HENRI KREBS

Sur deux équations aux dérivées partielles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1925

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1925__55__1_0>

N° d'ordre :
1836.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Henri KREBS,
Licencié ès Sciences Mathématiques.

1re THÈSE. — Sur deux équations aux dérivées partielles.

2e THÈSE. — Sur la théorie du réglage en horlogerie.

Soutenues le 1925, devant la Commission d'Examen.

MM. E. GOURSAT, *Président.*
CARTAN, MONTEL, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1925

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

75318 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

PREMIÈRE THÈSE

SUR DEUX ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES

1. Dans deux Mémoires parus dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, dans le tome 25 en 1897 et dans le tome 28 en 1900, M. Goursat a étudié l'équation

$$s^2 - 4\lambda(x, y)pq = 0,$$

et a ramené son intégration, par le changement de variable

$$p = u^2,$$

à celle de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda z = 0.$$

M. Goursat a signalé les analogies de ces équations avec celle de Moutard.

Nous nous proposons dans une première partie de ce travail d'intégrer ces deux équations. L'intégration de la seconde revient à déterminer les équations de Laplace auxquelles correspond une suite composée d'un nombre pair d'équations.

Dans une seconde partie nous montrerons l'analogie des deux équations précédentes avec l'équation de Moutard.

Nous montrerons qu'un théorème de M. Goursat permet d'obtenir toutes les équations de Laplace auxquelles correspond une suite comprenant un nombre pair d'équations et une intégrale de ces équations en partant de l'équation simple

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Pour ce qui concerne la théorie générale des équations aux dérivées partielles, nous renvoyons aux *Leçons sur les Équations aux Dérivées partielles du second ordre* de M. E. Goursat et aux *Leçons sur la Théorie générale des surfaces* de G. Darboux.

PREMIÈRE PARTIE.

---

2. Nous commencerons par rappeler les résultats obtenus par M. Goursat.

Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$s^2 = 4\lambda(x, y)pq, \tag{1}$$

où $\lambda(x, y)$ est une fonction quelconque de x et de y. En posant

$$p = u^2, \qquad q = v^2, \tag{2}$$

l'équation (1) nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\lambda}\, v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\lambda}\, u.$$

L'élimination de v entre ces deux relations conduit à l'équation linéaire qui se rapproche des équations à invariants égaux (E)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0. \tag{3}$$

Si u est une intégrale de l'équation (3), on en déduira une intégrale de l'équation (1) par une quadrature

$$z = \int u^2\, dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy, \tag{4}$$

et l'on obtiendra ainsi toutes les intégrales de cette équation. Lorsque la fonction λ est réelle, à toute solution réelle de l'équation en u correspond une solution réelle de l'équation en z. Si u est de la forme $if(x, y)$, $f(x, y)$ étant une fonction réelle, z est encore réelle. D'ailleurs à toute intégrale réelle de l'équation en z correspond une fonction u qui est réelle ou de la forme $if(x, y)$. En remarquant que, quand on change u en iu, z se change en $-z$, on en conclura que, pour avoir toutes les intégrales réelles de l'équation (1), il suffit de connaître toutes les intégrales de l'équation (3).

Les invariants de l'équation (3) ont pour valeurs

$$h = k,\ k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\,\partial y} + \lambda.$$

Si l'on applique à l'équation (3) la transformation de Laplace

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial y},$$

les invariants de l'équation transformée (E_1) ont pour valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\,\partial y} = k,\ k_1 = h.$$

Ils sont donc égaux à ceux de l'équation (E) pris dans l'ordre inverse. Il en résulte que l'équation adjointe de l'équation (E) a les mêmes invariants que l'équation (E_1) qu'on déduit de l'équation (E) par une des transformations de Laplace.

On sait que si la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine dans un sens, du côté des indices positifs par exemple, après n transformations, la suite relative à l'équation adjointe de l'équation (E), ou à l'équation (E_1) d'après ce que l'on vient de voir, doit se terminer du côté des indices négatifs après n transformations également. Comme après une première transformation appliquée à l'équation (E_1) on retrouve l'équation (E), il s'ensuit que la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine du côté des indices négatifs après $n - 1$ transformations.

La détermination des valeurs de λ pour lesquelles l'équation (3), et par suite l'équation (1), sont intégrables, revient donc à la résolution du problème suivant :

Trouver toutes les suites de Laplace, terminées dans les deux sens et composées d'un nombre pair $2n$ d'équations, telles que deux équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants disposés dans l'ordre inverse.

M. Goursat a aussi montré dans le premier des Mémoires cités que toute équation linéaire (E) qui est telle que l'équation (E_1) que l'on en déduit par la première transformation de Laplace ait les mêmes invariants que l'équation adjointe de l'équation (E), peut se ramener à une équation de la forme (3).

3. Nous appellerons (E_{-n+1}), ..., (E_{-1}), (E), (E_1), ..., (E_n) les $2n$ équations constituant la suite de Laplace. Il nous faut former ces équations. Puisque la suite est finie, on a

$$h_n = 0,$$
$$k_{-n+1} = 0.$$

L'équation (E_n) peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0. \tag{5}$$

L'équation (E_{-n+1}) se ramène à la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) = 0. \tag{6}$$

Puisqu'on suppose

$$k_n = h_{-n+1},$$

on aura

$$\frac{\partial^2 \log\alpha}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial x\,\partial y}, \tag{7}$$

$$\alpha = \beta\,\theta(x)\,\sigma(y), \tag{8}$$

$\theta(x)$ et $\sigma(y)$ étant deux fonctions arbitraires. La fonction α satisfait à une équation d'ordre $2n$

$$\nu_{2n}\frac{\partial^{2n}\alpha}{\partial y^{2n}} + \ldots + \nu_1\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \nu\alpha = 0, \tag{9}$$

les coefficients ν, ν_1, ..., ν_{2n} étant des fonctions de y.

η_1, η_2, ..., η_{2n} étant $2n$ solutions particulières distinctes de l'équation (9) et x_1, x_2, ..., x_{2n} $2n$ fonctions quelconques de x, on a

$$\alpha = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_{2n}\eta_{2n}. \tag{10}$$

Supposons que l'équation adjointe de l'équation (9) soit l'équation

$$(11)\qquad \varphi(\theta) = \mu_{2n}(y)\frac{\partial^{2n}\theta}{\partial y^{2n}} + \ldots + \mu\theta = 0.$$

Nous appellerons ses solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. Ce système est adjoint au système $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$.

Si l'on part de l'équation (6), à l'équation (11) correspondra l'équation

$$(12)\qquad f(\omega) = \lambda_{2n}(x)\frac{\partial^{2n}\omega}{\partial x^{2n}} + \ldots + \lambda\omega = 0.$$

Les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ satisferont à cette équation. Nous désignerons par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ le système adjoint au système $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ et satisfaisant à l'équation adjointe de l'équation (12). La fonction β correspondant à la fonction α sera

$$(13)\qquad \beta = y_1\xi_1 + \ldots + y_{2n}\xi_{2n}.$$

Si l'on divise par $\theta(x)$ le premier membre de l'équation (12), les nouvelles fonctions adjointes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ sont égales aux anciennes multipliées par $\theta(x)$. Si l'on multiplie par $\sigma(y)$ l'équation (11), les nouvelles fonctions adjointes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$ sont égales aux anciennes divisées par $\sigma(y)$. On peut donc supposer que la relation (8) a été mise sous la forme

$$(14)\qquad x_1\eta_1 + \ldots + x_{2n}\eta_{2n} = -(y_1\xi_1 + \ldots + y_{2n}\xi_{2n}).$$

Si l'on prend les dérivées de la relation (14) jusqu'à l'ordre $2n-1$ par rapport à y et si l'on donne à y une valeur particulière quelconque, on obtient $2n$ relations à coefficients constants entre les x_i et les ξ_i. Le déterminant des fonctions ξ_i, $D(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ n'est pas nul puisqu'on suppose que les fonctions y_i forment un système d'intégrales fondamental de l'équation (11). Les fonctions ξ_i sont donc des combinaisons linéaires des fonctions x_i. *L'équation* (12) *est donc équivalente à son adjointe.*

Il en est de même de l'équation (11) *à laquelle satisfont les fonctions y_i.*

Une équation d'ordre pair $2n$ équivalente à son adjointe $\psi(z)$ satisfait d'après un théorème de Jacobi [1] à la relation

$$\int u\,\psi(z)\,dz = -\psi_1(z'_1),$$

[1] Jacobi, *Journal de Crelle*, t. 17. — Hesse, *ibid.*, t. 54.

où u est une solution de l'équation différentielle $\psi(z) = 0$ et où $z = uz_1$. La fonction $\psi_1(z)$ est une fonction d'ordre $2n - 2$ équivalente à son adjointe. L'application répétée de cette formule donne pour $\psi(z)$ la valeur

$$(15)\quad \psi(z) = (-1)^{n+1} \frac{1}{\alpha_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_2} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_{n+1}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_n} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_2} \frac{d}{dx} \frac{z}{\alpha_1}.$$

Les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ sont des fonctions de x.

