FLORIN VASILESCO

Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__56__1_0>

N° D'ORDRE
1846

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par Florin VASILESCO

Licencié es-Sciences

1re THÈSE. — Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 28 Mai 1925 devant la Commission d'Examen.

MM. GOURSAT, *President.*
MONTEL, CHAZY, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1925

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

Doyen .... MOLLIARD, Professeur, Physiologie végétale.

Doyen honoraire .... P. APPELL.

Professeurs honoraires ... P. PUISEUX, C. VÉLAIN, V. BOUSSINESQ, A. HALLER, A. JOANNS.

Professeurs ....

E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
JANET	Électrotechnique générale.
WALLERANT	Minéralogie.
ANDOYER	Astronomie.
PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
HAUG	Géologie.
H. LE CHATELIER ...	Chimie générale.
GABRIEL BERTRAND ..	Chimie biologique.
Mme P. CURIE	Physique générale et radioactivité.
CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
G. URBAIN	Chimie minérale.
EMILE BOREL	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
MARCHIS	Aviation.
JEAN PERRIN	Chimie physique.
ABRAHAM	Physique.
CARTAN	Géométrie supérieure.
LAPICQUE	Physiologie.
GENTIL	Géographie physique.
VESSIOT.	Théorie des groupes et calcul des variations
COTTON	Physique générale.
DRACH	Application de l'analyse à la géométrie.
C. FABRY.	Physique.
C. PÉREZ	Zoologie.
A. LEDUC	Physique théorique et physique céleste.
LÉON BERTRAND	Géologie appliquée et géologie régionale.
R. LESPIEAU	Théories chimiques.
E. RABAUD	Biologie expérimentale.
P. PORTIER	Physiologie comparée.
E. BLAISE	Chimie organique.
P.-A. DANGEARD	Botanique.
C. MAURAIN	Physique du globe.
P. MONTEL	Mathématiques générales.
P. WINTREBERT	Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ	Biologie maritime.
M. TIFFENEAU	Chimie (Enseignement P. C. N.)
N	Mécanique rationnelle.
HÉROUARD	Zoologie.
RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
V. AUGER	Chimie analytique.
M. GUICHARD	Chimie minérale.
A. GUILLET	Physique.
G. JULIA	Mathématiques générales.
C. MAUGUIN	Minéralogie.
L. BLARINGHEM	Botanique.
A. MICHEL-LEVY	Pétrographie.

Secrétaire .... D. TOMBECK.

75835 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

M. HENRI LEBESGUE

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

Hommage de respectueuse admiration.

A

MA MÈRE

A

MON PÈRE

Hommage de piété filiale.

PREMIÈRE THÈSE

ESSAI

SUR LES

FONCTIONS MULTIFORMES DE VARIABLES RÉELLES

Introduction.

Le sens du mot *fonction*, qui désignait primitivement une correspondance univoque entre un nombre x (la variable), et un nombre y (la fonction), correspondance donnée par des expressions analytiques simples, a subi bien des transformations.

On a abandonné, depuis Dirichlet, la nature particulière analytique de la correspondance de x à y, en la supposant toujours univoque, mais absolument quelconque. On a considéré plusieurs variables au lieu d'une. Plus récemment, divers auteurs (1) ont étudié des fonctions d'une infinité dénombrable de variables. MM. Arzelà (2) et Volterra (3) ont étudié des fonctions où le rôle de la variable est joué par une courbe (fonctions de lignes) et M. Hadamard (4) a considéré des fonctions dépendant d'une fonction ordinaire (fonctionnelle).

(1) *Voir* notamment Le Roux, *Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. IV, 1904).

(2) *Funzioni di linee* (*Rendiconti della R Accademia dei Lincei*, vol. V, 1er semestre, 1899).

(3) *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire* (*Acta matematica*, t. XII, 1889).

(4) *Sur les opérations fonctionnelles* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 136, 1er semestre 1903, p. 351-354).

Enfin, M. Fréchet [1] a généralisé ces différentes notions en considérant des opérations fonctionnelles définies sur des ensembles d'éléments abstraits.

Dans toutes ces extensions de la notion de fonction, c'est l'être qui joue le rôle de variable qui a été modifié.

L'être qui joue le rôle de fonction a été, lui aussi, modifié et l'on a considéré des fonctions fonctions de lignes.

J'ai pensé qu'il y aurait lieu de considérer des correspondances plus voisines des fonctions ordinaires, celles où aux nombres variables (en nombre fini) correspondent plusieurs nombres valeurs de la fonction [2]. Une telle correspondance est une *fonction multiforme de variables réelles.*

Ces fonctions multiformes se sont, depuis longtemps, présentées aux mathématiciens, soit lorsque la correspondance entre x et y était donnée par une équation en x et y, soit autrement. C'est ce qu'on appelle les fonctions à plusieurs déterminations. Mais leur rencontre apparaissait toujours comme un obstacle devant lequel on s'arrêtait, lorsqu'on ne pouvait pas le tourner en *uniformisant* ces fonctions.

D'autre part, une série non convergente de fonctions a, pour toute valeur de la variable, plusieurs points limites. Elle définit ainsi une fonction multiforme qui lui est intimement liée et dont l'étude paraît devoir conduire à des résultats intéressants relativement à la série.

Malgré les manières naturelles dont elles s'introduisent dans l'Analyse, les fonctions multiformes n'ont jamais été considérées. Ce travail est, à ma connaissance, le premier essai d'une étude directe de ces fonctions.

Cependant, on a étudié récemment l'ensemble des points (x, y) défini par une correspondance non univoque entre x et y [3]. Mais l'étude qu'on en a faite n'est pas autre chose que l'étude d'un ensemble de points et fait disparaître entièrement le rôle de x comme variable.

---

[1] *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906).

[2] On pourra après faire varier l'être « variable ».

[3] *Fundamenta Mathematicæ* (voir les différents volumes de cette Collection).

Par exemple, dans le cas de la série non convergente, l'étude de l'ensemble des points limites peut être utile à celle de la série, mais cet ensemble se présente, ainsi que nous l'avons dit plus haut, comme une fonction multiforme de x, et il paraît vraisemblable que c'est seulement en le considérant ainsi que l'on pourra arriver à des résultats concernant la série.

C'est en vue d'applications ultérieures à de telles fonctions multiformes de l'analyse classique, que je me suis demandé dans quelle mesure les notions les plus simples relatives aux fonctions ordinaires $y(x)$ peuvent être étendues aux fonctions multiformes.

Cette étude est donc préparatoire. Elle fait apparaître la possibilité de généralisations qui peuvent être intéressantes et utiles, tant que l'on n'a à s'occuper que des questions de voisinage, de continuité, de limite.

Dans le premier Chapitre, je résous quelques questions relatives aux ensembles de points, dont j'aurai besoin pour la suite. Je définis, en particulier, la notion d'*écart* de deux ensembles, intimement liée à celle de *limite* d'une suite d'ensembles.

Dans le Chapitre suivant, je pose d'abord quelques définitions générales relatives aux fonctions multiformes, notamment la définition de *l'opération réunion*. On dit qu'une fonction est la réunion d'autres fonctions, lorsque ses valeurs s'obtiennent, en chaque point, en réunissant ensemble les valeurs des autres fonctions en ce point. C'est là une opération appartenant en propre aux fonctions multiformes puisque son application aux fonctions uniformes fait sortir de la famille de ces fonctions, tandis que, si on l'applique aux fonctions multiformes, on obtient encore une fonction multiforme. Cette opération joue un rôle important dans la théorie de ces fonctions.

Je consacre le paragraphe II de ce Chapitre à l'étude des fonctions multiformes continues. Je définis d'abord la continuité en un point P pour une valeur y de la fonction et déduis de là la définition de la fonction continue, ainsi que la définition de la continuité en un point P., On peut, en effet, définir deux espèces de continuité suivant que l'on considère une valeur ou toutes les valeurs de la fonction en P. Je donne ensuite quelques théorèmes sur les fonctions continues, qui les rattachent aux fonctions continues ordinaires et j'établis deux théorèmes fondamentaux grâce auxquels je réussis à parer en parties aux difficultés qui proviennent des difficultés, dont je parlerai tout à l'heure. Les fonctions multiformes continues, étant les fonctions multiformes les plus simples, je me suis efforcé de faire ressortir cette simplicité ainsi que l'analogie avec les fonctions continues ordinaires. Je démontre en particulier que *toute fonction multiforme continue peut être représentée, à ε près, par une fonction à un nombre fini de branches qui sont des polynomes*. Enfin j'obtiens le résultat suivant : les fonctions multiformes continues ne sont pas en général une conséquence des fonctions continues ordinaires et j'entends par là, qu'elles ne peuvent pas être obtenues à partir de celles-ci par l'opération réunion.

Dans le Chapitre III, je donne quelques théorèmes relatifs aux suites de fonctions. Le Chapitre IV est consacré à l'étude des deux oscillations des fonctions multiformes correspondant aux deux espèces de continuités. Dans cet ordre d'idées, je donne un théorème sur les fonctions multiformes, qui est un cas particulier de celui que je considère dans une Note à la fin de ce travail, et que j'utilise pour la théorie des fonctions uniformes.

Dans le Chapitre V, j'établis, d'abord, le théorème analogue à celui de M. Baire pour les fonctions uniformes et j'étends aux fonctions multiformes sa classification des fonctions. Je définis *les fonctions multiformes représentables analytiquement* comme pouvant être obtenues par des passages à la limite, à partir des fonctions de l'analyse classique à un nombre fini de branches polynomes. Je m'occupe ensuite de la représentabilité analytique des fonctions implicites (qui sont des fonctions multiformes) définies par des équations $f(x, y, \ldots) = 0, \ldots$, les fonctions f étant représentables analytiquement. Je montre comment se pose ce problème, qui apparaît comme étant beaucoup plus compliqué que dans le cas où les fonctions implicites seraient uniformes et je trouve que, si les fonctions f sont de classe 0, les fonctions implicites sont de classe 0 ou 1.

Dans le dernier Chapitre, je donne des exemples de fonctions multiformes, qui me conduisent à distinguer une nouvelle opération particulière aux fonctions multiformes, qui consiste à « définir » une fonction par une suite de fonctions.

D'une façon générale, j'ai obtenu la généralisation des considérations relatives aux fonctions uniformes qui ne faisaient intervenir que l'idée de limite.

Au contraire, toute une série de généralisations, auxquelles il semble pourtant difficile de renoncer, paraissent impossibles à cause de la difficulté, pour ne pas dire l'impossibilité, de définir pour les fonctions multiformes les opérations arithmétiques et en particulier l'addition. Ces difficultés, si elles n'étaient pas écartées dans la suite, semblent devoir limiter considérablement le champ des applications. Pourtant, les résultats positifs déjà obtenus laissent possible, comme on l'a vu, toute une série de considérations.

D'ailleurs, si les opérations arithmétiques font défaut, nous avons, en compensation, l'opération nouvelle : réunion.

La réunion est, en effet, une opération dont on peut se servir souvent ; il en est de même de celle qui consiste à « définir » une fonction par une suite de fonctions, opération analogue à celle des passages à la limite et qui, dans le cas des fonctions uniformes, se confond avec celle ci. Enfin, la possibilité d'effectuer des constructions de fonctions multiformes, et non plus seulement de fonctions uniformes, peut faciliter les démonstrations mêmes dans la théorie des fonctions uniformes. On peut en voir des exemples aux théorèmes des n^{os} 21, 43 et 58.

J'ai réussi, par exemple, à me passer des opérations arithmétiques par ces moyens, dans la démonstration du théorème analogue à celui de M. Baire. J'ai pourtant suivi là une méthode ne différant pas, en principe, de celle que M. Lebesgue a utilisée pour la démonstration du théorème de M. Baire, et cependant la démonstration de M. Lebesgue semble basée sur les opérations arithmétiques. Voir encore le théorème du n° 25.

Il est donc possible que, par ces moyens ou par d'autres analogues particuliers aux fonctions multiformes, on puisse arriver à se passer complètement des opérations arithmétiques.

En signalant ainsi quelques-unes des difficultés auxquelles se heurte la théorie des fonctions multiformes, je souhaite qu'elles puissent être écartées. Il est à croire que les efforts qu'on y consacrera ne seront pas inutiles; qu'il me soit permis de rappeler ce qui est arrivé naguère pour la théorie des fonctions discontinues ([1]). Et, en tout cas, ce ne serait pas faire œuvre entièrement inutile que de montrer que certaines considérations sur lesquelles on aurait pu compter, sont sans espoir.

En terminant, je tiens à exprimer à mon Maître, M. Henri Lebesgue, ma profonde gratitude pour tout ce que je lui dois, et, en particulier, pour ses conseils qui m'ont été si précieux, et pour les encouragements qu'il m'a donnés.

CHAPITRE I.

NOTIONS SUR LES ENSEMBLES DE POINTS.

1. Nous considérerons dans ce Chapitre seulement les ensembles linéaires, les notions que nous poserons s'étendant d'elles-mêmes à un espace quelconque. De même, nous supposerons ces ensembles fermés et finis (bornés), le cas des ensembles quelconques s'y ramenant comme on le verra dans la suite.

Soit E un tel ensemble et de chacun de ses points comme centre, menons sur le segment considéré un intervalle i de longueur 2ε. L'ensemble de ces intervalles constitue un ensemble de points que j'appellerai $I(\varepsilon)$. Il paraît évident que cet ensemble est fermé; néanmoins, j'en veux indiquer la démonstration pour éviter d'avoir, par la suite, à en développer d'autres analogues à celle-ci. Soit

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots$$

une suite de points de $I(\varepsilon)$ tendant vers un point limite η. Soit de même

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

une suite de points de E tels que η_n appartienne à l'intervalle i relatif à y_n. On peut supposer que la suite des y_n (qui peuvent être con-

([1]) Voir la *Notice sur les Travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue* (Toulouse, imp. Edouard Privat, 1922).

fondus) n'a qu'un seul point limite y, sans quoi nous en extrayerions une autre n'ayant qu'un seul point limite et l'on ne considérerait que les η_n correspondants. Il est évident que η se trouve dans l'intervalle i relatif à y et fait, par conséquent, partie de $I(\varepsilon)$.

2. Écart de deux ensembles. — Soient E et E′ deux ensembles fermés et bornés, ε un nombre positif donné et $I(\varepsilon)$, $I'(\varepsilon)$ les ensembles d'intervalles correspondants. Nous dirons que *les ensembles* E *et* E′ *diffèrent de* ε *au plus lorsque, dans chaque intervalle* i *de* $I(\varepsilon)$, *il y a au moins un point de* E′ *et que l'ensemble* E′ *est compris dans* $I(\varepsilon)$.

Cette définition est symétrique par rapport à E et E′ comme on s'en aperçoit facilement. D'ailleurs elle est équivalente à la suivante :

Les ensembles E *et* E′ *diffèrent de* ε *au plus lorsque, dans chaque intervalle* i *de* $I(\varepsilon)$, *il y a un point de* E′ *et, réciproquement, dans chaque intervalle* i' *de* $I'(\varepsilon)$ *il y a un point de* E [1].

Lorsque deux ensembles diffèrent de ε au plus, la borne inférieure des nombres ε, que j'appellerai λ, est telle que les ensembles diffèrent également de λ au plus. Nous dirons que λ *est l'écart des deux ensembles* ou encore que *les ensembles diffèrent de* λ.

Il est facile de s'assurer que :

Si l'ensemble E_1 *diffère de* E *de* ε *au plus et* E_2 *diffère de* E_1 *de* ε' *au plus, alors* E_2 *diffère de* E *de* $\varepsilon + \varepsilon'$ *au plus.*

3. Suite d'ensembles fermés. — Soit

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_p, \quad \ldots \tag{1}$$

une suite d'ensembles fermés et bornés. Nous dirons qu'*elle tend, à* ε *près, vers l'ensemble* E *lorsque, quel que soit* ε' *supérieur à* ε, *dans chacun des intervalles* i *de* $I(\varepsilon')$, *il y a un point de chaque ensemble* E_p *à partir d'un certain indice* n *variable avec* i *et que tous les points des ensembles de la suite, à partir d'un certain rang, sont compris dans* $I(\varepsilon')$.

Nous dirons de même que :

La suite tend vers l'ensemble E, *lorsqu'elle tend vers* E *à* ε *près, quel que soit* ε.

---

(1) Ou encore lorsque E′ est compris dans $I(\varepsilon)$ et E dans $I'(\varepsilon)$.

Observons que cette dernière définition peut s'énoncer comme la précédente, en y supprimant les mots « à ε près » et « supérieur à ε ». Elle est aussi équivalente à la suivante :

La suite considérée tend vers l'ensemble E *lorsque tout point de* E *est la limite unique d'une suite de points appartenant respectivement à chacun des ensembles de la suite et que, de plus, tous les points limites de telles suites appartiennent à* E.

Supposons maintenant que la suite (1) tende vers l'ensemble E à $\frac{\varepsilon}{2}$ près (¹). En vertu de l'observation précédente, l'ensemble $I(\varepsilon)$ est tel qu'il contient tous les points des ensembles E_p à partir d'un certain indice et que chacun des intervalles i qui le compose contient au moins un point des ensembles E_p à partir d'un autre indice n variable avec i.

Tout point de E est intérieur à un intervalle i ; donc, d'après un théorème de M. Borel étendu par M. de la Vallée Poussin (²), on peut trouver un nombre fini d'intervalles i tels que, tout point de E soit intérieur à l'un d'eux. A chacun de ces intervalles il correspond un nombre n. Soit N un entier supérieur à tous ces n.

Si nous menons autour de chaque point de E comme centre un intervalle de longueur 4ε, il est évident que chacun de ces intervalles contient au moins un point de E_p, quel que soit p supérieur à N. Nous avons donc la proposition suivante :

Si la suite (1) *tend vers l'ensemble* E *à* $\frac{\varepsilon}{2}$ *près, alors l'ensemble* $I(2\varepsilon)$ *est tel qu'il contient tous les points des ensembles* E_p, *à partir d'un certain indice et que chacun de ses intervalles contient au moins un point de* E_p, *quel que soit p supérieur au nombre fixe* N.

On peut remarquer que si une suite d'ensembles tend vers l'ensemble E, alors, quel que soit ε, il existe un nombre n tel que, dans chaque intervalle i de $I(\varepsilon)$, il y ait un point de chaque ensemble E_p quel que soit l'entier $p \geqq n$, tous ces ensembles étant compris dans l'ensemble $I(\varepsilon)$. Ceci résulte de la proposition ci-dessus.

(¹) On pourrait remplacer $\frac{\varepsilon}{2}$ par un nombre positif quelconque inférieur à ε.

(²) *Voir* DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue*..., p. 14.

Cette remarque nous permettra de donner une nouvelle définition de la limite d'une suite d'ensembles.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'ensembles tende vers un ensemble E *est que, quel que soit* ε, *on puisse trouver un nombre n tel que tout ensemble d'indice supérieur à n diffère de* E *de* ε *au plus.*

4. Considérons une suite d'ensembles fermés, bornés

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots. \tag{1}$$

Un point [1] est limite pour (1) lorsqu'il est aussi la limite d'une suite de points appartenant respectivement à une suite d'ensembles extraite de (1). L'ensemble E de tous les points limites sera dit *l'ensemble défini par la suite considérée.* E est évidemment fermé. On peut énoncer cette proposition :

Pour qu'un ensemble E *fermé et borné soit l'ensemble défini par la suite* (1), *il faut et il suffit que, quelque soit* ε : 1° *dans tout intervalle i de* I (ε) *relatif à* E *il y ait des points d'une infinité d'ensembles de la suite* (1), *et* 2° *les ensembles* (1) *soient compris dans* I (ε) *à partir d'un certain indice.*

D'après ce qui précède, la condition 1° est nécessaire. Si 2° n'était pas vérifiée, il y aurait à l'extérieur de I(ε) une infinité de points appartenant à une suite extraite de (1). Ces points auraient au moins un point limite n'appartenant pas à E, ce qui n'est pas possible.

Les conditions 1° et 2° sont suffisantes, car 1° prouve que les points de E sont des points limites pour la suite (1) et 2° que ce sont les seuls.

Alors, étant donné un nombre ε, si l'on considère l'ensemble d'intervalles I (ε) relatif à E, on sait qu'on peut couvrir celui-ci par un nombre fini d'intervalles

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_p. \tag{2}$$

Or, dans chacun de ces intervalles, il existe, comme il a été dit,

---

[1] Ce point peut être $\pm\infty$.

une suite de points appartenant respectivement à une suite d'ensembles extraite de (1) et tendant vers son centre.

Appelons alors $\mathcal{E}_n$ l'ensemble somme des p ensembles de la suite (1), auxquels appartiennent les $n^{\text{ièmes}}$ points des suites de points ainsi définies pour chaque intervalle (2). $\mathcal{E}_n$ est aussi fermé. Il est facile de constater qu'à partir d'une certaine valeur de n, tout ensemble de la suite

$$\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \ldots, \quad \mathcal{E}_n, \quad \ldots$$

diffère de E de 2ε au plus.

Ceci résulte de ce que, d'une part, dans tout intervalle i de $I(2\varepsilon)$ relatif à E, il existe un intervalle de (2); d'autre part, $I(2\varepsilon)$ contient tous les $\mathcal{E}_n$ pour n assez grand.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés un nombre ε et un autre nombre N *arbitrairement grand, on peut trouver p ensembles de la suite* (1) *d'indices supérieurs à* N, *dont la somme est un ensemble qui diffère de* E *de ε au plus.*

De cette proposition et de la précédente on conclut que :

On peut grouper [1] *les termes de la suite* (1) *de manière que la nouvelle suite obtenue tende vers* E.

Prenons en effet une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendant vers zéro; on peut déterminer N_1 tel que tout ensemble d'indice supérieur à N_1 soit compris dans $I(\varepsilon)$ relatif à E. Soient $N_1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ les indices des ensembles de (1) dont la somme diffère de E de ε_1 au plus et N_2 un nombre supérieur à n_p tel, que tout ensemble (1) d'indice $> N_2$ soit compris dans I_{ε_2}. Alors en groupant les termes d'indices allant de N_1 à N_2 (N_1 exclu) leur somme diffère de E de ε_1 au plus. En partant de N_2 on déduit de la même manière N_3 et ainsi de suite.

5. Théorème de Cauchy. — *Étant donnée une suite d'ensembles*

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots$$

pour qu'elle tende vers un ensemble limite E, *il faut et il suffit que, quel*

---

[1] Grouper signifie que si $p_1, p_2, \ldots$ est une suite de nombres entiers, on fait la somme des p_1 premiers ensembles de (1), ensuite la somme des p_2 suivants, etc.

que soit ε, *on puisse trouver un entier* n *tel que* E_n *et* E_{n+p} *diffèrent de* ε *au plus, quel que soit l'entier positif* p.

