Thèses de l'entre-deux-guerres

Émile Paloque

Théorie analytique du mouvement des planètes troyennes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__60__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
1866.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. ÉMILE PALOQUE
Licencié ès Sciences, Aide-Astronome à l'Observatoire de Nice

---

1re THÈSE. — THÉORIE ANALYTIQUE DU MOUVEMENT DES PLANÈTES TROYENNES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Décembre 1925, devant la Commission d'examen.

MM. H. ANDOYER, *Président.*
E. CARTAN, J. CHAZY, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1925

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	MOLLIARD, Professeur, Physiologie végétale.	
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, V. BOUSSINESQ, A. JOANNIS.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	JANET	Électrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	EMILE BOREL	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie.
	VESSIOT	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON	Physique générale.
	DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	C. PÉREZ	Zoologie.
	A. LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
	LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et géologie régionale.
	R. LESPIEAU	Théories chimiques.
	E. RABAUD	Biologie expérimentale.
	P. PORTIER	Physiologie comparée.
	E. BLAISE	Chimie organique.
	P.-A. DANGEARD	Botanique.
	C. MAURAIN	Physique du globe.
	P. MONTEL	Mécanique rationnelle.
	P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
	O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
	M. TIFFENEAU	Chimie (Enseignement P. C. N.)
	G. JULIA	Mathématiques générales.
	N	Géographie physique.
	HÉROUARD	Zoologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	V. AUGER	Chimie analytique.
	M. GUICHARD	Chimie minérale.
	A. GUILLET	Physique.
	C. MAUGUIN	Minéralogie.
	L. BLARINGHEM	Botanique.
	A. MICHEL-LEVY	Pétrographie.
Secrétaire	D. TOMBECK.	

76671 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

A

MONSIEUR H. ANDOYER

PREMIÈRE THÈSE

THÉORIE ANALYTIQUE
DU
MOUVEMENT DES PLANÈTES TROYENNES

INTRODUCTION.

Les Planètes Troyennes, qui gravitent au voisinage des centres de libration du système Soleil-Jupiter, ont fait l'objet de travaux nombreux et intéressants, mais généralement demeurés inutilisables dans l'application concrète; ils n'auraient pu être rendus fructueux qu'à la double condition de ne pas négliger certains éléments essentiels du problème et de poursuivre les approximations, au prix de calculs d'une longueur et d'une complication extrêmes [1].

Une théorie analytique du mouvement de ces astéroïdes imposait donc, pour répondre aux besoins de la pratique, l'adoption d'une méthode nouvelle, sucesptible d'écarter les difficultés rencontrées dans les recherches antérieures, tout en donnant plus de rigueur aux résultats.

Le but de la présente étude est de développer cette méthode.

---

[1] Cependant depuis que nous avons entrepris cette étude, M. E.-W. Brown a publié une Théorie des Planètes Troyennes avec application à la Planète Achille; nous nous faisons un devoir de signaler au lecteur cet important travail : *Theory of the Trojan group of asteroids* (*transactions of the Astronomical Observatory of Yale University*, vol. III; (1923-1925).

M. Andoyer a bien voulu nous en indiquer les principes et nous faire longuement bénéficier des plus précieux conseils.

Nous lui dédions ce travail comme témoignage de notre profonde reconnaissance.

Le premier Chapitre est consacré à l'exposé de la théorie analytique dont nous nous bornerons à mentionner ici les caractéristiques :

Le mouvement de la petite planète est rapporté à un système d'axes mobiles ayant pour origine le centre de libration et invariablement lié au rayon vecteur de Jupiter; les variables introduites dans les équations sont non point les coordonnées par rapport à ces axes, mais les rapports entre les valeurs de ces coordonnées et la distance Soleil-Jupiter à l'instant considéré.

La variable indépendante est la longitude vraie de Jupiter, ce qui a permis de simplifier l'expression de la fonction perturbatrice.

Les seconds membres des équations du mouvement sont développés suivant les puissances croissantes des variables qui sont supposées rester de petites quantités. L'intégration de ces équations, dans lesquelles on n'a conservé que les termes du premier ordre, constitue la solution de base et a permis de retrouver les résultats déjà acquis. Cette intégration a été poursuivie par la méthode de Hill et Brown.

Le développement de la théorie, en tenant compte de termes du quatrième ordre par rapport aux variables, fait l'objet du second Chapitre dans lequel nous n'avons indiqué que les résultats principaux. Les coordonnées d'une Planète Troyenne y sont déterminées en fonction de la variable indépendante, de la masse de Jupiter et de six constantes arbitraires.

Dans le troisième Chapitre, nous montrons qu'en annulant la masse de Jupiter on retrouve la solution keplérienne et les calculs effectués fournissent les expressions des constantes d'intégrations en fonction des éléments elliptiques. Dans le quatrième, qui dispense d'une initiation antérieure, nous avons cherché à exposer simplement l'application concrète de la méthode; on y trouvera l'ensemble des résultats qui précèdent sous forme réelle et dans l'ordre où ils doivent intervenir.

Un exemple numérique donné dans le dernier Chapitre permet de suivre pas à pas cette application et de reconnaître l'exactitude des résultats. Les coordonnées de la Planète ont été calculées pour un certain nombre de positions egalement réparties sur son orbite et comparées avec celles que fournit une méthode plus précise mais valable seulement pendant un temps limité; au contraire la théorie analytique, qui a permis de représenter le mouvement d'une façon exclusivement périodique, est susceptible d'une précision indépendante du temps.

Il n'a été considéré dans cette étude que l'action du Soleil et celle de Jupiter, en supposant invariables les éléments de son orbite.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

Le Soleil S de masse m_0 est l'origine d'un système d'axes de directions fixes SXYZ.

Jupiter J de masse m' décrit une orbite képlérienne dans le plan des XY; SX est dirigé vers le périhélie, n', a', r', v', ε' représentent respectivement : le moyen mouvement, le grand axe, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et l'excentricité de cette orbite.

Une planète M, sans masse, est soumise à l'action de ces deux astres; son mouvement, qui est celui d'un point matériel de masse 1 avec une fonction de force $n'^2 a'^2 \mathrm{V}$, est défini par les équations

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = n'^2 a'^2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{X}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dans lesquelles X, Y, Z représentent ses coordonnées et t le temps.

Prenons comme nouvelles variables x, y, z :

$$x = \frac{\mathrm{X}}{r'}, \qquad y = \frac{\mathrm{Y}}{r'}, \qquad z = \frac{\mathrm{Z}}{r'},$$

comme variable indépendante v' et cherchons ce que deviennent les équations.

Posons pour simplifier les notations :

$$\rho' = \frac{1}{1 + \varepsilon' \cos v'}, \qquad h' = \sqrt{1 - \varepsilon'^2},$$

d'où

$$\mathrm{X} = a' h'^2 \rho' x, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{n'}{\rho'^2 h'^3},$$

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{a' n'}{h'} \left[\frac{1}{\rho'} \frac{dx}{dv'} - x \frac{d\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dv'} \right],$$

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \frac{a' n'^2}{\rho'^3 h'^4} \left[\frac{d^2 x}{dv'^2} - x \rho' \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dv'^2} \right] = \frac{n'^2 a'^2}{\rho' h'^2} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}.$$

On a l'identité

$$\rho' \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dv'^2} = \rho - 1,$$

et les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2 x}{dv'^2} = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad \ldots$$

avec

$$U_1 = \rho'^2 h'^2 V + \frac{1}{2}(\rho' - 1)\rho^2,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Cette importante remarque, qui permet de tenir compte simplement de l'excentricité de Jupiter, est due à M. Nechvil, professeur à l'Université de Prague.

Équations du mouvement. — Faisons tourner les axes de $v' + \psi$, ψ étant un angle constant. Les coordonnées de M par rapport aux nouveaux axes sont :

$$r'(1+\xi), \quad r'\frac{\eta}{i}, \quad r'\frac{\zeta}{i} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

et se déduisent de x, y, z par les formules

$$\begin{aligned}
x &= (1+\xi)\cos(v'+\psi) + i\eta \sin(v'+\psi),\\
y &= (1+\xi)\sin(v'+\psi) - i\eta\cos(v'+\psi),\\
z &= -i\zeta.
\end{aligned}$$

Les variables étant maintenant ξ, η, ζ et la variable indépendante

$$\tau = iv',$$

on a les équations

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\frac{d\eta}{d\tau} &= -(1+\xi) - \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi},\\
\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} &= \quad -\eta \quad + \frac{\partial U_1}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta},\\
\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \qquad\qquad \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \zeta + \frac{\partial U}{\partial \zeta}
\end{aligned}$$

avec

$$U = \rho'^2 h'^2 V + \frac{1}{2}\rho'\rho^2,$$

$$\rho^2 = (1+\xi)^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

Soient $r = \overline{\mathrm{SM}}$, $d = \overline{\mathrm{JM}}$, f la constante d'attraction, on a les formules bien connues

$$n'^2 a'^3 = f(m_0 + m'),$$

$$n'^2 a'^2 \mathrm{V} = \frac{fm_0}{r} - fm'\left[\frac{1}{d} - \frac{r}{r'^2}\cos\left(\widehat{r, r'}\right)\right].$$

Posons

$$\mu = \frac{m'}{m_0 + m'},$$

d'où

$$fm_0 = (1 - \mu)n'^2 a'^3, \qquad fm' = \mu n'^2 a'^3,$$

et

$$\mathrm{U} = (1 - \mu)\rho'\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}\rho^2\right) + \mu\rho'\left[\frac{r'}{d} + \frac{1}{2}\rho^2 - \rho\cos\left(\widehat{r, r'}\right)\right],$$

$$\frac{d^2}{r'^2} = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\left(\widehat{r, r'}\right),$$

$$\rho\cos\left(\widehat{r, r'}\right) = (1 + \xi)\cos\psi + i\eta\sin\psi.$$

Voici comment ces équations générales trouvent leur application dans le cas des Planètes Troyennes; on sait que celles-ci restent toujours voisines de l'un des centres de libration, c'est-à-dire de points qui se déduisent à tout instant de Jupiter par une rotation de 60° autour d'un axe perpendiculaire au plan de son orbite et passant par le Soleil. Si nous donnons à ψ l'une des valeurs $\pm 60°$, ξ, η, ζ resteront de petites quantites et les seconds membres des equations du mouvement pourront être développés suivant les puissances croissantes de ces quantités.

Nous poserons donc, suivant la planète considérée,

$$\psi = +60°, \qquad \chi = -i\sqrt{3},$$

ou bien

$$\psi = -60°, \qquad \chi = +i\sqrt{3}.$$

On pourra écrire dans les deux cas

$$2\rho\cos\left(\widehat{r, r'}\right) = 1 + \xi - \chi\eta,$$

$$\frac{d^2}{r'^2} = 1 + \xi + \chi\eta + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2,$$

d'où

$$\mathrm{U} = (1 - \mu)\rho'\left[(1 + \sigma)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1 + \sigma)\right] + \mu\rho'\left[(1 + \omega)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\omega}{2}\right],$$

en faisant

$$\sigma = 2\xi + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2,$$

$$\omega = \xi + \chi\eta + \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

et finalement en supprimant les termes sans effet

$$U = (1-\mu)\rho'\left[\frac{1.3}{2.4}\sigma^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sigma^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sigma^4 - \ldots\right]$$
$$+ \mu\rho'\left[\frac{1.3}{2.4}\omega^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\omega^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\omega^4 - \ldots\right].$$

Il est à remarquer que l'excentricité de Jupiter ε' n'intervient dans les équations que par l'intermédiaire du facteur ρ', ce qui est avantageux pour la simplicité des calculs et ce qui met en évidence, quelle que soit cette excentricité, la solution de Lagrange. En effet le système de valeurs

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

qui correspond à un centre de libration, entraîne

$$\omega = 0, \qquad \sigma = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

et vérifie identiquement les équations du mouvement.

La partie de U indépendante de ε' et du plus bas degré, est

$$\frac{3}{2}(1-\mu)\xi^2 + \frac{3}{8}\mu(\xi+\chi\eta)^2$$

ou

$$\frac{\xi^2}{2}\left(3 - \frac{9}{4}\mu\right) + \frac{3}{4}\mu\chi\xi\eta - \frac{9}{4}\mu\frac{\eta^2}{2} = U_0.$$

Si l'on fait

$$U = U_0 + R,$$

on a les équations définitives

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\frac{d\eta}{d\tau} + \left(3 - \frac{9}{4}\mu\right)\xi + \frac{3}{4}\mu\chi\eta + \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0,$$
$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} - \frac{3}{4}\mu\chi\xi + \frac{9}{4}\mu\eta \qquad - \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0.$$
$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - \zeta \qquad \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0.$$

Racines des équations caractéristiques. — Si l'on néglige R, les équations sont linéaires, homogènes, à coefficients constants et sans seconds membres. Cherchons une solution de la forme

$$\xi = \alpha\, e^{f\tau}, \qquad \eta = \beta\, e^{f\tau}, \qquad \zeta = \gamma\, e^{f\tau},$$

e étant la base des logarithmes népériens.

f est racine du système

$$\alpha\left(f^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu\right) + \beta\left(2f + \frac{3}{4}\mu\chi\right) = 0,$$
$$\alpha\left(2f - \frac{3}{4}\mu\chi\right) \quad + \beta\left(f^2 + \frac{9}{4}\mu\right) \quad = 0,$$

ou encore de l'équation caractéristique obtenue en éliminant α et β

$$f^4 - f^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0.$$

f' est racine de l'équation caractéristique

$$f'^2 - 1 = 0,$$

qui admet la racine positive réelle

$$f' = +1.$$

Quant à l'équation précédente, elle admet deux racines positives réelles quand on a

$$1 - 27\mu(1-\mu) > 0$$

ou encore, d'une manière approximative,

$$\mu < \frac{1}{25};$$

la solution est alors périodique et il y a libration, c'est ce qui se présente dans le cas des Planètes Troyennes puisque μ est voisin de $\frac{1}{1000}$.

Les deux racines f_1 et f_2 peuvent être obtenues soit sous forme de développement suivant les puissances de μ, soit d'une manière purement numérique en résolvant l'équation en f après y avoir remplacé μ par sa valeur. Les calculs ont été effectués par les deux méthodes et l'on a obtenu d'une part

$$f_1 = 1 - \frac{27}{8}\mu - \frac{3213}{128}\mu^2 - \frac{27 \cdot 13149}{1024}\mu^3 + \ldots,$$
$$f_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\left(1 + \frac{23}{8}\mu + \frac{23 \cdot 193}{128}\mu^2 + \ldots\right);$$

d'autre part, ayant adopté pour μ la valeur

$$\log\mu = 6{,}9794916,$$
$$f_1 = 0{,}99675752\ (6),$$
$$f_2 = 0{,}08046387\ (0),$$

avec huit décimales exactes.

Il est intéressant de comparer ces derniers résultats avec ceux que fournissent les développements, ce sont :

En tenant compte de l'ordre	μ^2	$f_1 = 0{,}99675784$
»	μ^3	$f_1 = 0{,}99675754$
»	$\mu\sqrt{\mu}$	$f_2 = 0{,}08046133$
»	$\mu^2\sqrt{\mu}$	$f_2 = 0{,}08046386$

Solution générale. — Posons

$$\varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{\tau}, \qquad \varepsilon'_{-1} = \frac{\varepsilon'}{2} e^{-\tau},$$

de sorte que

$$\rho' = [1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}]^{-1}.$$

Dans les équations du mouvement $\frac{\partial R}{\partial \xi}, \frac{\partial R}{\partial \eta}, \frac{\partial R}{\partial \zeta}$ seront remplacés par leurs développements suivant les puissances de ξ, η, ζ, ε'_1, ε'_{-1}. Nous remarquerons que dans ces équations il n'y a pas de terme ne contenant que ε'_1 et ε'_{-1}, dans les deux premières ζ ne figure qu'avec un degré pair, dans la troisième qu'avec un degré impair.

Soient F, G, H trois arguments ayant respectivement les formes

$$f v' + F_0, \qquad g v' + G_0, \qquad h v' + H_0,$$

f, g, h étant des coefficients positifs à déterminer et F_0, G_0, H_0 trois angles réels arbitraires. Soient de plus α, β, γ trois constantes arbitraires réelles supposées petites et associées à F, G, H de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha\, e^{iF}, & \beta_1 &= \beta\, e^{iG}, & \gamma_1 &= \gamma\, e^{iH}, \\ \alpha_{-1} &= \alpha\, e^{-iF}, & \beta_{-1} &= \beta\, e^{-iG}, & \gamma_{-1} &= \gamma\, e^{-iH}; \end{aligned}$$

les coefficients de τ dans les exponentielles sont

$$\begin{matrix} f, & g, & h, \\ -f, & -g, & -h. \end{matrix}$$

Nous supposerons, ce que le calcul vérifiera, que ξ, η, ζ sont développables suivant les puissances des huit quantités

$$\alpha_1, \quad \alpha_{-1}, \quad \beta_1, \quad \beta_{-1}, \quad \gamma_1, \quad \gamma_{-1}, \quad \varepsilon'_1, \quad \varepsilon'_{-1},$$

avec les restrictions suivantes qui se déduisent de la forme même des équations du mouvement :

Il n'y a pas de terme ne contenant que ε'_1 et ε'_{-1} ; dans ξ et η, γ_1 et γ_{-1} sont toujours avec un degré pair (ensemble), dans ζ avec un degré impair.

Les développements de ξ et η ne comprennent ainsi que des exponentielles qui figurent dans les deux premières équations, celui de ζ que des exponentielles qui figurent dans la troisième équation.

Le terme général de ces développements est un monome M composé avec les huit éléments ci-dessus et multiplié par un coefficient que nous désignons par A dans ξ, B dans η, C dans ζ; or, par définition, ξ est une quantité réelle, η et ζ sont purement imaginaires, chaque élément tel que AM est associé à l'élément conjugué A'M', M' étant le monome conjugué de M, on a donc en comprenant dans le terme général les éléments conjugués

$$\begin{aligned}
\xi &= \ldots \mathrm{AM} + \mathrm{A'M'} + \ldots,\\
\eta &= \ldots \mathrm{BM} + \mathrm{B'M'} + \ldots,\\
\zeta &= \ldots \mathrm{CM} + \mathrm{C'M'} + \ldots,
\end{aligned}$$

A et A' sont conjugués et de même signe; B et B', de même C et C' sont conjugués et de signes contraires, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= a + ia', & \mathrm{B} &= b + ib', & \mathrm{C} &= c + ic',\\
\mathrm{A'} &= a - ia', & \mathrm{B'} &= -b + ib', & \mathrm{C'} &= -c + ic'.
\end{aligned}$$

Le retour à la forme réelle est d'ailleurs immédiat si

$$\mathrm{M} = \alpha_1^{p_1}\alpha_{-1}^{p_{-1}}\beta_1^{q_1}\beta_{-1}^{q_{-1}}\gamma_1^{r_1}\gamma_{-1}^{r_{-1}}\varepsilon_1'^{s_1}\varepsilon_{-1}'^{s_{-1}},$$

on a pour la partie considérée de ξ, η, ζ,

$$\begin{aligned}
\xi &= \ldots + \alpha^{p_1+p_{-1}}\beta^{q_1+q_{-1}}\gamma^{r_1+r_{-1}}\\
&\quad\times\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{s_1+s_{-1}}\left\{\begin{array}{l} 2a\cos[(p_1-p_{-1})\mathrm{F}+(q_1-q_{-1})\mathrm{G}+(r_1-r_{-1})\mathrm{H}+(s_1-s_{-1})v'] \\ -2a'\sin[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \end{array}\right\}+\ldots,\\
\frac{\eta}{i} &= \ldots + \alpha^{p_1+p_{-1}}\beta^{q_1+q_{-1}}\gamma^{r_1+r_{-1}}\\
&\quad\times\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{s_1+s_{-1}}\left\{\begin{array}{l} 2b\sin[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \\ +2b'\cos[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \end{array}\right\}+\ldots,\\
\frac{\zeta}{i} &= \ldots + \alpha^{p_1+p_{-1}}\beta^{q_1+q_{-1}}\gamma^{r_1+r_{-1}}\\
&\quad\times\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{s_1+s_{-1}}\left\{\begin{array}{l} 2c\sin[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \\ +2c'\cos[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \end{array}\right\}+\ldots.
\end{aligned}$$

Le monome M peut être son propre conjugué, il est alors réel et constant; ses coefficients seront de la forme

$$A = a, \qquad B = ib', \qquad C = ic'.$$

La solution du problème est ramenée à la détermination des valeurs numériques :

1° de f, g, h;

2° des coefficients a, a', b, b', c, c';

ξ, η, ζ et par conséquent les coordonnées de la Planète Troyenne seront alors connues en fonctions de v' et des six constantes arbitraires

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \quad F_0, \quad G_0, \quad H_0,$$

déterminées d'après les conditions initiales.

On pourrait, sans modifier ces résultats, multiplier α par un nombre quelconque, tout en divisant par ce nombre les coefficients numériques des monomes qui contiennent α au premier degré, par son carré ceux qui contiennent α au second degré, etc.; et comme on peut répéter ce raisonnement pour β et γ, on voit que dans ξ, η, ζ, on peut choisir d'une manière absolument arbitraire l'un des coefficients numériques de α_1, de β_1 et de γ_1.

Nous prendrons le coefficient de α_1 et de β_1 dans η, le coefficient de γ_1 dans ζ, tous égaux à 1; on a donc les expressions du premier ordre de η et ζ

$$\eta = \alpha_1 - \alpha_{-1} + \beta_1 - \beta_{-1},$$
$$\zeta = \gamma_1 - \gamma_{-1};$$

quant à l'expression du premier ordre de ξ, elle se trouve entièrement déterminée. D'après ce que nous avons vu plus haut, le rapport entre le coefficient de l'un de ces termes dans ξ et le coefficient du même terme dans η est égal à

$$-\frac{2f + \frac{3}{4}\mu\chi}{f^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu} = -\frac{2f - \frac{3}{4}\mu\chi}{f^2 + \frac{9}{4}\mu};$$

le premier de ces deux rapports sera seul utilisé, ce qui évite l'inconvénient d'un dénominateur voisin de zéro.

Les coefficients de α_1, α_{-1}, β_1, β_{-1} dans ξ sont obtenus en donnant successivement à f les valeurs

$$+f_1, \quad -f_1, \quad +f_2, \quad -f_2;$$

la partie du premier ordre de ξ est alors

$$\xi = \alpha_1\left(-\frac{2f_1+\frac{3}{4}\mu\chi}{f_1^2+3-\frac{9}{4}\mu}\right)+\alpha_{-1}\left(-\frac{2f_1-\frac{3}{4}\mu\chi}{f_1^2+3-\frac{9}{4}\mu}\right)$$
$$+\beta_1\left(-\frac{2f_2+\frac{3}{4}\mu\chi}{f_2^2+3-\frac{9}{4}\mu}\right)+\beta_{-1}\left(-\frac{2f_2-\frac{3}{4}\mu\chi}{f_2^2+3-\frac{9}{4}\mu}\right).$$

On porte ces expressions de ξ, η, ζ dans les termes du second ordre des équations du mouvement qui sont intégrées par les méthodes générales concernant les équations différentielles linéaires avec seconds membres, dont on peut poursuivre l'intégration en tenant compte de termes d'ordres de plus en plus élevés. Cependant il apparaît une difficulté quand le coefficient de τ dans l'exposant de l'un des termes du second membre est racine de l'équation caractéristique, l'application des méthodes générales introduirait dans la solution des termes séculaires qui rendraient très difficiles la continuation des approximations et se trouveraient en contradiction avec la nature périodique de cette solution.

Une telle difficulté se présente quand le monome considéré est équivalent à α_1, α_{-1}, β_1, β_{-1}, γ_1, γ_{-1}, c'est-à-dire dont le rapport à ces derniers est un monome constant.

On peut encore dans ce cas satisfaire aux équations du mouvement et éviter l'introduction de termes séculaires :

1° En prenant pour ces monomes des coefficients nuls dans η et ζ;

2° En développant f, g, h, suivant les monomes M qui sont constants :

$$f = f_0 + f_\alpha\alpha_1\alpha_{-1} + f_\beta\beta_1\beta_{-1} + f_\gamma\gamma_1\gamma_{-1} + f_{\varepsilon'}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + f_{\alpha^2}\alpha_1^2\alpha^2_{-1} + f_{\alpha\beta}\alpha_1\alpha_{-1}\beta_1\beta_{-1} + \ldots,$$
$$g = g_0 + g_\alpha\alpha_1\alpha_{-1} + g_\beta\beta_1\beta_{-1} + g_\gamma\gamma_1\gamma_{-1} + g_{\varepsilon'}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \ldots,$$
$$h = h_0 + h_\alpha\alpha_1\alpha_{-1} + h_\beta\beta_1\beta_{-1} + h_\gamma\gamma_1\gamma_{-1} + h_{\varepsilon'}\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \ldots.$$

Il est clair que l'on devra prendre pour les parties principales de f, g, h

$$f_0 = f_1, \qquad g_0 = f_2, \qquad h_0 = +1,$$

on verra plus loin comment s'effectue la détermination des coefficients numériques f_α, f_β, ...

La méthode générale d'intégration est celle des coefficients indéterminés.

Pour faciliter les notations, les monomes sont numérotés arbitrairement dans l'ordre où on les considère; sur deux monomes conjugués il suffit d'en considérer un qui sera seul numéroté.

Soient M_p un monome et A_p, B_p les coefficients correspondants dans ξ, η

$$\xi = \Sigma A_p M_p, \qquad \eta = \Sigma B_p M_p.$$

Il s'agit de déterminer A_p et B_p.

Le coefficient de τ dans l'exponentielle du monome est

$$K = (p_1 - p_{-1})f + (q_1 - q_{-1})g + (r_1 + r_{-1})h + s_1 + s_{-1}$$

et sa dérivée n^{ieme} par rapport à τ

$$\frac{d^n}{d\tau^n}(M_p) = K^n M_p.$$

Soit K_0 la partie principale de K

$$K_0 = (p_1 - p_{-1})f_0 + (q_1 - q_{-1})g_0 + (r_1 + r_{-1})h_0 + s_1 + s_{-1},$$

on a

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \Sigma K\ A_p M_p = \Sigma K_0 A_p M_p + \Sigma[\Sigma(K - K_0) A_{p'} M_{p'}],$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \Sigma K^2 A_p M_p = \Sigma K_0^2 A_p M_p + \Sigma[\Sigma(K^2 - K_0^2) A_{p''} M_{p''}].$$

Nous avons remplacé certains indices p par p' et p'', ce qui ne modifie rien à la signification des sommations étendues à tous les indices, pour montrer que ce sont les produits

$$\Sigma(K - K_0) M_{p'}, \qquad \Sigma(K^2 - K_0^2) M_{p''},$$

qui font apparaître le monome M_p, le seul qui nous intéresse pour la détermination de A_p et de B_p.

Portons les expressions précédentes, ainsi que les expressions analogues de $\frac{d\eta}{d\tau}$, $\frac{d^2\eta}{d\tau^2}$ dans les équations du mouvement, il vient

$$\begin{aligned}
&\Sigma\left[A_p\left(K_0^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu\right) + B_p\left(2K_0 + \frac{3}{4}\mu\chi\right)\right] M_p \\
&\qquad + \Sigma\{\Sigma[(K^2 - K_0^2) A_{p''} M_{p'} + 2(K - K_0) B_{p'} M_{p'}]\} + \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0, \\
&\Sigma\left[A_p\left(2K_0 - \frac{3}{4}\mu\chi\right) + B_p\left(K_0^2 + \frac{9}{4}\mu\right)\right] M_p \\
&\qquad + \Sigma\{\Sigma[(K^2 - K_0^2) B_{p''} M_{p'} + 2(K - K_0) A_{p'} M_{p'}]\} - \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0.
\end{aligned}$$

et dans les premiers membres de ces équations le coefficient de chacun des monomes M_p doit être identiquement nul. Appelons X_p et Y_p les coefficients de M_p dans les expressions

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} + X'_p M_p, \qquad -\frac{\partial R}{\partial \eta} + Y'_p M_p,$$

avec

$$X'_p M_p = \Sigma[(K^2 - K_0^2) A_{p''} M_{p''} + 2(K - K_0) B_{p'} M_{p'}],$$
$$Y'_p M_p = \Sigma[(K^2 - K_0^2) B_{p''} M_{p''} + 2(K - K_0) A_{p'} M_{p'}],$$

expressions connues à ce moment du calcul; on a les équations

$$A_p\left(K_0^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu\right) + B_p\left(2K_0 + \frac{3}{4}\mu\chi\right) + X_p = 0,$$
$$A_p\left(2K_0 - \frac{3}{4}\mu\chi\right) \quad + B_p\left(K_0^2 + \frac{9}{4}\mu\right) \quad + Y_p = 0,$$

qui sont résolues par rapport aux coefficients A_p et B_p cherchés

$$B_p = \frac{\left(2K_0 - \frac{3}{4}\mu\chi\right)X_p - \left(K_0^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu\right)Y_p}{K_0^4 - K_0^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)},$$

$$A_p = -\frac{X_p + \left(2K_0 + \frac{3}{4}\mu\chi\right)B_p}{K_0^2 + 3 - \frac{9}{4}\mu}.$$

Le calcul est impossible si $K_0 = \pm f_0$ ou $\pm g_0$; dans ce cas qui se présente exactement autant de fois qu'il y a de coefficients tels que $f_\alpha, f_\beta, \ldots$, dans f et g, le numérateur de B_p égalé à zéro détermine justement l'un de ces coefficients et de plus on prend $B_p = 0$ suivant la convention faite.

Le calcul de B_p présente des difficultés pour K_0 voisin de zéro ou de ± 1, celui de A_p jamais.

Si M_p est un monome avec r_1 et r_{-1} impairs, le coefficient correspondant C_p dans ζ est déterminé de même.

Soit Z_p le coefficient de M_p dans

$$-\frac{\partial R}{\partial \xi} + Z'_p M_p$$

avec

$$Z'_p M_p = \Sigma(K^2 - K_0^2) C_{p'} M_{p'},$$

expression qui est connue d'après ce qui a été déjà fait,

$$C_p = \frac{Z_p}{1 - K_0^2}.$$

Si $K_0 = \pm 1$, on a $C_p = 0$ par convention et l'équation $Z_p = 0$ détermine l'un des coefficients h_α, h_β, ... du développement de h.

Il y a des difficultés si K_0 est voisin de ± 1, ces difficultés et celles qui ont été signalées plus haut se présentent quand les dénominateurs de B_p ou de C_p contiennent en facteur une certaine puissance de μ.

En général, dans ce cas, les numérateurs contiennent la même puissance de μ en facteur; il est évident en effet que η, ζ ne peuvent croître indéfiniment quand μ tend vers zéro, puisque l'orbite se rapproche de plus en plus d'une ellipse, cependant on peut prévoir une exception à cette règle.

Cette exception a lieu quand le dénominateur

$$K_0^4 - K_0^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$$

est d'ordre supérieur à μ, c'est-à-dire quand K_0 est racine de l'équation caractéristique à un certain degré d'approximation.

Par exemple,

$$K_0 = g + \mu g';$$

le dénominateur de B_p est d'ordre $\mu\sqrt{\mu}$, tandis que son numérateur est seulement d'ordre μ, puisqu'il contient des termes de cet ordre qui ne sont intervenus dans aucun calcul antérieur.

Nous montrerons que la solution générale convient encore à ce cas, c'est-à-dire que η reste fini quand μ devient nul, à condition toutefois de modifier certaines constantes d'intégration.

B_{1p} étant indépendant de τ on peut écrire

$$B_p M_p = \frac{\beta}{\sqrt{\mu}} B_{1p}\, e^{K_0\tau + iG_0}$$

ou encore en développant l'exponentielle

$$\frac{\beta}{\sqrt{\mu}} B_{1p}\, e^{g\tau + iG_0} + \sqrt{\mu}\,\beta B_{1p}\, e^{g\tau + iG_0} g'\tau + \dots.$$

La seconde partie de cette expression représente des termes séculaires d'ordre $\sqrt{\mu}$; quant à la première

$$\frac{\beta}{\sqrt{\mu}} B_{1p}\, e^{iG}.$$

Nous la joindrons au terme du premier ordre de $\frac{\eta}{i}$

$$\beta\, e^{G},$$

en posant

$$\beta''\, e^{iG''} = \beta\, e^{iG}\left(1 + \frac{B_{1p}}{\sqrt{\mu}}\right) \qquad \text{ou} \qquad \beta''_1 = \beta_1\left(1 + \frac{B_{1p}}{\sqrt{\mu}}\right).$$

L'équation conjuguée achèvera la détermination de β'', G'' qui, substituées à β et G comme constantes d'intégration, feront disparaître les termes de η contenant $\sqrt{\mu}$ en dénominateur, mais avec introduction de termes séculaires.

Si les calculs sont poursuivis avec les constantes primitives, il est à remarquer que tous les β_1 sont susceptibles d'acquérir dans ξ, η, ζ le facteur

$$1 + \frac{B_{1p}}{\sqrt{\mu}}.$$

Vérification des calculs. — On pourrait, à titre de vérification, s'assurer que les équations du mouvement sont satisfaites quand on y remplace ξ, η, ζ par leurs développements, mais il est préférable d'utiliser à cet effet, au lieu des équations elles-mêmes, des combinaisons de ces équations partiellement intégrées qui présentent le double avantage :

1° de simplifier les calculs;

2° d'éviter des fautes que l'on s'exposerait à commettre en reprenant en sens inverse des calculs identiques.

Écrivons les équations sous la forme

$$(a) \qquad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -2\frac{d\eta}{d\tau} - \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$(b) \qquad -\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = 2\frac{d\xi}{d\tau} - \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$(c) \qquad -\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -\zeta - \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Multiplions (a) par $-\eta$, (b) par $-(1+\xi)$ et ajoutons, il vient

$$\frac{d}{d\tau}\left[(1+\xi)\frac{d\eta}{d\tau} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right] = \frac{d}{d\tau}[\eta^2 - (1+\xi)^2] + (1+\xi)\frac{\partial U}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial U}{\partial \xi},$$

d'où, en intégrant,

$$(d) \qquad \frac{d\eta}{d\tau} + 2\xi + \xi\frac{d\eta}{d\tau} - \eta\frac{d\xi}{d\tau} + \xi^2 - \eta^2 = \mathrm{J},$$

avec

$$\mathrm{J} = \int\left[(1+\xi)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta} + \eta\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi}\right]d\tau$$

(à une constante près).

On peut observer que U ne dépend de ξ, η que par l'intermédiaire de σ et ω et que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 2(1+\xi), \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = -2\eta,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 1 + 2\xi, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \chi - 2\eta,$$

μ est donc en facteur dans J qui se réduit à

$$(e) \qquad \mathrm{J} = \int(\chi + \chi\xi - \eta)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega}\,d\tau.$$

Multiplions (a), (b), (c) respectivement par $1+\xi$, η, ζ et ajoutons, il vient

$$(f) \qquad (1+\xi)\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \eta\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - \zeta\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -2(1+\xi)\frac{d\eta}{d\tau} + 2\eta\frac{d\xi}{d\tau} - \zeta^2 - \mathrm{U}'$$

avec

$$\mathrm{U}' = (1+\xi)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta}.$$

Si U_n désigne l'ensemble des termes de degré n en ξ, η, ζ dans U, on a d'après le théorème d'Euler

$$(g) \qquad \mathrm{U}' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} + \Sigma n \mathrm{U}_n.$$

Multiplions (a), (b), (c) respectivement par $2\frac{d\xi}{dt}$, $2\frac{d\eta}{dt}$, $2\frac{d\zeta}{dt}$ et ajoutons, il vient

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^2}{d\tau^2} - \frac{d\eta^2}{d\tau^2} - \frac{d\zeta^2}{d\tau^2}\right) = -2\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{d\tau}\right) - \frac{d}{d\tau}(\zeta^2);$$

or U est une fonction de τ par l'intermédiaire de ξ, η, ζ, ρ'; on a donc

$$d\mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \rho'}d\rho'.$$

et l'on obtient, en intégrant les deux membres de l'équation précédente,

$$(h) \qquad \frac{d\xi^2}{d\tau^2} - \frac{d\eta^2}{d\tau^2} - \frac{d\zeta^2}{d\tau^2} = -2U - 2J' - \zeta^2$$

avec

$$(i) \qquad J' = -\int \frac{\partial U}{\partial \rho'} d\rho' = \int \rho' U(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1})\, d\tau$$

(à une constante près); en effet

$$\frac{\partial U}{\partial \rho'} = \frac{U}{\rho'}, \qquad \frac{d\rho'}{d\tau} = -(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1})\rho'^2.$$

Ajoutons (f) et (h), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = -U' - 2U - 2J' - 2(1+\xi)\frac{d\eta}{d\tau} + 2\eta\frac{d\xi}{d\tau} - 2\zeta^2;$$

ajoutons encore membre à membre l'équation d multipliée par -2, il vient

$$(j) \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} - 2\sigma = -U' - 2U - 2J - 2J',$$

équation qui, comme (d), n'est vérifiée qu'à une constante près.

