FELIKS BURDECKI

Sur l'itération d'une fonction de variable réelle

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1926

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1926__68__1_0>

N° d'ordre :
30
—
Série U
—

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(MENTION : SCIENCES)

par **M. Feliks BURDECKI**

professeur au lycée de WEJHEROWO (Pologne)

1re THÈSE. — SUR L'ITÉRATION D'UNE FONCTION DE VARIABLE RÉELLE.

2e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 21 juin 1926 devant la Commission d'Examen.

MM. M. FRÉCHET, Président
G. VALIRON, Examinateurs
P. FLAMANT, Examinateurs

IMPRIMERIE BOULANGEOT
STRASBOURG - RUE DE BERNE
— 1926 —

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen . . . . M. P. MULLER, Professeur de Chimie générale et Chimie physique.

Doyen honoraire M. E. BATAILLON.

Professeurs

MM.	
G. VALIRON	Calcul différentiel et intégral.
H. VILLAT	Mécanique.
M. FRÉCHET	Analyse supérieure.
E. ESCLANGON . . .	Astronomie.
P. WEISS	Physique générale.
H. OLLIVIER . . .	Physique générale.
E. ROTHÉ	Physique du Globe.
L. HACKSPILL . . .	Chimie minérale.
H. GAULT	Chimie organique.
E. TOPSENT	Zoologie et Anatomie comparée.
C. HOUARD	Botanique.
E. TERROINE . . .	Physiologie générale.
J. de LAPPARENT .	Pétrographie.
E. CHAPUT	Géologie et Paléontologie.
E. CHATTON	Biologie générale,
R. THIRY	Mathématiques générales.
E. BAUER	Physique mathématique.
E. CORNEC	Chimie appliquée.
H. LABROUSTE . . .	Physique du Globe.
G. RIBAUD	Physique générale.
F. VLÈS	Physique biologique.

Secrétaire . . . . E. BONTEMS.

PREMIÈRE THÈSE

Sur l'itération d'une fonction de variable réelle.

INTRODUCTION

Le problème de l'itération des fonctions ne parait avoir suscité l'intérêt des mathématiciens que vers la seconde moitié du siécle écoulé. Après le court mémoire de M. FARKAS publié dans le Journal de Mathématiques [1] toute une série de travaux de savants éminents ont discuté à des points de vue différents ce problème. Je me borne à mentionner les travaux remarquables de M. KŒNIGS [2] et de ses élèves et récemment ceux de M. Gaston JULIA [3] et FATOU [4]. Les considérations nouvelles ont été particulièrement fécondes dans le domaine de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. L'itération des fonctions a des propriétés caractéristiques qui la lient étroitement à certaines équations fonctionnelles. Le problème sera envisagé dans ce mémoire d'un autre point de vue que dans les travaux cités. Je limite mes considérations aux fonctions de variable réelle et à la recherche de définitions élémentaires des ordres non entiers d'itérées, en m'efforçant en même temps de déterminer les dérivées des fonctions nouvellement définies.

Dans le premier chapitre, je donnerai une analyse élémentaire des itérées d'ordre entier en leur donnant une forme favorable à la suite de mes explications.

Le deuxième chapitre qui contient les éléments essentiels de mon travail traite des définitions des ordres non entiers et des solutions des questions posées ci-dessus dans la mesure du possible. On se trouve en présence de trois cas principaux :

1) Jules FARKAS, Sur les fonctions itératives (Journal de Mathématiques 3. série T. X. 1884.)

2) G. KŒNIGS, Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles (Ann. de l'Ecole Normale supérieure, 1884 et 1885.)

3) G. JULIA, Sur l'itération des fonctions rationnelles (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1918.)

4) P. FATOU, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1924 et 1925.)

1° Celui ou la dérivée de la fonction pour le point double de la transformation $[x \mid f(x)]$ est comprise entre 0 et 1,

2° Celui où la dérivée sus-mentionnée est nulle,

3° Celui où elle est égale à 1.

J'indique une définition spéciale à chaque cas, toutes les trois étant étroitement liées. De plus j'ai tâché de donner des formules utilisables pour le calcul numérique des fonction définies.

Le troisième chapitre contient des applications et exemples. En outre nous trouvons encore une étude de la représentation graphique de $\underset{x}{f}(a)$ qui est applicable à la plupart des fonctions. Enfin j'ajoute une table des fonctions itérées $\underset{x}{\sin}\frac{\pi}{2}$ qui bien que n'étant pas très précise donne une idée suffisante de cette fonction étant donné surtout que seules des tables de logarithmes à 5 décimales ont servi à l'établir. La petite table qui indique les valeurs des itérées d'ordre très élevé n'a été établie qu'avec peu de précision et seulement pour donner une idée de la distance de la réprésentation graphique à l'axe des x.

Il me reste à exprimer ma grande reconnaissance à M. FRÉCHET. Directeur de l'Institut de Mathématiques par les encouragements bienveillants qu'il a bien voulu m'adresser en ma qualité d'étranger non familiarisé avec les usages des universités françaises, ainsi qu'à M. VALIRON qui a eu la bonté de s'intéresser à ce travail, et particulièrement à M. FLAMANT pour l'accueil que j'ai eu près de lui, son aide constante et son inlassable bienveillance.

Je tiens également à remercier Mademoiselle BUZON, étudiante en mathématiques, M. CLERMONT, professeur au lycée Fustel de Coulanges et M. STRAUB, attaché au Parquet pour leur précieux concours à la révision du texte.

PREMIER CHAPITRE

Les fonctions itérées d'ordre entier

Définition :

Soit $F(x) = f_1 \{f_2(x)\}$ une fonction de fonction et admettons que $f_1 \equiv f_2$.

En formant la suite des fonctions consécutives :

$F_2(x) = f\{f(x)\}$; $F_3(x) = f[f\{f(x)\}]$; $F_4(x) = f(f[f\{f(x)\}])$;...

nous appellerons $F_2(x)$, $F_3(x)$,... les fonctions itérées d'ordre 2, 3,... etc. Pour la briévété et la clarté nous adopterons l'écriture :

$$F_2(x) = \underset{2}{f}(x) ; \qquad F_3(x) = \underset{3}{f}(x);... \qquad F_n(x) = \underset{n}{f}(x)$$

Evidemment en outre de ces expressions nous écrivons :

$$F_1(x) = \underset{1}{f}(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad F_0(x) = \underset{0}{f}(x) = x$$

§ 1. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les fonctions, dont nous étudierons les itérées possèdent une dérivée première continue dans l'intervalle considéré, sans nous astreindre à répéter cette hypothèse dans tous les énoncés.

§ 2. **De la continuité des fonctions itératives issues d'une fonction continue.** — Il résulte de la définition précédente que toutes les itérées des fonctions que nous allons considérer, sont continues : Car du théorème, qu'une fonction continue d'une fonction continue est continue, il résulte que la fonction $\underset{2}{f}(x)$ est aussi continue et par conséquent $\underset{3}{f}(x)$. En supposant que $\underset{n}{f}(x)$ est continue il en résulte de même que $\underset{n+1}{f}(x) = f\{\underset{n}{f}(x)\}$ est aussi continue.

En conséquence, si l'on emploie l'induction mathématique nous pouvons dire, que les itérées d'ordre quelconque, (cet ordre est nécessairement un nombre naturel) d'une fonction continue sont aussi continues.

§ 3. Limites des fonctions itérées.

En formant, pour une certaine valeur définie de la variable x, la suite des fonctions itérées $\underset{0}{f}(x), \underset{1}{f}(x), \ldots, \underset{n}{f}(x), \ldots$, nous obtenons une suite numérique qui est convergente ou divergente.

Si pour une certaine fonction on envisage toutes les valeure de x, trois cas seront possibles :

I. Les itérées sont divergentes pour toutes les valeurs de la variable x.

II. Les itérées sont convergentes pour toutes les valeurs de la variables x.

III. Les itérées sont convergentes pour certaines valeurs de la variables x et divergentes pour les autres.

Par exemple; Les itérées de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ sont divergentes pour toutes les valeurs de x. En effet, nous aurons pour toute valeur de x

$$f(x) \geqslant +1, \qquad \underset{2}{f}(x) \geqslant +2, \qquad \underset{3}{f}(x) > +2^{2^{1}}$$

$$\underset{4}{f}(x) > +2^{2^{2}} \; \ldots \qquad \underset{n}{f}(x) > +2^{2^{n-2}} \rightarrow +\infty$$

Pour la fonction $f(x) = x^2$ nous aurons un intervalle, où les itérées convergent. Prenons $|x| < 1$. Les itérées seront convergentes en tendant vers 0. Pour $|x| > 1$ les itérées divergent.

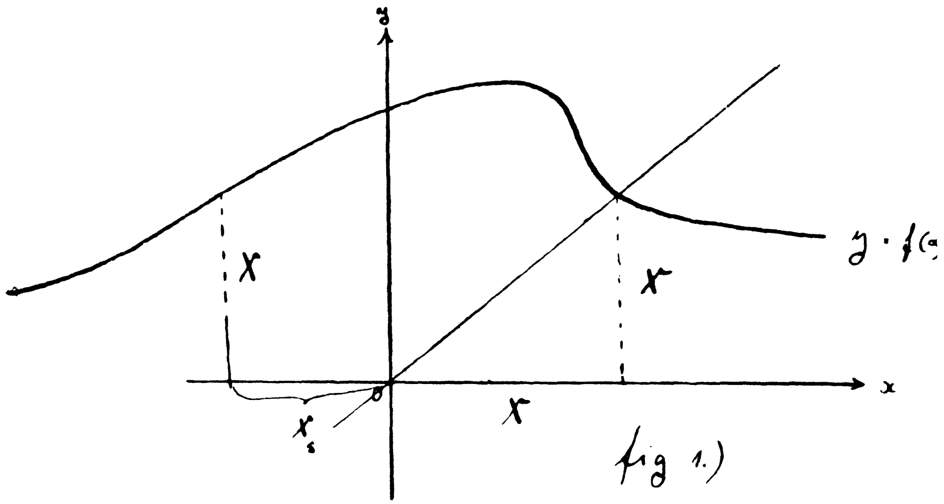
Ci-après nous allons nous occuper des itérées des fonctions du II^e et du III^e cas et nous chercherons des valeurs ou des intervalles pour lesquels les itirées sont convergentes-

A priori nous pouvons voir que les itérées sont conver. gentes pour tout point x, satisfaisant à l'équation $X = f(X)$. En effet, si nous avons par hypothèse

$$\underset{1}{f}(X) = f(X) = X \qquad \text{il résulte}$$

$$\underset{2}{f}(X) = f\left\{\underset{1}{f}(X)\right\} = f(X) = X \text{ et ainsi de suite.}$$

C'est-à-dire pour le point X toutes les itérées auront la même valeur X, qui sera la limite. Un tel point X s'appelle un point invariant ou un point double de la transformation de x en f (x). Il est alors possible que, connaissant une racine de l'équation $x = f(x)$ nous puissions trouver une ou plusieurs valeurs de la variable x, par exemple X_1, pour laquelle $f(X_1) = X$. Evidemment aussi pour X_1 les itérées auront la limite X (fig. 1.)



Mais il est aussi possible, que pour une ou plusieurs autres valeurs de x par exemple X_2 nous ayons $\underset{2}{f}(X_2) = X$; et, plus généralement pour un nombre naturel n il est possible que nous puissions trouver des valeurs de x telles, que $\underset{n}{f}(X_n) = X$.

Toutes ces valeurs de x pourront être entièrement séparées par des distances finies et les itérées seront convergentes pour ces points et admettrons pour limite X (fig. 2).

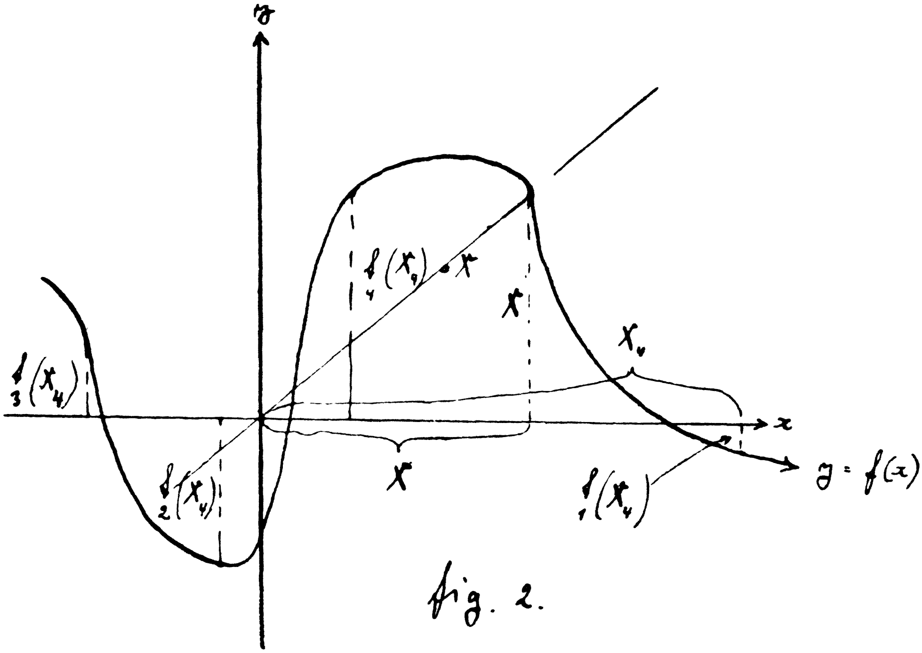


fig. 2.

Alors, signalons le cas appelé par M. Kœnigs : groupes circulaires limites. Il est possible, que pour une certaine valeur de x, que nous désignons par X_k nous aurons

$$X_k = \underset{k}{f}(X_k)$$

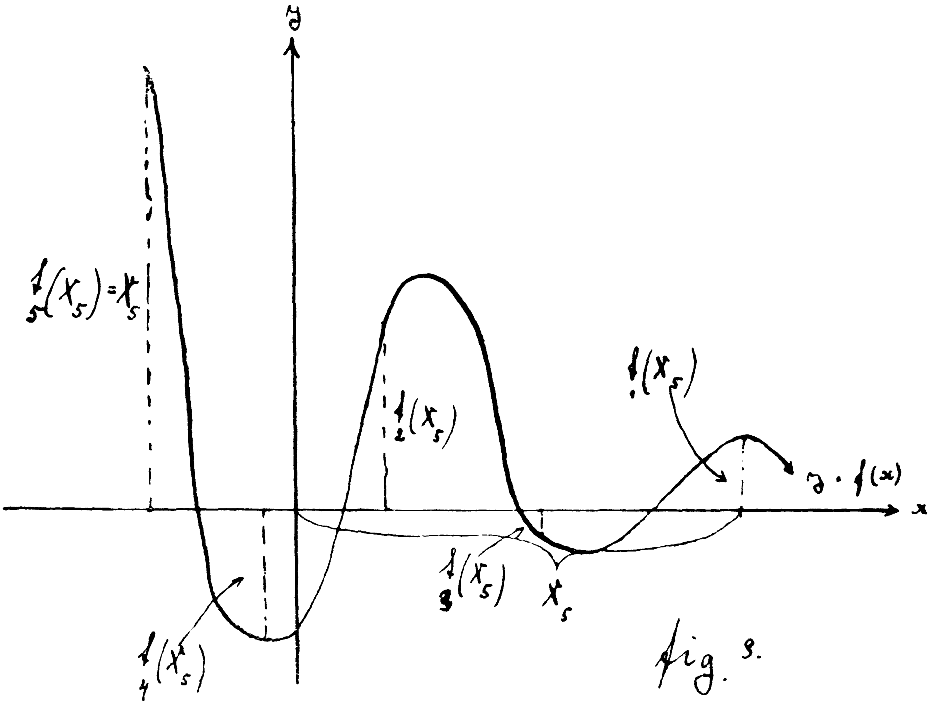
Il résulte alors que nous aurons aussi :

$$X'_k = \underset{1}{f}(X_k) = \underset{k+1}{f}(X_k); \qquad X''_k = \underset{2}{f}(X_k) = \underset{k+2}{f}(X_k) = \ldots$$

$$X_k = \underset{k}{f}(X_k) = \underset{2k}{f}(X_k) = \ldots \underset{nk}{f}(X_k);$$

$$X'_k = \underset{1}{f}(X_k) = \underset{k+1}{f}(X_k) = \ldots \underset{nk+1}{f}(X_k);$$

L'ensemble de ces X_k, $X_k^{(')}$, $X_k^{('')}$,... $X_k^{(k-1)}$ constitue un groupe circulaîre limite, (fig. 3.)