Cette condition est évidemment nécessaire d'après les propositions données à la fin des n^{os} 2 et 3. Elle est suffisante. Soit E l'ensemble défini par cette suite; il est évidemment fini, car l'ensemble $I_n(\varepsilon)$ relatif à E_n comprend tous les E_{n+p}, donc aussi E. De plus, dans chaque intervalle i_n de $I_n(\varepsilon)$, il y a un point de E_{n+p} pour toute valeur de p, donc un point de E. Par conséquent, l'ensemble $I(2\varepsilon)$ relatif à E comprend tous les E_{n+p} et dans chacun de ses intervalles i il y a un point de chaque E_{n+p}. Comme ε est arbitraire, la suite considérée tend vers E.

6. Revenons à la notion d'écart. Il est évident que pour que deux ensembles coïncident, il faut et il suffit que leur écart soit nul.

Si une suite d'ensembles admet un ensemble limite, c'est-à-dire converge vers un ensemble, celui-ci est unique; car s'il y en avait un autre leur écart devrait être nul.

7. Considérons maintenant des ensembles non nécessairement fermés. Si E est un ensemble je désignerai par E^0 l'ensemble somme de E et de son dérivé E'. Cela posé, nous dirons que *deux ensembles* E *et* E_1 *diffèrent de* ε *au plus, lorsqu'il en est ainsi de* E^0 *et* E_1^0. La notion d'écart s'ensuit. De même nous dirons qu'*une suite d'ensembles* E_1, E_2, ... *tend vers un ensemble* E *lorsque l'écart de* E *et* E_n *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$. Je remarque, en passant, que l'ensemble limite E n'est pas unique, mais E^0 est unique. Je bornerai là la transposition des principaux résultats précédents aux ensembles non fermés. On voit comment leur étude se ramène à celle des ensembles fermés.

M. de la Vallée Poussin (¹) avait déjà défini l'ensemble limite d'une suite d'ensembles, mais c'est là une notion essentiellement différente de celle que nous donnons ici. D'ailleurs les points de vue d'où elles sont déduites sont différents. Voici quelle est la définition de M. de la Vallée Poussin.

(¹) Dans son Livre *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire*, p. 9, n° 10.

Si l'on a une suite d'ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., on dit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble limite de la suite précédente si :

1° Tout point de $\mathcal{E}$ appartient aux $\mathcal{E}_i$ à partir d'un certain indice et

2° Tout point appartenant à une infinité d'ensembles $\mathcal{E}_i$ appartient également à tous les $\mathcal{E}_i$ à partir d'un certain indice et à $\mathcal{E}$.

CHAPITRE II.

I. — Fonctions multiformes.

8. Nous allons définir les fonctions multiformes sur un ensemble parfait borné de l'espace à n dimensions pour $n = 1, 2, \ldots$. Presque tous nos raisonnements sont d'ailleurs valables pour l'espace à o dimension introduit par M. Baire (1), dont les points sont les suites d'entiers; mais, dans ce cas, il faudrait prendre certaines précautions de langage qui allongeraient inutilement le texte. On pourrait encore définir des opérations multiformes sur des ensembles abstraits (2), mais c'est là une extension dont nous ne nous occuperons pas ici.

Soit donc Π un ensemble parfait borné de l'espace à n dimensions. Si à chacun de ses points P il correspond un ensemble de valeurs (finies ou non) distinctes, qu'on peut imaginer marquées sur un axe orienté et dont nous pouvons désigner les abscisses sur cet axe par y, l'ensemble de ces valeurs variables avec P constitue une *fonction multiforme de n variables* $F(P)$.

Les points représentatifs, ou, suivant une expression de M. Lebesgue, l'image de cette fonction, sont les points de l'espace à $n+1$ dimensions dont les coordonnées s'obtiennent en adjoignant aux n coordonnées des points P chacun des y correspondants.

9. Soit $F(P)$ une fonction multiforme. Appelons $L(P)$ la fonction uniforme ayant, en chaque point P, comme valeur la borne supérieure

(1) Baire, *Acta mathematica*, t. XXXII.

(2) *Voir* M. Fréchet, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906.

(finie ou non) des valeurs de $F(P)$ De même $l(P)$ sera définie par la borne inférieure. Nous attacherons ainsi à toute fonction multiforme deux fonctions uniformes $L(P)$ et $l(P)$.

Je fais remarquer que les fonctions multiformes comprennent les fonctions uniformes.

Lorsque les valeurs de $F(P)$ en chaque point P forment sur l'axe Oy un segment $y'y''$, nous dirons que $F(P)$ est une *fonction à intervalles.* Une telle fonction est complètement déterminée par ses deux fonctions $L(P)$ et $l(P)$.

Une fonction dont les valeurs en chaque point constituent un ensemble borné est dite *finie.*

Lorsque l'ensemble des valeurs de $F(P)$ en chaque point est fermé, nous dirons que la fonction est *fermée verticalement.*

Considérons un point P et soit

$$(1) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \ldots$$

une suite de points tendant vers P. Désignons par y_i une des valeurs de la fonction en P_i et supposons que la suite

$$(2) \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots$$

tende vers une limite y (finie ou non). Si, quelles que soient les suites (1) et (2) vérifiant ces conditions, les valeurs y sont des valeurs de la fonction au point P, nous dirons que la fonction est *fermée horizontalement en* P.

Si cela a lieu quel que soit P, la fonction sera dite fermée horizontalement.

Une fonction fermée verticalement et horizontalement en P sera dite *fermée* en P.

Une fonction fermée en tout point P, sera dite fermée.

Il est clair qu'une fonction finie et fermée est bornée.

Pour que l'ensemble des points représentatifs d'une fonction bornée soit fermé, il faut et il suffit qu'elle soit fermée horizontalement et verticalement, donc fermée.

Une fonction sera dite, à ε près, fermée horizontalement en un point P lorsque l'ensemble, évidemment fermé, de tous les points y définis plus haut, est compris dans l'ensemble $I(\varepsilon)$ relatif à

$E^0 = E + E'$, E étant l'ensemble des valeurs de F (P) en P et E' son dérivé.

Il est facile de voir que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon' > \varepsilon$, on puisse trouver un domaine (rectangulaire, sphérique) de centre P tel que l'ensemble F (P') en chacun de ses points P' soit compris dans I (ε') relatif à E^0.

Une fonction fermée horizontalement à ε près, quel que soit ε, est fermée horizontalement et inversement.

Enfin, il y a lieu de considérer la propriété suivante :

Une fonction F (P) est à ε près *fermée extérieurement* en P, lorsqu'on peut trouver un domaine de centre P tel que P_1 étant un quelconque de ses points et E_1 l'ensemble F (P_1), l'ensemble E des valeurs de F(P) en P soit compris dans I(ε) relatif à $E_1^0 = E_1 + E_1'$ (1).

Une fonction fermée extérieurement à ε près, quel que soit ε, sera dite fermée extérieurement.

10. L'OPERATION « REUNION ». — Considérons une famille de fonctions multiformes Φ (P). Nous dirons que la fonction F (P) est la *réunion* des fonctions Φ (P) lorsqu'en chaque point P, toute valeur d'une fonction Φ quelconque est une valeur de F et toute valeur de F appartient au moins à une fonction Φ. En d'autres termes, on obtient la fonction F en réunissant toutes les valeurs des fonctions Φ.

L'opération réunion est une opération en quelque sorte inverse de celle que l'on effectue quand on partage une des fonctions multiformes de l'analyse classique en branches uniformes.

II. — FONCTIONS MULTIFORMES CONTINUES.

11. CONTINUITÉ EN UN POINT P POUR UNE VALEUR y_0 (2). — Toutes les fonctions que nous considérerons désormais seront, sauf avis contraire, finies.

---

(1) L'existence de I (ε) relatif à un ensemble suppose bien entendu cet ensemble borné.

(2) Ou encore continuité pour le point (P, y_0).

Nous disons qu'*une fonction multiforme* (1) *est continue en un point* P *pour une de ses valeurs* y_0 *lorsque, quel que soit* ε, *il existe un domaine de centre* P *tel que, pour tout point de* Π *compris dans ce domaine, on puisse trouver une valeur* y *de la fonction satisfaisant à l'inégalité suivante :*

$$|y - y_0| < \varepsilon.$$

On peut énoncer la proposition suivante :

12. *Pour qu'une fonction* F(P) *soit continue en un point* P *pour chacune de ses valeurs, il faut et il suffit qu'elle soit fermée extérieurement en* P.

La condition est évidemment suffisante. Prouvons qu'elle est nécessaire; ε étant un nombre positif arbitraire, on peut trouver pour chaque valeur y_0 de l'ensemble E des valeurs de la fonction en P, un domaine de centre P dans lequel l'inégalité précédente est vérifiée si l'on remplace ε par $\frac{\varepsilon}{3}$. En considérant alors l'ensemble $I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ relatif à $E^0 = E + E'$, on peut couvrir E^0 avec un nombre fini d'intervalles de $I\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. A chaque intervalle i ainsi trouvé, on peut attacher un domaine de centre P; celui qui correspond à son centre si celui-ci fait partie de E, ou s'il n'en fait pas partie on choisira une des valeurs de E qui en est éloignée de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$ et l'on prendra le domaine correspondant à ce point. Soit δ un domaine intérieur à ces domaines (en nombre fini). On vérifie aisément que toute valeur de E est éloignée de moins de ε d'une valeur au moins de $F(P_1)$, P_1 étant un point quelconque de δ. Ceci prouve que F(P) est à ε près fermée extérieurement en P.

13. Soit F(P) une fonction *fermée* en un point P, *fermée verticalement* dans son voisinage et *continue* au même point pour chacune de ses valeurs. Il résulte de la proposition précédente que :

Si l'on se donne un ε *arbitraire, on peut trouver un domaine de*

---

(1) Finie ou non; y_0 étant finie.

centre P *tel que les ensembles des valeurs de la fonction en* P *et en* P′, P′ *étant tout autre point de ce domaine, différent de* ε *au plus.*

Car la fonction étant fermée extérieurement à ε près en P, on peut trouver un domaine de centre P, tel que l'ensemble E des valeurs en P soit compris dans I′(ε) relatif à l'ensemble E′ des valeurs en un point quelconque P′ du domaine. Mais comme la fonction est fermée horizontalement en P on peut diminuer ce domaine de manière que E′ soit compris dans I (ε) relatif à E.

14. Fonctions multiformes continues. — Une fonction F (P) est dite *continue*, lorsqu'elle remplit les conditions suivantes :

1° *Elle est continue en tout point* P *pour toute valeur* y *correspondante ;*
2° *Elle est bornée;*
3° *L'ensemble de ses points représentatifs est fermé.* (On voit alors qu'en vertu de la condition 1° il est aussi parfait.)

Ces trois conditions qui caractérisent la continuité sont indépendantes comme le prouvent les exemples suivants :

Définissons dans l'intervalle (o, 1) une fonction d'une variable, de la manière suivante. Elle est égale à 1, sauf au point d'abscisse $\frac{1}{2}$; en outre, elle a la valeur $\frac{1}{2}$ en tous les points de l'intervalle $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, extrémités non comprises. Cette fonction satisfait bien aux conditions 1° et 2° sans satisfaire à la troisième.

De même la fonction égale à $\frac{1}{x^2}$, sauf à l'origine, et aussi à 1, dans l'intervalle (— 1 + 1), remplit bien les conditions 1° et 3° sans remplir la seconde.

Enfin la fonction égale à o dans l'intervalle (o, 1), et qui a, en outre, la valeur 1 pour $x \leq \frac{1}{2}$, satisfait aux conditions 2° et 3° sans remplir la condition 1°.

15. Continuité en un point P. — *Nous dirons qu'une fonction* F(P) *fermée verticalement est continue au point* P *si, quel que soit* ε, *on peut trouver un domaine de centre* P *et de rayon* l, *tel que, les ensembles des*

valeurs de F *en* P *et* P′, P′ *étant un point quelconque de* Π *appartenant au domaine, diffèrent de* ε *au plus.*

Nous avons été conduits à cette définition en remarquant qu'il importe, pour la suite, de condenser en une seule notion le fait que la fonction est continue pour toute valeur qn'elle prend en un point P et qu'elle est fermée horizontalement en ce point : c'est ce qui résulte de la proposition du n° 13.

Réciproquement, si F(P) est continue en P, elle y est continue pour chacune de ses valeurs. On voit immédiatement que si elle est continue en tout point P, elle est bornée et par conséquent elle est une fonction continue. Or, nous venons de voir qu'une fonction continue est aussi continue en tout point; donc, les deux définitions de la fonction continue sont équivalentes.

Dans la suite je désignerai l'ensemble des valeurs d'une fonction F(P) en un point P par l'expression abrégée « la valeur de F en P », ou encore « l'ensemble-valeur » de F en P.

16. Continuité uniforme. — *Une fonction* F(P) *est dite « uniformément continue » lorsqu'elle est fermée verticalement et qu'à tout nombre* ε *on peut faire correspondre un autre nombre* l *tel, qu'en deux points* P *et* P′ *dont la distance ne dépasse pas* l, F(P) *et* F(P′) *diffèrent de* ε *au plus.*

Une telle fonction est évidemment continue. Inversement, une fonction continue F(P) l'est aussi uniformément car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre ε et une suite de couples de points P_1, P'_1 ; P_2, P'_2 ; . ., dont la distance tendrait vers zéro et tels que l'écart de F(P_n) est F(P'_n) serait supérieur à ε. La suite des P_n pourrait être supposée avoir un seul point limite P, qui serait alors limite des P'_n et comme la fonction est continue en P, on arriverait à une contradiction (1).

(1) On peut donner de la continuité uniforme une autre définition qui correspond à la première définition de la continuité n° 14 et qui est équivalente à la précédente parce que toutes les deux expriment une propriété caractéristique des fonctions continues.

Une fonction est dite « uniformément continue » lorsqu'elle est fermée et que,

17. On peut faire de la notion de fonction continue une dissécation analogue à celle que l'on effectue pour les ensembles parfaits, quand on dit qu'ils sont fermés et n'ont pas de point isolé.

Pour qu'une fonction soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit fermée verticalement, horizontalement et extérieurement.

La vérification est immédiate si l'on tient compte de la proposition du n° 12.

18. Une fonction continue atteint évidemment sa borne supérieure et sa borne inférieure. Mais si l'ensemble Π est un *continu*, alors elle ne prend pas nécessairement toute valeur intermédiaire entre deux quelconques de ses valeurs. Il suffit, pour le voir, de considérer la fonction ayant en tout point les valeurs o et 1.

19. On peut démontrer que les fonctions multiformes continues jouissent, comme les fonctions continues ordinaires, des propriétés suivantes :

1° *Une fonction multiforme continue est déterminée par ses valeurs aux points d'un ensemble partout dense.*

Cela est évident parce que si P est un point n'appartenant pas à cet ensemble et P_1, P_2, ... une suite de points lui appartenant et tendant vers P, la suite des ensembles $F(P_1)$, $F(P_2)$, ... tend par hypothèse vers un ensemble limite E qui, d'après le n° 6, est unique.

2° (Principe d'extension de M. Baire). *Une fonction définie aux points d'un ensemble partout dense et uniformément continue sur cet ensemble, est prolongeable dans tout l'ensemble* Π *avec continuité, et d'une façon unique d'après* 1°.

---

si l'on se donne un nombre ε, on peut trouver un autre nombre l tel que, quels que soient le point P et la valeur y correspondante, si l'on envisage le domaine de centre P et de rayon l, il existe pour chaque point de l'ensemble Π contenu dans ce domaine, une valeur y_1 de la fonction satisfaisant à l'inégalite

$$|y_1 - y_0| < \varepsilon.$$

Cette fonction est continue; d'ailleurs, une fonction continue satisfait à l'énoncé précédent, d'où l'on déduit immédiatement celui-ci.

Soit $F(P)$ cette fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$, dense sur Π, donné. Par définition $F(P)$ est fermée verticalement et telle, qu'en deux points de $\mathcal{E}$ dont la distance ne dépasse pas l, « ses valeurs » diffèrent de ε au plus. Reprenons alors le point P et la suite P_1, P_2, ...; d'après le théorème de Cauchy, on peut affirmer que cette suite converge vers un ensemble E que nous attribuerons par définition comme ensemble-valeur à la fonction en P. Ceci est légitime parce que, quelle que soit la suite P_1, P_2, ..., cet ensemble est unique, sans quoi une autre suite conduirait à un ensemble E′ différent et l'on voit que l'écart de E et E′ devrait être nul. Cela exprime que $F(P)$ est continue en tout point de Π pour les points de $\mathcal{E}$. En prenant alors deux points de Π dont la distance ne dépasse pas $\frac{l}{2}$, il résulte que « les valeurs » de $F(P)$ en ces points diffèrent de ε au plus, puisque dans le voisinage de chacun d'eux il y a des points de $\mathcal{E}$.

20. On s'assure rapidement que la fonction multiforme obtenue par la réunion d'un nombre fini de fonctions multiformes continues est continue. Nous donnons plus loin une propriété en quelque sorte réciproque de celle-ci.

On voit, de même, que les fonctions $L(P)$ et $l(P)$ relatives à une fonction multiforme continue sont des fonctions uniformes continues.

21. Nous allons démontrer maintenant le théorème fondamental suivant :

Soient $F(P)$ *et* $\Phi(P)$ *deux fonctions multiformes continues et* ε *un nombre positif quelconque; appelons* $\mathcal{G}$ *l'ensemble des points de* Π *en lesquels les fonctions diffèrent de* ε *au plus* (¹). *On peut modifier l'une de ces deux fonctions aux points de l'ensemble complémentaire de* $\mathcal{G}$ *par rapport à* Π, *de manière qu'elles diffèrent de* $\varepsilon + 2\lambda$ *au plus, partout dans* Π, λ *étant un nombre positif arbitraire.*

Observons d'abord que l'ensemble $\mathcal{G}$ est fermé. En effet, si cela

(¹) Cela veut dire que l'ensemble des valeurs F et celui des valeurs de Φ diffèrent de ε au plus.

n'était pas, il admettrait un point limite P_0 en lequel les fonctions ne différeraient pas de ε au plus; cela veut dire que l'un des deux ensembles $E = F(P_0)$ et $E' = \Phi(P_0)$ contient un point y dont la distance à l'autre ensemble serait supérieure à ε. Donc, il en serait de même dans un domaine suffisamment petit de centre P_0, ce qui est impossible, car dans un tel domaine il y a toujours des points de $\mathcal{G}$.

Cela étant, nous pouvons, en vertu de la continuité uniforme, déterminer pour chacune des fonctions $F(P)$ et $\Phi(P)$ un nombre l_1 et l_2, correspondant à $\frac{\lambda}{2}$; soit r un nombre positif inférieur à l_1 et l_2. En chaque point des Π dont la distance à $\mathcal{G}$ est inférieure à r, les fonctions diffèrent de $\varepsilon + \lambda$ au plus.

Appelons $\mathcal{G}'$ l'ensemble des points de Π dont la distance à $\mathcal{G}$ est supérieure ou égale à r. On sait que cet ensemble est fermé.

Modifions alors, par exemple, la fonction $\Phi(P)$. Mais d'abord, remarquons que la fonction $F(P) + \varepsilon + 2\lambda$ obtenue en augmentant chaque valeur de $F(P)$ de $\varepsilon + 2\lambda$ est continue; il en est de même de $F(P) - (\varepsilon + 2\lambda)$, obtenue en diminuant $F(P)$ de $\varepsilon + 2\lambda$. La réunion de ces deux fonctions et de $\Phi(P)$, constitue une fonction continue $F'(P)$.

La nouvelle fonction $\Phi'(P)$ sera ainsi définie :

1° En tout point de $\mathcal{G}'$ elle sera identique à $F(P)$.

2° Soit P' un point de Π dont la distance à $\mathcal{G}'$ est r', $r' \leqq \frac{r}{2}$, et appelons ρ' le rapport $\frac{r'}{\frac{r}{2}}$.

Considérons l'ensemble $I[\rho(\varepsilon + 2\lambda)]$ relatif à l'ensemble des valeurs de F en P'. Les points de cet ensemble sont par définition les valeurs de la fonction Φ' au point P'.

3° Soit P'' un point de Π dont la distance à $\mathcal{G}$ est r'', $r'' < \frac{r}{2}$.

Considérons une valeur y' de $\Phi(P'')$; cette valeur se trouve nécessairement comprise dans un intervalle i de centre y [une valeur de $F(P')$] et de longueur $2(\varepsilon + 2\lambda)$. Soient y_1 et y_2 les extrémités de cet intervalle, y_1 étant la plus petite. Si ρ est le rapport $\frac{r''}{\frac{r}{2}}$, appelons η'

et η'' les points définis par les relations

$$\frac{\rho\, \rho'}{1-\rho} = \frac{\overline{y'\eta'}}{\overline{\eta' y_2}}, \qquad \frac{\rho . \rho'}{1-\rho} = \frac{\overline{y'\eta''}}{\overline{\eta'' y_1}},$$

où $\overline{y'\eta'}$, ... désignent les segments déterminés par ces deux valeurs et où l'on a

$$\rho' = \frac{\overline{y' y_1}}{\overline{y_1 y_2}}, \qquad \rho'' = \frac{\overline{y' y_2}}{\overline{y_1 y_2}}.$$

Les points du segment $\eta'\eta''$ donnent, lorsque y et y' varient de toutes les façons possibles, les valeurs de la fonction Φ' au point P″.

4° Soit P‴ un point de Π n'entrant dans aucune des catégories précédentes et, bien entendu, extérieur à $\mathcal{G}$.

Les points de l'ensemble $\mathrm{I}(\varepsilon + 2\lambda)$ relatifs à l'ensemble F(P‴) seront les valeurs de Φ' au point P‴.

Il nous reste à vérifier que la fonction $\Phi'(\mathrm{P})$ ainsi définie, qui est identique à $\Phi(\mathrm{P})$ aux points de $\mathcal{G}$ et qui diffère de F(P) de $\varepsilon + 2\lambda$ au plus, est continue.

Soit P_0 un point frontière de l'ensemble $\mathcal{G}'$ et P′ un point défini plus haut (2°), dont la distance à P_0 est l. Dès que l est assez petit, les ensembles des valeurs de F aux points P_0 et P′ diffèrent d'aussi peu que l'on veut. Il en est de même de ceux de F et de Φ' au point P′, car $\rho(\varepsilon + 2\lambda)$ est très petit. Donc l'ensemble des valeurs de F, c'est-à-dire de Φ', au point P_0 diffère de celui de Φ' au point P′ d'aussi peu que l'on veut. Cela prouve, d'une part, que la fonction Φ' est continue au point P_0, d'autre part, qu'elle y est fermée horizontalement.

Considérons maintenant un point P′ et une valeur η de Φ' en ce point. Cette valeur se trouve dans un intervalle i dont le centre est une valeur y de F(P′), et de demi-longueur $\rho(\varepsilon + 2\lambda)$. Puisque F est continue pour la valeur y et que $\rho(\varepsilon + 2\lambda)$ varie d'une façon continue, Φ est continue pour η en P′. Elle est fermée verticalement car, ceci revient à dire que, l'ensemble $\mathrm{I}(\varepsilon)$ défini au n° 1 est fermé. Pour prouver qu'elle y est fermée horizontalement, on reprend le raisonnement fait audit numéro, en faisant correspondre η_n et y_n à un point P'_n, η et y à P′, et en supposant que la suite $\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \ldots$ tend vers P′.