4. *Pour former les fonctions* α *et* β *données par les formules* (12) *et* (13), *il faut chercher les relations qui existent entre les intégrales* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ *et les intégrales des systèmes adjoints* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$.

D'après la formule (15), une équation linéaire d'ordre pair équivalente à son adjointe peut s'écrire

$$(16)\quad \frac{1}{\alpha_1} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_2} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_{n+1}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_n} \cdots \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha_2} \frac{d}{dx} \frac{z}{\alpha_1} = 0.$$

Les solutions sont

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_1, \\
z_2 &= \alpha_1 \int \alpha_2\, dx, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_{2n-i} &= \alpha_1 \int \alpha_2\, dx \ldots \int \alpha_{i+2}\, dx, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_{2n} &= \alpha_1 \int \alpha_2\, dx \ldots \int \alpha_2 \quad dx.
\end{aligned}$$

Les intégrales adjointes à ces intégrales sont données par les formules

$$\begin{aligned}
u_1 &= (-1)\, \alpha_1 \int \alpha_2\, dx \ldots \int \alpha_2 \quad dx, \\
u_2 &= \alpha_1 \int \alpha_2\, dx \ldots \int \alpha_3 \quad dx, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_i &= (-1)^i \alpha_1 \int \alpha_2\, dx \ldots \int \alpha_{i+1}\, dx, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_{2n} &= \alpha_1.
\end{aligned}$$

On voit que l'on a entre les intégrales des deux systèmes la relation

$$u_i = (-1)^i z_{2n+1-i}. \tag{17}$$

Si l'on substitue les valeurs données par la formule (17) dans la relation (14), on voit qu'elle est satisfaite.

Si l'on pose

$$\mathrm{H}_p = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^p \alpha}{\partial x^p} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^{p+1} \alpha}{\partial x^p\, \partial y} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^p \alpha}{\partial y^p} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^{2p} \alpha}{\partial x^p\, \partial y^p} \end{vmatrix} \tag{18}$$

les invariants de l'équation (E_{n-p}) peuvent s'écrire, ainsi que G. Darboux l'a montré [1],

$$h_{n-p} = -\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}_{p-1}}{\partial x\, \partial y},$$

$$k_{n-p} = -\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}_p}{\partial x\, \partial y}.$$

On peut former toutes les équations de la suite de Laplace par la formule donnée par G. Darboux [2]

$$(\mathrm{E}_{n-p}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \log \mathrm{H}_{p-1}}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \log \mathrm{H}_p}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \log \mathrm{H}_p}{\partial x} \frac{\partial \log \mathrm{H}_{p-1}}{\partial y} z = 0. \tag{19}$$

Le nombre p peut prendre les $2n$ valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Nous avons déjà donné les équations (E_n) et (E_{-n+1}) par les formules (5) et (6). La formule (19) donne les équations sous la forme réduite.

L'intégrale de l'équation (E) donnée par la formule (19) peut

---

(1) G. Darboux, *Théorie générale des Surfaces*, t. II, chap. VI.

(2) *Ibid.*

être mise par exemple sous la forme

$$(20)\qquad z = M\begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(n)} & Y & Y' & \dots & Y^{(n-1)} \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(n)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(n-1)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(n)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n} & x'_{2n} & \dots & x_{2n}^{(n)} & y_{2n} & y'_{2n} & \dots & y_{2n}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

M est une fonction arbitraire, X est une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y.

5. L'équation (E) donnée par la formule (19) est

$$(21)\quad (E)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log H_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \log H_n}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \log H_n}{\partial x}\frac{\partial \log H_{n-1}}{\partial y} z = 0.$$

Il nous faut la ramener à avoir la forme de l'équation (3). Nous obtiendrons l'intégrale de l'équation ramenée à la forme de l'équation (3) au moyen de l'intégrale (20). Nous obtiendrons ainsi λ et nous pourrons former l'équation (1) correspondant à cette équation et la formule (4) nous donnera son intégrale.

Nous devons faire disparaître le terme contenant $\frac{\partial z}{\partial x}$. Il suffit de poser

$$z = H_{n-1} v.$$

L'équation (21) devient

$$(22)\quad (E)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H_{n-1}}{H_n}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \log H_{n-1}}{\partial x\,\partial y} v = 0.$$

On voit que cette équation n'a pas la forme de l'équation (3). Nous changerons encore de fonction. Nous poserons

$$v = \theta u.$$

L'équation (22) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \log\theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\theta H_{n-1}}{H_n}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H_{n-1}}{H_n}\frac{\partial\log\theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \log H_{n-1}}{\partial x\,\partial y}\right) u = 0.$$

Pour que cette équation conserve la forme de l'équation (3), il faut que θ satisfasse à la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

L'équation devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\theta H_{n-1}}{H_n}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \log H_{n-1}}{\partial x\,\partial y}u = 0.$$

Il faut ensuite que l'on ait la relation

$$\left(\frac{\theta H_{n-1}}{H_n}\right)^2 = \frac{1}{\dfrac{\partial^2 \log\dfrac{1}{H_{n-1}}}{\partial x\,\partial y}}.$$

On en déduit

$$\theta = \frac{H_n}{H_{n-1}\sqrt{\dfrac{\partial^2\log\dfrac{1}{H_{n-1}}}{\partial x\,\partial y}}}. \tag{24}$$

L'équation (22) devient donc

$$\text{(25) (E)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left(\frac{\partial^2\log H_{n-1}}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2\log H_{n-1}}{\partial x\,\partial y}u = 0.$$

Cette équation a bien la forme de l'équation (3). Son intégrale est

$$u = \frac{z}{\theta H_{n-1}}. \tag{26}$$

Cette intégrale peut aussi se mettre sous la forme

$$u = \frac{1}{H_n}\sqrt{\frac{\partial^2\log\dfrac{1}{H_{n-1}}}{\partial x\,\partial y}}\,z. \tag{27}$$

Les fonctions H_{n-1} *et* H_n *doivent satisfaire à l'équation de condition* (23).

6. La résolution des équations (1) et (3) dépend de la résolution d'équations d'ordre pair équivalentes à leur adjointe. Ces équations ont déjà été étudiées par *Jacobi* qui en a donné les principales propriétés dans son Mémoire *Zur Theorie der Varia-*

tions-Rechnung und der Differential-Gleichungen (*Journal de Crelle*, t. 17). Ces équations ont aussi été étudiées par *O. Hesse* dans son Mémoire *Ueber die Criterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 54), par *J. Bertrand* dans son Mémoire *Démonstration d'un théorème de M. Jacobi* (*Journal de l'École Polytechnique*, 28e Cahier) et par *M. Emile Borel* dans son Mémoire *Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles* (*Annales de l'École Normale*, 1892). M. Borel montre, par une méthode géométrique élégante, que l'intégration des équations différentielles d'ordre pair équivalentes à leur adjointe, revient à trouver les courbes telles que leurs plans osculateurs en chaque point soient les plans correspondant à ce point dans un complexe linéaire. Ces courbes se correspondent à elles-mêmes par polaires réciproques par rapport au complexe.

Le problème de la détermination de ces courbes est résolu pour l'espace ordinaire ($n = 2$). Les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe ont pour plan osculateur en un point le plan focal de ce point. *M. E. Picard* a donné les équations de ces courbes dans un Mémoire publié dans les *Annales de l'École Normale* (1877). Les équations de ces courbes ne contiennent pas d'intégrales. Mais si l'on cherche à généraliser une des méthodes qui les donnent sans quadrature, on n'obtient pas les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe, mais des surfaces dont les plans tangents sont des plans du complexe. Ces surfaces jouissent de la propriété de se transformer en elles-mêmes par polaires réciproques par rapport au complexe. Les courbes que l'on cherche sont les lignes asymptotiques de ces surfaces. M. Borel a généralisé une méthode géométrique qui a réussi pour les lignes asymptotiques des surfaces du second degré. M. Borel suppose les courbes cherchées connues dans l'espace à $2n - 3$ dimensions et a tâché d'en déduire celles de l'espace à $2n - 1$ dimensions. Le problème revient à la détermination des courbes tracées sur un cône et dont les tangentes rencontrent une courbe donnée. Ce problème ne peut pas en général être résolu sans intégration. Les solutions des équations différentielles d'ordre pair équivalentes à leur adjointe contiennent donc à partir du sixième ordre des intégrales.

