end{array} \right.$$

Jusqu'ici nous avons admis que les équations des caractéristiques sont intégrables. Nous allons démontrer ce point là. Les équations (9) seront intégrables pour des éléments intégraux si les équations (8) le sont et si  $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s} a)$  l'est.

Démontrons que les équations

$$du_i + \mathcal{K}_i(dn) = 0$$

sont complètement intégrables si l'équation  $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s} a)$  est intégrable; cela revient à montrer que

$$d_1 du_i + \nabla(u_i, d_1 n) dn$$

est symétrique en  $dn$  et  $d_1 n$  si  $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s} a)$  est intégrable.

Cette démonstration exige quelques préliminaires <sup>(1)</sup>. On a tout d'abord :

$$-\delta\Phi = \sum_i K_i(\delta I'_{u_i}) + \sum_i L_i(\delta u_i) + M(\delta n).$$

Posons alors :

$$\partial_i K_i(\delta I'_{u_i}) = \sum_j K_i^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) + \sum_j K_{i/j}(\partial_i u_j, \delta I'_{u_i}) + K_i^n(\partial_i n, \delta I'_{u_i}) + K_i(\partial_i \delta I'_{u_i}),$$

$$\partial_i L_i(\delta u_i) = \sum_j L_i^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta u_i) + \sum_j L_{i/j}(\partial_i u_j, \delta u_i) + L_i^n(\partial_i n, \delta u_i) + L_i(\partial_i \delta u_i),$$

$$\partial_i M(\delta n) = \sum_j M^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta n) + \sum_j M_{j/i}(\partial_i u_j, \delta n) + M^n(\partial_i n, \delta n) + M(\partial_i \delta n) \quad (2).$$

Mais si l'on remarque que  $\partial_i \delta\Phi = \delta\partial_i \Phi$ , on doit avoir, en traitant les  $\delta I'_{u_i}$  et les  $\delta u_i$  comme des arbitraires, (ce qui est permis) certaines relations entre les fonctionnelles nouvelles que nous venons de définir.

Voici celles qui nous seront utiles :

$$K_i^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) = K_j^i(\delta I'_{u_i}, \partial_i I'_{u_j}),$$

$$L_i^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta u_i) = K_{j/i}(\delta u_i, \partial_i I'_{u_j}),$$

$$M^j(\partial_i I'_{u_j}, \delta n) = K_j^n(\delta n, \partial_i I'_{u_j}).$$

<sup>(1)</sup> Cf. *L vy* : Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles; Rendic. di Palermo, t. 37, 1914, p. 48 du tirage séparé.

<sup>(2)</sup> Les fonctionnelles qui sont dans les seconds membres sont linéaires par rapport à chacun des arguments dont elles dépendent; ce sont des fonctionnelles bilinéaires lorsqu'elles dépendent de deux arguments.

Il faut encore trouver les adjointes de ces fonctionnelles bilinéaires. Posons d'abord :

$$\delta_1 \mathcal{K}_i(\delta I'_{u_i}) = \sum_j k_i^j(\delta_1 I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) + \sum_j k_{i/j}(\delta_1 u_j, \delta I'_{u_i}) + k_i^n(\delta_1 n, \delta I'_{u_i}) + \mathcal{K}_i(\delta_1 \delta I'_{u_i}),$$

nous avons :

$$k_i^j(\delta_1 I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) = \mathcal{K}'_i(\delta_1 I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) = \text{adjointe de } K_i^j(\delta_1 I'_{u_j}, \delta I'_{u_i})$$

par rapport au second argument, car de l'égalité :

$$(11) \quad \int_{\Gamma} x(P) K_i(\delta I'_{u_i}) d\sigma_P = \int_{\Gamma} \delta I'_{u_i} \mathcal{K}_i[x(P)] d\sigma_P,$$

où  $x(P)$  est une fonction quelconque, on tire, en variant  $I'_{u_j}$  de  $\delta_1 I'_{u_j}$  :

$$\int_{\Gamma} x(P) K_i^j(\delta_1 I'_{u_j}, \delta I'_{u_i}) d\sigma_P = \int_{\Gamma} \delta I'_{u_i} k_i^j[\delta_1 I'_{u_j}, x(P)] d\sigma_P.$$

On a de même :

$$k_{i/j} = \mathcal{K}_{i/j},$$

mais pour  $k_i^n$ , les choses diffèrent. De l'équation (11), on tire, en variant les fonctionnelles suivant le contour, c'est-à-dire en soumettant le contour à une variation  $\delta_1 n$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ x(P) K_i^n(\delta_1 n, \delta I'_{u_i}) + \frac{dx}{dn} \delta_1 n K_i(\delta I'_{u_i}) + x(P) K_i(\delta_1 \delta I'_{u_i}) + x(P) \sum_j K_i^j \left( \frac{dI'_{u_j}}{dn} \delta_1 n, \delta I'_{u_i} \right) \right. \\ & \quad \left. + x(P) \sum_j K_{i/j} \left( \frac{du_j}{dn} \delta_1 n, \delta I'_{u_i} \right) + x(P) K_i \left( \frac{d\delta I'_{u_i}}{dn} \delta_1 n \right) + x(P) K(\delta I'_{u_i}) \bar{\Gamma} \delta_1 n \right] d\sigma_P \\ & = \int_{\Gamma} \left[ \delta I'_{u_i} [k_i^n(\delta_1 n, x(P))] + k_i \left( \frac{dx}{dn} \delta_1 n \right) + \sum_j k_i^j \left[ \frac{dI'_{u_j}}{dn} \delta_1 n, x(P) \right] \right. \\ & \quad \left. + \sum_j k_{i/j} \left[ \frac{du_j}{dn} \delta_1 n, x(P) \right] + \mathcal{K}_i \left[ \frac{dx(P)}{dn} \delta_1 n \right] + \mathcal{K}_i[x(P)] \bar{\Gamma} \delta_1 n + \frac{d\delta I'_{u_i}}{dn} \mathcal{K}_i[x(P)] \delta_1 n \right] d\sigma_P; \end{aligned}$$