Passons au cas d'un point P''. Soit η une valeur de Φ; elle fait partie d'un segment $\overline{\eta'\eta''}$ défini plus haut (3°). Or, Φ est continue pour y', $F-(\varepsilon+2\lambda)$, $F+(\varepsilon+2\lambda)$ auxquelles appartiennent respectivement y_1 et y_2, sont continues et les rapports ρ' et ρ'' varient d'une manière continue. Il en résulte que Φ' est continue pour la valeur η en P'. Elle est fermée verticalement; pour le voir, on considère la suite de valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots$ tendant vers une limite η; chacune de ces valeurs η_n fait partie d'un segment $\overline{\eta'_n\eta''_n}$ correspondant à y'_n et à y_n. Nous pouvons supposer que les suites $y'_1, y'_2, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots$, ont aussi un seul point limite y' et y. y' se trouve évidemment dans l'intervalle $y-(\varepsilon+2\lambda)$, $y+(\varepsilon+2\lambda)$. Considérons les points η' et η'' correspondants; on voit que la suite $\eta'_1, \eta'_2, \ldots$ tend vers η' et que $\eta''_1, \eta''_2, \ldots$ tend vers η''. Il en résulte que η se trouve dans le segment $\overline{\eta'\eta''}$.

Pour prouver qu'elle est fermée horizontalement, le raisonnement est le même, sauf qu'on suppose que η_n et par conséquent y'_n, y_n, y'_n, η''_n sont relatifs à un point P''_n, que η, y', y, η', η'' sont relatifs à P'' et que la suite P'_1, P''_2, ... tend vers P''.

Le cas d'un point P frontière de l'ensemble $\mathcal{G}$ se traite exactement comme celui du point P''_0, à la différence que, le rôle de F y est joué par Φ, car les rapports $\frac{\rho.\rho'}{1-\rho}$ et $\frac{\rho\ \rho''}{1-\rho}$ sont très petits dans le voisinage de P.

Pour un point P''' qui est à une distance supérieure à $\frac{r}{2}$ de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, la vérification est immédiate, par ce que dans son voisinage il n'y a que des points de même nature.

Reste le cas d'un point P''_0 dont la distance à $\mathcal{G}$, ou à $\mathcal{G}'$, ou à tous les deux est $\frac{r}{2}$. Dans son voisinage, il peut y avoir des points P', P'' et P'''. La fonction y est fermée verticalement; elle y est continue et fermée horizontalement par rapport aux points P' d'après la démonstration donnée plus haut et par rapport aux points P''' d'après la définition même, la fonction dont les valeurs en chaque point sont les points de l'ensemble $I(\varepsilon+2\lambda)$ relatif à F étant évidemment continue.

Il suffit donc de s'occuper seulement des rapports de P''_0 avec les points P'' de son voisinage. La fonction Φ' y est continue pour toute valeur η. En effet, soit l la distance d'un point P'' à P''_0. Dès que l est assez petit, ρ est voisin de 1 et $\frac{\rho}{1-\rho}$ très grand. D'autre part, en P″, F et Φ diffèrent de $\varepsilon + \lambda$ au plus; donc, dans tout intervalle i de I$(\varepsilon + \lambda)$ relatif à F, il y a une valeur de F. Donc, dans tout intervalle i de I $(\varepsilon + 2\lambda)$, il y a une valeur de Φ pour laquelle les rapports ρ' et ρ'' sont compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Les points η' et η'' qui lui correspondent sont, par suite, très voisins des extrémités y_1 et y_2 de l'intervalle considéré. Il en résulte que Φ' est continue en P''_0 pour toute valeur η.

Elle y est fermée horizontalement car, soit une suite de valeurs η_1, η_2, ... tendant vers une limite η et correspondant respectivement aux points P''_1, P'_2, ... qui tendent vers P''_0. η_n est située dans un intervalle i de I$(\varepsilon + 2\lambda)$ relatif à une valeur y_n de F. On peut admettre que la suite y_1, y_2, ... a un seul point limite y (qui correspond à P''_0) appartenant évidemment à F. Par conséquent η doit se trouver dans l'intervalle i de I$(\varepsilon + 2\lambda)$ relatif à y; elle appartient donc à $\Phi'(P''_0)$, ce qui démontre le théorème.

22. La démonstration précédente permet d'énoncer un autre théorème fondamental qui est le suivant :

Soient F(P) *et* Φ(P) *deux fonctions continues et f et φ deux ensembles séparés dans* Π, *il existe une fonction continue égale à* F *aux points de f et à* Φ *aux points de φ.*

Puisque f et φ sont séparés, il en est de même des ensembles

$$f^0 = f + f' \qquad \text{et} \qquad \varphi^0 = \varphi + \varphi'.$$

On peut alors trouver un nombre positif (non nul) r, de manière que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de Π dont la distance à f^0 est supérieure ou égale à r, contienne l'ensemble φ^0, et il suffit de démontrer le théorème pour les ensembles f^0 et $\mathcal{E}$.

Les fonctions F et Φ étant continues sont bornées; il existe donc un nombre N tel que ces fonctions diffèrent de N au plus en tout point. Alors, si nous faisons jouer à F et à Φ le rôle qu'elles ont eu dans la démonstration précédente, à f^0 et à $\mathcal{E}$ le rôle de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, à 2N le rôle de $(\varepsilon + 2\lambda)$, en reprenant exactement cette démonstration, on trouve une fonction Φ' continue et satisfaisant aux conditions requises.

23. Considérons un intervalle linéaire (a, b) et proposons-nous de résoudre la question suivante :

Définir dans (a, b) une fonction multiforme continue prenant en a et b les valeurs E_1 et E_2 (E_1 et E_2 étant bien entendu des ensembles fermés finis) et telle que : 1° si ces valeurs diffèrent de λ, la valeur de la fonction en tout point de (a, b) diffère de E_1 et E_2 de 3λ au plus; et 2° si E_2 varie très peu, il en soit de même de la valeur de la fonction en tout point de (a, b).

S'il s'agissait de fonctions uniformes, il suffirait de définir la fonction linéairement en (a, b). Mais qu'est-ce qu'une fonction multiforme variant linéairement entre $(a$ et $b)$? Cela doit vouloir dire qu'en tout point x de (a, b) tel que

$$\frac{ax}{xb} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda,$$

elle diffère de E_1 de λ_1 et de E_2 de λ_2. Sa valeur, en ce point, doit donc se trouver dans les ensembles $I(\lambda_1)$ relatif à E_1 et $I(\lambda_2)$ relatif à E_2. Et, en fait, on constate que la fonction ayant pour valeur en x l'ensemble commun à $I(\lambda_1)$ et $I(\lambda_2)$ est continue; elle y diffère de E_1 de λ_1 et de E_2 de λ_2. Mais elle ne remplit pas nécessairement la dernière condition de l'énoncé; il suffit de prendre pour E_1 l'ensemble des valeurs 1 et 3 et pour E_2 celui des valeurs 0 et 2. Alors $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$; la fonction a au point x les valeurs λ_2, $1 + \lambda_1$ et $3 - \lambda_1$. Si E_2 se change en l'ensemble des deux valeurs 0 et $2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \lambda_2$ si petit que soit ε on a encore $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Les valeurs de la fonction au même point x se changent en λ_2 et $3 - \lambda_1 + \theta\varepsilon$, quel que soit θ tel que $0 \leqq \theta \leqq 1$; elles diffèrent donc des valeurs primitives d'une quantité au moins égale au plus petit des deux nombres $2\lambda_1$ et λ_2, cela quel que soit ε.

Voici comment je définirai la fonction cherchée. Au point x_0 milieu de (a, b), $F(x_0)$ sera égale à $I(2\lambda)$ relatif à E_2. En tout point x' de l'intervalle (x_0, b) tel que

$$\frac{x_0 x'}{x' b} = \frac{\lambda'}{\lambda''}, \qquad \lambda' + \lambda'' = 2\lambda,$$

$F(x')$ sera égale à $I(\lambda'')$ relatif à E_2. Enfin en tout point x'' de (a, x_0), $F(x)$ sera définie comme au n° 21, 3°, où l'on a

$$x = P, \quad x'' = P'', \quad (a, b) = \Pi, \quad F(P) = E_2, \quad \Phi(P) = E_1, \quad r = b - a,$$

et où l'on remplace $\varepsilon + 2\lambda$ par 2λ, $\mathcal{G}$ se réduisant au point a.

La fonction ainsi définie est évidemment continue et remplit la condition 1°. Elle satisfait aussi à la condition 2°. En effet, soit E'_2 un ensemble différent de E_2 de ε au plus (il diffère de E_1 de λ_0, tel que $|\lambda_0 - \lambda| \leqq \varepsilon$) et soit $F'(x)$ la fonction obtenue en remplaçant, dans la construction, E_2 par E'_2. Il est d'abord évident qu'en x_0, F et F' diffèrent de 3ε au plus, donc il en est de même *a fortiori* en tout point de (x_0, b).

Soit x'' un point compris dans un intervalle (c, d) « intérieur » à (a, x_0). Considérons un intervalle $y_1 y_2$, de longueur 4λ, et soit y' un point de $y_1 y_2$; η' et η'' étant des points définis comme au n° 21, 3°, il est facile de voir que les segments $y'\eta'$ et $y'\eta''$ sont des fonctions positives continues de $y_1 y'$ qui ne s'annulent qu'en y_1 et y_2 (1).

Soit m un nombre positif inférieur à leurs minima, différents de zéro, dans $(y_1 + \lambda, y_2 - \lambda)$; on peut trouver un nombre d tel que si y' se trouve dans les intervalles

(1) $$(y_1, y_1 + d) \quad \text{et} \quad (y_2 - d, y_2),$$

les segments $y'\eta'$ et $y'\eta''$ soient inférieurs à $\frac{m}{2}$ par exemple. Il est facile de voir que si λ varie de ε au plus et si ε est assez petit, m varie très peu, car le rapport $\frac{\rho}{1-\rho}$ reste dans (c, d), compris entre deux nombres positifs. Dans les intervalles (1), d étant fixe, on peut dire que, quel que soit ε assez petit, les segments considérés restent inférieurs à la borne inférieure des nombres m.

Soit v une valeur de $F(x'')$; elle se trouve dans un segment $\eta'\eta''$

---

(1) Voici, par exemple, l'expression de $y'\eta'$:

$$y'\eta' = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{y_1 y'(4\lambda - y_1 y')}{4\lambda + \frac{\rho}{1-\rho} y_1 y'}.$$

relatif à un y', dans $y'\eta'$ par exemple, donc aussi dans le plus grand de ces segments [1] qui est relatif à un intervalle $y_1 y_2$ de centre y. Ce segment maximum est évidemment supérieur à m, car il existe un y dont y' diffère de λ au plus. Donc on a

$$y_1 + d < y' < y_2 - d.$$

Or, il existe une valeur de E'_2, soit y_0, telle que

$$|y_0 - y| \leqq \varepsilon.$$

Si donc ε est assez petit, y' se trouve dans l'intervalle de centre y_0 et de longueur $4\lambda_0$ et le segment $y'\eta'$ relatif à ce segment diffère de celui relatif à $y_1 y_2$ d'aussi peu qu'on veut. Donc, toute valeur de $F(x'')$ diffère d'une valeur de $F(x'')$ d'aussi peu qu'on veut. Mais, en partant de $F'(x'')$, on conclurait la même chose. Donc $F(x'')$ et $F'(x'')$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut, pourvu que ε soit choisi assez petit; cela a lieu, quel que soit x'' dans (c, d).

La condition 2° est évidemment remplie aux points a et x_0.

Supposons maintenant qu'on fasse varier le point b en b'. Deux points de (a, b) et (a, b') se correspondent lorsqu'ils ont le même rapport $\frac{\rho}{1-\rho}$, s'ils sont sur (a, x_0) et (a, x_0) [x'_0 milieu de (a, b')], où s'ils partagent (x_0, b) et (x'_0, b'), en un même rapport, s'ils sont sur (x_0, b) et (x'_0, b').

Soient donc x'_1 un point de (a, b), (c, d) un intervalle le comprenant à l'intérieur et tel que, dans (c, d), $F(x)$ diffère de $\frac{\mu}{2}$ au plus de la fonction $F'(x)$ définie plus haut. Diminuons (c, d) de manière qu'en chacun de ses points x, $F(x)$ et $F(x_1)$ diffèrent de $\frac{\mu}{2}$ au plus.

Si maintenant b varie d'une très petite quantité par rapport à $d - c$, c, d, x ont pour correspondants c', d', x' et en diffèrent d'une très petite quantité par rapport à $d - c$. Les points de (c, d) et (c', d') se correspondent; donc si F' est la fonction définie par (a, b') et ayant en b' la valeur E'_2, $F'(x')$ et $F(x_1)$ diffèrent de μ au plus.

---

[1] Car il y a un tel segment pour chaque intervalle $y_1 y_2$ qui contient y'.

24. *On peut définir une fonction continue dans un domaine rectangulaire δ à p dimensions, ayant aux sommets des valeurs données.*

En effet, on la définit d'abord sur les frontières à une dimension comme précédemment; ensuite, on lui donne au centre de chaque frontière à deux dimensions une valeur arbitraire et on la définit pareillement sur chaque rayon ab joignant le centre a à un point b de la frontière. La fonction est continue dans les frontières à deux dimensions d'après ce qui précède. On la définit de la même manière dans les frontières à trois dimensions, en la définissant au centre et puis sur chaque rayon, etc. On arrive ainsi à la définir dans tout le domaine.

Si les valeurs s aux sommets et aux centres diffèrent entre elles de λ au plus, en un point d'une frontière à une dimension, la fonction diffère d'un s quelconque de 4λ au plus, en un point d'une frontière à deux dimensions elle en diffère de $3.4\lambda + \lambda$ au plus et ainsi de suite, en un point quelconque du domaine elle en diffère de $K_p \lambda$ au plus, K_p dépendant de p seulement.

Si plusieurs frontières de δ sont subdivisées en domaines partiels par des variétés parallèles aux frontières à $p - 1$ dimensions de δ et si l'on avait donné aussi les valeurs s' de Φ aux nouveaux sommets et aux centres des domaines de subdivision, on aurait défini Φ d'abord dans ces domaines; étant définie dans toutes les frontières de δ, on la définit comme plus haut dans δ. Il est aisé de constater que le nombre K_p ne change pas, à condition qu'en deux points pris parmi les s et s' les valeurs de Φ diffèrent de λ au plus.

25. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

$F(P)$ *étant une fonction continue définie sur un ensemble parfait* Π *borné de l'espace à* n *dimensions, on peut trouver une fonction continue* $\Phi(P)$ *définie sur tout cet espace et coïncidant avec* $F(P)$ *sur* Π (¹).

Soit

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs et décroissant vers zéro. Considérons le

---

(¹) *Voir* M. de La Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 127.

quadrillage de l'espace, réalisé par les variétés

$$x_1 = m_1\, l, \;\ldots.\; x_n = m_n\, l,$$

les m_i prenant toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles.

D'après la proposition du n° 16, on peut déterminer un nombre l' tel, que les valeurs de $F(P)$ en deux points dont la distance ne dépasse pas l', diffèrent de ε au plus. Choisissons alors l de manière que deux points quelconques d'un domaine de côtés $2\,l$ soient à une distance inférieure à l'.

Les mailles du quadrillage considéré se partagent en deux catégories. La deuxième contient les mailles ne comprenant pas de points de Π; appelons-les, des mailles B. La première comprend les mailles qui contiennent des points de Π; celles-ci sont en nombre fini. Rangeons-les dans un ordre quelconque et désignons-les par

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{p_1}. \tag{1}$$

Considérons la maille A_1 et soit P_1 un point de Π qu'elle contient. Ses frontières à une dimension que nous appellerons ses côtés, sont de deux espèces : 1° elles ne contiennent pas des points de Π ou 2° elles en contiennent. En chaque sommet qui n'est pas point de Π, $\Phi(P)$ aura la valeur $F(P_1)$ et sur tout côté de la première espèce, Φ sera définie comme au n° 23.

Soit a une extrémité d'un côté ab de la deuxième espèce; si a n'appartient pas à Π, soit q le premier point de Π qu'on rencontre en allant de a vers b. a' étant le milieu du segment aq, $\Phi(P)$ aura la valeur $F(q)$ en tout point du segment $a'q$ et aux points du segment aq on définira Φ comme au n° 23. On procédera de la même manière pour chacune des extrémités a, extérieure à Π, de chaque côté de la deuxième espèce.

Considérons maintenant la maille A_2 et soit P_2 un point de Π qu'elle contient. En tout sommet de A_2 qui n'appartient pas à Π ou à A_1, Φ sera égale à $F(P_2)$; sur tout côté de la première espèce, Φ sera définie comme au n° 23; on opérera comme précédemment sur les côtés de la deuxième espèce.

Je procède de la même manière sur les côtés de la maille A_3 et ainsi de suite. $\Phi(P)$ est ainsi définie sur les côtés des mailles A_i qui ne contiennent pas des points de Π et sur ceux qui en contiennent, elle est définie sur les segments aq.

En tout sommet des mailles B extérieur aux mailles (1), Φ aura une valeur constante C donnée (qui est bien entendu un ensemble linéaire borné et fermé) et sur les côtés n'appartenant pas aux mailles (1), Φ sera défini comme au n° 23.

Soit maintenant d un nombre positif inférieur aux distances à Π des frontières à 1, 2, ..., $n-1$ dimensions, extérieures à Π, des mailles A_i. Ces frontières sont des ensembles fermés et en nombre fini. Prenons d inférieur aussi aux distances des segments aq à Π. Soit l'' un nombre défini par rapport à ε_1 comme l' l'a été par rapport à ε. Appelons l_1 le rapport $\frac{l}{r}$ (r entier supérieur à 2) et choisissons r assez grand pour que l_1 soit inférieur à l'', que deux points quelconques d'un domaine de côté l_1 soit à une distance inférieure à d et que l_1 n'entre pas un nombre exact de fois dans aucun des segments aq défini plus haut [1], tout en étant inférieur aux $\frac{aq}{2}$.

Considérons alors le quadrillage défini par les variétés

$$x_1 = m_1 l_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = m_n l_1,$$

qui est une subdivision du précédent. Considérons encore ses mailles de première catégorie et rangeons-les dans un ordre qui s'obtient en rangeant d'abord, dans un ordre quelconque, celles contenues dans A_1, puis celles contenues dans A_2, etc. Soient

$$A'_1, \quad A'_2 \quad \ldots, \quad A'_p, \tag{2}$$

ces mailles.

Recommençons sur cette suite l'opération comme nous venons de faire sur la suite (1). Remarquons qu'en certains sommets des mailles (2), Φ a déjà été définie [2]. Soit α un, quelconque d'ailleurs, de ces sommets; il se trouve nécessairement dans un côté c de la deuxième espèce des mailles (1) et ne se confond pas avec une de ses extrémités. Soit $\alpha\beta$ un côté des mailles (2) aboutissant en ce sommet

---

(1) Qui ne sont pas de longueur l évidemment.

(2) Définie par la construction, sans que le sommet appartienne à Π.

et qui est contenu dans c. Si $\alpha\beta$ est de la première espèce, il est tout entier « intérieur » à un segment $a'q$ de c, Φ a les mêmes valeurs en α et en β [la valeur $F(q)$] et est définie sur $\alpha\beta$ comme au n° 23. Si $\alpha\beta$ est de la deuxième espèce, α se trouve dans $a'q$ $(\alpha \neq q)$ et q dans $\alpha\beta$ $(q \neq \alpha \neq \beta)$, de sorte que si α' est le milieu de αq, Φ a sur $\alpha' q$ la valeur $F(q)$. Ceci est suffisant pour voir que, en partant des mailles (2) on se trouve dans les mêmes conditions que dans le cas des mailles (1).

Supposons donc faite cette opération; Φ sera définie aux sommets des mailles (2). Si nous désignons par B' les autres mailles de ce second quadrillage contenues dans les mailles (1), donnons à Φ la valeur $F(P_1)$ aux sommets des mailles B' contenues dans A_1 en lesquels elle n'est pas encore définie, puis la valeur $F(P_2)$ en ceux contenus dans A_2, etc., et sur les côtés des B' où elle n'a pas été définie, définissons-la comme au n° 23.

Enfin nous allons pouvoir la définir dans les mailles B. Pour cela, nous la définirons d'abord dans les frontières f^1_{n-1} à $n-1$ dimensions de ces mailles, ensuite je lui donne la valeur C au centre de chaque maille et je la définis sur chaque rayon de la maille comme au n° 23. Φ est définie sur les frontières à une dimension des B. Soit f^1_2 une frontière à deux dimensions des B. Si elle n'appartient à aucune maille (1) et si Φ n'y a pas été définie (elle ne l'a pas été évidemment, mais j'écris cela pour la généralité du raisonnement qui sera reproduit dans la suite) alors je donne à Φ la valeur C en son centre et sur chaque rayon je la définis comme au n° 23. Mais si elle appartient à une maille (1), soit A_i celle qui a le plus petit indice. Étant extérieure à Π elle est partagée par des mailles B' en plusieurs parties que je noterai par f^2_2 et qui sont des frontières à deux dimensions de ces mailles. Or Φ étant définie sur les frontières à une dimension des B', je lui donne la valeur $F(P_i)$ en chacun des centres des f^2_2 et je la définis sur chaque rayon des f^2_2 comme au n° 23. Φ est donc définie sur toutes les f^2_2, donc sur f^1_2 aussi. On considère ensuite une frontière à trois dimensions f^1_3 et l'on définit Φ exactement de la même manière. On arrivera ainsi à la définir sur les f^1_{n-1}. Φ est donc définie dans les mailles B.

Après avoir considéré un troisième quadrillage et défini les mailles A''

et B'', on la définira de la même manière sur les B'; on la définira d'abord, dans les mailles B' contenues dans A_1 et l'on remplacera la constante C par $F(P_1)$, puis dans A_2 où C sera remplacée par $F(P_2)$, etc.

La fonction Φ est ainsi partout définie car, si P' est un point extérieur à Π, il finira par être compris dans un nombre fini de mailles de la catégorie B [1] et comme Φ est définie et continue en chacune de ces mailles, elle est continue en P'.

Il reste à prouver qu'elle est continne en un point de Π. Pour cela il suffit de vérifier que les valeurs de Φ en deux points quelconques d'une maille $A^{(p)}$ où $p > 1$, diffèrent entre elles d'une quantité qui tend vers zéro avec p, car, quel que soit p, on peut décrire autour d'un point de Π un domaine dont tous les points appartiennent à des mailles $A^{(p)}$.

Considérons les mailles B'_ι contenues dans une maille A_ι Les valeurs de Φ qui ont servi à la définir dans ces mailles, savoir, les valeurs aux sommets des B', aux centres de leurs frontières, aux sommets de certaines B'' et aux centres de leurs frontières, diffèrent entre elles deux à deux, de ε au plus.