Enfin il est possible que dans un intervalle les itérées d'ordre n tendent vers un certain nombre X, si n tend vers l'infini pour toutes les valeurs de x appartenant à notre intervalle.

Si nous ne considérons pas le cas des groupes circulaires limites nous pouvons dire, qu'un tel point de convergence peut être seulement une racine de l'équation $x = f(x)$, si notre fonction f est continue.

En effet, si nous supposons $X = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, il est évident, qu'il faut, que nous ayons aussi $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{n+1}{f}(x) = X$. Mais nous savons, que

$$\underset{n+1}{f}(x) = f\left(\underset{n}{f}(x)\right), \qquad \text{d'où} \qquad f(X) = X$$

D'autre part, si nous définissons une fonction discontinue $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x) \equiv f(x)$ ($f(x)$ étant continue), pour toutes valeurs de x, sauf la racine de l'équation $x = f(x)$, et $\varphi(X)_{X=f(x)} = d \neq$ de la racine de $x = f(x)$, il est évident, que les itérées de $\varphi(x)$ convergent aussi, si $f(x)$ converge et la limite sera le point de discontinuité $X = f(X)$.

§ 4. **Cas de convergence.** — Convergence monotone et convergence oscillante.

Etant donné un point double X, à quelles conditions les itérées convergent-elles vers X pour toute valeur x du voisinage? Pour voir si les nombres $\underset{n}{f}(x) - X$ tendent vers 0, on peut comparer chacun au précédent par la formule des accroissements finis

$$\underset{n}{f}(x) - X = f\left(\underset{n-1}{f}(x)\right) - f(X) = \left\{ \underset{n-1}{f}(x) - X \right\} f'(\xi)$$

$$\underset{n-1}{f}(x) \lessgtr \xi \lessgtr X \qquad (*)$$

d'où

$$\left| \underset{n}{f}(x) - X \right| = \left| \underset{n-1}{f}(x) - X \right| \left| f'(\xi) \right|$$

On voit immédiatement que si dans un intervalle $(X-h, X+h)$, la dérivée reste en valeur absolue plus petite qu'un nombre $k < 1$, $\underset{n}{f}(x)$ tendra vers X, quelle que soit la valeur x de l'intervalle; et que si au contraire, la dérivée reste en valeur absolue plus grande que $+1$, $\underset{n}{f}(x)$ ne peut pas tendre vers X.

Par conséquent, si $|f'(X)| \neq 1$, X est ou n'est pas un point de convergence suivant que $|f'(X)|$ est plus petite ou plus grande que 1.

La formule des accroissements finis montre encore que $|f_n(x) - X|$ tend vers 0 en décroissant constamment; et que

*) Toutes les inégalités avec double signe doivent être lues en prenant partout le signe du haut ou partout le signe du bas.

le signe de $\underset{n}{f}(x) - X$ sera invariable si la dérivée est positive, on alternera si la dérivée est négative. Dans le premier cas, $\underset{n}{f}(x)$ tendra vers X en s'en rapprochant constamment et en restant d'un même côté, nous dirons que la convergence est **monotone**, dans le second cas, $\underset{n}{f}(x)$ tendra vers X en s'en rapprochant constamment mais en sautant d'un côté à l'autre, nous dirons que la convergence est **oscillante.** En excluant les cas où la dérivée a l'une des valeurs 1, —1 et 0, on a donc les résultats généraux suivants :

$f'(X) < -1$	divergence	$0 < f'(X) < +1$	convergence monotone
$-1 < f'(X) < 0$	convergence oscillante	$f'(X) > +1$	divergence

Si la dérivée s'annule pour X, mais garde un signe constant à gauche et à droite, il est évidemment facile de formuler des conclusions relatives à chaque disposition de signes.

Dans le cas simple où la fonction est croissante dans l'un des intervalles limité à X (par exemple dans l'intervalle situé à droite), on peut déterminer un intervalle de convergence plus grand que le précédent. Supposant en effet que dans un intervalle $(X, X + h)$ la fonction vérifie l'inégalité :

$$f(x) < x.$$

En tenant compte de ce fait et de la croissance de la fonction, on voit que l'on aura

$$X < f(x) < X + h$$

L'inégalité est donc applicable pour la valeur $f(x)$ de la variable $\underset{2}{f}(x) < f(x)$ et ainsi de suite. Les nombres $\underset{n}{f}(x)$ décroissent constamment en restant supérieurs à X ; donc ils ont une limite. Cette dernière étant une racine de l'équation

$$f(x) = x \quad \text{ne peut être que X.}$$

On verrait de même qu'en supposant réalisée l'hypothèse

$$f(x) > x$$

les itérées $\underset{n}{f}(x)$ croîtront jusqu'à ce qu'elles sortent de l'intervalle.

On peut énoncer ces résulats sous une forme géométrique en considérant la bissectrice (fig. 4) des axes et les parallèles

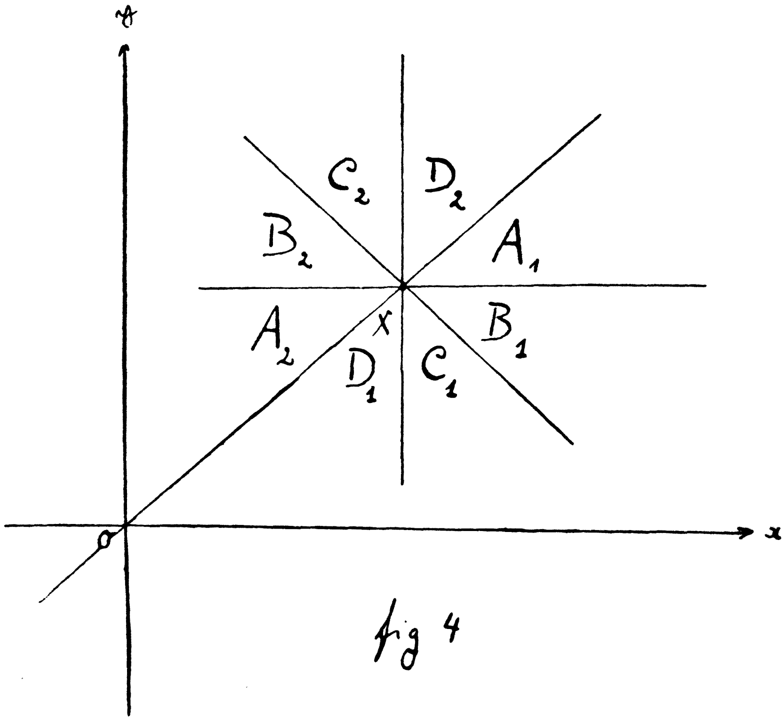


fig 4

aux axes d'abcisse ou d'ordonnée X. Tant que la courbe représentative de f (x) reste dans l'un des angles A_1 et A_2 (bissectrice exclue), les itérées auront X pour point de **convergence monotone.**

Si la courbe aboutit au sommet dans l'un des angles D_1 et D_2, X n'est pas point de convergence pour les valeurs de x supérieures ou inférieures à X. Remarquons ici, que la dérivée f'(X) vérifie $-1 \leqslant f'(X)$.

Passons maintenant au cas d'une fonction monotone, mais décroissante. Donc la représentation graphique de la fonction est complètement comprise dans les champs B_1 C_1 B_2 et C_2. Prenons le champ B_1. Partant d'un nombre

$x > X$, nous obtenons une valeur $f(x) < X$, qu'il faut donner à l'argument de $f(x)$ pour obtenir $\underset{2}{f}(x)$, nous devons donc considérer la courbe représentative de $f(x)$ à la fois à gauche et à droite du sommet.

On peut facilement démontrer que l'ordonnée y pour le champ B_1 est

$$X > f\left(x_{B_1}\right) > 2X - x_{B_1} \qquad \left(x_{B_1} \text{ étant } > X\right)$$

c'est-à-dire

$$X > f\left(x_{B_1}\right) > X - \left(x_{B_1} - X\right)$$

1.) $$f\left(x_{B_1}\right) = X - \alpha\left(x_{B_1} - X\right)$$

où α satisfait aux inégalités $0 < \alpha < +1$

D'autre part nous aurons pour B_2

2.) $$f\left(x_{B_2}\right) = X + \beta\left(X - x_{B_2}\right) \qquad x_{B_2} < X$$

$$0 < \beta < +1$$

Pour α ou $\beta = 1$ nous aurons les points de la 2e bissectrice, pour α ou $\beta = 0$ nous aurons la parallèle à l'axe des x d'ordonnée X. Prenons $x > X$; le point représentatif sera dans B_1 et $f(x)$ sera plus petite que X. Pour avoir $\underset{2}{f}(x)$ il faut substituer $f\left(x_{B_1}\right)$ à x_{B_2} dans 2.) et nous aurons:

$$\underset{2}{f}(x) = X + \beta\alpha(x - X)$$

si $\beta\alpha = 1$ nous aurons $\underset{2}{f}(x) = x$

C'est-à-dire nous aurons un groupe circulaire limite et les itérées ne tendent pas vers X. Si

$$0 < \alpha\beta < +1$$

Nous aurons en effet le cas de la convergence oscillante. C'est-à-dire pour la convergence il est nécessaire que au moins un rameau de la représentation graphique soit situé complètement à l'intérieur de B_1 ou B_2, l'autre rameau peut être situé sur la frontière entre C_2 et B_2 ou C_1 et B_1.

Remarquons ici, que la dérivée f' (X) peut être $0 \geqslant f'(X) \geqslant -1$.

Pour C_1 et C_2 nous pouvons écrire d'une manière analogue

$$f(x_{c_1}) = X - \gamma(x_{c_1} - X) \qquad \text{où} \quad \begin{cases} x_{c_1} > X \\ \gamma > +1 \end{cases}$$

et

$$f(x_{c_2}) = X + \delta(X - x_{c_2}) \qquad \text{où} \quad \begin{cases} x_{c_2} < X \\ \delta > +1 \end{cases}$$

C'est-à-dire nous aurons

$$\underset{2}{f}(x) = X + \gamma\,\delta\,(x - X)$$

Le produit $\gamma.\delta$ sera ici plus grand que 1. Donc il résulte que les itérées seront divergentes. Si nous supposons enfin $\gamma < +1$ et $\delta > +1$ nous aurons les champs B_1 et C_1 et le produit $\gamma.\delta$ peut être plus petit que 1. D'où il résulte, que, pour le cas, où la représentation graphique de notre fonction est située dans le champ B_2 et dans une partie de C_2 telle qu'elle est bornée par les droites $y = X$ et $y = X + \delta(x - X)$ $\delta > +1$, nous pouvons chaque fois désigner une droite $y = X - \gamma(x - X)$, $\gamma\,\delta < 1$ telles que les itérées seront convergentes si à droite de X la réprésentation graphique de f (x) est située entre les droites $y = x$ et $x = X - \gamma(x - X)$.

Remarquons que pour les champs C_1 et C_2 la dérivée f' (X) peut être $-1 \geqslant f'(X)$.

Si la représentation graphique de f (x) coupe la bissectrice en un point autre que X, le point commun sera un point double et en général il faut faire les mêmes discusssions pour X_2 que nous avons faites pour X_1.

Tout ce que nous avons démontré ci-dessus est déduit pour les fonctions monotones, mais il sera souvent possible d'appliquer notre discussion pour les fonctions non monotones.

En ce cas nous pouvons définir facilement l'intervalle de convergence si $0 \leqslant f'(X) < +1$, au voisinage du point (X, X) la courbe représentative de f (x) est située dans les champs A_1 et A_2. C'est-à-dire la partie de notre courbe jusqu'au passage des bornes des champs A_1 et A_2, constitue l'intervalle de convergence monotone.

Le problème sera plus compliqué si $f'(X) = -1$. Pour ce cas décrivons une droite, qui coupe notre courbe représentative. (fig 5) au point X et en un autre point à

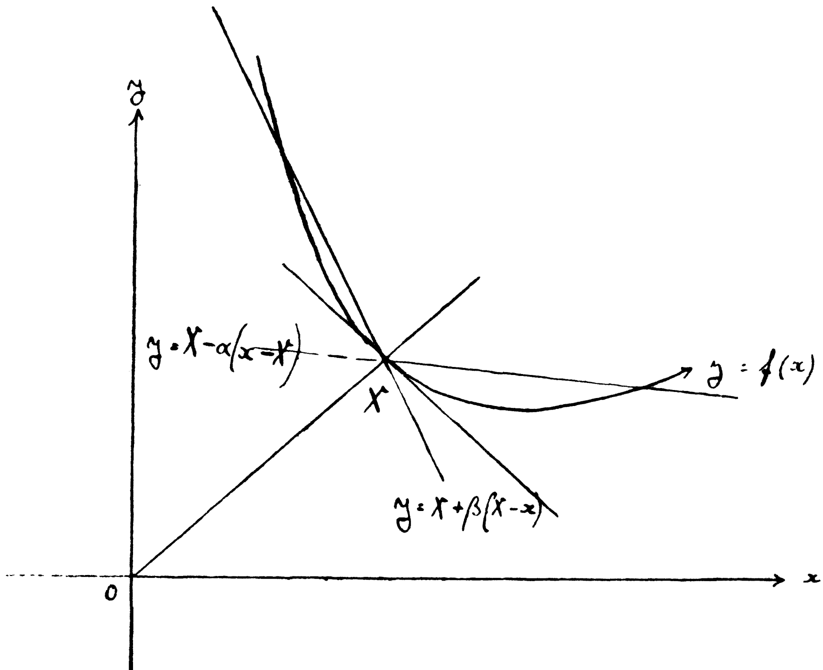


fig 5.

gauche de X. Supposons que le cœfficient angulaire de cette corde soit plus petit que $f'(X)$; d'où il résulte que le point de la section de la droite avec notre courbe représentative sera définie par l'ordonnée y et l'abscisse x satisfaisant à deux équations

$$y = f(x)$$
$$y = X + \beta(X - x)$$

où β sera $> |f'(X)|$.

De ces équations nous pouvons tirer y comme fonction de X et β:

$$x = F(X, \beta)$$

Du côté droit de X nous pouvons de la même façon discuter un point de la section de notre courbe représentative et d'une autre droite

$$y = X - \alpha (x - X)$$

où α sera plus petit que $|f'(X)|$. Si nous substituons ici pour la variable indépendante x la valeur trouvée ci-dessus pour y nous aurons pour l'ordonnée f(y)

$f \{F(X), \beta\} = X - \alpha (F(X, \beta) - X)$ équation donnant une relation entre α et β de la façon:

$$\beta = \Phi(X, \alpha), \text{ ou } \alpha = \Psi(X, \beta)$$

Nous avons vu ci-dessus, que la convergence est possible dans le cas ou $\alpha\beta < +1$. Ainsi s'il existe une valeur B telle que pour chaque β

$$-f'(X) < \beta < B \quad , \quad \beta\Psi(X, \beta) < +1$$

ou s'il existe un valeur A telle que pour chaque α

$$A < \alpha < -f'(X) \qquad\qquad \alpha\Phi(X), \alpha < +1$$

il est alors possible, que la convergence oscillante ait lieu. Pour être sûr, il faut affirmer, que le point $\{f(x), f_2(x)\}$ est situé dans le champ de convergence monotone ou oscillante du point double X et seulement cette racine de l'équation $x = f(x)$ peut être le point de convergence. Prenons comme exemple la fonction

$$f(x) = x^2 - x$$

Nous avons ici deux points doubles $X_1 = 0$ et $X_2 = 2$. Pour X_1 nous aurons

$$f'(X_1) = -1 \qquad \text{pour } X_2 \qquad f'(X_2) = +3$$

C'est-à-dire seulement X_1 peut être un point de convergence. Nous aurons

$$y = F(X, \beta) \equiv \beta^2 - \beta$$

et $\quad \alpha = \Psi(X, \beta) \equiv \pm \beta(1-\beta)$

d'où $\quad \alpha\beta = \beta\Psi(X, \beta) = \pm \beta^2(1-\beta) < +1$

pour $\beta = \frac{2}{3}$, nous aurons $\pm \beta^2(1-\beta) = \pm \frac{9}{8}$, mais pour $\frac{7}{5} \geqslant \beta > 1$ nous aurons constamment

$$\pm \beta^2(1-\beta) < +1, \text{ d'où prenons } B = \frac{7}{5}$$

il résulte alors que nous aurons à coup sûr un intervalle de convergence pour toutes les valeurs de x

$$-\frac{2}{5} \leqslant x \leqslant +\frac{14}{25}$$

En se basant sur l'existence de cet intervalle, on peut facilemeut démontrer, que les itérées convergent aussi pour toutes les valeurs de x:

$$-1 < x < +2.$$

§ 5. Les dérivées des fonctions itérées.