or, d'après ce qu'on vient de voir relativement à  $k_i^j$  et  $k_{i/j}$ , on voit que l'on doit avoir :

$$\int_{\Gamma} x(P) [K_i^n(\delta_1 n, \delta I'_{u_i}) + K_i(\delta I'_{u_i}) \bar{\Gamma} \delta_1 n] d\sigma_P = \int_{\Gamma} \delta I'_{u_i} [k_i^n \delta_1 n, x(P)] + \mathcal{K}_i[x(P)] \bar{\Gamma} \delta_1 n d\sigma_P,$$

ce qui prouve que  $k_i^n$  n'est pas l'adjointe de  $K_i^n$  mais que :

$$\text{adj. } K_i^n[\delta_1 n, x(P)] = k_i^n[\delta_1 n, x(P)] + \mathcal{K}_i[x(P)] \bar{\Gamma} \delta_1 n - \mathcal{K}_i[\bar{\Gamma} \delta_1 n \cdot x(P)].$$

Cela s'entend pour le second argument. On aurait les mêmes relations pour les  $L_i$  et pour  $M$ .

On peut maintenant calculer  $d_1 du_i$  :

$$d_1 du_i = - \sum_j k_i^j(d_1 I'_{u_j}, dn) - \sum_j k_{i/j}(d_1 u_j, dn) - k_i^n(d_1 n, dn) - \mathcal{K}_i(d_1 du_i).$$

On remplace  $d_1 I'_{u_j}$  et  $d_1 u_i$  par leurs valeurs, et il suffit alors de chercher les conditions pour que :

$$(12) \quad - \sum_j \mathcal{K}_i^j[\mathcal{L}_j(d_1n), dn] + \sum_j \mathcal{K}_i^j[\bar{\Gamma}I_{u_j}d_1n, dn] \\ + \sum_j \mathcal{K}_{i/j}[\mathcal{K}_j(d_1n), dn] - k_i^n(d_1n, dn) + \nabla(u_i, d_1n)dn,$$

soit symétrique en  $dn$  et  $d_1n$ . Or on peut montrer qu'il en est bien ainsi si les conditions d'intégrabilité de (I, § a) sont satisfaites. Ces conditions expriment que :

$$\sum_i K_i[\mathcal{L}_i(d_1n)] + M(d_1n) - \sum_i K_i[\bar{\Gamma}I_{u_i}d_1n] - \sum_i I_{u_i}\nabla(u_i, d_1n)$$

est une fonctionnelle identique à son adjointe. Cela est encore vrai pour la fonctionnelle que l'on obtient en différentiant la précédente par rapport à  $I_{u_j}^{(1)}$ . Ainsi donc la fonctionnelle :

$$\sum_i K_i^j[\delta I_{u_j}^{(1)}, \mathcal{L}_i(d_1n)] + \sum_i K_i[l_i^j(\delta I_{u_j}^{(1)}, d_1n)] + M^j(\delta I_{u_j}^{(1)}, d_1n) - \sum_i K_i^j(\delta I_{u_j}^{(1)}, \bar{\Gamma}I_{u_i}d_1n) \\ - K_j(\bar{\Gamma}d_1n \cdot \delta I_{u_j}^{(1)}) - \delta I_{u_j}^{(1)}\nabla(u_j, d_1n)$$

doit être identique à son adjointe (relativement aux seconds arguments quand il y en a deux). Or dans une telle somme, on peut toujours remplacer un terme par son adjointe changée de signe, le résultat est encore identique à son adjointe ; c'est ce que nous ferons pour le second terme. Dire que l'expression qui dépend de  $d_1n$  est identique à son adjointe, c'est dire que multipliée par  $dnd\sigma$  et intégrée sur  $\Gamma_{m-1}$ , le résultat est symétrique en  $dn$  et  $d_1n$ . Or :

$$\int \sum_i K_i^j[\delta I_{u_j}^{(1)}, \mathcal{L}_i(d_1n)]dnd\sigma = \int \sum_i K_i^j[\mathcal{L}_i(d_1n), \delta I_{u_j}^{(1)}]dnd\sigma \\ = \int \delta I_{u_j}^{(1)} \sum_j \mathcal{K}_j^i[\mathcal{L}_i(d_1n), dn]d\sigma \quad (a)$$

$$\int \sum_i K_i[l_i^j(\delta I_{u_j}^{(1)}, d_1n)]dnd\sigma \quad \text{est remplacé par} \\ - \int \sum_i L_i^j[\delta I_{u_j}^{(1)}, \mathcal{K}_i(d_1n)]dnd\sigma = - \int \sum_i K_{j/i}[ \mathcal{K}_i(d_1n), \delta I_{u_j}^{(1)}]dnd\sigma \\ = - \int \delta I_{u_j}^{(1)} \sum_i K_{j/i}[\mathcal{K}_i(d_1n), dn]d\sigma \quad (b)$$

$$\int M^j(\delta I_{u_j}^{(1)}, d_1n)dnd\sigma = \int K_j^n(d_1n, \delta I_{u_j}^{(1)})dnd\sigma \\ = \int \delta I_{u_j}^{(1)}[k_j^n(d_1n, dn) + \mathcal{K}_j(dn)\bar{\Gamma}d_1n - \mathcal{K}_j(\bar{\Gamma}d_1ndn)]d\sigma \quad (c)$$

(<sup>1</sup>) Cf. Lévy, *loc. cit. supra*, p. 49.