Il y a cependant une exception : ce sont les sommets et les côtés des B' qui se trouvent sur les côtés de deuxième espèce de A_ι. Ces sommets diffèrent entre eux et des autres de 3ε au plus et Φ, quoiqu'elle ne soit pas définie comme au n° 23 sur ces côtés, n'en diffère pas moins des extrémités de 3ε au plus. Donc, en un point quelconque des mailles B'_ι contenues dans A_ι, Φ diffère d'un sommet quelconque de ces mailles de $K_n 3\varepsilon$ au plus (*voir* le numéro précédent) donc de $F(P_\iota)$ de

$$(1 + 3K_n)\varepsilon = K\varepsilon.$$

Soit A'_e une des mailles (2) contenues dans A_ι et considérons les mailles B''_e qu'elle contient. Elle peut avoir pour un de ses côtés, le côté $\alpha\beta$ défini plus haut. Les valeurs de Φ aux sommets des B''_e situés sur $\alpha\beta$ sont égales à $F(q)$, le point q étant extérieur à A'_e et à une distance qui peut être supérieure à l_1. Donc les valeurs de Φ aux sommets et centres qui la définiront dans les B''_e diffèrent encore de ε au plus. La valeur

---

[1] Puisque les còtés des quadrillages successifs tendent vers zéro.

de Φ en un point des B''_e diffère de $F(P'_e)$ de $K\varepsilon$ au plus. Elle en diffère de $K\varepsilon_1$ au plus si A'_e n'a pas cette propriété dans A_i.

Le raisonnement est alors évident. Soit A''_m une des mailles contenues dans A'_e, elle n'aura aucun point commun avec un côte $\alpha\beta$ considéré plus haut. Donc la valeur de Φ en un point des mailles B'''_m situées dans A''_m diffèrent de $F(P'_m)$ de $K\varepsilon_1$ ou $K\varepsilon_2$ au plus, et ainsi de suite.

Soit donc une maille $A_q^{(n+1)}$. Un point P de cette maille appartient ou bien à Π et alors $\Phi(P)$ et $F(P_q^{(n+1)})$ diffèrent de ε_{n+1} au plus, ou bien à une maille B_j^{n+1+r} ; alors $\Phi(P)$ et $F(P_j^{n+r})$ diffèrent de $K\varepsilon_{n+r-1}$, donc $\Phi(P)$ et $F(P_q^{n+1})$ diffèrent de $\varepsilon_{n+1} + K\varepsilon_{n+r-1}$.

Les valeurs de Φ en deux points d'une maille $A^{(p)}$, où $p > 1$, diffèrent donc de $2(\varepsilon_p + K\varepsilon_{p-1})$ au plus, quantité tendant vers zéro avec p.

26. Dans les numéros précédents, nous avons distingué et examiné une classe de fonctions multiformes que nous avons appelées *continues* et rattachées par quelques-unes de leurs propriétés aux fonctions continues de l'analyse classique. Elles vont servir de base à la suite et seront considérées comme des éléments simples auxquels on doit tout rapporter. Il convient donc de faire ressortir leur simplicité et de mieux montrer leur analogie avec les fonctions continues ordinaires.

Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas d'une seule variable et soit $F(x)$ une fonction multiforme continue dans un intervalle (a, b). Si x_0 est un point de cet intervalle, l'ensemble $F(x_0)$ est fermé ; nous avons vu au Chapitre I que, pour tout nombre ε, on peut trouver un nombre fini de valeurs de $F(x_0)$ soit

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_p$$

telles que toute valeur $F(x_0)$ soit intérieure à un des intervalles

$$\left(y_i - \frac{\varepsilon}{2},\ y_i + \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

D'autre part, on peut trouver un intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ tel que pour chacun de ses points x', $F(x')$ diffère de $F(x_0)$ de $\frac{\varepsilon}{2}$ au plus. Donc dans cet intervalle la fonction est enfermée dans les p rectangles de côtés parallèles aux axes, de bases 2α, de hauteurs 2ε et ayant pour centres les points y_i. Il en résulte que dans cet intervalle *on peut repré-*

senter $F(x)$, *à* ε *près, par la fonction constante formée par la réunion des segments parallèles à* Ox *menés par* $y_1, \ldots, y_p$.

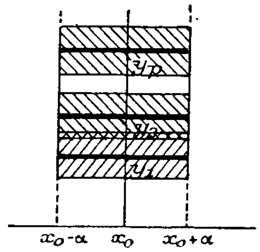

Fig. 1.

On peut encore la représenter, si l'on veut, par la fonction réunion des p rectangles considérés, mais cette fois à 2ε près.

On sait qu'une fonction continue uniforme peut être représentée de cette manière avec $p = 1$.

27. Partageons maintenant l'intervalle (a, b) en intervalles partiels par les points

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1};\ b = x_n,$$

la longueur de chaque intervalle $x_{k-1}x_k$ étant au plus égale à α, ce nombre α, défini précédemment, devant être choisi indépendamment du point x_0, en vertu de la continuité uniforme.

Il résulte de ce que nous avons fait plus haut que dans chaque intervalles $x_{k-1}x_k$, on peut tracer un nombre fini de segments parallèles à ox. Donc, dans l'intervalle (a, b) *la fonction peut-être représentée, à* ε *près, par une fonction formée d'un nombre fini de segments*, comme on le voit sur la figure, *ou par un nombre fini de rectangles*.

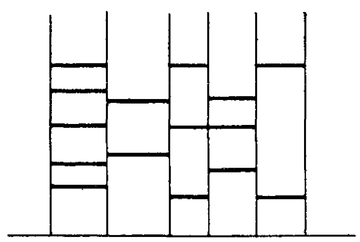

Fig. 2.

C'est là un mode de représentation habituel des fonctions continues ordinaires.

28. Remarquons que dans la représentation précédente par rectangles, à tout rectangle de base $x_{k-1}x_k$ on peut associer au moins un rectangle de base $x_k x_{k+1}$ et inversement, de manière qu'ils aient en commun un point au moins de l'ensemble $F(x_k)$. Ceci est évident, car dans tout rectangle de base $x_{k-1}x_k$ il y a un point de $F(x_k)$ qui doit, par conséquent, se trouver dans un rectangle de base $x_k x_{k+1}$ et *vice versa*.

Cela étant, à chaque couple de rectangles associés faisons correspondre un des points de $F(x_k)$ qu'ils ont en commun; soit (x_k, y_k) ce point. Si $k = 0$, à chaque rectangle de base $x_0 x_1$ on fera correspondre un point (x_0, y_0) de $F(x_0)$. Il en est de même si $k = n$. Considérons alors un rectangle r_1^k de base $x_0 x_1$ et joignons son point correspondant (x_0, y_0^k) par un segment de droite avec chacun des points $(x_1, y_1^{k_1})$, $(x_1, y_1^{k_2})$, ... correspondant à tous les couples de rectangles associés $r_1^k r_2^{k_1}$, $r_1^k r_2^{k_2}$, ..., les rectangles $r_2^{k_1}$, $r_2^{k_2}$, ..., étant de base $x_1 x_2$. Joignons maintenant par un segment de droite le point $(x_1, y_1^{k_1})$, à chacun des points $(x_2, y_2^{k_{11}})$, $(x_2, y_2^{k_{12}})$, ... correspondant à tous les couples de rectangles associés $r_2^{k_1} r_3^{k_{11}}$, $r_2^{k_1} r_3^{k_{12}}$, ..., les seconds rectangles étant de base $x_2 x_3$ et ainsi de suite.

Nous trouvons ainsi, en faisant prendre aux indices supérieurs toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, un nombre fini de lignes polygonales $y_0^k y_1^{k_1} y_2^{k_{11}}$, .., à n côtés, dont les sommets sont des points représentatifs de la fonction $F(x)$, disons des *lignes polygonales inscrites* dans $F(x)$. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Il existe un nombre fini de lignes polygonales inscrites dans $F(x)$, *dont la réunion constitue une fonction qui représente* $F(x)$ *à* 2ε *près.*

Ceci résulte immédiatement de la construction précédente si l'on tient compte de la remarque faite au début de ce numéro. Il suffit de vérifier que dans tout rectangle il y a au moins un côté d'une ligne polygonale et que tout côté d'une telle ligne est contenu dans un rectangle.

29. Chacune de ces lignes polygonales étant une fonction continue ordinaire on peut, d'après le théorème bien connu de Weierstrass, la

représenter, à η près, par un polynome en x. Dailleurs ε est arbitraire; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Toute fonction multiforme continue $F(x)$ *peut-être représentée, à* ε *près, par une fonction formée par la réunion d'un nombre fini de polynomes.*

Si ces polynomes sont

$$y = P_1(x), \qquad \ldots, \qquad y = P_p(x),$$

la fonction à p branches de l'analyse classique

$$F(x, y) = [(y - P_1(x)][y - P_2(x)]\ldots[y - P_p(x)] = 0,$$

$F(x, y)$ étant uu polynome en x et y, est une fonction multiforme continue et représente la fonction $F(x)$, à ε près, dans l'intervalle (a, b).

Ceci peut être pris comme l'analogue, pour les fonctions multiformes, du théorème de Weierstrass.

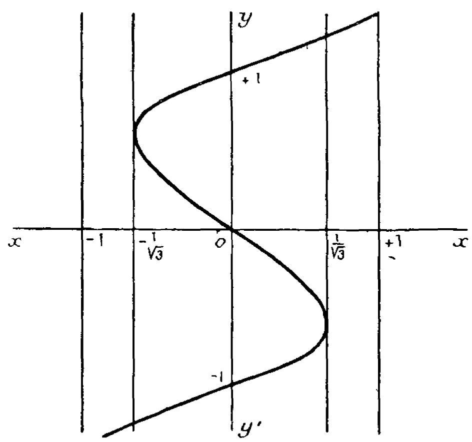

Fig. 3.

Mais il n'est pas exact que toute fonction $F(x, y) = 0$ où $F(x, y)$ est un polynome, soit une fonction multiforme continue. Par exemple la fonction

$$F(x, y) = y^3 - y + x = 0$$

n'est pas dans l'intervalle $(-1, +1)$ une telle fonction, comme on le voit sur la figure ci-dessus.

Nous donnerons plus loin (n° 57) un théorème sur les fonctions multiformes définies par une équation $F(x, y) = 0$ où F n'est assujettie qu'à être une fonction continue, pouvant même d'ailleurs être multiforme.

Remarquons enfin que si

$$y = f_1(x), \qquad \ldots, \qquad y = f_p(x)$$

sont les équations des lignes polygonales du numéro précédent, on peut remplacer les $P_i(x)$ par les $f_i(x)$, le résultat restant le même. La fonction $F(x, y) = 0$ est à p branches qui ne sont plus des polynomes.

30. Étudions maintenant de plus près la structure des fonctions multiformes continues. Soit $F(x)$ une telle fonction dans l'intervalle (a, b). Ses fonctions $L(x)$ et $l(x)$ sont évidemment continues. Soit x_0 un point en lequel l'ensemble des valeurs de la fonction, ne se réduit pas à un segment ou à un point. Si x_0 n'existe pas, les points représentatifs de la fonction sont ceux de l'aire comprise entre $L(x)$ et $l(x)$; sa structure est alors évidente.

Supposons donc qu'il existe un tel point x_0 et soit $a_1 b_1$, $a_1 < b_1$, un des intervalles contigus de l'ensemble fermé $F(x_0)$ [a_1 et b_1 appartiennent à $F(x_0)$] et δ sa longueur. Si ε est un nombre inférieur à $\frac{\delta}{2}$, on peut déterminer un nombre α tel que, en deux points x et x' vérifiant la relation $|x - x'| \leqq \alpha$, $F(x)$ et $F(x')$ diffèrent de ε au plus. Il est évident alors qu'en tout point de l'intervalle $(x_0, x_0 + \alpha)$, il n'y a pas de valeur de la fonction « intérieure » à l'intervalle $(a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon)$. Appelons $\varphi(x)$ la plus grande valeur de $F(x)$ inférieure à $a_1 + \frac{\delta}{2}$ et $\psi(x)$ la plus petite valeur supérieure à $a_1 + \frac{\delta}{2}$. On a

$$\varphi(x_0) = a_1, \qquad \psi(x_0) = b_1$$

et

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqq \varepsilon \qquad |\psi(x) - \psi(x_0)| \leqq \varepsilon;$$

on voit, de plus, que les fonctions uniformes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont continues dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \alpha)$ où elles sont définies.

Soient $a_2 = \varphi(x_0 + \alpha)$ et $b_2 = \psi(x_0 + \alpha)$. Si $b_2 - a_2 > 2\varepsilon$, on pourra prolonger par le même procédé les fonctions φ et ψ dans l'intervalle $(x_0 + \alpha, x_0 + 2\alpha)$. En continuant ainsi, si nous ne sommes pas arrêtés, on atteindra le point b après un nombre fini d'opérations et les fonctions seraient définies dans (x_0, b). Mais si nous sommes arrêtés et si $b_2 - a_2 > 0$, on pourra trouver un nombre ε_1 tel que $b_2 - a_2 > 2\varepsilon_1$; alors on déterminera α_1 correspondant à ε_1, à partir duquel on opérera de la même manière. En continuant ainsi on obtiendra, si l'on n'atteint pas b après un nombre fini d'opérations, une suite de points

$$(1) \qquad x_0, \quad x_1 = x_0 + \alpha, \quad \ldots, \quad x_p = x_{p-1} + \alpha_q, \quad \ldots$$

et au point x_p on aura

$$2\varepsilon \geq \psi(x_p) - \varphi(x_p) > 2\varepsilon_{q+1}.$$

La suite (1) a un point limite d. En faisant la même chose à gauche de x_0, on obtiendra le point c.

Dans l'intervalle (c, d), extrémités exceptés, on a donc défini deux fonctions uniformes continues $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ formées de points de $F(x)$, entre lesquelles il n'y a pas de point de cette fonction. Lorsque x tend vers c ou d, la différence $\psi - \varphi$, qui est positive, tend vers zéro [1] et si $\varphi(x)$ tend vers une limite, il en est de même de ψ qui tend vers la même limite. En ce cas, les fonctions φ et ψ seraient continues aussi en cette extrémité de (c, d). Mais φ et ψ n'ont pas nécessairement une limite; nous en donnerons tout à l'heure un exemple.

Nous avons ainsi démontré que tout intervalle $a_1 b_1$ donne naissance à une espèce de « trou » qui se projette sur (a, b) suivant l'intervalle (c, d) et qui est limité par les fonctions φ et ψ. Il est évident que deux pareils trous correspondant à deux intervalles $a_1 b_1$, ou bien coïncident, ou bien n'ont en commun que des points frontières. Il n'y a donc qu'une infinité dénombrable de trous, d'où le résultat suivant :

Toute fonction multiforme continue s'obtient en enlevant de l'aire

---

[1] Sauf peut-être lorsque c ou d coïncident avec a ou b et qu'ils aient été atteints après un nombre fini d'opérations.

comprise entre les fonctions $L(x)$ *et* $l(x)$, *les points situés à l'intérieur d'un certain nombre de trous, pouvant même être en infinité dénombrable.*

Ces trous ne peuvent évidemment pas être pris n'importe comment si l'on veut que la fonction obtenue en les enlevant soit continue.

Appelons trou de *deuxième espèce*, un trou pour lequel les fonctions φ et ψ ne tendent pas vers une limite lorsque x tend vers c ou d. Dans le cas contraire, le trou sera de *première espèce.*

Plaçons-nous dans le cas d'un trou de seconde espèce et appelons m la plus petite limite de φ et n sa plus grande limite lorsque x tend vers d (ou c). On voit que tous les points du segment mn, qu'on peut appeler *singulier*, font partie de $F(d)$ [ou $F(c)$], car $F(x)$ est continue. Soit y un point « intérieur » à ce segment; on voit aisément, d'après la construction, qu'il ne peut pas y avoir une fonction uniforme continue, définie dans un intervalle contenant d à l'intérieur, formée de points de $F(x)$ et ayant en d la valeur y. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Une fonction multiforme continue ne peut pas toujours être considérée comme la réunion de fonctions uniformes continues, définie chacune dans un intervalle non nul compris dans (a, b).

L'exemple suivant montrera, en effet, que le point a peut coïncider avec b ou, s'il n'en est pas ainsi, qu'on peut construire une fonction possédant deux trous de seconde espèce se projetant en (c, d) et (d, e) où $e \leqq b$ et tels qu'ils aient en commun le segment singulier mn en d.

31. Voici maintenant cet exemple qui est celui d'un trou de seconde espèce. La fonction multiforme sera définie dans l'intervalle $(0, 2)$. Ses valeurs seront les points du rectangle de bases $y = 1$ et $y = -\frac{3}{2}$, sauf le trou que nous allons définir. Soit

$$a_0 = 1, \qquad a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \qquad a_4 = 1 + \ldots + \frac{1}{2^4}, \qquad \ldots,$$
$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}, \qquad \ldots,$$

les points a_{2k} étant marqués sur la droite $y = 1$ et les points a_{2k+1} sur $y = -1$.

Considérons la ligne brisée

$$\psi(x) = o a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$$

et prenons pour $\varphi(x)$ la ligne brisée obtenue en déplaçant de $\frac{1}{n\, 2^{n+1}}$ le côté $a_{n-2} a_{n-1}$ à droite si n est impair, à gauche s'il est pair. Les fonctions ψ et φ définissent le trou dans l'intervalle $(0, 2)$. Il est aisé

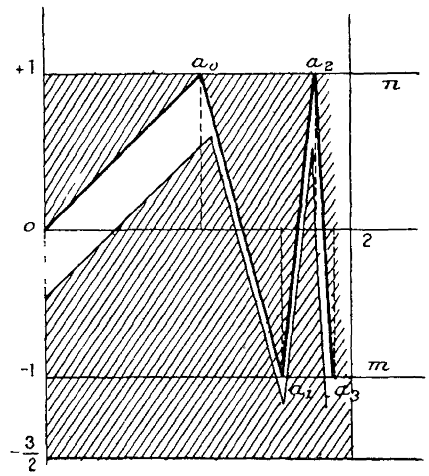

Fig. 4.

de vérifier que la fonction multiforme ainsi définie est continue. Il suffit pour cela de vérifier qu'elle est continue pour chacune de ses valeurs au point $x = 2$; si y est une telle valeur, on voit que, pour tout point x de l'intervalle $(a_n, 2)$, il y a une valeur y' de $F(x)$ telle que $|y - y'| < \frac{1}{n}$.

En prenant la figure symétrique de celle-ci par rapport à la droite $x = 2$, on obtient une fonction multiforme continue définie dans l'intervalle $(0, 4)$, avec deux trous de seconde espèce ayant en commun, au point $x = 2$, le segment singulier $mn = 2$.

32. Voici maintenant un autre exemple de fonction multiforme continue tiré de l'analyse classique. Je rappelle d'abord une notion

que l'on pourra facilement étendre aux fonctions multiformes si l'on y voit intérêt, la notion de fonctions également continues, que l'on doit à M. Ascoli ([1]).

On appelle ainsi les fonctions uniformes d'une famille, données dans un intervalle (a, b) par exemple, et telles que, pour tout nombre ε positif arbitraire, on puisse déterminer un nombre δ de manière que la relation $|x' - x''| \leqq \delta$ entraîne

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

quelle que soit la fonction f de la famille.

Dans le cas où l'on considère des opérations uniformes continues dans un ensemble abstrait, M. Fréchet (*loc. cit.*) donne de cette notion une définition plus générale qui coïncide avec celle de M. Ascoli dans le cas des ensembles ponctuels. Une famille de fonctions continues est dite *compacte* lorsque, de toute suite de fonctions de la famille, on en peut extraire une autre convergeant uniformément vers une limite, qui est donc continue. M. Arzelà a démontré ([2]) que, pour qu'une famille soit compacte, il faut et il suffit que les fonctions qui la composent soient bornées dans leur ensemble et également continues. M. Montel, dans sa Thèse ([3]), donne de ce théorème une démonstration simple et utilise ces familles compactes, notamment pour démontrer l'existence d'un faisceau d'intégrales issues d'un point quelconque du plan, de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

sous la seule condition que $f(x, y)$ est une fonction continue.

Considérons donc une famille compacte de fonctions continues. La réunion des fonctions de cette famille forme une fonction multiforme. Fermons-la verticalement, c'est-à-dire, si e est l'ensemble de ses valeurs en un point x, nous considérons la fonction dont l'ensemble-valeur

---

([1]) Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve* (*Memoire della R. Academia dei Lincei*, t. XVIII, 1883, p. 521-586).

([2]) *Sulle serie di funzioni* (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, 5e série, t. VIII).

([3]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1907.

est $e^0 = e + e'$; *la fonction* $F(x)$ *ainsi obtenue est continue.* En effet, on vérifie aisément qu'en deux points x' et x'' satisfaisant à l'inégalité $|x' - x''| \leqq \delta$, $F(x')$ et $F(x'')$ diffèrent de ε au plus, ε et δ étant les nombres définis précédemment. $F(x)$ est donc uniformément continue.

Puisque la famille est compacte, tout point de e^0 qui n'appartient pas à une fonction de la famille, appartient à une fonction $f_1(x)$, limite d'une suite de telles fonctions. La famille des fonctions limites $f_1(x)$ est encore compacte; il en est de même de la famille des fonctions f et f_1, qui est, de plus, fermée. La fonction $F(x)$ est donc obtenue par la réunion des fonctions d'une famille compacte fermée.

33. Par exemple, les intégrales de l'équation (1) issues d'un point $P(x_0, y_0)$ du plan forment, dans un intervalle $(x_0, x_0 + a)$ convenablement choisi, une telle famille de fonctions ([1]). Leur réunion constitue une fonction $F(x)$ multiforme continue « à intervalles ». Les deux fonctions $L(x)$ et $l(x)$, de $F(x)$, ont des dérivées continues qui coïncident en tous les points où $L(x) = l(x)$.

On peut se demander si toute fonction multiforme de cette nature peut être considérée comme la réunion des intégrales issues de P, d'une équation différentielle du type (1).

La réponse est affirmative et résulte immédiatement des raisonnements de M. Montel. En effet, soit $F(x)$ une telle fonction définie dans un intervalle $(x_0, x_0 + a)$. Définissons dans le plan une fonction uniforme continue, prenant sur les deux courbes $y = L(x)$ et $y = l(x)$ les valeurs $L'(x)$ et $l'(x)$, arbitrairement définie entre ces courbes et la droite $x = a$, égale à $L'(x)$ pour $y > L'(x)$ et à $l'(x)$ pour $y < l'(x)$, en tout point x. Pour $x > a$ et $x < x_0$, elle sera définie n'importe comment. Il est d'abord évident que, si M est un nombre tel que $|f(x,y)| < M$ pour $x_0 \leqq x \leqq a$ et y quelconque, on peut définir un nombre b tel que $aM < b$. Les raisonnements de M. Montel sont donc valables dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$. Mais $L(x)$ est une intégrale de l'équation $y' = f(x,y)$; je dis que c'est l'intégrale supé-

---

([1]) *Voir* P. Montel, *loc. cit.*, Chap. II.

rieure. En effet, $M(x)$ étant cette intégrale on a

$$M(x) \geqq L(x),$$

mais d'après la définition de $f(x,y)$ on a

$$M'(x) = L'(x),$$

et comme $M(x_0) = L(x_0)$, on a encore $M(x) = L(x)$. De même, $l(x)$ est l'intégrale inférieure. D'ailleurs, par tout point de la région limitée par $L(x)$ et $l(x)$, il passe une intégrale; donc $F(x)$ est constituée par leur réunion.