Les deux équations (d) et (j) feront la vérification de ξ et η et peuvent servir d'ailleurs à les calculer.

En vue de la vérification de ζ, on peut encore former les combinaisons suivantes :

Soit

$$p = 1 + \xi + \eta, \qquad q = 1 + \xi - \eta.$$

Multiplions (a), (b), (c) respectivement par $-\zeta$, $+\zeta$, $-p$ et ajoutons; multiplions encore ces mêmes équations respectivement par $-\zeta$, $-\zeta$, $-q$ et ajoutons, il vient

$$p\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - \zeta\frac{d^2p}{d\tau^2} - 2\zeta\frac{dp}{d\tau} - p\zeta = \zeta\frac{\partial U}{\partial \xi} - \zeta\frac{\partial U}{\partial \eta} + p\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$
$$q\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - \zeta\frac{d^2q}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dq}{d\tau} - q\zeta = \zeta\frac{\partial U}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial U}{\partial \eta} + q\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$

équations conjuguées que l'on peut mettre sous la forme

$$(k) \qquad \frac{d^2}{d\tau^2}(p\zeta) - p\zeta - 2\left[\frac{d}{d\tau}\left(\zeta\frac{dp}{d\tau}\right) + \zeta\frac{dp}{d\tau}\right] + \zeta(1+\chi)\frac{\partial U}{\partial \omega} = 0,$$

$$(l) \qquad \frac{d^2}{d\tau^2}(q\zeta) - q\zeta - 2\left[\frac{d}{d\tau}\left(\zeta\frac{dq}{d\tau}\right) - \zeta\frac{dq}{d\tau}\right] + \zeta(1-\chi)\frac{\partial U}{\partial \omega} = 0,$$

qui sont propres à vérifier ζ et même à en simplifier le calcul, car $\frac{\partial U}{\partial \omega}$ contient μ en facteur.

Si k est voisin de ± 1, la seconde ou la première sera plus simple.

Conduite des calculs. — De même que les racines de l'équation caractéristique, les coefficients f_α, f_β, ... et A_p, B_p, C_p peuvent être obtenus soit sous forme de développements suivant les puissances de μ, soit d'une manière purement numérique en remplaçant μ par sa valeur.

La première méthode est plus générale, d'une application plus facile si l'on fait seulement intervenir les premiers termes des développements, car leurs coefficients ont des valeurs numériques simples et ils sont très convergents; c'est celle que nous avons adoptée. Cependant la seconde méthode présente des avantages quand on recherche des valeurs numériques très précises; elle devient préférable à la précédente quand il doit être tenu compte de termes d'ordre μ^3.

Les calculs ont été mis en train par les deux méthodes et nous avons obtenu pour les termes du premier ordre de ξ et de $\frac{d\xi}{dt}$ d'une part les développements et leurs valeurs numériques :

$$\begin{aligned}
\xi = {} & \alpha_1\left[-\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\mu + \frac{2295}{256}\mu^2 + \chi\left(-\frac{3}{16}\mu - \frac{27}{64}\mu^2\right)\right] \\
& \qquad\qquad -0,49945529 \qquad -\frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0,00031044 \\
& + \beta_1\left[-\sqrt{3}\mu - \frac{11}{8}\mu\sqrt{3}\mu + \chi\left(-\frac{1}{4}\mu + \frac{3}{8}\mu^2\right)\right] + \ldots, \\
& \qquad\qquad -0,05356433 \qquad -\frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0,00041245
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\tau} = {} & \alpha_1\left[-\frac{1}{2} + \frac{9}{4}\mu + \frac{2511}{128}\mu^2 + \chi\left(-\frac{3}{16}\mu + \frac{27}{128}\mu^2\right)\right] \\
& \qquad\qquad -0,49783595 \qquad -\frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0,00030945 \\
& + \beta_1\left[-\frac{9}{2}\mu - \frac{153}{8}\mu^2 + \chi\left(-\frac{3}{8}\mu\sqrt{3\mu}\right)\right] + \ldots; \\
& \qquad\qquad -0,00430980 \qquad -\frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0,00003315
\end{aligned}$$

d'autre part, à une unité près de la huitième décimale,

$$\begin{aligned}\xi = {} & \alpha_1\left(-0{,}49945517 - \frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}00031045\right)\\ & + \beta_1\left(-0{,}05356530 - \frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}00041245\right) + \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} = {} & \alpha_1\left(-0{,}49783570 - \frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}00030945\right)\\ & + \beta_1\left(-0{,}00431007 - \frac{\chi}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}00003319\right) + \ldots.\end{aligned}$$

D'après ce qu'on a vu plus haut on connait les termes du premier ordre de η, ζ, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

Que l'on ait adopté l'une ou l'autre méthode, supposons que ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ soient connus jusqu'à l'ordre $n-1$ en α_1, β_1 ..., nous avons vu que la détermination des termes d'ordre n se ramenait à la recherche des coefficients des monomes M_p dans $\frac{\partial R}{\partial \xi}$, $\frac{\partial R}{\partial \eta}$, $\frac{\partial R}{\partial \zeta}$, ...

Il n'y a là aucune difficulté théorique, mais seulement de longs développements algébriques et la multiplicité des éléments qui interviennent impose une discipline sévère de ces calculs.

Voici donc comment nous avons procédé :

A cet instant du calcul, nous disposons de tableaux comprenant jusqu'à l'ordre $n-1$ les coefficients des monomes et de leurs conjugués M_1, M'_1, M_2, M'_2, M_3, M'_3 ..., dans la totalité des éléments tels que ξ, η, ζ, ξ^2, η^2, ... qui constituent les équations et les formules de vérification.

Il s'agit de trouver le coefficient d'un monome M_p d'ordre n dans un élément d'ordre inférieur ou égal à n, $\xi^2\eta$ par exemple.

Nous décomposons le monome M_p en facteurs d'ordre $n-1$ au plus.

Cette décomposition comporte

2 facteurs quand		$n=2$,
6	»	$n=3$,
14	»	$n=4$.

Si $M_p = \alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \beta_{-1}$ ces quatorze facteurs sont :

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1, & \alpha_{-1}\beta_1\ \beta_{-1}, \\
\alpha_{-1}, & \alpha_1\ \beta_1\ \beta_{-1}, \\
\beta_1, & \alpha_1\ \alpha_{-1}\beta_{-1}, \\
\beta_{-1}, & \alpha_1\ \alpha_{-1}\beta_1, \\
\alpha_1\alpha_{-1}, & \beta_1\ \beta_{-1}, \\
\alpha_1\beta_1, & \alpha_{-1}\beta_{-1}, \\
\alpha_1\beta_{-1}, & \alpha_{-1}\beta_1.
\end{array}$$

Le plus souvent certains de ces facteurs se confondent, ils se réduisent par exemple à dix dans le monome $\alpha_1^2 \alpha_{-1} \beta_1$, à huit dans $\alpha_1^2 \alpha_{-1}^2$, à quatre dans α_1^4, mais il est à remarquer que leur nombre est toujours pair et qu'on peut les associer de manière que leur produit deux à deux reconstitue le monome comme nous l'avons fait ci-dessus.

Cette décomposition est essentielle; une fois qu'elle est effectuée, les opérations deviennent pour ainsi dire mécaniques.

Un élément quelconque peut toujours être considéré comme un produit de deux facteurs; $\xi^2\eta$ est le produit de ξ par $\xi\eta$.

Le coefficient de $\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \beta_{-1}$ dans $\xi^2\eta$ est donc la somme des produits :

du coefficient de	α_1	dans ξ par celui de	$\alpha_{-1}\beta_1\ \beta_{-1}$	dans $\xi\eta$,	
»	α_{-1}	»	$\alpha_1\ \beta_1\ \beta_{-1}$	»	
»	β_1	»	$\alpha_1\ \alpha_{-1}\beta_{-1}$	»	
»	β_{-1}	»	$\alpha_1\ \alpha_{-1}\beta_1$	»	
»	$\alpha_1\alpha_{-1}$	»	$\beta_1\ \beta_{-1}$	»	
»	$\alpha_1\beta_1$	»	$\alpha_{-1}\beta_{-1}$	»	
»	$\alpha_1\beta_{-1}$	»	$\alpha_{-1}\beta_1$	»	
»	$\alpha_{-1}\beta_1$	»	$\alpha_1\ \beta_{-1}$	»	
»	$\alpha_{-1}\beta_{-1}$	»	$\alpha_1\ \beta_1$	»	
»	$\beta_1\ \beta_{-1}$	»	$\alpha_1\ \alpha_{-1}$	»	

On devra donc :

1° Recopier dans les tableaux les valeurs de ces coefficients.

2° Multiplier ceux qui se trouvent sur une même ligne horizontale.

3° Additionner les produits obtenus qui se trouvent dans une même colonne verticale.

Le résultat sera le coefficient cherché.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE.

La théorie analytique exposée dans le Chapitre précédent a été développée en tenant compte des termes du quatrième ordre en ξ, η, ζ, ε'; il est à peu près inutile de dire que nous n'entrerons pas dans le détail des calculs, nous nous bornerons à en indiquer les étapes principales ainsi que les résultats définitifs.

Développements préliminaires. — Nous donnons ci-après les développements qui interviennent dans les équations du mouvement et les formules de vérification en séparant les termes des différents ordres et ceux qui contiennent le facteur μ.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi} = \;& 3\xi \\
& - \frac{3}{2}(2\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\
& - 3\xi(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}) \\
& + 2(2\xi^3 + 3\xi\eta^2 + 3\xi\zeta^2) \\
& + \frac{3}{2}(2\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}) \\
& + 3\xi(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^2 \\
& - \frac{5}{8}(8\xi^4 + 3\eta^4 + 3\zeta^4 + 24\xi^2\eta^2 + 24\xi^2\zeta^2 + 6\eta^2\zeta^2) \\
& - 2(2\xi^3 + 3\xi\eta^2 + 3\xi\zeta^2)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}) \\
& - \frac{3}{2}(2\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^2 \\
& - 3\xi(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^3
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \quad (suite)$$

$$+\mu\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{4}(-3\xi+\chi\eta) \\
+\frac{3}{16}(23\xi^2+19\eta^2+4\zeta^2-2\chi\xi\eta) \\
-\frac{3}{4}(-3\xi+\chi\eta)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1}) \\
+\frac{5}{32}(-33\xi^3-63\xi\eta^2-36\xi\zeta^2-15\chi\xi^2\eta-9\chi\eta^3+12\chi\eta\zeta^2) \\
-\frac{3}{16}(23\xi^2+19\eta^2+4\zeta^2-2\chi\xi\eta)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1}) \\
+\frac{3}{4}(-3\xi+\chi\eta)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})^2 \\
+\frac{5}{256}(233\xi^4-15\eta^4+48\zeta^4+510\xi^2\eta^2+888\xi^2\zeta^2 \\
\qquad\qquad +600\eta^2\zeta^2+228\chi\xi^3\eta+276\chi\xi\eta^3-144\chi\xi\eta\zeta^2) \\
-\frac{5}{32}(-33\xi^3-63\xi\eta^2-36\xi\zeta^2-15\chi\xi^2\eta-9\chi\eta^3+12\chi\eta\zeta^2)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1}) \\
+\frac{3}{16}(23\xi^2+19\eta^2+4\zeta^2-2\chi\xi\eta)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})^2 \\
-\frac{3}{4}(-3\xi+\chi\eta)(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})^3
\end{array}\right]$$

Nous mettrons les autres développements sous une forme plus concise en indiquant qu'ils contiennent le facteur

$$\rho' = 1-(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})+(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})^2-(\varepsilon'_1+\varepsilon'_{-1})^3+\ldots.$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \rho'\left[\begin{array}{l}
\qquad -3\xi\eta \\
\qquad +\frac{3}{2}(4\eta\xi^2+\eta^3+\eta\zeta^2) \\
\qquad -\frac{5}{2}(4\eta\xi^3+3\xi\eta^3+3\xi\eta\zeta^2) \\
+\mu\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{4}(\chi\xi-3\eta) \\
+\frac{3}{16}(-\chi\xi^2+3\chi\eta^2+38\xi\eta-4\chi\zeta^2) \\
+\frac{5}{32}(-5\chi\xi^3-27\chi\xi\eta^2+12\chi\xi\zeta^2-63\eta\xi^2-9\eta^3-36\eta\zeta^2) \\
+\frac{5}{256}(57\chi\xi^4+33\chi\eta^4-48\chi\zeta^4+414\chi\eta^2\xi^2-72\chi\xi^2\zeta^2 \\
\qquad\qquad +216\chi\eta^2\zeta^2+340\eta\xi^3-60\xi\eta^3+1200\xi\eta\zeta^2)
\end{array}\right]
\end{array}\right]$$

$$
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \zeta} = \rho' \left[\begin{array}{l}
-3\xi\zeta \\
+\frac{3}{2}\,(4\zeta\xi^2 + \zeta\eta^2 + \zeta^3) \\
-\frac{5}{2}\,(4\zeta\xi^3 + 3\xi\eta^2\zeta + 3\xi\zeta^3) \\
+\mu \left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{2}\,(\xi\zeta - \chi\eta\zeta) \\
-\frac{15}{8}(3\xi^2\zeta + 3\eta^2\zeta - 2\chi\xi\eta\zeta) \\
-\frac{5}{16}(-37\xi^3\zeta - 75\xi\eta^2\zeta - 12\xi\zeta^3 + 9\chi\eta\xi^2\zeta - 9\chi\eta^3\zeta + 12\chi\eta\zeta^3)
\end{array} \right]
\end{array} \right]
$$

$$
\chi + \chi\xi - \eta)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega} = \rho'\mu \left[\begin{array}{l}
\frac{3}{4}\,(\chi\xi - 3\eta) \\
+\frac{1}{16}\,(9\chi\xi^2 + 21\chi\eta^2 + 42\xi\eta - 12\chi\zeta^2) \\
+\frac{1}{32}\,(-31\chi\xi^3 - 129\chi\xi\eta^2 + 36\xi\zeta^2 + 51\eta\xi^2 + 69\eta^3 - 156\eta\zeta^2) \\
+\frac{1}{256}(85\chi\xi^4 - 195\chi\eta^4 - 240\chi\zeta^4 + 390\chi\xi^2\eta^2 + 120\chi\xi^2\zeta^2 \\
\qquad\qquad + 1560\chi\eta^2\zeta^2 - 2140\xi^3\eta - 3180\xi\eta^3 + 3120\xi\eta\zeta^2)
\end{array} \right]
$$

$$
\rho'\mathrm{U}(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1}) = \rho'^2(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1}) \left[\begin{array}{l}
\frac{3}{2}\,\xi^2 \\
-\frac{1}{2}\,(2\xi^3 + 3\xi\eta^3 + 3\xi\zeta^2) \\
+\mu \left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{8}\,(-3\xi^2 + 2\chi\xi\eta - 3\eta^2) \\
+\frac{1}{16}(23\xi^3 + 57\xi\eta^2 + 12\xi\zeta^2 - 3\chi\xi^2\eta + 3\chi\eta^3 - 12\chi\eta\zeta^2)
\end{array} \right]
\end{array} \right]
$$

avec $\rho'^2(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1}) = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1} - 2(\varepsilon'^2_1 - \varepsilon'^2_{-1}) + 3(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^2(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_{-1}),$

$$
2\mathrm{U} + \Sigma n \mathrm{U}_n = \rho' \left[\begin{array}{l}
6\xi^2 \\
-\frac{5}{2}\,(2\xi^3 + 3\xi\eta^2 + 3\xi\zeta^2) \\
+\frac{3}{4}\,(8\xi^4 + 3\eta^4 + 3\zeta^4 + 24\xi^2\eta^2 + 24\xi^2\zeta^2 + 6\eta^2\zeta^2) \\
+\mu \left[\begin{array}{l}
+\frac{5}{2}\,(-3\xi^2 + 2\chi\xi\eta - 3\eta^2) \\
+\frac{5}{16}(23\xi^3 + 57\xi\eta^2 + 12\xi\zeta^2 - 3\chi\xi^2\eta + 3\chi\eta^3 - 12\chi\eta\zeta^2 \\
+\frac{15}{64}(-33\xi^4 - 9\eta^4 - 126\xi^2\eta^2 - 72\xi^2\zeta^2 - 72\eta^2\zeta^2) \\
\qquad\qquad - 20\chi\xi^3\eta - 36\chi\xi\eta^3 + 48\chi\xi\eta\xi^3)
\end{array} \right]
\end{array} \right]
$$

$$2U + U' = 2U + \Sigma_n U_n + \frac{\partial R}{\partial \xi} + 3\xi + \frac{3}{4}\mu(-3\xi + \chi\eta);$$

$$\zeta\frac{\partial U}{\partial \omega} = \rho'\mu\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}(\xi\zeta - \chi\eta\zeta)\\ + \frac{1}{16}(-3\xi^2\zeta + 33\eta^2\zeta - 30\chi\xi\eta\zeta - 12\zeta^3)\\ + \frac{1}{32}(-25\xi^3\zeta - 255\xi\eta^2\zeta + 60\xi\zeta^3 + 45\chi\eta\xi^2\zeta - 45\chi\eta^3\zeta + 60\chi\eta\zeta^3)\end{array}\right]$$

Développements de f, g, h. — Nous avons obtenu les développements :

$$f = f_0 + \frac{1473}{256}\mu\alpha_1\alpha_{-1} - \frac{129}{16}\mu\beta_1\beta_{-1} + 12\mu\gamma_1\gamma_{-1} + \frac{9}{4}\mu\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \ldots,$$

$$g = g_0 + \frac{43}{32}\sqrt{3\mu}\,\alpha_1\alpha_{-1} - \frac{9}{8}\sqrt{3\mu}\,\beta_1\beta_{-1} - 2\sqrt{3\mu}\,\gamma_1\gamma_{-1} + \frac{21}{2}\sqrt{3\mu}\,\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \ldots,$$

$$h = h_0 + 3\mu\alpha_1\alpha_{-1} + 3\mu\beta_1\beta_{-1} - \frac{3}{4}\mu\gamma_1\gamma_{-1} + 0.\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1} + \ldots.$$

Les coefficients contenus dans g ont été calculés jusqu'à l'ordre $\sqrt{\mu}$, ceux qui sont contenus dans f et dans h l'ont été jusqu'à l'ordre μ.

Calcul du coefficient d'un monome. — Nous donnons ci-dessous le détail du calcul des coefficients A_{124}, B_{124} du monome

$$M_{124} = \alpha_1^2\alpha_{-1}\beta_{-1}.$$

Ce monome se décompose en dix facteurs

$$\begin{array}{ll}\alpha_1, & \alpha_1\alpha_{-1}\beta_{-1},\\ \alpha_{-1}, & \alpha_1^2\,\beta_{-1},\\ \beta_{-1}, & \alpha_1^2\,\alpha_{-1},\\ \alpha_1^2, & \alpha_{-1}\beta_{-1},\\ \alpha_1\alpha_{-1}, & \alpha_1\,\beta_{-1}.\end{array}$$

Voici maintenant les extraits de tableaux limités aux termes strictement utiles pour ce calcul :

	ξ.	η.	$\frac{d\xi}{d\tau}$.	$\frac{d\eta}{d\tau}$.
α_1	$-\frac{1}{2}$	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$+1$
α_{-1}	$-\frac{1}{2}$	-1	$+\frac{1}{2}$	$+1$
β_{-1}	$-\sqrt{3\mu}$	-1		
α_1^2	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$
$\alpha_1\alpha_{-1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\chi\frac{29}{24}$		
$\alpha_1\beta_{-1}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\alpha_{-1}\beta_{-1}$ ...	$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$\alpha_1^2\alpha_{-1}$	$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$		$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$	
$\alpha_1^2\beta_{-1}$	$-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4}$	-1
$\alpha_1\alpha_{-1}\beta_{-1}$.	$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}$			

	ξ^2.	η^2.
α_1^2	$+\frac{1}{4}$	$+1$
$\alpha_1\alpha_{-1}$	$+\frac{1}{2}$	-2
$\alpha_1\beta_{-1}$	$+\sqrt{3\mu}$	-2
$\alpha_{-1}\beta_{-1}$	$+\sqrt{3\mu}$	$+2$
$\alpha_1^2\alpha_{-1}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}-\chi\frac{29}{12}$
$\alpha_1^2\beta_{-1}$	$+\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
$\alpha_1\alpha_{-1}\beta_1$	$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$+3\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{12}$

	ξ^3.	η^3.	$\xi\eta^2$.
$\alpha_1^2\alpha_{-1}$........	$-\frac{3}{8}$	-3	$+\frac{1}{2}$
$\alpha_1^2\beta_{-1}$........	$-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	-3	$+1-\sqrt{3\mu}$
$\alpha_1\alpha_{-1}\beta_{-1}$......	$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$+6$	$+2\sqrt{3\mu}$

On voit que le nombre des facteurs diminue à mesure que l'ordre de l'élément augmente.

Les expressions à multiplier étant mises sur une même ligne, le calcul s'effectue à vue.

ξ.	η.	$\xi\eta$.
$-\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
$-\sqrt{3\mu}$		
$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\frac{29}{48}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\chi\frac{29}{24}$	$-\frac{841}{384}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{48}-\chi\frac{29}{64}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{16}+\frac{3}{64}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{384}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{9}{32}\quad-\chi\frac{29}{32}$	-1	$+\frac{9}{32}\quad+\chi\frac{29}{32}$
$-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	-1	$+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\frac{29}{48}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}$	$+1$	$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}$

Coefficient de M_{124} dans $\xi\eta = +\frac{43}{32}-\frac{329}{128}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{87}{32}-\chi\frac{551}{384}\sqrt{3\mu}$

ξ.	ξ.	ξ^2.
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}$	$+\frac{55}{96}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{48}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$-\sqrt{3\mu}$	$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$	$+\frac{9}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$	$-\sqrt{3\mu}$	$+\frac{9}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{55}{96}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{48}$
	Coefficient de M_{124} dans $\xi^2 =$	$+\frac{11}{8}+\frac{79}{48}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{24}+\chi\frac{203}{96}\sqrt{3\mu}$

η	η.	η^2.
$+1$		
-1	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
-1		
$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{16}+\frac{3}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
$-\chi\frac{29}{24}$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{841}{192}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{48}+\chi\frac{29}{32}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\chi\frac{29}{24}$	$+\frac{841}{192}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{48}+\chi\frac{29}{32}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}+\frac{3}{32}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
	-1	
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	-1	$+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
	$+1$	
	Coefficient de M_{124} dans $\eta^2 =$	$+\frac{7}{8}+\frac{871}{96}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{24}+\chi\frac{145}{96}\sqrt{3\mu}$

ξ^2.	η.	$\xi^2\eta$.
$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{48}\sqrt{3\mu}$
$+\sqrt{3\mu}$	$-\chi\,\frac{29}{24}$	$-\chi\,\frac{29}{24}\sqrt{3\mu}$
$+\sqrt{3\mu}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$
$+\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\,\frac{29}{48}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$+1$	$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$

Coefficient de M_{124} dans $\xi^2\eta = \quad -\frac{9}{8}+\frac{17}{16}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\,\frac{29}{32}\sqrt{3\mu}$

η^2.	η.	η^3.
$+1$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\,\frac{29}{24}\sqrt{3\mu}$
-2	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+1+\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\,\frac{29}{12}\sqrt{3\mu}$
-2	$-\chi\,\frac{29}{24}$	$+\chi\,\frac{29}{12}$
$+2$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4}\quad-\chi\,\frac{29}{12}$	-1	$+\frac{1}{4}\quad+\chi\,\frac{29}{12}$
$-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\quad+\chi\,\frac{29}{4}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	-1	$+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\quad-\chi\,\frac{29}{12}\sqrt{3\mu}$
$+3\sqrt{3\mu}+\chi\,\frac{29}{12}$	$+1$	$+3\sqrt{3\mu}+\chi\,\frac{29}{12}$

Coefficient de M_{124} dans $\eta^3 = \quad +\frac{9}{4}+\frac{27}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\,\frac{29}{4}-\chi\,\frac{29}{8}\sqrt{3\mu}$

ξ^2.	ξ.	ξ^3.
$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{8}-\frac{3}{32}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{192}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$+\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3\mu}$
$+\sqrt{3\mu}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{4}$	$-\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}+\frac{7}{16}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{96}\sqrt{3\mu}$
$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}$
	Coefficient de M_{124} dans $\xi^3 =$	$-\frac{3}{8}+\frac{3}{32}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{64}\sqrt{3\mu}$

η^2.	ξ.	$\eta^2\xi$.
$+1$	$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{48}\sqrt{3\mu}$
-2	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+1-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{24}\sqrt{3\mu}$
-2	$-\frac{1}{2}$	$+1$
$+2$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4} \qquad -\chi\frac{29}{12}$	$-\sqrt{3\mu}$	$+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{12}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{29}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{29}{24}\sqrt{3\mu}$
$+3\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{12}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{24}$
	Coefficient de M_{124} dans $\eta^2\xi =$	$+\frac{29}{8}-\frac{7}{8}\sqrt{3\mu}-\chi\frac{29}{24}+\chi\frac{145}{48}\sqrt{3\mu}$

ξ^3.	η.	$\xi^3\eta$.
$-\frac{3}{8}$	-1	$+\frac{3}{8}$
$-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	-1	$+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$+1$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$

Coefficient de M_{124} dans $\xi^3\eta = +\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$

η^3.	ξ.	$\eta^3\xi$.
-3	$-\sqrt{3\mu}$	$+3\sqrt{3\mu}$
-3	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$+6$	$-\frac{1}{2}$	-3

Coefficient de M_{124} dans $\eta^3\xi = -\frac{3}{2} + 3\sqrt{3\mu}$

ξ^3.	ξ.	ξ^4.
$-\frac{3}{8}$	$-\sqrt{3\mu}$	$+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}$
$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$

Coefficient de M_{124} dans $\xi^4 = +\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$

$\xi\eta^2$.	ξ.	$\xi^2\eta^2$.
$+\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3\mu}$
$+1-\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3\mu}$
$+2\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3\mu}$

Coefficient de M_{124} dans $\xi^2\eta^2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3\mu}$

ξ.	$\frac{d\eta}{d\tau}$.	$\xi\frac{d\eta}{d\tau}$.
$-\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$	-1	$+\frac{1}{2}$
$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$		
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$
$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$		
$-\frac{5}{8}$	$+1$	$-\frac{5}{8}$
$+\chi\frac{29}{24}$	$+1$	$+\chi\frac{29}{24}$
Coefficient de M_{124} dans $\xi\frac{d\eta}{d\tau}=$		$+\frac{3}{8}+\chi\frac{29}{24}$

η.	$\frac{d\xi}{d\tau}$.	$\eta\frac{d\xi}{d\tau}$.
$+1$		
-1	$-\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$
-1	$-\frac{9}{32}-\chi\frac{29}{32}$	$+\frac{9}{32}+\chi\frac{29}{32}$
$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$
$-\chi\frac{29}{24}$	$-\frac{1}{2}$	$+\chi\frac{29}{48}$
$-\frac{1}{2}$		
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
	$-\frac{1}{2}$	
Coefficient de M_{124} dans $\eta\frac{d\xi}{d\tau}=$		$\frac{31}{32}+\chi\frac{145}{96}$

On a pour le monome considéré :

$$K=f-g, \qquad K_0=1-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}+\ldots.$$

X'_{124} et Y'_{124} s'obtiennent immédiatement, mais si le monome était d'ordre supérieur au quatrième, il y aurait lieu de les calculer comme les autres coefficients.

On fait apparaître le monome M_{124} dans

$$(K^2-K_0^2)A_{p''}M_{p''}+2(K-K_0)B_{p'}M_{p'},$$
$$(K^2-K_0^2)B_{p''}M_{p''}+2(K-K_0)A_{p'}M_{p'},$$

en prenant :

$$K-K_0=-\frac{43}{32}\sqrt{3\mu}\,\alpha_1\alpha_{-1},$$

$$K^2-K_0^2=-\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}\,\alpha_1\alpha_{-1},$$

$$A_{p''}M_{p''}=A_{p'}M_{p'}=-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_{-1},$$

$$B_{p''}M_{p''}=B_{p'}M_{p'}=-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_{-1}$$

et les coefficients cherchés sont respectivement

$$X'_{124} = + \frac{43}{16}\sqrt{3\mu},$$

$$Y'_{124} = + \frac{43}{16}\sqrt{3\mu}.$$

On possède maintenant tous les éléments qui permettent de calculer X_{124}, Y_{124} et par conséquent aussi A_{124}, B_{124}.

Les expressions à additionner sont disposées les unes au-dessous des autres.

$$\text{Coefficient de } M_{124} \text{ dans } \frac{\partial R}{\partial \xi} \left\{ \begin{array}{lcl}
-3\xi^2 & = & -\frac{33}{8} - \frac{79}{16}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{29}{8} - \chi\frac{203}{32}\sqrt{3\mu} \\
-\frac{3}{2}\eta^2 & = & -\frac{21}{16} - \frac{871}{64}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{29}{16} - \chi\frac{145}{64}\sqrt{3\mu} \\
+4\xi^3 & = & -\frac{3}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{3\mu} \qquad\qquad - \chi\frac{29}{16}\sqrt{3\mu} \\
+6\xi\eta^2 & = & +\frac{87}{4} - \frac{21}{4}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{29}{4} + \chi\frac{145}{8}\sqrt{3\mu} \\
-5\xi^4 & = & \qquad - \frac{15}{2}\sqrt{3\mu} \\
-\frac{15}{8}\eta^4 & = & -\frac{45}{2} \\
-15\xi^2\eta^2 & = & +\frac{15}{2} + 15\sqrt{3\mu}
\end{array} \right.$$

$$X'_{124} = \qquad + \frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$$

$$X_{124} = -\frac{3}{16} - \frac{847}{64}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{87}{16} + \chi\frac{493}{64}\sqrt{3\mu}$$

$$\text{Coefficient de } M_{124} \text{ dans } \frac{\partial R}{\partial \eta} \left\{ \begin{array}{lcl}
-3\xi\eta & = & -\frac{129}{32} + \frac{987}{128}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{261}{32} + \chi\frac{551}{128}\sqrt{3\mu} \\
+6\eta\xi^2 & = & -\frac{27}{4} + \frac{51}{8}\sqrt{3\mu} \qquad\qquad - \chi\frac{87}{16}\sqrt{3\mu} \\
+\frac{3}{2}\eta^3 & = & +\frac{27}{8} - \frac{81}{8}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{87}{8} - \chi\frac{87}{16}\sqrt{3\mu} \\
-10\eta\xi^3 & = & -\frac{15}{4} + \frac{15}{2}\sqrt{3\mu} \\
-\frac{15}{2}\xi\eta^3 & = & +\frac{45}{4} - \frac{45}{2}\sqrt{3\mu}
\end{array} \right.$$

$$-Y'_{124} = \qquad - \frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$$

$$-Y_{124} = +\frac{3}{32} + \frac{835}{128}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{87}{32} - \chi\frac{841}{128}\sqrt{3\mu}$$

$$
B_{124} = \frac{\left\{\begin{array}{l} (2-3\sqrt{3\mu})\left(-\dfrac{3}{16}-\dfrac{847}{64}\sqrt{3\mu}+\chi\dfrac{87}{16}+\chi\dfrac{493}{64}\sqrt{3\mu}\right) \\ +(4-3\sqrt{3\mu})\left(\dfrac{3}{32}+\dfrac{835}{128}\sqrt{3\mu}+\chi\dfrac{87}{32}-\chi\dfrac{841}{128}\sqrt{3\mu}\right) \end{array}\right\}}{-3\sqrt{3\mu}} = \frac{1}{32}+\chi\frac{29}{32},
$$

$$
A_{124} = -\frac{-\dfrac{3}{16}-\chi\dfrac{87}{16}+2\left(\dfrac{1}{32}+\chi\dfrac{29}{32}\right)}{4} = \frac{1}{32}+\chi\frac{29}{32},
$$

Ces résultats sont vérifiés successivement par les formules (d) et (j).

$$
\text{Coefficient de } M_{124} \text{ dans} \left\{\begin{array}{rrr}
\dfrac{d\eta}{d\tau} = & +\dfrac{1}{32} & +\chi\dfrac{29}{32} \\
2\xi = & +\dfrac{1}{16} & +\chi\dfrac{29}{16} \\
\xi\dfrac{d\eta}{d\tau} = & +\dfrac{3}{8} & -\chi\dfrac{29}{24} \\
-\eta\dfrac{d\xi}{d\tau} = & -\dfrac{31}{32} & +\chi\dfrac{145}{96} \\
\xi^2 = & +\dfrac{11}{8} & -\chi\dfrac{29}{24} \\
-\eta^2 = & -\dfrac{7}{8} & -\chi\dfrac{29}{24}
\end{array}\right.
$$

$$
\text{Total} = \quad 0 \qquad 0
$$

$$
\text{Coef}^{\text{t}} \text{ de } M_{124} \text{ dans} \left\{\begin{array}{l}
2U+\Sigma_n U_n \left\{\begin{array}{rrrrr}
+\ 6\xi^2 = & +\dfrac{33}{4} & +\dfrac{79}{8}\sqrt{3\mu} & -\chi\dfrac{29}{4} & +\chi\dfrac{203}{16}\sqrt{3\mu} \\
-\ 5\xi^3 = & +\dfrac{15}{4} & -\dfrac{15}{32}\sqrt{3\mu} & & +\chi\dfrac{145}{64}\sqrt{3\mu} \\
-\dfrac{15}{2}\xi\eta^2 = & -\dfrac{435}{16} & +\dfrac{105}{16}\sqrt{3\mu} & +\chi\dfrac{145}{16} & -\chi\dfrac{5.145}{32}\sqrt{3\mu} \\
+\ 6\xi^4 = & & +9\sqrt{3\mu} & & \\
+\ \dfrac{9}{4}\eta^4 = & +27 & & & \\
+\ 18\xi^2\eta^2 = & -9 & -18\sqrt{3\mu} & &
\end{array}\right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial R}{\partial \xi} = -\dfrac{3}{16} - \dfrac{1019}{64}\sqrt{3\mu} - \chi\dfrac{87}{16} + \chi\dfrac{493}{64}\sqrt{3\mu} \\
\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\sigma}{d\tau^2}-2\sigma+3\xi \left\{\begin{array}{rrrrr}
\sigma.\dfrac{43}{32}\sqrt{3\mu}\,\alpha_1\alpha_{-1} = & & -\dfrac{86}{64}\sqrt{3\mu} & & \\
-\sigma.\dfrac{3}{2}\sqrt{3\mu} = & & -\dfrac{27}{32}\sqrt{3\mu} & & +\chi\dfrac{29}{32}\sqrt{3\mu} \\
-\dfrac{3}{2}(\xi^2-\eta^2) = & -\dfrac{3}{4} & +\dfrac{713}{64}\sqrt{3\mu} & +\chi\dfrac{29}{8} & -\chi\dfrac{29}{32}\sqrt{3\mu}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
\text{Total} = \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0
$$

Les calculs effectués dans le Chapitre suivant fourniront une nouvelle vérification complète de ces résultats.

Cas des monomes contenant $\varepsilon' \pm 1$. — Quand le monome M contient ε'_1 ou ε'_{-1}, c'est-à-dire quand

$$M = M'\varepsilon'_{\pm 1}$$

les calculs se simplifient.

Dans un développement D, désignons par D'_n l'ensemble des termes d'ordre n qui est aussi l'ordre du monome

$$D = D'_2 + D'_3 + \ldots + D'_n + \ldots,$$

D_n ne contenant pas explicitement ε'_1 ou ε'_{-1}, soient

$$\begin{aligned} D'_2 &= D_2 \\ &\quad - D_1(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D'_3 &= D_3 \\ &\quad - D_2(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}), \\ &\quad + D_1(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^2, \end{aligned} \qquad \ldots, \quad \begin{aligned} D'_n &= D_n \\ &\quad - D_{n-1}(\varepsilon'_1 + \varepsilon_{-1}) \\ &\quad + D_{n-2}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^2 \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \pm D_1 \quad (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})^{n-1}. \end{aligned}$$

Telle est la forme de presque tous les développements préliminaires après suppression des termes du premier ordre.