7. Considérons le cas où la suite de Laplace comprend deux équations.

L'équation linéaire du second ordre équivalente à son adjointe peut s'écrire, d'après la formule (16),

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dx}\frac{u}{\alpha_1}=0.$$

Les solutions sont

$$u_1=\alpha_1, \qquad u_2=\alpha_1\int\alpha_2\,dx.$$

Si l'on pose

$$\int\alpha_2\,dx=\varphi(x),$$

les solutions deviennent

$$u_1=\alpha_1, \qquad u_2=\alpha_1\varphi.$$

L'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dx}\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma}=0.$$

Les solutions des équations (12) et (11) sont

$$x_1=\gamma, \qquad x_2=\gamma\varphi; \qquad y_1=\gamma_1, \qquad y_2=\gamma_1\varphi_1.$$

Les fonctions sans indice sont des fonctions de x et celles avec l'indice 1 sont des fonctions de y.

L'application de la formule (17) nous donne pour les systèmes d'intégrales adjoints

$$\xi_1=-\gamma\varphi, \qquad \xi_2=-\gamma; \qquad \eta_1=-\gamma_1\varphi_1, \qquad \eta_2=\gamma_1.$$

On aura, d'après les formules (10) et (18),

$$\begin{aligned}\alpha&=\gamma\gamma_1(\varphi-\varphi_1),\\ \mathrm{H}_0&=\alpha,\\ \mathrm{H}_1&=\gamma^2\gamma_1^2\varphi'\varphi'_1.\end{aligned}$$

La formule (25) nous donne pour l'équation

$$(28)\ (\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\varphi'\varphi'_1}{(\varphi-\varphi_1)^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\varphi'\varphi'_1}{(\varphi-\varphi_1)^2}u=0.$$

La formule (24) donne

$$\theta=-i\gamma\gamma_1\sqrt{\varphi'}\sqrt{\varphi'_1}.$$

Pour que la relation (23) soit satisfaite, il faut

$$\gamma_1 \sqrt{\varphi'_1} = \text{const.}$$

Si l'on prend pour simplifier l'écriture

$$\gamma_1 \sqrt{\varphi'_1} = - i,$$

on obtient

$$\theta = \gamma \sqrt{\varphi'}.$$

La formule (26) nous donne, en prenant $M = 1$,

$$z = [\gamma' \gamma_1 (\varphi - \varphi_1) - \gamma \varphi' \gamma_1] X - \gamma \gamma_1 (\varphi_1 - \varphi) X' + \gamma^2 \varphi' Y.$$

La formule (26) nous donne pour l'intégrale de l'équation (28)

$$u = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma'}{\gamma \sqrt{\varphi'}} + \frac{\sqrt{\varphi'}}{\varphi - \varphi_1} \right) X - \frac{1}{\gamma \sqrt{\varphi'}} X' - \frac{\sqrt{\varphi'}}{\gamma_1 (\varphi - \varphi_1)} Y.$$

X et Y étant deux fonctions arbitraires, si l'on pose

$$\frac{X}{\gamma} = X_1, \qquad \frac{Y}{\gamma_1} = Y_1,$$

puisque l'on supprime les indices des fonctions, on obtient pour u la valeur

$$u = \frac{\sqrt{\varphi'}}{\varphi - \varphi_1} (X - Y) - \frac{1}{\sqrt{\varphi'}} X'. \tag{29}$$

Si l'on remplace dans l'équation (1) λ par sa valeur, nous obtenons l'équation

$$s^2 + \frac{4 \varphi' \varphi'_1}{(\varphi - \varphi_1)^2} pq = 0. \tag{30}$$

La formule (4) nous donne pour son intégrale si l'on remplace u par sa valeur donnée par la formule (29)

$$z = \int \left[\frac{\sqrt{\varphi'}}{\varphi - \varphi_1} (X - Y) - \frac{1}{\sqrt{\varphi'}} X' \right]^2 dx$$
$$- \frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi' \varphi'_1} \left[\frac{\sqrt{\varphi'} \sqrt{\varphi'_1}}{(\varphi - \varphi_1)^2} X - \frac{\sqrt{\varphi'} \sqrt{\varphi'_1}}{(\varphi - \varphi_1)^2} Y - \frac{\sqrt{\varphi'}}{\varphi - \varphi_1} Y' \right]^2 dy.$$

Cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$z = - \frac{1}{\varphi - \varphi_1} (X - Y)^2 + \int \frac{1}{\varphi'} X'^2 \, dx - \int \frac{1}{\varphi'_1} Y'^2 \, dy. \tag{31}$$

L'intégrale est de la classe d'Ampère.

Nous appliquerons les formules générales à quelques cas particuliers.

Exemple I. — Nous prendrons

$$\varphi(x) = x, \qquad \varphi_1(y) = y.$$

Les formules (28) et (29) donnent l'équation et l'intégrale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{(x-y)^2}u = 0, \tag{32}$$

$$u = \frac{X-Y}{x-y} - X'. \tag{33}$$

Les formules (30) et (31) donnent pour l'équation correspondant à l'équation (32) et son intégrale

$$s^2 + \frac{4}{(x-y)^2}pq = 0,$$

$$z = -\frac{(X-Y)^2}{x-y} + \int X'^2\,dx - \int Y'^2\,dy. \tag{34}$$

Pour faire disparaître les intégrales, il suffit de faire les changements de variables

$$X'(x) = \alpha, \qquad x = \varphi''(\alpha); \qquad Y'(y) = \beta, \qquad y = \psi''(\beta).$$

On en déduit

$$X = \int X'\,dx = \int \alpha\,\varphi'''(\alpha)\,d\alpha = \alpha\,\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha),$$

$$\int X'^2\,dx = \int \alpha^2\,\varphi'''(\alpha)\,d\alpha = \alpha^2\,\varphi''(\alpha) - 2\alpha\,\varphi'(\alpha) + 2\,\varphi(\alpha),$$

$$Y = \beta\,\psi''(\beta) - \psi'(\beta),$$

$$\int Y'^2\,dy = \beta^2\,\psi''(\beta) - 2\beta\,\psi'(\beta) + 2\,\psi(\beta).$$

L'intégrale (34) est remplacée par le système de formules

$$x = \varphi''(\alpha), \qquad y = \psi''(\beta),$$

$$z = -\frac{[\alpha\,\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha) - \beta\,\psi''(\beta) + \psi'(\beta)]^2}{\varphi''(\alpha) - \psi''(\beta)}$$
$$+ \alpha^2\,\varphi''(\alpha) - 2\alpha\,\varphi'(\alpha) + 2\,\varphi(\alpha) - \beta^2\,\psi''(\beta) + 2\beta\,\psi'(\beta) - 2\,\psi(\beta).$$

Exemple II. — Nous prendrons

$$\varphi = x, \qquad \varphi_1 = -y.$$

Les formules (28), (29), (30) et (31) nous donnent pour les équations (1) et (3) et leurs intégrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{x+y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{(x+y)^2}u = 0,$$

$$u = \frac{X-Y}{x+y} - X',$$

$$s^2 - \frac{4}{(x+y)^2}pq = 0,$$

$$z = -\frac{(X-Y)^2}{x+y} + \int X'^2\,dx + \int Y'^2\,dy.$$

Les changements de variables effectués dans l'exemple précédent nous donnent pour représenter l'intégrale z le système de formules

$$x = \varphi''(\alpha), \qquad y = \psi''(\beta),$$

$$z = -\frac{[\alpha\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha) - \beta\psi''(\beta) + \psi'(\beta)]^2}{\varphi''(\alpha) + \psi''(\beta)}$$
$$+ \alpha^2\varphi''(\alpha) - 2\alpha\varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha) + \beta^2\psi''(\beta) - 2\beta\psi'(\beta) + 2\psi(\beta).$$

Exemple III. — Prenons

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x}, \qquad \varphi_1(y) = y.$$

Les formules (28), (29), (30) et (31) nous donnent pour les équations (1) et (3) et leurs intégrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{y}{1+xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{(1+xy)^2}u = 0,$$

$$u = -\frac{X-Y}{1+xy} - xX',$$

$$s^2 + \frac{4}{(1+xy)^2}pq = 0,$$

$$z = \frac{x(X-Y)^2}{1+xy} + \int x^2 X'^2\,dx - \int Y'^2\,dy.$$

8. Nous considérerons maintenant le cas où la suite de Laplace comprend quatre équations.

Si nous appelons $f_1(u)$ l'équation linéaire du second équivalente à son adjointe, d'après le théorème de Jacobi mentionné au n° 3, l'équation linéaire du quatrième ordre équivalente à son adjointe peut s'écrire

$$f(u) = -\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dx}f_1\left(\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma}\right).$$