CHAPITRE III.

Suites de fonctions multiformes.

34. Considérons la suite de fonctions

$$F_1(P), \quad F_2(P), \quad \ldots, \quad F_p(P), \quad \ldots..$$

et supposons que chacune d'elles, ainsi que la fonction $F(P)$, soit fermée verticalement. Nous dirons que :

La suite considérée converge à ε *près, vers* $F(P)$, *lorsque cela a lieu en tout point de* Π.

Cela veut dire que la suite des ensembles-valeurs de ces fonctions tend vers l'ensemble-valeur de $F(P)$.

Nous dirons de même que :

La suite considérée converge vers F *si cela a lieu en tout point de* Π.

Remarquons que si une suite de fonctions converge, sa limite est unique d'après le n° 6.

Si nous utilisons la proposition de la fin du n° 3, on voit que cette définition est équivalente à la suivante :

La suite considérée converge vers F *si, quels que soient* ε *et le point* P, *on peut trouver un entier m tel, que toute fonction d'indice supérieur à m diffère de* F *de* ε *au plus en* P.

La convergence sera *uniforme* lorsque le nombre m, trouvé dans la définition précédente, est le même pour tous les points de Π.

La suite considérée converge quasi-uniformément vers F *lorsque :*

1° *Elle converge vers* F ;

2° *Quel que soit* ε *et le nombre* N, *aussi grand qu'on veut, on puisse trouver un autre nombre* $N' \geqq N$, *tel que pour tout point* P *de* Π, *il existe une fonction de la suite, d'indice compris entre* N *et* N', *qui diffère de* F *de* ε *au plus en ce point.*

35. Voici maintenant quelques théorèmes sur les suites convergentes de fonctions :

Theorème. — *Si une suite de fonctions continues tend uniformément vers une fonction* F, *celle-ci est aussi continue.*

Soient P et P′ deux points de Π et l leur distance; ε étant donné, on peut trouver une fonction F_n de la suite qui diffère de F de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus partout dans Π. Alors, dès que l est assez petit, les valeurs de F_n en P et P′ diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Donc les valeurs de F en P et P′ diffèrent de ε au plus, ce qui prouve que F est continue en chaque point P.

Théorème de M. Arzelà (1). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* F, *limite d'une suite de fonctions continues, soit continue est que la suite considérée converge quasi-uniformément vers* F.

La condition est nécessaire. ε et N étant donnés, soit P un point quelconque de Π; on peut déterminer un nombre l_1 tel, que pour tout point P′ dont la distance à P ne dépasse pas l_1, les valeurs de F en P et P′ diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. D'autre part, on peut choisir $n \geqq N$ de manière que F et F_n diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus en P; enfin, si l_2 est le nombre relatif à F_n déterminé de la même manière que l_1, pour tout point P′ dont la distance à P n'est pas supérieure à λ, λ étant le plus

(1) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 42. La démonstration de ce théorème est analogue à celle de M. Borel pour les fonctions uniformes.

petit des nombres l_1 et l_2, les valeurs de F_n en P et P′ diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Donc F et F_n diffèrent de ε au plus en P′, c'est-à-dire, en tout point d'un domaine rectangulaire de centre P.

On peut faire correspondre à tout point P un tel domaine et, d'après le théorème de M. Borel, déjà cité, on peut en trouver un nombre fini qui couvre tout Π. A chacun de ces domaines correspond un nombre n et l'on peut prendre pour N′ le plus grand d'entre eux.

La condition est suffisante. Soit P un point; ε étant donné, on peut trouver un nombre N tel que pour tout $n \geq N$ les fonctions F_n et F diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus, en P. A $\frac{\varepsilon}{3}$ et N correspond un N′. Considérons alors les fonctions F_N, F_{N+1}, ..., $F_{N'}$; on peut déterminer un nombre λ, tel que P′ étant un point dont la distance à P ne dépasse pas λ, les valeurs de chacune de ces fonctions en P et P′ diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Or, en P′, il en existe une d'elles différant de F de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus et par conséquent les valeurs de F en P et P′ diffèrent de ε au plus, et comme ε est arbitraire, le théorème est démontré.

36. Théorème. — *Si, quel que soit* ε, *il existe une suite de fonctions continues tendant à* ε *près, vers une fonction* F(P), *alors, on peut trouver une suite de fonctions continues tendant vers* F(P).

Soit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ une série convergente à termes positifs. D'après l'hypothèse, il existe une suite de fonctions continues

$$F_{11}(P), \quad F_{12}(P), \quad \ldots, \tag{1}$$

tendant vers F à $\frac{\varepsilon_1}{4}$ près. D'après la proposition du n° 3, ces fonctions sont telles qu'en tout point de Π elles diffèrent de F de ε_1 au plus, à partir d'un certain indice.

De la même manière, on peut déterminer une suite

$$F'_{21}, \quad F'_{22}, \quad \ldots, \tag{2}$$

de fonctions continues telles, qu'en tout point de Π, chacune d'elles diffère de F de ε_2 au plus, à partir d'un certain rang, et ainsi de suite.

Considérons maintenant les fonctions F_{1n} et F'_{2n}. D'après le théorème du n° 21, on peut trouver une fonction F_{2n} obtenue en modifiant F'_{2n} aux points de Π autres que ceux où F_{1n} et F'_{2n} diffèrent de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ au plus et telle qu'elle diffère de F_{1n} de $2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ au plus. En faisant la même chose pour tout indice n, on obtient une suite de fonctions continues

$$(3) \qquad F_{21}, \quad F_{22}, \quad \ldots, \quad F_{2n}, \quad \ldots,$$

qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Chacune d'elles diffère de la fonction correspondante de (1) de $2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ au plus ;

2° La suite (3) satisfait à la proposition du n° 3 par rapport à F pour ε_2.

En effet, en un point de Π, on peut trouver un indice à partir duquel toute fonction de la suite (1), diffère de F de ε_2 au plus; donc, à partir de cet indice, deux fonctions correspondantes dans les suites (1) et (2) diffèrent de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ au plus et par conséquent la fonction correspondante dans la suite (3) est, au point considéré, identique à celle de même rang dans la suite (2) qui, elle, diffère de F de ε_2 au plus.

Maintenant, en considérant la suite (3) et la suite

$$F'_{31}, \quad F'_{32}, \quad \ldots$$

et en procédant de la même manière, on trouvera une autre suite de fonctions continues

$$(4) \qquad F_{31}, \quad F_{32}, \quad \ldots$$

qui sont telles que :

1° Chacune d'elles diffère de la fonction correspondante de (3), de $2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ au plus.

2° La suite (4) satisfait à la proposition du n° 3 par rapport à F pour ε_3.

Et ainsi de suite, de proche en proche, on obtiendra une suite de fonctions continues

$$(5) \qquad F_{n1}, \quad F_{n2}, \quad \ldots, \quad F_{np}, \quad \ldots,$$

qui jouissent des mêmes propriétés par rapport à la suite de rang $n-1$ et par rapport à F.

Si nous considérons maintenant la suite de fonctions continues

$$F_{11},\quad F_{22},\quad F_{33},\quad \ldots,\quad F_{nn},\quad \ldots,$$

on voit qu'elle tend vers F.

En effet, considérons un point de Π et soit ε un nombre aussi petit qu'on veut. Choisissons n de manière que la somme de la série

$$\varepsilon_n + 2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + 2(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}) + \ldots$$

soit inférieure à ε.

Alors, nous pouvons choisir p de manière que toute fonction de (5) à partir de cet indice, diffère de F de ε_n au plus, au point considéré. Soit $F_{n,n+p'}$ l'une d'elles. La fonction $F_{n+p',n+p'}$ diffère de $F_{n,n+p'}$ d'au plus

$$s = 2(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + \ldots + 2(\varepsilon_{n+p'-1} + \varepsilon_{n+p}).$$

Donc, au point de Π considéré, la fonction $F_{n+p'\,n+p'}$ diffère de F de $\varepsilon_n + s$ au plus, quantité iuférieure à ε.

Le théorème est démontré.

37. Nous avons démontré au n° 29 que toute fonction multiforme continue $F(x)$ dans un intervalle (a, b), peut être représentée à ε près, par une fonction à p branches de l'analyse classique. Il en résulte le théorème suivant :

La fonction continue $F(x)$ *est la limite uniforme d'une suite*

$$(1)\qquad \Phi_1(x),\quad \Phi_2(x),\quad \ldots,\quad \Phi_n(x),\quad \ldots,$$

$\Phi_n(x)$ *étant une fonction formée par la réunion d'un nombre fini de fonctions continues uniformes, qu'on peut supposer être des polynomes.*

Si dans la suite (1) on met à la place de chaque fonction $\Phi_i(x)$ la suite finie de polynomes dont elle est la réunion, l'énoncé précédent prend une forme très voisine de celui du théorème de Weierstrass pour les fonctions uniformes qu'il généralise.

CHAPITRE IV.

Oscillations.

38. Oscillation au point P pour une valeur y_0. — Considérons une fonction F(P) et soient P un point de II et δ un domaine contenant P à son intérieur. Je fais abstraction de toutes les autres valeurs de la fonction en P et ne considère qu'une d'elles y_0. Soit $y'y''$, $y' < y''$, un intervalle tel que qour tout point du domaine δ, il existe au moins une valeur de la fonction comprise dans cet intervalle. Si λ est sa longueur j'appellerai *oscillation de la fonction au point* P *pour la valeur* y_0, *dans le domaine* δ, *et je désignerai par* $\omega(P, y_0, \delta)$, *la borne inférieure des nombres* λ.

Il est évident que si δ' est un autre domaine compris dans δ et contenant P à l'intérieur, on a

$$\omega(P, y_0, \delta') \leqq \omega(P, y_0, \delta).$$

Dès lors, nous n'avons qu'à considérer des domaines δ de centre P et de rayon ρ tendant vers zéro, pour obtenir l'oscillation $\omega(P, y_0)$ au point P pour la valeur y_0; elle est la borne inférieure des nombres $\omega(P, y_0, \delta)$ et en particulier de la suite

$$\omega(P, y_0, \delta_1), \quad \omega(P, y_0, \delta_2), \quad \ldots,$$

les rayons ρ_i des δ_i tendant en décroissant vers zéro.

Il est clair que $\omega(P, y_0) = 0$ exprime la continuité au point P pour la valeur y_0.

Remarquons que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un domaine δ de centre P et pour chacun de ses points P' une valeur y'_0 de la fonction telle que

$$\omega(P', y'_0) < \omega(P, y_0) + \varepsilon.$$

Appelons fonction oscillation de F(P), la fonction $\Omega(P)$ dont les valeurs au point P sont les $\omega(P, y_0)$, quelle que soit la valeur y_0 de F(P) considérée.

39. Voyons quel est l'effet de l'opération réunion sur $\omega(P, y)$.

Soit $F(P)$ la fonction obtenue par la réunion des fonctions $\Phi(P)$ d'une certaine famille. Toute valeur y_0 de $F(P)$ en un point P, appartient à certaines fonctions $\Phi(P)$. Il est évident que l'oscillation $\omega(P, y_0, \delta)$ de F est au plus égale à l'oscillation $\omega(P, y_0, \delta)$ de toute fonction Φ ayant la valeur de y_0, puisque tout intervalle $y'y''$ relatif à une telle fonction est encore un intervalle $y'y''$ pour F. Si l'on fait tendre δ vers zéro, on obtient cette proposition :

L'oscillation $\omega(P, y_0)$ de la fonction réunion est au plus egale à la borne inférieure des oscillations correspondantes de celles des fonctions qui admettent la valeur y_0 (¹).

40. *Si une fonction bornée* $F(P)$ *est fermée verticalement, il en est de même de* $\Omega(P)$.

Supposons, en effet, que l'ensemble de ses valeurs au point P_0 ne soit pas fermé; il aurait alors une valeur limite η telle que pour aucune valeur de F en P_0 l'ascillation ne soit égale à η_0. Nous allons prouver que cela est impossible.

Soit

$$(1) \qquad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n, \quad \ldots,$$

une suite de valeurs de $\Omega(P_0)$ tendant vers η et

$$(2) \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots,$$

une suite de valeurs de $F(P_0)$ telle que $\omega(P, y_i) = \eta_i$. Cette suite a au moins un point limite y et nous pouvons supposer qu'elle n'en a qu'un, sans quoi, nous pourrions extraire d'elle une autre suite tendant vers y et de la suite (1) les η correspondants.

Choisissons n assez grand pour que

$$|y - y_n| < \varepsilon,$$

et que

$$\eta_n \leqq \eta + \varepsilon.$$

(¹) Elle peut lui être inférieure comme on le voit facilement sur un exemple. Prenons une fonction égale à 1 partout dans l'intervalle (0, 1), sauf en 0 où elle a la valeur 0, et une autre fonction égale à 0 partout, sauf en 0 où elle a la valeur 1. Leur réunion donne une fonction pour laquelle $\omega(0, 0) = 0$ tandis que $\omega(0, 0)$ pour la seconde fonction est égale à 1.

Ou peut alors trouver, d'abord, un domaine δ comprenant P_0 à l'intérieur et ensuite un intervalle (y', y''), de longueur $\eta + 2\varepsilon$ au plus contenant y_n et une valeur au moins de F correspondant à tout point de δ. En augmentant après (y', y'') de ε, de façon qu'il contienne la valeur y, on voit que

$$\omega(P_0, y) \leqq \eta + 3\varepsilon.$$

Et comme ε est arbitraire,

$$(3) \qquad \omega(P_0, y) \leqq \eta.$$

Si nous refaisons maintenant le même raisonnement en partant de la valeur y, on voit qu'il existe un n tel que

$$\eta_{n+p} \leqq \omega(P_0, y) + 2\varepsilon.$$

quel que soit p, par conséquent,

$$(4) \qquad \omega(P_0, y) \geqq \eta.$$

En rapprochant les formules (3) et (4), on voit que

$$\omega(P_0, y) = \eta$$

ce qui démontre le théorème.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, comme on le voit sur l'exemple suivant :

F(P) a en chaque point les valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, et n'a pas la valeur o. Alors $\Omega(P)$ a une seule valeur o et est par conséquent fermée verticalement, cependant que F(P) ne l'est pas.

41. Supposons F(P) bornée et fermée verticalement; alors il en est de même de $\Omega(P)$ ainsi que de la fonction $\Omega_1(P)$ oscillation de celle-ci. Si $\Omega(P)$ est telle que l'oscillation en tout point P pour toute valeur y_0 soit égale à y_0, alors $\Omega(P)$ *coincide avec* $\Omega_1(P)$.

Nous allons prouver qu'inversement :

Si $\Omega(P)$ *coïncide avec* $\Omega_1(P)$, *alors l'oscillation de* $\Omega(P)$ *en tout point* P *pour toute valeur* y_0, *est égale à* y_0 (¹).

(¹) Pour ce théorème ainsi que pour le suivant, $\Omega(P)$ peut être une fonction

Cette proposition n'est pas évidente *a priori*, car il se pourrait qu'il y eût permutation entre les valeurs de $\Omega_1(P)$ en un point et les oscillations de $\Omega(P)$ pour chacune de ses valeurs au même point. Rien, du moins, n'empêche cette hypothèse.

Supposons que la proposition ne soit pas vraie et soient P_0 un point et y_1 une valeur pour laquelle l'oscillation y_0 de $\Omega(P)$ soit différente de y_1. D'après une remarque faite plus haut, il résulte que $y_0 < y_1$. Mais alors, il existe une valeur $y_2 > y_1$ pour laquelle l'oscillation de $\Omega(P)$ en P_0 est égale à y_1 et ainsi de suite; il existe une suite de valeurs

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots$$

tendant vers une limite y et telle que l'oscillation de $\Omega(P)$ pour sa valeur y_{n+1} soit égale à y_n. En vertu d'un raisonnement que nous avons utilisé pour la démonstration du théorème précédent, nous pouvons affirmer que l'oscillation de $\Omega(P)$ en P_0 pour la valeur y est égale à y.

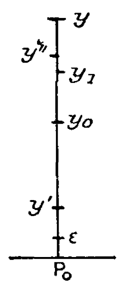

Fig. 5.

Revenons à la valeur y_1. ε étant un nombre inférieur à $y_1 - y_0$, on peut trouver un domaine δ comprenant P_0 à l'intérieur et puis un

---

quelconque bornée et fermée verticalement et qui admet en outre la propriété suivante : quelle que soit la valeur y correspondant à un point P quelconque, si l'on se donne un ε arbitraire, il existe un domaine de centre P, en tout point duquel la fonction admet une valeur au moins, inférieure à $y + \varepsilon$. Ceci ne peut pas être pris pour définition de la semi-continuité supérieure comme c'est le cas pour les fonctions ordinaires, car si l'on a en un point cette propriété en même temps que celle analogue à la semi-continuité inférieure, il n'en résulte pas la continuité. Par exemple la fonction égale à ± 1 en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$, sauf au point 0 où elle a toutes les valeurs entre -1 et $+1$, n'est continue en $x = 0$ pour aucune valeur autre que -1 et $+1$.

intervalle $(y' y'')$ de longueur $y_0 + \varepsilon$, contenant la valeur y_1 et une valeur au moins de $\Omega(P)$ correspondant à tout autre point P appartenant au domaine. Augmentons cet intervalle (y', y'') de manière qu'il contienne la valeur y; ce nouvel intervalle a une longueur inférieure à y et, par conséquent, l'oscillation de $\Omega(P)$ en P_0 pour la valeur y est inférieure à y. Ceci est en contradiction avec le résultat trouvé plus haut, ce qui démontre la proposition.

Ainsi la coïncidence de Ω (P) avec $\Omega_1(P)$ est spéciale; chaque valeur de $\Omega(P)$ se correspond à elle-même dans $\Omega_1(P)$. Ce fait important va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $\Omega(P)$ *coïncide avec* $\Omega_1(P)$ *est que, quel que soit* σ, *l'ensemble des points de* Π *où toutes les valeurs de* $\Omega(P)$ *sont inferieures à* σ, *soit dense dans* Π.

La condition est nécessaire. En effet, si elle n'était pas remplie, il existerait un σ pour lequel l'ensemble en question ne serait pas dense, ce qui veut dire qu'on pourrait trouver un domaine δ contenant à son intérieur des points de Π, pour lequel il y aurait un intervalle $(y' y'')$ tel que

$$y' = \varepsilon > 0$$

et jouissant de la propriété que, pour tout point P contenu dans δ, il existe une valeur de $\Omega(P)$ contenue dans (y', y''). Diminuons alors y'' de manière que l'intervalle (y', y''), tout en continuant à jouir de cette propriété, du moins pour les points P *intérieurs* à δ, il y ait une une valeur y_0 de Ω correspondant à un point de Π intérieur à δ qui diffère de y'' de moins de ε. En prenant alors un domaine suffisamment petit autour de ce point, on voit que l'oscillation de Ω en ce point pour la valeur y_0 serait plus petite que y_0, ce qui n'est pas possible car, par hypothèse, $\Omega(P)$ coïncide avec $\Omega_1(P)$.

La condition est évidemment suffisante si l'on tient compte de la remarque faite au n° 38.

Ce théorème est un cas particulier du suivant qui n'a pas besoin d'une nouvelle démonstration, en raison de la note de la page 49.

Si $\Omega_{n+1}(P)$ *est la fonction oscillation de* $\Omega_n(P)$, *la condition nécessaire* *et suffisante pour que les oscillations* Ω, Ω_1, Ω_2, ..., *coïncident à partir d'un certain indice p est que, quel que soit* σ, *l'ensemble des points de* Π *où toutes les valeurs de* Ω_p *sont inférieures à* σ, *soit partout dense* (¹).

42. Faisons l'observation suivante : du fait que la fonction $\Omega(P)$ jouit de la propriété que, quel que soit soit σ, l'ensemble des points de Π en lesquels toutes ses valeurs sont inférieures à σ, est dense dans Π, il ne résulte pas que l'ensemble des points en lesquels toutes ses valeurs sont nulles soit dense également. De même il ne résulte pas que la fonction uniforme égale en chaque point à la plus grande valeur de Ω, soit semi-continue supérieurement. On peut affirmer seulement que l'ensemble des points où $\Omega(P)$ a *une* valeur nulle est dense.

L'exemple suivant va justifier ce que nous avançons en premier et en second lieu.

Considérons un ensemble dénombrable de points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots,$$

dense sur Π. (On sait qu'il est toujours possible de former un tel ensemble au moyen d'une suite de quadrillages de l'espace dont les mailles sont de plus en plus petites. Dans chaque maille contenant des points de Π, on en choisit un et comme ces mailles sont en infinité dénombrable, la justification est faite).

(¹) Si la fonction $F(P)$ est uniforme, on constate que $\Omega_1(P)$ satisfait à la condition de ce théorème, donc Ω_1 *coïncide avec les oscillations suivantes*. Cette proposition avait été obtenue par M. Sierpinski (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1910, p. 33). Dans le cas général il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple la fonction $F(x)$ définie dans $(0, 1)$ et ayant les valeurs 0, 3, 24, 55 partout, 1, 4, 8, 15, 32, 70 pour x rationnel et 11, 43 pour x irrationnel est telle que

$$\Omega(x) \neq \Omega_1(x) \neq \Omega_2(x) = \Omega_3(x) = \Omega_4(x) = \ldots.$$

La construction de cette fonction indique le procédé pour avoir une fonction dont les n premières oscillations soient différentes.

M. Denjoy s'est occupé dans ses premiers travaux (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1903) de questions voisines de celles-ci pour les fonctions uniformes. Ses recherches utilisent les notions de maximum et minimum d'une fonction en un point, notions qu'on ne voit pas comment définir judicieusement dans le cas des fonctions multiformes.

Définissons une fonction F(P) de la manière suivante :

Aux points de Π autres que ceux de l'ensemble dénombrable, elle reçoit les valeurs o et 1.

En tout point P_n elle reçoit la valeur ε_n, la suite

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots,$$

ayant ses termes positifs inférieurs à λ et tendant vers zéro et où

$$\lambda < \frac{1}{2}.$$

Il est évident qu'en tout point P_n la fonction Ω a la valeur ε_n, tandis que, aux autres points de Π, elle a les valeurs o et 1. L'ensemble des points où les valeurs de Ω sont inférieures à σ, quel que soit σ, est dense, et cependant il n'existe aucun point où toutes les valeurs de Ω soient nulles.

De même, la plus grande valeur de Ω aux points P_n est ε_n et en tout autre point elle est égale à 1. La fonction uniforme ainsi définie, n'est pas semi- continue supérieurement.

Quant à notre affirmation, on la justifie immédiatement ainsi.