On obtient les dérivées des fonctions itérées en appliquant le théorème des dérivées des fonctions de fonctions, nous avons donc immédiatement:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \qquad \frac{d}{dx}\underset{2}{f}(x) = f'\left\{\underset{1}{f}(x)\right\} \cdot f'(x) =$$

$$= f'\left\{\underset{1}{f}(x)\right\} \cdot f'\left\{\underset{0}{f}(x)\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\underset{3}{f}(x) = f'\left\{\underset{2}{f}(x)\right\} \cdot f'\left\{\underset{1}{f}(x)\right\} \cdot f'\left\{\underset{0}{f}(x)\right\}$$

. . . .

$$\frac{d}{dx}\underset{n}{f}(x) = \prod_{i=1}^{i=n} f'\left\{\underset{n-i}{f}(x)\right\} = \prod_{i=0}^{i=n-i} f'\left\{\underset{i}{f}(x)\right\}$$

Pour définir une dérivée seconde, il faut appliquer à notre produit la loi de formation des dérivées d'un produit, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{d^2}{dx^2}\underset{n}{f}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} f''\,\underset{n-k}{f}(x) \prod_{i=1}^{i=n-k} f'\,\underset{n-k-i}{f}(x) \prod_{\substack{i=1\\ i \neq k}}^{i=n} f'\,\underset{n-i}{f}(x)$$

Exemple:

Prenons la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{4}$.

Nous avons deux points doubles $X_1 = +1$ et $X_2 = +7$. Il résulte du § précédent que le point $+7$ n'a pas un voisinage convergent, parce que nous aurons $f'(7) = +\frac{5}{2}$.

Il existe seulement un point distinct $x = -3$, pour lequel $f(-3) = 7$ et par suite $f_n(-3) = +7$.

Pour le point $X_1 = +1$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Alors nous voyons, qu'en ce cas, nous avons dans le voisinage le cas de convergence oscillante et les formules du § 4 nous donnent l'intervalle de convergence

$$-3 < x < +7.$$

En effet à droite de X_1 la courbe est située dans les champs A_1 et B_1, pour toutes les valeurs de $x < +7$. A gauche de X_1 la représentation graphique est située dans le champ B_2 et dans une partie de C_2, elle est bornée par la droite $y = 1 + \frac{6}{4}(1 - x)$, qui coupe $f(x)$ au point $(-3, +7)$. Donc il faut que le rameau de $f(x)$ relatif à $x > +1$ coupe seulement des droites $y = 1 - \delta(x-1)$ où $\delta < \frac{4}{6}$, en effet nous aurons pour notre fonction

$$\delta = \frac{1}{4}\left\{1 - x + 2\right\} \text{ pour } x > +1 \quad \delta < +\frac{6}{4}.$$

Comme nous voyons, nous aurons pour toutes les x

$$-3 < x < +7$$
$$\lim f(x) = +1$$

Pour toutes ces valeurs nous aurons aussi

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{i=n} f'\, f_{n-i}(x) = 0, \quad \text{parce que}$$

pour chaque valeur de x, qui n'est pas infiniment voisine des bornes de notre intervalle nous pouvons trouver un nombre N assez grand, mais fini tel, que le produit

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=N}^{i=n-1} f'\, f_i(x) \quad \text{se composera seulement de}$$

facteurs $|f'\, f(x)| < k < 1$. Si n tend vers l'infini la valeur de notre produit tendra vers 0. Par conséquent nous aurons aussi

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=N}^{i=n-1} f'.\, f_i(x) = \underbrace{\prod_{i=0}^{i=N-1} f'\, f_i(x)}_{\text{fini}} \;.\; \underbrace{\lim \prod_{i=N}^{i=n-1} f'\, f_i(x)}_{0} = 0$$

Donc la représentation graphique de la fonction

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad f(x) = \frac{1}{4} x^2 - x + \frac{7}{4}$$

sera une droite parallèle à l'axe des x d'ordonnée $+ 1$

pour les valeurs $\qquad -3 < x < +7$

pour les valeurs $\quad x = -3$ et $x = +7 \qquad F(x) = +7$

et pour toutes les autres valeurs de x plus grandes que $+7$, ou plus petites que -3 $F(x) = + \infty$)*. Nous voyons, que la fonction $F(x)$ n'est pas continue autour des points $+7$ et -3.

Cet exemple montre que les itérées d'une fonction continue étant continues, il n'en est pas de même de leur limite pour n infini.

§ 7. Fonctions itérées d'ordres négatifs.

Prenons une fonction monotone $f(x)$ telle qu'elle ne prenne qu'une fois chaque valeur, et supposons qu'entre deux valeurs de la variable x il existe la relation

$f_n(x_1) = f_v(x_2)$, nous pouvons écrire

$$f\left\{f_{n-1}(x_1)\right\} = f\left\{f_{v-1}(x_2)\right\}$$

Il résulte de notre hypothèse que

$$f_{n-1}(x_1) = f_{v-1}(x_2)$$

En répétant cette opération, on voit qu'il est permis sans que l'égalité cesse d'avoir lieu de diminuer les deux indices (ordres d'itération) d'un même nombre entier.

Si $v \geqslant n$ on arrive à

$$x_1 = f_{v-n}(x_2)$$

Si $v < n$, on arrive à

$$f_{n-v}(x_1) = x_2$$

---

*) On peut facilement démontrer que nous aurons pour

$$\varepsilon > 0,\ f_n(7 + \varepsilon) > 7 + \left(\frac{10}{4}\right)^n \varepsilon$$

On peut convenir d'écrire encore la relation **précédente,** où figure l'indice entier négatif. Cela revient à adopter pour définition du symbole $\underset{-p}{f}$ où p est un nombre naturel, l'équivalence des deux relations

$$x_1 = \underset{-p}{f}(x_2) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \underset{p}{f}(x_1)$$

En termes plus élémentaires on peut dire que $\underset{-p}{f}$ est **la** fonction inverse de $\underset{p}{f}(x)$.

Nous avons vu ci-dessus qu'on peut écrire pour les ordres positifs

$\underset{p}{f}\left\{\underset{q}{f}(x)\right\} = \underset{p+q}{f}(x)$ Supposons ici $p = -P$ et $q = -Q$. P et Q étant négatifs.

Nous aurons

$$\underset{-P}{f}\,\underset{-Q}{f}(x) = \underset{-P-Q}{f}(x) = \underset{-(P+Q)}{f}(x) = y$$

d'où

$$\underset{-P}{f}\,\underset{-Q}{f}(x) = y \qquad \text{et} \qquad \underset{-(P+Q)}{f}(x) = y$$

c'est-à-dire

$$\underset{-Q}{f}(x) = \underset{P}{f}(y)$$

$$x = \underset{P+Q}{f}(y)$$

$$x = \underset{Q}{f}\left\{\underset{P}{f}(y)\right\} \qquad \text{et enfin}$$

$$\underset{Q}{f}\left\{\underset{P}{f}(y)\right\} = \underset{P+Q}{f}(y)$$

D'où il résulte, que la règle de l'addition des ordres d'itération est la même pour les ordres négatis et positifs. Il reste à démontrer, qu'elle est aussi la même si P négatif et q positif, c'est-à-dire que

$$\underset{P}{f}\,\underset{q}{f}(x) = \underset{P+q}{f}(x) \qquad \text{Posons}$$

$\underset{P}{f}\,\underset{q}{f}(x) = z$; $\underset{P+q}{f}(x) = v$ d'où

$x = \underset{-P-q}{f}(v) = \underset{-q}{f}\,\underset{-P}{f}(z)$ Supposons $-P - q > 0$, alors

$\underset{q}{f}(x) = \underset{-P}{f}(v) = \underset{-P}{f}(z)$, mais $-P > 0$ d'où $v = z$

$$\underset{P}{f}\,\underset{q}{f}(x) = \underset{P+q}{f}(x)$$

Si $- P - q < 0$ notre démonstration ne change pas beaucoup.

DEUXIÈME CHAPITRE

Les fonctions itérées d'ordre non entier

§ 1. Ci-dessus nous avons démontré, qu'il est très désirable, au point de vue de l'harmonie de la théorie, d'élargir la conception des ordres positifs des itérées c'est-à-dire de déduire la conception des ordres négatifs. Nous avons fait les mêmes discussions, qu'on a fait pour introduire en analyse mathématique les exposants négatifs. Donc il est aussi une nécessité logique de chercher de bonnes définitions des ordres non entiers des itérées. C'est le problème que nous allons résoudre.

En premier lieu il faut déduire quelques formules nécessaires pour notre définition.

1.)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n+1}{f}(x) - \underset{n+2}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = f'(X)$$

X étant la limite, vers laquelle tendent les itérées d'un certain intervalle des valeurs de la variable x.

Supposons

$$\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x) = \varepsilon \qquad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \text{ tend vers } 0, \\ \text{si } n \;\text{»}\quad \text{»}\; \infty \end{matrix} \right.$$

d'où il résulte

$$\underset{n}{f}(x) = \underset{n+1}{f}(x) + \varepsilon \;, \quad \underset{n+1}{f}(x) = f'\left\{\underset{n+1}{f}(x) + \varepsilon\right\}$$

$$\underset{n+1}{f}(x) = \underset{n+2}{f}(x) + f'\left\{\underset{n+1}{f}(x) + \theta\,\varepsilon\right\} \cdot \varepsilon$$

$$\underset{n+1}{f}(x) - \underset{n+2}{f}(x) = f'\left\{\underset{n+1}{f}(x) + \theta\,\varepsilon\right\} \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\underset{n+1}{f}(x) - \underset{n+2}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = f'\left\{\underset{n+1}{f}(x) + \theta\,\varepsilon\right\}$$

Nous aurons immédiatement

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = f'(X)$$

2.) Démontrons alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - X}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{1}{1 - f'(X)}$$

Pour la déduction prenons n fini et considérons la différence $f_n(x) - f_{n+k}(x)$, où k est aussi fini.

$$f_n(x) - f_{n+k}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x) + f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) + \dots$$
$$+ f_{n+k-1}(x) - f_{n+k}(x)$$

Mais nous pouvons écrire

$$f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) = f\,f_n(x) - f\,f_{n+1}(x) =$$
$$\left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\} f'(\xi_0)$$
$$\text{où} \quad f_{n+1}(x) < \xi_0 < f_n(x)$$

$$f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x) = \left\{ f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \right\} . f'(\xi_1)$$
$$\text{où} \quad f_{n+2}(x) < \xi_1 < f_{n+1}(x)$$
$$= \left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\} \cdot f'(\xi_0)\, f'(\xi_1)$$

" " " "

$$f_{n+k-1}(x) - f_{n+k}(x) = \left\{ f_n(x) - f_{n+1}(x) \right\}$$
$$f'(\xi_0) . f'(\xi_1) \dots f'(\xi_{k-2})$$

C'est-à-dire

$$\frac{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+k}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = 1 + f'(\xi_0) + f'(\xi_0)\, f'(\xi_1) + \ldots + f'(\xi_0) \ldots f'(\xi_{k-2})$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{l=k-2} \prod_{i=0}^{i=l} f'(\xi_i)$$

Si k croit infiniment, nous aurons

$$\frac{\underset{n}{f}(x) - X}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = 1 + \sum_{l=0}^{l=\infty} \prod_{i=0}^{i=l} f'(\xi_i)$$

Prenons enfin n très grand, alors les ξ_i ne diffèrent pas beaucoup de X et nous pouvons écrire $f'(\xi_0) = f'(X) + \varepsilon$

En basant sur la condition de la continuité de la dérivée nous pouvons dire, que, si n tend vers l'infini, les différences successives

$$f'(\xi_1) - f'(X)\ ,\ f'(\xi_2) - f'(X)\ ,\ \ldots\ f'(\xi_i) - f'(X)$$

seront toutes plus petites que ε. Donc il résulte

$$1 + f'(X) + f'(X)^2 + \ldots < 1 + f'(\xi_0) + f'(\xi_0)\, f'(\xi_1) + \ldots$$

$$< 1 + \{f'(X) + \varepsilon\} + \{f'(X) + \varepsilon\}^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1 - f'(X)} < 1 + \sum_{l=0}^{l=\infty} \prod_{i=0}^{i=l} f'(\xi_i) < \frac{1\,.}{1 - \{f'(X) + \varepsilon\}}$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n}{f}(x) - X}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = \frac{1}{1 - f'(X)}$$

Soit maintenant à évaluer la limite de $\dfrac{f_{n+1}(x) - X}{f_n(x) - X}$; en écrivant ce rapport sous la forme

$$\frac{f_{n+1}(x) - X}{f_n(x) - X} =$$

$$\frac{f_{n+1}(x) - X}{f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)} \cdot \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} \cdot \frac{f_n(x) - f_{n+1}(x)}{f_n(x) - X}$$

et en appliquant les résultats précédents, on voit que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)$$

Des théorèmes précédents il résulte immédiatement

$$\frac{f_{n+2}(x) - X}{f_n(x) - X} = \frac{f_{n+2}(x) - X}{f_{n+1}(x) - X} \cdot \frac{f_{n+1}(x) - X}{f_n(x) - X}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+2}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^2 \; ; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+3}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^3$$

. . . .

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+u}(x) - X}{f_n(x) - X} = f'(X)^u \qquad \text{(A.)}$$

Nous avons démontré la formule (A.) pour les ordres entiers des itérées ; mais il est évident qu'il sera possible d'utiliser aussi cette formule u étant un nombre quelconque, réel, car **nous pouvons prendre l'équation (A.) pour définition de l'ordre d'itération** u **de** x_2 **par rapport à** x_1. Nous montrerons plus loin que x_1 et x_2 étant donnés dans l'intervalle de convergence monotone, il leur correspond toujours un nombre u.

M. Farkas a défini les fonctions itérées d'ordre fractionnaire de la manière suivante ; « En supposant n et m des nombres entiers et positifs pour définition de l'itérative de degré $\frac{n}{m}$

de la fonction $f(z)$, désignée par $q_1 = z_{\frac{n}{m}}$, posons $q_m = z_n$. Ainsi l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$ n'est autre chose que la fonction, dont l'itérative de degré m est égale à l'itérative de degré n de la fonction $f(z)$ ».

Cette définition n'est pas suffisante. Nous pourrons avoir pour chaque paire de valeurs de m et n plusieurs fonctions q différentes, qui admettent avec la fonction z la relation $q_m = z_n$

Il résulte aussi de notre définition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underset{n+u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} - X}{\underset{n}{f}(x) - X} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underset{n+u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} - X}{\underset{n+u}{f}(x) - X} \cdot \frac{\underset{n+u}{f}(x) - X}{\underset{n}{f}(x) - X} = f'(X)^{v} \cdot f'(X)^{u}$$

$$= f'(X)^{v+u} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underset{n+u+v}{f}(x) - X}{\underset{n}{f}(x) - X}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\underset{u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} = \underset{u+v}{f}(x)$$

d'on résulte d'ailleurs

$$\underset{u}{f}\left[\underset{u}{f}\left\{\ldots\ldots\right\}\right] = \left\{\underset{u}{f}\right\}_{m}(x) = \underset{m.u}{f}(x)$$

$$\text{si } u = \frac{n}{m} \qquad \left\{\underset{\frac{n}{m}}{f}\right\}_{m}(x) = \underset{n}{f}(x)$$

Notre définition satisfait ainsi pour les ordres fractionnaires à la condition de M. Farkas.