$$- \int \sum_i K_i(\delta I'_{u_j}, \bar{\Gamma} I'_{u_i} d_1 n) d n d \sigma = - \int \delta I'_{u_j} \sum_i \mathcal{K}_j(\bar{\Gamma} I'_{u_i} d_1 n, d n) d \sigma \quad (d)$$

$$- \int K_j(\bar{\Gamma} d_1 n \cdot \delta I'_{u_j}) d n d \sigma = - \int \mathcal{K}_j(d n) \bar{\Gamma} d_1 n \delta I'_{u_j} d \sigma \quad (e)$$

$$- \int \delta I'_{u_j} \nabla(u_j, d_1 n) d n d \sigma = - \int \delta I'_{u_j} \nabla(u_j, d_1 n) d n d \sigma. \quad (f)$$

En additionnant (a), (b), (c), (d), (e) et (f), on obtient une intégrale sous laquelle  $\delta I'_{u_j}$  est en facteur commun, son multiplicande est symétrique en  $d n$  et  $d_1 n$ . C'est :

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{K}_j^i \mathcal{L}_i(d_1 n, d n) - \sum_i \mathcal{K}_{j i}[\mathcal{K}_i(d_1 n), d n] \\ + k_j^i(d_1 n, d n) - \mathcal{K}_i(\bar{\Gamma} d n d_1 n) - \sum_i \mathcal{K}_i(\bar{\Gamma} I'_{u_i} d_1 n, d n) - \nabla(u_j, d_1 n) d n. \end{aligned}$$

Or cette expression est, au signe près, à l'indice  $j$  près et au terme  $\mathcal{K}_i(\bar{\Gamma} d n d_1 n)$  symétrique près, l'expression (12). Le théorème que nous avons en vue est donc démontré :

*Les équations des caractéristiques situées sur les surfaces intégrales de l'équation  $I'_n + \Phi = 0$  sont intégrables, si l'équation  $I'_n + \Phi = 0$  l'est elle-même.*

\*\*

Il convient maintenant d'appliquer ces considérations au cas particulier de l'équation  $I'_n = H$ , relative au problème de variation des intégrales multiples. On sait que :

$$\begin{aligned} K_i(\delta n) &= \frac{\partial H}{\partial I'_{u_i}} \delta n = \mathcal{K}_i(\delta n), \\ L_i(\delta n) &= \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta n + \int_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} \frac{\partial \delta n}{\partial y_{\sigma}}, \\ \mathcal{L}_i(\delta n) &= \frac{\partial H}{\partial u^i} \delta n - \int_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \left( \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} \sqrt{\gamma} \delta n \right)}{d y_{\sigma}} \\ &= \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta n - \int_{\sigma} \frac{d}{d y_{\sigma}} \left[ \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} \delta n \right] - \int_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_{\sigma}} \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} \delta n. \end{aligned}$$

Les équations des caractéristiques de  $I'_n = H$  sont donc :

$$(13) \quad \begin{cases} d u_i = - \frac{\partial H}{\partial I'_{u_i}} d n \\ d I'_{u_i} = \frac{\partial H}{\partial u_i} d n - \bar{\Gamma} I'_{u_i} d n - \int_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_{\sigma}} \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} d n - \int_{\sigma} \frac{d}{d y_{\sigma}} \left[ \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} d n \right] \end{cases}$$

à quoi il faudrait ajouter l'équation qui donne  $d I'_n$  et qui est une conséquence de celles-ci



et de l'équation  $I'_n = H$ . Les équations (13) sont identiques, à la notation  $\varphi_i$   $\mathcal{I}_{u_i}$  près, aux équations lagrangiennes, mises sous forme canonique, du problème de variation posé plus haut. Nous obtenons ainsi le théorème qui généralise l'un de ceux que nous avons rappelés au chapitre II.

*Les équations lagrangiennes attachées à une intégrale multiple stationnaire sont identiques — sous leur forme canonique — aux équations des caractéristiques de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles, à laquelle satisfait l'intégrale stationnaire, considérée comme une fonctionnelle d'une partie du contour  $\Gamma_{m-1}$  qui limite le domaine d'intégration  $R_m$ , et des valeurs des fonctions qui rendent l'intégrale stationnaire, prises sur cette partie du contour.*

c) *Sur l'existence des intégrales complètes de l'équation  $I'_n = H$ .*

Nous allons montrer qu'il existe des intégrales complètes de l'équation  $I'_n = H$ , dans certains cas simples :

1° *Problème de Dirichlet.* Soit l'intégrale :

$$(1) \quad I = \int \int_{\mathcal{R}_2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2,$$

où  $\mathcal{R}_2$  est une région d'un seul tenant limitée par le contour  $C_1$ .  $I$  est stationnaire si  $z$  satisfait à l'équation de Laplace :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0,$$

et alors  $I$  satisfait à l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles (1) :

$$(3) \quad I'_n = \frac{1}{4} I'_u{}^2 - \left( \frac{du}{ds} \right)^2,$$

où  $\frac{du}{ds}$  est la dérivée de  $u$  relativement à l'arc  $s$  du contour  $C_1$ ,  $u$  étant bien entendu,

la donnée de  $z$  sur  $C_1$ . L'équation (1) admet une solution  $z$  analytique dans  $\mathcal{R}_2$ , et prenant sur  $C_1$ , la suite de valeurs  $u(s)$ . Décomposons  $C_1$  en deux parties  $\Gamma^0$  et  $\Gamma$ , formée chacune d'un seul arc, et désignons plutôt par  $u_0(s_0)$  la suite des valeurs données sur  $\Gamma^0$  et par  $u(s)$  la suite des valeurs données sur  $\Gamma$ . Supposons que  $\Gamma^0$  soit fixe, et que  $\Gamma$  soit variable à l'intérieur d'une famille ( $F$ ) dont  $\Gamma^0$  soit un représentant, et telle que toutes les courbes qui en font partie passent par les extrémités de  $\Gamma^0$  et limitent avec  $\Gamma^0$  une région d'un seul tenant où le problème de Dirichlet soit résoluble (2).