Soit Δ un domaine quelconque contenant à son intérieur des points de Π. Parmi ces points il y en a un, où une valeur (et même toute valeur) de Ω est inférieure à $\frac{\varepsilon_1}{2}$. Donc, on peut trouver un domaine δ_1 autour de ce point et contenu dans Δ, en tout point duquel Ω a une valeur inférieure à ε_1. Ensuite, dans δ_1 on peut trouver un domaine contenant à l'intérieur des points de Π et tel, que pour tout points de Π qu'il contient, Ω ait au moins une valeur inférieure à ε_2 et ainsi de suite. On choisira les ε_n tendant vers zéro et l'on s'arrangera de façon que les domaines δ_n tendent aussi vers zéro. Ils définissent alors un point de Π en lequel Ω, ayant une valeur inférieure à ε_n, quel que soit n, a aussi la valeur zéro.

43. Voici maintenant un théorème sur les fonctions multiformes les plus générales. Soit F(P) une fonction multiforme quelconque et considérons ses fonctions L(P) et l(P) (finies ou non).

Théorème. — *Si la fonction* F(P) *est telle que, en chaque point de*

II, *il existe une valeur* $\Omega(P)$ *inférieure à* ε, *quelque soit* ε, *alors il existe une fonction uniforme continue, comprise entre* $L(P)$ *et* $l(P)$.

Ce théorème est un cas particulier de celui que je considère dans la note à la fin de ce travail. Il peut être utilisé avec fruit pour la théorie des fonctions uniformes. Je vais en donner un exemple; on peut démontrer la proposition suivante .

Si $f(P)$ *est une fonction uniforme, il existe une suite de fonctions uniformes continues qui tendent vers* $f(P)$ *aux points où elle est continue.*

Soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ . \ . \ , \varepsilon_n, \quad \dots$$

une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Définissons une fonction multiforme $F_n(P)$ de la manière suivante. Quel que soit le point P_0 de II où $f(P)$ est discontinue, en tout point qui en est éloigné de ε_n au plus, $f(P_0)$ sera une valeur de la fonetion $F_n(P)$.

En outre, $F_n(P)$ aura aussi, en chaque point, la valeur de $f(P)$ correspondante.

La fonction F_n, ainsi définie, est continue en chaque point pour la valeur de f correspondante. D'après le théorème précédent, il existe une fonction uniforme continue $f_n(P)$ comprise entre $L_n(P)$ et $l_n(P)$. Si l'on fait varier n, la suite

$$f_1(P), \quad f_2(P), \quad \dots,$$

tend vers $f(P)$ aux points où elle est continue. En effet, soit P' un point quelconque de II et L' la limite supérieure, l' la limite inférieure de $f(P)$ en ce point [1]. ε étant donné, on peut trouver une sphère de rayon r' et de centre P' telle que pour tout point de II qu'elle contient, $f(P)$ soit inférieure à $L' + \varepsilon$ et supérieure à $l' - \varepsilon$. Alors, à partir d'un certain n tel, que les ε_p d'indices supérieurs soit inférieurs à r', les fonctions F_p auront leur $L_p(P')$ et $l_p(P')$ comprises entre $L' + \varepsilon$ et $l' - \varepsilon$. Il en résulte qu'il en de est même de $f_p(P')$ et

---

[1] Pour la définition de L' et de l' *voir* H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*..., p. 19.

par conséquent tous les points limites de la suite.

$$f_1(P'),\quad f_2(P'),\quad \ldots,$$

sont comprises entre L' et l'.

Il est évident que si $f(P)$ est continue en P', L' et l' sont égales et la suite précédente tend vers cette valeur commune qui est $f(P')$.

La proposition est donc démontrée et nous pouvons même l'énoncer d'une manière plus précise comme il suit :

Si $f(P)$ est une fonction uniforme, il existe une suite de fonctions uniformes continues dont les points limites en tout point de Π, *sont compris entre la limite supérieure et la limite inférieure de $f(P)$ en ce point.*

Le premier énoncé de cette proposition était connu pour les fonctions mesurables. J'ai été conduit à cette proposition, en cherchant à appliquer le théorème sur les fonctions multiformes qui précède.

44. Oscillation en un point P. — Considérons une fonction $F(P)$ *fermée verticalement* et soit δ un domaine contenant à son intérieur des points de Π (tous les domaines que nous considérerons auront cette propriété). Soient encore P et P' deux points de Π contenus dans δ. Les valeurs de F en P et P' diffèrent d'une certaine quantité λ (1). La borne supérieure des nombres λ, lorsque P et P' varient dans δ, est *l'oscillation de la fonction dans le domaine δ, et nous la désignerons par* $\omega(\delta)$. Si δ' est un autre domaine contenu dans δ, il est évident que l'on a

$$\omega(\delta') \leqq \omega(\delta). \tag{1}$$

Alors, si l'on considère un point P, la borne inférieure des nombres ω ainsi définis, relative à tous les domaines contenant P à l'intérieur, sera *l'oscillation de la fonction au point* P et nous l'écrirons $\omega(P)$ (2).

---

(1) *Voir*. Chapitre I.

(2) J'attire l'attention sur la différence de notation entre cette oscillation et celle définie antérieurement, laquelle a été désignée par $\omega(P, y)$.

Si l'on considère une suite de domaines de plus en plus petits, tendant vers o et contenant P à l'intérieur, il est évident que la suite des oscillations respectives tend vers $\omega(P)$ (1).

La relation

$$\omega(P) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit continue au point P.

La fonction uniforme $\omega(P)$ est une fonction semi-continue supérieurement (2). On s'en assure facilement en s'appuyant sur la relation (1).

Voyons quel rapport il y a entre les fonctions $\omega(P)$ et $\Omega(P)$ définies au n° 38. Nous allons démontrer que :

Les valeurs de la fonction $\Omega(P)$ *en un point* P *sont inférieures ou au plus égales à* $2\omega(P)$.

En effet, ε étant un nombre positif arbitraire, on peut trouver un domaine δ contenant P à l'intérieur et tel que

$$(2) \qquad \omega(\delta) < \omega(P) + \varepsilon.$$

P' étant un point quelconque dans ce domaine, les valeurs de F en P et P' diffèrent de $\omega(\delta)$ au plus. Cela permet de dire que, quelle que soit la valeur y de F au point P, il y a dans l'intervalle (y', y'') de centre y et de longueur $2\omega(\delta)$, au moins une valeur de F correspondante à chaque point P' de δ. L'oscillation $\omega(P, y)$ est donc inférieure

---

(1) On ne peut plus rien dire ici concernant l'effet de l'opération réunion sur $\omega(P)$, d'abord parce que la fonction réunion peut ne plus être finie ou fermée verticalement, ensuite parce que d'après la nature même de $\omega(P)$ il peut se présenter des cas très variés. Dans l'exemple donné au n° 39, les deux fonctions ont leur $\omega(0) = 1$, tandis que $\omega(0)$ de leur réunion est égale à 0 donc inférieure à 1. De même les fonctions $f_n(x)$ définies dans $(-1, +1)$, égales à 1 pour $|x| \geq \frac{1}{n}$, à 0 pour $x = 0$ et linéaires dans $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ ont leur $\omega(0) = 0$, tandis que $\omega(0)$ de leur réunion est 1, donc supérieure.

(2) C'est pourquoi si elle est bornée, son oscillation $\omega_1(P)$ coïncide avec l'oscillation $\omega_2(P)$ de celle-ci, etc., d'après la proposition rappelée de M. Sierpinski.

ou au plus égale à $2\omega(\delta)$ et, d'après (2),

$$\omega(P, y) \leqq 2\omega(P),$$

ce qui démontre la proposition [1].

Si donc $\omega(P)$ est nulle en un point, toutes les valeurs de $\Omega(P)$ sont nulles également. Mais la réciproque n'est pas vraie, comme il est facile de le voir sur un exemple.

Considérons, en effet, dans l'intervalle (0, 1) une fonction ayant les valeurs suivantes. Elle est égale à 1 partout dans l'intervalle, et a en outre les valeurs 0 et 2 pour tout $x < \frac{1}{2}$. Au point $\frac{1}{2}$, $\Omega = 0$, tandis que $\omega = 1$.

Cela tient à ce que la fonction considérée n'est pas fermée horizontalement au point $\frac{1}{2}$.

Pour que $\omega(P)$ *soit nulle en un point, il faut et il suffit que toutes*

---

(1) Lorsque la fonction $\Omega(P)$ est donnée, $\omega(P)$ *ne se trouve pas déterminée.* Il est à présumer qu'il en soit ainsi, car $\Omega(P)$ se déduit de $F(P)$ par un procédé de même nature que celui par lequel la dérivée se déduit d'une fonction. Comme pour la dérivée, le passage inverse de $\Omega(P)$ à la fonction ne détermine pas complètement la fonction et, pour trouver $\omega(P)$, il faudrait résoudre l'équation $\Omega(P) = \Phi(P)$ (Φ étant une fonction donnée), ce qui donnerait les fonctions $F(P)$ dont les Ω satisfont à cette équation, et de là déduire $\omega(P)$.

De telles équations ont été considérées pour les fonctions uniformes par *M.* Blumberg (*American Journal of Mathematics*, vol. XLI, 1919) qu'il appelle *équations des sauts*, oscillation et saut désignant la même chose.

Prenons par exemple $\Omega(x) = 0$ dans l'intervalle (0, 1). Les fonctions fermées verticalement, solutions de cette équation [c'est-à-dire dont la $\Omega(x)$ est nulle] comprennent les fonctions continues, pour lesquelles $\omega(x) = 0$, mais elles comprennent aussi les fonctions non continues qui ont leurs $\omega(x)$ différentes de zéro, telle la fonction ayant partout les valeurs 0 à 1, sauf à l'origine où elle n'a que la valeur 0. On peut former des exemples plus compliqués.

De même $\omega(P)$ étant donné $\Omega(P)$ n'est pas déterminée [sauf si $\omega(P) = 0$]. L'étude des équations $\omega(P) = \varphi(P)$ [où $\varphi(P)$ est uniforme] permettrait de trouver les $\Omega(P)$. Par exemple, si $\omega(x) = 1$ dans (0, 1), la fonction $F(x)$ ayant les valeurs 0 et 3 aux x rationnels et 1 et 4 aux x irrationnels, en est une solution. On en en déduit une autre $\Phi(x)$ en lui ajoutant en des x arbitraires d'autres valeurs comprises entre 0 et 1. $\Omega(x)$ varie considérablement.

les valeurs de $\Omega(P)$ *soient nulles en ce point et que, de plus,* F *y soit fermée horizontalement.*

Ceci résulte de la proposition du n° 13.

Nous dirons qu'une fonction $F(P)$ est *ponctuellement* discontinue [1] sur Π, lorsque l'ensemble des points où son $\omega(P)$ est nulle, est partout dense dans Π.

45. En résumé, l'étude faite dans ce Chapitre conduit à distinguer deux catégories de fonctions caractérisées par la propriété suivante : ε *étant donné, l'ensemble des points* P_0 *jouissant d'une certaine propriété dépendant de* ε, *est dense dans* Π *et cela quel que soit* ε.

Voici quelles sont ces propriétés correspondant à chacune de ces catégories :

1° Il existe un domaine δ de centre P_0 tel, que P' étant un quelconque de ses points autres que P_0, l'ensemble $F(P')$ des valeurs de la fonction en P' soit compris dans $I(\varepsilon)$ relatif à l'ensemble $F(P_0)$ et réciproquement $F(P_0)$ soit compris dans $I'(\varepsilon)$ relatif à $F(P')$.

Les fonctions de cette catégorie sont les fonctions *ponctuellement discontinues.*

2° L'ensemble $F(P_0)$ est compris dans $I'(\varepsilon)$.

Cette catégorie est celle des *fonctions pour lesquelles* $\Omega(P) = \Omega_1(P)$.

Une troisième catégorie de fonctions s'introduit ainsi naturellement, c'est celle où

3° L'ensemble $F(P')$ est compris dans $I(\varepsilon)$.

Ce sont les fonctions, *à* ε *près, fermées horizontalement* aux points de l'ensemble partout dense.

On peut remarquer que les fonctions de la première catégorie font partie également des deux autres, qui sont bien distinctes l'une de l'autre, comme il est facile de le voir sur des exemples. Soit en effet $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ deux ensembles n'ayant aucun point commun et partout denses

---

[1] Au sujet de cette notion introduite par M. Baire, *voir* sa Thèse *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1889) ou ses *Leçons sur les fonctions discontinues*, etc.

dans Π. On trouve deux pareils ensembles par le même procédé de quadrillages successifs que nous avons employé (n° 42).

Définissons alors une fonction ayant les valeurs o et 1 en tout point de Π n'appartenant pas à $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$, la valeur 1 aux points de $\mathcal{P}$ et la valeur o aux points de $\mathcal{P}'$. Cette fonction appartient évidemment à la troisième catégorie sans appartenir aux deux autres.

La fonction ayant la valeur $\frac{1}{2}$ aux points de Π autres que ceux de $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$, les valeurs $\frac{1}{2}$ et 1 aux points de $\mathcal{P}$ et $\frac{1}{2}$ et o aux points de $\mathcal{P}'$ appartient à la deuxième catégorie sans appartenir aux deux autres.

Enfin la fonction définie au n° 42 appartient à la deuxième et à la troisième catégorie, sans appartenir à la première.

CHAPITRE V.

I. — Fonctions de classe 1 (¹).

46. Nous dirons que les fonctions continues multiformes définies sur Π, constituent la classe o de fonctions multiformes.

Une fonction sera dite de classe 1 si elle n'est pas continue et si elle est la limite d'une suite de fonctions coutinues.

Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ dans Π, s'il existe une suite de fonctions continues qui tendent, à ε près, vers $F(P)$ aux points de cet ensemble, nous dirons que $F(P)$ est, à ε près, de classe o ou 1 sur $\mathcal{E}$.

Soit P_0 un point de Π; la fonction $F(P)$ sera dite de classe o ou 1 à ε près en P_0 sur $\mathcal{E}$, s'il existe un domaine comprenant le point P_0 à l'intérieur et tel que, sur la partie de $\mathcal{E}$ comprise dans ce domaine, $F(P)$ soit de classe o ou 1, à ε près.

Enfin, la fonction $F(P)$ sera de classe o ou 1 en P_0 sur $\mathcal{E}$, si cela a lieu quel que soit ε.

(¹) La méthode que nous emploierons dans ce Chapitre pour arriver au théorème de M. Baire est analogue à celle que M. Lebesgue a utilisée pour les fonctions uniformes. *Voir* Borel, *Leçons sur les fonctions des variables réelles...*, Note II, ou encore Lebesgue (*Journal de Mathématiques*, 1905) *Sur les fonctions représentables analytiquement.*

Si, dans ce qui précède, on supprime les mots *sur* $\mathcal{E}$, on sous-entendra par là que $\mathcal{E}$ coïncide avec Π, c'est-à-dire qu'il faudrait dire *sur* Π.

47. Ces définitions posées, nous allons établir le théorème suivant :

Pour qu'une fonction $F(P)$ *soit, à* ε *près, de classe* 0 *ou* 1, *sur un ensemble* $\mathcal{E}$ (*qui est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés*) *il faut et il suffit que l'ensemble* $\mathcal{E}$ *soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, sur chacun desquels* $F(P)$ *est, à* ε *près, de classe* 0 *ou* 1.

La condition est évidemment nécessaire.

Prouvons qu'elle est suffisante. Soient

$$\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \ldots, \quad \mathcal{E}_p, \quad \ldots$$

les ensembles fermés dont $\mathcal{E}$ est la somme. Il existe alors une suite de fonctions continues

$$F_p^1(P), \quad F_p^2(P), \quad \ldots,$$

qui tend, à ε près, vers $F(P)$ aux points de l'ensemble $\mathcal{E}_p$, et cela quel que soit p.

Considérons alors une suite de nombres positifs tendant vers zéro :

$$(2) \qquad r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots,$$

et les fonctions

$$F_1^n(P), \quad F_2^n(P), \quad \ldots, \quad F_n^n(P).$$

D'après la proposition du n° 22, on peut trouver une fonction continue Φ_1' coïncidant avec F_1^n sur l'ensemble $\mathcal{E}_1$ et avec F_2^n sur l'ensemble des points de Π éloigné de $\mathcal{E}_1$ de r_n au moins.

Soit Φ'' une fonction continue obtenue par le même procédé, qui coïncide avec Φ' aux points de l'ensemble fermé $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ et avec F_3^n sur l'ensemble des points de Π éloignés de $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ de r_n au moins.

En continuant ainsi on trouvera une fonction continue $\Phi^{(n-1)}$ que nous appellerons $\Phi_n(P)$, qui coïncide avec $\Phi^{(n-2)}$ sur l'ensemble fermé $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_{(n-1)}$ et avec F_n^n aux points de Π éloignés de cet ensemble de r_n au moins.

Posons

$$\Phi_1(P) = F_1^1(P).$$

Je dis que la suite de fonctions continues

$$(3) \qquad \Phi_1(P), \quad \Phi_2(P), \quad \ldots, \quad \Phi_n(P), \quad \ldots$$

tend, à ε près, vers $F(P)$ en tout point de $\mathcal{E}$.

En effet, soit P_0 un point de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_p$ le premier ensemble de la suite (1) auquel il appartient. Appelons l un nombre positif inférieur à la distance de P_0 à $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_{p-1}$. Alors, dès que n dépasse une certaine valeur, les termes de la suite (2) sont inférieurs à l et les fonctions de la suite (3) coïncident en P_0 avec F_p^n, ce qui démontre la proposition.

48. De ce théorème, nous conclurons que :

Si une fonction $F(P)$ *est, à* ε *près, de classe* 0 *ou* 1 *en tout point de* Π, *elle est, à* ε *près, de classe* 0 *ou* 1 *sur* Π.

Ceci résulte du fait que, chaque point de Π est le centre d'un domaine et sur la partie commune de ce domaine et de Π, F est de classe 0 ou 1 à ε près, et comme on peut couvrir Π avec un nombre fini de ces domaines, la proposition précédente justifie l'énoncé ci-dessus.

En nous appuyant maintenant sur le théorème du n° 36, nous pouvons dire que :

Si la fonction $F(P)$ *est de classe* 0 *ou* 1 *en tous les points de* Π, *elle est de classe* 0 *ou* 1 *sur* Π.

Cela est immédiat parce que $F(P)$ est de classe 0 ou 1, à ε près, en tout point. Elle est donc de classe 0 ou 1, à ε près, sur Π, quel que soit ε.

Si une fonction $F(P)$ *est à* ε *près de classe* 0 *ou* 1 *en tous les points de* Π *d'un domaine de centre* P_0, *autres que* P_0, *elle est, à* ε *près, de classe* 0 *ou* 1 *en* P_0 *aussi.*

En effet, soit $\mathcal{E}$ la partie commune de ce domaine δ et de Π. $\mathcal{E}$ est fermé. Appelons $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas intérieurs, au sens étroit, à un domaine δ_1 de centre P_0 et plus petit que δ. $\mathcal{E}_1$ est fermé aussi. Chacun de ses points est centre d'un domaine et sur la partie commune de ce domaine et de Π (donc *a fortiori* sur sa partie commune avec $\mathcal{E}_1$), $F(P)$ est, à ε près, de classe o ou 1. De ces domaines on peut en extraire un nombre fini couvrant tout $\mathcal{E}_1$, et comme la partie de $\mathcal{E}_1$ comprise dans chacun de ces domaines est fermée, $\mathcal{E}_1$ est somme d'uu nombre fini d'ensembles fermés sur chacun desquels F est, à ε près, de classe o ou 1. Donc, F est à ε près de classe o ou 1 sur $\mathcal{E}_1$. Si l'on prend maintenant une suite de domaines

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots,$$

de plus en plus petits et tendant vers zéro, on voit que $\mathcal{E}$ est la somme des ensembles fermés

$$P_0, \quad \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \ldots$$

sur chacun desquels F est à ε près, de classe o ou 1. F est donc de classe o ou 1 sur $\mathcal{E}$, ce qui démontre la proposition.

Donc : *L'ensemble* E *des points de* Π *en lesquels* F(P) *n'est pas de classe* o *ou* 1, *à* ε *près, est parfait.*

Ceci est évident, car il ne peut contenir de point isolé et il est fermé, puisqu'une fonction de classe o ou 1, à ε près, en un point, l'est aussi en tous les points suffisamment voisins.

Nous avons enfin la proposition suivante :

La fonction F(P) *est discontinue en tout point de l'ensemble parfait* E.

D'abord, sur l'ensemble complémentaire C de E, F(P) est, à ε près, de classe o ou 1. En effet, soit

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs tendant vers zéro. L'ensemble $\mathcal{E}_n$ des points de Π dont la distance à E est au moins égale à r_n est fermé. Tout point de cet ensemble est centre d'un domaine et sur la partie commune de ce domaine et de Π, F est, à ε près, de classe o ou 1, et en tenant compte du lemme de M. Borel, on voit que $\mathcal{E}_n$ est la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés, sur lesquels F est, à ε près, de classe o ou 1 ; d'après la proposition du n° 47, F est aussi de classe o ou 1, à ε près, sur $\mathcal{E}_n$. Mais C est la somme des $\mathcal{E}_n$; donc, d'après la même proposition, F est de classe o ou 1, à ε près, sur C.

Supposons qu'en un point P_0 de E, F(P) soit continue sur F. Considérons alors la fonction $\Phi(P)$, ayant en tout point de Π les valeurs de F en P_0 et soit

$$F_1(P), \quad F_2(P), \quad \ldots$$

la suite de fonctions continues tendant, à ε près, vers E en tout point de C. D'après la proposition du n° 22, on peut trouver une fonction continue Φ_n coïncidant avec Φ sur E et avec F_n sur l'ensemble $\mathcal{C}_n$. La suite

$$\Phi_1(P), \quad \Phi_2(P), \quad \ldots$$

tend, à ε près, vers F aux points de Π compris dans un domaine assez petit de centre P_0. Donc F serait de classe 0 ou 1, à ε près, au point P_0, ce qui est contraire à la définition de E.

49. Théorème de M. Baire. — *Pour qu'une fonction* F(P) *soit de classe* 0 *ou* 1, *il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

Montrons que la condition est suffisante. En effet, si F(P) n'était pas de classe 0 ou 1, il existerait un nombre ε tel, que F ne serait pas de classe 0 ou 1 à ε près, ceci d'après le théorème du n° 48. Il existe alors des points en lesquels F n'est pas, à ε près, de classe 0 ou 1; sur l'ensemble de ces points qui est parfait, F est discontinue en chacun de ses points.