Il s'agit de calculer le coefficient de M dans D.

ε'_1 et ε'_{-1} n'entrent pas au premier degré dans ξ, η, ζ, le coefficient de M dans D_n est donc nul.

On a aussi

$$D'_n = D_n - D'_{n-1}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1})$$

et la somme de toutes les identités analogues

$$\begin{aligned} &D \text{ (limité à l'ordre } n) = D_2 + \ldots + D_n \\ &\quad - D \text{ (limité à l'ordre } n-1)(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}) - D_1(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_{-1}), \end{aligned}$$

d'où la règle pratique suivante :

Le coefficient de M dans D est égal au coefficient de M dans $D_2 + \ldots + D_{n-1}$ moins le coefficient de M' dans D moins le coefficient de M' dans D_1.

Voici une application au calcul de X_{90}, Y_{90} qui correspondent au monome

$$M_{90} = \beta_1^3 \varepsilon'_1.$$

Avec l'approximation $\sqrt{\mu}$, les termes de $\frac{\partial R}{\partial \xi}$, $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ jusqu'au troisième ordre et ne contenant pas explicitement ε'_1, c'est-à-dire $D_2 + \ldots + D_{n-1}$, sont

$$-3\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2 + 4\xi^3 + 6\xi\eta^2,$$
$$-3\xi\eta + 6\eta\xi^2 + \frac{3}{2}\eta^3.$$

On a aussi

$$M' = \beta_1^3.$$

M' n'est autre que le monome M_{21}, ses coefficients dans $\frac{\partial R}{\partial \xi}$, $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ ont déjà été calculés, ce sont

$$X_{21}, \quad -Y_{21}.$$

Enfin les termes du premier ordre de $\frac{\partial R}{\partial \xi}$, $\frac{\partial R}{\partial \eta}$, c'est-à-dire D_1, sont respectivement

$$3\xi, \quad 0,$$

d'où le tableau de calcul

$$\begin{array}{ll}
\text{Coefficient de } M_{90} \text{ dans } \left\{ \begin{array}{l} -3\xi^2 = +3 + 6\sqrt{3\mu} + \chi\frac{9}{2}\sqrt{3\mu} \\ -\frac{3}{2}\eta^2 = + \frac{35}{8}\sqrt{3\mu} + 3\chi - \chi\frac{211}{16}\sqrt{3\mu} \\ +4\xi^3 = \\ +6\xi\eta^2 = -6 - 18\sqrt{3\mu} \end{array} \right. & \\
\qquad\qquad -X_{21} = + 2\sqrt{3\mu} - \frac{3}{4}\chi & \\
\text{Coefficient de } M_{90} \text{ dans } \; -3\xi = - \frac{53}{16}\sqrt{3\mu} + \frac{3}{4}\chi & \\
\hline
X_{90} = -3 - \frac{143}{16}\sqrt{3\mu} + 3\chi - \chi\frac{139}{16}\sqrt{3\mu} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{Coefficient de } M_{90} \text{ dans } \left\{ \begin{array}{l} -3\xi\eta = -\frac{15}{2} + \frac{301}{16}\sqrt{3\mu} - \frac{3}{2}\chi - \chi\frac{41}{32}\sqrt{3\mu} \\ +6\eta\xi^2 = + 12\sqrt{3\mu} \\ +\frac{3}{2}\eta^3 = +9 - \frac{45}{2}\sqrt{3\mu} \end{array} \right. \\
\qquad\qquad +Y_{21} = + \chi\frac{9}{4}\sqrt{3\mu} \\
\hline
-Y_{90} = +\frac{3}{2} + \frac{133}{16}\sqrt{3\mu} - \frac{3}{2}\chi + \chi\frac{31}{32}\sqrt{3\mu}
\end{array}$$

Degré d'approximation des calculs. — Les monomes ayant été numérotés d'une manière qui permet de les retrouver facilement et de ne pas en omettre, leurs coefficients dans ξ, η, ζ ont été calculés et vérifiés jusqu'au quatrième ordre inclusivement avec l'approximation suivante :

μ^2 pour le 1er ordre,
μ » 2e » ,
$\sqrt{\mu}$ » 3e » ,
0 » 4e » .

Il y a cependant une restriction pour le quatrième ordre; quand l'exposant du monome est d'ordre μ on s'est borné à calculer A_p, quand A_p et B_p contiennent $\sqrt{\mu}$ en dénominateur leur calcul n'a été poussé que jusqu'à l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

Les calculs effectués aux Chapitres suivants comblent entièrement ces lacunes.

Cas où B_p *contient des termes en* $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$. — Parmi les monomes considérés, c'est-à-dire d'ordre inférieur ou égal au quatrième, deux font apparaître dans η des termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$; ce sont

$$M_{62}=\alpha_1\beta_1\varepsilon'_{-1}, \qquad M_{66}=\alpha_1\beta_{-1}\varepsilon'_{-1},$$

pour lesquels la méthode habituelle a fourni les valeurs de B_p

$$B_{62}=-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}+\ldots,$$
$$B_{66}=-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}+\ldots.$$

Nous joindrons au terme du premier ordre β_1 de $\frac{\eta}{i}$ les termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ de $B_{62}M_{62}$ et de $B'_{66}M'_{66}$ conjugué de $B_{66}M_{66}$

$$B'_{66}M'_{66}=\alpha_{-1}\beta_1\varepsilon'_1\left(\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}+\ldots\right).$$

On a pour l'ensemble de ces termes

$$\beta_1\left[1+\alpha_1\varepsilon'_{-1}\left(-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}\right)+\alpha_{-1}\varepsilon'_1\left(\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}\right)\right],$$

et pour l'ensemble des termes conjugués

$$-\beta_{-1}\left[1+\alpha_1\varepsilon'_{-1}\left(\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}-\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}\right)+\alpha_{-1}\varepsilon'_1\left(-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}-\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}\right)\right].$$

Remarquons que dans $\alpha_1\varepsilon'_{-1}$, $\alpha_{-1}\varepsilon'_1$ les exposants sont respectivement

$$i\left[F_0+\left(1-\frac{27}{8}+\ldots\right)v'-v'\right],$$
$$i\left[v'-F_0-\left(1-\frac{27}{8}+\ldots\right)v'\right];$$

après développement d'une partie des exponentielles on a

$$\alpha_1\ \varepsilon'_{-1}=\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{iF_0}\left(1-\frac{27}{8}\mu+\ldots\right),$$
$$\alpha_{-1}\varepsilon'_1\ =\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{-iF_0}\left(1+\frac{27}{8}\mu+\ldots\right);$$

et la première des expressions ci-dessus peut s'écrire

$$\beta_1\left\{1+i\alpha\frac{\varepsilon'}{2}\left[-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\sin F_0+\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\cos F_0+\frac{27}{8}\mu v'\left(\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\cos F_0+\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\sin F_0\right)\right]\right\}.$$

Posons :

$$\operatorname{tang}\varkappa=\frac{\alpha\varepsilon'}{2}\left(-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\sin F_0+\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\cos F_0\right),$$
$$\beta''_1\ =\beta''e^{iG''}\ =\beta e^{iG}\ (1+i\operatorname{tang}\varkappa),$$
$$\beta''_{-1}=\beta''e^{-iG''}=\beta e^{-iG}(1-i\operatorname{tang}\varkappa),$$

d'où

$$\beta''=\frac{\beta}{\cos\varkappa},\qquad G''_0=G_0+\varkappa,$$

formules qui permettent de substituer les nouvelles constantes d'intégration β'', G''_0 aux anciennes; cette substitution étant faite, l'ensemble des deux expressions ci-dessus devient

$$\beta''_1,$$
$$-\beta''_{-1}.$$
$$+i\alpha\beta\frac{\varepsilon'}{2}\cos G\, v'\left(\frac{21}{2}\sqrt{3\mu}\cos F_0+\frac{93}{4}\sqrt{\mu}\sin F_0\right)+\ldots.$$

Au degré d'approximation de nos calculs, cette transformation se réduit à

$$\operatorname{tang}\varkappa=\varkappa,$$
$$\beta''=\beta,\qquad G''_0=G_0+\varkappa,$$

ce qui montre que le changement de constantes d'intégration s'effectue :

1° En posant

$$\beta''_1 = \beta_1[1 + \ldots], \qquad \beta''_{-1} = \beta_{-1}[1 + \ldots],$$

avec les mêmes expressions que ci-dessus entre crochets et

$$\beta''_1 = \beta\, e^{\iota(G+\varkappa)}, \qquad \beta''_{-1} = \beta\, e^{-\iota(G+\varkappa)}.$$

2° En ajoutant à η des termes séculaires d'ordre $\sqrt{\mu}$.

Voici comment on réalise pratiquement la première de ces opérations. On a les termes de ξ et de η

	ξ.	η.
$\beta_1 \ldots\ldots$	$-\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{1}{4}\mu$	$+1$
$\alpha_1\ \beta_1\varepsilon'_{-1}\ldots$	$\frac{7}{3} + \frac{175}{72}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{31}{18} + \chi\frac{17}{72}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \frac{5}{8} + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}} + \chi\frac{31}{48}$
$\alpha_{-1}\beta_1\varepsilon'_1\ldots$	$-\frac{7}{3} + \frac{175}{72}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{31}{18} + \chi\frac{31}{72}\sqrt{3\mu}$	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \frac{5}{8} + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}} - \chi\frac{21}{16}$

Dans ce tableau accentuons la lettre β_1 qui figure au premier ordre et retranchons les termes introduits par cette opération à savoir :

$\alpha_1\ \beta_1\varepsilon'_{-1}\ldots$	$\frac{7}{3} + \frac{31}{72}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{31}{18} + \chi\frac{7}{36}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \qquad + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
$\alpha_{-1}\beta_1\varepsilon'_1\ldots$	$-\frac{7}{3} + \frac{31}{72}\sqrt{3\mu} - \chi\frac{31}{18} - \chi\frac{7}{36}\sqrt{3\mu}$	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \qquad + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$

On a les nouvelles expressions de ξ et de η

$\beta''_1 \ldots\ldots$	$-\sqrt{3\mu} \qquad -\chi\frac{1}{4}\mu$	1
$\alpha_1\ \beta''_1\varepsilon'_{-1}\ldots$	$2\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{1}{24}\sqrt{3\mu}$	$+\frac{5}{8} \qquad +\chi\frac{31}{48}$
$\alpha_{-1}\beta''_1\varepsilon'_1\ldots$	$2\sqrt{3\mu} \qquad +\chi\frac{5}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\frac{5}{8} \qquad -\chi\frac{21}{16}$
$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ont disparu et l'on pourra même se dispenser d'accentuer les lettres β_1, β_{-1}.

De même on a les termes du second ordre de ξ, η, ζ contenant β_1 ou β_{-1}

	ξ.	η.
β_1^2......	$\frac{1}{2}$	$-\chi\frac{1}{4}$
$\beta_1\beta_{-1}$...	-1	$-\chi\frac{3}{2}$
$\alpha_1\beta_1$....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\alpha_1\beta_{-1}$...	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\beta_1\varepsilon'_1$....	-1	2
$\beta_1\varepsilon'_{-1}$...	1	2

	ζ.
$\beta_1\gamma_1$....	1
$\beta_1\gamma_{-1}$...	1

On peut encore accentuer les lettres β_1 et β_{-1} et retrancher respectivement de ξ, η, ζ

	ξ.	η.
$\beta_1^2\alpha_1\varepsilon'_{-1}$....	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$	$\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$
$\beta_1^2\alpha_{-1}\varepsilon'_1$....	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$	$\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}-\chi\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$
....	....	....

	ξ.
$\beta_1\gamma_1\ \alpha_1\varepsilon'_{-1}$.	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
$\beta_1\gamma_{-1}\alpha_1\varepsilon'_{-1}$.	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
....	....

Il est facile de vérifier d'après les résultats qui suivent que cette opération fait disparaître la totalité des termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, on aurait d'ailleurs pu faire cette vérification en s'assurant que β_1 et β_{-1} contiennent respectivement en facteur dans ξ, η, ζ les expressions entre crochets qui les multiplient ci-dessus.

On pourra donc soit conserver les termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, ce qui a été fait dans le présent Chapitre, soit les faire disparaître, ce qui a été fait au Chapitre suivant; on dira plus loin les considérations qui doivent guider pour le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes.

Résultats. — Nous donnons pour les monomes d'ordre inférieur ou égal au quatrième, dans l'ordre même de leurs numéros, les développements suivant les puissances de μ des quantités

$$X'_p, \quad -Y'_p, \quad -Z'_p, \quad X_p, \quad -Y_p, \quad -Z_p, \quad A_p, \quad B_p, \quad C_p,$$

les développements sous forme réelle de ξ, η, ζ se trouvent au Chapitre IV.

Les termes non calculés par suite des restrictions indiquées plus haut sont remplacés par des guillemets.

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
1	α_1			1
2	β_1			1
3	γ_1			1
4	α_1^2		$\frac{3}{2} - \frac{21}{4}\mu + \chi\,\frac{69}{64}\mu$	$\frac{1}{8} - \frac{69}{384}\mu + \chi\,\frac{165}{256}\mu$
5	β_1^2		$3\sqrt{3\mu} - 3\mu\sqrt{3\mu} + \gamma\left(\frac{21}{16}\mu - \frac{111}{32}\mu^2\right)$	$-\frac{\sqrt{3\mu}}{3} - \chi\left(\frac{1}{4} + \frac{175}{24}\mu\right)$
6	γ_1^2		$-\chi\,\frac{3}{4}\mu$	$-\frac{1}{2} + \frac{17}{32}\mu - \chi\,\frac{11}{32}\mu$
7	$\alpha_1\alpha_{-1}$		$-\chi\left(\frac{75}{32}\mu - \frac{45}{128}\mu^2\right)$	$-\chi\left(\frac{29}{24} + \frac{3}{32}\mu\right)$
8	$\beta_1\beta_{-1}$		$-\chi\left(\frac{21}{8}\mu - \frac{75}{16}\mu^2\right)$	$-\chi\left(\frac{3}{2} - \frac{17}{4}\mu\right)$
9	$\gamma_1\gamma_{-1}$		$\chi\,\frac{3}{2}\mu$	$\chi\,\frac{1}{3}$
10	$\alpha_1\beta_1$		$\frac{3}{2} + 3\sqrt{3\mu} - \frac{21}{4}\mu - 3\mu\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{39}{16}\mu - \frac{3}{16}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{3\mu} + \frac{65}{16}\mu + \chi\left(\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{375}{32}\mu\right)$
11	$\alpha_1\beta_{-1}$		$-\frac{3}{2} + 3\sqrt{3\mu} + \frac{21}{4}\mu - 3\mu\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{39}{16}\mu + \frac{3}{16}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{3\mu} - \frac{65}{16}\mu + \chi\left(\frac{29}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} + \frac{327}{32}\mu\right)$
12	$\alpha_1\gamma_1$		$\frac{3}{2} - \frac{39}{16}\mu - \chi\,\frac{15}{16}\mu$	$\frac{1}{2} + \frac{23}{16}\mu - \chi\,\frac{5}{16}\mu$
13	$\alpha_1\gamma_{-1}$		$-\frac{3}{2} + \frac{39}{16}\mu + \chi\,\frac{15}{16}\mu$	$\frac{3}{2} - \frac{39}{16}\mu - \chi\,\frac{15}{16}\mu$
14	$\alpha_1\varepsilon'_1$		$\frac{9}{4}\mu + \chi\,\frac{3}{8}\mu$	$\frac{1}{2} + \frac{51}{16}\mu + \chi\,\frac{1}{16}\mu$
15	$\alpha_1\varepsilon'_{-1}$		$\frac{9}{4}\mu - \frac{27}{64}\mu^2 + \chi\left(\frac{3}{8}\mu - \frac{27}{64}\mu^2\right)$	$-\frac{1}{2} - \frac{171}{16}\mu + \chi\,\frac{3}{16}\mu$
16	$\beta_1\gamma_1$		$3\sqrt{3\mu} + \frac{21}{8}\mu\sqrt{3\mu} - \chi\,\frac{3}{4}\mu$	$1 - \frac{9}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{16}\mu - \chi\left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{3}{16}\mu\right)$
17	$\beta_1\gamma_{-1}$		$-3\sqrt{3\mu} - \frac{21}{8}\mu\sqrt{3\mu} + \chi\,\frac{3}{4}\mu$	$1 + \frac{9}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{16}\mu - \chi\left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} + \frac{3}{16}\mu\right)$
18	$\beta_1\varepsilon'_1$		$\frac{9}{4}\mu - \frac{9}{16}\mu^2 + \chi\,\frac{3}{4}\mu\sqrt{3\mu}$	$2 - 5\sqrt{3\mu} - \frac{153}{4}\mu - \frac{1045}{8}\mu\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{1}{4}\mu - \frac{3}{4}\mu\sqrt{3\mu}\right)$
19	$\beta_1\varepsilon'_{-1}$		$\frac{9}{4}\mu - \frac{9}{16}\mu^2 + \chi\,\frac{3}{4}\mu\sqrt{3\mu}$	$2 + 5\sqrt{3\mu} + \frac{153}{4}\mu + \frac{1045}{8}\mu\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu\sqrt{3\mu}\right)$
20	α_1^3		$\frac{39}{16}$	$\frac{7}{48}$
21	β_1^3		$\frac{321}{16}\mu - \chi\left(\frac{9}{4}\sqrt{3\mu} + \frac{1531}{32}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{7}{48} + \chi\,\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$
22	γ_1^3		0	0
23	$\alpha_1^2\alpha_{-1}$	$-\frac{1473}{256}\mu$	$-\frac{9}{16} - \frac{489}{128}\mu + \chi\left(\frac{29}{16} - \frac{1529}{512}\mu\right)$	0

p.	X'_p.	X_p.	A_p.
1			$-\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\mu+\frac{2295}{256}\mu^2 \quad -\chi\left(\frac{3}{16}\mu+\frac{27}{64}\mu^2\right)$
2			$-\sqrt{3\mu}-\frac{11}{8}\mu\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\mu^2\right)$
3			
4		$-\frac{9}{4}+\frac{405}{64}\mu \quad -\chi\frac{3}{8}\mu$	$\frac{1}{4}+\frac{31}{64}\mu \quad -\chi\frac{21}{64}\mu$
5		$-\frac{3}{2}-\frac{87}{16}\mu \quad -\chi\frac{9}{8}\mu\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu \quad +\chi\left(\frac{\sqrt{3\mu}}{2}+\frac{593}{48}\mu\sqrt{3\mu}\right)$
6		$-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mu \quad +\chi\frac{1}{4}\mu$
7		$\frac{3}{2}-\frac{51}{32}\mu$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\mu$
8		$3-\frac{201}{8}\mu+0\mu\sqrt{\mu}$	$-1-\frac{13}{2}\mu+0\mu\sqrt{\mu}$
9		$3-\frac{3}{2}\mu$	-1
10		$-3-3\sqrt{3\mu}+\frac{57}{8}\mu+\frac{57}{16}\mu\sqrt{3\mu}-\chi\left(\frac{9}{16}\mu+\frac{3}{4}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}+\frac{59}{32}\mu \quad -\chi\left(\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\frac{291}{64}\mu\right)$
11		$3-3\sqrt{3\mu}-\frac{57}{8}\mu+\frac{57}{16}\mu\sqrt{3\mu}+\chi\left(+\frac{9}{16}\mu+\frac{3}{2}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\sqrt{3\mu}+\frac{59}{32}\mu \quad -\chi\left(\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}+\frac{243}{64}\mu\right)$
12			
13			
14		$\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\mu \quad -\chi\frac{3}{16}\mu$	$-\frac{1}{2}-\frac{33}{16}\mu \quad -\chi\frac{1}{16}\mu$
15		$\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\mu-\frac{6561}{256}\mu^2 \quad -\chi\left(\frac{3}{16}\mu-\frac{27}{32}\mu^2\right)$	$-\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\mu-\frac{5697}{256}\mu^2 \quad +\chi\left(\frac{3}{16}\mu+\frac{189}{64}\mu^2\right)$
16			
17			
18		$3\sqrt{3\mu}+\frac{15}{8}\mu\sqrt{3\mu} \quad -\chi\frac{27}{16}\mu^2$	$-1+\sqrt{3\mu}-9\mu+\frac{317}{8}\mu\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{2}\mu\sqrt{3\mu}\right)$
19		$3\sqrt{3\mu}+\frac{15}{8}\mu\sqrt{3\mu} \quad -\chi\frac{27}{16}\mu^2$	$1+\sqrt{3\mu}+9\mu+\frac{317}{8}\mu\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{2}\mu\sqrt{3\mu}\right)$
20		$-\frac{25}{8}$	$\frac{3}{16}$
21		$-2\sqrt{3\mu} \quad +\chi\left(\frac{3}{4}+\frac{107}{4}\mu\right)$	$\frac{53}{48}\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{1}{4}+\frac{1201}{192}\mu\right)$
22			
23	$-\frac{1473}{256}\mu$	$\frac{9}{8}+\frac{309}{64}\mu \quad +\chi\left(\frac{29}{8}-\frac{377}{256}\mu\right)$	$-\frac{9}{32}-\frac{471}{256}\mu \quad -\chi\left(\frac{29}{32}+\frac{1711}{1024}\mu\right)$

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
24	$\alpha_1^2\beta_1$		$\frac{9}{2}+\frac{33}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{87}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
25	$\alpha_1^2\beta_{-1}$		$-\frac{9}{2}+\frac{33}{8}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{87}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{29}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
26	$\alpha_1^2\gamma_1$		$+3$	$+\frac{3}{8}$
27	$\alpha_1^2\gamma_{-1}$		$+\frac{267}{64}\mu-\chi\frac{183}{64}\mu$	$-\frac{89}{288}+\chi\frac{61}{288}$
28	$\alpha_1^2\varepsilon'_1$		$+\frac{3}{4}$	0
29	$\alpha_1^2\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{3}{4}-\frac{39}{4}\mu-\chi\frac{159}{64}\mu$	$\frac{49}{12}-\chi\frac{89}{36}$
30	$\beta_1^2\alpha_1$		$\frac{3}{2}+\frac{47}{8}\sqrt{3\mu}+\frac{1437}{64}\mu-\chi\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}+\frac{121}{16}\mu\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{213}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{8}-\frac{49}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
31	$\beta_1^2\alpha_{-1}$		$-\frac{3}{2}+\frac{47}{8}\sqrt{3\mu}-\frac{1437}{64}\mu-\chi\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}+\frac{11}{2}\mu\right)$	$-\frac{1}{2}+\frac{213}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{8}+\frac{47}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
32	$\beta_1^2\beta_{-1}$	$\frac{27}{8}\mu-\chi\frac{9}{16}\mu\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{15}{4}\sqrt{3\mu}+\frac{33}{16}\mu-\frac{713}{32}\mu\sqrt{3\mu}\right)$	0
33	$\beta_1^2\gamma_1$		$3\sqrt{3\mu}-\frac{27}{4}\mu-\chi\left(\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}+\frac{3}{2}\mu\right)$	$\frac{1}{2}-\frac{27}{24}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
34	$\beta_1^2\gamma_{-1}$		$3\sqrt{3\mu}+\frac{27}{4}\mu+\chi\left(\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}-\frac{3}{2}\mu\right)$	$-\frac{1}{2}-\frac{27}{24}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
35	$\beta_1^2\varepsilon'_1$		$3-\frac{201}{8}\mu+\chi 3\mu$	$-\frac{19}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{2}-\frac{151}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
36	$\beta_1\varepsilon'_{-1}$		$-3+\frac{201}{8}\mu+\chi 3\mu$	$-\frac{19}{8}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}-\chi\left(\frac{1}{2}+\frac{151}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
37	$\gamma_1^2\alpha_1$		$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
38	$\gamma_1^2\alpha_{-1}$		$-\frac{3}{4}+\frac{303}{64}\mu+\chi\frac{159}{64}\mu$	$\frac{107}{72}+\chi\frac{61}{72}$
39	$\gamma_1^2\beta_1$		$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{1}{12}\sqrt{3\mu}$
40	$\gamma_1^2\beta_{-1}$		$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}+\chi\frac{1}{12}\sqrt{3\mu}$
41	$\gamma_1^2\gamma_{-1}$	$\frac{3}{2}\mu$	0	0
42	$\gamma_1^2\varepsilon'_1$		0	0
43	$\gamma_1^2\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{9}{8}\mu+\chi\frac{3}{8}\mu$	$-\frac{1}{3}+\chi\frac{1}{9}$
44	$\varepsilon'^2_1\alpha_1$		0	0

p.	X'_p.	X .		A_p.	
24		$-\frac{51}{8}-\frac{33}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\,\frac{87}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\,\frac{29}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
25		$\frac{51}{8}-\frac{33}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\,\frac{87}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\,\frac{29}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
26					
27					
28		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{8}$	
29		$\frac{3}{2}+\frac{375}{16}\mu$	$+\chi\,\frac{3}{8}\mu$	$-\frac{29}{12}$	$+\chi\,\frac{89}{72}$
30		$-3-\frac{23}{4}\sqrt{3\mu}-\frac{537}{32}\mu$	$+\chi\left(\frac{3}{4}-\frac{51}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}+\frac{1183}{32}\mu\right)$	$\frac{1}{2}-\frac{225}{64}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\chi\left(\frac{1}{8}-\frac{19}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
31		$-3+\frac{23}{4}\sqrt{3\mu}-\frac{537}{32}\mu$	$-\chi\left(\frac{3}{4}+\frac{51}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}+\frac{1039}{32}\mu\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{225}{64}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\chi\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{4}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
32	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{15}{4}-\frac{55}{2}\mu\right)$	$\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\chi\left(\frac{5}{4}-\frac{265}{24}\mu\right)$
33					
34					
35		$-6+9\sqrt{3\mu}-75\mu$	$-\chi\left(\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}+\frac{15}{8}\mu\right)$	$\frac{3}{2}-\frac{197}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+\chi\left(\frac{1}{4}-\frac{79}{32}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
36		$-6-9\sqrt{3\mu}-75\mu$	$-\chi\left(\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}-\frac{15}{8}\mu\right)$	$\frac{3}{2}+\frac{197}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\chi\left(\frac{1}{4}+\frac{79}{32}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$
37		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$	
38		$\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\mu$	$+\chi\,\frac{21}{16}\mu$	$-\frac{161}{144}$	$-\chi\,\frac{61}{144}$
39		$-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\,\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\,\frac{1}{12}\sqrt{3\mu}$
40		$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\,\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\,\frac{1}{12}\sqrt{3\mu}$
41					
42		0		0	
43		$\frac{9}{8}\mu$	$-\chi\,\frac{3}{8}\mu$	$\frac{1}{6}$	$-\chi\,\frac{1}{18}$
44		0		0	

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
45	$\varepsilon_1'^2\alpha_{-1}$		$\frac{27}{8}\mu$	$\frac{3}{2}$
46	$\varepsilon_1'^2\beta_1$		0	$1 - \frac{19}{4}\sqrt{3\mu}$
47	$\varepsilon_1'^2\beta_{-1}$		0	$-1 - \frac{19}{4}\sqrt{3\mu}$
48	$\alpha_1\alpha_{-1}\beta_1$	$-\frac{129}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{417}{32}\mu - \chi\frac{29}{8}\sqrt{3\mu}$	0
49	$\alpha_1\alpha_{-1}\gamma_1$	-6μ	0	0
50	$\alpha_1\alpha_{-1}\varepsilon'_1$		$\frac{3}{2} + \frac{177}{16}\mu + \chi\frac{9}{16}\mu$	$-\frac{2}{3} + \chi\frac{7}{18}$
51	$\beta_1\beta_{-1}\alpha_1$	$\frac{129}{16}\mu$	$-3 + \frac{57}{32}\mu - \chi\left(\frac{9}{4} - \frac{207}{4}\mu\right)$	0
52	$\beta_1\beta_{-1}\gamma_1$	-6μ	0	0
53	$\beta_1\beta_{-1}\varepsilon'_1$		$-6 - \frac{519}{4}\mu - \chi\frac{21}{2}\mu$	$-\frac{14}{3} - \chi\frac{58}{9}$
54	$\gamma_1\gamma_{-1}\alpha_1$	-12μ	$-\frac{153}{16}\mu + \chi\left(\frac{1}{2} - \frac{25}{16}\mu\right)$	0
55	$\gamma_1\gamma_{-1}\beta_1$	6μ	$\frac{33}{4}\mu + \chi\sqrt{3\mu}$	0
56	$\gamma_1\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		0	0
57	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\alpha_1$	$-\frac{9}{4}\mu$	$-\frac{27}{4}\mu$	0
58	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\beta_1$	$-\frac{63}{2}\sqrt{3\mu}$	-27μ	0
59	$\alpha_1\beta_1\gamma_1$		$3 + \frac{21}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{27}{16}\sqrt{3\mu}$	$1 - \frac{1}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{9}{16}\sqrt{3\mu}$
60	$\alpha_1\beta_1\gamma_{-1}$		$\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} + \frac{33}{16}\mu - \chi\left(\frac{31}{16}\sqrt{3\mu} - \frac{675}{64}\mu\right)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{31}{16}\sqrt{3\mu}$
61	$\alpha_1\beta_1\varepsilon'_1$		$6 - 12\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2} - \frac{19}{8}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
62	$\alpha_1\beta_1\varepsilon'_{-1}$		$\frac{63}{2}\mu + \frac{1749}{64}\mu\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{3}{8}\mu + 15\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \frac{5}{8} + \chi\left(\frac{31}{18\sqrt{3\mu}} + \frac{31}{48}\right)$
63	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_1$		$-3 + \frac{21}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{27}{16}\sqrt{3\mu}$	$-1 - \frac{1}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{9}{16}\sqrt{3\mu}$
64	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_{-1}$		$\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} - \frac{33}{16}\mu - \chi\left(\frac{31}{16}\sqrt{3\mu} + \frac{531}{64}\mu\right)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{31}{16}\sqrt{3\mu}$
65	$\alpha_1\beta_{-1}\varepsilon'_1$		$-6 - 12\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{2} - \frac{19}{8}\sqrt{3\mu} + \chi\frac{29}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
66	$\alpha_1\beta_{\ 1}\varepsilon'_{\ 1}$		$-\frac{63}{2}\mu + \frac{1749}{64}\mu\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{3}{8}\mu + 15\mu\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} - \frac{5}{8} + \chi\left(\frac{31}{18\sqrt{3\mu}} - \frac{21}{16}\right)$
67	$\alpha_1\gamma_1\varepsilon'_1$		0	0

p.	X'_p	X_p.		A_p.	
45		$\frac{27}{8}\mu$		$-\frac{3}{4}$	
46		$3 - 6\sqrt{3\mu}$		$-1 + 4\sqrt{3\mu}$	
47		$-3 - 6\sqrt{3\mu}$		$1 + 4\sqrt{3\mu}$	
48	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{55}{16}\sqrt{3\mu} - \frac{3}{2}\mu$	$+\lambda\left(\frac{29}{8} - \frac{1135}{32}\mu\right)$	$-\frac{55}{48}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\,\frac{29}{24}$
49					
50		$-3 - \frac{363}{16}\mu$	$-\lambda\,\frac{15}{16}\mu$	$\frac{13}{12}$	$-\lambda\,\frac{7}{36}$
51	$-\frac{129}{16}\mu$	$6 - \frac{15}{8}\mu$	$+\lambda\left(\frac{9}{2} - \frac{1539}{16}\mu\right)$	$-\frac{3}{2} - \frac{93}{32}\mu$	$-\lambda\left(\frac{9}{8} - \frac{1377}{64}\mu\right)$
52					
53		$12 + 237\mu$	$+\lambda\,\frac{15}{4}\mu$	$-\frac{2}{3}$	$+\lambda\,\frac{29}{9}$
54	12μ	$\frac{81}{4}\mu$	$-\lambda(1 - 2\mu)$	$-\frac{81}{16}\mu$	$+\lambda\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\mu\right)$
55	$-4\sqrt{3\mu}$	$-\frac{5}{2}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\left(1 - \frac{13}{8}\mu\right)$	$\frac{5}{6}\sqrt{3\mu}$	$+\lambda\,\frac{1}{3}$
56		0		0	
57	$\frac{9}{4}\mu$	$\frac{27}{2}\mu$		$-\frac{27}{8}\mu$	
58	$21\sqrt{3\mu}$	$9\sqrt{3\mu} + 0\mu$		$-3\sqrt{3\mu}$	
59					
60					
61		$-9 + \frac{135}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\lambda\,\frac{87}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$+1 - \frac{17}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\,\frac{29}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
62		$-\frac{105}{8}\sqrt{3\mu} - \frac{1701}{32}\mu$	$+\lambda\left(\frac{87}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{909}{64}\mu\right)$	$+\frac{7}{3} + \frac{175}{72}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\left(\frac{31}{18} - \frac{17}{32}\sqrt{3\mu}\right)$
63					
64					
65		$9 + \frac{135}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\lambda\,\frac{87}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-1 - \frac{17}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\,\frac{29}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$
66		$-\frac{105}{8}\sqrt{3\mu} + \frac{1701}{32}\mu$	$+\lambda\left(\frac{87}{16}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} + \frac{765}{64}\mu\right)$	$-\frac{7}{3} + \frac{175}{72}\sqrt{3\mu}$	$-\lambda\left(\frac{31}{18} - \frac{31}{72}\sqrt{3\mu}\right)$
67					

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
68	$\alpha_1\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$\frac{27}{8}\mu + \chi\,\frac{9}{8}\mu$	$-\frac{1}{2} - \chi\,\frac{1}{6}$
69	$\alpha_1\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		$-\frac{63}{8}\mu - \chi\,\frac{3}{8}\mu$	$\frac{7}{6} + \chi\,\frac{1}{18}$
70	$\alpha_1\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{27}{8}\mu - \chi\,\frac{9}{8}\mu$	$-\frac{1}{2} - \chi\,\frac{1}{6}$
71	$\beta_1\gamma_1\varepsilon'_1$		$3 - 6\sqrt{3\mu}$	$1 - 4\sqrt{3\mu}$
72	$\beta_1\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$-3 - 6\sqrt{3\mu}$	$3 + 6\sqrt{3\mu}$
73	$\beta_1\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		$-3 + 6\sqrt{3\mu}$	$3 - 6\sqrt{3\mu}$
74	$\beta_1\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$3 + 6\sqrt{3\mu}$	$1 + 4\sqrt{3\mu}$
75	α_1^4		$\frac{61}{16}$	$\frac{29}{192}$
76	β_1^4		$-\frac{35}{8}\sqrt{3\mu}$	»
77	γ_1^4		0	0
78	$\alpha_1^3\alpha_{-1}$		$-\frac{15}{16} - \chi\,\frac{29}{8}$	$-\frac{31}{192} - \chi\,\frac{29}{64}$
79	$\alpha_1^3\beta_1$		$\frac{79}{8}$	$\frac{5}{8}$
80	$\alpha_1^3\beta_{-1}$		$-\frac{79}{8}$	$-\frac{5}{8}$
81	$\alpha_1^3\gamma_1$		5	$\frac{1}{3}$
82	$\alpha_1^3\gamma_{-1}$		$-\frac{231}{576} + \chi\,\frac{61}{192}$	$-\frac{77}{576} + \chi\,\frac{61}{576}$
83	$\alpha_1^3\varepsilon'_1$		3	$\frac{5}{48}$
84	$\alpha_1^3\varepsilon'_{-1}$		$\frac{23}{2} - \chi\,\frac{89}{12}$	$\frac{7}{8} - \chi\,\frac{89}{144}$
85	$\beta_1^3\alpha_1$		$\frac{17}{32} + \frac{141}{16}\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{3}{4} + \frac{243}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{17}{96} - \chi\,\frac{1}{4}$
86	$\beta_1^3\alpha_{-1}$		$\frac{17}{32} - \frac{141}{16}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{3}{4} - \frac{249}{32}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{17}{96} + \chi\,\frac{1}{4}$
87	$\beta_1^3\beta_{-1}$	$\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{23}{8}\sqrt{3\mu}$	»
88	$\beta_1^3\gamma_1$		$-\frac{21}{16}\sqrt{3\mu} - \chi\,\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{48} - \chi\,\frac{1}{4}$
89	$\beta_1^3\gamma_{-1}$		$\frac{21}{16}\sqrt{3\mu} - \chi\,\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{48} + \chi\,\frac{1}{4}$
90	$\beta_1^3\varepsilon'_1$		$\frac{3}{2} + \frac{133}{16}\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{3}{2} - \frac{31}{32}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{5}{24}$

p	X'_p.	X_p.		A_p.	
68					
69					
70					
71					
72					
73					
74					
75		$-\frac{579}{128}$		$\frac{67}{384}$	
76		$\frac{35}{32}$	$+\chi\ 2\sqrt{3\mu}$	$-\frac{35}{96}$	
77			0		0
78		$\frac{37}{32}$	$+\chi\frac{319}{64}$	$-\frac{7}{96}$	$-\chi\frac{29}{64}$
79		$-\frac{49}{4}$		$\frac{17}{24}$	
80		$\frac{49}{4}$		$-\frac{17}{24}$	
81					
82					
83		-4		$+\frac{1}{6}$	
84		$-\frac{35}{2}$	$+\chi\frac{89}{8}$	2	$-\chi\frac{89}{72}$
85		$-\frac{17}{16}-\frac{231}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{3}{2}-\frac{27}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{17}{96}$	$-\chi\frac{1}{4}$
86		$\frac{17}{16}-\frac{231}{16}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{3}{2}-\frac{33}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{17}{96}$	$-\chi\frac{1}{4}$
87	$\frac{9}{8}\sqrt{3\mu}$	$\frac{23}{16}$	$+\chi\frac{51}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{23}{48}$	
88					
89					
90		$-3-\frac{143}{16}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(3-\frac{139}{16}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{31}{48}$	$-\chi\frac{3}{4}$