§ 2. D'après (A.) il y a deux cas spéciaux à étudier à part, celui où $f'(X) = 1$ et celui où $f'(X) = 0$.

Prenons le cas $f'(X) = 0$, pour lequel notre définition n'aura pas valeur. Supposons ici, que notre fonction soit dévéloppable en série de Taylor et faisons tendre n vers l'infini.

$$\underset{n}{f}(x) = X + \varepsilon \qquad \varepsilon \text{ étant infiniment petit}$$

Alors nous pouvons écrire

$$f_{n+1}(x) = f(X + \varepsilon) = X + f'(X)\,\varepsilon + \frac{1}{2} f''(X)\,\varepsilon^2 + \dots$$

Donc

$$f_{n+1}(x) - X = \frac{1}{2} f''(X)\,\varepsilon^2 + \dots$$

Divisons cela par $\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha}$, où α est un exposant tel, que le quotient ait une limite. Nous aurons

$$\frac{f_{n+1}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} f''(X)\,\varepsilon^2 + \dots}{\varepsilon^{\alpha}} \qquad \text{(B.)}$$

Si n tend vers l'ifini, il suffit de considérer seulement le premier terme du numérateur de la partie droite, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha}} = \frac{1}{2} f''(X)\,\varepsilon^{2-\alpha}$$

. Si $\alpha = 2$, il existe en effet la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{2}} = \frac{1}{2} f''(X).$$

Si $f''(X)$ est aussi égal à 0 nous aurons évidemment $\alpha = 3$ et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{3}} = \frac{1}{3!} f'''(X).$$

Donc nous voyons que nous pouvons toujours trouver une limite de l'expression B si notre fonction est développable en série de Taylor et si au moins la dérivée m-ième est $\neq 0$. Désignons cette limite par l. Alors nous pouvons écrire :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+k}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha^k}} = \frac{f_{n+k}(x) - X}{\left\{ f_{n+k-1}(x) - X \right\}^{\alpha}} \cdot \left[\frac{f_{n+k-1}(x) - X}{\left\{ f_{n+k-2}X - (x) \right\}^{\alpha}} \right]^{\alpha}$$

$$\dots\dots \left[\frac{f_{n+1}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha}} \right]^{\alpha^{k-1}} = l^{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+k}(x) - X}{\left\{ f_n(x) - X \right\}^{\alpha^k}} = l^{\frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}} \qquad \text{(C.)}$$

Cette équation conduirait à une définition des ordres non entiers itérées dans le cas où toutes les dérivées de $f(x)$ jusqu'au degré $m^{\text{ième}}$ sont nulles. Remarquons, que C. se réduit à A., si $f(X) \neq 0$, c'est-à-dire nos deux définitions sont au fond les mêmes.

Nous pouvons facilement indiquer, que par suite de la définition adoptée, les symboles se combinent suivant la même règle que pour les ordres entiers

$$\underset{u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} = \underset{u+v}{f}(x)$$

En effet nous aurons

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n+u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} - X}{\left\{\underset{n}{f}(x) - X\right\}^{\alpha^{v+u}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n+u}{f}\left\{\underset{v}{f}(x)\right\} - X}{\left\{\underset{n+u}{f}(x) - X\right\}^{\alpha^{v}}}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\underset{n+u}{f}(x) - X}{\left\{\underset{n}{f}(x) - X\right\}^{\alpha^{v}}} \right\}^{\alpha^{v}} = 1^{\frac{1-\alpha^{v}}{1-\alpha}\left\{\frac{1-\alpha^{u}}{1-\alpha}\right\}\alpha^{v}} = 1^{\frac{1-\alpha^{v}+\alpha^{v}-\alpha^{u+v}}{1-\alpha}}$$

$$= 1^{\frac{1-\alpha^{u+v}}{1-\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n+u+v}{f}(x) - X}{\left\{\underset{n}{f}(x) - X\right\}^{\alpha^{v+u}}}$$

§ 3. Pour le cas $f'(X) = 1$ supposons, que nous ayons deux valeurs x_1 et x_2 telles que

$$\underset{0}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}}{f}(x_2) > \underset{1}{f}(x_1), \text{ il vient aussi}$$

$$\underset{1}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}+1}{f}(x_2) > \underset{2}{f}(x_1)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\underset{p}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}+p}{f}(x_2) > \underset{p+1}{f}(x_1)$$

Nous pouvons alors former une suite décroissante

$$\underset{0}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}}{f}(x_2) > \underset{1}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}+1}{f}(x_2) > \underset{2}{f}(x_1) >$$

$$\ldots > \underset{p}{f}(x_1) > \underset{n_{1,2}+p}{f}(x_2) > \underset{p+1}{f}(x_1) > \ldots$$

donc les itérées particulières de x_2 sont comprises entre deux itérées de x_1 et vice-versa. Evidemment la différence $\underset{p}{f}(x_1) - \underset{n_{1,2}+p}{f}(x_2)$ sera toujours plus petite que la différence $\underset{p}{f}(x_1) - \underset{p+1}{f}(x_1)$.

Appelons δ_p le rapport de la 1[re] différence à la 2[me].

$$\delta_p = \frac{f_p(x_1) - f_{n_{1,2}+p}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)}$$

Il est facile de démontrer que, si p augmente indéfiniment, δ_p tend vers une limite :

$$\delta = \lim_{p \to \infty} \delta_p = \lim_{p \to \infty} \frac{f_p(x_1) - f_{n_{1,2}+p}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)}$$

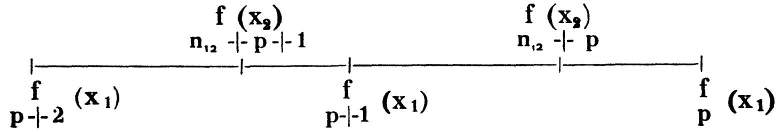


Fig. 6

Pour cela écrivons δ_p sous la forme d'une série
$\delta_p = \delta_0 + (\delta_1 - \delta_0) + (\delta_2 - \delta_1) + \ldots + (\delta_p - \delta_{p-1})$ (D.)

Pour prouver que cette série est convergente on peut démontrer, que

1.) Chaque terme est positif, ou chaque terme est négatif.

2.) Il est possible de désigner des bornes, qui limitent supérieurement ou inférieurement tous les δ_p.

1.) Il est facile de démontrer que la série (D.) se compose sauf δ_0 seulement des termes négatifs. Il suffit de démontrer pour cela que tous les δ_p sont positifs et que

$$\frac{\delta_p}{\delta_{p-1}} \text{ est constamment } < +1.$$

Il résulte de la définition des δ_p que tous les δ_p sont positifs. Nous pouvons écrire

$$\frac{\delta_p}{\delta_{p-1}} = \frac{\dfrac{f(f_{p-1}(x_1)) - f(f_{n_{1,2}+p-1}(x_2))}{f_{p-1}(x_1) - f_{n_{1,2}+p-1}(x_2)}}{\dfrac{f(f_{p-1}(x_1)) - f(f_p(x_1))}{f_{p-1}(x_1) - f_p(x_1)}}$$

Pour la simplicité posons

$$f_{p-1}(x_1) = a; \quad f_{n_{1,2}+p-1}(x_2) = b; \quad f_p(x_1) = c$$

(E.) $\dfrac{\delta_p}{\delta_{p-1}} = \dfrac{\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}}{\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}}$ Remarquons, que nous aurons toujours pour une fonction croissante $f(a) > f(b) > f(c)$; $a > b > c$,

si les valeurs considérées sont supérieures à X (courbe dans A_1) et des inégalités analogues et de sens contraire si les valeurs considérées sont inférieurs à X (courbe dans A_2).

Pour pouvoir dire avec certitude que ce rapport est $< +1$ il suffit de voir dans quel sens varie la fonction:

$\varphi(y) = \dfrac{f(a) - f(y)}{a - y}$ si y croit; nous aurons:

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y) = \frac{-(a-y)\, f'(y) + \{f(a) - f(y)\}}{(a-y)^2}$$

$$f(a) - f(y) = (a - y)\, f'(\xi) \qquad a > \xi > y.$$

$$\varphi'(y) = \frac{f'(\xi) - f'(y)}{a - y}$$

Si, pour les valeurs considérées la fonction $f'(x)$ est décroissante, on aura

$f'(\xi) < f'(y)$ et par suite $\varphi'(y)$ est négatif et la fonction $\varphi(y)$ est décroissante. Donc

$$\frac{\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}}{\dfrac{f(a) - f(c)}{a - c}} = \frac{\delta_p}{\delta_{p-1}} < +1$$

Dans tous les cas, on arrivera à cette conclusion ou à la conclusion opposée; mais de même nature pour toutes les valeurs de l'entier p.

2.) Si nous savons, que les δ_p constituent une suite décroissante il suffit de démontrer, qu'il existe une borne inférieure pour tous les δ_p. En effet nous pouvons écrire:

$$\delta_0 = \frac{\underset{0}{f}(x_1) - \underset{0+n_{1,2}}{f}(x_2)}{\underset{0}{f}(x_1) - \underset{1}{f}(x_1)};$$

$$\delta_1 = \frac{\underset{1}{f}(x_1) - \underset{1+n_{1,2}}{f}(x_2)}{\underset{1}{f}(x_1) - \underset{2}{f}(x_1)} = \frac{\underset{0}{f}(x_1) - \underset{0+n_{1,2}}{f}(x_2)}{\underset{0}{f}(x_1) - \underset{1}{f}(x_1)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)}$$

$$\delta_1 = \delta_0 \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \qquad \begin{aligned} &\underset{0}{f}(x_1) > \xi_1 > \underset{0+n_{1,2}}{f}(x_2) > \underset{1}{f}(x_1) \\ &\underset{0}{f}(x_1) > \quad \gamma_1 \quad > \underset{1}{f}(x_1) \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \delta_0 \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\gamma_2)} \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_p = \delta_0 \cdot \prod_{i=1}^{i=p} \frac{f'(\xi_i)}{f'(\gamma_i)} \qquad \begin{aligned} &\underset{p-1}{f}(x_1) > \xi_p > \underset{p-1+n_{1,2}}{f}(x_2) > \underset{p}{f}(x_1) \\ &\underset{p-1}{f}(x_1) > \quad \gamma_p \quad > \underset{p}{f}(x_1) \end{aligned}$$

Supposons $f(x)$ croissante et $f'(x)$ décroissante pour $x > X$; la représentation graphique de $f(x)$ est dans l'angle A_1 et est concave vers le côté parallèle à l'axe des x ; alors nous pouvons écrire

$$\delta_p = \delta_0 \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_p)} \underbrace{\prod_{i=1}^{i=p-1} \frac{f'(\xi_{i+1})}{f'(\gamma_i)}}_{>1} \qquad \lim_{p \to \infty} f'(\gamma_p) = f'(X) = 1$$

$$\delta_p > \delta_0 \cdot f'(\xi_1)$$

Donc l'existence de $\delta = \lim_{p \to \infty} \delta_p$ est démontrée.

§ 4. **Les transformations des δ :**

Afin d'être clair nous indiquerons le δ avec les indices des valeurs de la variable x, pour lesquelles il faut les calculer. C'est-à-dire nous écrivons :

$$\delta_{12} = \lim_{p \to \infty} \frac{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{n_{12}+p}{f}(x_2)}{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{p+1}{f}(x_1)} \qquad \text{(F.)}$$

Alors nous voulons trouver δ_{12} en fonction de δ_{21}. Evidement nous aurons pour δ_{21}

$$\delta_{21} = \lim_{P \to 8} \frac{\underset{P}{f}(x_2) - \underset{n_{21}+P}{f}(x_1)}{\underset{P}{f}(x_2) - \underset{P+1}{f}(x_2)}$$

De la figure précédente (6) il résulte, que nous pouvons écrire

$P = n_{12} + p$, $n_{21} + P = p + 1$, et $n_{21} = 1 - n_{12}$ (G)

D'où il résulte

$$\delta_{21} = \lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{p+1}(x_1)}{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}$$

D'autre part prenons

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_{12}+q}(x_2) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} =$$

$$\frac{\left\{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)\right\} + \left\{f_{p+1}(x_1) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)\right\} - \left\{f_p(x_1) - f_{n_{12}+p}(x_2)\right\}}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)}$$

$$= 1 + \frac{f_{p+1}(x_1) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} - \delta_{12}$$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f_{p+1}(x_1) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} =$$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f_{p+1}(x_1) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} \cdot \frac{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)}{f_{p+1}(x_1) - f_{p+2}(x_1)} = \delta_{12}$$

C'est-à-dire $\qquad f'(X)=1$

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} = 1$$

D'où il résulte

$$\delta_{21} = \lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{p+1}(x_1)}{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)} \cdot \frac{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{n_{12}+p+1}(x_2)}{f_p(x_1) - f_{p+1}(x_1)} =$$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{f_{n_{12}+p}(x_2) - f_{p+1}(x_1)}{f_{p}(x_1) - f_{p+1}(x_1)}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{f_{p}(x_1) - f_{p+1}(x_1) - \left\{ f_{p}(x_1) - f_{n_{12}+p}(x_2) \right\}}{f_{p}(x_1) - f_{p+1}(x_1)} = 1 - \delta_{12}$$

et $$\delta_{21} = 1 - \delta_{12} \qquad \text{(H.)}$$

Remarquons ici que les δ se transforment de la même manière que les compléments fractionnaires des ordres d'itérée non entiers. Supposons, qu'il existe entre x_1 et x_2 la relation

$$x_1 = f_{\alpha_{12}}(x_2) \text{ où } \alpha_{12} \text{ est non entier.}$$

Il sera toujours possible d'écrire $\alpha_{12} = n_{12} - u_{12}$ où n_{12} est entier et $0 < u_{12} < +1$. Supposons n_{12} positif. Alors nous aurons ;

$$x_1 = f_{-\alpha_{12}}(x_1) = f_{\alpha_{21}}(x_1) \qquad \alpha_{21} = n_{21} - u_{21}$$ où n_{21} est aussi entier et $0 < u_{21} < +1$.

$$f_{-n_{12}+u_{12}}(x_1) = f_{n_{21}-u_{21}}(x_1)$$ pour avoir la relation entre u_{12} et u_{21} il faut évidemment écrire

$$f_{(1-n_{12})-(1-u_{12})}(x_1) = f_{n_{21}-u_{21}}(x_1)$$ et nous aurons

$n_{21} = 1 - n_{12}$ comme ci-dessus (formule G.)

et $u_{21} = 1 - u_{12}$ » » (formule H.)

Prenons alors trois valeurs de la variable x : x_1, x_2, x_3. Soient connues les $\delta_{1,2}$ $\delta_{1,3}$, nous cherchons $\delta_{2,3}$ comme fonction des deux autres δ. Nous aurons :

$$\delta_{12} = \lim_{p\to\infty}\frac{f_{p}(x_1) - f_{n_{12}+p}(x_2)}{f_{p}(x^1) - f_{p+1}(x_1)} \; ; \; \delta_{1,3} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{p}(x_1) - f_{n_{13}+p}(x_3)}{f_{p}(x_1) - f_{p+1}(x_1)}$$

$$\delta_{23} = \lim_{P\to\infty}\frac{f_{P}(x_2) - f_{n_{23}+P}(x_3)}{f_{P}(x_2) - f_{P+1}(x_2)}$$

De la représentation graphique (fig. 7) nous voyons, que

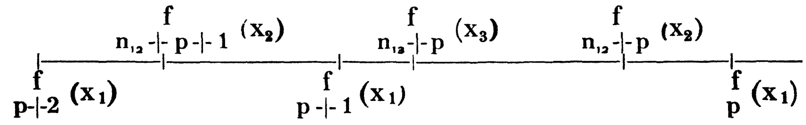


Fig. 7

nous pouvons prenpre

$$n_{12} + p = P \quad , \quad n_{1,3} + p = n_{2,3} + P \quad , \quad n_{23} = n_{13} - n_{12} \qquad \textbf{(J.)}$$

c'est-à-dire

$$\delta_{23} = \lim_{p \to \infty} \frac{\underset{n_{12}+p}{f}(x_2) - \underset{n_{13}+p}{f}(x_3)}{\underset{n_{12}+p}{f}(x_2) - \underset{n_{12}+p+1}{f}(x_2)} \cdot \frac{\underset{n_{12}+p}{f}(x_2) - \underset{n_{12}+p+1}{f}(x_2)}{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{p+1}{f}(x_1)}$$

$$= \lim_{p \to \infty} \frac{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{n_{13}+p}{f}(x_3) - \left\{ \underset{p}{f}(x_1) - \underset{n_{12}+p}{f}(x_2) \right\}}{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{p+1}{f}(x_1)}$$

$$\delta_{23} = \delta_{13} - \delta_{12} \qquad \text{(K.)}$$

Ici aussi nous pouvons facilement démontrer, que les δ se transforment identiquement comme les compléments fractionnaires des ordres d'itération non entiers; cette circonstance nous légitime à utiliser les δ pour la définition des ordres non entiers.