Par un changement de variable, l'équation linéaire du second ordre $f_1(u)$ peut s'écrire sous la forme simple

$$f_1(u) = -\frac{1}{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\frac{u}{\delta}.$$

L'équation du quatrième ordre équivalente à son adjointe que nous considérerons est

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dx}\frac{1}{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma} = 0. \tag{35}$$

Une première intégration donne

$$\frac{1}{\delta}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma} = C.$$

Si l'on suppose $C = 0$, on a les trois solutions

$$x_1 = \gamma, \qquad x_2 = \gamma\int\delta\,dx, \qquad x_3 = \gamma\int x\delta\,dx.$$

Supposons $C = 1$ pour avoir une nouvelle intégrale. On a

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma} = \delta.$$

Posons

$$\delta(x) = \frac{d^2\beta(x)}{dx^2}.$$

L'équation devient

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma} = \frac{d^2\beta}{dx^2}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{\delta}\frac{d}{dx}\frac{u}{\gamma} = \beta$$

$$u = \gamma\int\beta\frac{d^2\beta}{dx^2}dx.$$

Nous avons les quatre solutions

$$x_1 = \gamma, \qquad x_2 = \gamma\frac{d\beta}{dx}, \qquad x_3 = \gamma\left(x\frac{d\beta}{dx} - \beta\right),$$

$$x_4 = \gamma\left[\beta\frac{d\beta}{dx} - \int\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx\right].$$

On peut faire disparaître l'intégrale en faisant les changements de variables

$$x = \Phi''(\alpha),$$
$$\frac{d\beta}{dx} = \alpha.$$

On a

$$\int \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx = \int \alpha^2 \Phi'''(\alpha)\, d\alpha = \alpha^2 \Phi''(\alpha) - 2\alpha \Phi'(\alpha) + 2\Phi(\alpha),$$
$$\beta = \int \frac{d\beta}{dx} dx = \int \alpha \Phi'''(\alpha)\, d\alpha = \alpha \Phi''(\alpha) - \Phi'(\alpha).$$

Si l'on pose

$$\gamma[\Phi''(\alpha)] = \Psi(\alpha),$$

les intégrales sont donc

$$x_1 = \Psi, \qquad x_2 = \alpha\Psi, \qquad x_3 = \Psi\Phi', \qquad x_4 = \Psi(\alpha\Phi' - 2\Phi).$$

Les variables x et α sont reliées par la relation

$$x = \Phi''(\alpha).$$

On aurait des valeurs semblables pour les solutions de l'équation linéaire du quatrième ordre par rapport à y. Si l'on suppose que la variable indépendante est β, on a

$$y_1 = \Psi_1, \qquad y_2 = \beta\Psi_1, \qquad y_3 = \Psi_1\Phi'_1, \qquad y_4 = \Psi_1(\beta\Phi'_1 - 2\Phi_1),$$
$$y = \Phi''_1(\beta).$$

Ces deux systèmes de solutions permettent de former l'équation et son intégrale.

On a par la formule (17)

$$\xi_1 = -\Psi(\alpha\Phi' - 2\Phi), \qquad \xi_2 = \Psi\Phi', \qquad \xi_3 = -\alpha\Psi, \qquad \xi_4 = \Psi;$$
$$\eta_1 = -\Psi_1(\beta\Phi'_1 - 2\Phi), \qquad \eta_2 = -\Psi_1\Phi'_1, \qquad \eta_3 = -\beta\Psi_1, \qquad \eta_4 = \Psi_1.$$

Les formules (10) et (13) donnent ensuite, si l'on désigne les fonctions cherchées par φ et ψ :

$$\varphi = \Psi\Psi_1[-\beta\Phi'_1(\beta) + 2\Phi_1(\beta) + \alpha\Phi'_1(\beta) - \beta\Phi'(\alpha) + \alpha\Phi'(\alpha) - 2\Phi(\alpha)],$$
$$\psi = \Psi\Psi_1[-\alpha\Phi'(\alpha) + 2\Phi(\alpha) + \beta\Phi'(\alpha) - \alpha\Phi'_1(\beta) + \beta\Phi'_1(\beta) - 2\Phi_1(\beta)].$$

L'équation (3) correspondante et son intégrale seront de forme compliquée. Nous ne ferons pas les calculs, car nous obtiendrons l'équation (3) à laquelle correspond une suite de quatre équations et son intégrale dans la seconde partie de ce travail, par l'application d'un théorème de M. Goursat.

Dans l'espace à trois dimensions, les intégrales de l'équation du quatrième ordre équivalente à son adjointe obtenues représentent une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe. Si l'on prend en particulier pour coordonnées les quotients de x_3, x_2 et x_4 par x_1, les équations de la courbe sont

$$x = \Phi'(\alpha), \qquad y = \alpha, \qquad z = \alpha\Phi'(\alpha) - 2\Phi(\alpha).$$

Les équations de la tangente à la courbe sont

$$x = \frac{1}{\alpha\Phi'' - \Phi'}(\Phi'' z - \Phi'^2 + 2\Phi\Phi''),$$

$$y = \frac{1}{\alpha\Phi'' - \Phi'}(z + \alpha^2\Phi'' - 2\alpha\Phi' + 2\Phi).$$

Si l'on pose

$$a = \frac{\Phi''}{\alpha\Phi'' - \Phi'}, \qquad p = \frac{-\Phi'^2 + 2\Phi\Phi''}{\alpha\Phi'' - \Phi'}, \qquad b = \frac{1}{\alpha\Phi'' - \Phi'},$$

$$q = \frac{\alpha^2\Phi'' - 2\alpha\Phi' + 2\Phi}{\alpha\Phi'' - \Phi'},$$

on a

$$aq - bp = 1.$$

Cette équation détermine un complexe linéaire.

La courbe se trouve sur le cylindre parallèle à l'axe des x

$$z = y\Phi'(y) - 2\Phi(y).$$

Exemple. — Nous montrerons sur un exemple numérique l'application de la méthode et nous obtiendrons des résultats que nous retrouverons dans la seconde partie de ce travail par l'application d'un théorème de M. Goursat.

Nous simplifierons l'équation du quatrième ordre équivalente à son adjointe. Nous prendrons d'abord le couple x_1, y_1 égal à l'unité, et pour cela nous poserons

$$\gamma(x) = 1, \qquad \gamma_1(y) = 1.$$

Ceci revient à supposer que l'on effectue des changements de variables tels que les équations linéaires du quatrième ordre équivalentes à leur adjointe ne présentent pas de terme contenant explicitement la fonction.

Pour faire disparaître les intégrales qui figurent dans les valeurs de x_4 et de y_4, on prendra pour nouvelles variables x_2 et y_2. Il faut donc poser

$$\frac{d\beta}{dx} = x, \qquad \frac{d\beta_1}{dy} = y.$$

Ceci revient à supposer que $\delta(x)$ et $\delta_1(y)$ sont égaux à l'unité. Les équations du quatrième ordre équivalentes à leur adjointe se réduisent par conséquent à

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = 0, \qquad \frac{d^4 u_1}{dy^4} = 0.$$

Les valeurs des x_i et et des y_i peuvent s'écrire alors

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x, \quad x_3 = \frac{x^2}{2}, \quad x_4 = \frac{x^3}{6};$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = y, \quad y_3 = \frac{y^2}{2}, \quad y_4 = \frac{y^3}{6}.$$

La formule (20) donne, en prenant $M = -1$,

$$z = \frac{(x-y)^2}{12}[-6(X-Y) + 2(x-y)(2X'+Y') - (x-y)^2 X'']$$

Les formules (17), (10), (13) et (18) donnent ensuite

$$\xi_1 = -\frac{x^3}{6}, \quad \xi_2 = \frac{x^2}{2}, \quad \xi_3 = -x, \quad \xi_4 = 1,$$

$$\eta_1 = -\frac{y^3}{6}, \quad \eta_2 = \frac{y^2}{2}, \quad \eta_3 = -y, \quad \eta_4 = 1,$$

$$\alpha = \frac{(x-y)^3}{6},$$

$$\beta = -\frac{(x-y)^3}{6},$$

$$H_1 = \frac{(x-y)^4}{12},$$

$$H_2 = \frac{(x-y)^3}{6}.$$

La formule (25) donne pour l'équation

(36) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{4}{(x-y)^2} u = 0.$$

L'intégrale de cette équation est donnée par la formule (27) et est

(37) $$s^2 = -\frac{6(X-Y)}{(x-y)^2} + \frac{2(2X'+Y')}{x-y} - X''.$$

Cette valeur de u permet de calculer l'intégrale de l'équation (1) qui correspond à l'équation (36) que l'on a obtenue. Cette équation est