$I$  lorsque  $z$  satisfait à (2) est une fonctionnelle de  $\Gamma$  et de  $u(s)$  satisfaisant à (3). Si l'on porte son attention sur la dépendance de  $I$  à l'égard de  $u_0(s_0)$ , on aura une intégrale de (3) dépendant de deux fonctions arbitraires. Introduisons les coordonnées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définies au moyen de la famille ( $F$ ) et de ses trajectoires orthogonales,  $u(s)$  est alors une fonction

(1) Cf. Lévy, Leçons, p. 235.

(2) Il faudra prendre des précautions dans la définition de la famille ( $F$ ) afin de ne pas amener des singularités pour les trajectoires orthogonales aux points de jonction des contours.

$\bar{u}(y_1)$  et  $u_0(s)$  est une fonction  $\bar{u}_0(y_1)$ .  $I$  peut alors s'écrire, pour rappeler sa dépendance fonctionnelle

$$I = \mathcal{F} | \bar{u}(y_1), \bar{u}_0(y_1), \Gamma | = \int \int_{\mathcal{R}_2} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2$$

$\mathcal{F}$  est alors une intégrale complète de (3), car si on élimine  $u_0$  entre

$$I'_n = \mathcal{F}'_n, \quad I'_u = \mathcal{F}'_u$$

on retrouve l'équation (3). En effet, on a, en variant  $\Gamma$  et  $u$  :<sup>(1)</sup>

$$\delta \mathcal{F} = - 2 \int_{\Gamma} w \delta u ds + \int_{\Gamma} (w^2 - u'^2) \delta n ds$$

avec  $w = \frac{du}{dn}$ , et par suite :

$$\mathcal{F}'_u = 2w, \quad I'_n = w^2 - \left( \frac{du}{ds} \right)^2,$$

or  $w$  dépend fonctionnellement de  $u(s)$  et de  $u_0(s_0)$ , éliminer  $w$  revient donc à éliminer  $u_0(s_0)$ , mais l'élimination de  $w$  conduit précisément à l'équation (3).  $\mathcal{F}$  en est donc bien une intégrale complète.

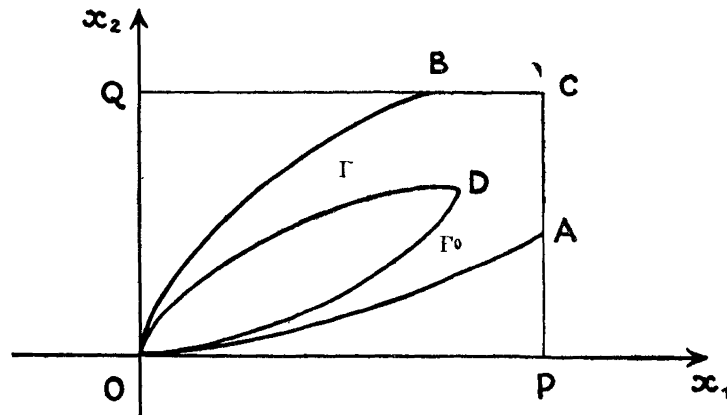
2° Considérons l'intégrale :

$$(4) \quad I = \int \int_{\mathcal{R}_2} \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_1 dx_2;$$

elle est stationnaire si  $z$  est solution de

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Rappelons brièvement quelques théorèmes d'existence des solutions de cette équation



Par l'origine des axes. menons deux courbes  $OA$  et  $OB$  :  $OA$  n'est rencontrée qu'en un

<sup>(1)</sup> Cf. *Levy, Leçons*, p. 235.

point par une parallèle à  $Ox_2$ ,  $OB$  n'est rencontrée qu'en un point par une parallèle à  $Ox_1$  <sup>(1)</sup>.

Menons les parallèles aux axes  $PA$  et  $QB$  et soit  $C$  leur intersection. Si l'on se donne une suite continue de valeurs  $U_0$  sur  $OA$  et une suite continue de valeurs  $U$  sur  $OB$ , avec  $U_0(O) = U(O)$ , il existe une solution  $z(x_1, x_2)$  de (5), régulière dans tout le rectangle  $OQPC$  et qui prend sur  $OA$  et  $OB$  les valeurs  $U_0$  et  $U$  respectivement. Soit  $D$  un point intérieur au rectangle ; on mène les deux courbes  $\Gamma^0$  et  $\Gamma$  joignant  $O$  à  $D$  et soumises respectivement aux mêmes conditions que  $OA$  et  $OB$ . On peut déterminer  $z$  sur  $\Gamma^0$  et sur  $\Gamma$  ; soient  $u_0(s_0)$  et  $u(s)$  les valeurs que prend  $z$  sur ces deux courbes respectivement. Si l'on prend  $u_0(s_0)$  et  $u(s)$  comme données, il existe alors une solution  $z(x_1, x_2)$  de (5) qui prend sur  $\Gamma^0$  et sur  $\Gamma$  les valeurs  $u_0$  et  $u$  ;  $z$  coïncide d'ailleurs avec la solution précédemment déterminée dans tout le rectangle  $OQOP$ , cela provient de l'unicité de cette solution.