Supposons, qu'il existe entre deux valeurs x_1 et x_2 l'inégalité.

$$\underset{0}{f}(x_1) > \underset{n_{12}}{f}(x_2) > \underset{1}{f}(x_1) > \ldots$$

si alors

$$\delta_{12} = \lim_{p \to \infty} \frac{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{n_{12}+p}{f}(x_2)}{\underset{p}{f}(x_1) - \underset{q+1}{f}(x_1)}$$

nous écrivons $\underset{n_{12}}{f}(x_2) = \underset{\delta_{12}}{f}(x_1)$

§ 5.) Cette équation et les conditions précédentes constituent la définition des ordres non entiers des itérées pour le cas où $f'(X) = 1$. Il semble, que cette définition est autre que la définition donnée pour le cas $f'(X) > 1$. Mais nous pouvons facilement démontrer, qu'il n'existe pas de différence essentielle entre les deux définitions.

Pour la brièveté écrivons $f'(X) \equiv \tau$. Nous aurons aussitôt pour des valeurs quelconques de u et δ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n+u}{f}(x)-X}{\underset{n}{f}(x)-X}=\tau^u\,;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n+u}{f}(x)-\underset{n+v}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x)-X}=\tau^u-\tau^v$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n+u}{f}(x)-\underset{n}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x)-X}=\tau^u-1$$ Donc nous aurons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n+u}{f}(x)-\underset{n+v}{f}(x)}{\underset{n+u}{f}(x)-\underset{n}{f}(x)}=\frac{\tau^u-\tau^v}{\tau^u-1}$$ Suposons $u=-1$ et v arbitaire.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n-1}{f}(x)-\underset{n+v}{f}(x)}{\underset{n-1}{f}(x)-\underset{n}{f}(x)}=\frac{1-\tau^{v+1}}{1-\tau}$$ Alors écrivons $n-1=n'$, $n=n'+1$, $v=v'-1$

$$\lim_{n'\to\infty}\frac{\underset{n'}{f}(x)-\underset{n'+v'}{f}(x)}{\underset{n'}{f}(x)-\underset{n'+1}{f}(x)}=\frac{1-\tau^{v'}}{1-\tau}$$ C'est-à-dire nous pouvons écrire :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n}{f}(x)-\underset{n+u}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x)-\underset{n+1}{f}(x)}=\frac{1-\tau^u}{1-\tau}\qquad\text{(L.)}$$

Si nous supposons $\tau=f'(X)=1$ nous aurons

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{1-\tau^u}{1-\tau}=u,$$ donc il résulte

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ f'(X)=1}}\frac{\underset{n}{f}(x)-\underset{n+u}{f}(x)}{\underset{n}{f}(x)-\underset{n+1}{f}(x)}=u\qquad\text{(M.)}$$

Or, en remplaçant dans l'équation (F.) $\underset{n_{12}}{f}(x_2)$ par $\underset{\delta_{12}}{f}(x_1)$ nous aurons :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\underset{p}{f}(x_1)-\underset{p+\delta_{12}}{f}(x_1)}{\underset{p}{f}(x_1)-\underset{p+1}{f}(x_1)}=\delta_{12}$$

Si nous écrivons ici $\delta_{12}\equiv u$ la formule (F) se transformera en l'équation (M.).

§ 6. Pour définir les ordres d'itération non entiers dans le cas $f'(X)=1$, nous avons démontré l'existence, d'une limite pour un certain rapport. L'équation (L.) exprime que dans le cas $0 < f'(X) < +1$, ce même rapport a aussi une limite δ, qui est liée à l'ordre d'itération u par la formule

$$u = \frac{\lg [1 - (1 - \tau) \delta]}{\lg \tau}$$

Soient δ_{12}, δ_{13}, δ_{23} les limites des rapports analogues pour trois valeurs x_1, x_2 et x_3 associées deux à deux ; proposons nous de calculer δ_{23} en fonction de δ_{12} et δ_{13}. Nous pouvons écrire

$$\delta_{12} = \frac{1 - \tau^{u_{12}}}{1 - \tau}; \quad \delta_{13} = \frac{1 - \tau^{u_{13}}}{1 - \tau}; \quad \delta_{23} = \frac{1 - \tau^{u_{23}}}{1 - \tau}$$

Comme nous avons vu ci-dessus, les transformations des u (précédemment nous avions écrit $n_{23} = n_{13} - n_{12}$) doivent être $u_{23} = u_{13} - u_{12}$, c'est-à-dire

$$\frac{\lg [1 - (1 - \tau) \delta_{23}]}{\lg \tau} = \frac{\lg [1 - (1 - \tau) \delta_{13}]}{\lg \tau} - \frac{\lg [1 - (1 - u) \delta_{12}]}{\lg \tau}$$

d'où

$$\delta_{23} = \frac{\delta_{13} - \delta_{12}}{1 - 1(-\tau) \delta_{12}} \qquad \text{(N.)}$$

La formule (N) se réduit à (K.) dans le cas $\tau = 1$. Cette expression générale de la transformation des δ pourrait être établie directement en appliquant la méthode du § 4.

De la même façon nous pouvons aussi déduire la relation générale entre δ_{21} et δ_{12}. Nous aurons facilement

$$\delta_{21} = \frac{1 - \delta_{12}}{1 - (1 - \tau) \delta_{12}}$$

§ 7. Les formules, que nous avons déduites ci-dessus, sont applicables pour $f'(X)$ posisif, c'est-à-dire pour le cas de la convergence monotone. Si nous avons le cas de la convergence oscillante pour $f'(X) < 0$, on peut convenir d'appliquer les mêmes définitions, lorsqu'elles conservent un sens; mais pour la plupart des ordres, elles en sont dépourvues.

§ 8. Dans le premier cas $[0 < f'(X) = \tau < 1]$, nous avons défini l'ordre d'itération u de x_2 par rapport a x_1 par l'équation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x_2) - X}{f_n(x_1) - X} = \tau^u \qquad \text{(A.)}$$

x_1 et x_2 appartenant au même intervalle de convergence monotone ; pour montrer qu'il existe un ordre u tel que

$x_2 = \underset{u}{f}(x_1)$, il suffit d'établir l'existence de la limite. Pour cela, nous allons montrer que les rapports

$$s_n = \frac{\underset{n}{f}(x_2) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X}$$

forment une suite croissante ou une suite décroissante, et restent compris entre deux nombre fixes.

L'inégalité

$$s_{n+1} \gtrless s_n \quad \text{ou} \quad \frac{\underset{n+1}{f}(x_2) - X}{\underset{n+1}{f}(x_1) - X} \gtrless \frac{\underset{n}{f}(x_2) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X} \qquad \text{est}$$

$$\text{équivalente à} \quad \frac{\underset{n+1}{f}(x_2) - X}{\underset{n}{f}(x_2) - X} \gtrless \frac{\underset{n+1}{f}(x_1) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X}$$

Les deux membres de cette inégalité sont les valeurs pour $x = \underset{n}{f}(x_2)$ et $x = \underset{n}{f}(x_1)$ de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - X}{x - X}$$

En raisonnant comme au paragraphe 3 pour les s, on verrait que cette fonction est monotone si f' (x) l'est; d'autre part, la fonction f (x) étant croissante, l'inégalité $x_1 \lessgtr x_2$ entraîne

$$f(x_1) \lessgtr f(x_2), \quad \underset{2}{f}(x_1) \lessgtr \underset{2}{f}(x_2), \quad \ldots, \quad \underset{n}{f}(x_1) \lessgtr \underset{n}{f}(x_2)$$

Ce premier point est donc établi.

D'antre part prenons la suite des itérées d'ordre naturel de x_1, x_2 est compris entre deux termes consécutifs de cette suite

$$\underset{k}{f}(x_1) \lessgtr x_2 \lessgtr \underset{k+1}{f}(x_1)$$

(ou bien l'inverse à lieu).

On a donc

$$\underset{n+k}{f}(x_1) \lessgtr \underset{n}{f}(x_2) \lessgtr \underset{n+k+1}{f}(x_1)$$

d'où

$$\frac{\underset{n+k}{f}(x_1) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X} \gtrless \frac{\underset{n}{f}(x_2) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X} \gtrless \frac{\underset{n+k+1}{f}(x_1) - X}{\underset{n}{f}(x_1) - X}$$

Les deux membres extrêmes ont chacun une limite :

$$f'(X)^k \quad \text{et} \quad f'(X)^{k+1}$$

Par suite, le rapport du milieu reste borné dans les deux sens. Il a donc une limite compise nécessairement entre $f'(X)^k$ et $f'(X)^{k+1}$.

§ 9. Remplaçons x_1 par a que nous laisserons fixe, et x_2 par x qui reste variable. L'ordre d'itération u et une fonction de x que nous nous proposons d'étudier. Donnons à x un accroissement Δx et soit s l'ordre d'itération de $x + \Delta x$ par rapport à x. De

$$x + \Delta x = \underset{s}{f}(x) \quad \text{et} \quad x = \underset{u}{f}(a) \quad \text{il résulte}$$

$$x + \Delta x = \underset{s}{f}\left[\underset{u}{f}(a)\right] = \underset{u+s}{f}(a)$$

L'accroissement de la fonction u est donc l'ordre de $x + \Delta x$ relativement à x (il est par suite indépendant de a). Définissons le par l'équation (L)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underset{n}{f}(x) - \underset{n}{f}(x + \Delta x)}{\underset{n}{f}(x) - \underset{n+1}{f}(x)} = \frac{1 - T^{s}}{1 - T}$$

Chaque rapport peut être comparé au précédent en appliquant à ses deux termes la formule des accroissements finis. On a ainsi

$$\frac{\underset{1}{f}(x) - \underset{1}{f}(x + \Delta x)}{\underset{1}{f}(x) - \underset{2}{f}(x)} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)}$$

$$x \lessgtr \xi_1 \lessgtr x + \Delta x, \qquad x \gtrless \gamma_1 \gtrless f(x)$$

$$\frac{\underset{2}{f}(x) - \underset{2}{f}(x + \Delta x)}{\underset{2}{f}(x) - \underset{3}{f}(x)} = \frac{\underset{1}{f}(x) - \underset{1}{f}(x + \Delta x)}{\underset{1}{f}(x) - \underset{2}{f}(x)} \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\gamma_2)}$$

$$f(x) \lessgtr \xi_2 \lessgtr f(x + \Delta x), \quad f(x) \gtrless \gamma_2 \gtrless \underset{2}{f}(x)$$

. . . .

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x + \Delta x)}{f_{n-1}(x) - f_n(x)} \cdot \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_n)}$$

$$f_{n-1}(x) \lessgtr \xi_n \lessgtr f_{n-1}(x + \Delta x), \quad f_{n-1}(x) \gtrless \gamma_n \gtrless f_n(x)$$

Multiplions membre à membre et simplifions :

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_1)} \cdots \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_n)}$$

On peut toujours en associant si c'est nécessaire chaque numérateur avec le dénominateur précédent ou suivant, faire apparaître un produit de rapports tous plus petits que 1. Supposons pour fixer les idées $x > X$ et $f'(X)$ décroissante (courbe représentatixe dans l'angle A_1 et concave vers l'axe des x). On a alors $x > \gamma_1 > f(x) > \gamma_2 > f_2(x) > \ldots\ldots f_{n-1}(x) > \gamma_n > f_n(x)$;

Si $\Delta x > 0$ on a : $\xi_i > \gamma_i$
et si $\Delta x < 0$ on a : $\xi_i > \gamma_{i+1}$

On laissera la formule telle qu'elle est écrite dans le premier cas, et on la mettra sous la forme :

$$\frac{f_n(x) - f_n(x + \Delta x)}{f_n(x) - f_{n+1}(x)} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot \frac{f'(\xi_n)}{f'(\gamma_1)} \cdot \frac{f'(\xi_1)}{f'(\gamma_2)} \cdot \frac{f'(\xi_2)}{f'(\gamma_n)} \cdots \frac{f'(\xi_{n-1})}{f'(\gamma_n)}$$

En faisant croître n indéfiniment, on arrivera toujours à une égalité de la forme

$$\frac{1 - T^n}{1 - T} = \frac{-\Delta x}{x - f(x)} \cdot K \prod \qquad \textbf{(P)}$$

$\prod$ étant un produit infini, dont tous les facteurs sont plus petits que 1. La comparaison des signes des deux membres montre, que u est une fonction monotone de x. La comparaison des valeurs absolues montre que c'est une fonction continue. La démonstration s'applique évidemment aussi au cas où $f'(X) = 1$, car $\frac{1 - T^n}{1 - T}$ serait simplement remplacé par n.

Continuité et monotonie de la fonction $\underset{x}{f}(a)$

Nous venons de voir qui dans la relation $y = \underset{x}{f}(a)$ l'ordre d'itération x est fonction continue et monotone de la fonction itérée y. Nous pouvons alors faire l'inversion de cette fonction; y considérée comme fonction de x est continue et monotone. Si nous prenons deux fonctions de cette forme relatives à deux valeurs a et b (appartenant au même intervalle de convergence monotone), il y a entre elles une relation très simple. En effet b a par rapport à a un ordre d'itération m

$b = \underset{m}{f}(a)$ d'où il résulte que $\underset{x}{f}(b) = \underset{x+m}{f}(a)$

Les deux courbes représentatives se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe des x.

§ 10. La continuité de $\underset{u}{f}(x)$.

Pour la continuité de $\underset{u}{f}(x)$ il faut démontrer que $\underset{u}{f}(x + \Delta x) - \underset{u}{f}(x) = \Delta y$ tend vers 0 si Δx tend vers 0, nous pouvons écrire :

$$x + \Delta x = \underset{s}{f}(x)$$

et nous avons vu que s tend vers 0 si Δx tend vers 0 donc nous aurons

$$\underset{u+s}{f}(x) = \underset{u}{f}(x + \Delta x) = \underset{u}{f}(x) + \Delta y$$

Si $\Delta x \to 0$, $\Delta y = \underset{u+s}{f}(x) - \underset{u}{f}(x)$ tend aussi vers 0.

La continuité de $\underset{u}{f}(x)$ est démontrée.

§ 11. Pour trouver l'expression de la dérivée de $\underset{x}{f}(a)$ prenons la formule

$$\frac{T^{x}(1 - T^{\Delta x})}{1 - T} = \frac{\underset{x+\Delta x}{f}(a) - \underset{x}{f}(a)}{f(a) - a} \cdot \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\xi_i)}{f'(\gamma_i)}$$

il résulte immédiatement

$$\frac{f_{x+\Delta x}(a) - f_x(a)}{\Delta x} = \frac{T^x}{1-T} \cdot \frac{1-T^{\Delta x}}{\Delta x} \cdot \{f(a) - a\} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}$$

$$\frac{d}{dx} f_x(a) = \frac{-T^x}{1-T} \cdot \lg_e T \, \{f(a) - a\} \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{\ddot{\Pi}}$$

Il faut démontrer l'existence de la limite double Π. Remarquons, que les numérateurs des facteurs sont fixes et que les dénominateurs dépendant de Δx. Pour la preuve nous pouvons supposer toujours $0 < x < 1$, parce qu'il est possible dans tout autre cas de faire sortir du signe du produit un nombre fini de premiers facteurs $f'(\xi_i)$ et un nombre égal des derniers facteurs $f'(\gamma_i)$ de telle manière, que chaque γ_i soit associé avec un ξ_j, situé dans le même intervalle $\left(f_{i-1}(a), f_i(a)\right)$. Si Δx tend vers 0

$$\frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} \to \frac{f'(\gamma_i)}{f'\,f_{x+i-1}(a)} \cdot$$

C'est-à-dire le produit infini

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\Delta x\to 0} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'\left[f_{x+i-1}(a)\right]}$$

sera strictement défini.