(38) $$s^2 + \frac{16}{(x-y)^2} pq = 0.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{12}{(x-y)^3}(X-Y) + \frac{4}{(x-y)^2}X' + \frac{8}{(x-y)^2}Y' + \frac{2}{x-y}Y''.$$

La formule (4) donne ensuite

$$\begin{aligned} z = \int & \frac{1}{(x-y)^4}[-6(X-Y) + 4(x-y)X' - (x-y)^2X'' + 2(x-y)Y']^2\,dx \\ & - \frac{1}{4}\left[-\frac{12}{(x-y)^2}(X-Y) + \frac{4}{x-y}X' + \frac{8}{x-y}Y' + 2Y''\right]^2 dy. \end{aligned}$$

Cette valeur peut s'écrire

$$\begin{aligned} z = \int & 12\left[3\frac{dx-dy}{(x-y)^4}(X-Y)^2 - \frac{2}{(x-y)^3}(X-Y)(X'\,dx - Y'\,dy)\right] \\ & -12\left[2\frac{dx-dy}{(x-y)^3}(X-Y)(X'+Y')\right. \\ & \qquad - \frac{1}{(x-y)^2}(X'\,dx - Y'\,dy)(X'+Y') \\ & \qquad \left. - \frac{1}{(x-y)^2}(X-Y)(X''\,dx + Y''\,dy)\right] \\ & + 4\left[\frac{dx-dy}{(x-y)^2}(X'^2 + X'Y' + Y'^2)\right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{x-y}(2X'X''\,dx + X''Y'\,dx + X'Y''\,dy + Y''\,dy\right] \\ & + X''^2\,dx - Y''^2\,dy. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} z = & -12\frac{(X-Y)^2}{(x-y)^3} + 12\frac{(X-Y)(X'+Y')}{(x-y)^2} \\ & - 4\frac{X'^2 + X'Y' + Y'^2}{x-y} + \int X''^2\,dx - \int Y''^2\,dy. \end{aligned} \tag{39}$$

On voit de nouveau que l'intégrale est de la classe d'Ampère.

Si l'on compare l'equation (32) et l'équation (36), on voit que ces équations sont très semblables, mais que leurs intégrales diffèrent notablement.

9. Le calcul de l'équation (3) dans le cas où il lui correspond une suite de six équations et de son intégrale donne des formules compliquées. Les intégrales de l'équation générale du sixième ordre équivalente à son adjointe dont dépend la solution du problème contiennent, d'après ce que nous avons vu au n° 5, des intégrales non résolues, et il en sera de même de l'équation (3) et de son intégrale.

SECONDE PARTIE.

10. Il existe pour les équations (1) et (3) un théorème analogue à celui de Moutard, ainsi que M. Goursat l'a montré dans son Mémoire publié dans le tome 28 du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

On peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{4\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}} = \lambda(x, y).$$

Posons

$$\mathrm{F}(z) = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{4\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}.$$

L'équation devient

$$\mathrm{F}(z) = \lambda(x, y).$$

Si z_1 est une intégrale particulière ou l'intégrale générale de l'équation (1), on peut écrire celle-ci

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z_1).$$

Si l'on prend une fonction z_1 bien déterminée des variables x et y, il lui correspond une fonction $\lambda(x, y)$ bien déterminée. La fonction $\lambda(x, y)$ étant remplacée par cette fonction dans l'équation de Laplace déduite de l'équation (1)

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0,$$

on a une équation linéaire bien déterminée que nous appellerons $\mathrm{E}(u, z_1)$, admettant l'intégrale $u_1 = \sqrt{\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}$ d'après les formules (2).

Nous rappellerons quelques propriétés des équations aux dérivées partielles (3).

Si l'on considère l'équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

cette équation peut s'obtenir d'une infinité de manières par l'élimination de α entre les deux équations

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right), \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \delta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right).$$

Il suffit de connaître une intégrale particulière u_1 de l'équation proposée et une intégrale v_1 de l'équation adjointe et l'on a γ et δ par une quadrature

$$\gamma = \int u_1\left(bv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)dx - v_1(q_1 + au_1)\,dy,$$
$$\delta = \gamma + v_1 u_1.$$

Dans notre cas, l'équation adjointe de l'équation $E(u, z_1)$ a les mêmes invariants que celle que l'on déduit d'elle par la première transformation de Laplace.

Si l'on pose

$$v = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y},$$

on passe de l'équation $E(u, z_1)$ à son équation adjointe

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x\,\partial y} - \lambda\right)v = 0.$$

Une intégrale particulière u_1 de l'équation $E(u, z_1)$ donne l'intégrale particulière $v_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}$ de l'équation adjointe. En prenant pour u_1 et v_1 les valeurs précédentes, on obtient successivement

$$bv_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial x}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y},$$
$$bv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} = -u_1,$$
$$\gamma = -\int u_1^2\,dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dy = -z_1,$$
$$\delta = -z_1 + \frac{u_1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Si l'on change u en $-u$, les formules de transformation s'écrivent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = z_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right),$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \left(z_1 - \frac{u_1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right).$$

Il est aisé de montrer que l'élimination de u donne l'équation $E(u, z_1)$. On a

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = u_1^2, \qquad \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4\lambda \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

On en tire

$$2u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{1}{\lambda}u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}},$$

$$z_1 - \frac{1}{\lambda}u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{\partial z}{\partial x\,\partial y}}.$$

Si l'on remplace α par $\dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}$, on obtient les formules

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right] = z_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right] = -\frac{z_1^3\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces formules ne changent pas quand on permute u et ω, à la condition de changer en même temps z_1 en $\frac{1}{z_1}$. Il s'ensuit que si par l'élimination de ω on est conduit à une équation $E(u, z_1)$, l'élimination de u doit conduire à une équation de même forme

$$E\left(\omega, \frac{1}{z_1}\right).$$

11. Nous éliminerons d'abord ω. Dérivons la première équation (40) par rapport à y et la seconde par rapport à x et faisons la différence. On obtient

$$z_1 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right) + \frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right)$$

$$+ \frac{z_1^3 \dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_1^3 \dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right) = 0.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}u\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{3}{4\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]u\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}u\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\frac{1}{z_1^2}\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{2}{z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}\right),$$

$$z_1 - \frac{2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}} = -\frac{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right)$$

$$= \frac{3z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right) + z_1^3\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]}{\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\frac{1}{z_1^4}\left[z_1^2\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y} - 4z_1\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} - 2z_1\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 6\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z_1}{\partial y}\right].$$

Remplaçons dans l'équation les expressions qui y figurent par leur valeur et simplifions en multipliant par $\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}$. On obtient

$$\frac{z_1}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+z_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]$$

$$\times\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{3}{4\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}-\frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]u\right\}+\frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}}{\frac{\partial z_1}{\partial x}}u$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}3z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\\ \quad+z_1^3\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)-z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\end{array}\right\}}{\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}u\right)=0.$$

Si l'on groupe les termes, on a

$$\frac{z_1\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+z_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\left\{-\frac{z_1\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+z_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}+\frac{\partial z_1}{\partial y}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\left\{-\frac{z_1\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+z_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right.$$

$$\left.+\frac{3z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)+z_1^3\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)-z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}}{\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+\left\{\frac{z_1\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+z_1^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]}{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\left[\frac{3}{4\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}-\frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]-\frac{1}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}}\frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{3z_1^2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)+z_1^3\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)-z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}}{2\frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right\}u=0$$

En simplifiant on obtient

$$
\begin{aligned}
&2\,\frac{\partial z_1}{\partial x}\,\frac{\partial z_1}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\left\{\frac{\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial z_1}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+3z_1^2\,\frac{\partial z_1}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\\&+z_1^3\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]\end{aligned}\right\}}{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right\}\frac{\partial u}{\partial y}\\
&+\left\{\frac{\left\{\begin{aligned}&2\,\frac{\partial z_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}-\frac{\partial z_1}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)-3z_1^2\,\frac{\partial z_1}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\\&-z_1^3\left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]\end{aligned}\right\}}{2\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}\right\}u=0.
\end{aligned}
$$

L'équation peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
(41)\qquad &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\left\{-\frac{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}}{2\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}+\frac{3z_1^2\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{2\,\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}\right.\\
&\left.+\frac{z_1^3\left[\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]}{2\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}\right\}\frac{\partial u}{\partial y}\\
&+\left\{\frac{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}}{2\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2}-\frac{\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}}{2\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}}-\frac{3z_1^2\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{4\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}\right.\\
&\left.-\frac{z_1^3\left[\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)-\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}\right]}{4\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}\right\}u=0.
\end{aligned}
$$

Si l'on exprime les dérivées de $\frac{1}{z_1}$ au moyen des dérivées de z_1, on obtient, après des simplifications,

$$
(42)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{\left(\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{4\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}\right]\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{4\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial z_1}{\partial y}}\,u=0.
$$

L'équation a bien la forme des équations (3) que nous avons étudiées.