Nous prendrons alors pour domaine  $R_2$ , la région limitée par  $\Gamma^0$  et  $\Gamma$  et nous supposons que  $\Gamma^0$  est fixe.  $I$  est alors une fonctionnelle et nous portons notre attention sur sa dépendance vis-à-vis de  $u(s)$  et de  $\Gamma$ . En variant ces deux arguments, on a :

$$I = - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{du}{ds} [\cos^2(n, x_2) - \cos^2(n, x_1)] + 2w [\cos(n, x_1) \cos(n, x_2)] \delta n d\sigma \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \cos(n, x_1) \cos(n, x_2) - w \frac{du}{ds} [\cos^2(n, x_2) - \cos^2(n, x_1)] \right. \right. \\ \left. \left. - w^2 \cos(n, x_1) \cos(n, x_2) \right. \right. \\ \left. \left. + w \left[ \frac{du}{ds} (\cos^2(n, x_2) - \cos^2(n, x_1)) + 2w \cos(n, x_1) \cos(n, x_2) \right] \right\} \delta n ds,$$

d'où

$$I'_u = A \frac{du}{ds} - 2Bw, \\ I'_n = B \left( \frac{du}{ds} \right)^2 - Bw^2 + A \frac{du}{ds} w - I'_u w$$

avec :

$$A = \cos^2(n, x_1) - \cos^2(n, x_2), \\ B = \cos(n, x_1) \cos(n, x_2).$$

En éliminant  $w$ , il vient :

$$(6) \quad I'_n = \frac{I'_u{}^2}{4B} - \frac{A \frac{du}{ds} I'_n}{2B} + \frac{4B^2 + A^2}{4B} \left( \frac{du}{ds} \right)^2.$$

Or soit maintenant une famille ( $F$ ) de courbes dont  $\Gamma^0$  et  $\Gamma$  fassent partie, toutes ces courbes étant issues de  $O$  et passant par  $D$  ; soient  $y_1$  et  $y_2$  les coordonnées déterminées

<sup>(1)</sup> Cf. *Goursat*, Cours d'Analyse mathématique, t. III, 2<sup>e</sup> éd. (1915), p. 423 et sq.

par  $(F)$  et ses trajectoires orthogonales ;  $v_0(s_0)$  et  $u(s)$  deviennent respectivement des fonctions  $\bar{u}(y_1)$  et  $\bar{u}_0(y_1)$  et l'intégrale  $I$  considérée comme dépendant de  $\bar{u}$  et de  $\bar{u}_0$  sera une intégrale complète de (6) ; on peut l'écrire :

$$I = \mathcal{F} | [\bar{u}, \bar{u}_0, \Gamma] | = \int_{R_2} \int \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_1 dx_2$$

et la démonstration se fait comme pour l'exemple 1°. Il faut remarquer que les fonctions  $\bar{u}_0$  et  $\bar{u}$  ne sont pas complètement arbitraires, puisqu'elles sont choisies de manière que  $z$  soit continue en  $D$  ; cette continuité, en effet, provient de la méthode employée pour définir la solution dans le rectangle  $OQCP$ . On astreint les fonctions  $\bar{u}_0$  et  $\bar{u}$  à varier dans un champ fonctionnel défini par la méthode qui permet de passer de  $U$  et  $U_0$  à  $\bar{u}$  et  $\bar{u}_0$  ; ce champ fonctionnel est donc défini par le champ fonctionnel des fonctions  $U$  et  $U_0$  continues et prenant en  $O$  la même valeur.

Dans le premier exemple, si l'on veut étudier la solution  $z(x_1, x_2)$  dans un domaine  $R_2$ , il faut que les fonctions  $u(s)$  sur  $\Gamma$  soient analytiques et que  $\Gamma$  soit un arc analytique et régulier. On voit par là que le champ fonctionnel dans lequel varient les fonctions  $u(s)$  est quelque peu restreint,

\*  
\*\*

On peut prévoir que dans les problèmes plus généraux, il y aura au moins deux cas à considérer.

Ou bien le domaine  $R_m$  est *quelconque* et les fonctions inconnues sont déterminées quand on se donne leurs valeurs sur la frontière de  $R_m$ .

Ou bien le domaine  $R_m$  doit être *choisi d'une manière particulière* pour que les fonctions inconnues soient déterminées quand on se donne leurs valeurs sur la frontière de  $R_m$ .

Il convient ainsi, avant de chercher à appliquer les résultats, — et même les méthodes relatives aux équations aux dérivées fonctionnelles partielles, — que nous avons développées dans ce travail, de connaître bien précisément les conditions d'existence des solutions des équations  $\Delta_i = 0$ .

S'il est possible de se donner les  $z_i$  sur la frontière de  $R_m$ , on pourra alors décomposer cette frontière en deux parties  $\Gamma_{m-1}^0$  et  $\Gamma_{m-1}$ , et appliquer, par une généralisation qui se comprend d'elle-même, les idées que nous venons de développer pour les deux cas classiques :  $k = 1$ ,  $m = 2$ . On obtiendra alors facilement une intégrale complète. Ce sera l'intégrale stationnaire, considérée comme dépendant du contour mobile  $\Gamma_{m-1}$ , des  $k$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_k$  données sur  $\Gamma_{m-1}$ , et des  $k$  fonctions  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_k^0$  données sur  $\Gamma_{m-1}^0$ .

Il nous suffit d'avoir montré ainsi qu'il existe effectivement, pour certains problèmes de variation, des intégrales complètes de l'équation  $I'_n = H$ , relative à ces problèmes. Le théorème qui généralisera le théorème de *Jacobi*, et qui fait l'objet du chapitre V, s'appliquera à toutes les intégrales complètes possibles.

## CHAPITRE V

### Généralisation du théorème de Jacobi.

---

L'intégrale générale des équations canoniques relatives à la variation d'une intégrale simple :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

est donnée par les équations :

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial I}{\partial a_i} = b_i = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$I(x_1, \dots, x_n, t, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1}$  étant une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H\left(x_1, \dots, x_n; t, \frac{\partial I}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Le but de ce chapitre est de montrer qu'on peut généraliser ce théorème pour les cas des intégrales multiples stationnaires.