$p.$	$M_p.$	$-Y'_p$ ou $-Z'_p.$	$-Y_p$ ou $-Z_p.$	B_p ou $C_p.$
91	$\beta_1^3\varepsilon'_{-1}$		$\frac{3}{2} - \frac{133}{16}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{3}{2} + \frac{31}{32}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{5}{24}$
92	$\gamma_1^3\alpha_1$		0	0
93	$\gamma_1^3\alpha_{-1}$		$\frac{159}{144} + \chi\frac{183}{144}$	$\frac{53}{144} + \chi\frac{61}{144}$
94	$\gamma_1^3\beta_1$		0	0
95	$\gamma_1^3\beta_{-1}$		0	0
96	$\gamma_1^3\gamma_{-1}$		0	$-\frac{1}{2} + \chi\frac{1}{6}$
97	$\gamma_1^3\varepsilon'_1$		0	0
98	$\gamma_1^3\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{1}{2} + \chi\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} + \chi\frac{1}{18}$
99	$\varepsilon'^3_1\alpha_1$		0	0
100	$\varepsilon'^3_1\alpha_{-1}$		0	$\frac{3}{4}$
101	$\varepsilon'^3_1\beta_1$		0	0
102	$\varepsilon'^3_1\beta_{-1}$		0	0
103	$\varepsilon'^3_1\gamma_1$		0	0
104	$\varepsilon'^3_1\gamma_{-1}$		0	0
105	$\alpha_1^2\alpha_{-1}^2$		»	»
106	$\beta_1^2\beta_{-1}^2$		»	»
107	$\gamma_1^2\gamma_{-1}^2$		»	»
108	$\alpha_1^2\beta_1^2$		$\frac{27}{4} - \chi\frac{9}{8}$	$\frac{13}{16} - \chi\frac{1}{8}$
109	$\alpha_1^2\beta_{-1}^2$		$\frac{27}{4} - \chi\frac{9}{8}$	$\frac{13}{16} - \chi\frac{1}{8}$
110	$\alpha_1^2\gamma_1^2$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{16}$
111	$\alpha_1^2\gamma_{-1}^2$		»	»
112	$\alpha_1^2\varepsilon'^2_1$		0	0
113	$\alpha_1^2\varepsilon'^2_{-1}$		»	»
114	$\beta_1^2\gamma_1^2$		0	$-\frac{1}{4} + \chi\frac{1}{8}$
115	$\beta_1^2\gamma_{-1}^2$		0	$\frac{1}{4} + \chi\frac{1}{8}$
116	$\beta_1^2\varepsilon'^2_1$		6	$-\chi\frac{1}{4}$
117	$\beta_1^2\varepsilon'^2_{-1}$		-6	$-\chi\frac{1}{4}$

p.	X'_p.	X_p.	A_p.
91		$3 - \frac{143}{16}\sqrt{3\mu} + \chi\left(3 + \frac{139}{16}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{31}{48} - \chi\,\frac{3}{4}$
92			
93			
94			
95			
96		$-\frac{3}{2} + \chi\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \chi\,\frac{1}{6}$
97			
98			
99		0	0
100		$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$
101		0	0
102		0	0
103			
104			
105		$\frac{919}{128}$	$-\frac{919}{384}$
106		$\frac{207}{16}$	$-\frac{69}{16}$
107		$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{6}$
108		$-\frac{75}{8} + \chi\,\frac{51}{32}$	$\frac{7}{8} - \chi\,\frac{5}{32}$
109		$-\frac{75}{8} + \chi\,\frac{51}{32}$	$\frac{7}{8} - \chi\,\frac{5}{32}$
110		$-\frac{33}{16}$	$\frac{3}{16}$
111		$\frac{35}{96} - \chi\,\frac{61}{96}$	$-\frac{35}{288} + \chi\,\frac{61}{288}$
112		0	0
113		$\frac{55}{8} - \chi\,\frac{89}{24}$	$-\frac{55}{24} + \chi\,\frac{89}{72}$
114		$-\frac{3}{4} + \chi\,\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4} - \chi\,\frac{1}{8}$
115		$-\frac{3}{4} - \chi\,\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4} + \chi\,\frac{1}{8}$
116		$-\frac{21}{2} - \chi\,\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2} + \chi\,\frac{1}{4}$
117		$-\frac{21}{2} + \chi\,\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2} - \chi\,\frac{1}{4}$

p	M_p	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$	$-Y_p$ ou $-Z_p$			B_p ou C_p	
118	$\gamma_1^2\varepsilon_1'^2$			0		0	
119	$\gamma_1^2\varepsilon_{-1}^2$			»		»	
120	$\alpha_1^2\beta_1\beta_{-1}$		$-\frac{21}{2}$		$-\chi\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{8}$	$-\chi\frac{9}{16}$
121	$\alpha_1^2\gamma_1\gamma_{-1}$		$\frac{3}{2}$		$+\chi$	$\frac{89}{288}$	$-\chi\frac{25}{288}$
122	$\alpha_1^2\varepsilon'_1\varepsilon_{-1}$			0		$\frac{49}{24}$	$-\chi\frac{89}{72}$
123	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\beta_1$	$-\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{32}$	$+\frac{835}{128}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{87}{32}+\frac{841}{128}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{32}$	$-\chi\frac{29}{32}$
124	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\beta_{-1}$	$-\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{3}{32}$	$+\frac{835}{128}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{87}{32}-\frac{841}{128}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{32}$	$+\chi\frac{29}{32}$
125	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\gamma_1$		$-\frac{3}{32}$		$-\chi\frac{29}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$-\chi\frac{29}{96}$
126	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\gamma_{-1}$		$-\frac{251}{192}$		$+\chi\frac{235}{192}$	$\frac{251}{192}$	$-\chi\frac{235}{192}$
127	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\varepsilon_1$		$\frac{1}{4}$		$+\chi\frac{7}{6}$	$\frac{11}{96}$	$+\chi\frac{115}{288}$
128	$\alpha_1^2\alpha_{-1}\varepsilon_{-1}$			»		»	
129	$\alpha_1^2\beta_1\gamma_1$		9			$\frac{9}{8}$	
130	$\alpha_1^2\beta_1\gamma_{-1}$			$-\frac{89}{96}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\frac{61}{96}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{89}{288}$	$+\chi\frac{61}{288}$
131	$\alpha_1^2\beta_{-1}\gamma_1$		-9			$-\frac{9}{8}$	
132	$\alpha_1^2\beta_{-1}\gamma_{-1}$			$-\frac{89}{96}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\frac{61}{96}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}$	$\frac{89}{288}$	$-\chi\frac{61}{288}$
133	$\alpha_1^2\beta_1\varepsilon_1$		$\frac{69}{4}$			1	
134	$\alpha_1^2\beta_1\varepsilon_{-1}$		$-\frac{7}{2\sqrt{3\mu}}$	$+\frac{13}{16}$	$+\chi\left(\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}+\frac{233}{96}\right)$	$-\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
135	$\alpha_1^2\beta_{-1}\varepsilon_1$		$-\frac{69}{4}$			-1	
136	$\alpha_1^2\beta_{-1}\varepsilon_{-1}$		$-\frac{7}{2\sqrt{3\mu}}$	$-\frac{13}{16}$	$+\chi\left(\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}-\frac{329}{96}\right)$	$-\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
137	$\alpha_1^2\gamma_1\varepsilon_1$		$\frac{15}{8}$			$\frac{1}{8}$	
138	$\alpha_1^2\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$\frac{23}{4}$		$-\chi\frac{95}{24}$	$\frac{23}{12}$	$-\chi\frac{95}{72}$
139	$\alpha_1^2\gamma_{-1}\varepsilon_1$		$-\frac{1}{8}$		$+\chi\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\chi\frac{1}{36}$

p.	X'_p.	X_p.		A_p.	
118		0		0	
119		$-\frac{1}{2}$	$+\chi\,\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\chi\,\frac{1}{18}$
120		$\frac{57}{4}$	$+\chi\,\frac{99}{16}$	$-\frac{15}{2}$	$-\chi\,\frac{9}{16}$
121		$-\frac{163}{96}$	$-\chi\,\frac{193}{96}$	$\frac{19}{288}$	$+\chi\,\frac{97}{288}$
122		$\frac{49}{8}$	$-\chi\,\frac{89}{24}$	$-\frac{49}{24}$	$+\chi\,\frac{89}{72}$
123	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{3}{16}-\frac{847}{64}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{87}{16}+\frac{493}{64}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{32}$	$-\chi\,\frac{29}{32}$
124	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{16}-\frac{847}{64}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{87}{16}-\frac{493}{64}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{32}$	$+\chi\,\frac{29}{32}$
125					
126					
127		$-\frac{3}{32}$	$-\chi\,\frac{27}{32}$	$-\frac{5}{96}$	$-\chi\,\frac{31}{288}$
128		$\frac{221}{32}$	$-\chi\,\frac{673}{96}$	$-\frac{221}{96}$	$+\chi\,\frac{673}{288}$
129					
130					
131					
132					
133		$-\frac{45}{2}$		$\frac{33}{24}$	
134		$\frac{7}{\sqrt{3\mu}}-\frac{69}{8}$	$-\chi\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}-\frac{15}{48}\right)$	$-\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\,\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
135		$\frac{45}{2}$		$-\frac{33}{24}$	
136		$\frac{7}{\sqrt{3\mu}}+\frac{69}{8}$	$-\chi\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}-\frac{27}{16}\right)$	$-\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\,\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
137					
138					
139					

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.	
140	$\alpha_1^2\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{29}{4} \quad +\chi\,\frac{83}{24}$	$\frac{29}{4}$	$-\chi\,\frac{83}{24}$
141	$\beta_1^2\alpha_1\alpha_{-1}$		»	»	
142	$\beta_1^2\gamma_1\gamma_{-1}$		»	»	
143	$\beta_1^2\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$		»	»	
144	$\beta_1^2\alpha_1\beta_{-1}$	$\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{4} + \frac{15}{4}\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{21}{8} - \frac{243}{32}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$-\chi\,\frac{7}{8}$
145	$\beta_1^2\alpha_{-1}\beta_{-1}$	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{4} - \frac{15}{4}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{21}{8} - \frac{241}{32}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$+\chi\,\frac{7}{8}$
146	$\beta_1^2\alpha_1\gamma_1$		$3 \quad -\chi\,\frac{3}{4}$	1	$-\chi\,\frac{1}{4}$
147	$\beta_1^2\alpha_1\gamma_{-1}$		0	0	
148	$\beta_1^2\alpha_{-1}\gamma_1$		0	0	
149	$\beta_1^2\alpha_{-1}\gamma_{-1}$		$-3 \quad -\chi\,\frac{3}{4}$	-1	$-\chi\,\frac{1}{4}$
150	$\beta_1^2\alpha_1\varepsilon'_1$		$15 \quad -\chi\,\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$-\chi\,\frac{1}{8}$
151	$\beta_1^2\alpha_1\varepsilon'_{-1}$		$-14 + \frac{359}{48}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{31}{3} - \frac{49}{24}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\,\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$
152	$\beta_1^2\alpha_{-1}\varepsilon'_1$		$14 + \frac{359}{48}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{31}{3} - \frac{47}{24}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{31}{12\sqrt{3\mu}}$	$-\chi\,\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$
153	$\beta_1^2\alpha_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-15 \quad -\chi\,\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$-\chi\,\frac{1}{8}$
154	$\beta_1^2\beta_{-1}\gamma_1$	$\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$3\sqrt{3\mu} + \chi\,\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	1	$+\chi\,\frac{1}{4}$
155	$\beta_1^2\beta_{-1}\gamma_{-1}$	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-3\sqrt{3\mu} + \chi\,\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}$	1	$-\chi\,\frac{1}{4}$
156	$\beta_1^2\beta_{-1}\varepsilon'_1$	$\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{23}{2} - \frac{321}{16}\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{38}{3} + \frac{1085}{96}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{23}{6}$	$-\chi\,\frac{31}{18}$
157	$\beta_1^2\beta_{-1}\varepsilon'_{-1}$	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{23}{2} + \frac{321}{16}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{38}{3} - \frac{1085}{96}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{23}{6}$	$+\chi\,\frac{31}{18}$
158	$\beta_1^2\gamma_1\varepsilon'_1$		$\frac{9}{2} \quad -\chi\,\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\chi\,\frac{1}{4}$
159	$\beta_1^2\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{3}{2} \quad +\chi\,\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\chi\,\frac{3}{4}$
160	$\beta_1^2\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		$\frac{3}{2} \quad +\chi\,\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\chi\,\frac{3}{4}$
161	$\beta_1^2\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{9}{2} \quad -\chi\,\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\chi\,\frac{1}{4}$
162	$\gamma_1^2\alpha_1\alpha_{-1}$		$\frac{53}{24} \quad +\chi\,\frac{61}{24}$	$-\frac{19}{288}$	$-\chi\,\frac{113}{288}$

p.	X'_p.	X_p.		A_p.	
140					
141		$\frac{63}{32}$		$-\frac{21}{32}$	
142		$-\frac{9}{4}$		$\frac{3}{4}$	
143		-3		1	
144	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$\frac{3}{2}-9\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{21}{4}+\frac{159}{16}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$-\chi\frac{7}{8}$
145	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{2}-9\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{21}{4}-\frac{157}{16}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{4}$	$-\chi\frac{7}{8}$
146					
147					
148					
149					
150		-21	$+\chi\frac{9}{4}$	»	$-\chi\frac{1}{4}$
151		$\frac{7}{\sqrt{3\mu}}-\frac{27}{8}$	$-\chi\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}+\frac{31}{16}\right)$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
152		$-\frac{7}{\sqrt{3\mu}}-\frac{27}{8}$	$-\chi\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}-\frac{63}{16}\right)$	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$+\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
153		-21	$-\chi\frac{9}{4}$	»	$+\chi\frac{1}{4}$
154					
155					
156	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$23+\frac{137}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{76}{3}+\frac{49}{48}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{23}{6}$	$-\chi\frac{197}{36}$
157	$-\frac{9}{4}\sqrt{3\mu}$	$-23+\frac{137}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{76}{3}-\frac{49}{48}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{23}{6}$	$-\chi\frac{197}{36}$
158					
159					
160					
161					
162		$-\frac{195}{48}$	$-\chi\frac{135}{24}$	$\frac{89}{144}$	$+\chi\frac{37}{36}$

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
163	$\gamma_1^2\beta_1\beta_{-1}$		0	$-\frac{1}{2} - \chi\frac{3}{4}$
164	$\gamma_1^2\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}$		0	$-\frac{1}{6} - \chi\frac{1}{18}$
165	$\gamma_1^2\alpha_1\beta_1$		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
166	$\gamma_1^2\alpha_1\beta_{-1}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
167	$\gamma_1^2\alpha_{-1}\beta_1$		$\frac{53}{48} + \frac{115}{48}\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{61}{48} - \frac{343}{96}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{53}{144} + \chi\frac{61}{144}$
168	$\gamma_1^2\alpha_{-1}\beta_{-1}$		$-\frac{53}{48} + \frac{115}{48}\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{61}{48} - \frac{343}{96}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{53}{144} - \chi\frac{61}{144}$
169	$\gamma_1^2\alpha_1\gamma_{-1}$		$\frac{3}{2} + \chi\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} + \chi\frac{1}{12}$
170	$\gamma_1^2\alpha_{-1}\gamma_{-1}$		$\frac{19}{48} - \chi\frac{73}{48}$	$-\frac{19}{48} + \chi\frac{73}{48}$
171	$\gamma_1^2\alpha_1\varepsilon'_1$		0	0
172	$\gamma_1^2\alpha_1\varepsilon'_{-1}$		$-1 + \chi.\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12} + \chi\frac{7}{36}$
173	$\gamma_1^2\alpha_{-1}\varepsilon'_1$		0	$-\frac{19}{144} + \chi\frac{85}{144}$
174	$\gamma_1^2\alpha_{-1}\varepsilon'_{-1}$		»	»
175	$\gamma_1^2\beta_1\gamma_{-1}$	$4\sqrt{3\mu}$	$3\sqrt{3\mu}$	1
176	$\gamma_1^2\beta_{-1}\gamma_{-1}$	$4\sqrt{3\mu}$	$3\sqrt{3\mu}$	-1
177	$\gamma_1^2\beta_1\varepsilon'_1$		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
178	$\gamma_1^2\beta_1\varepsilon'_{-1}$		$1 + 2\sqrt{3\mu} + \chi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{5}{3} + \chi\frac{1}{18}$
179	$\gamma_1^2\beta_{-1}\varepsilon'_1$		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
180	$\gamma_1^2\beta_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-1 + 2\sqrt{3\mu} - \chi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{5}{3} - \chi\frac{1}{18}$
181	$\gamma_1^2\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		0	0
182	$\gamma_1^2\gamma_{-1}\varepsilon_{-1}$		$\frac{1}{2} - \chi\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2} + \chi\frac{1}{6}$
183	$\varepsilon_1'^2\alpha_1\alpha_{-1}$		$\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{24} + \chi\frac{7}{36}$
184	$\varepsilon_1'^2\beta_1\beta_{-1}$		-12	$-\frac{7}{3} - \chi\frac{29}{9}$
185	$\varepsilon_1'^2\gamma_1\gamma_{-1}$		0	0
186	$\varepsilon_1'^2\alpha_1\beta_1$		3	0

p.	X'_p.	X_p.		A_p.	
163		$-\frac{3}{2}$	$-\chi\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\chi\frac{3}{4}$
164		$-\frac{1}{2}$	$+\chi\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\chi\frac{1}{18}$
165		-3		$\frac{1}{2}$	
166		3		$-\frac{1}{2}$	
167		$-\frac{53}{24}-\frac{31}{12}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{61}{24}+\frac{221}{48}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{53}{144}$	$+\chi\frac{61}{144}$
168		$\frac{53}{24}-\frac{31}{12}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{61}{24}-\frac{221}{48}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{53}{144}$	$-\chi\frac{61}{144}$
169					
170					
171		0		0	
172		$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{6}$	$-\chi\frac{1}{9}$
173		$-\frac{19}{48}$	$+\chi\frac{85}{48}$	$\frac{19}{144}$	$-\chi\frac{85}{144}$
174		$\frac{125}{48}$	$+\chi\frac{61}{48}$	$-\frac{125}{144}$	$-\chi\frac{61}{144}$
175					
176					
177		-3		$\frac{1}{2}$	
178		$-2-5\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{4}{3}$	$+\chi\frac{1}{18}$
179		3		$-\frac{1}{2}$	
180		$2-5\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$-\chi\frac{1}{18}$
181					
182					
183		$-\frac{37}{4}$	$-\chi\frac{7}{12}$	$\frac{19}{12}$	$-\chi\frac{7}{36}$
184		14	$-\chi\frac{29}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$+\chi\frac{29}{9}$
185		0		0	
186		-6		$\frac{1}{2}$	

p	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
187	$\varepsilon_1'^2 \alpha_1 \beta_{-1}$		-3	0
188	$\varepsilon_1'^2 \alpha_{-1} \beta_1$		$\frac{21}{4}$	$\frac{14}{3\sqrt{3\mu}} + \chi \frac{31}{9\sqrt{3\mu}}$
189	$\varepsilon_1'^2 \alpha_{-1} \beta_{-1}$		$-\frac{21}{4}$	$\frac{14}{3\sqrt{3\mu}} + \chi \frac{31}{9\sqrt{3\mu}}$
190	$\varepsilon_1'^2 \alpha_1 \gamma_1$		0	0
191	$\varepsilon_1'^2 \alpha_1 \gamma_{-1}$		0	0
192	$\varepsilon_1'^2 \alpha_{-1} \gamma_1$		$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
193	$\varepsilon_1'^2 \alpha_{-1} \gamma_{-1}$		$-\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
194	$\varepsilon_1'^2 \alpha_1 \varepsilon'_{-1}$		0	0
195	$\varepsilon_1'^2 \alpha_{-1} \varepsilon'_{-1}$		»	»
196	$\varepsilon_1'^2 \beta_1 \gamma_1$		0	0
197	$\varepsilon_1'^2 \beta_1 \gamma_{-1}$		$6\sqrt{3\mu}$	2
198	$\varepsilon_1'^2 \beta_{-1} \gamma_1$		0	0
199	$\varepsilon_1'^2 \beta_{-1} \gamma_{-1}$		$6\sqrt{3\mu}$	-2
200	$\varepsilon_1'^2 \beta_1 \varepsilon'_{-1}$	$-21\sqrt{3\mu}$	$-21\sqrt{3\mu}$	-4
201	$\varepsilon_1'^2 \beta_{-1} \varepsilon'_{-1}$	$-21\sqrt{3\mu}$	$-21\sqrt{3\mu}$	4
202	$\varepsilon_1'^2 \gamma_1 \varepsilon'_{-1}$		0	0
203	$\varepsilon_1'^2 \gamma_{-1} \varepsilon'_{-1}$		0	0
204	$\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \beta_{-1}$		»	»
205	$\alpha_1 \alpha_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1}$		»	»
206	$\alpha_1 \alpha_{-1} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$		»	»
207	$\beta_1 \beta_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1}$		»	»
208	$\beta_1 \beta_{-1} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$		»	»
209	$\gamma_1 \gamma_{-1} \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}$		»	»
210	$\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \gamma_1$	$-\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2}$
211	$\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \gamma_{-1}$	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{2}$
212	$\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \varepsilon'_1$	$-\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$\frac{7}{2\sqrt{3\mu}} - \frac{111}{16} + \chi\left(\frac{31}{12\sqrt{3\mu}} + \frac{5}{32}\right)$	$\frac{7}{6\sqrt{3\mu}} + \chi \frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
213	$\alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \varepsilon'_{-1}$	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{2\sqrt{3\mu}} + \frac{111}{16} + \chi\left(\frac{31}{12\sqrt{3\mu}} - \frac{37}{32}\right)$	$-\frac{7}{6\sqrt{3\mu}} + \chi \frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$

p	X'_p.	X_p.		A_p	
187		6		$-\frac{1}{2}$	
188		$-\frac{7}{2}$	$-i\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$-i\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
189		$\frac{7}{2}$	$+i\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$-i\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
190					
191					
192					
193					
194		0		0	
195		$\frac{9}{4}$		$-\frac{3}{4}$	
196					
197					
198					
199					
200	$21\sqrt{3\mu}$	$36\sqrt{3\mu}$		2	
201	$21\sqrt{3\mu}$	$36\sqrt{3\mu}$		-2	
202					
203					
204		$\frac{333}{16}$		$-\frac{111}{16}$	
205		$\frac{7}{8}$		$-\frac{7}{24}$	
206		-2		$\frac{2}{3}$	
207		$\frac{9}{2}$		$-\frac{3}{2}$	
208		-8		$\frac{8}{3}$	
209		0		0	
210					
211					
212	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{\sqrt{3\mu}}-\frac{55}{8}$	$-i\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}-\frac{233}{48}\right)$	$\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$+i\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$
213	$\frac{43}{16}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{7}{\sqrt{3\mu}}+\frac{55}{8}$	$+i\left(\frac{31}{6\sqrt{3\mu}}+\frac{137}{48}\right)$	$\frac{7}{6\sqrt{3\mu}}$	$-i\frac{31}{36\sqrt{3\mu}}$

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$.	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
214	$\alpha_1\alpha_{-1}\gamma_1\varepsilon'_1$		› $\quad +\chi\,\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \quad +\chi\,\frac{1}{9}$
215	$\alpha_1\alpha_{-1}\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$-\frac{5}{4} \quad -\chi\,\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4} \quad +\chi\,\frac{3}{4}$
216	$\beta_1\beta_{-1}\alpha_1\gamma_1$		$-3 \quad -\chi\,\frac{9}{8}$	$-1 \quad -\chi\,\frac{3}{8}$
217	$\beta_1\beta_{-1}\alpha_1\gamma_{-1}$		$-3 \quad -\chi\,\frac{9}{8}$	$3 \quad -\chi\,\frac{9}{8}$
218	$\beta_1\beta_{-1}\alpha_1\varepsilon'_1$		$-44 \quad -\chi\,\frac{58}{3}$	$-\frac{25}{6} \quad -\chi\,\frac{89}{72}$
219	$\beta_1\beta'_1\alpha_1\varepsilon'_{-1}$		»	»
220	$\beta_1\beta_{-1}\gamma_1\varepsilon'_1$		$-16 \quad -\chi\,\frac{29}{3}$	$-\frac{16}{3} \quad -\chi\,\frac{29}{9}$
221	$\beta_1\beta_{-1}\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$-4 \quad +\chi\,\frac{29}{3}$	$4 \quad -\chi\,\frac{29}{3}$
222	$\gamma_1\gamma_{-1}\alpha_1\beta_1$	$4\sqrt{3\mu}$	$\frac{3}{2} + \frac{19}{16}\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{3}{4} + \frac{13}{8}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{2} \quad +\chi\,\frac{1}{4}$
223	$\gamma_1\gamma_{-1}\alpha_1\beta_{-1}$	$4\sqrt{3\mu}$	$-\frac{3}{2} + \frac{19}{16}\sqrt{3\mu} \quad -\chi\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{8}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{2} \quad -\chi\,\frac{1}{4}$
224	$\gamma_1\gamma_{-1}\alpha_1\varepsilon'_1$		0	$-\frac{1}{6} \quad -\chi\,\frac{5}{36}$
225	$\gamma_1\gamma_{-1}\alpha_1\varepsilon'_{-1}$		»	»
226	$\gamma_1\gamma_{-1}\beta_1\varepsilon'_1$	$4\sqrt{3\mu}$	$4\sqrt{3\mu} \quad +\chi(1 - 2\sqrt{3\mu})$	$-\chi\,\frac{1}{3}$
227	$\gamma_1\gamma_{-1}\beta_1\varepsilon'_{-1}$	$-4\sqrt{3\mu}$	$-4\sqrt{3\mu} \quad -\chi(1 + 2\sqrt{3\mu})$	$\chi\,\frac{1}{3}$
228	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\alpha_1\beta_1$		-3	$-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}} \quad \chi\,\frac{31}{9\sqrt{3\mu}}$
229	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\alpha_1\beta_{-1}$		3	$-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}} \quad +\chi\,\frac{31}{9\sqrt{3\mu}}$
230	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\alpha_1\gamma_1$		0	0
231	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\alpha_1\gamma_{-1}$		0	0
232	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\beta_1\gamma_1$	$-21\sqrt{3\mu}$	0	0
233	$\varepsilon'_1\varepsilon'_{-1}\beta_1\gamma_{-1}$	$21\sqrt{3\mu}$	0	0
234	$\alpha_1\beta_1\gamma_1\varepsilon'_1$		12	$\frac{3}{2}$
235	$\alpha_1\beta_1\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$-7 \quad +\chi\,\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \quad +\chi\,\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
236	$\alpha_1\beta_1\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		$-\sqrt{3\mu} \quad +\chi\,\frac{1}{6}\sqrt{3\mu}$	$-\frac{1}{3} \quad +\chi\,\frac{1}{18}$

p.	X'_p.	X_p.		A_p.	
214					
215					
216					
217					
218		$\frac{129}{2}$	$+\chi\frac{241}{8}$	$-\frac{41}{6}$	$-\chi\frac{259}{72}$
219		$\frac{5}{4}$	$+\chi\frac{73}{6}$	$-\frac{5}{12}$	$-\chi\frac{73}{18}$
220					
221					
222	$-4\sqrt{3\mu}$	$-3+\frac{5}{8}\sqrt{3\mu}$	$-\chi\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\sqrt{3\mu}\right)$	$\frac{1}{2}$	$+\chi\frac{1}{4}$
223	$-4\sqrt{3\mu}$	$3+\frac{5}{8}\sqrt{3\mu}$	$+\chi\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\sqrt{3\mu}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$-\chi\frac{1}{4}$
224		$-\frac{1}{2}$	$-\chi\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$+\chi\frac{5}{36}$
225		3	$+\chi\frac{3}{4}$	-1	$-\chi\frac{1}{4}$
226	$-4\sqrt{3\mu}$	$-8\sqrt{3\mu}$	$-\chi(2-5\sqrt{3\mu})$		$\chi\frac{2}{3}$
227	$-4\sqrt{3\mu}$	$-8\sqrt{3\mu}$	$-\chi(2+5\sqrt{3\mu})$		$\chi\frac{2}{3}$
228		-1	$+\chi\frac{31}{6}$	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$-\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
229		1	$-\chi\frac{31}{6}$	$\frac{7}{3\sqrt{3\mu}}$	$-\chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
230					
231					
232					
233					
234					
235					
236					

p.	M_p.	$-Y'_p$ ou $-Z'_p$	$-Y_p$ ou $-Z_p$.	B_p ou C_p.
237	$\alpha_1\beta_1\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$7 - \chi\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
238	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_1\varepsilon'_1$		-12	$-\frac{3}{2}$
239	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_1\varepsilon'_{-1}$		$7 - \chi\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$
240	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_{-1}\varepsilon'_1$		$-\sqrt{3\mu} + \chi\frac{1}{6}\sqrt{3\mu}$	$\frac{1}{3} - \chi\frac{1}{18}$
241	$\alpha_1\beta_{-1}\gamma_{-1}\varepsilon'_{-1}$		$-7 + \chi\frac{31}{6}$	$-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} + \chi\frac{31}{18\sqrt{3\mu}}$

p.	X'_p.	X_p.	A_p.

CHAPITRE III.

RETOUR A LA FORME KÉPLÉRIENNE.

Mouvement non troublé. — Dans les équations du mouvement faisons

$$\mu = 0,$$

la fonction de force $n'^2 a'^2 V$ se réduit à

$$\frac{n'^2 a'^3}{r} = \frac{f(m_0 + m')}{r}.$$

Tout se passe comme si la planète n'était soumise qu'à l'action du Soleil dont la masse serait non plus m_0 mais $m_0 + m'$, ou encore comme si le coefficient d'attraction était devenu

$$\frac{f}{1-\mu};$$

le mouvement est képlérien, mais il y a lieu de modifier les éléments elliptiques usuels, comme on le verra au Chapitre suivant. Ces nouveaux éléments qui définissent le mouvement non troublé seront représentés par les notations habituelles

$$a, \quad n, \quad \varepsilon = \sin\varphi, \quad \varpi, \quad j, \quad \theta,$$

avec

$$n^2 a^3 = n'^2 a'^3 = \frac{f}{1-\mu}.$$

Soient en outre l, M, c, v la longitude moyenne, l'anomalie moyenne, l'équation du centre et la longitude dans l'orbite,

$$M = l - \varpi, \qquad v = l + c.$$

Nous montrerons qu'il y a identité entre le mouvement que nous venons de définir et celui qui résulte des développements de ξ, η, ζ dans lesquels on fait $\mu = 0$. Cette seconde forme est cependant moins générale que la première, elle n'a de valeur en effet que si les développements sont convergents, c'est-à-dire si la planète est suffisamment voisine d'un centre de libration.