12. Nous éliminerons maintenant u. Les formules (40) donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right)=\frac{1}{z_1}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right)=-\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right]$$

On a

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\partial z_1}{\partial x}}}\right)=-\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{z_1^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{z_1}\right)}\right]\frac{\partial}{\partial y}\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}\omega\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\omega\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{3}{4\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\right]^2}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}-\frac{1}{2\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\frac{\partial^3\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}\right]\omega\right\}.$$

L'équation devient

$$\left[\frac{1}{z_1}+\frac{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{z_1^3\,\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}\right]\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{3}{4\left[\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\right]^2}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}-\frac{1}{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\,\frac{\partial^3\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}\right]\omega\right\}$$

$$+\frac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial y}\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}\,\omega\right]$$

$$+\left[\frac{-3\,\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}+z_1\left(\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}\right)}{z_1^4\left[\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}\right]$$

$$\times\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}}\,\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\omega\right]=0.$$

On a

$$\frac{1}{z_1}+\frac{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{z_1^3\,\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}=\frac{2\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}.$$

Si l'on divise l'équation par cette expression, on a

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} + \left[-\frac{\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}}{2\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}} + \frac{3\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}}{2 z_1^2\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}} + \frac{\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}}{2 z_1^3\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}\,\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}} \right] \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$+ \left\{ \frac{\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}{2\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\right]^2} - \frac{\dfrac{\partial^3\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}}{2\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}} - \frac{3\,\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}}{4 z_1^2\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}} - \frac{\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x^2\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}\,\dfrac{\partial^3\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x^2\,\partial y}}{4 z_1^3\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\right]^2\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}} \right\} \omega = 0$$

On voit que cette équation est identique à l'équation (41) où l'on aurait remplacé u par ω et z_1 par $\frac{1}{z_1}\cdot$ Si l'on exprime les dérivées de z_1 au moyen des dérivées de $\frac{1}{z_1}$, on obtient l'équation

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{ \frac{\left[\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{4\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}} \right\} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\left[\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{4\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}\,\omega = 0.$$

Si l'on connaît une intégrale u_1 de l'équation $E(u, z_1)$ (42), les équations (40) donneront par une quadrature une intégrale de l'équation $E\left(u, \frac{1}{z_1}\right)\cdot$

On a donc, si l'on connaît z_1, le théorème analogue au beau théorème de Moutard dû à M. Goursat : « De toute intégrale de l'équation $E(u, z_1)$, on peut déduire, par une quadrature, une intégrale de l'équation de même forme $E\left(u, \frac{1}{z_1}\right)\cdot$ »

Si l'on ne connaît pas z_1, les formules (2) permettent, au moyen d'une intégrale de l'équation $E(u, z_1)$, de déterminer une intégrale z_1 de l'équation (1). Le théorème précédent devient : « De toute intégrale de l'équation $E(u, z_1)$, on peut déduire une intégrale de l'équation $E\left(u, \frac{1}{z_1}\right)$ par deux quadratures. »

L'intégration de l'équation $F(z) = F(z_1)$ se ramène à celle de l'équation $E(u, z_1)$ et celle de l'équation $F(z) = F\left(\frac{1}{z_1}\right)$ à celle de l'équation $E\left(u, \frac{1}{z_1}\right)$. Il résulte donc du théorème précédent que, d'une intégrale de l'équation $F(z) = F(z_1)$, on peut déduire une intégrale de l'équation $F(z) = F\left(\frac{1}{z_1}\right)$. On a donc aussi le théorème semblable au précédent : « De toute intégrale de l'équation $F(z) = F(z_1)$, on peut déduire, par deux quadratures, une intégrale de l'équation $F(z) = F\left(\frac{1}{z_1}\right)$. »

Par conséquent, de toute équation $E(u, z_1)$ intégrable, on peut, en répétant l'opération précédente, déduire toute une suite d'équations intégrables de la même espèce. Une intégrale de l'équation $E(u, z_1)$ nous permet de calculer une intégrale z_1 de l'équation $F(z) = F(z_1)$. L'intégrale z_1 nous permet de former l'équation $E\left(u, \frac{1}{z_1}\right)$ et de calculer une intégrale de cette équation. Nous déduirons ainsi l'une de l'autre toute une suite d'équations de la même espèce et des intégrales de ces équations.

De toute équation $F(z) = F(z_1)$ intégrable, on peut également, en répétant l'opération précédente, déduire une suite d'équations intégrables de la même espèce.

Nous appliquerons le théorème de M. Goursat à quelques exemples.

13. Reprenons l'équation (32) que nous avons rencontrée dans la première partie de ce travail, lorsque nous avons formé les équations (3) auxquelles correspond une suite de deux équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{(x-y)^2} u = 0.$$

Son intégrale est

$$u = \frac{X - Y}{x - y} - X'.$$

La valeur de z qui satisfait à l'équation (1) qui correspond à cette équation est, comme nous l'avons vu, donnée par la formule (34)

$$z = -\frac{X - Y}{x - y} + \int X'^2\,dx - \int Y'^2\,dy.$$

Une valeur particulière de z nous suffit pour appliquer le théorème de M. Goursat.

Prenons

$$X(x) = x^2, \qquad Y(y) = y^2.$$

On obtient

$$z_1 = \frac{(x - y)^3}{3}.$$

Cette valeur de z nous donne

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = (x - y)^2, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = -(x - y)^2, \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = -2(x - y),$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{3}{(x - y)^3}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x} = -\frac{9}{(x - y)^4},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y} = \frac{9}{(x - y)^4}, \qquad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y} = -\frac{36}{(x - y)^5}.$$

Les formules (40) donnent, en remplaçant ω par $\frac{\omega}{i}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x - y)^2}{3}\omega = -\frac{(x - y)^3}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x - y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{(x - y)^2}{3}\omega = \frac{2(x - y)^3}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{x - y}\right).$$

On a donc

$$(x - y)^2\omega = -\int [2(X - Y) - 2(x - y)X' + (x - y)^2 X'']\,dx$$
$$- 2\int [2(X - Y) - (x - y)(X' + Y')]\,dy.$$

On vérifie facilement que l'expression sous le signe d'intégration est une différentielle exacte. On obtient pour la valeur de ω

$$\omega = \frac{2(2X + Y)}{x - y} - X' - \frac{6}{(x - y)^2}\left(\int X\,dx - \int Y\,dy\right).$$

Si l'on change les fonctions arbitraires et que l'on pose

$$X(x) = X'_1(x), \qquad Y(y) = Y'_1(y),$$

puis que l'on supprime les indices des nouvelles fonctions, on peut mettre ω sous la forme

$$\omega = -\frac{6(X-Y)}{(x-y)^2} + \frac{2(2X'+Y')}{x-y} - X''.$$

L'intégrale est d'ordre quatre et c'est l'intégrale (37) que nous avons obtenue directement.

L'équation à laquelle satisfait ω est donnée par la formule (42). Il nous faut former l'expression

$$\lambda = \frac{\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{4\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}.$$

Nous obtenons

$$\lambda = -\frac{4}{(x-y)^2}.$$

L'équation est donc

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{4}{(x-y)^2}\omega = 0.$$

On retrouve l'équation (36). Elle est semblable à celle dont on est parti, la seule différence est que le coefficient de ω est quatre fois plus grand.