Evidemment nous sommes amené à penser que

$$\lim_{\Delta x\to 0} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)} = \lim_{n\to\infty} \lim_{\Delta x\to 0} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}$$

Il suffit de démontrer que ce produit infini, dont les facteurs dépendent de Δx est uniformément convergent (quelque soit Δx suffisamment petit).

La différence entre le produit infini et le produit des n premiers facteurs se met sous la forme

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{\ddot{P}_n} \cdot \left| \underbrace{\prod_{i=n+1}^{i=\infty} \frac{f'(\gamma_i)}{f'(\xi_i)}}_{\ddot{P}_\infty} - 1 \right| .$$

P_n sera toujours fini et en se basant sur les mêmes conditions qu'à la page 34. nous aurons :

$$\frac{f'(\gamma_1)}{f'(\xi_2)} \cdots \frac{f'(\gamma_{n-1})}{f'(\xi_n)} \cdot \frac{f'(\gamma_n)}{f'(\xi_1)} = P_n = \frac{f'(\gamma_2)}{f'(\xi_1)} \cdots \frac{f'(\gamma_n)}{f'(\xi_{n-1})} \cdot \frac{f'(\gamma_1)}{f'(\xi_n)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{f'(X)}{f'(\xi_1)} < P_n < \frac{f'(\gamma_1)}{f'(X)}$$

Pour P_∞ il résulte

$$\frac{f'(X)}{f'(\xi_{n+1})} < P_\infty < \frac{f'(\gamma_{n+1})}{f'(X)}$$

$$\frac{f'(X) - f'(\xi_{n+1})}{f'(\xi_{n+1})} < P_\infty - 1 < \frac{f'(\gamma_{n+1}) - f'(X)}{f'(X)}$$

Nous pouvons écrire

$$\left| \frac{f'(X) - f'(\xi_{n+1})}{f'(\xi_{n+1})} \right| = \frac{f'(\xi_{n+1}) - f'(X)}{f'(\xi_{n+1})} < \frac{f'(\xi_{n+1}) - f'(X)}{f'(X)}$$

$$f'(\gamma_{n+1}) < f'\left(\overset{f}{n}(a)\right) \qquad f'(\xi_{n+1}) \leq f'\left\{\overset{f}{n}(a)\right\}$$

Donc

$$\left| P_\infty - 1 \right| \leq \frac{f'\left[\overset{f}{n}(a)\right] - f'(X)}{f'(X)}$$

Le 2. membre tend vers 0 puisque $\overset{f}{n}(a) \rightarrow X$; et comme il ne dépend plus de Δx, cette convergence est uniforme, et nous pouvons enfin écrire :

$$\frac{d}{dx}\overset{f}{x}(a) = \frac{-T^x}{1-T} \cdot \lg T \left\{ f(a) - a \right\} \cdot \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{i=n} \frac{f'(\gamma_i)}{f'\overset{f}{x+i-1}(a)} \qquad (Q)$$

Cette formule est démontrée pour le cas, où la dérivée f'(x) est monotone au voisinage de X.

§ 12. En appliquant la formule (Q) du paragraphe précédent nous pouvons très facilement déduire la dérivée de la fonction $\underset{u}{f}(x)$. En effet, nous aurons aussitôt :

$$\frac{d}{dx}\underset{u}{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\underset{u}{f}\, x + \Delta(x) - \underset{u}{f}(x)}{\Delta x}$$

Supposons $\underset{s}{f}(x) = x + \Delta x \qquad \Delta x = \underset{0+s}{f}(x) - \underset{0}{f}(x)$

$$\frac{d}{dx}\underset{u}{f}(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\underset{u+s}{f}(x) - \underset{u}{f}(x)}{\underset{s}{f}(x) - \underset{0}{f}(x)} =$$

$$\lim_{s \to 0} \left\{ \frac{\underset{u+s}{f}(x) - \underset{u}{f}(x)}{s} : \frac{\underset{s}{f}(x) - \underset{0}{f}(x)}{s} \right\}$$

$$\frac{d}{dx}\underset{u}{f}(x) = \; . \; T^u \; . \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{i=n+1} \frac{f' \underset{i}{f}(x)}{f' \underset{u+i}{f}(x)}$$

§ 13. Dans notre définition des ordres non entiers d'itérées nous avons la signe de la limite, ce qui rend notre définition inutilisable pour le calcul pratique des ordres quelconques ; mais nous pouvons chercher une formule d'interpolation, qui donne la méthode pour calculer (d'une manière analogue à la fonction d'interpolation de Newton) avec grande probabilité une approximation arbitraire des itérées cherchées.

Prenons la dérivée de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - X}{x - X}, \quad \text{nous aurons}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x-X)\, f'(x) - [f(x) - X]}{(x-X)^2} = \frac{(x-X)\, f'(x) - [f(x) - f(X)]}{(x-X)^2}$$

$$f(x) - f(X) = (x - X)\, f'(\xi) \qquad x \lessgtr \xi \lessgtr X$$

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{(x - X)}$$

Si nous supposons (f')x monotone et x dans le champ A_1 ou A_2 la signe de $\varphi'(x)$ sera invariable. Donc nous pouvons écrire

$$\frac{(f\,x) - \Delta x - X}{(x - \Delta x) - X} \gtrless \frac{f\,(x) - X}{x - X} \gtrless \frac{f\,(x + \Delta x) - X}{(x + \Delta x) - X}$$

ou

$$\frac{\overset{f}{{}_{N+s}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-1+s}}(x) - X} \gtrless \frac{\overset{f}{{}_{N}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-1}}(x) - X} \gtrless \frac{\overset{f}{{}_{N-s}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-1-s}}(x) - X} \qquad \text{(R)}$$

où $s > 0$ (arbitraire)

Nous pouvans toujours écrire pour u entier et N arbitraire

$$\frac{\overset{f}{{}_{N+u}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N}}(x) - X} =$$

$$\frac{\overset{f}{{}_{N+u}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-1+u}}(x) - X} \cdot \frac{\overset{f}{{}_{N+u-1}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N+u-2}}(x) - X} \cdots\cdots \frac{\overset{f}{{}_{N+1}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N}}(x) - X}$$

Il résulte de (R)

$$\left\{\frac{\overset{f}{{}_{N+u+s}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-1+u+s}}(x) - X}\right\}^{u} \gtrless \frac{\overset{f}{{}_{N+u}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N}}(x) - X} \gtrless \left\{\frac{\overset{f}{{}_{N+1-s}}(x) - X}{\overset{f}{{}_{N-s}}(x) - X}\right\}^{u} \qquad \text{(S.)}$$

Nous avons démontré la formule (S) pour u entier, mais il ne sera pas très risquable de l'utiliser aussi pour u non entier Alors il faut prendre pour la première expression s tel, que $u + s$ est entier et pour la troisième expression il sera opportun de prendre $s = + 1$.

§ 14. Nous avons vu ci-dessus, que la calcul de $\overset{f}{{}_{x}}(a)$ est très difficile au point de vue pratique pour x non entier ou grand. Cherchons maintenant une fonction d'interpolation. Cette fonction doit satisfaire aux conditions:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} P\,(x) = X$

2.) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{P\,(n) - P\,(n+x)}{P\,(n) - P\,(n+1)} = \dfrac{1 - T^{x}}{1 - T} = \dfrac{T^{n} - T^{n+x}}{T^{n} - T^{n+1}}$

Une fonction satisfaisant à la deuxième condition, c'est $P_1(x) = \tau^x$. Seulement, si $\tau < 1$ notre fonction tend vers 0 quand x tend vers ∞, donc pour la première condition il faut écrire :

$P_2(x) = \tau^x + X$. Mais nous savons aussi que $\underset{x}{f}(a)$ tend plus vite vers X si « a » est trés voisin de X, pour satisfaire à cette condition écrivons :

$$P_3(x) = + (a - X)\,\tau^x + X$$

Enfin remarquons, que la condition 2.) est accomplie pour la fonction $P_3(x)$ pour n quelconque ; mais nous savons, qu'elle ne doit être juste que pour $n \to \infty$. Donc nous voyons, qu'il faudra modifier la fonction $P_3(x)$, pour qu'il soit possible de l'utiliser aussi pour n fini ; nous pouvons faire cela en écrivant par exemple :

$$P(x) = (a - X) \cdot \varphi(a, x)\,\tau^x + X$$

$$\text{ou} \quad P(x) = (a - X)^{\Psi(a, x)}\,\tau^x + X$$

$\varphi(a, x)$ et $\Psi(a, x)$ étant des fonctions telles que $\varphi(a, x)$ et $\Psi(a, x) = +1$ pour $x = 0$ et $\varphi(a, x)$ et $\Psi(a, x) \to$ const (dépendant de a) pour $x \to \infty$.

Il faudra trouver la forme de $\varphi(a, x)$ ou $\Psi(a, x)$ en dépendant de la fonction « f » et il est évident, qu'il sera possible de la déterminer avec exactitude suffisante ordinairement seulement pour un certain intervalle de x.

D'autre part il sera souvent possible de trouver la limite $\varphi(a, \infty)$ ou $\Psi(a, \infty)$, vers laquelle tendent $\varphi(a, x)$ et $\Psi(a, x)$ si x tend vers l'infini. Nous pouvons facilement démontrer que pour une autre valeur du paramètre $b = \underset{v}{f}(a)$ nous aurons les relations :

$$\varphi(b, \infty) = \frac{a - X}{b - X} \cdot \tau^v\, \varphi(a, \infty)$$

ou

$$\Psi(b, \infty) = \frac{\lg \tau^v + \Psi(a, \infty) \lg (a - X)}{\lg (b - X)}$$

TROISIÈME CHAPITRE

Exemples et applications

M. Kœnigs a traité comme exemple la fonction :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + c}$$

Il est facile de vérifier, que nous pouvons écrire les itérées d'ordre entier sous la forme

$$\underset{2}{f}(x) = \sqrt{a\sqrt{ax^2+c}^{\,2} + c} = \sqrt{a^2x^2 + c(a+1)}$$

. . . .

$$\underset{n}{f}(x) = \sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} \qquad \text{(I.)}$$

Evidemment les itérées convergent monotonement seulement pour $0 < a < +1$ et la limite sera égale,

$$X = \sqrt{\frac{c}{1-a}}$$

Indépendamment de toute théorie générale, il semble désirable que, si on étend la notion de fonction itérée, la formule 1. soit aussi valable pour n non entier. Constatons, que cette définition coincide avec notre définition des ordres non entiers.

De la formule A., qui traduit notre définition il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^n\left\{\underset{u}{f}(x)\right\}^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}}{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}} = a^u$$

Trouvons la limite de la première partie de notre égalité. Nous aurons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^n\left\{\underset{u}{f}(x)\right\}^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} - \sqrt{\frac{c}{1-a}}}{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)} = \sqrt{\frac{c}{1-a}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^n x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)}\ \left(\underset{u}{f}(x)^2 - \frac{c}{1-a}\right)}{\sqrt{a^n \underset{u}{f}(x)^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)}\ \left(x^2 - \frac{c}{1-a}\right)} = \frac{\left\{\underset{u}{f}(x)\right\}^2 - \frac{c}{1-a}}{x^2 - \frac{c}{1-a}} = a^u$$

et en effet nous aurons enfin :

$$f_u(x) = \sqrt{a^u x^2 + \frac{c}{1-a}(1-a^n)}$$

Prenons pour deuxième exemple la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{4}$$

Nous avons ici $X = + 1$ et $f'(X) = \frac{1}{2}$. Cherchons $f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)$? Alors calculons les itérées jusqu'au neuvième ordre :

$$\begin{array}{llll}
f_0\left(\frac{3}{2}\right) = 1.5 & f_5\left(\frac{3}{2}\right) = 1.02650 & \\
f_1\left(\frac{3}{2}\right) = 1.3125 & f_6\left(\frac{3}{2}\right) = 1.01342 & \\
f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 1.18066 & f_7\left(\frac{3}{2}\right) = 1.006759 & 2. \\
f_3\left(\frac{3}{2}\right) = 1.09849 & f_8\left(\frac{3}{2}\right) = 1.003391 & \\
f_4\left(\frac{3}{2}\right) = 1.05167 & f_9\left(\frac{3}{2}\right) = 1.001698 &
\end{array}$$

Appliquons la formule S en posant N = 8 nous aurons

$$\left\{\frac{3391}{6745}\right\}^{\frac{1}{2}} > \frac{f_{8\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{0.003391} > \left\{\frac{1698}{3391}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$1.002402 > f_{8\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) > 1.002399$$

$$1.400005 > f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) > 1.399237$$

$$f_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\right) = 1.39962 \pm 3.8 \cdot 10^{-4}$$

Nous pouvons aussi appliquer une formule d'interpolation et nous aurons ici :

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\Psi\left(\frac{3}{2},\, x\right) + x} + 1$$

D'où nous aurons

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, x\right) = \frac{\lg\{(2^x \cdot P(x) - 1)\}}{\lg \frac{1}{2}}$$

Pour $\Psi\left(\frac{3}{2}, x\right)$ il résulte du tableau 2.

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{1}{\lg 0{,}5} \cdot \lg 0{,}5$$

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \quad ,, \quad . \lg 0.625$$

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \quad ,, \quad . \lg 0.72264$$

$$\Psi\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \quad ,, \quad . \lg 0.7879$$

x	$2^x\left[f_x\left(\frac{3}{2}\right) - 1\right]$
4	0.8267
5	0.8480
6	0.8589
7	0.865
8	0.868
9	0.869
x	y

Nous pouvons présumer facilement en regardant les dernières valeurs de y, que les y tendent vers une limite

En effet prenons le rapport

$$\varphi = \frac{y(x+2) - y(x+1)}{y(x+1) - y(x)}$$

$$= \frac{2^{x+2}\left\{f_{x+2}(a) - 1\right\} - 2^{x+1}\left\{f_{x+1}(a) - 1\right\}}{2^{x+1}\left\{f_{x+1}(a) - 1\right\} - 2^{x}\left\{f_{x}(a) - 1\right\}}$$

Nous aurons

$$f_{x+1}(a) = \frac{\left\{f_x(a)\right\}^2 + 3}{4}$$

d'où

$$f_{x+1}(a) - 1 = \frac{f_x(a)^2 - 1}{4} = \frac{\left(f_x(a) + 1\right)\left(f_x(a) - 1\right)}{4}$$

c'est-à-dire

$$2^{x+1}\left\{f_{x+1}(a) - 1\right\} - 2^x\left\{f_x(a) - 1\right\} =$$

$$2^x \frac{\left(f_x(a) + 1\right)\left(f_x(a) - 1\right)}{2} - 2^x\left(f_x(a) - 1\right)$$

et

$$2^{x+2}\left\{f_{x+2}(a) - 1\right\} - 2^{x+1}\left\{f_{x+1}(a) - 1\right\} =$$

$$2^{x+1} \frac{\left(f_{x+1}(a) + 1\right)\left(f_{x+1}(a) - 1\right)}{2} - 2^{x+1}\left(f_{x+1}(a) - 1\right)$$

d'où

$$\varphi = 2. \left\{ \frac{\underset{x-|-1}{f}(a) - 1}{\underset{x}{f}(a) - 1} \right\}^2 \quad \text{mais} \quad \frac{\underset{x-|-1}{f}(a) - 1}{\underset{x}{f}(a) - 1} \to \underset{\text{si } x \mapsto \infty}{f'(X)} = \frac{1}{2}$$

Il résulte de cela ausssitôt l'existence de la limite

$$\lim_{x \mapsto \infty} y = Y$$

$$0{,}8695 < Y = \lim_{x \to \infty} y < 0{,}870$$

Ecrivons:

$$Y = 0{,}870$$

Donc il résulte, que nous pouvons écrire pour x assez grand (il suffit d'avoir $x < 15$)

$$P(x) = 0{,}870 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\Psi(\frac{3}{2}, \infty)} = 0{,}870$$

De $\Psi(\frac{3}{2}, \infty)$ nous pouvons facilement déduire par exemple $\Psi(1{,}3125, \infty)$ en appliquant la formule finale du deuxième chapitre nous aurons

$$\Psi(1{,}3125, \infty) = \frac{\lg(\frac{1}{2}) + \Psi(\frac{3}{2}), \infty) \lg \frac{1}{2}}{\lg\ 0.3125} = \frac{1 + \Psi(\frac{3}{2}\ \infty)}{1\ 0.3125} \lg \frac{2}{1}$$

Pour les valeurs de x plus petites que 15 il sera commode, si l'exactitude exigée n'est pas grande, de faire une représentation graphique de la fonction $y = \mathcal{F}(x)$ en utilisant le tableau 2., et enfin tirer la valeur cherchée de y de la représentation graphique.