Expressions de ξ, η, ζ en fonction des éléments elliptiques et de la seule variable v'. — On a par définition

$$\begin{aligned}
1+\xi &= x\cos(v'+\psi)+y\sin(v'+\psi),\\
i\eta &= x\sin(v'+\psi)-y\cos(v'+\psi),\\
i\zeta &= -z.
\end{aligned}$$

Toujours avec les notations du Chapitre I, mais X, Y, Z étant les coordonnées de la planète dans le mouvement non troublé, on a les expressions classiques

$$\begin{aligned}
X &= r[\cos\theta\cos(v-\theta)-\sin\theta\sin(v-\theta)\cos j] = r'x,\\
Y &= r[\sin\theta\cos(v-\theta)+\cos\theta\sin(v-\theta)\cos j] = r'y,\\
Z &= r\ \sin(v-\theta)\sin j \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = r'z;
\end{aligned}$$

d'où les formules

$$\begin{aligned}
1+\xi &= \rho\left[\cos(v'+\psi-v)-2\sin(v-\theta)\sin(v'+\psi-\theta)\sin^2\frac{j}{2}\right],\\
\frac{\eta}{i} &= \rho\left[\sin(v'+\psi-v)+2\sin(v-\theta)\cos(v'+\psi-\theta)\sin^2\frac{j}{2}\right],\\
\frac{\zeta}{i} &= \rho\ \sin(v-\theta)\sin j.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\cos(l-\varpi)=h_1, &&\sin\frac{j}{2}\cos(l-\theta)=p_1,\\
&i\varepsilon\sin(l-\varpi)=k_1, &&i\sin\frac{j}{2}\sin(l-\theta)=q_1,\\
&\frac{a}{a'}=e^{\delta}, &&l=v'+\psi+\frac{\lambda}{i};
\end{aligned}$$

et remarquons que

$$\begin{aligned}
v'+\psi-v &= -c-\frac{\lambda}{i},\\
v'+\psi-\theta &= l-\theta-\frac{\lambda}{i},\\
v-\theta &= l-\theta+c;
\end{aligned}$$

les formules ci dessus deviennent

$$
\begin{aligned}
1+\xi &= \rho\cos c[(1+2q_1^2)\operatorname{ch}\lambda - 2p_1q_1\operatorname{sh}\lambda] + i\rho\sin c[(1-2p_1^2)\operatorname{sh}\lambda + 2p_1q_1\operatorname{ch}\lambda],\\
\eta &= \rho\cos c[(1+2q_1^2)\operatorname{sh}\lambda - 2p_1q_1\operatorname{ch}\lambda] + i\rho\sin c[(1-2p_1^2)\operatorname{ch}\lambda + 2p_1q_1\operatorname{sh}\lambda],\\
\zeta &= \rho\cos c\left(2q_1\sqrt{1-p_1^2+q_1^2}\right) \qquad + i\rho\sin c\left(2p_1\sqrt{1-p_1^2+q_1^2}\right).
\end{aligned}
$$

Développons ces formules en considérant que p_1, q_1 et λ sont du même ordre de grandeur, il vient

$$
\begin{aligned}
1+\xi = {} & \rho\cos c\left(1+\frac{\lambda^2}{2}+2q_1^2-2p_1q_1\lambda+q_1^2\lambda^2+\frac{\lambda^4}{24}\right)\\
& + i\rho\sin c\left(\lambda+2p_1q_1+\frac{\lambda^3}{6}-2p_1^2\lambda+p_1q_1\lambda^2\right)\\
\eta = {} & \rho\cos c\left(\lambda-2p_1q_1+\frac{\lambda^3}{6}-2q_1^2\lambda-p_1q_1\lambda^2\right)\\
& + i\rho\sin c\left(1+\frac{\lambda^2}{2}-2p_1^2+2p_1q_1\lambda-p_1^2\lambda^2+\frac{\lambda^4}{24}\right),\\
\zeta = {} & \rho\cos c(2q_1-q_1p_1^2+q_1^3)\\
& + i\rho\sin c(2p_1+p_1q_1^2-p_1^3).
\end{aligned}
$$

Il reste à exprimer $\rho\cos c$, $\rho\sin c$ en fonction de h_1 et de k_1; les développements de départ de ceux de c et de r

$$
\begin{aligned}
c = {} & 2\varepsilon\sin M+\frac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2M\\
& + \frac{\varepsilon^3}{12}(13\sin 3M - 3\sin M) + \frac{\varepsilon^4}{96}(103\sin 4M - 44\sin 2M)+\ldots,\\
r = a\Big[& 1-\varepsilon\cos M-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M-1)\\
& - \frac{\varepsilon^3}{8}(3\cos 3M-3\cos M)-\frac{\varepsilon^4}{6}(2\cos 4M-2\cos 2M)+\ldots\Big],
\end{aligned}
$$

dont on déduit successivement les développements

$$
\begin{aligned}
\cos c &= 1+2k_1^2+5h_1k_1^2+\frac{10}{3}k_1^4+\frac{73}{8}h_1^2k_1^2+\ldots,\\
i\sin c &= 2k_1+\frac{5}{2}h_1k_1+3k_1h_1^2+\frac{8}{3}k_1^3+\frac{27}{8}k_1h_1^3+\frac{245}{24}h_1k_1^3+\ldots,\\
r &= a\left[1-h_1-k_1^2-\frac{3}{2}h_1k_1^2-2h_1^2k_1^2-\frac{2}{3}k_1^4+\ldots\right],\\
r\cos c &= a\left(1-h_1+k_1^2+\frac{3}{2}h_1k_1^2+\frac{17}{8}h_1^2k_1^2+\frac{2}{3}k_1^4+\ldots\right),\\
ir\sin c &= a\left(2k_1+\frac{1}{2}h_1k_1+\frac{1}{2}h_1^2k_1+\frac{2}{3}k_1^3+\frac{3}{8}h_1^3k_1+\frac{49}{24}h_1k_1^3+\ldots\right),
\end{aligned}
$$

et ceux de $1 + \xi$, η, ζ dans lesquels l'indice 1 a été supprimé pour une raison qui sera donnée plus loin.

$$
1 + \xi = \frac{a}{r'} \left[\begin{array}{l}
1 \\
- h \\
+ k^2 + 2q^2 + 2\lambda k + \frac{1}{2}\lambda^2 \\
+ \frac{3}{2} k^2 h - 2q^2 h + 4pqk + \lambda\left(\frac{1}{2} hk - 2pq\right) - \frac{1}{2}\lambda^2 h \\
+ \frac{2}{3} k^4 + \frac{17}{8} h^2 k^2 + 2q^2 k^2 + pqhk + \lambda\left(\frac{2}{3} k^3 + \frac{1}{2} h^2 k - 4p^2 k + 2pqh\right) \\
+ \lambda^2\left(\frac{1}{2} k^2 + q^2\right) + \frac{1}{3}\lambda^3 k + \frac{1}{24}\lambda^4
\end{array} \right]
$$

$$
\eta = \frac{a}{r'} \left[\begin{array}{l}
2k + \lambda \\
+ \frac{1}{2} hk - 2pq - \lambda h \\
+ \frac{2}{3} k^3 + \frac{1}{2} h^2 k - 4p^2 k + 2pqh + \lambda(k^2 + 2q^2) + \lambda^2 k + \frac{1}{6}\lambda^3 \\
+ \frac{3}{8} h^3 k + \frac{49}{24} k^3 h - p^2 hk - 2pqk^2 + \lambda\left(\frac{3}{2} k^2 h - 2q^2 h + 4pqk\right) \\
+ \lambda^2\left(\frac{1}{4} hk - pq\right) - \frac{1}{6}\lambda^3 h
\end{array} \right]
$$

$$
\zeta = \frac{a}{r'} \left[\begin{array}{l}
2q \\
+ 4pk - 2qh \\
+ q^3 - p^2 q + phk + 2qk^2 \\
- 2p^3 k - q^3 h + p^2 qh + 2q^2 pk + \frac{4}{3} pk^3 + ph^2 k + 3qk^2 h
\end{array} \right]
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
h &= \varepsilon \cos(v' + \psi - \varpi), & p &= \sin\frac{j}{2}\cos(v' + \psi - \theta), \\
k &= i\varepsilon \sin(v' + \psi - \varpi), & q &= i\sin\frac{j}{2}\sin(v' + \psi - \theta),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h' &= \varepsilon' \cos v', \\
k' &= i\varepsilon' \sin v'.
\end{aligned}
$$

Le développement de r' est obtenu en remplaçant dans celui de r respectivement a par a', h_1 par h', k_1 par k' et l'on en déduit celui de $\frac{1}{r'}$

$$
\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'}(1 + h' + h'^2 - k'^2 + h'^3 - h'k'^2 + h'^4 + k'^4 - 2h'^2 k'^2 + \ldots).
$$

On a d'autre part

$$l - \varpi = v' + \psi - \varpi + \frac{\lambda}{i},$$

$$l - \theta = v' + \psi - \theta + \frac{\lambda}{i},$$

d'où

$$\cos(l - \varpi) = \cos(v' + \psi - \varpi)\left(1 + \frac{\lambda^2}{2} + \ldots\right) - \frac{1}{i}\sin(v' + \psi - \varpi)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{6} + \ldots\right),$$

. . . .

et les anciennes notations h_1, k_1, p_1, q_1 s'expriment en fonction des nouvelles

$$h_1 = h + \lambda k + \frac{1}{2}\lambda^2 h + \frac{1}{6}\lambda^3 k, \qquad p_1 = p + \lambda q + \frac{1}{2}\lambda^2 p + \frac{1}{6}\lambda^3 q,$$

$$k_1 = k + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 k + \frac{1}{6}\lambda^3 h, \qquad q_1 = q + \lambda p + \frac{1}{2}\lambda^2 q + \frac{1}{6}\lambda^3 p.$$

Pour effectuer cette transformatien dans les expressions de $1 + \xi$, η, ζ, il faut :

1° y supprimer l'indice 1 partout où il figure, ce qui a déjà été fait;
2° y introduire de nouveaux termes en λ.

Nous donnons ci-dessous ces nouveaux termes auxquels nous joignons ceux qui résultent du facteur $\frac{1}{r'}$

$$1 + \xi = \frac{a}{a'}\left[\begin{array}{l}
\quad\text{[la partie entre crochets du développement de } 1+\xi \text{ qui précède]} \\
+ h' \\
+ h'^2 - k'^2 - hh' - \lambda k \\
+ h'^3 - hh'^2 - k'^2 h' + k'^2 h + k^2 h' + 2q^2 h' + \lambda(h'k + 2hk + 4pq) \\
+ \frac{1}{2}\lambda^2(3h + h') \\
+ h'^4 - h'^3 h + k'^4 - k^2 k'^2 - 2h'^2 k'^2 + hh'k'^2 + h'^2 k^2 + \frac{3}{2}hh'k^2 \\
+ 2q^2 h'^2 - 2q^2 hh' - 2q^2 k'^2 + 4pqkh' \\
\quad + \lambda\left(\frac{3}{2}k^3 - 3k'^2 k + h'^2 k + \frac{5}{2}hh'k + 3h^2 k + 4p^2 k + 2q^2 k + 2pqh'\right) \\
\quad + \lambda^2\left(\frac{1}{2}h'^2 + \frac{3}{2}h^2 + hh' + \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k'^2\right) \\
\quad + \frac{1}{3}\lambda^3 k
\end{array}\right]$$

$$\eta = \frac{a}{a'}\left[\begin{array}{l}
\quad\text{[la partie entre crochets du développement de } \eta \text{ qui précède]} \\
+ 2h'k + \lambda(h' + 2h) \\
- 2kk'^2 + 2h'^2k + \frac{1}{2}hh'k - 2pqh' \\
\quad + \lambda\left(h'^2 + hh' - k'^2 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}k^2 - 2p^2 - 2q^2\right) \\
+ 2h'^3k + \frac{1}{2}hh'^2k + \frac{1}{2}h^2h'k + \frac{2}{3}k^3h' - 2kk'^2h' - \frac{1}{2}kk'^2h - 4p^2h'k \\
+ 2pqhh' - 2pqh'^2 + 2pqk'^2 \\
\quad + \lambda\left(h'^3 + \frac{1}{2}h^3 + h'^2h + \frac{1}{2}h^2h' - h'k'^2\right. \\
\qquad\qquad \left. + \frac{3}{2}k^2h' + 3k^2h - k'^2h - 2p^2h + 2q^2h - 6pqk\right) \\
+ \lambda^2(h'k + 3hk) + \lambda^3\left(\frac{5}{6}h + \frac{1}{6}h'\right)
\end{array}\right]$$

$$\zeta = \frac{a}{a'}\left[\begin{array}{l}
\quad\text{[la partie entre crochets du développement de } \zeta \text{ qui précède]} \\
+ 2qh' + 2\lambda p \\
+ 4ph'k + 2qh'^2 - 2qhh' - 2qk'^2 + \lambda(2ph' + 2ph + 2qk) + \lambda^2 q \\
+ q^3h' - p^2qh' + 4pkh'^2 + phh'k - 4pkk'^2 + 2qh'^3 - 2qhh'^2 \\
- 2qh'k'^2 + 2qhk'^2 + 2qk^2h' \\
+ \lambda(-p^3 + pq^2 + 2ph'^2 + ph^2 + 2phh' - 2pk'^2 + 3pk^2 + 2qkh' + 5qkh) \\
+ \lambda^2(2pk + qh' + 2qh) + \frac{1}{3}\lambda^3 p
\end{array}\right]$$

Il reste à exprimer λ en fonction des éléments elliptiques et de v', rappelons que

$$\lambda = \iota(l - v' - \psi).$$

L'origine du temps étant toujours le moment où Jupiter passe au périhélie, on a le développement bien connu

$$v' = n't - 2\left(\varepsilon' \sin v' - \frac{3}{8}\varepsilon'^2 \sin 2v' \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\varepsilon'^3 \sin 3v' - \frac{5}{64}\varepsilon'^4 \sin 4v' - \frac{1}{16}\varepsilon'^4 \sin 2v' + \ldots\right)$$

dont on déduit

$$nt - v' = \left(\frac{n'}{n} - 1\right) v' - 2\frac{n}{n'}(\varepsilon' \sin v' - \ldots).$$

Soient

$$l = l_0 + nt, \qquad 2\mathrm{k} = l_0 - \psi,$$

on obtient, après développement de $\frac{n}{n'} - e^{-\frac{1}{2}\delta}$,

$$\lambda = 2\mathrm{k} + i\left(-\frac{3}{2}\delta + \frac{9}{8}\delta^2 - \frac{9}{16}\delta^3\right)v' - 2\left(1 - \frac{3}{2}\delta + \frac{9}{8}\delta^2 - \frac{9}{16}\delta^3\right)$$
$$\times\left(k' - \frac{3}{4}h'k' + \frac{1}{6}k'^3 + \frac{1}{2}h'^2k' - \frac{7}{16}h'^3k' - \frac{3}{16}k'^3h'\right) + \ldots.$$

Telle est l'expression de λ qu'il y a lieu de porter dans $1 + \xi$, η, ζ, on y remplacera en outre $\frac{a}{a'}$ par son développement

$$\frac{a}{a'} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^4}{24}.$$

Nous avons représenté ξ, η, ζ par deux systèmes de développements contenant la seule variable v', nous démontrerons que ces développements sont identiques et que les six constantes d'intégration du Chapitre I peuvent s'exprimer en fonction des éléments elliptiques du mouvement non troublé, mais il est nécessaire auparavant de se rendre compte de la convergence de ces développements.

Convergence des développements du Chapitre I. — Chaque terme des développements du Chapitre II comprend trois facteurs : un coefficient numérique fini qui ne tend pas vers zéro, un monome $\alpha^p\beta^q\gamma^r$, un sinus ou un cosinus. La convergence de tels développements dépend des valeurs attribuées à α, β, γ; ils sont convergents quand ces quantités sont suffisamment petites pour rendre un terme quelconque inférieur, en valeur absolue, au terme correspondant d'une série convergente; ils sont divergents quand l'une de ces quantités devient égale à 1 puisque le terme général ne tend pas vers zéro.

Les développements établis fournissent justement les valeurs de ces quantités et comme nous ne recherchons ici que des valeurs approximatives, il nous suffira de les déduire des termes du premier ordre. En laissant subsister $\sqrt{\mu}$ dans ces termes, nous avons obtenu d'une part

$$\xi = -\alpha\cos F - 2\sqrt{3\mu}\,\beta\cos G,$$

$$\frac{\eta}{i} = \quad 2\alpha\sin F + 2\beta\sin G,$$

$$\frac{\zeta}{i} = \quad 2\gamma\sin H$$

avec

$$F = F_0 + v', \qquad G = G_0 + \frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\, v', \qquad H = H_0 + v';$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \xi &= -(h - h') + \delta, \\ \eta &= 2(k - k') + 2\mathrm{k} - \frac{3}{2} i \delta v', \\ \zeta &= 2q. \end{aligned}$$

Identifions ces deux systèmes après avoir remplacé dans le premier

$$\begin{aligned} &\cos G \quad \text{par} \quad \cos G_0, \\ &\sin G \quad \text{par} \quad \sin G_0 + \frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\, v' \cos G_0; \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} &\alpha \cos F = h - h', & & & \delta &= -2\sqrt{3\mu}\,\beta \cos G_0, \\ &i\alpha \sin F = k - k', & i\beta \sin G_0 &= \mathrm{k}, & -\frac{3}{2}\delta &= 3\sqrt{3\mu}\,\beta \cos G_0, \\ &i\gamma \sin H = q. \end{aligned}$$

On voit que α et γ sont respectivement du même ordre de grandeur que ε et $\sin \frac{J}{2}$, par contre

$$\beta \cos G_0 = -\frac{\delta}{2\sqrt{3\mu}},$$

et comme on peut écrire dans une première approximation $\delta = \frac{2}{3}\frac{n - n'}{n'}$, on a sensiblement

$$\beta \cos G_0 = \frac{n - n'}{3\sqrt{3\mu}\, n'}.$$

Il est nécessaire pour que les développements soient convergents que $|\beta \cos G_0|$ soit inférieur à 1; c'est-à-dire que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\left| \frac{n - n'}{n} \right| < 3\sqrt{3\mu}.$$

Si l'on fait tendre μ vers zéro les développements du Chapitre II, sous leur forme trigonométrique, ne peuvent rester convergents que si en même temps on fait tendre n vers n'.

Il était facile de le prévoir.

C'est en effet l'action de Jupiter qui maintient la petite planète au voisinage d'un centre de libration ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$), cette action ayant disparu, la petite planète d'une part, le centre de libration d'autre part, décrivent autour du Soleil des orbites elliptiques (dont les moyens mouvements sont respectivement n et n'); s'ils ne sont pas voisins la théorie analytique du Chapitre I, qui utilise des développements suivant les puissances de ξ, η, ζ, est sans valeur; s'ils sont voisins, ils restent voisins :

1° pendant une période de temps illimitée si $n = n'$;
2° pendant une période de temps limitée si $n \neq n'$.

Dans ces deux cas, la théorie analytique fournit le mouvement de la petite planète.

Dans le premier cas,

$$\delta = 0,$$

et nous ferons l'identification complète des deux systèmes de développements de ξ, η, ζ.

Dans le second cas,

$$\delta \neq 0,$$

la même identification ne peut constituer une vérification. Si on laisse subsister δ dans un système, il faut laisser $\sqrt{\mu}$ dans l'autre, leur comparaison permettrait seulement de séparer dans les développements du Chapitre II les termes en $\sqrt{\mu}$ qui proviennent de la différence des moyens mouvements $n - n'$ et ceux qui sont effectivement des perturbations dues à Jupiter.

Les résultats obtenus plus haut montrent enfin dans quelles limites la théorie analytique est susceptible d'une application concrète. Si l'on admet *a priori* qu'il faut avoir

$$|\beta| < 0,3,$$

les éléments osculateurs de la petite planète devront vérifier les deux inégalités :

$$|l_0 - \psi| < 34^\circ, \qquad |n - n'| < 16''.$$

Ces conditions sont remplies par toutes les planètes troyennes actuellement connues.

Forme définitive des développements de ξ, η, ζ. — Si nous faisons $\delta = 0$, on a

$$\frac{a}{a'} = 1,$$

$$\lambda = 2\mathrm{k} - 2k' + \frac{3}{2}h'k' - \frac{1}{3}k'^3 - h'^2k' + \frac{7}{8}h'^3k' + \frac{3}{8}k'^3h' + \ldots.$$

Pour effectuer cette nouvelle transformation dans les expressions de $1 + \xi$, η, ζ, il faut supprimer le facteur $\frac{a}{a'}$ et

1° y remplacer λ par $2(\mathrm{k} - k')$;

2° y introduire de nouveaux termes que nous donnons ci-dessous :

$$1 + \xi = \left[\begin{array}{l} \text{[la partie entre crochets du développement de } 1+\xi \text{ qui précède]} \\ -3k'^2h' + \frac{3}{2}kk'h' + 3\mathrm{k}h'k' \\ + \frac{2}{3}k'^4 - \frac{1}{3}kk'^3 + \frac{1}{8}h'^2k'^2 + \frac{1}{2}h'^2k'k + \frac{15}{4}h'hk'k - 6h'hk'^2 + 3pqh'k' \\ + \mathrm{k}\left(-\frac{2}{3}k'^3 + h'^2k' + 6h'hk'\right) \end{array}\right]$$

$$\eta = \left[\begin{array}{l} \text{[la partie entre crochets du développement de } \eta \text{ qui précède]} \\ -\frac{1}{2}h'k' - 2hk' + 2\mathrm{k}(h' + h) \\ -\frac{1}{3}k'^3 + \frac{1}{2}h'^2k' + \frac{3}{2}hh'k' \\ + \frac{11}{8}h'^3k' + \frac{1}{2}h'^2hk' + \frac{3}{4}h^2h'k' + \frac{37}{24}k'^3h' - \frac{1}{3}k'^3h - 6k'^2kh' \\ + \frac{9}{4}k^2k'h' - 3p^2h'k' - 6\mathrm{k}k'^2h' + 3\mathrm{k}^2h'k' \end{array}\right]$$

$$\zeta = \left[\begin{array}{l} \text{[la partie entre crochets du développement de } \zeta \text{ qui précède]} \\ + 3ph'k' \\ - \frac{2}{3}pk'^3 + ph'^2k' + 3phh'k' - 6qk'^2h' + 3qkk'h' + 6\mathrm{k}qh'k' \end{array}\right]$$

Nous écrirons les développements définitifs de ξ, η, ζ en faisant apparaître les différences $h - h'$, $k - k'$.

$$\xi = \left[\begin{array}{l}
-(h-h') \\
-h'(h-h') + (k-k')^2 + 2q^2 - 2\mathrm{k}[k' - (k-k')] + 2\mathrm{k}^2 \\
-h'^2(h-h') + \frac{3}{2}k'^2(h-h') - \frac{1}{2}k'(k-k')h' + \frac{5}{2}(k-k')^2 h' \\
+ \frac{3}{2}(k-k')^2(h-h') - 2k'(k-k')(h-h') - 2q^2(h-h') + 4pq(k-k') \\
+ \mathrm{k}[-2h'k' + 7h'(k-k') - 3(h-h')k' + 5(h-h')(k-k') + 4pq] \\
+ \mathrm{k}^2[6h' + 4(h-h')] \\
-h'^3(h-h') + \frac{2}{3}(k-k')^4 - \frac{5}{3}k'(k-k')^3 - 2k'^2(k-k')^2 \\
+ \frac{3}{2}h'(h-h')k'^2 - \frac{1}{2}h'^2k'(k-k') + \frac{37}{8}h'^2(k-k')^2 \\
+ \frac{23}{4}h'(h-h')(k-k')^2 - \frac{15}{3}h'(h-h')k'(k-k') + \frac{9}{8}(h-h')^2k'^2 \\
+ \frac{17}{8}(h-h')^2(k-k')^2 - \frac{11}{4}(h-h')^2k'(k-k') - 2q^2h'(h-h') \\
+ 2q^2(k-k')^2 + 5pqh'(k-k') - 3pqk'(h-h') + pq(h-h')(k-k') \\
+ \mathrm{k}\left[3k'^3 - 5k'^2(k-k') - 3k'(k-k')^2 + \frac{13}{3}(k-k')^3 - 3h'^2k' \right. \\
\qquad - 7h'(h-h')k' - 5(h-h')^2k' + 14h'^2(k-k') \\
\qquad + 7(h-h')^2(k-k') + 19h'(h-h')(k-k') \\
\qquad\qquad \left. - 4q^2k' - 4q^2(k-k') + 4pq(h-h') + 8pqh' \right] \\
+ \mathrm{k}^2[12h'^2 + 16h'(h-h') + 6(h-h')^2 - 6k'^2 + 8(k-k')^2 + 4q^2] \\
+ \mathrm{k}^3\left[\frac{8}{3}k' + \frac{16}{3}(k-k')\right] + \frac{2}{3}\mathrm{k}^4
\end{array}\right]$$

$$
= \eta \left[\begin{array}{l}
2(k-k') + 2\mathrm{k} \\[2ex]
+ \frac{5}{2} h'(k-k') + \frac{1}{2}(h-h')(k-k') - \frac{3}{2} k'(h-h') - 2pq + 2\mathrm{k}(2h' + h - h') \\[2ex]
+ \frac{2}{3}(k-k')^3 - 2k'^2(k-k') - k'(k-k')^2 + 3h'^2(k-k') - h'(h-h')k' \\[1ex]
+ \frac{3}{2} h'(h-h')(k-k') - \frac{1}{2}(h-h')^2 k' \\[1ex]
+ \frac{1}{2}(h-h')^2(k-k') - 4p^2(k-k') + 2pq(h-h') \\[1ex]
+ 2\mathrm{k}\left[\frac{5}{2} h'^2 - \frac{3}{2} k'^2 + 2h'(h-h') \right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}(h-h')^2 - k'(k-k') + \frac{3}{2}(k-k')^2 - 2p^2 \right] \\[1ex]
+ 4\mathrm{k}^2(k-k') + \frac{4}{3}\mathrm{k}^3 \\[2ex]
+ \frac{27}{8} h'^3(k-k') + \frac{13}{8} h'(h-h')^2(k-k') - \frac{19}{8} h'^2(h-h')k' \\[1ex]
+ \frac{21}{8} h'^2(h-h')(k-k') - \frac{13}{8} h'(h-h')^2 k' - \frac{5}{8}(h-h')^3 k' \\[1ex]
+ \frac{3}{8}(h-h')^3(k-k') - \frac{23}{8} k'^2(k-k')h' - \frac{13}{8} k'(k-k')^2 h' \\[1ex]
+ \frac{65}{24}(k-k')^3 h' + \frac{15}{3} k'^3(h-h') + \frac{5}{8} k'^2(k-k')(h-h') \\[1ex]
- \frac{23}{8} k'(k-k')^2(h-h') + \frac{49}{24}(k-k')^3(h-h') \\[1ex]
- 5p^2 h'(k-k') + 2pqh'(h-h') - 2pq(k-k')^2 \\
+ \mathrm{k}[6h'^3 + 7h'^2(h-h') + 4h'(h-h')^2 + (h-h')^3 - 6k'^2 h' \\
\qquad - 3k'^2(h-h') - 4k'(k-k')h' - 8k'(k-k')(h-h') \\
\qquad + 12(k-k')^2 h' + 9(k-k')^2(h-h') \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 8p^2 h' - 4p^2(h-h') + 4pqk' - 4pq(k-k')] \\
+ \mathrm{k}^2[17h'(k-k') + 13(h-h')(k-k') - 3(h-h')k' - 4pq] \\
+ \mathrm{k}^3\left[\frac{20}{3} h' + \frac{16}{3}(h-h') \right]
\end{array} \right]
$$

$$\zeta = \left[\begin{array}{l}
2q \\
+ 4p(k-k') - 2q(h-h') + 4\mathrm{k}p \\
+ q^3 - p^2 q + 5ph'(k-k') - 3p(h-h')k' + p(h-h')(k-k') \\
- 2qh'(h-h') + 2q(k-k')^2 + 4\mathrm{k}[2ph' + p(h-h') - qk' + q(k-k')] \\
+ 4\mathrm{k}^2 q \\
- 2p^3(k-k') - q^3(h-h') - p^2 q(h-h') + 2q^2 p(k-k') \\
+ \frac{4}{3}p(k-k')^3 - 4pk'^2(k-k') - 2pk'(k-k')^2 + 6ph'^2(k-k') \\
- 2ph'(h-h')k' + 3ph'(h-h')(k-k') - p(h-h')^2 k' \\
+ p(h-h')^2(k-k') - 2qh'^2(h-h') + 3qk'^2(h-h') + 5q(k-k')^2 h' \\
- qk'(k-k')h' + 3q(k-k')^2(h-h') - 4qk'(k-k')(h-h') \\
+ \mathrm{k}[-2p^3 + 2q^2 p + 10ph'^2 + 8ph'(h-h') + 2p(h-h')^2 - 6pk'^2 \\
\qquad\qquad + 6p(k-k')^2 - 4pk'(k-k') - 4qh'k' + 14qh'(k-k') \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 6q(h-h')k' + 10q(h-h')(k-k')] \\
+ \mathrm{k}^2[8p(k-k') + 12qh' + 8q(h-h')] + \frac{8}{3}\mathrm{k}^3 p
\end{array}\right]$$

Méthode générale d'identification. — L'identification des termes du premier ordre a déjà été faite, voici comment elle sera poursuivie : Nous poserons

$$h - h' = \alpha\cos F + \Delta_1, \qquad k - k' = i(\alpha\sin F + \Delta'_1),$$
$$p = \gamma\cos H + \Delta_2, \qquad q = i(\gamma\sin H + \Delta'_2),$$
$$\mathrm{k} = i(\beta\sin G + \Delta_3),$$

avec

$$h' = \varepsilon'\cos\varphi', \qquad k' = i\varepsilon'\sin\varphi';$$

Δ_1, Δ'_1, ... représentant des termes d'ordre supérieur au premier en α, β, γ, ε'.

Nous porterons ces expressions dans les développements de ξ, η, ζ qui viennent d'être établis et nous montrerons qu'il est possible de déterminer les Δ de telle manière que :

1° les formules de transformation soient compatibles ;

2° ξ, η, ζ deviennent identiques aux développements du Chapitre II dans lesquels on fait $\mu = 0$ et que l'on trouvera sous forme réelle au Chapitre suivant.

Les quatre premières formules peuvent s'écrire :

$$\varepsilon \cos(v' + \psi - \varpi) - \varepsilon' \cos v' = \alpha \cos(F_0 + v') + \Delta_1.$$

$$\varepsilon \sin(v' + \psi - \varpi) - \varepsilon' \sin v' = \alpha \sin(F_0 + v') + \Delta'_1,$$

$$\sin\frac{J}{2} \cdot \cos(v' + \psi - \theta) = \gamma \cos(H_0 + v') + \Delta_2,$$

$$\sin\frac{J}{2} \cdot \sin(v' + \psi - \theta) = \gamma \sin(H_0 + v') + \Delta'_2,$$

k est par définition une constante, quand μ est nul G se confond avec G_0 et par conséquent pour que ces formules soient compatibles il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta_1 = V_1 \cos(N_1 + v'), \qquad \Delta'_1 = V_1 \sin(N_1 + v'),$$
$$\Delta_2 = V_2 \cos(N_2 + v'), \qquad \Delta'_2 = V_2 \sin(N_2 + v'),$$
$$\Delta_3 = V_3,$$

V_1, V_2, V_3, N_1, N_2 étant des constantes.

La détermination des Δ et l'identification des deux systèmes de développements ne constituent qu'une seule et même opération pour laquelle nous avons considéré de proche en proche les termes d'ordres successifs. Nous présenterons ici ce calcul comme une simple vérification en supposant connues *a priori* les expressions de Δ_1, Δ'_1, ... qui se trouvent au chapitre suivant.

On remarquera d'abord que ces expressions remplissent les conditions énoncées plus haut et ensuite que Δ_1, Δ'_1, Δ_2, Δ'_2 ne contiennent pas de terme du second ordre en α, β, γ, ε'; par conséquent on effectuera la transformation indiquée :

1° En remplaçant dans ξ, η ζ,

$h - h'$	par	$\alpha \cos F$,	$k - k'$	par	$i\alpha \sin F$,
p	»	$\gamma \cos H$,	q	»	$i\gamma \sin H$,
h'	»	$\varepsilon' \cos v'$,	k'	»	$i\varepsilon' \sin v'$,
			k	»	$i\beta \sin G$;

2° En ajoutant les termes que nous donnons ci-dessous :

$$\xi - \left[\begin{array}{l} \qquad \text{[la partie entre crochets du développement de } \xi \text{ qui précède]} \\ - \Delta_1 \\ - 2(\alpha \sin F + 2\beta \sin G - \varepsilon' \sin \varphi')\Delta_3 \\ - \varepsilon' \cos \varphi' \Delta_1 - 2(\alpha \sin F + \beta \sin G)\Delta'_1 - 4\gamma \sin H \Delta'_2 \\ - (5\alpha^2 \sin F \cos F + 4\gamma^2 \sin H \cos H + 8\alpha\beta \sin G \cos F + 7\alpha\varepsilon' \sin F \cos \varphi' \\ \qquad\qquad - 3\alpha\varepsilon' \sin \varphi' \cos F + 12\beta\varepsilon' \sin G \cos \varphi' - 2\varepsilon'^2 \sin \varphi' \cos \varphi')\Delta_3 \\ - 2(\Delta_3)^2 \end{array}\right]$$

$$\frac{\eta}{i} = \left[\begin{array}{l} \qquad \text{[la partie entre crochets du développement de } \eta \text{ divisée par } i\text{]} \\ + 2\Delta'_1 + 2\Delta_3 \\ + 2(\alpha \cos F + 2\varepsilon' \cos \varphi')\Delta_3 \\ + \left(\frac{1}{2}\alpha \sin F - \frac{3}{2}\varepsilon' \sin \varphi' + 2\beta \sin G\right)\Delta_1 \\ + \left(\frac{1}{2}\alpha \cos F + \frac{5}{2}\varepsilon' \cos \varphi'\right)\Delta'_1 - 2\gamma \sin H \Delta_2 - 2\gamma \cos H \Delta'_2 \\ + (\alpha^2 \cos^2 F - 3\alpha^2 \sin^2 F - 4\beta^2 \sin^2 G - 2\gamma^2 \cos^2 H - 8\alpha\beta \sin F \sin G \\ \qquad\qquad + 2\alpha\varepsilon' \sin F \sin \varphi' + 4\alpha\varepsilon' \cos F \cos \varphi' + 3\varepsilon'^2 \sin^2 \varphi' + 5\varepsilon'^2 \sin^2 \varphi')\Delta_3 \end{array}\right]$$

$$\frac{\zeta}{i} = \left[\begin{array}{l} \qquad \text{[la partie entre crochets du développement de } \zeta \text{ divisée par } i\text{]} \\ + 2\Delta'_2 \\ + 4\gamma \cos H \Delta_3 \\ - 2\gamma \sin H \Delta_1 + 4\gamma \cos H \Delta'_1 + 4(\alpha \sin F + \beta \sin G)\Delta_2 - 2\alpha \cos F \Delta'_2 \\ + 4(\alpha\gamma \cos H \cos F - \alpha\gamma \sin H \sin F - 2\beta\gamma \sin G \sin H \\ \qquad\qquad + \gamma\varepsilon' \sin H \sin \varphi' + 2\gamma\varepsilon' \cos H \cos \varphi')\Delta_3 \end{array}\right]$$

On obtient ainsi ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$ en fonction des quatre constantes α, β, γ, ε' et des quatre arguments F, G, H, φ'. Nous avons vérifié que ces nouvelles expressions étaient identiques aux développements fournis par la théorie analytique, elles contiennent cependant quelques termes du quatrième ordre qui n'avaient pas été calculés et d'autre part G correspond à l'argument G″ du Chapitre II.

La longueur des calculs ne nous a pas permis de les publier complètement; nous donnons seulement à titre d'exemple ceux qui sont relatifs à quelques termes de différents ordres (les chiffres inscrits à gauche sont les numéros des monomes correspondant à ces termes).

$$\xi =$$

$$1 \quad \alpha \quad \left\{ -\cos F \right.$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix} \Big\} + \alpha\beta \; \left\{ \begin{aligned} & -2\sin F \sin G = \\ & \cos(F+G) - \cos(F-G) \end{aligned} \right.$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{matrix} 35 \\ 36 \\ 53 \end{matrix} \Bigg\} + \beta^2 \frac{\varepsilon'}{2} \left\{ \begin{aligned} & -12\sin^2 G \cos v' + \frac{14}{3}\cos v' = \\ & \quad 3\cos(2G+v') + 3\cos(2G-v') - \frac{4}{3}\cos v' \end{aligned} \right. \pm \sqrt{3} \left[\begin{aligned} & -\sin v' \cos 2G - 3\sin v' - \frac{31}{9}\sin v' = \\ & -\frac{1}{2}\sin(2G+v') + \frac{1}{2}\sin(2G-v') - \frac{58}{9}\sin v' \end{aligned} \right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{matrix} 112 \\ 113 \\ 122 \\ 183 \\ 206 \end{matrix} \left\} + \alpha^2 \frac{\varepsilon'^2}{4} \left\{ \begin{aligned} & -8\sin^2 v' \sin^2 F - \frac{37}{2}\sin^2 F \cos^2 v' \\ & +15\sin v' \cos v' \sin F \cos F - \frac{9}{2}\sin^2 v' \cos^2 F \\ & -\frac{55}{6}\cos v' \cos(2F-v') + \frac{13}{3}\cos^2 v' \\ & +\ 5\sin F \sin(2v'-F) \\ & +35\sin(F-v')\sin F \cos v' \\ & -15\sin(F-v')\sin v' \cos F - \frac{25}{2}\sin^2(F-v') = \\ & -\frac{55}{12}\cos(2F-2v') - \frac{49}{12}\cos 2F \\ & +\frac{19}{6}\cos 2v' + \frac{2}{3} \end{aligned} \right. \right. \pm \sqrt{3} \left[\begin{aligned} & -\frac{89}{18}\cos v' \sin(2F-v') + \frac{101}{18}\cos v' \sin v' \\ & \quad -\frac{29}{6}\sin v' \cos v' = \\ & \\ & -\frac{89}{36}\sin(2F-2v') - \frac{89}{36}\sin 2F \\ & \quad +\frac{7}{18}\sin 2v' \end{aligned} \right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\eta}{i} =$$

$$1 \Big\}\ \alpha\ \Big\}\ 2\sin F$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\right\} + \alpha^2 \left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\sin F\cos F = \\ \frac{1}{4}\sin 2F\end{matrix}\right. \qquad \pm\sqrt{3}\left[-\frac{29}{24}\right]\Bigg\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}30\\31\\51\end{matrix}\right\} + \beta^2\alpha \left\{\begin{matrix}-4\sin^2 G\sin F + 2\sin F = \\ \sin(2G+F) - \sin(2G-F)\end{matrix}\right. \qquad \pm\sqrt{3}\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}\cos 2G\cos F - \frac{3}{2}\cos F + \frac{3}{2}\cos F = \\ -\frac{1}{4}\cos(2G+F) - \frac{1}{4}\cos(2G-F)\end{matrix}\right]\Bigg\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}110\\111\\121\\162\\205\end{matrix}\right\} + \alpha^2\gamma^2 \left\{\begin{aligned} & 2\sin H\cos H\sin^2 F - \cos^2 H\sin F\cos F \\ & + \frac{1}{2}\cos F\left[\frac{53}{72}\sin(2H-F) + \sin F\right] \\ & + \frac{1}{2}\sin F\left[\frac{53}{72}\cos(2H-F) + \cos F\right] \\ & + \cos H\left[\frac{53}{144}\sin(2F-H) - \sin H\right] \\ & + \sin H\left[\frac{53}{144}\cos(2F-H) - \cos H\right] = \\ & - \frac{3}{8}\sin(2F+2H) + \frac{1}{8}\sin(2F-2H) \\ & + \frac{89}{144}\sin 2F - \frac{19}{144}\sin 2H \end{aligned}\right. \qquad \pm\sqrt{3}\left[\begin{aligned} & \cos F\left[\frac{61}{144}\cos(2H-F) - \frac{1}{12}\cos F\right] \\ & - \sin F\left[\frac{61}{144}\sin(2H-F) - \frac{1}{12}\sin F\right] \\ & - \cos H\left[\frac{61}{144}\cos(2F-H) + \frac{29}{12}\cos H\right] \\ & + \sin H\left[\frac{61}{144}\sin(2F-H) + \frac{29}{12}\sin H\right] \\ & + \frac{29}{12}\cos^2 H + \frac{1}{6}\cos^2 F - \frac{1}{2}\sin^2 F = \\ & - \frac{25}{144}\cos 2F - \frac{113}{144}\cos 2H + \frac{25}{24} \end{aligned}\right]\Bigg\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{ijk} =$$

$$3 \left\{ \quad \gamma \quad \right\{ 2 \sin H$$

$$\ldots\ldots$$

$$\begin{matrix} 12 \\ 13 \end{matrix} \Big\} + \alpha\gamma \left\{ \begin{aligned} & -2 \sin H \cos F + 4 \cos H \sin F = \\ & \sin(F+H) + 3 \sin(F-H) \end{aligned} \right.$$

$$\ldots\ldots$$

$$\begin{matrix} 33 \\ 34 \\ 52 \end{matrix} \Big\} + \beta^2\gamma \left\{ \begin{aligned} & -4 \sin^2 G \sin H + 2 \sin H = \\ & \sin(2G+H) - \sin(2G-H) \end{aligned} \right\} \pm \sqrt{3} \left[\begin{aligned} & -\cos 2G \cos H - 3 \cos H + 3 \cos H = \\ & -\frac{1}{2}\cos(2G+H) - \frac{1}{2}\cos(2G-H) \end{aligned} \right]$$

$$\ldots\ldots$$

$$\begin{matrix} 81 \\ 82 \\ 125 \\ 126 \end{matrix} \Big\} + \alpha^3\gamma \left\{ \begin{aligned} & -3 \sin H \cos F \sin^2 F + \cos H \sin F \cos^2 F \\ & -\frac{4}{3}\cos H \sin^3 F - \frac{3}{8}\sin H \cos F \\ & +\frac{53}{144}\cos F \sin(2F-H) - \cos F \sin H + \frac{3}{4}\cos H \sin F \\ & -\frac{53}{72}\sin F \cos(2F-H) + 2 \sin F \cos H = \\ & \frac{2}{3}\sin(3F+H) - \frac{77}{288}\sin(3F-H) \\ & -\frac{1}{16}\sin(F+H) + \frac{251}{96}\sin(F-H) \end{aligned} \right. \pm \sqrt{3} \left[\begin{aligned} & \frac{29}{24}\sin H \sin F - \frac{61}{144}\cos F \cos(2F-H) \\ & -\frac{29}{12}\cos F \cos H + \frac{29}{12}\cos F \cos H - \frac{29}{12}\cos(F+H) \\ & -\frac{61}{72}\sin F \sin(2F-H) - \frac{29}{6}\sin F \sin H = \\ & \frac{61}{288}\cos(3F-H) - \frac{29}{48}\cos(F+H) \\ & -\frac{235}{96}\cos(F-H) \end{aligned} \right]$$

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA MÉTHODE.