14. Nous appliquerons de nouveau le théorème de M. Goursat à l'équation précédente. La valeur de z qui satisfait à l'équation (38) qui correspond à cette équation est donnée, comme nous l'avons vu, par la formule (39)

$$z = -\frac{12(X-Y)^2}{(x-y)^3} + \frac{12(X-Y)(X'+Y')}{(x-y)^2} - \frac{4(X'^2+X'Y'+Y'^2)}{x-y}$$
$$+\int X''^2\,dx - \int Y''^2\,dy.$$

Il nous suffit d'avoir une intégrale particulière de z. Pour simplifier le calcul nous prendrons

$$X(x) = x^4, \qquad Y(y) = y^4.$$

La valeur particulière de z, que nous appellerons z_2, a la forme simple

$$z_2 = \frac{4(x-y)^5}{5}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = 4(x-y)^4, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = -(x-y)^4, \qquad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = -16(x-y)^3,$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{5}{4(x-y)^5}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{z_2}\right)}{\partial x} = -\frac{25}{4(x-y)^6},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{z_2}\right)}{\partial y} = \frac{25}{4(x-y)^6}, \qquad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_2}\right)}{\partial x\,\partial y} = -\frac{75}{2(x-y)^7}.$$

Les formules (40) donnent, en remplaçant ω par ui et u par ω,

$$\frac{\partial}{\partial x}2(x-y)^3 u = \quad 2(x-y)^5\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{(x-y)^2}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}2(x-y)^3 u = -3(x-y)^5\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{(x-y)^2}\right].$$

Si l'on remplace ω par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned}(x-y)^3 u = \int & [24(X-Y) - 18(x-y)X' \\ & \quad + 6(x-y)^2 X'' - (x-y)^3 X''' - 6(x-y)Y']\,dx \\ & + [36(X-Y) - 18(x-y)X' \\ & \quad + 3(x-y)^2 X'' - 18(x-y)Y' - 3(x-y)^2 Y'']\,dy.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que l'expression sous le signe d'intégration est une différentielle exacte.

La valeur que l'on en déduit pour u est

$$u = -\frac{12(3X+2Y)}{(x-y)^2} + \frac{3(3X'-Y')}{x-y} - X'' + \frac{60}{(x-y)^3}\left(\int X\,dx - \int Y\,dy\right).$$

Si l'on pose

$$X(x) = X_2'(x), \qquad Y(y) = Y_2'(y),$$

puis que l'on supprime dans le résultat les indices, on obtient

$$u = \frac{60(X-Y)}{(x-y)^3} - \frac{12(3X'+2Y')}{(x-y)^2} + \frac{3(3X''-Y'')}{x-y} - X'''.$$

Cette intégrale est du sixième ordre. Pour avoir l'équation correspondante, nous formerons l'expression

$$\lambda = \frac{\left[\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_2}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{4\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_2}\right)}{\partial x}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_2}\right)}{\partial y}}.$$

On obtient

$$\lambda = -\frac{9}{(x-y)^2}.$$

L'équation à laquelle doit satisfaire l'intégrale u est donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{9}{(x-y)^2}u = 0.$$

Nous obtenons une équation semblable à celle dont on est parti.

On remarque que les équations que nous avons obtenues successivement diffèrent peu l'une de l'autre, tandis que les intégrales diffèrent notablement l'une de l'autre.

15. Comme dernier exemple nous appliquerons le théorème de M. Goursat à l'équation générale (3) à laquelle correspond une suite de deux équations que nous avons obtenue. Nous avons vu que cette équation est donnée par la formule (28)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\varphi'(x)\varphi_1'(y)}{[\varphi(x)-\varphi_1(y)]^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\varphi'(x)\varphi_1'(y)}{[\varphi(x)-\varphi_1(y)]^2}u = 0.$$

Son intégrale est donnée par la formule (29)

$$(29)\qquad u = \frac{\sqrt{\varphi'(x)}}{\varphi(x)-\varphi_1(y)}X - \frac{1}{\sqrt{\varphi'(x)}}X' - \frac{\sqrt{\varphi'(x)}}{\varphi(x)-\varphi_1(y)}Y.$$

La valeur de z qui satisfait à l'équation (1) correspondant à l'équation (28) est, ainsi que nous l'avons vu au n° 6, donnée par la formule (31)

$$z = -\frac{1}{\varphi-\varphi_1}(X-Y)^2 + \int\frac{1}{\varphi'}X'^2\,dx - \int\frac{1}{\varphi_1'}Y'^2\,dy.$$

Une intégrale particulière de z nous suffit et nous prendrons

$$X = \frac{1}{\varphi}, \qquad Y = \frac{1}{\varphi_1}.$$

La valeur particulière correspondante de z est

$$z_1 = \frac{(\varphi - \varphi_1)^3}{3\varphi^3\varphi_1^3}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{(\varphi - \varphi_1)^2\varphi'}{\varphi^4\varphi_1^2},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = -\frac{(\varphi - \varphi_1)^2\varphi_1'}{\varphi^2\varphi_1^4},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = -2\frac{(\varphi - \varphi_1)\varphi'\varphi_1'}{\varphi^3\varphi_1^3},$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{3\varphi^3\varphi_1^3}{(\varphi - \varphi_1)^3},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x} = -\frac{9\varphi^2\varphi_1^4\varphi'}{(\varphi - \varphi_1)},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y} = \frac{9\varphi^4\varphi_1^2\varphi_1'}{(\varphi - \varphi_1)^4},$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y} = -\frac{36\varphi^3\varphi_1^3\varphi'\varphi_1'}{(\varphi - \varphi_1)^5}.$$

Les formules (40) donnent, en remplaçant ω par ωi,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\sqrt{\varphi'}}\omega\right] = \frac{(\varphi - \varphi_1)^3}{\varphi^3\varphi_1^3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\varphi^2\varphi_1}{(\varphi - \varphi_1)^2}(X - Y) - \frac{\varphi^2\varphi_1}{(\varphi - \varphi_1)\varphi'}X'\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\sqrt{\varphi'}}\omega\right] = -\frac{2(\varphi - \varphi_1)^3}{\varphi^3\varphi_1^3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varphi^2\varphi_1}{(\varphi - \varphi_1)^2}(X - Y) - \frac{\varphi^2\varphi_1}{(\varphi - \varphi_1)\varphi'}X'\right].$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\sqrt{\varphi'}}\omega \\
&= \int\left\{-\frac{2\varphi'}{\varphi^2\varphi_1}(X - Y) + \frac{(\varphi - \varphi_1)}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{2}{\varphi} + \frac{(\varphi - \varphi_1)\varphi''}{\varphi_1\varphi'^2}\right]X' - \frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\varphi'}X''\right\}dx \\
&\quad + 2\left[-\frac{(\varphi + \varphi_1)\varphi_1'}{\varphi\varphi_1^3}(X - Y) + \frac{(\varphi - \varphi_1)\varphi_1'}{\varphi_1^3\varphi'}X' + \frac{(\varphi - \varphi_1)}{\varphi\varphi_1^2}Y'\right]dy.
\end{aligned}$$

On vérifie que l'expression sous le signe somme est une différentielle exacte. La valeur de ω est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
\frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\sqrt{\varphi'}}\omega &= \frac{\varphi^2 + 2\varphi\varphi_1 - 3\varphi_1^2}{\varphi^2\varphi_1^2}X - \frac{(\varphi - \varphi_1)^2}{\varphi\varphi_1^2\varphi'}X' \\
&\quad + \frac{2(\varphi - \varphi_1)}{\varphi\varphi_1^2}Y - 6\int\frac{\varphi'}{\varphi^3}X\,dx - 2\int\frac{\varphi_1'}{\varphi_1^3}Y\,dy.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\frac{\varphi'}{\varphi^3} X = X'_1, \qquad \frac{\varphi'_1}{\varphi_1^3} Y = Y'_1,$$

puis que l'on supprime les indices, la valeur de ω est

$$(44) \quad \omega = -\frac{2\varphi\varphi_1^2\sqrt{\varphi'}}{(\varphi-\varphi_1)^2}(3X+Y) + \frac{[2(-\varphi+3\varphi_1)\varphi'^2+(\varphi-\varphi_1)\varphi\varphi'']\varphi^2}{(\varphi-\varphi_1)\varphi'^2\sqrt{\varphi'}} X'$$
$$-\frac{\varphi^3}{\varphi'\sqrt{\varphi'}} X'' + \frac{2\varphi_1^3}{(\varphi-\varphi_1)\sqrt{\varphi'}} Y'.$$

Cette intégrale est du quatrième ordre. Pour former l'équation à laquelle satisfait ω il nous faut calculer l'expression

$$\lambda = \frac{\left[\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{4\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}.$$

On obtient

$$\lambda = -\frac{4\varphi'\varphi'_1}{(\varphi-\varphi_1)^2}.$$

L'équation à laquelle satisfait ω est donc

$$(45) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{4\varphi'\varphi'_1}{(\varphi-\varphi_1)^2}\right]\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{4\varphi'\varphi'_1}{(\varphi-\varphi_1)^2}\omega = 0.$$

On remarque que cette équation est semblable à l'équation (28) à laquelle correspond une suite de deux équations dont nous sommes parti. La seule différence est que le coefficient de ω est égal à celui de u multiplié par le nombre 4, comme dans la première application du théorème de M. Goursat que nous avons faite au numéro précédent.