Le système canonique obtenu au chapitre IV :

$$(1) \quad \begin{cases} du_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i} dn, \\ d\varphi_i = \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \left( \bar{t}_{-i} + \sum_{\rho} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_{\rho}} \frac{\partial H}{\partial q_{i\rho}} \right) dn - \sum_{\rho} \frac{d}{dy_{\rho}} \left( \frac{dH}{dq_{i\rho}} dn \right) \end{cases}$$

n'est pas autre chose que le système lagrangien (2) du chapitre III écrit au moyen d'autres coordonnées. A la notation  $I'_{u_i} \sim \varphi_i$  près, ces équations sont celles des caractéristiques de l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles :

$$(2) \quad I'_n = H.$$

Nous supposons que les équations lagrangiennes (2) du chapitre III, admettent une et une seule solution  $(z_1, z_2, \dots, z_k)$  régulière à l'intérieur d'un contour  $C_{m-1}$  et sur ce contour lui-même, qui prenne sur  $C_{m-1}$  des valeurs données d'avance. On décomposera  $C_{m-1}$  en deux contours simplement connexes :  $\Gamma_{m-1}$  et  $\Gamma_{m-1}^0$  et l'on se donnera les  $z_i$  sur  $C_{m-1}$  de la manière suivante.  $\Gamma_{m-1}$  et  $\Gamma_{m-1}^0$  sont deux contours d'une famille  $(F)$ , et l'on définit, par le moyen de  $(F)$  et de ses trajectoires orthogonales, un système de coordonnées curvilignes  $y_1, \dots, y_m$ , telles que  $y_m$  soit constant sur les contours de  $(F)$ . Les  $z_i$  seront égales sur

$\Gamma_{m-1}^0$  à des fonctions  $v_1^0, \dots, v_k^0$  et sur  $\Gamma_{m-1}$  à des fonctions  $v_1, \dots, v_k$  ne dépendant que de  $y_1, \dots, y_{m-1}$  (1).

Soit alors :

$$I | [u_1, \dots, u_k; \Gamma_{m-1}; u_1^0, \dots, u_k^0] |$$

une intégrale complète de (2). Nous allons démontrer le théorème suivant :

Les équations canoniques (1) sont satisfaites par des fonctionnelles  $u_i$  et  $\varphi_i$  définies par les équations :

$$(3) \quad I_{u_i} = \varphi_i,$$

et

$$(4) \quad I_{u_i}^0 = \varphi_i^0,$$

les  $\varphi_i^0$  sont des fonctions quelconques de  $y_1, \dots, y_{m-1}$ .

En comparant cet énoncé avec celui du théorème de *Jacobi*, on remarque aisément l'analogie : le rôle des constantes  $a_i$  et  $b_i$  est joué ici par les fonctions  $u_i^0$  et  $\varphi_i^0$  qui ne dépendent pas de  $y_m$ , c'est-à-dire du contour variable dans ( $P$ ).

La démonstration se calque sur celle que nous avons rappelée, d'après *Jordan*, au chapitre I. Différentions les équations (3), en variant  $\Gamma_{m-1}$ , les  $u_i$  suivant la variation de  $\Gamma_{m-}$  et les  $u_i^0$  étant fixes; la variation de  $u_i$  est  $du_i = \frac{du_i}{dn} dn$ ; il vient :

$$(5) \quad \sum_j E_{ij}(du_j) + F_i(dn) - \bar{F} I_{u_i} dn = d\varphi_i.$$

Faisons de même avec les équations (4); on a tout d'abord  $d\varphi_i^0 = 0$ , et avec les notations du chapitre II :

$$(6) \quad \sum_j M_{ij}(du_j) + N_i(dn) = 0 \quad (2).$$

Soit d'autre part, l'équation (2), où l'on a remplacé  $I$  par l'intégrale complète que nous supposons avoir trouvée. Cette équation devient une identité en les  $u_i$  et les  $u_i^0$ ; varions alors ses deux membres par modification des  $u_i$  et des  $u_i^0$  respectivement; il vient :

$$(7) \quad \mathcal{F}_i(\delta u_i) = \sum_j \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} E_{ji}(\delta u_i) + \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta u_i + \sum_p \frac{\partial H}{\partial q_{i_p}} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial y_p},$$

$$(8) \quad X_i^0(\delta u_i^0) = \sum_j \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} E_{ji}^0(\delta u_i^0),$$

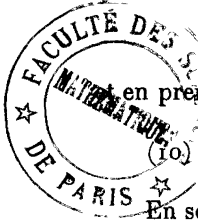
car  $H$  ne dépend des  $u_i^0$  que par l'intermédiaire des  $I'_{u_j}$ .

On tire de (7) :

$$(9) \quad F_i(dn) = \sum_j E_{ij} \left[ \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} dn \right] + \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \sum_p \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d \left( \frac{\partial H}{\partial q_{i_p}} \sqrt{\gamma} dn \right)}{dy_p}$$

(1) L'équation (2) est censée être obtenue en ne variant que  $\Gamma_{m-1}$  et les valeurs des  $z_i$  sur  $\Gamma_{m-1}$  qu'on désigne alors d'une manière générale par  $u_i$ .

(2) On a :  $M_{ij} = \bar{E}_{ji}$ .



en prenant les associées des deux membres de (8)

$$N_i(dn) = \sum_j M_{ij} \left( \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} dn \right).$$

En soustrayant, membre à membre, (9) de (5) et (10) de (6), on trouve :

$$\sum_j E_{ij}(du_j) + \sum_j E_{ij} \left( \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} dn \right) + \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \sum_\rho \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d \left( \frac{\partial H}{\partial q_{i\rho}} \sqrt{\gamma} dn \right)}{dy_\rho} - \bar{\Gamma} I'_{u_i} dn = d\varphi_i,$$

et

$$\sum_j M_{ij}(du_j) + \sum_j M_{ij} \left( \frac{\partial H}{\partial I'_{u_j}} dn \right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire encore en tenant compte de  $I'_{u_i} = \varphi_i$  :

$$(11) \quad d\varphi_i - \left[ \frac{\partial H}{\partial u_i} dn - \bar{\Gamma} \varphi_i dn - \sum_\rho \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_\rho} \frac{\partial H}{\partial q_{i\rho}} dn - \sum_\rho \frac{d}{dy_\rho} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_{i\rho}} dn \right\} \right] + \sum_j E_{ij} \left[ du_j + \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} dn \right] = 0,$$

$$(12) \quad \sum_j M_{ij} \left[ du_j + \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} dn \right] = 0.$$