La condition est nécessaire [1]. Soit Q un ensemble parfait compris dans Π. Il nous faut démontrer que, quel que soit ε, on trouve dans tout domaine δ contenant des points de Q à *l'intérieur*, des points où l'oscillation de F est au plus égale à ε. Par hypothèse F est limite de la suite de fonctions continues

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots.$$

Il est évident que l'ensemble E_n^p des points de Q en lesquels F_n et F_{n+p} diffèrent de $\frac{\varepsilon}{2}$ au plus est fermée. Il en est de même de l'en-

(1) La démonstration qui va suivre ne fait que reproduire celle qu'a donnée M. de la Vallée Poussin pour le cas des fonctions uniformes, dans son Livre *Intégrales de Lebesgue*..., p. 145.

semble E'_n, des points communs aux ensembles E^1_n, E^2_n .... Appelons Π' la portion de Q déterminée par δ (1). Tout point de Π fait partie d'un ensemble E'; donc l'un d'eux au moins, E'_n est compact sur Π' (2), et par conséquent, il existe un point P_1 de Π' et un domaine δ_1 de centre P_1 ne contenant que des points de Π' qui sont en même temps des points de E'_n et en chacun desquels F_n et F_{n+p} diffèrent de $\frac{\varepsilon}{2}$ au plus, quel que soit p; donc F_n et F diffèrent de $\frac{\varepsilon}{2}$ au plus. Comme d'ailleurs F_n est continue, il résulte que l'oscillation de F en P_1 est au plus égale à ε, ce qui démontre le théorème.

50. On peut définir une classification des fonctions multiformes qu'on appellera pour abréger (B), annalogue à celle donnée par M. Baire pour les fonctions uniformes, laquelle sera désignée par (b).

Si α est un nombre transfini de première ou de seconde classe, une fonction multiforme sera dite de classe α si elle n'est pas de classe inférieure et si elle est la limite d'une suite de fonctions de classe inférieure à α.

Les fonctions multiformes comprenant les fonctions uniformes, la classification (B) comprend la classification (b). Nous allons montrer que toute classe de (b) conserve son rang dans (B); cela résulte du théorème suivant :

Une fonction uniforme de classe α dans (b) est de même classe dans (B) *et réciproquement.*

Démontrons d'abord cette proposition :

Les fonctions L(P) *et* l(P) *d'une fonction multiforme* F(P) *de classe α sont des fonctions uniformes de classe α au plus, dans* (b).

---

(1) M. Baire appelle *portion* déterminée par un domaine δ, contenant à son intérieur des points de Π, l'ensemble parfait formé des points intérieurs à δ et des points de Π situés sur la frontière de δ qui sont limites de points intérieurs (BAIRE, *Acta mathematica*, 1906).

(2) M. de la Vallée Poussin (*loc. cit.*, p. 106) appelle un ensemble E *compact* sur Π, s'il existe un domaine contenant à son intérieur des points de Π et dont la partie commune avec Π fait partie de E. A ce sujet, il démontre le théorème : *Toute somme d'ensembles fermés non compacts sur* Π *est un ensemble non compact sur* Π.

Cela a lieu pour $\alpha = 0$ (n° 20); supposons qu'il en soit ainsi pour les nombres transfinis inférieurs à α. Alors il en est de même pour α car $F(P)$ est la limite d'une suite $F_i(P)$ de fonctions de classes inférieures à α et par hypothèse la fonction $L_i(P)$ et $l_i(P)$ de $F_i(P)$ sont de classe inférieure à α dans (b); or, il est facile de voir que $L(P)$ est la limite de la suite $[L_i(P)]$ et $l(P)$ celle de la suite $[l_i(P)]$, ce qui prouve la proposition.

Si $F(P)$ est uniforme elle se confond avec $L(P)$. Donc une fonction uniforme de classe α dans (B) est au plus de même classe dans (b). Mais il est évident qu'une fonction uniforme de classe α dans (b) est au plus de la même classe dans (B), puisqu'il en est ainsi pour $\alpha = 0$ et de là par récurrence pour tout nombre α; le théorème précédent en résulte.

51. Considérons une fonction multiforme $F(P)$ de classe α. *La fonction* $|F(P)|$ *est de classe* α *au plus*. La signification du symbole « valeur absolue » est évidente. On vérifie facilement que si $F(P)$ est limite d'une suite de fonctions $F_i(P)$, alors $|F(P)|$ est limite de la suite des fonctions $|F_i(P)|$. Or, si une fonction est continue, il en est de même de sa valeur absolue. Donc, si l'on suppose l'énoncé précédent vrai pour les nombres inférieurs à α, il l'est encore pour α.

Il en résulte que la fonction non négative $l(P)$ de $|F(P)|$ est de classe α au plus dans (b).

52. *La réunion d'un nombre fini de fonctions multiformes de classe* α *au plus est une fonction au plus de même classe.*

Cela est vrai pour $\alpha = 0$ (n° 20). Si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont ces fonctions respectivement limites des suites (F_1^i), (F_2^i), ..., (F_p^i) de fonctions de classe inférieure à α, la fonction réunion des F_1, ..., F_p, est la limite des fonctions réunions de (F_1^i), ..., (F_p^i), et la proposition en résulte par récurrence.

53. Remarquons que les propositions précédentes sur les fonctions de classe quelconque demeurent exactes même si l'on supposait l'ensemble Π infini et particulièrement tout l'espace. Seulement il faudra dans ce cas préciser la notion de fonction continue. En se rapportant

à la définition du n° 15 on appellera continue, une fonction multiforme continue en tout point P.

54. Soient $F_1(P), \ldots, F_p(P)$ des fonctions multiformes définies sur un ensemble parfait Π (borné ou non) et $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ une fonction multiforme définie sur tout l'espace à p dimensions. La fonction $\Phi(P) = \varphi(F_1, \ldots, F_p)$ sera définie de la manière suivante. Soit P un point de Π et désignons par y_i une des valeurs de F_i en P; les valeurs Φ en P seront toutes les valeurs de $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ quand on fait varier $y_1, \ldots, y_p$ de toutes les manières possibles.

Supposons les F_i fermées verticalement et $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ continue. Il est évident que l'ensemble E des valeurs de Φ en P est borné, car les points Q de coordonnées $(y_1, \ldots, y_p)$ sont tous compris dans un domaine δ, borné, dans lequel $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ est bornée. Les points Q forment d'ailleurs un ensemble fermé. Démontrons que E est fermé. Soit $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ une suite de points de E ayant un seul point limite y. Supposons que y_i fait partie de $\varphi(y_1^i, \ldots, y_p^i)$; on peut admettre que toute suite $y_k^1, y_k^2, \ldots$ a un seul point limite y_k. Je dis que y fait partie de $\varphi(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_p)$. Ceci est évident, car les points de coordonnées $y_1^i, \ldots, y_p^i$ tendent vers le point $y_1, \ldots, y_p$ et comme $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ est fermée horizontalement, elle a la valeur y au point $(y_1, \ldots, y_p)$.

Si les $F_i(P)$ *sont continues,* $F(P)$ *l'est aussi.* En effet, considérons un point P et le domaine δ trouvé plus haut, ou plutôt le domaine Δ de rayon double. ε étant donné, on peut trouver un λ assez petit pour que les valeurs de $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ considérée dans Δ, diffèrent de ε au plus en deux points de δ de distance λ au plus et que tout point éloigné d'un point Q de λ au plus, soit compris dans Δ. Soit P′ un point dont la distance à P est au plus l. On peut trouver l assez petit pour que $F_i(P)$ et $F_i(P')$ diffèrent de $\frac{\lambda}{\sqrt{p}}$ au plus, quel que soit i. Pour tout point $(y_1, \ldots, y_p)$, y_i appartenant à $F_i(P)$, on peut trouver un point $(y'_1, \ldots, y'_p)$, y'_i appartenant à $F_i(P')$, tel que $|y_i - y'_i| \leqq \frac{\lambda}{\sqrt{p}}$ et réciproquement; $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ et $\varphi(y'_1, \ldots, y'_p)$ diffèrent de ε au plus. Donc toute valeur de $\Phi(P)$ se trouve dans $I(\varepsilon)$ relatif à $\Phi(P')$

et réciproquement. $\Phi(P)$ et $\Phi(P')$ diffèrent de ε au plus, et comme ε est arbitraire, Φ est continue en P.

Si $F_i(P)$ *est limite de la suite* $F_i^1(P), F_i^2(P), \ldots, F_i^n(P), \ldots$, *alors* $\Phi = \varphi(F_1, \ldots, F_p)$ *est limite de la suite*

$$\Phi_1 = \varphi(F_1^1, \ldots, F_p^1), \qquad \ldots, \qquad \Phi_n = \varphi(F_1^n, \ldots, F_p^n) \ldots$$

Considérons un point P. On peut trouver un nombre N tel que pour $n > N$, $F_i(P)$ et $F_i^n(P)$ diffèrent de $\frac{\lambda}{p}$ au plus, quel que soit i; il en résulte, comme précédemment, que $\Phi(P)$ et $\Phi_n(P)$ diffèrent de ε au plus. Donc Φ_n tend vers Φ en tout point P.

En utilisant le procédé de récurrence, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si les fonctions multiformes $F_1(P), \ldots, F_p(P)$ *sont de classe* α *au plus, la fonction multiforme* $\Phi(P) = \varphi(F_1, \ldots, F_p)$ *est de classe* α *au plus.*

Ce théorème, qui est l'analogue de celui qu'a donné M. Lebesgue [1] pour les fonctions uniformes, présente dans le cas actuel un intérêt nouveau. Il donne un procédé de formation des fonctions multiformes de la classe (B), au moyen d'une fonction multiforme *continue* et d'un nombre fini de fonctions *uniformes* de Baire. Il serait intéressant de savoir si, en choisissant convenablement p, $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ et les fonctions uniformes $F_1, \ldots, F_p$, on pourrait obtenir *toutes* les fonctions multiformes de Baire [c'est-à-dire de la classe (B)] et sinon, quelles sont celles qu'on peut obtenir ainsi.

55. On peut encore appeler les fonctions multiformes de Baire, *fonctions représentables analytiquement*. En effet, d'après ce que nous avons dit au n° 29, elles se déduisent à partir des fonctions de l'*Analyse classique* à un nombre fini de branches, qui sont des polynomes, par des passages à la limite. D'ailleurs, toute fonction ainsi obtenue est une fonction de Baire.

Nous dirons de même qu'une fonction $\psi(P)$ fermée verticalement,

---

(1) *Journal de Mathématiques*, Mémoire cité, théorème I.

donnée sur un ensemble E quelconque de points est représentable analytiquement si elle se déduit de la même manière que précédemment par des passages à la limite convergents, aux points de l'ensemble considéré E.

On peut aller plus loin et considérer la notion d'ensemble limite d'une suite d'ensembles que nous avons donnée au n° 7. On définira la limite d'une suite de fonctions $\Phi_1(P), \Phi_2(P), \ldots$ données respectivement sur les ensembles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$, de la manière suivante. La fonction $\Phi(P)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ sera dite *la limite* de la suite précédente si :

1° *L'ensemble* $\mathcal{E}$ *est la limite* (au sens de M. de la Vallée Poussin) *des ensembles* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$;

2° *L'ensemble* $\Phi(P_0)$ *des valeurs de* Φ *en tout point* P_0 *de* $\mathcal{E}$ *est la limite* (à notre sens) *des ensembles* $\Phi_i(P_0), \Phi_{i+1}(P_0), \ldots$ *à partir de l'indice i pour lequel ils existent.*

La fonction $\Phi(P)$ sera dite représentable analytiquement si l'on peut la déduire par des passages à la limite (en utilisant la définition précédente de la limite) à partir des fonctions de l'analyse classique à un nombre fini de branches polynomes.

Si $\Phi(P)$ est fermée verticalement, on peut évidemment supposer les fonctions intermédiaires à l'aide desquelles elle se déduit, fermées verticalement [1]. C'est cette définition que nous retiendrons pour les fonctions fermées verticalement. Elle comprend celle donnée plus haut pour la fonction $\psi(P)$.

Il est évident que si une fonction, non nécessairement fermée verticalement, $\Phi(P)$ est représentable analytiquement, alors il en est de même de la fonction $\psi(P)$ obtenue en fermant $\Phi(P)$ verticalement, et réciproquement.

Enfin, remarquons que si une fonction donnée sur un ensemble $\mathcal{E}$ est

---

[1] On n'a qu'à fermer verticalement ces fonctions; alors la notion de limite qui entre dans la condition 2° deviendra celle relative aux ensembles fermés dont nous nous sommes toujours servi pour les fonctions fermees verticalement. Si E est l'ensemble valeur d'une fonction en un point quelconque P, on dit qu'on ferme la fonction verticalement si on lui donne en P comme ensemble valeur, l'ensemble $E^0 = E + E'$.

représentable analytiquement, il en est de même de cette fonction définie seulement sur un ensemble faisant partie de $\mathcal{E}$.

II. — Fonctions implicites.

56. Les fonctions multiformes se présentent souvent dans l'analyse en tant que fonctions implicites. Si l'on a, en effet, plusieurs fonctions

$$(1) \qquad f_1(x, y, \ldots), \quad f_2(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

les équations $f_1(x, y, \ldots) = 0$, $f_2(x, y, \ldots) = 0$, ... définissent certaines des variables en fonctions implicites des autres et ces fonctions sont en général multiformes.

M. Lebesgue s'est proposé dans son Mémoire du *Journal de Mathématiques* (p. 192) d'étudier ces fonctions *supposées uniformes* au point de vue de leur représentation analytique, dans l'hypothèse que les fonctions (1) sont représentables analytiquement. Le résultat de son étude est que *les fonctions implicites sont aussi représentables analytiquement d'une manière explicite.*

On peut se poser le problème analogue dans le cas général où les fonctions implicites sont multiformes. Comme on le verra dans la suite, on peut se borner à la considération d'une seule fonction (1). Il semblerait, en outre, qu'en supposant cette fonction multiforme, on obtiendrait plus de généralité; il n'en est rien comme nous le signalerons tout à l'heure.

Soit donc $F(x_1, \ldots, x_{n+1})$ une fonction multiforme de Baire définie sur un ensemble parfait borné Π. L'équation

$$(2) \qquad F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

définit un ensemble E de points $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ en chacun desquels une des valeurs de F est nulle. Cet ensemble est, comme on le sait, l'ensemble des points représentatifs de chacune des $n+1$ fonctions implicites définies par l'équation (2). Il est encore l'ensemble des points où $|F(x, \ldots, x_{n+1})| = 0$, ou encore celui des points où $l(x_1, \ldots, x_{n+1})$ relative à $|F(x_1, \ldots, x_{n+1})|$ est nulle.

Supposons la fonction $F(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de classe α; alors la fonction

$l(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est de classe α au plus (n° 51), et c'est pourquoi il n'y a pas de généralité plus grande à considérer la fonction $F(x_1, \ldots, x_{n+1})$ multiforme. E est donc un ensemble mesurable B, ou plus précisément un ensemble F de M. Lebesgue de classe α au plus (Mémoire cité).

Appelons $\Phi(P)$ une des fonctions implicites de l'équation (2), par exemple celle qui définit x_{n+1} en fonction de $x_1, \ldots, x_n$; elle est définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ qui est la projection de l'ensemble E mesurable B. $\mathcal{E}$ est donc un ensemble (A) de M. Souslin ([1]). La fonction $\Phi(P)$ n'est pas en général fermée verticalement, sauf si $\alpha = 0$, ou si elle est uniforme.

Ce dernier cas est celui considéré par M. Lebesgue. En ce cas, on démontre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est encore mesurable B ([2]) et en se servant de certains théorèmes de M. Lebesgue (*loc. cit.*), on voit que la fonction obtenue en attribuant à $\Phi(P)$ une valeur constante aux autres points de l'espace est représentable analytiquement, donc *a fortiori* $\Phi(P)$ l'est aussi.

Dans le cas ou $\Phi(P)$ n'est pas uniforme et $\alpha > 0$, le problème se complique. On peut, comme nous l'avons dit (n° 55), considérer la fonction $\Psi(P)$ obtenue en fermant verticalement $\Phi(P)$. Celle-ci sera représentable analytiquement s'il en est de même de $\Psi(P)$. Cela aura lieu *a fortiori*, si l'on peut compléter la définition de $\Psi(P)$ en les autres points de l'espace, de manière qu'elle soit une fonction de Baire ([3]). On est conduit à procéder ainsi, parce qu'on estime qu'il est plus facile de raisonner sur une fonction fermée verticalement donnée dans tout l'espace, ou seulement sur un ensemble parfait ou même fermé, et c'est pourquoi d'ailleurs on a toujours édifié la théorie

---

([1]) *Voir* SOUSLIN et LUSIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 janvier 1917.

([2]) *Voir* LEBESGUE, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1918) *et* SIERPINSKI, *Fondamenta Mathematicæ*, t. 2, p. 74.

([3]) Dans le cas de la fonction *uniforme* il suffisait, pour qu'elle soit une fonction de Baire, de lui attribuer *une valeur constante*. Dans le cas actuel je ne sais si cela suffit. Mais si, de quelque manière qu'on la complète on n'obtient pas une fonction de Baire, il n'en résulte pas que $\Phi(P)$ n'est pas représentable analytiquement.

des fonctions de Baire sur de tels ensembles. Or, M. Souslin (*loc. cit*) a démontré qu'il existe des ensembles plans mesurables B dont la projection est un ensemble (A) non mesurable B. MM. Lusin et Sierpinski [1] en ont donné un exemple effectif. La solution du problème est donc liée à la théorie des ensembles (A) et à une étude des fonctions multiformes donnant les conditions nécessaires et surtout suffisantes pour qu'elles soient des fonctions de Baire. Je n'entreprendrai pas ici une telle étude. Je me bornerai à examiner le cas de $\alpha = 0$, qui conduit au résultat précis suivant :

57. *La fonction* $\Phi(P)$ *est de classe* 0 *ou* 1.

Puisque $\alpha = 0$, l'ensemble E est fermé et par conséquent $\mathcal{E}$ est aussi fermé. On sait que dans ce cas $\mathcal{E}$ est composé d'un ensemble parfait Π et d'un ensemble dénombrable. Considérons la fonction $\Phi(P)$ définie seulement sur l'ensemble parfait Π. Elle jouit des deux propriétés suivantes :

1° Elle est bornée ;

2° Elle est fermée verticalement et horizontalement, puisque l'ensemble de ses points représentatifs est fermé.

Démontrons qu'une telle fonction est de classe 0 ou 1. Soit P_0 un point quelconque de Π et ε un nombre positif donné. Considérons l'ensemble $I\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ relatif à l'ensemble $\Phi(P_0)$; puisque la fonction est fermée horizontalement, on peut trouver un domaine δ de centre P_0, pour tout point P' duquel l'ensemble $\Phi(P')$ soit compris dans $I\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$. On peut couvrir $\Phi(P_0)$ avec un nombre fini d'intervalles i de $I\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$. Soit

$$(1) \qquad i_1, \quad i_2, \quad i_3, \quad \ldots, \quad i_p,$$

les intervalles ayant les mêmes centres qu'eux et de longueur double. Les points d'un ensemble $\Phi(P')$ sont tous compris dans r de ces intervalles, tels que dans chacun d'eux il y ait un point de $\Phi(P')$. Faisons

[1] *Sur un ensemble non mesurable* B (*Journal de Mathematiques* 1923).

correspondre ce point P' à la combinaison des r intervalles considérés, pris parmi les p intervalles (1). Les points P' de la portion Π', déterminée par δ sur Π, correspondant à une combinaison quelconque de r intervalles, pris parmi les intervalles (1), forment un ensemble E. Comme il n'y a d'ailleurs qu'un nombre fini de combinaisons des p intervalles (1) pris r à r, quel que soit r, les E sont en nombres finis.

L'ensemble parfait Π est donc la somme d'un nombre fini d'ensembles E; il y en a donc, parmi ces ensembles, qui sont denses sur Π'. Choisissons alors un de ces ensembles denses sur Π' qui correspond au plus grand nombre r, soit r'; appelons-le E'. On peut trouver une portion Π'' de Π' dont chaque point est limite pour E'. Désignons par

$$(2) \qquad E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad \ldots, \quad E_e$$

ceux des ensembles E qui correspondent à un r supérieur à r'; ils sont non denses sur Π''. On peut donc trouver une portion Π''' de Π'', qui ne contient aucun point de E_1. Les ensembles (2) sont tous non denses sur Π''' à partir de E_2. On peut donc trouver une portion $\Pi^{(\text{iv})}$ de Π''' ne contenant aucun point de E_2. On continuera ainsi un nombre fini de fois et l'on arrivera à une portion dont les points sont des points de Π' et ne contenant plus aucun point des ensembles (2). On peut trouver un point *intérieur* de cette portion qui soit aussi *intérieur* pour Π'; cela résulte de la construction même. Il en résulte que ce point est centre d'un domaine δ_1 assez petit pour qu'il soit *intérieur* à δ, au domaine qui détermine Π'' et qu'il ne contienne aucun point des ensembles (2).

Ceci fait, revenons à la portion Π''. Chacun de ses points P' est ou bien un point de E', ou limite de tels points. En ce cas, puisque la fonction Φ est fermée horizontalement, il résulte que l'ensemble $\Phi(P')$ a un point au moins dans chacun des r' intervalles (1) auxquels correspond E'. Mais il peut en avoir d'autres extérieurs à ces intervalles; ce point P' appartient donc à un ensemble E qui correspond à un nombre r supérieur à r', donc à un ensemble (2).

Le domaine δ_1 ne contient donc que des points de E', et par conséquent l'oscillation de Φ dans ce domaine (*voir* le n° 44) est au plus égale à ε.

Ainsi, quels que soient le point P_0 et le nombre ε, on peut déterminer un domaine δ de centre P_0 arbitrairement petit, et à *l'intérieur* de ce domaine un autre domaine δ_1, contenant à *l'intérieur* des points de Π, et dans lequel l'oscillation de Φ est au plus égale à ε.

Dès lors, en choisissant un point à l'intérieur de δ_1 et en procédant de la même manière, on voit que l'on peut trouver un domaine δ_2 *intérieur* à δ_1 et dans lequel l'oscillation de Φ est au plus égale à $\frac{\varepsilon}{2}$, etc. On aura ainsi une suite de domaines qu'on peut supposer tendre vers zéro. Ils définissent à la limite un point de Π, en lequel Φ est continue. Comme d'ailleurs cette démonstration s'applique sur tout ensemble parfait contenu dans Π, la fonction considérée est de classe o ou 1.

Pour passer de l'ensemble Π à $\mathcal{E}$, nous allons procéder ainsi. Appelons $\mathcal{D}$ un domaine contenant $\mathcal{E}$, et soit

$$\Phi'_1, \quad \Phi'_2, \quad \ldots$$

une suite de fonctions continues tendant vers Φ et définies sur Π. Soient de même

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots$$

les points de l'ensemble dénombrable que contient $\mathcal{E}$ en plus de Π.

Définissons une fonction continue Φ''_n sur le domaine $\mathcal{D}$, qui coïncide avec Φ_n sur Π (n° 25). D'après le théorème du n° 22, on peut trouver une fonction continue Φ_n coïncidant avec Φ''_n sur Π et ayant les valeurs de Φ aux points $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

La suite

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots,$$

qu'on pourra ne considérer que sur l'ensemble $\mathcal{E}$, tend vers $\Phi(P)$.

Le théorème est ainsi démontré. Si l'on complétait la définition de $\Phi(P)$ aux autres points de l'espace différents de $\mathcal{E}$, en lui attribuant une valeur constante e, on verrait facilement, en utilisant les théorèmes du n° 22, qu'elle est encore de classe 1 au plus.