Pour $x = \frac{1}{2}$ nous trouvons par exemple $y = 0.564$ et

nous aurons enfin $\underset{\frac{1}{2}}{f}\left(\frac{3}{2}\right) \backsim 1.39881$, comme nous

voyons, la différence moyenne de ce résultat et de l'expression exact 3. est égale à 0,00081.

Passons maintenant à la discussion de la représentation graphique de la fonction:

$$F(x) = \underset{x}{f}(a) \qquad f(a) = \frac{a^2 + 3}{4}$$

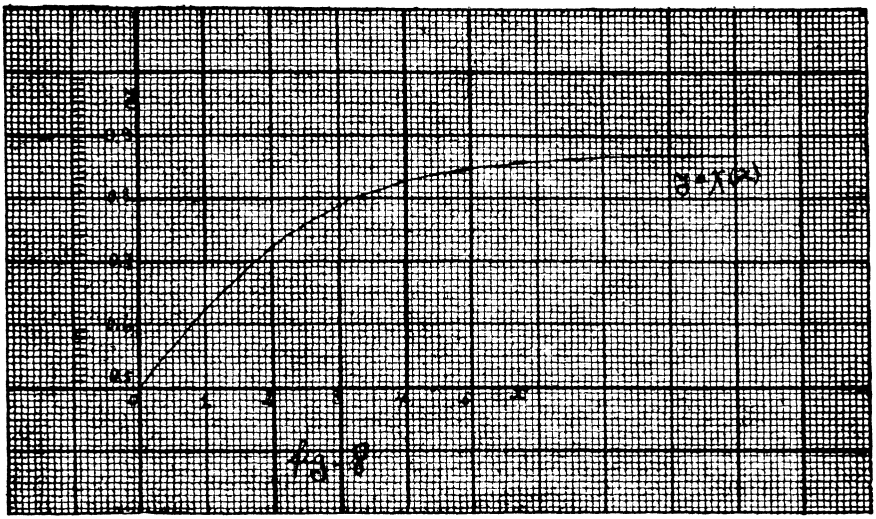


fig. 8

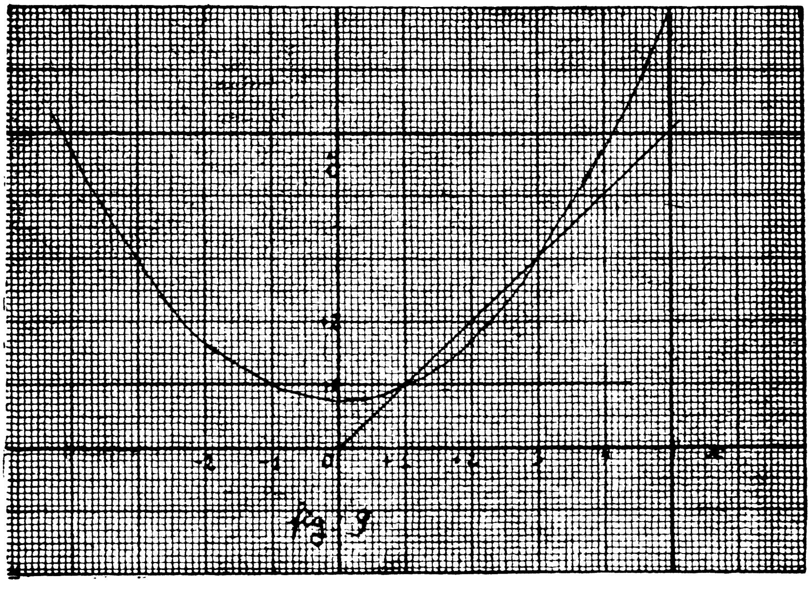


fig. 9

La fonction f (a) admet deux points doubles $X_1 = +1$ et $X_2 = +3$. Le point X_2 n'est pas point de convergence.

Remarquons que la représentation graphique de f (x) est symétrique par rapport à l'axe des y ; il en résulte, que les itérées d'ordre naturel formées à partir d'une valeur négative de a sont les mêmes qu'à partir de — a ; c'est-à-dire il suffit à priori de s'occuper des valeurs positives.

Les points X_1 et X_2 divisent le rameau positif de f (x) en trois parties. Pour chacune de ces parties nous aurons une autre représentation graphique de F (x) suivant la valeur du nombre a.

Considérons les deux courbes $\underset{x}{f}(a_l)$ et $\underset{x}{f}(a_m)$, où a_m et a_l sont deux différentes valeurs du paramètre a dans un même intervalle de convergence monotone. Remarquons que nos deux courbes $\underset{x}{f}(a_l)$ et $\underset{x}{f}(a_m)$ découpent sur toutes les parallèles tracées entre X_2 et X_1 de segments égaux v, où v se présente comme ordre de l'itération dans l'équation $a_l = \underset{v}{f}(a_m)$. En se basant sur le théorème de Cavalieri nous pouvons en déduire l'expression de l'aire comprise entre les deux courbes.

$$P = (X_2 - X_1) \cdot v.$$

Prenons par suite « a » plus grand que X_2. Le rapport *)

$$\frac{\underset{1}{f}(a) - \underset{0}{f}(a)}{1 - 0} = \frac{a^2 - 4a + 3}{4}$$ sera autant plus grand,

*) A cause de commodité au lieu de la dérivée nous employons le rapport $\frac{\underset{1}{f}(a) - \underset{0}{f}(a)}{1 - 0}$, qui donne la pente de la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1.

que a est plus éloigné du point X_2, c'est-à-dire pour la même valeur de « x » $\underset{x}{f}$ (a) croit d'autant plus vite que a est plus grand.

Pour x $\rightarrow -\infty$ F (x) tend vers X_2, la courbe a pour asymptote la parallèle à l'axe des x d'ordonnée X_2. C'est-à-dire la représentation graphique sera une courbe un peu semblable

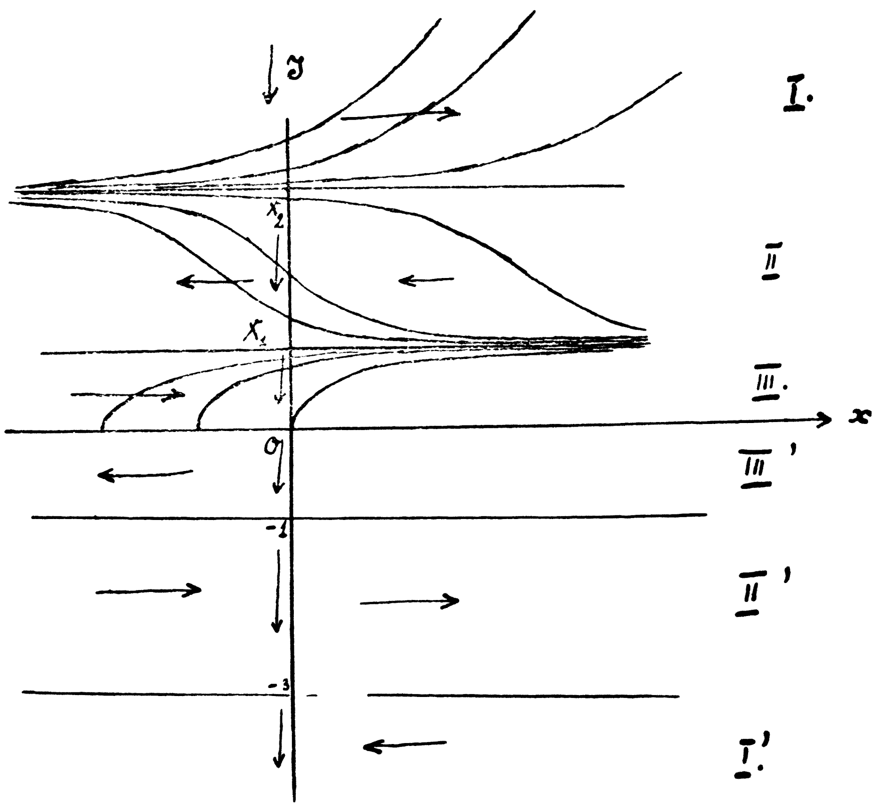


fig. 10

à une courbe exponentielle. Pour $a = X_2$ toutes les itérées décriront la droite parallèle à l'axe des x à la distance X_2. Pour une valeur de a $X_1 < a < X_2$, comme nous savons les itérées tendent vers X_1, quand x prend les valeurs naturelles 1, 2, 3, ... n ; nous aurons ici une courbe, qui aura deux asymptotes parallèles à l'axe des x à la distance X_1 et à la distance X_2, pour x tendant vers $-\infty$ la fonction tend vers X_2, pour x tendant vers $+\infty$ la fonction tend vers X_1. La décroissance sera la plus rapide environs au milieu de l'intervalle $X_2\, X_1$, où

$$\frac{\underset{1}{f}(2) - \underset{0}{f}(2)}{1 - 0} = -\frac{1}{4}.$$

Nous voyons que la forme de $\underset{x}{f}(a)$ sera un peu s'emblable à la représentation graphique de arc tg x

Seulement il faut remarquer que arc tg x tend vers sa limite comme $\frac{1}{x}$, et notre fonction $\underset{x}{f}(a)$ tend vers X_1 si $x \to +\infty$ et vers X_2 si $x \to -\infty$ à la manière d'une exponentielle ; en effet, nous pouvons démontrer bien facilement, que si N est assez grand, tel que $\underset{N}{f}(a) = X_1 + \varepsilon$, ε étant petit

$$\underset{x+N}{f}(a) = X_1 + f'(X_1)^x \cdot \varepsilon \quad , \text{ si } x \to +\infty$$

et si $x \to -\infty$ nous aurons

$$\underset{x-N}{f}(a) = X_2 - f'(X_2)^x \cdot \varepsilon \quad , \quad \underset{-N}{f}(a) = X_2 - \varepsilon$$

Si notre valeur de paramètre a passe de X_2 à X_1 la courbe se déplace parallèlement à l'axe des x dans le sens négatif de $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. Pour $a = X_1$ nous aurons la droite parallèle à l'axe des x à la distance X_1.

Pour $X_1 > a > 0$ les itérées tendent vers X_1 en augmentant.

Pour $a = 0$ les premières itérées croissent très vite, la représentation graphique sera tangente à l'axe des y pour $a = 0$ et $x = 0$. En effet, tous les facteurs du numérateur du produit infini de la formule (Q) seront finis, mais le premier facteur du dénominateur $f'(0)$ sera nul, parce-que nous avons un minimum de $f(x)$ pour $x = 0$. Nous aurons une courbe un peu semblable à un rameau de la représentation de l'arc cosec x analogie comme celle signalée ci-dessus pour arctg (x). Si a = 0 cette courbe occupe sa position extrême vers la droite et la fonction $\overset{f}{\underset{x}{}}$ (a) sera définie seulement pour les valeurs positives de x. Pour $0 < a < +1$ les itérées d'ordre quelconque négatif n'existent que j'usqu'à un certain ordre *s* dépendant de a tel que $\overset{f}{\underset{x}{}}$ (a) tend monotonement vers 0, si x s'approche en décroissant de *s*.

Si a traverse la valeur zéro les itérées d'ordre positif entier seront les mêmes comme pour le paramètre — a. Pour $x < 0$ $\overset{f}{\underset{x}{}}$ (a) ne sera pas définie *)

Nous pouvons faire des discussions analogues pour chaque fonction « f ».

Prenons maintenant comme exemple la fonction sin x

L'équation sin x = x n'admet que la racine 0; la courbe est bien comprise dans les champs A_1 A_2 et B_1 B_2 de la théorie générale. Donc les itérées d'ordre naturel convergent vers 0 en décroissant si $x > 0$ et en croissant si $x < 0$. Comme f' (X) = cos 0 = 1, nous devrons employer la troisième définition des itérées d'ordre non entier. La fonction inverse de sin x sera arc sin x. L'expression générale de la dérivée d'une itérée d'ordre quelconque sera

$$\frac{d}{dx}\,\underset{u}{\sin}\,x = \lim_{p \to \infty} \prod_{i=0}^{i=p-1} \frac{\cos \underset{i}{\sin}\, x}{\cos \underset{u+i}{\sin}\, x}$$

Considérons maintenant la fonction φ (x) = $\underset{x}{\sin}$ a. Nous n'aurons qu'une forme de la représentation graphique, c'est la forme III. ou III' de la figure (10). Si a est positif cette forme sera décroissante, tandis que pour a négatif elle sera croissante. Remarquons aussi que pour $0 < a < 1$ il existe chaque fois une solution de l'équation en η

*) Il est peut-être une conséquence logique de faire l'hypothèse que toutes les itérées d'ordres non entiers positifs sauf $\overset{f}{\underset{0}{}}$ (a) (a < 0) sont aussi les mêmes qne pour — a. C'est-à-dire la fonction $\overset{f}{\underset{x}{}}$ (a) sera discontinue pour les valeur a 0 au point de x = 0, si nous nous approchons du côté droit, du côté gauche la fonction $\overset{f}{\underset{x}{}}$ (a) n'existe pa·s

$\underset{-1}{\sin}(a+\varepsilon)=\underset{-1}{\sin}(a)+\eta$, où ε est positif ou négatif, mais tel que $a+\varepsilon \leqslant +1$, η sera alors aussi positif ou négatif.

Pour $a=1$ il existe seulement une solution pour $\varepsilon<0$.

$$\underset{-1}{\sin}(1-\varepsilon)=\underset{-1}{\sin}(1)-\eta=\underset{0}{\sin}\frac{\pi}{2}-\eta$$

C'est-à-dire il faut signaler que a étant donné, les itérées n'existent qu'à partir d'une certaine valeur de x, p. ex. s tel que $\underset{x}{\sin}(a)$ tend monotonement vers $\frac{\pi}{2}$ si x s'approche en décroissant de s. Par exemple $a=1$ les itérées n'existent que pour $x \geqslant -1$, pour $a=\frac{\pi}{2}$, x peut être seulement $\geqslant 0$.