Or nous sommes partis d'une intégrale complète ; les équations (11) et (12) ne peuvent être satisfaites que si

$$du_i = - \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} dn,$$

$$d\varphi_i = \left[ \frac{\partial H}{\partial u_i} - \bar{\Gamma} \varphi_i - \sum_\sigma \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial y_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} \right] dn - \sum_\sigma \frac{d}{dy_\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial q_{i\sigma}} dn \right].$$

Cela revient en effet à dire que la condition (A) <sup>(1)</sup> relative aux  $M_{ij}$  est satisfaite. Or si l'intégrale  $I$  est complète, la condition (A) relative aux  $E_{ij}$  est satisfaite. Mais on a :

$$\int_\Gamma E_{ij}[x(P_0)]y(P)d\sigma_P = \int_{\Gamma_0} M_{ji}[y(P)]x(P_0)d\sigma_{P_0}$$

quels que soient les deux contours  $\Gamma$  et  $\Gamma_0$  que l'on associe dans la différentiation.

Soient alors  $k$  fonctions  $x_i(P) = x_i(P_0)$ ,  $P$  et  $P_0$  ayant les mêmes coordonnées  $y_1, \dots, y_{m-1}$  et ne différant que par la coordonnée  $y_m$ . En posant :

$$d\sigma_P = \Delta dy_1 \dots dy_{m-1},$$

$$d\sigma_{P_0} = \Delta_0 dy_1 \dots dy_{m-1}$$

on a :

$$\int_\Gamma \sum_i \sum_j E_{ij}[x_j(P_0)]x_i(P) \Delta dy_1 \dots dy_{m-1} = \int_{\Gamma_0} \sum_i \sum_j M_{ji}[x_i(P)]x_j(P_0) \Delta_0 dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

(1) Voir la note à la fin de ce travail.

Cette relation doit avoir lieu quelles que soient les fonctions  $x_i$ ; mais puisque  $x_i(P) = x_i(P_0)$  et que les intégrales précédentes sont prises sur le même domaine de variation des  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , il faut que :

$$\Delta \sum_j E_{ij}^0[x_j(P_0)] = \Delta_0 \sum_j M_{ij}[x_j(P)].$$

Si donc on peut trouver des fonctions  $x_j(P)$  telles que  $\sum_j E_{ij}^0[x_j(P)]$  puisse prendre une forme quelconque  $y_i(P)$  donnée d'avance, c'est-à-dire, si l'on peut résoudre les équations :

$$\sum_j E_{ij}^0[x_j(P)] = y_i(P)$$

on pourra résoudre les équations :

$$\sum_j M_{ij}[x_j(P)] = \frac{\Delta_0}{\Delta} y_i(P),$$

ce qui revient précisément à dire que la condition (A) relative aux  $M_{ij}$  est satisfaite en même temps que la condition (A) relative aux  $E_{ij}^0$ .

Le théorème est ainsi démontré.

On peut faire voir que ce théorème permet de trouver la solution  $(z_1, \dots, z_k)$  des équations (2, chap. III), qui prend sur  $\Gamma_{m-1}^0$  et  $\Gamma_{m-1}$  les valeurs  $v_1^0, \dots, v_k^0$ , et  $v_1, \dots, v_k$  respectivement. Il faut déterminer les  $u_1, \dots, u_k$  et les  $u_1^0, \dots, u_k^0$  qui sont arbitraires dans l'intégrale complète, par les conditions que le contour variable dont dépend l'intégrale complète étant identifié à  $\Gamma_{m-1}$ , les  $u_i$  soient égales aux  $r_i$  et que le contour variable étant identifié avec  $\Gamma_{m-1}^0$ , les  $u_i^0$  soient égales aux  $v_i^0$ . Ces deux conditions déterminent les  $u_i^0$  et les  $\varphi_i^0$ ; on peut les écrire :

$$(13) \quad I'_{u_i} = \varphi_i \quad [\text{pour } \Gamma_{m-1}, \text{ et pour } u_i = v_i],$$

$$(14) \quad J'_{u_i^0} = \varphi_i^0 \quad [\text{pour } \Gamma_{m-1}^0, \text{ et pour } u_i^0 = v_i^0].$$

Les équations (13) déterminent les  $u_i^0$  puisqu'on peut les résoudre par rapport à ces arguments; on transporte ces valeurs dans les équations (14) ce qui détermine les  $\varphi_i^0$ .

Les équations (3) et (4) où les  $u_i^0$  et les  $\varphi_i^0$  ont les valeurs dites, résolvent alors le problème aux limites proposées.

Nous avons ainsi généralisé la 19<sup>e</sup> et la 20<sup>e</sup> leçons de *Jacobi*. *Jacobi* y démontre, en effet, le théorème qui porte son nom en supposant qu'une intégrale complète est connue.

La recherche des intégrales complètes des équations aux dérivées partielles est singulièrement facilitée par la méthode de *Lagrange* et *Charpit* ou par le procédé de la séparation des variables (Théorème de *Stäckel*). Pour que les méthodes que nous avons développées dans ce travail puissent s'appliquer à la résolution des problèmes de physique mathématique, par exemple, il faudrait que l'on sût trouver des intégrales complètes d'équations de la forme  $I_n = H$ . Nous avons montré qu'il en existe d'une certaine sorte. Y en a-t-il d'autres? Comment les trouve-t-on? Tels sont de nouveaux problèmes du calcul fonctionnel; il nous paraît que leur résolution exige d'autres méthodes que celles qui nous ont été utiles dans ce mémoire.