Éléments de départ. — Les données initiales sont :

1° Les éléments osculateurs de la Planète Troyenne à une date donnée :

$$M_1, \quad \varpi_1, \quad \theta_1, \quad j_1, \quad \varepsilon_1 = \sin\varphi_1, \quad n_1 \text{ ou } a_1 \qquad \text{avec } n_1^2 a_1^3 = f;$$

2° Les éléments moyens de Jupiter à la même date :

$$M', \quad \varpi', \quad \theta', \quad j', \quad \varepsilon' = \sin\varphi', \quad n' \text{ ou } a' \qquad \text{avec } n'^2 a'^3 = \frac{f}{1-\mu}.$$

Nous supposerons ces éléments rapportés au même plan de référence.

Des éléments osculateurs usuels de la petite planète, on déduit les éléments elliptiques du mouvement non troublé par des formules (¹) que nous rappelons.

On calcule d'abord l'anomalie vraie w_1 et successivement $[\varpi]$ par la formule

$$\operatorname{tang}([\varpi] = \varpi_1) = \frac{-\mu \sin w_1}{\varepsilon_1 - \mu(\varepsilon_1 + \cos w_1)},$$

w par

$$w - w_1 = \varpi_1 - [\varpi],$$

$\varepsilon = \sin\varphi$ par

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = -\mu\left[\varepsilon_1 + \cos\left(\frac{w + w_1}{2}\right)\operatorname{séc}\left(\frac{w - w_1}{2}\right)\right],$$

a par

$$\frac{a}{a_1} = (1-\mu)\frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi},$$

on a la vérification

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{1 - \mu\left(1 - \frac{2a_1}{r}\right)};$$

M se réduit de w et de ε.

(¹) ANDOYER, *Mécanique céleste* (Gauthier-Villars, 1923), t. I, p. 311.

Tous les éléments doivent être rapportés au plan de l'orbite de Jupiter, l'axe origine étant le rayon vecteur issu du Soleil et passant par le périhélie de cette planète, on calcule encore :

$\Delta\varpi'$ par la formule

$$\operatorname{tang}\Delta\varpi' = \frac{\sin j' \sin(\theta_1 - \theta')}{\cos j' \sin j_1 - \sin j' \cos j_1 \cos(\theta_1 - \theta')},$$

j par

$$\sin j = \frac{\sin j' \sin(\theta_1 - \theta')}{\sin \Delta\varpi'},$$

$[\theta]$ par

$$\sin([\theta] - \theta') = \frac{\sin j_1 \sin(\theta_1 - \theta')}{\sin j},$$

avec la vérification

$$\sin\frac{j}{2}\sin\left(\frac{[\theta]-\theta'}{2} + \frac{\Delta\varpi'}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{j+j'}{2}\right);$$

et enfin

$$\theta = [\theta] - \varpi',$$
$$\varpi = [\varpi] + [\theta] - \theta_1 + \varpi' - \Delta\varpi'.$$

Les éléments de départ sont pour Jupiter

$$M', \quad \varepsilon' = \sin\varphi', \quad n' \text{ ou } a' \qquad \text{avec } n'^2 a'^3 = \frac{f}{1-\mu},$$

pour la petite planète

$$M, \quad \varpi, \quad \theta, \quad j, \quad \varepsilon = \sin\varphi, \quad n \text{ ou } a \qquad \text{avec } n^2 a^3 = \frac{f}{1-\mu}.$$

Détermination des constantes approchées. — Dans ce paragraphe les lettres F, G, H et d'une manière générale toutes celles qui se rapportent à des quantités variables, bien que n'étant pas affectées d'un indice pour ne pas compliquer les notations, représentent les valeurs particulières de ces quantités à l'époque de l'osculation.

Soient v' l'anomalie vraie de Jupiter et $\psi = \mp 60^\circ$.

D'après une règle que nous avons toujours suivie quand figure un double signe, on adoptera le premier ou le second suivant que la longitude de la petite planète est plus petite ou plus grande que celle de Jupiter.

On calcule

$$h = \varepsilon\cos(\varphi' + \psi - \varpi), \qquad \frac{k}{i} = \varepsilon\sin(\varphi' + \psi - \varpi),$$

$$h' = \varepsilon'\cos\varphi', \qquad \frac{k'}{i} = \varepsilon'\sin\varphi',$$

$$\mathrm{h} = \frac{n - n'}{2g_0 n'}, \qquad \frac{\mathrm{k}}{i} = \frac{\mathrm{M} + \varpi - \mathrm{M}' - \psi}{2},$$

$$p = \sin\frac{J}{2}\cos(\varphi' + \psi - \theta), \qquad \frac{q}{i} = \sin\frac{J}{2}\sin(\varphi' + \psi - \theta),$$

et un premier système des constantes approchées α, β, γ, F, G, H

$$\operatorname{tang} F = \frac{\frac{1}{i}(k - k')}{h - h'}, \qquad \alpha = \frac{\frac{1}{i}(k - k')}{\sin F} = \frac{h - h'}{\cos F},$$

$$\operatorname{tang} G = \frac{\frac{1}{i}\mathrm{k}}{\mathrm{h}}, \qquad \beta = \frac{\frac{1}{i}\mathrm{k}}{\sin G} = \frac{\mathrm{h}}{\cos G},$$

$$\operatorname{tang} H = \frac{\frac{1}{i}q}{p}, \qquad \gamma = \frac{\frac{1}{i}q}{\sin H} = \frac{p}{\cos H}.$$

Ce système de valeurs sert de base au calcul de Δ_1, Δ'_1, Δ_2, Δ'_2, Δ_3 dont les expressions qui n'avaient pas encore été indiquées jouent un rôle important dans le Chapitre précédent :

$$\begin{array}{rll}
\Delta_1 = \alpha^3 & \Big\{ \frac{3}{16}\cos F & \pm\sqrt{3}\Big[-\frac{29}{48}\sin F \Big] \\
+\alpha^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ \frac{55}{12}\cos(2F - \varphi') - \frac{13}{6}\cos\varphi' & \Big[\frac{89}{36}\sin(2F - \varphi') - \frac{101}{36}\sin\varphi' \Big]\Big\} \\
+\beta^2\alpha & \Big\{ \cos F & \Big[-\frac{3}{4}\sin F \Big]\Big\} \\
+\beta^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ -\frac{14}{3}\cos\varphi' & \Big[\frac{31}{9}\sin\varphi' \Big]\Big\} \\
+\gamma^2\alpha & \Big\{ \frac{53}{72}\cos(2H - F) + \cos F & \Big[-\frac{61}{72}\sin(2H - F) + \frac{1}{6}\sin F \Big]\Big\} \\
+\gamma^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ -\frac{1}{3}\cos(2H - \varphi') & \Big[-\frac{1}{9}\sin(2H - \varphi') + \frac{2}{3}\sin\varphi' \Big]\Big\} \\
+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha & \Big\{ -\frac{5}{2}\cos(2\varphi' - F) & \Big\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rlll}
\Delta'_1 = \alpha^3 & \Big\{ \frac{3}{16}\sin F & \pm\sqrt{3}\Big[\frac{29}{48}\cos F & \Big]\Big\} \\
+\alpha^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ \frac{55}{12}\sin(2F-v') - \frac{13}{6}\sin v' & \Big[-\frac{89}{36}\cos(2F-v') + \frac{101}{36}\cos v' & \Big]\Big\} \\
+\beta^2\alpha & \Big\{ \sin F & \Big[\frac{3}{4}\cos F & \Big]\Big\} \\
+\beta^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ -\frac{14}{3}\sin v' & \Big[-\frac{31}{9}\cos v' & \Big]\Big\} \\
+\gamma^2\alpha & \Big\{ \frac{53}{72}\sin(2H-F) + \sin F & \Big[\frac{61}{72}\cos(2H-F) - \frac{1}{6}\cos F & \Big]\Big\} \\
+\gamma^2\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ -\frac{1}{3}\sin(2H-v') & \Big[\frac{1}{9}\cos(2H-v') - \frac{2}{3}\cos v' & \Big]\Big\} \\
+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha & \Big\{ -\frac{5}{2}\sin(2v'-F) & & \Big\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
\Delta_2 = \alpha^2\gamma & \Big\{ -\frac{53}{288}\cos(2F-H) + \frac{1}{2}\cos H & \pm\sqrt{3}\Big[-\frac{61}{288}\sin(2F-H) - \frac{29}{24}\sin H & \Big]\Big\} \\
+\beta^2\gamma & \Big\{ \cos H & \Big[-\frac{3}{2}\sin H & \Big]\Big\} \\
+\alpha\gamma\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ \cos H\cos(F-v') + \frac{1}{6}\cos(F+v'-H) & \Big[-\frac{1}{18}\sin(F-H+v') + \frac{1}{3}\cos(F-v')\sin H & \Big]\Big\} \\
+\gamma^3 & \Big\{ \frac{1}{2}\cos H & \Big[\frac{1}{3}\sin H & \Big]\Big\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
\Delta'_2 = \alpha^2\gamma & \Big\{ -\frac{53}{288}\sin(2F-H) + \frac{1}{2}\sin H & \pm\sqrt{3}\Big[\frac{61}{288}\cos(2F-H) + \frac{29}{24}\cos H & \Big]\Big\} \\
+\beta^2\gamma & \Big\{ \sin H & \Big[\frac{3}{2}\cos H & \Big]\Big\} \\
+\alpha\gamma\frac{\varepsilon'}{2} & \Big\{ \sin H\cos(F-v') + \frac{1}{6}\sin(F+v'-H) & \Big[\frac{1}{18}\cos(F-H+v') - \frac{1}{3}\cos(F-v')\cos H & \Big]\Big\} \\
+\gamma^3 & \Big\{ \frac{1}{2}\sin H & \Big[-\frac{1}{3}\cos H & \Big]\Big\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 = {} & \alpha^2 && \Big\{ && \pm\sqrt{3}\Big[-\frac{29}{48} && \Big]\Big\} \\
& + \beta^2 && \Big\{ && \Big[-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos 2G && \Big]\Big\} \\
& + \gamma^2 && \Big\{ && \Big[\frac{1}{6} && \Big]\Big\} \\
& + \alpha\frac{\varepsilon'}{2} && \Big\{ -\frac{5}{2}\sin(F - \varphi') && && \Big\} \\
& + \beta^3 && \Big\{ -\frac{5}{16}\sin 3G + \frac{1}{2}\sin G && && \Big\} \\
& + \alpha^2\beta && \Big\{ \frac{1}{2}\sin G && && \Big\} \\
& + \gamma^2\beta && \Big\{ \sin G && && \Big\} \\
& + \frac{\varepsilon'^2}{4}\beta && \Big\{ -8\sin G && && \Big\} \\
& + \alpha\beta\frac{\varepsilon'}{2} && \Big\{ -\frac{7}{4}\sin G\cos(F - \varphi') && \Big[\frac{31}{48}\cos(F + G - \varphi') - \frac{21}{16}\cos(F - G - \varphi') && \Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

On calcule un nouveau système de constantes d'après les mêmes formules, mais en remplaçant respectivement

$$
h - h', \qquad \frac{1}{i}(k - k'), \qquad \frac{\mathrm{k}}{i}, \qquad p, \qquad \frac{q}{i}
$$

par

$$
h - h' - \Delta_1, \qquad \frac{1}{i}(k - k') - \Delta'_1, \qquad \frac{\mathrm{k}}{i} - \Delta_3, \qquad p - \Delta_2, \qquad \frac{q}{i} - \Delta'_2\,;
$$

ces constantes serviront de base à une nouvelle détermination des Δ et ainsi de suite jusqu'à ce que celles-ci soient obtenues avec une précision suffisante.

Calcul des arguments. — On connaît déjà

$$
f_0 = 0{,}99675753, \qquad g_0 = 0{,}08046387, \qquad h_0 = 1.
$$

Les valeurs approchées de α, β, γ sont suffisamment précises pour permettre le calcul définitif de f, g, h par les formules

$$
\begin{aligned}
f &= f_0 + \mu\left(\frac{1473}{256}\alpha^2 - \frac{129}{16}\beta^2 + 12\gamma^2 + \frac{9}{4}\frac{\varepsilon'^2}{4}\right), \\
g &= g_0 + \sqrt{3}\mu\left(\frac{43}{32}\alpha^2 - \frac{9}{8}\beta^2 - 2\gamma^2 + \frac{21}{2}\frac{\varepsilon'^2}{4}\right), \\
h &= h_0 + 3\mu\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\right).
\end{aligned}
$$

L'indice 1 se rapportant à l'époque de l'osculation on a les valeurs approchées de F_1, G_1, H_1 dont on peut déduire

$$F_0 = F_1 - f v'_1, \qquad G_0 = G_1 - g v'_1, \qquad H_0 = H_1 - h v'_1$$

ou en évitant cet intermédiaire

$$F = F_1 + f(v' - v'_1), \qquad G = G_1 + g(v' - v'_1), \qquad H = H_1 + h(v' - v'_1).$$

Détermination des constantes définitives. — Supposons qu'on ne connaisse qu'un seul système d'éléments osculateurs, on calcule d'après ces éléments pour l'époque de l'osculation les valeurs numériques exactes

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1, \quad \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_1, \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_1, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)_1,$$

par les formules

$$1 + \xi_1 = \frac{r_1}{r'_1}\left[\cos(v'_1 + \psi - v_1) - 2\sin(v_1 - \theta)\sin(v'_1 + \psi - \theta)\sin^2\frac{j}{2}\right],$$

$$\frac{\eta_1}{i} = \frac{r_1}{r'_1}\left[\sin(v'_1 + \psi - v_1) + 2\sin(v_1 - \theta)\cos(v'_1 + \psi - \theta)\sin^2\frac{j}{2}\right],$$

$$\frac{\zeta_1}{i} = \frac{r_1}{r'_1}[\sin(v_1 - \theta)\sin j],$$

$$\begin{aligned} i\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_1 = {} & \left[\cos(v'_1 + \psi - v_1) - 2\sin(v_1 - \theta)\sin(v'_1 + \psi - \theta)\sin^2\frac{j}{2}\right]\frac{d}{dv'}\left(\frac{r}{r'}\right)_1 \\ & + \frac{r_1}{r'_1}\Bigg\{ -\sin(v'_1 + \psi - v_1)\left(1 - \frac{dv}{dv'}\right)_1 \\ & \qquad - 2\sin^2\frac{j}{2}\Bigg[\sin(v_1 - \theta)\cos(v'_1 + \psi - \theta) \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{dv}{dv'}\right)_1 \cos(v_1 - \theta)\sin(v'_1 + \psi - \theta)\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)_1 = {} & \left[\sin(v'_1 + \psi - v_1) + 2\sin(v_1 - \theta)\cos(v'_1 + \psi - \theta)\sin^2\frac{j}{2}\right]\frac{d}{dv'}\left(\frac{r}{r'}\right)_1 \\ & + \frac{r_1}{r'_1}\Bigg\{ \cos(v'_1 + \psi - v_1)\left(1 - \frac{dv}{dv'}\right)_1 \\ & \qquad + 2\sin^2\frac{j}{2}\Bigg[-\sin(v_1 - \theta)\sin(v'_1 + \psi - \theta) \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{dv}{dv'}\right)_1 \cos(v_1 - \theta)\cos(v'_1 + \psi - \theta)\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\tau}{d\zeta}\right)_1 = \left[\sin(v_1 - \theta)\frac{d}{dv'}\left(\frac{r}{r'}\right)_1 + \frac{r_1}{r'_1}\cos(v_1 - \theta)\left(\frac{dv}{dv'}\right)_1\right]\sin j,$$

avec

$$\left(\frac{dv}{dv'}\right)_1 = \frac{r'^2_1}{r^2_1}\,\frac{na^2\cos\varphi}{n'a'^2\cos\varphi'},$$

$$\frac{d}{dv'}\left(\frac{r}{r'}\right)_1 = \frac{1}{n'a'^2\cos\varphi'}[r'_1 an \operatorname{tang}\varphi \sin(v_1 - \varpi) - r_1 a' n' \operatorname{tang}\varphi' \sin v'_1].$$

On calcule en outre les développements, déduits de la théorie analytique, qui représentent les mêmes quantités (non affectées d'un indice) en attribuant aux constantes leurs valeurs approchées et l'on considère que les différences $\Delta\xi = \xi_1 - \xi, \Delta\frac{\eta}{i} = \frac{\eta_1}{i} - \frac{\eta}{i}, \ldots$ entre les deux systèmes de valeurs sont imputables aux termes du premier ordre. Ceux-ci sont réduits à

$$\xi = -\alpha\cos F - 0,1\beta\cos G, \qquad -i\frac{d\zeta}{d\tau} = -\alpha\sin F,$$

$$\frac{\eta}{i} = 2\alpha\sin F + 2\beta\sin G, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = 2\alpha\cos F + 0,16\beta\cos G,$$

$$\frac{\zeta}{i} = 2\gamma\sin H, \qquad \frac{d\xi}{d\tau} = 2\gamma\cos H;$$

mis sous la forme différentielle

$$\Delta\xi = \alpha\sin F\,\Delta F - \cos F\,\Delta\alpha + 0,1(\beta\sin G\,\Delta G - \cos G\,\Delta\beta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ils constituent six équations à six inconnues $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, ΔF, ΔG, ΔH dont la résolution fait connaître les corrections qu'il convient d'apporter aux six constantes d'intégration.

Si l'on dispose d'un certain nombre d'éléments osculateurs répartis sur une orbite complète, on pourrait par la même méthode obtenir autant de fois six équations en $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ..., qu'il y a de systèmes d'éléments, cependant on peut simplifier les calculs sans diminuer beaucoup la précision des résultats en ne conservant que les équations déduites des valeurs numériques de ξ, η et ζ.

Dans les deux cas, on ne s'en tiendra pas à une première approximation. Les corrections obtenues serviront à calculer de nouveau $\Delta\xi$, $\Delta\left(\frac{\eta}{i}\right)$, ··· dont on déduira ces mêmes corrections d'une manière plus précise et ainsi de suite.

Développements de ξ, η, ζ. — Les développements de ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$ sont écrits plus loin sous forme réelle; chaque ligne correspond à un monome dont le numéro est inscrit à gauche; on a groupé les termes qui contiennent le même facteur en α, β, γ, $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Les coefficients sont donnés : 1° sous forme de développements, 2° sous forme numérique avec

8 décimales pour le		1[er] ordre,		
5	»	2[e]	»	,
4	»	3[e]	»	,
3	»	4[e]	»	;

les coefficients du premier ordre ont été calculés par la méthode purement numérique, les autres sont déduits des développements.

Si la méthode est appliquée à la détermination d'un mouvement pendant un long espace de temps, il faut conserver les termes en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ qui permettent d'obtenir les coordonnées de la planète sous une forme entièrement périodique.

Dans ce cas on tiendra compte des coefficients qui sont entourés d'un trait et, sur la même ligne, on négligera les autres.

On fera l'inverse dans le cas contraire, d'une durée relativement courte, c'est-à-dire qu'on négligera les termes entourés d'un trait, ce qui a l'avantage d'augmenter la convergence des développements et, dans ce dernier cas, il convient en outre d'ajouter à $\frac{\eta}{i}$ le terme séculaire

$$\alpha\beta\frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{21}{2}\sqrt{3\mu}\cos F_0 + \frac{93}{4}\sqrt{\mu}\sin F_0\right)(\nu'\cos G - \nu'_1\cos G_1).$$

La durée pendant laquelle cette méthode est applicable dépend de la valeur numérique de ce terme dont on a négligé le carré, elle est toujours au moins égale à celle de plusieurs révolutions.

On passe du premier au second cas en modifiant seulement la constante G_0 à laquelle on ajoute

$$\frac{\alpha\varepsilon'}{2}\left(-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\sin F_0 + \frac{31}{9\sqrt{\mu}}\cos F_0\right).$$

Les termes marqués d'un astérisque sont déduits des développements du mouvement elliptique et non de la théorie analytique.

$$\xi =$$

(1)	α	$\left(-1+\frac{9}{8}\mu+\frac{2295}{128}\mu^2\right)$ $-0{,}99891034$	$\cos(F\ )$	$\pm\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu+\frac{27\sqrt{3}}{32}\mu^2\right)$ $+0{,}00062090$	$\sin(F\ )$
(2)	$+\beta$	$\left(-2\sqrt{3}\mu-\frac{11}{4}\mu\sqrt{3}\mu\right)$ $-0{,}10713060$	$\cos(G\ )$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu-\frac{3\sqrt{3}}{4}\mu^2\right)$ $+0{,}00082489$	$\sin(G\ )$
(4)	$+\alpha^2$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{31}{32}\mu\right)$ $+0{,}50092$	$\cos(2F\ )$	$\pm\left(\frac{21\sqrt{3}}{32}\mu\right)$ $+0{,}00108$	$\sin(2F\ )$
(7)		$\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\mu\right)$ $-0{,}50072$			
(5)	$+\beta^2$	$\left(1-\mu\right)$ $+0{,}99905$	$\cos(2G\ )$	$\pm\left(-3\sqrt{\mu}-\frac{593}{8}\mu\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}09484$	$\sin(2G\ )$
(8)		$\left(-1+\frac{13}{2}\mu\right)$ $-0{,}99380$			
(6)	$+\gamma^2$	$\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)$ $+0{,}99952$	$\cos(2H\ )$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)$ $-0{,}00083$	$\sin(2H\ )$
(9)		$\left(-1\right)$			
(10)	$+\alpha\beta$	$\left(1+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}-\frac{59}{16}\mu\right)$ $+1{,}03660$	$\cos(F+G\ )$	$\pm\left(\frac{29}{8}\sqrt{\mu}-\frac{291\sqrt{3}}{32}\mu\right)$ $+0{,}09693$	$\sin(F+G\ )$
(11)		$\left(-1+\frac{3}{4}\sqrt{3\mu}+\frac{59}{16}\mu\right)$ $-0{,}95636$	$\cos(F-G\ )$	$\pm\left(\frac{29}{8}\sqrt{\mu}+\frac{243\sqrt{3}}{32}\mu\right)$ $+0{,}12451$	$\sin(F-G\ )$
(14)	$+\alpha\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-1-\frac{33}{8}\mu\right)$ $-1{,}00394$	$\cos(F+\nu'\ )$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\mu\right)$ $+0{,}00021$	$\sin(F-\nu'\ )$
(15)		$\left(-1-\frac{9}{8}\mu-\frac{5697}{128}\mu^2\right)$ $-1{,}00111$	$\cos(F-\nu'\ )$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu-\frac{189\sqrt{3}}{32}\mu^2\right)$ $-0{,}00063$	$\sin(F+\nu'\ )$
(18)	$+\beta\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-2+2\sqrt{3}\mu-18\mu+\frac{317}{4}\mu\sqrt{3}\mu\right)$ $-1{,}90614$	$\cos(G+\nu'\ )$	$\pm\left(\sqrt{3}\mu-9\mu\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}00139$	$\sin(G+\nu'\ )$
(19)		$\left(2+2\sqrt{3}\mu+18\mu+\frac{317}{4}\mu\sqrt{3}\mu\right)$ $2{,}12820$	$\cos(G-\nu'\ )$	$\pm\left(\sqrt{3}\mu+9\mu\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}00192$	$\sin(G-\nu'\ )$

$\xi =$ *(suite)*.

(20)	$+\alpha^3$	$\left(\frac{3}{8}\right)$ $+0{,}3750$	$\cos(3F)$		
(23)		$\left(-\frac{9}{16}-\frac{471}{128}\mu\right)$ $-0{,}5660$	$\cos(F)$	$\pm\left(\frac{29\sqrt{3}}{16}+\frac{1711\sqrt{3}}{512}\mu\right)$ $+3{,}1449$	$\sin(F)$
(21)	$+\beta^3$	$\left(\frac{53}{24}\sqrt{3}\,\mu\right)$ $+0{,}1181$	$\cos(3G)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1201\sqrt{3}}{96}\right)$ $+0{,}8867$	$\sin(3G)$
(32)		$\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\right)$ $+0{,}0089$	$\cos(G)$	$\pm\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{265\sqrt{3}}{12}\mu\right)$ $+4{,}2936$	$\sin(G)$
(24)	$+\alpha^2\beta$	$\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\,\mu\right)$ $+1{,}2366$	$\cos(2F+G)$	$\pm\left(-\frac{29}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}1120$	$\sin(2F+G)$
(25)		$\left(-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\,\mu\right)$ $-1{,}2634$	$\cos(2F-G)$	$\pm\left(-\frac{29}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}1120$	$\sin(2F-G)$
(48)		$\left(-\frac{55}{24}\sqrt{3}\,\mu\right)$ $-0{,}1226$	$\cos(G)$	$\pm\left(\frac{29\sqrt{3}}{12}\right)$ $+4{,}1858$	$\sin(G)$
(28)	$+\alpha^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)$ $+0{,}2500$	$\cos(2F+v')$		
(29)		$\left(-\frac{29}{6}\right)$ $-4{,}8333$	$\cos(2F-v')$	$\pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{36}\right)$ $-4{,}2820$	$\sin(2F-v')$
(50)		$\left(\frac{13}{6}\right)$ $+2{,}1667$	$\cos(v')$	$\pm\left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)$ $+0{,}6736$	$\sin(v')$
(30)	$+\beta^2\alpha$	$\left(1-\frac{225}{32\sqrt{3}}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}8746$	$\cos(2G+F)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{19}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}3597$	$\sin(2G+F)$
(31)		$\left(1+\frac{225}{32\sqrt{3}}\sqrt{\mu}\right)$ $1{,}1254$	$\cos(2G-F)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5}{2}\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}5102$	$\sin(2G-F)$
(51)		$\left(-3-\frac{93}{16}\mu\right)$ $-3{,}0055$	$\cos(F)$	$\pm\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{1377\sqrt{3}}{32}\mu\right)$ $+3{,}8261$	$\sin(F)$

$\xi =$ (*suite*).

(35)	$+\beta^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(3-\frac{197}{8\sqrt{3}}\sqrt{\mu}\right.$ $+2,5609$	$\left.\right)\cos(2G+v')$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{79}{16}\sqrt{\mu}\right.$ $-0,7136$	$\left.\right)\sin(2G+v')$
(36)		$\left(3+\frac{197}{8\sqrt{3}}\sqrt{\mu}\right.$ $+3,4391$	$\left.\right)\cos(2G-v')$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{79}{16}\sqrt{\mu}\right.$ $+1,0185$	$\left.\right)\sin(2G-v')$
(53)		$\left(-\frac{4}{3}\right.$ $-1,3333$	$\left.\right)\cos(v')$	$\pm\left(-\frac{58\sqrt{3}}{9}\right.$ $-11,1621$	$\left.\right)\sin(v')$
(37)	$+\gamma^2\alpha$	$\left(\frac{1}{2}\right.$ $+0,5000$	$\left.\right)\cos(2H+F)$		
(38)		$\left(-\frac{161}{72}\right.$ $-2,2362$	$\left.\right)\cos(2H-F)$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{72}\right.$ $+1,4674$	$\left.\right)\sin(2H-F)$
(54)		$\left(-\frac{81}{8}\mu\right.$ $-0,0096$	$\left.\right)\cos(F)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\mu\right.$ $-0,8662$	$\left.\right)\sin(F)$
(39)	$+\gamma^2\beta$	$\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mu\right.$ $+0,9733$	$\left.\right)\cos(2H+G)$	$\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right.$ $+0,0154$	$\left.\right)\sin(2H+G)$
(40)		$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mu\right.$ $-1,0267$	$\left.\right)\cos(2H-G)$	$\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right.$ $+0,0154$	$\left.\right)\sin(2H-G)$
(55)		$\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\mu\right.$ $+0,0892$	$\left.\right)\cos(G)$	$\pm\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right.$ $-1,1547$	$\left.\right)\sin(G)$
(43)	$+\gamma^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right.$ $+0,3333$	$\left.\right)\cos(2H-v')$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right.$ $+0,1925$	$\left.\right)\sin(2H-v')$
(45)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha$	$\left(-\frac{3}{2}\right.$ $-1,5000$	$\left.\right)\cos(2v'-F)$		
(57)		$\left(-\frac{27}{4}\mu\right.$ $-0,0064$	$\left.\right)\cos(F)$		
(46)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\beta$	$\left(-2+8\sqrt{3}\mu\right.$ $-1,5720$	$\left.\right)\cos(2v'+G)$		
(47)		$\left(2+8\sqrt{3}\mu\right.$ $+2,4280$	$\left.\right)\cos(2v'-G)$		
(58)		$\left(-6\sqrt{3}\mu\right.$ $-0,3210$	$\left.\right)\cos(G)$		

$\xi =$ (*suite*).

$$
+\alpha\beta\frac{\varepsilon'}{2}\left[\begin{array}{llll}
(61) & \left(+2-\frac{17}{4}\sqrt{3}\mu \atop +1{,}7727\right)\cos(F+G+v') & \pm & \left(\frac{29}{8}\sqrt{\mu} \atop +0{,}1120\right)\sin(F+G+v') \\
(62) & \left(\boxed{\frac{14}{3}+\frac{175}{36}\sqrt{3}\mu \atop +4{,}9267}\;\; 4\sqrt{3}\mu \atop \quad +0{,}2140\right)\cos(F+G-v') & \pm & \left(\boxed{\frac{31\sqrt{3}}{9}-\frac{17}{12}\sqrt{\mu} \atop +5{,}9223}\;\; -\frac{1}{4}\sqrt{\mu} \atop \quad -0{,}0077\right)\sin(F+G+v') \\
(65) & \left(-2-\frac{17}{4}\sqrt{3}\mu \atop -2{,}2274\right)\cos(F-G+v') & \pm & \left(\frac{29}{8}\sqrt{\mu} \atop +0{,}1120\right)\sin(F-G+v') \\
(66) & \left(\boxed{-\frac{14}{3}+\frac{175}{36}\sqrt{3}\mu \atop -4{,}4067}\;\; 4\sqrt{3}\mu \atop \quad +0{,}2140\right)\cos(F-G-v') & \pm & \left(\boxed{-\frac{31\sqrt{3}}{9}+\frac{31}{12}\sqrt{\mu} \atop -5{,}8862}\;\; +\frac{15}{4}\sqrt{\mu} \atop \quad +0{,}1158\right)\sin(F-G-v')
\end{array}\right.
$$

$$
+\alpha^4\left[\begin{array}{llll}
(75) & \left(\frac{67}{192} \atop +0{,}697\right)\cos(4F) & & \\
(78) & \left(-\frac{7}{48} \atop -0{,}146\right)\cos(2F) & \pm & \left(\frac{29\sqrt{3}}{32} \atop +1{,}570\right)\sin(2F) \\
(105) & \left(-\frac{919}{384} \atop -2{,}393\right) & &
\end{array}\right.
$$

$$
+\beta^4\left[\begin{array}{llll}
(76) & \left(-\frac{35}{48} \atop -0{,}729\right)\cos(4G) & \pm & \left(\frac{31\sqrt{\mu}}{6} \atop +0{,}159\right)\sin(4G) \\
(87) & \left(-\frac{23}{24} \atop -0{,}958\right)\cos(2G) & \pm & \left(\frac{89\sqrt{\mu}}{24} \atop +0{,}114\right)\sin(2G) \\
(106) & \left(-\frac{69}{16} \atop -4{,}313\right) & &
\end{array}\right.
$$

$$
+\gamma^4\left[\begin{array}{llll}
(96) & (1)\cos(2H) & \pm & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \atop +0{,}578\right)\sin(2H) \\
(107) & \left(-\frac{7}{6} \atop -1{,}167\right) & &
\end{array}\right.
$$

$\xi =$ (*suite*).