La discussion du signe de la dérivée nous conduit aux mêmes résultats

$$\frac{d}{dx}\underset{x}{\sin}\,a=(\sin a-a)\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{i=n}\frac{\cos \vartheta_i}{\cos \underset{x+i-1}{\sin}\,a}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\underset{n+1}{\sin}(a)-\underset{n}{\sin}\,a}{\prod_{i=1}^{i=n}\cos \underset{x+i-1}{\sin}(a)}$$

En effet, supposons que le paramètre a soit positif, alors nous voyons que le numérateur est négatif et le dénominateur positif, par conséquent la dérivée sera un nombre négatif, c'est-à-dire notre fonction sera une fonction décroissante. En effet, prenons par exemple $a=\frac{\pi}{2}$, dans ce cas la plus grande valeur de la fonction est pour $x=0$, notamment $\underset{0}{\sin}\frac{\pi}{2}=y=\frac{\pi}{2}$; pour toutes les courbes suivantes de x la fonction diminue de plus en plus et la représentation graphique de notre courbe s'approche asymptotiquement de l'axe des x, ainsi qu'il ressort du dessin. (fig. 10)

Prenons maintenant $a=-\frac{\pi}{2}$; évidemment nous aurons la même courbe, mais elle sera symétrique de la précédente par rapport à l'axe x. Alors pour $a<0$ notre fonction sera croissante. Dans ce cas le numérateur de la dérivée sera positif et le dénominateur sera aussi positif, ainsi toute la dérivée sera positife. Si l'on pose $a < \frac{\pi}{2}$ la courbe subit une translation dans la direction négative de l'axe des x sans changer sa forme :

a étant la mesure en radians d'un arc de :	le point de départ de la courbe a pour abcisse x_0
57° 17′ 44″.8	— 1
18°	— 26.94
15°	— 40.09
12°	— 64.43

Pour former une fonction d'interpolation de $\frac{\sin}{x}$ (a) nous pouvons supposer.

$$P(x) = a^{R(a,x)}$$

J'ai calculé pour $a = \frac{\pi}{2}$ les 32 premières itérées d'ordres entiers et j'ai trouvé pour R (a,x) comme une fonction bien favorable pour l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant 32$

$$R\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = 1 - \frac{1}{x^{a-b\,c^x}}$$

c'est-à-dire

$$P(x) = \frac{\pi}{2}^{1 - x^{a - bc^x}} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} a &= 2,75923 \\ b &= 0,58673 \\ c &= 0,95461 \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi former une autre fonction d'interpolation, peut-être encore plus favorable, de la maniére suivante. Nous avons vu ci-dessus que la représentation graphique de $\frac{\sin}{x}$ a est un peu semblable à la courbe d'arc cosec. Prenons alors une modification de la fonction arc cosec telle, que la fonction cherchée satisfait à un nombre fini des valeurs de la variable x. Ainsi la fonction recherchée prend la forme suivante :

$$P(x) = \text{arc cosec} \left\{ \frac{x}{s}^{\alpha - \lg_r x + \tau x} + 1 \right\} \qquad 4.$$

En me servant de la théorie de moindres carrés de Gauss j'ai déterminé les constantes inconnues *s*, *α*, *r* et τ (en se basant sur les valeurs de x = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32) et en employant les tables de logarithmes à cinq décimales j'ai obtenu

$\alpha = 0{,}88\,65\,59\ldots \qquad s = 5{,}30\,84\ldots \qquad \lg_{10} s = 6{,}72\,49\,6\ldots$

$r = 1057 \times 10^7 \qquad \tau = 0{,}00027$

Au lieu de la formule 4 on peut aussi écrire

$$P(x) = \text{arc cosec} \left\{ \frac{x}{s}^{\alpha - \beta \lg_{10} x + \tau x} + 1 \right\} \quad 5.$$

où $\beta = 0{,}09976$ et $\lg_{10} \beta = 0{,}99896 - 2$ nr

Cette dernière formule d'interpolation appliquée entre les valeurs x = 1 et x = 33 donne une grande précision; ici l'erreur est comprise dans les limites d'inexactitude du calcul logarithmique. La formule est bien commode pour calculer les ordres non entier dans l'intervalle (+ 1, + 33).

Par exemple en utilisant les inégalités, j'ai trouvé pour

$\sin_{32\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad 0.\ 28767 < \sin_{32\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.\ 28775$

et en utilisant la formule V. j'ai obtenu :

$$\sin_{32\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.\ 28772$$

En me servant de la fonction P (x) et de la formule d'interpolation de Newton j'ai calculé aussi la table des itérées des ordres non entiers $\sin_x \frac{\pi}{2}$. Je joins cette table à la fin de mon travail. Ma table n'est pas toute à fait exacte, parce que mes tables de logarithmes contiennent des petites erreurs, que j'ai aperçu pendant mes calculs.

Au moyen de cette table on peut facilement calculer x dans la relation $\sin_x \alpha = \beta$,

	α	et β
e prends par exemple pour	$75°18'40''$	$32°40'28$
les valeurs en radians des angles	$1.3144\underline{3}$	0.57028

ainsi $\sin_x 75°18'40'' = 0.57028$, par interpolation aurons de notre tableau

$$\underset{0.159...}{\sin} \frac{\pi}{2} = 1.3144\frac{3}{} \text{ et } \underset{6.486..}{\sin} \frac{\pi}{2} = 0.57028$$

d'où il résulte

$$\underset{6{,}486..}{\sin} 32_0 40'28'' = \underset{-\,0.159}{\sin} 75_0 18'40'' \text{ et enfin}$$

$$\underset{6.327...}{\sin} 75_0 18'40'' = 0.57028 \qquad x = 6.327...$$

Nous avons vu sur le premier exemple traité que les itérées intermédiaires que nous avons définies coincident avec celles que M. KŒNIGS a introduites. Il serait intéressant de démontrer que, *en général,* les itérées d'ordre non entier définies dans le présent travail sont les mêmes que celles de M. KŒNIGS ou de M. FATOU lorsque les fonctions sont analytiques.

$y = \frac{\sin}{x} \frac{x}{2}$

x \ y	rad.	°	′	″
0.000	1.570796	90	0	0.0
0.001	4985	88	48	0.0
0.002	4142		19	0.0
0.003	3473	87	56	0.0
0.004	2891		36	0.0
0.005	2414		19	35.0
0.006	1967		4	15.0
0.007	1538	86	49	30.0
0.008	1176		37	5.0
0.009	0819		24	48.0
0.01	1.50470		12	48.0
0 02	47768	84	39	53
0.03	5712	83	29	13
0.04	3982	82	29	43
0.05	2457	81	37	18.2
0.06	1080	80	50	0.0
0.07	1.39825		6	49
0.08	8664	79	26	55
0.09	7581	78	49	41
0.10	6562		14	40
0.11	5601	77	41	37
0.12	4681		10	0
0.13	3811	76	40	4
0.14	2972		11	14
0.15	2167	75	43	34
0.16	1384		16	39
0.17	0634	74	50	53
0.18	1.29913		26	6
0.19	9217		2	10
0.20	8543	73	39	0
0.21	7886		16	24
0.22	7247	72	54	24
0.23	6624		33	0
0.24	6017		12	9
0.25	5427	71	51	51
0.26	4845		31	52
0.27	4283		12	33
0.28	3736	70	53	44
0.29	3203		35	24
0.30	2683		17	31
0.31	2174		0	2
0.32	1674	69	42	49
0.33	1181		25	54
0.34	0698		9	16

x \ y	rad.	°	′	″
0.34	1.20698	69	9	16.0
35	0221	68	52	54
36	1.19755		36	54
37	9298		21	10
38	8847		5	41
39	8401	67	50	20
0.40	7971		35	33
41	7547		20	58
42	7129		6	35
43	6717	66	52	25
44	6310		38	27
45	5909		24	40
46	5516		11	8
47	5127	65	57	48
48	4744		44	38
49	4367		31	40
0.50	3995		18	52
51	630		6	19
52	270	64	53	56
53	2914		41	41
54	562		29	36
55	215		17	40
56	1872		5	54
57	535	63	54	17
58	201		42	48
59	0871		31	27
0.60	545		20	15
61	224		9	13
62	1.09906	62	58	18
63	593		47	32
64	283		36	53
65	8976		26	21
66	675		16	1
67	378		5	47
68	084	61	55	39
69	7791		45	36
0.70	502		35	39
71	214		25	46
72	6930		16	0
73	650		6	20
74	371	60	56	40
75	095		47	17
76	5824		37	57
77	554		28	42

x \ y	rad.	°	′	″
0.77	1.05554	60	28	42.0
78	288		19	32
79	024		10	27
0.80	4762		1	27
81	503	59	52	32
82	245		43	42
83	3991		34	57
84	738		26	17
85	489		17	41
86	241		9	11
87	2996		0	46
88	755	58	52	26
89	513		44	9
0.90	275		35	57
91	038		27	50
92	1805		19	47
93	572		11	48
94	342		3	54
95	113	57	56	1
96	0887		48	15
97	663		40	31
98	440		32	52
99	219		25	17
1.00	0000		17	45
05	0.98932	56	41	3
10	7903		5	41
15	6912	55	31	36
20	5956	54	58	44
25	033		27	1
30	4143	53	56	25
35	3283		26	51
40	2450	52	58	12
45	1644		30	28
50	0862		3	38
55	104	51	37	33
60	0.89367		12	13
65	8653	50	47	41
70	7959		23	49
75	282		0	32
80	6623	49	37	52
85	5981		15	48
90	355	48	54	16
95	4743		33	15
2.00	148		12	49

x \ y	rad.	°	′	″
2.00	0.84148	48	12	49.0
05	3565	47	52	46
10	2998		33	16
15	439		14	4
20	1895	46	55	21
25	362		37	3
30	0838		19	2
35	331		1	36
40	0.79832	45	44	26
45	344		27	40
50	8866		11	15
55	398	44	55	9
60	7938		39	21
65	488		23	31
70	048		8	45
75	6613	43	53	26
80	1885		39	12
85	5771		24	50
90	361		10	44
95	4958	42	56	54
3.00	562		43	16
05	173		29	52
10	3792		16	48
15	414		3	48
20	043	41	51	4
25	2679		38	34
30	317		26	7
35	1967		14	4
40	619		1	46
45	277	40	50	21
50	0942		38	50
55	610		27	25
60	285		16	15
65	0.69956		4	56
70	650	39	54	23
75	328		43	19
80	029		33	3
85	8726		22	38
90	427		12	21
95	134		2	17
4.00	7842	38	52	13
05	549		42	8
10	262		32	18
15	6985		22	34

x \ y	rad.	°	′	″
4.15	0.6 6985	38	22	34
20	701		13	0
25	429		3	40
30	162	37	54	29
35	58$\overline{97}$		45	22
40	6$\overline{38}$		36	28
45	3$\overline{81}$		27	90
50	129		18	59
55	4880		10	25
60	635		2	1
65	391	36	53	36
70	151		45	21
75	3913		37	11
80	6$\overline{77}$		29	3
85	444		21	4
90	214		13	9
95	2984		5	15
5.00	756	35	57	23
05	533		49	44
10	312		42	6
15	094		34	38
20	1878		27	13
25	664		19	51
30	452		12	38
35	241		5	19
40	034	34	58	12
45	0829		51	8
50	6$\overline{26}$		44	11
55	426		37	18
60	2$\overline{28}$		30	28
65	0$\overline{32}$		23	47
70	0.5 9840		17	9
75	650		10	38
80	4$\overline{60}$		4	6
85	2$\overline{73}$	33	57	40
90	0$\overline{86}$		51	14
95	9$\overline{01}$		44	52
6.00	87$\overline{18}$ ^{i}		38	36
05	537		32	21
10	357 ^{7}		26	13
15	180		20	5
20	003 ^{9}		14	3
25	7830 ^{1}		8	4
30	659		2	11

x \ y	rad.	°	′	″
6.30	0.5 7659	33	2	11
35	484	32	56	9
40	314 ^{4}		50	19
45	145 ^{3}		44	30
50	6980 ^{4}		38	50
55	815 ^{7}		33	11
60	652 ^{2}		27	34
65	492 ^{8}		22	5
70	332 ^{2}		16	34
75	175 ^{7}		11	11
80	018 ^{2}		5	46
85	5862 ^{7}		0	25
90	708	31	55	7
95	554 ^{2}		49	50
7.00	5403		44	38
05	252		39	27
10	103		34	19
15	4955		29	14
20	808		24	11
25	663		19	13
30	518		14	13
35	375		9	17
40	233		4	25
45	095	30	59	37
50	3955		54	50
55	816		50	5
60	676		45	15
65	539		40	33
70	404		35	54
75	269		31	17
80	136		26	42
85	004		22	9
90	2873		17	39
95	742		13	9
8.00	613		8	42
05	485		4	19
10	358	29	59	55
15	232		55	34
20	105		51	13
25	1982		47	20
30	858		42	44
35	735		38	31
40	614		34	20
45	493		30	41

x \ y	rad.	°	'	"
8.45	0.5 1493	29	30	11
50	373		26	5
55	254		21	58
60	135		17	53
65	018		13	52
70	0901		9	50
75	786		5	54
80	671		1	56
85	557	28	58	2
90	443		54	8
95	331		50	16
9.00	219		46	25
05	108		42	36
10	0.4 9998		38	50
15	889		35	5
20	780		31	20
25	672		27	38
30	565		23	56
35	459		20	17
40	353		16	40
45	248		13	3
50	144		9	27
55	040		5	54
60	8937		2	21
65	834	27	58	48
70	732		55	19
75	631		51	49
80	531		48	21
85	431		44	56
90	332		41	31
95	233		38	9
1000	135		34	46
10	7941		28	7
20	753		21	58
30	560		15	0
40	373		8	34
50	187		2	11
60	005	26	55	55
70	6825		49	43
80	650		43	42
90	470		37	31
1100	296		31	31
05				
10				

x \ y	rad.	°	'	"
11.0	0.4 6296	26	31	31
1	124		25	28
2	5954		19	46
3	786		14	0
4	620		8	17
5	455		2	38
6	293	25	57	4
7	132		51	31
8	4973		46	4
9	816		40	39
12.0	6$\overline{60}$		35	19
1	506		30	2
2	354		24	48
3	203		19	37
4	054		14	29
5	3907		9	27
6	761		4	25
7	616	24	59	25
8	473		54	29
9	331		49	38
13.0	191		44	48
1	052		40	2
2	2915		35	18
3	778		30	37
4	644		25	59
5	5$\overline{10}$		21	23
6	378		16	51
7	2$\overline{47}$		12	20
8	117		7	52
9	1988		3	27
14.0	861	23	59	5
1	735		54	45
2	610		50	27
3	487		46	13
4	364		4	59
5	243		37	50
6	122		33	42
7	003		29	32
8	0885		25	31
9	7$\overline{67}$		21	28
15.0	651		17	27
1	536		13	31
2	4$\overline{21}$		9	34
3	308		5	42

x \ y	rad.	°	'	"
15.3	0.4 0308	23	5	42
4	195		1	48
5	084	22	57	58
6	0.3 9973		54	11
7	863		50	25
8	755		46	40
9	647		42	58
16.0	540		39	19
2	329		32	4
4	122		24	56
6	8918		17	54
8	717		11	0
17.0	519		4	13
2	324	21	57	21
4	133		50	54
6	7943		44	25
8	758		38	2
18.0	574		31	42
2	393		25	29
4	215		19	22
6	040		13	20
8	6867		7	22
19.0	696		1	31
2	528	20	55	45
4	363		50	5
6	199		44	25
8	038		38	54
20.0	5879		33	25
21	114		7	7
22	4396	19	42	27
23	3721		19	15
24	085	18	57	23
25	2485		36	46
26	1918		17	15
27	379	17	58	44
28	0866		41	5
29	378		24	19
30	0.2 9913		8	19
31	469	16	53	5
32	046		38	33
33	8641		24	38
34	251		11	13
35	7868	15	58	23
36	525		46	15

x \ y	rad.	°	'	"
36	0.2 7525	15	46	15
37	179		34	21
38	6846		22	54
39	525		11	52
40	215		1	13
41	5916	14	50	56
42	628		41	0
43	348		31	23
44	077		22	5
45	4815		13	5
46	561		4	21
47	304	13	55	53
48	076		47	42
49	3844		39	44
50	619		32	0
51	401		24	29
52	189		17	10
53	2981		10	4
54	780		3	9
55	584	12	56	24
56	393		49	50
57	207		43	26
58	025		37	11
59	1848		31	5
60	674		25	7
61	505$_3$		19	18
62	340		13	38
63	178$_5$		8	4
64	020		2	37

x \ y	rad.	0
64.49	0.2 0944	12
77.32	0.1 9199	11
94. 2	7453	10
117.	5708	9
148.7	3963	8
195.	2217	7
267.	0472	6
385.6	0.0 8727	5
606.3	6981	4
107.9	5236	3
224.3	3491	2
701.4	1745	1

TABLE DES MATIÉRES