## Note sur les fonctionnelles implicites.

---

Il se pourrait que l'on eût à définir une fonction  $v(x)$  dans un intervalle  $(a, b)$  par une relation de la forme suivante :

$$(1) \quad F \left[ u \Big|_a^b; v \Big|_a^b; x \right] = 0,$$

$F$  étant une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs de deux fonctions  $u$  et  $v$  dans l'intervalle  $(a, b)$  et de la variable  $x$  prise dans le même intervalle.

*M. Volterra* <sup>(1)</sup> a étudié les cas de fonctionnelles implicites qui se présentent le plus souvent dans la pratique ; ce sont ceux qui sont relatifs à des équations (1) pour lesquelles la variation  $\delta F$  s'exprime de la manière suivante :

$$\delta F = \delta v(x) + \int_a^b F' \left[ u \Big|_a^b; v \Big|_a^b; x, \xi \right] \delta v(\xi) d\xi + \int_a^b \Phi \left[ u \Big|_a^b; v \Big|_a^b; x, \xi \right] \delta u(\xi) d\xi.$$

Le second membre doit être nul pour des fonctions  $u$  et  $v$  satisfaisant à (1). Dans ces cas-là, on est ramené à la résolution de certaine équation intégrale linéaire et, par suite, à certaines conditions de possibilité, relatives au déterminant de *Fredholm* qui correspondent au théorème d'existence des fonctions implicites définies par une relation  $F(x, y) = 0$ .

On peut généraliser ces recherches et montrer qu'on peut imaginer des cas, où il serait possible d'effectuer les éliminations dont il est question dans notre mémoire.

Les fonctionnelles dont il s'agira dépendront d'un contour  $\Gamma_{m-1}$  ; nous introduirons des coordonnées  $y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$  au moyen d'une famille ( $F$ ). Soient alors  $k$  fonctions données  $u_1^0, \dots, u_k^0$  et  $k$  fonctions inconnues  $u_1, \dots, u_k$ , ces  $2k$  fonctions dépendant, les  $k$  premières de  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , les  $k$  dernières, de  $y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$ . Les  $u_1, \dots, u_k$  sont définies par les relations :

$$(2) \quad F_i \left[ u_1, \dots, u_k; u_1^0, \dots, u_k^0; P \right] = 0, \quad (i = 1, \dots, k)$$

$P$  étant une notation pour représenter les  $m$  coordonnées du point  $P(y_1, \dots, y_m)$ .

Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que ces équations sont satisfaites pour  $u_i = 0, u_i^0 = 0, (i = 1, \dots, k)$ . Calculons  $\delta F_i$  en ne variant que les  $u_i$  et les  $u_i^0$  :

$$\delta F_i = \sum_p E_{ip}(\delta u_p) + \sum_p E_{ip}^0(\delta u_p^0), \quad (i = 1, \dots, k),$$

---

<sup>(1)</sup> Cf. *Leçons sur les Fonctions de Lignes*; rédigées et recueillies par *J. Pérès*; Paris, 1913, chap. (IV); c'est de ce chapitre que nous nous inspirons dans cette note.



On peut faire des hypothèses pour établir la convergence de ce procédé. En remarquant que :

$$u_p^{(n)} = u_p^{(1)} + (u_p^{(2)} - u_p^{(1)}) + \dots + (u_p^{(n-1)} - u_p^{(n-2)}) + (u_p^{(n)} - u_p^{(n-1)}),$$

nous supposons que :

$$|\Omega_p | [f_1, \dots, f_k; u_1^0, \dots, u_k^0; P] | | < K,$$

$$|\Omega_p | [f_1, \dots, f_k; u_1^0, \dots, u_k^0; P] | - \Omega_p | [g_1, \dots, g_k; u_1^0, \dots, u_k^0; P] | | < K \cdot \max. | f_i - g_i |,$$

où  $K$  est un nombre positif et où les  $f$  et les  $g$  sont des fonctions quelconques du champ fonctionnel où sont choisies les  $u_i^0$  et où l'on recherche les  $u_i$ . Alors :

$$| u_p^{(1)} | < K$$

$$| u_p^{(2)} - u_p^{(1)} | < K \max. | u_p^{(1)} - 0 | < K^2$$

$$| u_p^{(3)} - u_p^{(2)} | < K \max. | u_p^{(2)} - u_p^{(1)} | < K^3$$

.....

et par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_p^{(n)}$  existe si  $K < 1$ .

Il faudrait montrer encore que cette limite est bien la solution des équations (2) e qu'elle est la même de quelque manière qu'on applique le procédé pour passer des fonctions  $u_i^0$  initiales à leur état final ; nous admettrons cela sans plus et nous nous bornerons à ces indications qui précisent, nous le croyons, les affirmations que nous avons énoncées dans le cours de ce travail sur l'élimination des fonctions. En particulier, l'élimination des fonctions  $u_i^0$  entre :

$$F_{u_i} = F'_{u_i}, \quad F'_n = F''_n, \quad (i = 1, \dots, k)$$

s'effectuerait de la manière suivante. On résoudrait les  $k$  premières équations par rapport aux  $u_j^0$  et on transporterait les valeurs obtenues dans la dernière. Or, si l'on écrit :

$$\delta F'_{u_i} = \sum_j E_{ij}(\delta u_j) + \sum_j E_{ij}^0(\delta u_j^0),$$

cette résolution supposerait que la condition (A) relative aux  $E_{ij}^0$  est satisfaite dans le voisinage fonctionnel d'une série de valeurs  $u_1, \dots, u_k, u_1^0, \dots, u_k^0$ , que l'on prend pour point de départ des approximations successives, et que le procédé des approximations est convergent.

-----