(79)	$+\alpha^3\beta$	$\left(\frac{17}{12}\right.$ $+1,416$	$\left.\right)\cos(3F+G)$			
(80)		$\left(-\frac{17}{12}\right.$ $-1,416$	$\left.\right)\cos(3F-G)$			
(123)		$\left(-\frac{1}{16}\right.$ $-0,062$	$\left.\right)\cos(F+G)$	$\pm$	$\left(\frac{29\sqrt{3}}{16}\right.$ $+3,139$	$\left.\right)\sin(F+G)$
(124)		$\left(\frac{1}{16}\right.$ $+0,062$	$\left.\right)\cos(F-G)$	$\pm$	$\left(-\frac{29\sqrt{3}}{16}\right.$ $-3,139$	$\left.\right)\sin(F-G)$
(83)	$+\alpha^3\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right.$ $+0,333$	$\left.\right)\cos(3F+v')$			
(84)		$(4$	$)\cos(3F-v')$	$\pm$	$\left(\frac{89\sqrt{3}}{36}\right.$ $+4,282$	$\left.\right)\sin(3F-v')$
(127)		$\left(-\frac{5}{48}\right.$ $-0,104$	$\left.\right)\cos(F+v')$	$\pm$	$\left(\frac{31\sqrt{3}}{144}\right.$ $+0,373$	$\left.\right)\sin(F+v')$
(128)		$\left(-\frac{221}{48}\right.$ $-4,604$	$\left.\right)\cos(F-v')$	$\pm$	$\left(-\frac{673\sqrt{3}}{144}\right.$ $-8,095$	$\left.\right)\sin(F-v')$
(85)	$+\beta^3\alpha$	$\left(\frac{17}{48}\right.$ $+0,354$	$\left.\right)\cos(3G+F)$	$\pm$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ $+0,866$	$\left.\right)\sin(3G+F)$
(86)		$\left(-\frac{17}{48}\right.$ $-0,354$	$\left.\right)\cos(3G-F)$	$\pm$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ $+0,866$	$\left.\right)\sin(3G-F)$
(144)		$\left(-\frac{1}{2}\right.$ $-0,500$	$\left.\right)\cos(G+F)$	$\pm$	$\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right.$ $+3,031$	$\left.\right)\sin(G+F)$
(145)		$\left(\frac{1}{2}\right.$ $+0,500$	$\left.\right)\cos(G-F)$	$\pm$	$\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right.$ $+3,031$	$\left.\right)\sin(G-F)$

$\xi =$ *(suite).*

$$
\begin{array}{ll}
(90) & \\
(91) & \\
 & +\beta^2\frac{\varepsilon'}{2} \\
(156) & \\
(157) &
\end{array}
\left[
\begin{array}{llll}
\left(\begin{array}{l}\frac{31}{24}\\ +1,292\end{array}\right)\cos(3G+v') & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ +2,599\end{array}\right)\sin(3G+v') \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{31}{24}\\ -1,292\end{array}\right)\cos(3G-v') & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ +2,599\end{array}\right)\sin(3G-v') \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{23}{3}\\ -7,667\end{array}\right)\cos(G+v') & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{197\sqrt{3}}{18}\\ +18,957\end{array}\right)\sin(G+v') \\
\left(\begin{array}{l}\frac{23}{3}\\ +7,667\end{array}\right)\cos(G-v') & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{197\sqrt{3}}{18}\\ +18,957\end{array}\right)\sin(G-v')
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{ll}
(100) & \\
 & +\frac{\varepsilon'^3}{8}\alpha \\
(199) &
\end{array}
\left[
\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\\ -1,500\end{array}\right)\cos(3v'-F) \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\\ -1,500\end{array}\right)\cos(v'-F)
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{ll}
(200) & \\
 & +\frac{\varepsilon'^3}{8}\beta \\
(201) &
\end{array}
\left[
\begin{array}{l}
(4)\cos(v'+G) \\
(-4)\cos(v'-G)
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{ll}
(108) & \\
(109) & \\
(110) & +\gamma^2\beta^2 \\
(141) & \\
(204) &
\end{array}
\left[
\begin{array}{ll}
\left(\begin{array}{l}\frac{7}{4}\\ +1,750\end{array}\right)\cos(2F+2G) & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{3}}{16}\\ +0,541\end{array}\right)\sin(2F+2G) \\
\left(\begin{array}{l}\frac{7}{4}\\ +1,750\end{array}\right)\cos(2F-2G) & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{3}}{16}\\ +0,541\end{array}\right)\sin(2F-2G) \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{6}\\ -2,500\end{array}\right)\cos(2F) & \pm\left(\begin{array}{l}\frac{9\sqrt{3}}{8}\\ +1,949\end{array}\right)\sin(2F) \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{16}\\ -1,313\end{array}\right)\cos(2G) & \\
\left(\begin{array}{l}-\frac{111}{16}\\ -6,938\end{array}\right) &
\end{array}
\right.
$$

$\xi =$ *(suite).*

(110)	$+\alpha\gamma^2$	$\left(\frac{3}{8}\right)$ $+0{,}375$	$\cos(2F+2H)$		
(111)		$\left(-\frac{35}{144}\right)$ $-0{,}243$	$\cos(2F-2H)$	$\pm\left(-\frac{61\sqrt{3}}{144}\right)$ $-0{,}734$	$\sin(2F-2H)$
(121)	$+\alpha^2\gamma^2$	$\left(\frac{19}{144}\right)$ $+0{,}132$	$\cos(2F)$	$\pm\left(-\frac{97\sqrt{3}}{144}\right)$ $-1{,}166$	$\sin(2F)$
(162)		$\left(\frac{89}{72}\right)$ $+1{,}236$	$\cos(2H)$	$\pm\left(-\frac{37\sqrt{3}}{18}\right)$ $-3{,}560$	$\sin(2H)$
(205)		$\left(-\frac{7}{24}\right)$ $-0{,}292$			
(113)	$+\alpha^2\frac{\varepsilon'^2}{4}$	$\left(-\frac{55}{12}\right)$ $-3{,}083$	$\cos(2F-2v')$	$\pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{36}\right)$ $-4{,}282$	$\sin(2F-2v')$
(122)		$\left(-\frac{49}{12}\right)$ $-4{,}083$	$\cos(2F)$	$\pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{36}\right)$ $-4{,}232$	$\sin(2F)$
(183)		$\left(-\frac{19}{6}\right)$ $+3{,}167$	$\cos(2v')$	$\pm\left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)$ $+0{,}674$	$\sin(2v')$
(206)		$\left(\frac{2}{3}\right)$ $+0{,}667$			
(114)	$+\beta^2\gamma^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)$ $+0{,}500$	$\cos(2G+2H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $+0{,}433$	$\sin(2G+2H)$
(115)		$\left(\frac{1}{2}\right)$ $+0{,}500$	$\cos(2G-2H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $-0{,}433$	$\sin(2G-2H)$
(142)		$\left(\frac{3}{2}\right)$ $+1{,}500$	$\cos(2G)$		
(163)		(1)	$\cos(2H)$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $-2{,}598$	$\sin(2H)$
(207)		$\left(-\frac{3}{2}\right)$ $-1{,}500$			

$\xi =$ (*suite*).

(116)	$+\beta^2\frac{\varepsilon'^2}{4}$	3	$\cos(2G+2v')$	$\pm$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-0{,}866$	$\sin(2G+2v')$
(117)		3	$\cos(2G-2v')$	$\pm$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $+0{,}866$	$\sin(2G-2v')$
(143)		2	$\cos(2G)$			
(184)		$-\frac{4}{3}$; $-1{,}333$	$\cos(2v')$	$\pm$	$-\frac{58\sqrt{3}}{9}$; $-11{,}163$	$\sin(2v')$
(208)		$\frac{8}{3}$; $+2{,}667$				
(119)	$+\gamma^2\frac{\varepsilon'^2}{4}$	$\frac{1}{3}$; $+0{,}333$	$\cos(2H-2v')$	$\pm$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$; $+0{,}193$	$\sin(2H-2v')$
(164)		$\frac{1}{3}$; $+0{,}333$	$\cos(2H)$	$\pm$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$; $+0{,}193$	$\sin(2H)$
(133)	$+\alpha^2\beta\frac{\varepsilon'}{2}$	$\frac{11}{4}$; $+2{,}750$	$\cos(2F+G+v')$			
(134)		$\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; -43{,}619}$ $\quad \frac{131^*}{24}$; $+5{,}458$	$\cos(2F+G-v')$	$\pm$	$\boxed{-\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; -55{,}763}$ $\quad \frac{263\sqrt{3}^*}{144}$; $+3{,}163$	$\sin(2F+G-v')$
(135)		$-\frac{11}{4}$; $-2{,}750$	$\cos(2F-G+v')$			
(136)		$\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; -43{,}619}$ $\quad -\frac{131^*}{24}$; $-5{,}458$	$\cos(2F-G-v')$	$\pm$	$\boxed{-\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; -55{,}763}$ $\quad -\frac{167\sqrt{3}^*}{144}$; $-2{,}009$	$\sin(2F-G-v')$
(212)		$\boxed{\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; +43{,}619}$ $\quad -\frac{1^*}{24}$; $-0{,}042$	$\cos(G+v')$	$\pm$	$\boxed{-\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; -55{,}763}$ $\quad \frac{829\sqrt{3}^*}{144}$; $+9{,}971$	$\sin(G+v')$
(213)		$\boxed{\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; +43{,}619}$ $\quad \frac{1^*}{24}$; $+0{,}042$	$\cos(G-v')$	$\pm$	$\boxed{\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; +55{,}763}$ $\quad \frac{733\sqrt{3}^*}{144}$; $+8{,}817$	$\sin(G-v')$

$\xi =$ (*suite*).

$$
+\beta^2\alpha\frac{\varepsilon'}{2}\left[
\begin{array}{llll}
(150) & \left(4\right)\cos(2G+F+v') & \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(2G+F+v') \\
 & & \quad +0{,}866 \\
(151) & \left(\boxed{\begin{array}{c}-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ -87{,}237\end{array}} \quad \frac{9^{*}}{4}\right)\cos(2G+F-v') & \pm\left(\boxed{\begin{array}{c}-\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ -111{,}526\end{array}} - \frac{31\sqrt{3}^{*}}{24}\right)\sin(2G+F-v') \\
 & \qquad\qquad +2{,}250 & \qquad\qquad -2{,}237 \\
(152) & \left(\boxed{\begin{array}{c}\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ 87{,}237\end{array}} \quad \frac{9^{*}}{4}\right)\cos(2G-F+v') & \pm\left(\boxed{\begin{array}{c}-\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ -111{,}526\end{array}} \quad \frac{21\sqrt{3}^{*}}{8}\right)\sin(2G-F+v') \\
 & \qquad\qquad +2{,}250 & \qquad\qquad +4{,}547 \\
(153) & \left(4\right)\cos(2G-F-v') & \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(2G-F-v') \\
 & & \quad -0{,}866 \\
(218) & \left(-\frac{41}{3}\right)\cos(F+v') & \pm\left(\frac{259\sqrt{3}}{36}\right)\sin(F+v') \\
 & \quad -13{,}667 & \quad +12{,}461 \\
(219) & \left(-\frac{5}{6}\right)\cos(F-v') & \pm\left(\frac{73\sqrt{3}}{9}\right)\sin(F-v') \\
 & \quad -0{,}834 & \quad +14{,}049
\end{array}\right.
$$

$$
+\gamma^2\alpha\beta\left[
\begin{array}{llll}
(165) & \left(1\right)\cos(2H+F+G) & \\
(166) & \left(-1\right)\cos(2H+F-G) & \\
(167) & \left(\frac{53}{72}\right)\cos(2H-F+G) & \pm\left(-\frac{61\sqrt{3}}{72}\right)\sin(2H-F+G) \\
 & \quad +0{,}736 & \quad -1{,}467 \\
(168) & \left(-\frac{53}{72}\right)\cos(2H-F-G) & \pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{72}\right)\sin(2H-F-G) \\
 & \quad -0{,}736 & \quad -1{,}467 \\
(222) & \left(1\right)\cos(F+G) & \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(F+G) \\
 & & \quad -0{,}866 \\
(223) & \left(-1\right)\cos(F-G) & \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(F-G) \\
 & & \quad +0{,}866
\end{array}\right.
$$

$\xi =$ (*suite*).

(172)	$+\gamma^2\alpha\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-\frac{1}{3}\right)$ $-0{,}333$	$\cos(2H+F-v')$	$\pm\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0{,}385$	$\sin(2H+F-v')$
(173)		$\left(\frac{19}{72}\right)$ $+0{,}264$	$\cos(2H-F+v')$	$\pm\left(\frac{85\sqrt{3}}{72}\right)$ $+2{,}045$	$\sin(2H-F+v')$
(174)		$\left(-\frac{125}{72}\right)$ $-1{,}736$	$\cos(2H-F-v')$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{72}\right)$ $+1{,}467$	$\sin(2H-F-v')$
(224)		$\left(\frac{1}{3}\right)$ $+0{,}333$	$\cos(F+v')$	$\pm\left(-\frac{5\sqrt{3}}{18}\right)$ $-0{,}482$	$\sin(F+v')$
(225)		(-2)	$\cos(F-v')$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $+0{,}866$	$\sin(F-v')$
(177)	$+\gamma^2\beta\frac{\varepsilon'}{2}$	(1)	$\cos(2H+G+v')$		
(178)		$\left(\frac{8}{3}\right)$ $+2{,}667$	$\cos(2H+G-v')$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $-0{,}192$	$\sin(2H+G-v')$
(179)		(-1)	$\cos(2H-G+v')$		
(180)		$\left(-\frac{8}{3}\right)$ $-2{,}667$	$\cos(2H-G-v')$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0{,}192$	$\sin(2H-G-v')$
(226)				$\pm\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ $-2{,}309$	$\sin(G+v')$
(227)				$\pm\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ $-2{,}309$	$\sin(G-v')$

$\xi =$ *(suite).*

(186) $\left(1\right)\cos(2v' + F + G)$

(187) $\left(-1\right)\cos(2v' + F - G)$

$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha\beta$

(188) $\left(\boxed{\begin{matrix}-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ -87,237\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\frac{25^*}{4}\\ +6,250\end{matrix}\right)\cos(2v' - F + G) \pm \left(\boxed{\begin{matrix}\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ +111,526\end{matrix}} \quad \begin{matrix}-\frac{21\sqrt{3}^*}{8}\\ -4,547\end{matrix}\right)\sin(2v' - F + G)$

(189) $\left(\boxed{\begin{matrix}-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ -87,237\end{matrix}} \quad \begin{matrix}-\frac{25^*}{4}\\ -6,250\end{matrix}\right)\cos(2v' - F - G) \pm \left(\boxed{\begin{matrix}\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ +111,526\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\frac{31\sqrt{3}^*}{24}\\ +2,237\end{matrix}\right)\sin(2v' - F - G)$

(228) $\left(\boxed{\begin{matrix}\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ +87,237\end{matrix}} \quad \begin{matrix}-\frac{9^*}{4}\\ -2,250\end{matrix}\right)\cos(F + G) \pm \left(\boxed{\begin{matrix}\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ +111,526\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\frac{31\sqrt{3}^*}{24}\\ +2,237\end{matrix}\right)\sin(F + G)$

(229) $\left(\boxed{\begin{matrix}\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}\\ +87,237\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\frac{9^*}{4}\\ +2,250\end{matrix}\right)\cos(F - G) \pm \left(\boxed{\begin{matrix}\frac{31}{9\sqrt{\mu}}\\ +111,526\end{matrix}} \quad \begin{matrix}-\frac{21\sqrt{3}^*}{8}\\ -4,547\end{matrix}\right)\sin(F - G)$

$\eta =$

(1) $\alpha \mid \left(2\right)\sin(F)$

(2) $+\beta \mid \left(2\right)\sin(G)$

$+\alpha^2$

(4) $\left(\begin{matrix}\frac{1}{4} - \frac{23}{64}\mu\\ +0,24966\end{matrix}\right)\sin(2F) \pm \left(\begin{matrix}\frac{165\sqrt{3}}{128}\mu\\ -0,00213\end{matrix}\right)\cos(2F)$

(7) $\pm\left(\begin{matrix}-\frac{29\sqrt{3}}{24} - \frac{3\sqrt{3}}{32}\mu\\ -2,09305\end{matrix}\right)$

$+\beta^2$

(5) $\left(\begin{matrix}-\frac{2}{3}\sqrt{3\mu}\\ -0,03566\end{matrix}\right)\sin(2G) \pm \left(\begin{matrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{175\sqrt{3}}{12}\mu\\ -0,89012\end{matrix}\right)\cos(2G)$

(8) $\pm\left(\begin{matrix}-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{5}\mu\\ -2,59106\end{matrix}\right)$

$+\gamma^2$

(6) $\left(\begin{matrix}-1 + \frac{17}{16}\mu\\ -0,99899\end{matrix}\right)\sin(2H) \pm \left(\begin{matrix}-\frac{11\sqrt{3}}{16}\mu\\ -0,00114\end{matrix}\right)\cos(2H)$

(9) $\pm\left(\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ +0,57735\end{matrix}\right)$

$$\frac{\eta}{i} = \quad (suite).$$

(10)	$+\alpha\beta$	$\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}+\frac{65}{8}\mu\right)$ $+0,92751$	$\sin(F+G)$	$\pm$	$\left(\frac{29}{4}\sqrt{\mu}-\frac{375\sqrt{3}}{16}\mu\right)$ $+0,18519$	$\cos(F+G)$
(11)		$\left(-1-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}-\frac{65}{8}\mu\right)$ $-1,08799$	$\sin(F-G)$	$\pm$	$\left(\frac{29}{4}\sqrt{\mu}+\frac{327\sqrt{3}}{16}\mu\right)$ $+0,25768$	$\cos(F-G)$
(14)	$+\alpha\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(1+\frac{51}{8}\mu\right)$ $+1,00608$	$\sin(F+v')$	$\pm$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\mu\right)$ $+0,00021$	$\cos(F+v')$
(15)		$\left(-1-\frac{171}{8}\mu\right)$ $-1,02039$	$\sin(F-v')$	$\pm$	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\mu\right)$ $+0,00062$	$\cos(F-v')$
(18)	$+\beta\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(4-10\sqrt{3\mu}+\frac{153}{2}\mu-\frac{1045}{4}\mu\sqrt{3\mu}\right)$ $+3,52470$	$\sin(G+v')$	$\pm$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu-\frac{9}{2}\mu\sqrt{\mu}\right)$ $+0,00069$	$\cos(G+v')$
(19)		$\left(4+10\sqrt{3\mu}+\frac{153}{2}\mu+\frac{1045}{4}\mu\sqrt{3\mu}\right)$ $+4,62124$	$\sin(G-v')$	$\pm$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu-\frac{9}{2}\mu\sqrt{\mu}\right)$ $-0,00096$	$\cos(G-v')$
(20)	$+\alpha^3$	$\left(\frac{7}{24}\right)$ $+0,2917$	$\sin(3F)$			
(21)	$+\beta^3$	$\left(-\frac{7}{24}\right)$ $-0,2917$	$\sin(3G)$	$\pm$	$\left(\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\right)$ $+0,0463$	$\cos 3G$
(24)	$+\alpha^2\beta$	$\left(1-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}\right)$ $+0,9933$	$\sin(2F+G)$	$\pm$	$\left(\frac{29}{16}\sqrt{\mu}\right)$ $+0,0560$	$\cos(2F+G)$
(22)		$\left(-1-\frac{1}{8}\sqrt{3\mu}\right)$ $-1,0067$	$\sin(2F-G)$	$\pm$	$\left(\frac{29}{16}\sqrt{\mu}\right)$ $+0,0560$	$\cos(2F-G)$
(29)	$+\alpha^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\frac{49}{6}\right)$ $+8,1667$	$\sin(2F-v')$	$\pm$	$\left(-\frac{89\sqrt{3}}{18}\right)$ $-8,5640$	$\cos(2F-v')$
(50)		$\left(-\frac{4}{3}\right)$ $-1,3333$	$\sin(v')$	$\pm$	$\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)$ $+1,3472$	$\cos(v')$

$$\frac{\eta_1}{i} = \quad (suite).$$

(30)	$+\beta^2\alpha$	$\left(1+\frac{213}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $+1,2374$	$\sin(2G+F)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{49}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-0,2438$	$\cos(2G+F)$
(31)		$\left(-1+\frac{213}{16}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $-0,7626$	$\sin(2G-F)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{47}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-0,6144$	$\cos(2G-F)$
(35)	$+\beta^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-\frac{19}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $-0,0847$	$\sin(2G+\nu')$	$\pm\left(-\sqrt{3}+\frac{151}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-1,1491$	$\cos(2G+\nu')$
(36)		$\left(-\frac{19}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $-0,0847$	$\sin(2G-\nu')$	$\pm\left(-\sqrt{3}+\frac{151}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $-2,3151$	$\cos(2G-\nu')$
(53)		$\left(-\frac{28}{3}\right)$ $-9,3333$	$\sin(\nu')$	$\pm\left(-\frac{116\sqrt{3}}{9}\right)$ $-22,3242$	$\cos(\nu')$
(37)	$+\gamma^2\alpha$	$\left(-\frac{1}{2}\right)$ $-0,5000$	$\sin(2H+F)$		
(38)		$\left(\frac{107}{36}\right)$ $+2,9722$	$\sin(2H-F)$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{36}\right)$ $+2,9349$	$\cos(2H-F)$
(39)	$+\gamma^2\beta$	$\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mu\right)$ $-0,9733$	$\sin(2H+G)$	$\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right)$ $+0,0154$	$\cos(2H+G)$
(40)		$\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right)$ $+1,0267$	$\sin(2H-G)$	$+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right)$ $+0,0154$	$\cos(2H-G)$
(43)	$+\gamma^2\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)$ $-0,6667$	$\sin(2H-\nu')$	$\pm\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0,3849$	$\cos(2H-\nu')$
(45)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha$	(3)	$\sin 2\nu'-F$		
(46)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\beta$	$\left(2-\frac{19}{2}\sqrt{3}\mu\right)$ $+1,4918$	$\sin(2\nu'+G)$		
(47)		$\left(-2-\frac{19}{2}\sqrt{3}\mu\right)$ $-2,5082$	$\sin(2\nu'-G)$		

$$\frac{\eta}{i} = \qquad (\textit{suite}).$$

$$
+\alpha\beta\frac{\varepsilon'}{2}\left[
\begin{array}{ll}
(61) & \left(\underset{+0,7459}{1-\frac{19}{4}\sqrt{3}\,\mu}\right)\sin(F+G+v') \pm \left(\frac{29}{8}\sqrt{\mu}\right)\cos(F+G+v') \\
(62) & \left(\underset{-85,9869}{\boxed{-\frac{14}{3\sqrt{3}\,\mu}+\frac{5}{4}}}\quad \underset{+1,2500}{\frac{5}{4}}\right)\sin(F+G-v') \pm \left(\underset{+113,7625}{\boxed{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}+\frac{31\sqrt{3}}{24}}}\quad \underset{+2,2372}{\frac{31\sqrt{3}}{24}}\right)\cos(F+G-v') \\
(65) & \left(\underset{-1,2541}{-1-\frac{19}{4}\sqrt{3}\,\mu}\right)\sin(F-G+v') \pm \left(\underset{+0,1120}{\frac{29}{8}\sqrt{\mu}}\right)\cos(F-G+v') \\
(66) & \left(\underset{-88,4869}{\boxed{-\frac{14}{3\sqrt{3}\,\mu}-\frac{5}{4}}}\ \underset{-}{-}\quad \underset{1,2500}{\frac{5}{4}}\right)\sin(F-G-v') \pm \left(\underset{+108,97\ 6}{\boxed{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}-\frac{21\sqrt{3}}{8}}}\ \underset{-4,5467}{-\frac{21\sqrt{3}}{8}}\right)\cos(F-G-v')
\end{array}
\right.
$$

$$
+\alpha^4\left[
\begin{array}{ll}
(75) & \left(\underset{+0,302}{\frac{29}{96}}\right)\sin(4F) \\
(78) & \left(\underset{-0,323}{-\frac{31}{96}}\right)\sin(2F) \pm \left(\underset{-1,570}{-\frac{29\sqrt{3}}{32}}\right)\cos(2F) \\
(105) & \qquad \pm \left(\underset{+1,046}{\frac{29\sqrt{3}}{48}}\,{}^{\star}\right)
\end{array}
\right.
$$

$$
+\beta^4\left[
\begin{array}{ll}
(76) & \qquad \pm \left(\underset{-0,433}{-\frac{\sqrt{3}}{4}}\,{}^{\star}\right)\cos(4G) \\
(87) & \qquad \pm \left(\underset{-1,732}{-\sqrt{3}}\,{}^{\star}\right)\cos(2G) \\
(106) & \qquad \pm \left(\underset{-2,165}{\frac{5\sqrt{3}}{4}}\,{}^{\star}\right)
\end{array}
\right.
$$

$$
+\gamma^4\left[
\begin{array}{ll}
(96) & (-1)\sin(2H) \pm \left(\underset{+0,578}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\cos(2H) \\
(107) & \qquad \pm \left(\underset{-0,578}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\,{}^{\star}\right)
\end{array}
\right.
$$

$$\frac{\eta}{i} = \quad (\textit{suite}).$$

$+\alpha^4\beta$

No.	Coefficient	Valeur	Argument		Coefficient	Valeur	Argument
(79)	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$+1,250$	$\sin(3F+G)$				
(80)	$\left(-\frac{5}{4}\right)$	$-1,250$	$\sin(3F-G)$				
(123)	$\left(-\frac{1}{16}\right)$	$-0,062$	$\sin(F+G)$	$\pm$	$\left(-\frac{29\sqrt{3}}{16}\right)$	$-3,139$	$\cos(F+G)$
(124)	$\left(\frac{1}{16}\right)$	$+0,062$	$\sin(F-G)$	$\pm$	$\left(\frac{29\sqrt{3}}{16}\right)$	$+3,139$	$\cos(F-G)$

$+\alpha^4\frac{\varepsilon'}{2}$

No.	Coefficient	Valeur	Argument		Coefficient	Valeur	Argument
(83)	$\left(\frac{5}{24}\right)$	$+0,208$	$\sin(3F+v')$				
(84)	$\left(\frac{7}{4}\right)$	$+1,750$	$\sin(3F-v')$	$\pm$	$\left(-\frac{89\sqrt{3}}{72}\right)$	$-2,141$	$\cos(3F-v')$
(127)	$\left(\frac{11}{48}\right)$	$+0,229$	$\sin(F+v')$	$\pm$	$\left(\frac{115\sqrt{3}}{144}\right)$	$+1,389$	$\cos(F+v')$
(128)	$\left(\frac{41}{16}{}^{*}\right)$	$+2,562$	$\sin(F-v')$	$\pm$	$\left(-\frac{29\sqrt{3}}{24}{}^{*}\right)$	$-2,093$	$\cos(F-v')$

$+\beta^3\alpha$

No.	Coefficient	Valeur	Argument		Coefficient	Valeur	Argument
(85)	$\left(\frac{17}{48}\right)$	$+0,354$	$\sin(3G+F)$	$\pm$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-0,866$	$\cos(3G+F)$
(86)	$\left(\frac{17}{48}\right)$	$+0,354$	$\sin(3G-F)$	$\pm$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$+0,866$	$\cos(3G-F)$
(144)	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-0,500$	$\sin(G+F)$	$\pm$	$\left(-\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$	$-3,031$	$\cos(G+F)$
(145)	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-0,500$	$\sin(G-F)$	$\pm$	$\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$	$+3,031$	$\cos(G-F)$

$\frac{\eta}{i} =$ (*suite*).

(90)	$+\beta^3\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\frac{5}{12}\right)$ $+0{,}417$	$\sin(3G+\nu')$			
(91)		$\left(\frac{5}{12}\right)$ $+0{,}417$	$\sin(3G-\nu')$			
(156)		$\left(-\frac{23}{3}\right)$ $-7{,}667$	$\sin(G+\nu')$	$\pm\left(-\frac{31\sqrt{3}}{9}\right)$ $-5{,}966$		$\cos(G+\nu')$
(157)		$\left(-\frac{23}{3}\right)$ $-7{,}667$	$\sin(G-\nu')$	$\pm\left(\frac{31\sqrt{3}}{9}\right)$ $-5{,}966$		$\cos(G-\nu')$
(100)	$+\frac{\varepsilon'^3}{8}\alpha$	$\left(\frac{3}{2}\right)$ $+1{,}500$	$\sin(3\nu'-F)$			
(195)		$(\quad 9^{*})$	$\sin(\nu'-F)$			
(200)	$+\frac{\varepsilon'^3}{8}\beta$	(-8)	$\sin(\nu'+G)$			
(201)		$(\quad 8)$	$\sin(\nu'-G)$			
(108)		$\left(\frac{13}{8}\right)$ $+1{,}625$	$\sin(2F+2G)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $-0{,}433$		$\cos(2F+2G)$
(109)		$\left(\frac{13}{8}\right)$ $+1{,}625$	$\sin(2F-2G)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $-0{,}433$		$\cos(2F-2G)$
(120)	$+\alpha^2\beta^2$	$\left(-\frac{11}{4}\right)$ $-2{,}750$	$\sin(2F)$	$\pm\left(-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ $-1{,}949$		$\cos(2F)$
(141)				$\pm($	$-\frac{23\sqrt{3}^{*}}{24})$ $-1{,}660$	$\cos(2G)$
(204)				$\pm($	$\frac{47\sqrt{3}^{*}}{24})$ $+3{,}392$	

$\frac{\eta}{i} =$ (*suite*).

(110)		$\left(-\frac{3}{8}\right)$ $-0,375$	$\sin(2F + 2H)$		
(111)		$\left(\frac{1}{8}{}^{\star}\right)$ $+0,125$	$\sin(2F - 2H)$		
(121)	$+\alpha^2\gamma^2$	$\left(\frac{89}{144}\right)$ $+0,618$	$\sin(2F)$	$\pm\left(-\frac{25\sqrt{3}}{144}\right)$ $-0,301$	$\cos(2F)$
(162)		$\left(-\frac{19}{144}\right)$ $-0,132$	$\sin(2H)$	$\pm\left(-\frac{113\sqrt{3}}{144}\right)$ $-1,359$	$\cos(2H)$
(205)				$\pm\left(\frac{25\sqrt{3}}{9}{}^{\star}\right)$ $+1,804$	
(113)		$\left(\frac{1}{3}{}^{\star}\right)$ $+0,333$	$\sin(2F - 2\nu')$	$\pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{9}{}^{\star}\right)$ $+17,128$	$\cos(2F - 2\nu')$
(122)	$+\alpha^2\frac{\varepsilon'^2}{4}$	$\left(\frac{49}{12}\right)$ $+4,083$	$\sin(2F)$	$\pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{36}\right)$ $-4,282$	$\cos(2F)$
(183)		$\left(-\frac{11}{12}\right)$ $-0,917$	$\sin(2\nu')$	$\pm\left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)$ $+0,674$	$\cos(2\nu')$
(206)				$\pm\left(\frac{14\sqrt{3}}{9}{}^{\star}\right)$ $+2,694$	
(114)		$\left(-\frac{1}{2}\right)$ $-0,500$	$\sin(2G + 2H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $+0,433$	$\cos(2G + 2H)$
(115)		$\left(\frac{1}{2}\right)$ $+0,500$	$\sin(2G - 2H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $+0,433$	$\cos(2G - 2H)$
(142)	$+\beta^2\gamma^2$			$\pm\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}{}^{\star}\right)$ $+1,443$	$\cos(2G)$
(163)		(-1)	$\sin(2H)$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $-2,598$	$\cos(2H)$
(207)				$\pm\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}{}^{\star}\right)$ $+2,021$	

$\frac{\eta}{i} =$ (*suite*).

(116)				$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G + 2v')$
(117)				$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G - 2v')$
(143)	$+\beta'\frac{\varepsilon'^2}{4}$			$\pm\left(4\sqrt{3}^{*}\right)$ $+6,928$	$\cos(2G)$
(184)		$\left(-\frac{14}{3}\right)$ $-4,667$	$\sin(2v')$	$\pm\left(-\frac{58\sqrt{3}}{9}\right)$ $-11,163$	$\cos(2v')$
(208)				$\pm\left(-\frac{232\sqrt{3}^{*}}{9}\right)$ $-44,649$	
(119)	$+\gamma^2\frac{\varepsilon'^2}{4}$	$\left(-\frac{4^{*}}{3}\right)$ $-1,333$	$\sin(2H - 2v')$	$\pm\left(\frac{4\sqrt{3}^{*}}{9}\right)$ $+0,770$	$\cos(2H - 2v')$
(164)		$\left(-\frac{1}{3}\right)$ $-0,333$	$\sin(2H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0,193$	$\cos(2H)$
(133)	$+\alpha^2\beta\frac{\varepsilon'}{2}$	(2)	$\sin(2F + G + v')$		
(134)		$\left(\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; -43,619} \quad \frac{113^{*}}{24}\right)$ $+4,708$	$\sin(2F + G - v')$	$\pm\left(\boxed{\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; +55,763} \quad -\frac{263\sqrt{3}^{*}}{144}\right)$ $-3,163$	$\cos(2F + G - v')$
(135)		(-2)	$\sin(2F - G + v')$		
(136)		$\left(\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; -43,619} \quad -\frac{113^{*}}{24}\right)$ $-4,708$	$\sin(2F - G - v')$	$\pm\left(\boxed{\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; -55,763} \quad \frac{167\sqrt{3}^{*}}{144}\right)$ $+2,009$	$\cos(2F - G - v')$
(212)		$\left(\boxed{\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; +43,619} \quad -\frac{1^{*}}{24}\right)$ $-0,042$	$\sin(G + v')$	$\pm\left(\boxed{\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; -55,763} \quad +\frac{215\sqrt{3}^{*}}{144}\right)$ $+2,586$	$\cos(G + v')$
(213)		$\left(\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{3\mu}} \; -43,619} \quad -\frac{1^{*}}{24}\right)$ $-0,042$	$\sin(G - v')$	$\pm\left(\boxed{\frac{31}{18\sqrt{\mu}} \; +55,763} \quad -\frac{311\sqrt{3}^{*}}{144}\right)$ $-3,741$	$\cos(G - v')$

$$\frac{\eta}{i} = \quad (suite).$$

$$
+\beta^2\alpha\frac{\varepsilon'}{2}\left[
\begin{array}{lll}
(150) & \left(\frac{7}{2} \atop +3{,}500\right)\sin(2G+F+v') & \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \atop -0{,}433\right)\cos(2G+F+v') \\
(151) & \left(\boxed{\frac{31}{6\sqrt{3\mu}} \atop +96{,}582} \quad \frac{5}{2}^{*} \atop +2{,}500\right)\sin(2G-F-v') & \pm\left(\boxed{\frac{7}{3\sqrt{\mu}} \atop +75{,}550} \quad -\frac{3\sqrt{3}}{4}^{*} \atop -1{,}299\right)\cos(2G+F-v') \\
(152) & \left(\boxed{\frac{31}{6\sqrt{3\mu}} \atop +96{,}582} \quad -\frac{5}{2}^{*} \atop -2{,}500\right)\sin(2G-F+v') & \pm\left(\boxed{-\frac{7}{3\sqrt{\mu}} \atop -75{,}550} \quad -\frac{3\sqrt{3}}{4}^{*} \atop -1{,}299\right)\cos(2G-F+v') \\
(153) & \left(-\frac{7}{2} \atop -3{,}500\right)\sin(2G-F-v') & \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \atop -0{,}433\right)\cos(2G-F-v') \\
(218) & \left(-\frac{25}{3} \atop -8{,}333\right)\sin(F+v') & \pm\left(-\frac{89\sqrt{3}}{36} \atop -4{,}282\right)\cos(F+v') \\
(219) & \left(-11^{*}\right)\sin(F-v') & \pm\left(-\frac{27\sqrt{3}}{18}^{*} \atop -2{,}598\right)\cos(F-v')
\end{array}
\right.
$$

$$
+\gamma^2\alpha\beta\left[
\begin{array}{lll}
(165) & (-1)\sin(2H+F+G) & \\
(166) & (1)\sin(2H+F-G) & \\
(167) & \left(\frac{53}{72} \atop +0{,}736\right)\sin(2H-F+G) & \pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{72} \atop +1{,}467\right)\cos(2H-F+G) \\
(168) & \left(-\frac{53}{72} \atop -0{,}736\right)\sin(2H-F-G) & \pm\left(-\frac{61\sqrt{3}}{72} \atop -1{,}467\right)\cos(2H-F-G) \\
(222) & (1)\sin(F+G) & \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \atop +0{,}866\right)\cos(F+G) \\
(223) & (-1)\sin(F-G) & \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \atop -0{,}866\right)\cos(F-G)
\end{array}
\right.
$$

$$\frac{\eta}{i} = \quad (suite).$$

$+\gamma^2\alpha\frac{\varepsilon'}{2}$

(172)	$\left(-\frac{1}{6}\right)$ $-0,167$	$\sin(2H+F-v')$	$\pm\left(\frac{7\sqrt{3}}{18}\right)$ $+0,674$	$\cos(2H+F-v')$
(173)	$\left(-\frac{19}{72}\right)$ $-0,264$	$\sin(2H-F+v')$	$\pm\left(\frac{85\sqrt{3}}{72}\right)$ $+2,045$	$\cos(2H-F+v')$
(174)	$\left(\frac{71}{18}^{*}\right)$ $+3,944$	$\sin(2H-F-v')$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{18}^{*}\right)$ $+5,870$	$\cos(2H-F-v')$
(224)	$\left(-\frac{1}{3}\right)$ $-0,333$	$\sin(F+v')$	$\pm\left(-\frac{5\sqrt{3}}{18}\right)$ $-0,482$	$\cos(F+v')$
(225)	(5^{*})	$\sin(F-v')$	$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}^{*}\right)$ $+0,577$	$\cos(F-v')$