58. Voici maintenant une proposition en quelque sorte inverse des précédentes, qui fournit un exemple de la simplification qu'apporte aux démonstrations l'emploi des fonctions multiformes.

Toute fonction de Baire définie sur un ensemble parfait (borné ou *non*) II, *peut être considérée comme définie implicitement par une équation* $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, *f étant une fonction de Baire.*

Cela revient à démontrer que l'ensemble de ses points représentatifs est mesurable B. Ce théorème a été démontré par M. Sierpinski [1]. Nous considérerons la fonction donnée $F(P)$ multiforme. Si ε est un nombre positif ou nul, appelons $I_\varepsilon F(P)$ la fonction ayant comme valeur, en tout point P_0 de II, l'ensemble $I(\varepsilon)$ relatif à $F(P_0)$. Si $F(P)$ est continue, il en est de même de $I_\varepsilon F(P)$. Donc, son ensemble des points représentatifs est fermé.

Considérons une fonction $F(P)$ de classe α; elle est limite d'une suite de fonctions $F_1(P)$, $F_2(P)$, ... de classe inférieure.

On voit aisément que $I_\varepsilon F(P)$ est limite de la suite $I_\varepsilon F_1(P)$, $I_\varepsilon F_2(P)$, ... Il en résulte, en utilisant le procédé de récurrence, que $I_\varepsilon F(P)$ est de classe α au plus. Son ensemble des points représentatifs est compris dans l'ensemble limite restreint [2] E_η des ensembles des points représentatifs des fonctions $I_{\varepsilon+\eta} F_1(P)$, $I_{\varepsilon+\eta} F_2(P)$, ... Supposons que, $\Phi(P)$ étant une fonction quelconque de classe inférieure à α, l'ensemble des points représentatifs de $I_\lambda \Phi(P)$, λ étant un nombre positif ou nul, soit mesurable B. Alors l'ensemble E_η est mesurable B. Si l'on prenait une suite de nombres $\eta_1 > \eta_2 > \ldots$ tendant vers zéro, on voit sans peine que l'ensemble des points représentatifs de la fonction $I_\varepsilon F(P)$ est le produit des ensembles E_{η_1}, E_{η_2}, ..., donc mesurable B. Or, ceci est vrai pour $\alpha = 0$ comme nous l'avons vu plus haut, donc c'est encore vrai pour toute fonction de Baire $F(P)$. Si $\varepsilon = 0$, alors $I_0 F(P) = F(P)$ et la proposition est démontrée.

CHAPITRE VI.

Exemples de fonctions multiformes.

59. Dans ce dernier Chapitre, je vais donner quelques exemples de fonctions multiformes de l'Analyse classique et indiquer rapidement quelques questions qu'ils suggèrent.

---

(1) *Fundamenta Mathematicæ*, t. II, p. 74.

(2) De la Vallée Poussin, *loc. cit.*, n° 10.

Considérons une suite de fonctions ordinaires ou, ce qui revient au même, une série. Pour toute valeur de la variable, cette suite a un ou plusieurs points limites formant un ensemble fermé. La fonction multiforme ayant pour toute valeur de x cet ensemble comme ensemble valeur, est ainsi attachée à la série. Son étude peut être utile à celle de la série; par exemple, on voit que pour que celle-ci converge en un point il faut et il suffit que cette fonction soit uniforme en ce point. L'étude de l'ensemble des points de convergence est ainsi ramenée à celle de l'ensemble des points où la fonction a une seule valeur.

Cette fonction n'est pas quelconque. Nous allons montrer comment on peut en trouver une propriété caractéristique. Ceci nous conduit à distinguer une opération nouvelle appartenant en propre aux fonctions multiformes. C'est l'opération, *différente de celle du passage à la limite*, qui permet de passer d'une suite de fonctions à une autre fonction. Voici comment elle se définit.

Étant donnée une suite de fonctions multiformes

$$F_1(P),\quad F_2(P),\quad \ldots, \tag{1}$$

nous dirons que la fonction multiforme $F(P)$ *est définie par cette suite si elle a en chaque point* P *comme ensemble-valeur, l'ensemble* E *défini par la suite des ensembles-valeurs des fonctions précédentes au même point* [1].

On suppose l'ensemble E borné.

Cette nouvelle notion comprend la notion de limite, puisque si la suite (1) converge vers $F(P)$ elle « définit » aussi cette fonction. En outre, si la fonction $F(P)$ est uniforme, ces deux notions se confondent, et c'est pourquoi la notion de « fonction définie par une suite de fonctions » de l'Analyse classique, qui exprime la convergence de la suite, est en accord avec celle-ci. D'ailleurs, si la fonction, supposée uniforme, $F(P)$, est définie par la suite (1), elle est la limite de la suite de fonctions uniformes $L_1(P)$, $L_2(P)$, ..., $L_i(P)$ étant relative à $F_i(P)$; par conséquent, elle est aussi « définie » par une suite au sens classique du mot.

---

[1] Voir Chapitre I.

Cette opération pourrait servir dans la théorie des fonctions multiformes, si elle était étudiée, au même titre que l'opération du passage à la limite. Avec l'opération réunion, elle constituerait pour cette théorie deux instruments nouveaux de recherches qui n'intervenaient pas dans la théorie des fonctions uniformes. Voici, par exemple, quel me paraît devoir être l'énoncé du théorème analogue à celui de M. Baire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit « définie » par une suite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement non fermée horizontalement sur tout ensemble parfait.

Le sens de cette expression est évident : il signifie que l'ensemble des points où la fonction est fermée horizontalement est partout dense.

La méthode qui nous a servi au Chapitre précédent pour démontrer la condition suffisante du théorème de M. Baire pourrait être utilisée encore. Cette méthode repose, en effet, sur des propriétés à la limite des suites de fonctions continues; et, pour les démontrer, on modifiait ces fonctions de façon que, en chaque point P, elles coïncidassent avec les fonctions non modifiées à partir d'un certain rang : les propriétés en question, vraies pour les suites modifiées, l'étaient aussi pour les suites primitives. Si donc, au lieu de suites convergentes, on avait des suites quelconques et qu'il fallût établir des propriétés concernant la fonction « définie » par une telle suite, le même procédé de démonstration resterait valable; mais il faudrait démontrer auparavant le théorème suivant, analogue à celui du n° 36 :

Si une fonction est à ε près « définie » par une suite de fonctions continues, quel que soit ε, elle est « définie » par une suite de fonctions continues.

On dit qu'une fonction est à ε près « définie » par une suite de fonctions continues, lorsque la fonction définie par cette suite en diffère de ε au plus.

60. Voici encore un théorème, analogue à celui de M. Arzelà :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(P)$ *« définie » par une suite de fonctions continues multiformes soit continue,* *est que, quels que soient* ε *et* N, *aussi grands qu'on veut, on puisse trouver un nombre* $N' \geqq N$ *tel que :*

1° *En tout point on puisse réunir quelques-unes des fonctions de la suite, d'indices compris entre* N *et* N', *de façon que la fonction continue qui en résulte diffère de* F(P) *de* ε *au plus, en ce point.*

2° *Tout point* P *soit centre d'un domaine tel que* P' *étant un quelconque de ses points, une des fonctions ainsi trouvées pour* P', *diffère d'une de celles correspondantes à* P, *de* ε *au plus.*

La condition est nécessaire. En effet, donnons-nous les nombres ε et N et soit P un point quelconque de Π; on peut déterminer un nombre l_1 tel que la valeur de F en un point P' dont la distance à P ne dépasse pas l_1, diffère de la valeur de F en P de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. D'autre part, en vertu de la proposition du n° 4, on peut trouver un nombre fini p de fonctions de la suite d'indices supérieurs à N, de manière que la fonction continue $\Phi(P)$ qui en est la réunion diffère de F en P de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Pour cette fonction, on peut déterminer un nombre l_2 tel que pour tout point P' dont la distance à P ne dépasse pas l_2, les valeurs de cette fonction en P et P' diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Si λ est le plus petit des deux nombres l_1 et l_2, on voit que les fonctions F et Φ diffèrent en tout point d'un domaine de centre P et de rayons λ, de ε au plus. D'autre part, Φ est continue en tout point de ce domaine.

On peut faire correspondre à tout point P un tel domaine; il y en a un nombre fini q qui couvre tout Π. A chacun de ces domaines il correspond un nombre p et une fonction Φ et l'on prendra pour N' un nombre supérieur aux indices des fonctions de la suite composant ces q fonctions Φ.

La condition est suffisante. Soient P un point de Π et ε un nombre donné; on peut déterminer un nombre N' correspondant à $\frac{\varepsilon}{3}$ et à un N arbitraire.

Considérons alors le domaine défini par la condition 2° et soit P' un de ses points. Il est évident que les valeurs de F en P et P' diffèrent de ε au plus, car si Φ et Φ' sont les fonctions relatives à P et P' composées par la réunion de fonctions de la suite, comme il est dit dans l'énoncé, F diffère de Φ en P de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus, la valeur de Φ en P et celle de Φ' en P' diffèrent de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus et, enfin, F et Φ' diffèrent en P' de $\frac{\varepsilon}{3}$ au plus. Or ε est arbitraire et le théorème est démontré.

La condition 2° de l'énoncé n'est pas une conséquence de la condition 1°, ainsi qu'on le voit sur l'exemple suivant.

Soit sur le segment $(-1, +1)$ une fonction F(P) ayant en tout point la valeur 0, sauf au point 0, où elle a les valeurs 0 et 1. Définissons une fonction F_{2n} partout égale à 0 et une fonction F_{2n+1} égale à 0 dans les intervalles $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ et $\left(-1, -\frac{1}{n}\right)$, à 1 au point 0 et variant linéairement de 1 à 0 dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et $\left(0, -\frac{1}{n}\right)$. La suite des fonctions

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots$$

définit la fonction F(P). On voit que, quels que soient ε suffisamment petit et N, on peut prendre $N' = N + 1$; mais de quelque manière qu'on le prenne, il est impossible de satisfaire à la condition 2° au point 0.

Dans le cas où la suite qui définit F(P) tend vers F(P), on voit aisément comment l'énoncé du théorème précédent se réduit à celui de M. Arzela.

61. Si l'on considère, par exemple, la série de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$ et si $S_n(x)$ est la $(n+1)^{\text{ième}}$ somme de cette série, la suite $S_1(x)$, $S_2(x)$, ... définit une fonction multiforme attachée à $f(x)$ soit, pour abréger, la fonction de Fourier de $f(x)$. C'est une fonction à intervalles (n° 9); elle est donc définie par ses fonctions $L(x)$ et $l(x)$. On sait qu'aux points où $f(x)$ est continue ou aux points réguliers, $f(x)$ est comprise entre $L(x)$ et $l(x)$. Il y a donc un lien intime entre $f(x)$ et sa fonction de Fourier. On peut penser qu'une étude directe de cette fonction donne des renseignements sur la convergence de la série.

62. Voici enfin un autre exemple de fonctions multiformes. Soit $f(x)$ une fonction ordinaire. Considérons les limites de cette fonc-

tion en un point x. L'ensemble de ces valeurs limites est fermé. La fonction multiforme $F(x)$ ayant en x ces valeurs est étroitement liée à $f(x)$. Les valeurs de $f(x)$ sont des valeurs de $F(x)$. On peut démontrer que cette fonction fermée verticalement $F(x)$ est aussi fermée horizontalement, de sorte que, si $f(x)$ est bornée, $F(x)$ est de classe o ou 1, d'après le n° 57.

NOTE.

Étant donnée une fonction multiforme $F(P)$, nous avons défini au n° 9 les fonctions uniformes $L(P)$ et $l(P)$ attachées à cette fonction. Appelons $Ml(P)$ la fonction uniforme égale, en chaque point, au maximum de $l(P)$ en ce point, et $mL(P)$ la fonction uniforme définie par le minimum de $L(P)$ en chaque point.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour qu'il existe une fonction continue uniforme comprise entre $l(P)$ *et* $L(P)$, *il est nécessaire et suffisant que* $M\,l(P)$ *soit bornée supérieurement,* $mL(P)$ *soit bornée inférieurement et qu'on ait la relation*

(1) $$Ml(P) \leqq mL(P).$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires comme on s'en assure aisément.

Prouvons qu'elles sont suffisantes [1]. Soient μ le maximum de $M(P)$, ν le minimum de $m(P)$. Si $\mu \leqq \nu$, le théorème serait évidemment démontré.

---

[1] La démonstration qui suit est celle du théorème qui s'énonce ainsi :

Entre deux fonctions $m(P)$ *et* $M(P)$ *respectivement semi-continues et bornées inférieurement et supérieurement et qui vérifient la relation*

$$M(P) \leqq m(P),$$

il existe une fonction continue uniforme.

La réciproque de ce théorème est immédiate. Dans la suite $Ml(P)$ et $mL(P)$ seront désignées par $M(P)$ et $m(P)$.

Supposons donc

$$\mu > \nu$$

et limitons inférieurement $M(P)$ à ν et supérieurement $m(P)$ à μ. Les deux fonctions ainsi obtenues, dont je ne change pas la notation, gardent leur caractère de semi-continuité et satisfont toujours à la relation (1).

Si, entre ces deux fonctions, il existe une fonction continue, le théorème serait démontré.

Pour prouver l'existence d'une telle fonction, nous procéderons de la manière suivante :

Admettons que par un procédé quelconque, nous aurions obtenu deux nouvelles fonctions $m'(P)$ et $M'(P)$ respectivement semi-continues, inférieurement et supérieurement, satisfaisant à la relation

$$M(P) \leqq M'(P) \leqq m'(P) \leqq m(P)$$

et telles que

$$m'(P) - M'(P) \leqq K(\mu - \nu),$$

K étant une constante inférieure à 1.

Alors, en employant le même procédé, nous trouverions deux autres fonctions $m''(P)$ et $M''(P)$ également semi-continues, satisfaisant à la relation

$$M'(P) \leqq M''(P) \leqq m''(P) \leqq m'(P)$$

et telles que

$$m''(P) - M''(P) \leqq K^2(\mu - \nu).$$

En continuant ainsi, on trouverait deux suites de fonctions respectivement semi-continues supérieurement et inférieurement

$$M(P) \leqq M'(P) \leqq M''(P) \leqq \ldots \leqq m''(P) \leqq m'(P) \leqq m(P),$$

pour lesquelles on aurait

$$m^{(n)}(P) - M^{(n)}(P) \leqq K^n(\mu - \nu),$$

$K^n(\mu - \nu)$ tendant vers zéro quand n croît.

Ces deux suites définiraient à la limite une fonction uniforme $f(P)$, vers laquelle elles tendraient uniformément et qui, à cause de cela, serait continue.

Le théorème serait démontré.

Pour trouver le procédé indiqué, voici comment nous procéderons. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de Π où les fonctions $m(\mathrm{P})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{P})$ diffèrent de $\frac{\mu-\nu}{2}$ au plus; cet ensemble est fermé. Appelons $\mathcal{G}$ l'ensemble des points frontières; $\mathcal{G}$ est aussi fermé. Nous pouvons attacher à chaque point P de $\mathcal{G}$ un domaine δ de rayon ρ, dont ce point est le centre [1] et suffisamment petit pour que, en tout autre point P′ de la sphère de même centre et de rayon 2ρ, on ait

$$(2) \qquad \mathrm{M}(\mathrm{P}') < \mathrm{M}(\mathrm{P}) + \varepsilon \quad \text{et} \quad m(\mathrm{P}') > m(\mathrm{P}) - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{4}\cdot\frac{\mu-\nu}{8}$.

En vertu du lemme de M. Borel, déjà cité, il existe un nombre fini de ces domaines couvrant tout $\mathcal{G}$. Dans chacun de ces domaines δ_n de centre P_n, limitons inférieurement $\mathrm{M}(\mathrm{P})$ à $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n) - \frac{\mu-\nu}{8}$ et supérieurement $m(\mathrm{P})$ à $m(\mathrm{P}_n) + \frac{\mu-\nu}{8}$. Appelons $\mathrm{M}_n(\mathrm{P})$ et $m_n(\mathrm{P})$ les fonctions ainsi obtenues dans δ_n.

Les fonctions $\mathrm{M}'(\mathrm{P})$ et $m'(\mathrm{P})$ seront définies de la manière suivante :

1° En un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{G}$, M′ sera égale à M et m' à m.

2° En tout point différent des précédents et n'appartenant à aucun de ces domaines, M′ sera égale à $\mathrm{M} + \frac{\mu-\nu}{16}$ et m' à $m - \frac{\mu-\nu}{16}$.

3° En tout point P′ restant, qui fait donc partie d'un, au moins, des domaines δ_n, $\mathrm{M}'(\mathrm{P}')$ sera égale à la plus grande des valeurs de M_n obtenues en limitant M, comme il a été dit, dans chaque domaine dont P′ fait partie. De même, m' sera égale à la plus petite des valeurs de m_n. Si ce point P′ était, en outre, limite de points de la catégorie précédente, M′ aura la plus grande des deux valeurs : de celle obtenue comme je viens de dire et de $\mathrm{M} + \frac{\mu-\nu}{8}$ et m' la plus petite de la valeur précédemment obtenue et de $n - \frac{\mu-\nu}{8}$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que les fonctions $\mathrm{M}'(\mathrm{P})$ et $m'(\mathrm{P})$

---

[1] Le domaine est bien entendu rectangulaire et son rayon celui de la sphère circonscrite.

satisfont aux conditions requises. Et d'abord nous avons la relation

$$M'(P) \leqq m'(P).$$

Pour les points de 1° et 2°, ceci est évident. Voyons-le pour un point P′ de 3°. P′ fait partie de plusieurs domaines δ_n et ce que nous cherchons revient à vérifier que s'il fait partie de deux domaines δ_1 et δ_2, alors on a

$$(3) \qquad m_1(P') \geqq M_2(P') \quad \text{et} \quad m_2(P') \geqq M_1(P'),$$

car, d'après la construction, il est évident que

$$m_1(P') \geqq M_1(P') \quad \text{et} \quad m_2(P') \geqq M_2(P').$$

En effet, supposons que $\rho_1 \geqq \rho_2$. Alors, la distance $\overline{P_1P_2}$ est au plus égale à $2\rho_1$ et d'après (2),

$$M(P_2) < M(P_1) + \varepsilon \quad \text{et} \quad m(P_2) > m(P_1) - \varepsilon.$$

Donc nous avons les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [m(P_1) - \varepsilon] - \left[M(P_2) - \dfrac{\mu - \nu}{8}\right] > \dfrac{\mu - \nu}{16}, \\ \left[m(P_1) + \dfrac{\mu - \nu}{8}\right] - \left[M(P_2) + \varepsilon\right] > \dfrac{\mu - \nu}{16}, \end{array} \right.$$

et celles qui s'en déduisent en remplaçant P_1 par P_2 et P_2 par P_1. En tenant compte de la relation (1) en P′, on voit que les relations (3) sont exactes.

Si P′ était limite de points de 2° il ne fait pas partie de $\mathcal{G}$, car un un tel point est intérieur à un δ_n; donc

$$m(P') - M(P') > \frac{\mu - \nu}{2}.$$

En vertu des relations précédentes et de celles-ci

$$[m(P_1) - \varepsilon] - \left[M(P_1) - \frac{\mu - \nu}{8}\right] > \frac{\mu - \nu}{16},$$

$$\left[m(P_1) + \frac{\mu - \nu}{8}\right] - [M(P_1) + \varepsilon] > \frac{\mu - \nu}{16},$$

il résulte que

$$m_i(P') - M_k(P') > \frac{\mu - \nu}{16},$$

δ_i et δ_k (i pouvant être égal à k) contenant P′. Soit $m_l(P')$ la plus petite des valeurs $m_i(P')$ et $M_{l'}(P')$ la plus grande des $M_k(P')$; on a

$$m_l(P') - M_{l'}(P') > \frac{\mu - \nu}{16}$$

et en considérant $m(P') - \frac{\mu-\nu}{16}$ et $M(P') + \frac{\mu-\nu}{16}$, on voit que

$$m'(P') > M'(P')$$

et même

$$m'(P') - M'(P') \leqq \frac{7}{8}(\mu - \nu).$$

D'autre part comme on a

$$m(P_n) - M(P_n) \leqq \frac{1}{2}(\mu - \nu)$$

pour tout point P′ non limite de points de 2°, on a

$$m'(P') - M'(P') \leqq \frac{1}{2}(\mu - \nu) + \frac{1}{8}(\mu - \nu) + \frac{1}{8}(\mu - \nu),$$

donc on peut prendre pour K la valeur

$$K = \frac{7}{8}.$$

Enfin, $M'(P)$ est semi-continue supérieurement. Cela est évident pour tous les points de 1° et 2°. Pour un point P′ qui n'est pas limite de points de 1° ou 2°, dans son voisinage il n'y a que des points des domaines dont il fait partie. Sur chacun de ces domaines δ_n, M_n est semi-continue supérieurement et comme $M'(P')$ est la plus grande valeur des M_n, $M'(P)$ est aussi semi-continue supérieurement en P′. Si l'on a en plus, dans le voisinage, des points de 1°, cela ne change rien, car

$$M'(P') \geqq M(P').$$

Enfin, s'il s'y trouve des points de 2°, on se rappelle que

$$M'(P') \geqq M(P') + \frac{\mu - \nu}{16}.$$

Même démonstration pour $m'(P)$.

Voici le cas particulier de ce théorème, dont nous nous sommes servi au n° 43 :

Si la fonction $F(P)$ *est telle que, en chaque point de* Π, *il existe une valeur* $\Omega(P)$ *inférieure à* ε, *quel que soit* ε, *alors il existe une fonction uniforme continue comprise entre* $L(P)$ *et* $l(P)$.

En effet, il est aisé de constater d'abord que $Ml(P)$ est bornée supérieurement, car si elle ne l'était pas, il existerait un point P_0 dans le voisinage duquel $Ml(P)$ ne serait pas bornée. En ce point il existe une valeur y de $F(P)$ pour laquelle l'oscillation est inférieure à un ε donné. Donc, dans un domaine assez petit contenant P_0 à l'intérieur, $l(P)$ est bornée supérieurement et par conséquent $Ml(P)$ aussi.

De la même manière $mL(P)$ est bornée inférieurement.

Il est évident aussi qu'on ne peut avoir en aucun point la relation

$$Ml(P) > mL(P),$$

sans quoi il existerait un nombre positif λ tel que, dans tout domaine contenant ce point à l'intérieur, on pourrait trouver deux autres points P' et P'' pour lesquels on aurait la relation

$$l(P') - L(P'') > \lambda.$$

Or, si ε est inférieure à $\frac{\lambda}{2}$, il existe une valeur de $\Omega(P)$ inférieure à ε et dans un domaine suffisamment petit autour du point P, la relation précédente ne serait pas possible.

La fonction $F(P)$ satisfait donc aux conditions du théorème général donné au début de cette Note.

Vu et approuvé :
Paris, le 3 avril 1925.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 3 avril 1925.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. APPELL.