$+\gamma^2\beta\frac{\varepsilon'}{2}$

(177)	(-1)	$\sin(2H+G+v')$		
(178)	$\left(-\frac{10}{3}\right)$ $-3,333$	$\sin(2H+G-v')$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0,192$	$\cos(2H+G-v')$
(179)	(1)	$\sin(2H-G+v')$		
(180)	$\left(\frac{10}{3}\right)$ $+3,333$	$\sin(2H-G-v')$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $-0,192$	$\cos(2H-G-v')$
(226)			$\pm\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $-1,155$	$\cos(G+v')$
(227)			$\pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $+1,155$	$\cos(G-v')$

$$\frac{\eta}{i} = \quad (suite).$$

(188)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha\beta$	$\left(\boxed{\frac{28}{3\sqrt{3\mu}}} - 2^*\right)$	$\boxed{+174,474}$	$\sin(2v' - F + G)$	$\pm$	$\left(\boxed{\frac{62}{9\sqrt{\mu}}} - \frac{21\sqrt{3}^*}{4}\right)$	$\boxed{+223,051}$ $-9,093$	$\cos(2v' - F + G)$
(189)		$\left(\boxed{\frac{28}{3\sqrt{3\mu}}} \quad 2^*\right)$	$\boxed{+174,474}$	$\sin(2v' - F - G)$	$\pm$	$\left(\boxed{\frac{62}{9\sqrt{\mu}}} + \frac{31\sqrt{3}^*}{12}\right)$	$\boxed{+223,051}$ $+4,474$	$\cos(2v' - F - G)$
(228)		$\left(\boxed{-\frac{28}{3\sqrt{3\mu}}} - \frac{3^*}{2}\right)$	$\boxed{-174,474}$ $-1,500$	$\sin(F + G)$	$\pm$	$\left(\boxed{\frac{62}{9\sqrt{\mu}}} \quad \frac{31\sqrt{3}^*}{12}\right)$	$\boxed{+223,051}$ $+4,474$	$\cos(F + G)$
(229)		$\left(\boxed{-\frac{28}{3\sqrt{3\mu}}} \quad \frac{3^*}{2}\right)$	$\boxed{-174,474}$ $+1,500$	$\sin(F - G)$	$\pm$	$\left(\boxed{\frac{62}{9\sqrt{\mu}}} - \frac{21\sqrt{3}^*}{4}\right)$	$\boxed{+223,051}$ $-9,093$	$\cos(F - G)$

$$\frac{\zeta}{i} =$$

(3)	γ	$[\ (\ 2\ )$		$\sin(H)$				
(12)	$+\alpha\gamma$	$\left(1 + \frac{23}{8}\mu\right)$	$+1,00274$	$\sin(F + H)$	$+$	$\left(-\frac{5\sqrt{3}}{8}\mu\right)$	$-0,00103$	$\cos(F + H)$
(13)		$\left(3 - \frac{39}{8}\mu\right)$	$+2,99535$	$\sin(F - H)$	$\pm$	$\left(-\frac{15\sqrt{3}}{8}\mu\right)$	$-0,00310$	$\cos(F - H)$
(16)	$+\beta\gamma$	$\left(2 - \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{8}\mu\right)$	$+1,91916$	$\sin(G + H)$	$\pm$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\mu\right)$	$-0,01482$	$\cos(G + H)$
(17)		$\left(2 + \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{8}\mu\right)$	$+2,07964$	$\sin(G - H)$	$\pm$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\mu} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\mu\right)$	$-0,01606$	$\cos(G - H)$
(26)	$+\alpha^2\gamma$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$+0,7500$	$\sin(2F + H)$				
(27)		$\left(-\frac{89}{144}\right)$	$-0,6181$	$\sin(2F - H)$	$\pm$	$\left(\frac{61\sqrt{3}}{144}\right)$	$-0,7337$	$\cos(2F - H)$

$$\frac{\zeta}{i} = \qquad (suite).$$

(33)	$+\beta^2\gamma$	$\left(1 - \frac{9}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $+0{,}9599$	$\sin(2G + H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}8120$	$\cos(2G + H)$
(34)		$\left(-1 - \frac{9}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{3}}\right)$ $-1{,}0401$	$\sin(2G - H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{4}\sqrt{\mu}\right)$ $-0{,}9201$	$\cos(2G - H)$
(59)	$+\alpha\beta\gamma$	$\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3\mu}\right)$ $+1{,}9733$	$\sin(F + G + H)$	$\pm\left(\frac{27}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}1043$	$\cos(F + G + H)$
(60)		$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\right)$ $-0{,}0802$	$\sin(F + G - H)$	$\pm\left(\frac{93}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}3590$	$\cos(F + G - H)$
(63)		$\left(-2 - \frac{1}{2}\sqrt{3\mu}\right)$ $-2{,}0268$	$\sin(F - G + H)$	$\pm\left(\frac{27}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}1043$	$\cos(F - G + H)$
(64)		$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3\mu}\right)$ $-0{,}0802$	$\sin(F - G - H)$	$\pm\left(\frac{93}{8}\sqrt{\mu}\right)$ $+0{,}3590$	$\cos(F - G - H)$
(68)	$+\alpha\gamma\frac{\varepsilon'}{2}$	(-1)	$\sin(F + H - \varpi')$	$\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $-0{,}5774$	$\cos(F + H - \varpi')$
(69)		$\left(\frac{7}{3}\right)$ $+2{,}3333$	$\sin(F - H + \varpi')$	$\pm\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ $+0{,}1925$	$\cos(F - H + \varpi')$
(70)		(-1)	$\sin(F - H - \varpi')$	$\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $-0{,}5774$	$\cos(F - H - \varpi')$
(71)	$+\beta\gamma\frac{\varepsilon'}{2}$	$\left(2 - 8\sqrt{3\mu}\right)$ $+1{,}5720$	$\sin(G + H + \varpi')$		
(72)		$\left(6 + 12\sqrt{3\mu}\right)$ $+6{,}6419$	$\sin(G + H - \varpi')$		
(73)		$\left(6 - 12\sqrt{3\mu}\right)$ $+5{,}3581$	$\sin(G - H + \varpi')$		
(74)		$\left(2 + 8\sqrt{3\mu}\right)$ $+2{,}4280$	$\sin(G - H - \varpi')$		

$$\frac{\zeta}{i} = \quad (suite).$$

(81)	$+\alpha^3\gamma$	$\left(\frac{2}{3}\right)$ $+0{,}667$	$\sin(3F+H)$		
(82)		$\left(-\frac{77}{288}\right)$ $-0{,}267$	$\sin(3F-H)$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{288}\right)$ $+0{,}367$	$\cos(3F-H)$
(125)		$\left(-\frac{1}{16}\right)$ $-0{,}063$	$\sin(F+H)$	$\pm\left(-\frac{29\sqrt{3}}{48}\right)$ $-1{,}047$	$\cos(F+H)$
(126)		$\left(\frac{251}{96}\right)$ $+2{,}615$	$\sin(F-H)$	$\pm\left(-\frac{235\sqrt{3}}{96}\right)$ $-4{,}240$	$\cos(F-H)$
(88)	$+\beta^3\gamma$	$\left(-\frac{7}{24}\right)$ $-0{,}292$	$\sin(3G+H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0{,}866$	$\cos(3G+H)$
(89)		$\left(-\frac{7}{24}\right)$ $-0{,}292$	$\sin(3G-H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $+0{,}866$	$\cos(3G-H)$
(154)		(2)	$\sin(G+H)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $+0{,}866$	$\cos(G+H)$
(155)		(2)	$\sin(G-H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0{,}866$	$\cos(G-H)$
(93)	$+\gamma^3\alpha$	$\left(\frac{53}{72}\right)$ $+0{,}736$	$\sin(3H-F)$	$\pm\left(\frac{61\sqrt{3}}{72}\right)$ $+1{,}467$	$\cos(3H-F)$
(169)		(1)	$\sin(H+F)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ $+0{,}289$	$\cos(H+F)$
(170)		$\left(-\frac{19}{24}\right)$ $-0{,}792$	$\sin(H-F)$	$\pm\left(\frac{73\sqrt{3}}{24}\right)$ $+5{,}268$	$\cos(H-F)$
(175)	$+\gamma^3\beta$	(2)	$\sin(G+H)$		
(176)		(-2)	$\sin(G-H)$		

$$\frac{\zeta}{i} = \quad (suite).$$

(98)	$+\gamma^3\dfrac{\varepsilon'}{2}$	$\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ $-0,333$	$\sin(3\mathrm{H}-v')$	$\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0,193$	$\cos(3\mathrm{H}-v')$
(182)		(-1)	$\sin(\mathrm{H}-v')$	$\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $+0,577$	$\cos(\mathrm{H}-v')$

(129)	$+\alpha^2\beta\gamma$	$\left(\dfrac{9}{4}\right)$ $+2,250$	$\sin(2\mathrm{F}+\mathrm{G}+\mathrm{H})$		
(130)		$\left(-\dfrac{89}{144}\right)$ $-0,618$	$\sin(2\mathrm{F}+\mathrm{G}-\mathrm{H})$	$\pm\left(\dfrac{61\sqrt{3}}{144}\right)$ $+0,734$	$\cos(2\mathrm{F}+\mathrm{G}-\mathrm{H})$
(131)		$\left(-\dfrac{9}{4}\right)$ $-2,250$	$\sin(2\mathrm{F}-\mathrm{G}+\mathrm{H})$		
(132)		$\left(\dfrac{89}{144}\right)$ $+0,618$	$\sin(2\mathrm{F}-\mathrm{G}-\mathrm{H})$	$\pm\left(-\dfrac{61\sqrt{3}}{144}\right)$ $-0,734$	$\cos(2\mathrm{F}-\mathrm{G}-\mathrm{H})$
(210)		(1)	$\sin(\mathrm{G}+\mathrm{H})$		
(211)		(1)	$\sin(\mathrm{G}-\mathrm{H})$		

(137)	$+\alpha^2\gamma\dfrac{\varepsilon'}{2}$	$\left(\dfrac{1}{4}\right)$ $+0,250$	$\sin(2\mathrm{F}+\mathrm{H}+v')$		
(138)		$\left(\dfrac{23}{6}\right)$ $+3,833$	$\sin(2\mathrm{F}+\mathrm{H}-v')$	$\pm\left(-\dfrac{95\sqrt{3}}{36}\right)$ $-4,571$	$\cos(2\mathrm{F}+\mathrm{H}-v')$
(139)		$\left(-\dfrac{1}{12}\right)$ $-0,083$	$\sin(2\mathrm{F}-\mathrm{H}+v')$	$\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right)$ $+0,096$	$\cos(2\mathrm{F}-\mathrm{H}+v')$
(140)		$\left(\dfrac{29}{2}\right)$ $+14,500$	$\sin(2\mathrm{F}-\mathrm{H}-v')$	$\pm\left(-\dfrac{83\sqrt{3}}{12}\right)$ $-11,980$	$\cos(2\mathrm{F}-\mathrm{H}-v')$
(214)		$\left(\dfrac{4}{3}\right)$ $+1,333$	$\sin(\mathrm{H}+v')$	$\pm\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ $+0,385$	$\cos(\mathrm{H}+v')$
(215)		$\left(\dfrac{5}{2}\right)$ $-2,500$	$\sin(\mathrm{H}-v')$	$\pm\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $+2,598$	$\cos(\mathrm{H}-v')$

$\frac{\xi}{i} =$ (*suite*).

(146)	$+\beta^2\alpha\gamma$	(2)	$\sin(2G+F+H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G+F+H)$
(149)		(-2)	$\sin(2G-F-H)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G-F-H)$
(216)		(-2)	$\sin(F+H)$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ $-1,299$	$\cos(F+H)$
(217)		(6)	$\sin(F-H)$	$\pm\left(-\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ $-3,897$	$\cos(F-H)$
(158)	$+\beta^2\gamma\frac{\varepsilon'}{2}$	(3)	$\sin(2G+H+v')$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G+H+v')$
(159)		(3)	$\sin(2G+H-v')$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $-2,598$	$\cos(2G+H-v')$
(160)		(-3)	$\sin(2G-H+v')$	$\pm\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $-2,598$	$\cos(2G-H+v')$
(161)		(-3)	$\sin(2G-H-v)$	$\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-0,866$	$\cos(2G-H-v')$
(220)		$\left(-\frac{32}{3}\right)$ $-10,667$	$\sin(H+v')$	$\pm\left(-\frac{58\sqrt{3}}{9}\right)$ $-11,162$	$\cos(H+v')$
(221)		(8)	$\sin(H-v')$	$\pm\left(-\frac{58\sqrt{3}}{3}\right)$ $-33,486$	$\cos(H-v')$
(192)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\alpha\gamma$	$\left(\frac{3}{2}\right)$ $+1,500$	$\sin(2v'-F+H)$		
(193)		$\left(\frac{9}{2}\right)$ $+4,500$	$\sin(2v'-F-H)$		
(197)	$+\frac{\varepsilon'^2}{4}\beta\gamma$	(4)	$\sin(2v'+G-H)$		
(199)		(-4)	$\sin(2v'-G-H)$		

$$\frac{\zeta}{i} = \qquad (\textit{suite}).$$

$$+\alpha\beta\gamma\frac{\varepsilon'}{2}\Bigg[\Big(3\Big)\sin(F+G+H+\nu') \tag{234}$$

$$\Bigg(\boxed{\underset{-87,237}{-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}}}\;\underset{+2,250}{\frac{9}{4}}{}^{*}\Bigg)\sin(F+G+H-\nu')\pm\Bigg(\boxed{\underset{+111,525}{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}}}\;\underset{+1,660}{\frac{23\sqrt{3}}{24}}{}^{*}\Bigg)\cos(F+G+H-\nu') \tag{235}$$

$$\Bigg(\underset{-0,667}{-\frac{2}{3}}\Bigg)\sin(F+G-H+\nu')\pm\Bigg(\underset{+0,193}{\frac{\sqrt{3}}{9}}\Bigg)\cos(F+G-H+\nu') \tag{236}$$

$$\Bigg(\boxed{\underset{-87,237}{-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}}}\;\underset{+2,250}{\frac{9}{4}}{}^{*}\Bigg)\sin(F+G-H-\nu')\pm\Bigg(\boxed{\underset{+111,525}{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}}}\;\underset{+2,815}{\frac{13\sqrt{3}}{8}}{}^{*}\Bigg)\cos(F+G-H-\nu') \tag{237}$$

$$\Big(-3\Big)\sin(F-G+H+\nu') \tag{238}$$

$$\Bigg(\boxed{\underset{-87,237}{-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}}}\;\underset{-2,250}{-\frac{9}{4}}{}^{*}\Bigg)\sin(F-G+H-\nu')\pm\Bigg(\boxed{\underset{+111,525}{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}}}\;\underset{-3,969}{-\frac{55\sqrt{3}}{24}}{}^{*}\Bigg)\cos(F-G+H-\nu') \tag{239}$$

$$\Bigg(\underset{+0,667}{\frac{2}{3}}\Bigg)\sin(F-G-H+\nu')\pm\Bigg(\underset{-0,193}{-\frac{\sqrt{3}}{9}}\Bigg)\cos(F-G-H+\nu') \tag{240}$$

$$\Bigg(\boxed{\underset{-87,237}{-\frac{14}{3\sqrt{3\mu}}}}\;\underset{-2,250}{-\frac{9}{4}}{}^{*}\Bigg)\sin(F-G-H-\nu')\pm\Bigg(\boxed{\underset{+111,525}{\frac{31}{9\sqrt{\mu}}}}\;\underset{-5,124}{-\frac{71\sqrt{3}}{24}}{}^{*}\Bigg)\cos(F-G-H-\nu')\Bigg] \tag{241}$$

CHAPITRE V.

EXEMPLE NUMÉRIQUE.

Les calculs effectués dans le présent Chapitre ont pour but :

1° de donner un exemple numérique de la théorie analytique;

2° de rechercher la précision qu'on est en droit d'en attendre, et cela dans des conditions peu favorables à son application, la planète choisie ayant à la fois forte inclinaison et forte excentricité.

Pour neuf positions de cette planète également réparties sur son orbite de 45° en 45°, on a calculé ses coordonnées d'une part d'après la théorie analytique, d'autre part d'après une méthode numérique précise qui sera exposée dans une publication ultérieure.

L'ordre adopté et les formules utilisées sont ceux du Chapitre précédent, nous nous sommes donc borné à indiquer les données et les résultats.

Éléments de départ :

Jupiter (¹), date :
$$\left\{\begin{aligned} M' &= 112^\circ 16' 0'',1 \\ \varepsilon' &= 0,04836756 \\ n' &= 299'',14938 \\ a' &= 0,7162172 \end{aligned}\right. \qquad (\varphi' = 2^\circ 46' 20'',42).$$

Planète Troyenne (²), même date.
$$\left\{\begin{aligned} M &= 81^\circ 26' 35'',9, \\ \varpi &= 332^\circ 49' 59'',3, \\ \theta &= 27^\circ 48' \; 7'',9, \\ j &= 21^\circ 21' \; 2'',3, \\ \varphi &= 8^\circ 14' \; 7'',92, \\ n &= 301'',12514, \\ a &= 0,7143113. \end{aligned}\right.$$

(¹) Éléments moyens de Jupiter 1920,0 t. m. Greenw.

(²) Éléments voisins de ceux de la planète (617) Patrocle.

Détermination des constantes approchées :

$$\psi = -60^\circ,$$
$$\varphi'_1 = 117^\circ 16' 28'', 44.$$

$$h = +0,01387496, \qquad \frac{1}{i} k = +0,14256918,$$

$$h' = -0,02216468, \qquad \frac{1}{i} k' = +0,04299010,$$

$$\mathrm{h} = +0,04104074, \qquad \frac{1}{i} \mathrm{k} = +0,01753838,$$

$$p = +0,16127156, \qquad \frac{1}{i} q = +0,09114044.$$

Premier système de constantes approchées :

$$\mathrm{F} = 70^\circ.\ 6',2, \qquad \log\alpha = 9,02490,$$
$$\mathrm{G} = 23.\ 8,3, \qquad \log\beta = 8,64965,$$
$$\mathrm{H} = 29.28,3, \qquad \log\gamma = 9,26774.$$

On adopte après six approximations successives :

$$\Delta_1 = +0,00614501, \qquad \Delta'_1 = +0,00677983,$$
$$\Delta_2 = +0,00296779, \qquad \Delta'_2 = +0,00242566,$$
$$\Delta_3 = +0,00106885$$

et le système de constantes approchées

$$\mathrm{F}_1 = 72^\circ.\ 8'.38'',5, \qquad \log\alpha = 8,9889850,$$
$$\mathrm{G}_1 = 21.51.55,6, \qquad \log\beta = 8,6456386,$$
$$\mathrm{H}_1 = 29.15.59,9, \qquad \log\gamma = 9,2587984.$$

Calcul des arguments :

$$f = f_0 + 0,00041523 = +0,99717276,$$
$$g = g_0 - 0,0026291 = +0,0778348,$$
$$h = h_0 + 0,00000921 = +1,00000921.$$

Nous nous sommes donné les neuf valeurs de φ' dont se déduisent les valeurs correspondantes de F, G, H.

v'	287°. 1′.28″,9	334°.59′.57″,3	24°.29′.25″,6	72°.29′.36″,7	117°.16′.28″,4	159°.17′.41″,2	200°.16′.42″,3	242°.16′.40″,3	287°. 1′.28″,9
F.........	242.25.55,4	290.16.15,5	339.37.20,1	27.29.22,6	72. 8.38,5	114. 2 43,6	154.54.47,6	196.47.38,1	241.24.51,2
G	7. 3.26,6	10.47.29,3	14.38.37,0	18.22.47,7	21.51.55,6	25. 8. 9,9	28 19.33,7	31.35 42,2	35. 4.40,5
H	199. 0.54,1	246.59.24,1	296.28.54,0	344.29. 6,7	29.15.59,9	71.17.14,1	112.16.16,6	154.16.15,9	199. 1. 6,0

Calcul de ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$. — Les données qui précèdent ont servi de base au calcul de ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$ pour les neuf positions de la petite planète. Nous indiquons ci-après les résultats obtenus et comme exemple les valeurs numériques de quelques termes des développements.

Il est avantageux pour la détermination des constantes de calculer séparément les termes de ξ et de $\frac{\eta}{i}$ qui dépendent de γ.

La méthode adoptée est celle qui fait disparaître les coefficients en $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

Développements de ξ.

Termes indépendant de γ.

Forme du terme.	N° du monome.									
cos F	1	+0,045072	—0,033742	—0,091294	—0,086394	—0,029862	+0,039682	+0,088202	+0,093236	+0,046598
cos G	2	— 4702	— 4654	— 4584	— 4496	— 4397	— 4289	— 4170	— 4035	— 3877
cos 2 F	4	— 2722	— 3619	+ 3607	+ 2733	— 3866	— 3181	+ 3050	+ 3967	— 2581
cos(F + G)	10	— 1566	+ 2306	+ 4447	+ 3112	— 313	— 3382	— 4462	— 2968	+ 505
cos(F — G)	11	+ 2343	— 679	— 3377	— 4071	— 2635	— 78	+ 2458	+ 3987	+ 3695
cos(F + v')	14	+ 2327	+ 195	— 2361	+ 410	+ 2335	— 138	— 2359	— 449	+ 2319
cos(F — v')	15	— 1681	— 1677	— 1673	— 1669	— 1665	— 1662	— 1658	— 1655	— 1651
cos(G + v')	18	— 832	— 1976	— 1581	+ 31	+ 1542	+ 2032	+ 1348	— 138	— 1609
cos(G — v')	19	+ 394	+ 1846	+ 2242	+ 1334	— 215	— 1586	2254	1957	— 705
sin F	23	— 2584	— 2734	— 1015	+ 1345	+ 2774	+ 2662	+ 1236	— 842	— 2559
sin(F — G)	124	+ 106	+ 127	+ 74	— 20	— 99	— 129	— 103	— 33	+ 57
sin(G — v')	213	+ 88	+ 52	— 15	— 73	— 89	— 64	— 13	+ 46	+ 85
....	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Total...........		+0,032099	—0,049846	—0,100586	—0,093388	—0,042021	+0,025655	+0,076655	+0,084312	+0,035687

Termes dépendant de γ.

cos 2 H	6	+0,025926	—0,022856	—0,019825	+0,028205	+0,017182	—0,026139	—0,023459	+0,020509	+0,025924
cos(2 H — F)	38	+ 6538	+ 6573	+ 2059	— 3748	— 6978	— 6309	— 2499	+ 2661	+ 6590
....	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Total...........		+0,002655	—0,051610	—0,057900	—0,012968	—0,031131	—0,070336	—0,056198	—0,005844	+0,001261
	ξ =	+0,034754	—0,101456	—0,158486	—0,106356	—0,073152	—0,044681	+0,020457	+0,078468	+0,036948

Développements de $\frac{\eta}{i}$.

Termes indépendant de γ.

Forme du terme.	N° du monome.									
sin F	1	−0,172852	−0,182914	−0,067898	+0,090005	+0,185598	+0,178070	+0,082674	−0,056339	−0,171222
sin G	2	+ 10867	+ 16560	+ 22359	+ 27888	+ 32939	+ 37568	+ 41966	+ 46337	+ 50828
sin 2F	4	+ 1947	− 1543	− 1549	+ 1943	+ 1385	− 1766	− 1823	+ 1313	+ 1994
sin(F + G)	10	− 3746	− 3426	− 400	+ 2870	+ 3989	+ 2614	− 226	− 2990	− 3973
sin(F − G)	11	+ 3860	+ 4627	+ 2692	− 743	− 3608	− 4690	− 3767	− 1198	+ 2081
sin(F + ν')	14	+ 434	− 2364	+ 170	+ 2336	− 388	− 2368	− 199	+ 2329	+ 475
sin(F − ν')	15	+ 1689	+ 1693	+ 1697	+ 1701	+ 1705	+ 1709	+ 1712	+ 1716	+ 1719
sin(G + ν')	18	− 3441	− 925	+ 2379	+ 3769	+ 2466	− 291	− 2828	− 3761	− 2315
sin(G − ν')	19	+ 4868	+ 2890	− 845	− 4004	− 4920	− 3546	− 692	+ 2522	+ 4699
sin(2F + G)	24	+ 310	− 325	− 184	+ 399	+ 100	− 399	− 155	+ 378	− 157
sin(2F − G)	25	− 374	+ 271	+ 348	− 252	− 357	+ 165	+ 415	− 15	− 422
sin(2F − G − ν')	136	+ 9	+ 39	+ 47	+ 28	− 4	− 33	− 47	− 42	− 16
....	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Total........		−0,182593	−0,192869	−0,070105	+0,098089	+0,192478	+0,182673	+0,093612	−0,033875	−0,140683

Termes dépendant de γ.

sin 2H	6	−0,020267	−0,023672	+0,026260	+0,016958	−0,028059	−0,019993	+0,023075	+0,025731	−0,020270
sin(2H − F)	38	+ 3942	− 3838	− 9142	− 8139	− 2247	+ 4556	+ 8946	+ 8863	+ 3787
....	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Total............		−0,006219	−0,020289	+0,035104	+0,032939	−0,004450	+0,013005	+0,054143	+0,048146	−0,007693
Terme séculaire....		+ 35	+ 26	+ 17	+ 8	0	− 7	− 13	− 19	− 24
$\frac{\eta}{i}$ =		−0,188777	−0,213132	−0,034984	+0,131036	+0,188028	+0,195671	+0,147742	+0,014252	−0,148400

Développements de $\frac{\zeta}{i}$.

sin H	3	−0,118250	−0,334058	−0,324854	−0,097080	+0,177430	+0,343750	+0,335860	+0,157555	−0,118270
sin(F + H)	12	+ 17543	+ 848	− 17640	+ 3681	+ 17390	− 1649	− 17719	− 2755	+ 17494
sin(F − H)	13	+ 36423	+ 36332	+ 36237	+ 36145	+ 36059	+ 35978	+ 35899	+ 35818	+ 35732
sin(G + H)	16	− 6769	− 15052	− 11601	+ 770	+ 11991	+ 15304	+ 9776	− 1574	− 12475
....	...	....	....	....	....	....	....	....	....	....
$\frac{\zeta}{i}$ =		−0,064061	−0,293262	−0,301228	−0,043639	+0,242735	+0,379868	+0,347777	+0,176693	−0,079342

Calcul de ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$ *par une méthode numérique.* — D'après les mêmes données et pour les mêmes dates, les perturbations des éléments elliptiques de la petite planète ont été calculées par une méthode purement numérique. On a obtenu les neuf systèmes d'éléments osculateurs :

M	260°.38′.17″,8	305°.43′. 2″,9	351°. 2′.37″,2	36°.24′. 3″,2	81°.26′.35″,9	126°.35′.43″,2	171°.53′. 1″,6	217°.145.6″,9	262°.24′.37″,4
ϖ	332.17.54,3	332.31.45,8	332.32.47.2	332.32.48,4	332.49.59,3	332.58.53,0	332.58.38.7	332.52.59.2	332.58.59,3
θ	27.47.39,7	27.48.12,7	27.48 33.1	27.48.42,0	27.48. 7,9	27.46.59,5	27.46.39.4	27.46.38,1	27.46.36,4
j	21.21.22.2	21.21.42,0	21.21.44.6	21.21.36.4	21.21. 2,3	21.20.49,2	21.20.49.9	21.20.50,6	21.21. 3,0
φ	8.14.10.91	8.13.26,23	8.11 47.52	8.13.15.22	8.14. 7.92	8.12.56,14	8.11.45.48	8.11.43.77	8.12.28,04
$\log a$	0,7142277	0,7139414	0,7137252	0,7139459	0,7143113	0,7145128	0,7146149	0,7146273	0,7145062

qui ont servi de base au calcul de $\xi_1, \frac{\eta_1}{i}, \frac{\zeta_1}{i}$.

$\log r_1$	0,7322489	0,6832226	0,6481173	0,6650498	0,7139315	0,7546249	0,7720772	0,7637654	0,7307399
$\log r'_1$	0,7090930	0,6965679	0,6964929	0,7089267	0,7249343	0,7353072	0,7353648	0,7250832	0,7090930
$v_1 - \varpi$	245°. 5′.30″,9	291°. 1′.50″,5	347°.57′.51″,0	47°.40′.15″,8	97°.53′.21″,6	138°.23′.25″,1	173°.50′.32″,4	208°37′.36″,6	246°45′.50″,3
v'_1	287. 1.28,9	334.59 57,3	24.29.25,6	72.29.36,7	117.16.28,4	159.17.41,2	200.16.42,3	242.16.40,3	287. 1.28,9
ξ_1	+0,0359124	−0,1002925	−0,1582302	−0,1064639	−0,0741681	−0,0452544	+0,0208207	+0,0787685	+0,0377074
$\frac{\eta_1}{i}$	−0,1879251	−0,2136709	−0,0366295	+0,1294046	+0,1870733	+0,1961377	+0,1489481	+0,0153082	−0,1472731
$\frac{\zeta_1}{i}$	−0,0640305	−0,2920001	−0,3006229	−0,0435075	+0,2417252	+0,3781921	+0,3463204	+0,1761088	−0,0793719

Détermination des constantes définitives. — La méthode qui vient d'être appliquée ayant été vérifiée par d'autres calculs précis, on peut considérer qu'elle fournit une représentation rigoureuse du mouvement. et les corrections qu'il convient de faire subir aux constantes approchées pour obtenir les constantes définitives ont été déduites des différences

$$\Delta\xi = \xi_1 - \xi,\ \Delta\frac{\eta}{i} = \frac{\eta_1}{i} - \frac{\eta}{i},\ \frac{\Delta\zeta}{i} = \frac{\zeta_1}{2} - \frac{\zeta}{2}.$$

$\Delta\xi$	+0,001158	+0,001163	+0,000256	−0,000108	−0,001016	−0,000573	+0,000364	+0,000301	+0,000759
$\Delta\frac{\eta}{i}$	+ 852	− 539	− 1646	− 1631	− 955	+ 467	+ 1206	+ 1056	+ 1127
$\Delta\frac{\zeta}{i}$	+ 30	+ 1262	+ 605	+ 131	− 1010	− 1676	− 1457	− 584	− 30

On a obtenu après plusieurs approximations

$$\Delta F = -0{,}00945 \quad \text{ou} \quad -32'.29''$$
$$\Delta\gamma = -0{,}0034007 \quad = \quad -0{,}0006',170;$$

quant aux corrections qui se rapportent aux quatre autres constantes, elles sont négligeables.

En ce qui concerne la correction ΔF, elle a été appliquée sous forme différentielle aux principaux termes des développements de $\xi, \frac{\eta}{i}, \frac{\zeta}{i}$ auxquels il y a lieu d'ajouter respectivement

Correction à ξ......	+0,000813	+0,000840	+0,000373	−0,000227	−0,000725	−0,000887	−0,000548	+0,000162	+0,000791
» $\frac{\eta}{i}$.....	+ 830	− 596	− 1691	− 1522	− 399	+ 814	+ 1570	+ 1616	+ 826
» $\frac{\zeta}{i}$.....	− 419	− 176	− 344	− 514	− 290	− 215	− 391	− 536	− 429

Pour appliquer à γ la correction $\Delta\gamma$, on remarquera que γ^2 est en facteur dans les termes de ξ et de $\frac{\eta}{i}$ qui dépendent de γ, on pourra donc se contenter de multiplier l'ensemble de ces termes par

$$\left(1 + \frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2 = 1 - 0,006788;$$

en outre γ est en facteur dans $\frac{\zeta}{i}$ qu'il suffira de multiplier par

$$1 + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 1 - 0,003400;$$

il faut donc apporter encore à ξ, $\frac{\eta}{i}$, $\frac{\zeta}{i}$ les corrections suivantes :

Correction à ξ.	−0,000018	+0,000350	+0,000393	+0,000088	+0,000211	+0,000477	+0,000381	+0,000040	−0,000009
» $\frac{\eta}{i}$......	+ 42	+ 138	− 238	− 224	+ 30	− 88	− 368	− 327	+ 52
» $\frac{\zeta}{i}$......	+ 218	+ 998	+ 1025	+ 148	− 825	− 1291	− 1182	− 601	+ 270

Comparaison des résultats. — La théorie analytique, d'une part, la méthode numérique, d'autre part, ont fourni l'ensemble des résultats :

ξ_1................	+0,035912	−0,100293	−0,158230	−0,106464	−0,074168	−0,045254	+0,020821	+0,078769	+0,037707
ξ..................	+0,035549	−0,100266	−0,157720	−0,106495	−0,073666	−0,045091	+0,020290	+0,078670	+0,037730
Résidus........... .	+0,000363	−0,000027	−0,000510	+0,000031	−0,000502	−0,000163	+0,000531	+0,000099	−0,000023
$\frac{\eta_1}{i}$...............	−0,187925	−0,213671	−0,036630	+0,129405	+0,187073	+0,196138	+0,148948	+0,015308	−0,147273
$\frac{\eta}{i}$................	−0,187905	−0,213590	−0,036913	+0,129290	+0,187659	+0,196397	+0,148944	+0,015541	−0,147522
Résidus............	−0,000020	−0,000081	+0,000283	+0,000115	−0,000586	−0,000259	+0,000004	−0,000233	+0,000249
$\frac{\zeta_1}{i}$................	−0,064031	−0,292000	−0,300623	−0,043508	+0,241725	+0,378192	+0,346320	+0,176109	−0,079372
$\frac{\zeta}{i}$.................	−0,064262	−0,292440	−0,300547	−0,044005	+0,241620	+0,378362	+0,346204	+0,175556	−0,079501
Résidus............	+0,000231	+0,000440	−0,000076	+0,000497	+0,000105	−0,000170	+0,000116	+0,000553	+0,000129

Le résidu le plus important étant égal à 0,000586, la position de la planète est déterminée à deux minutes d'arc près malgré une inclinaison de $21°$, et il conviendrait pour obtenir des résultats plus précis de calculer des termes d'ordre plus élevé dans les développements de ξ, η, ζ; mais les résidus sont nettement périodiques et c'est en cela que réside l'avantage de la théorie analytique; celle-ci en effet a permis de représenter le mouvement des Planètes Troyennes avec une précision indépendante du temps.

Vu et approuvé :

Paris le 27 juin 1925.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

Pour le Recteur :

L'INSPECTEUR D'ACADEMIE,

D. ROUSTAN

ERRATA.

Pages.	Lignes.		*Au lieu de :*	*Lisez :*
5	2		$\rho' \dfrac{d^2\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dv'^2} = \rho - 1$	$\rho' \dfrac{d^2\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{dv'^2} = \rho' - 1$
9	23		$\alpha_{-1}' = \alpha e^{-iF'},\quad \beta_{-1} = \beta e^{-iG'},\quad \gamma_{-1} = \gamma e^{-iH'}$	$\alpha_{-1} = \alpha e^{-iF},\quad \beta_{-1} = \beta e^{-iG},\quad \gamma_{-1} = \gamma e^{-i}$
13	9		$+ (r_1 + r_{-1})h + s_1 + s_{-1}$	$+ (r_1 - r_{-1})h + s_1 - s_{-1}$
13	13		$+ (r_1 + r_{-1})h_0 + s_1 + s_{-1}$	$+ (r_1 - r_{-1})h_0 + s_1 - s_{-1}$
14	3	en remontant	$\dfrac{\partial R}{\partial \xi}$	$\dfrac{\partial R}{\partial \zeta}$
14	6	en remontant	avec r_1 et r_{-1} impairs	avec la somme $r_1 + r_{-1}$ impaire
24	4	en remontant	$\frac{5}{2}(-3\xi^2 + 2\chi\xi\eta - 3\eta^2)$	$\frac{3}{2}(-3\xi^2 + 2\chi\xi\eta - 3\eta^2)$
38	4		$i\left[F_0 + \left(1 - \frac{27}{8} + \ldots\right)v' - v'\right]$	$i\left[F_0 + \left(1 - \frac{27}{8}\mu + \ldots\right)v' - v'\right]$
38	5		$i\left[v' - F_0 - \left(1 - \frac{27}{8} + \ldots\right)v'\right]$	$i\left[v' - F_0 - \left(1 - \frac{27}{8}\mu + \ldots\right)v'\right]$
38	7		$\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{iF_0}\left(1 - \frac{27}{8}\mu + \ldots\right)$	$\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{iF_0}\left(1 - i\frac{27}{8}\mu v' + \ldots\right)$
38	8		$\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{-iF_0}\left(1 + \frac{27}{8}\mu + \ldots\right)$	$\alpha\frac{\varepsilon'}{2}e^{-iF_0}\left(1 + i\frac{27}{8}\mu v' + \ldots\right)$
43	9	colonne A_p	$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{3\mu} + \frac{59}{32}\mu$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{3\mu} - \frac{59}{32}\mu$
44	10	colonne $-Y_p$ ou $-Z_p$	$3\sqrt{3\mu} - \frac{27}{4}\mu$	$3\sqrt{3\mu} + \frac{27}{4}\mu$
44	11	colonne $-Y_p$ ou $-Z_p$	$3\sqrt{3\mu} + \frac{27}{4}\mu$	$3\sqrt{3\mu} - \frac{27}{4}\mu$
60	6	colonne M_p	$\beta_1\beta'_1\alpha_1\varepsilon'_{-1}$	$\beta_1\beta_{-1}\alpha_1\varepsilon'_{-1}$
70	13		*du Chapitre I*	*du Chapitre II*
72	4	en remontant	$\beta < 0,3$	$\lvert\beta \sin G_0\rvert < 0,3,\quad \lvert\beta \cos G_0\rvert < 0,3$
82	12		$\operatorname{tang}([\varpi] = \varpi_1)$	$\operatorname{tang}([\varpi] - \varpi_1)$
90	4	en remontant	$\sin(F - V')$	$\sin(F + V')$
90	3	en remontant	$\sin(F + V')$	$\sin(F - V')$
96	1	supprimer $\alpha\gamma^2$		
100	3	en remontant	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{5}\mu$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{4}\mu$
120	5	en remontant	$-0,0006',170$	$-0,0006170$

Thèse Paloque.