16. Nous ferons une application des formules précédentes en prenant

$$\varphi(x) = x, \qquad \varphi_1(y) = y.$$

On retrouve l'équation (36) à laquelle nous avons déjà été conduit par la première application du théorème de M. Goursat

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{4}{(x-y)^2}\omega = 0.$$

Nous obtenons par contre une intégrale différente de celle que nous avions obtenue directement et par la première application du théorème de M. Goursat, et qui est

$$\omega = -\frac{2x^2y(2X+Y)}{(x-y)^2} - \frac{2(x-3y)x^2X'}{x-y} - x^3X'' + \frac{2y^3Y'}{x-y}.$$

On vérifie que cette intégrale satisfait à l'équation précédente.

17. Nous allons montrer maintenant comment le théorème de M. Goursat nous permet d'obtenir par une méthode analogue à celle de Moutard toutes les équations de Laplace correspondant à une suite comprenant un nombre pair d'équations et leurs intégrales. Nous montrerons d'abord que le théorème de M. Goursat nous permet de former les équations de Laplace auxquelles correspondent des suites comprenant un nombre pair d'équations et leurs intégrales en partant de l'équation simple

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Nous montrerons ensuite que si l'on part d'une intégrale de rang $n+1$ par rapport à x et de rang n par rapport à y, l'intégrale que l'on obtient par l'application du théorème est, en général, de rang $n+2$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y. Si l'on choisit cependant convenablement la fonction u_1 qui figure dans les équations de la transformation, nous montrerons que l'on peut passer d'une intégrale de rang $n+1$ par rapport à x et de rang n par rapport à y à une intégrale de rang n par rapport à x et de rang $n-1$ par rapport à y.

18. Les équations (1) et (3) les plus simples sont celles que nous obtenons en faisant $\lambda = 0$. L'équation (1) qui nous sert de point de départ se réduit à celle qui a servi de point de départ à Moutard

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{46}$$

Nous avons vu que l'on passe de l'équation (1) à l'équation (3) correspondante par le changement de variable

$$p = u^2.$$

L'équation (46) devient par l'élimination de z

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{47}$$

L'intégrale de cette équation s'obtient immédiatement. Nous l'écrirons

$$u = \sqrt{X'}, \tag{48}$$

X étant une fonction arbitraire de x.

L'intégrale de l'équation (46) peut s'écrire

$$z = X - Y, \tag{49}$$

Y étant une fonction arbitraire de y.

19. Nous appliquerons le théorème de M. Goursat à l'équation (47). Nous écrirons les équations (40) sous une autre forme. Une valeur particulière z_1 de z est donnée en fonction de la valeur particulière correspondante u_1 de u par la formule (4) où nous remplaçons z par z_1 et u par u_1 :

$$z_1 = \int u_1^2\, dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Nous en déduisons

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = u_1^2, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x} = -\frac{u_1^2}{z_1^2}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda z_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\, \partial y} = \frac{2u_1}{z_1^3}\frac{\partial u_1}{\partial y}\left(-z_1 + \frac{1}{\lambda}u_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{z_1^3\,\dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\, \partial y}}{\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y}} = -z_1 + \frac{1}{\lambda}u_1\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Les formules (40) peuvent donc s'écrire en remplaçant ω

par ωi :

$$
(50) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_1 \omega}{u_1}\right) = z_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right), \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_1 \omega}{u_1}\right) = \left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Nous obtiendrons des valeurs particulières u_1 et z_1 de u et z en prenant des valeurs particulières X_1 et Y_1 pour X et Y. Les formules (48) et (49) nous donnent

$$
(51) \qquad u_1 = \sqrt{X'_1},
$$

$$
(52) \qquad z_1 = X_1 - Y_1.
$$

Lorsqu'on porte ces valeurs ainsi que la valeur correspondante de λ dans les équations (50), on voit que la seconde de ces équations devient indéterminée et ne peut être employée. Nous ne conserverons donc que la première de ces équations qui devient

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[(X_1 - Y_1)\frac{\omega}{\sqrt{X'_1}}\right] = (X_1 - Y_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{X'}}{\sqrt{X'_1}}\right).
$$

L'intégration de cette équation nous donne

$$
(X_1 - Y_1)\frac{\omega}{\sqrt{X'_1}} = (X_1 - Y_1)\frac{\sqrt{X'}}{\sqrt{X'_1}} - \int \sqrt{X'_1 X'}\, dx + Y,
$$

Y étant une fonction arbitraire de y. Si l'on pose

$$
\sqrt{X'} = \frac{X'_2}{\sqrt{X'_1}},
$$

X_2 étant une nouvelle fonction arbitraire de x, puis que l'on supprime l'indice 2, et en remplaçant ω par $-\omega$, on obtient

$$
(52) \qquad \omega = \frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 - Y_1} X - \frac{1}{\sqrt{X'_1}} X' - \frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 - Y_1} Y.
$$

Nous retrouvons la formule (29) donnant l'intégrale de l'équation générale (3) correspondant à une suite de deux équations, φ et φ_1 étant remplacées par X_1 et Y_1.

L'équation à laquelle satisfait la valeur de ω s'obtient en remplaçant z_1 par sa valeur dans la formule (43). On obtient

$$
(53) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}\right]\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}\,\omega = 0.
$$

Nous retrouvons l'équation (28), dans laquelle φ et φ_1 sont remplacées par X_1 et Y_1 et correspondant à une suite de deux équations.

Nous retrouvons donc exactement les résultats que nous avons obtenus par la théorie générale.

20. Nous voulons montrer, avant d'appliquer de nouveau le théorème de M. Goursat, que la formule (53) donne l'équation générale correspondant à une suite de deux équations.

Si l'on considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0,$$

la condition pour que cette équation corresponde à une suite de deux équations est que l'invariant k soit nul. Les invariants de l'équation étant

$$h = 0, \qquad k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} + \lambda,$$

la fonction λ doit donc satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} = 2\lambda.$$

Si l'on pose

$$\lambda = 2\lambda_1,$$

la fonction λ_1 doit satisfaire à l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 \log \lambda_1}{\partial x\, \partial y} = \lambda_1,$$

dont l'intégrale peut s'écrire

$$\lambda_1 = -\frac{2X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}.$$

Nous avons donc

$$\lambda = -\frac{X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}.$$

C'est la valeur que nous donne pour λ l'équation (53).

21. Nous appliquerons maintenant le théorème de M. Goursat à l'équation (53).

Les formules (50) nous donnent

$$d\left(\frac{z_1 \omega}{u_1}\right) = z_1\, d\left(\frac{u}{u_1}\right) - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) dy.$$

Un calcul facile nous permet d'écrire

$$(54)\qquad u = u - \frac{u_1}{z_1}\int\left(uu_1\,dx + \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right).$$

Une valeur particulière u_1 de u est donnée par la formule (52), dans laquelle nous remplaçons X et Y par deux fonctions particulières X_2 et Y_2.

La valeur particulière z_1 de z correspondant à la valeur u_1 de u est donnée par la formule (4), dans laquelle nous remplaçons X par X_2, Y par Y_2, φ par X_1 et φ_1 par Y_1. On obtient

$$z_1 = -\frac{1}{X_1 - Y_1}(X_2 - Y_2)^2 + \int\frac{1}{X_1'}X_2'^2\,dx - \int\frac{1}{Y_1'}Y_2'^2\,dy.$$

Nous avons

$$uu_1 = \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1}X_1' - X_2'\right)\left(\frac{X - Y}{X_1 - Y_1} - \frac{X'}{X_1'}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1}Y_1' - Y_2'\right)\left(\frac{X - Y}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'}{Y_1'}\right).$$

La formule (54) nous donne pour ω

$$\begin{aligned}\omega = u - \frac{u_1}{z_1}\int &\left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1}X_1' - X_2'\right)\left(\frac{X - Y}{X_1 - Y_1} - \frac{X'}{X_1'}\right)dx\\ &-\left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1}Y_1' - Y_2'\right)\left(\frac{X - Y}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'}{Y_1'}\right)dy.\end{aligned}$$

Cette valeur peut s'écrire

$$\omega = u + \frac{(X_2 - Y_2)u_1}{(X_1 - Y_1)z_1}(X - Y) - \frac{u_1}{z_1}\left(\int\frac{X_2'}{X_1'}X'\,dx - \int\frac{Y_2'}{Y_1'}Y'\,dy\right).$$

Nous pouvons encore écrire, en remplaçant u par sa valeur,

$$\begin{aligned}\omega = &\left[\frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1} + \frac{(X_2 - Y_2)u_1}{(X_1 - Y_1)z_1}\right](X - Y) - \frac{1}{\sqrt{X_1'}}X'\\ &-\frac{u_1}{z_1}\left[\frac{X_2'}{X_1'}X - \int\left(\frac{X_2'}{X_1'}\right)'X\,dx - \frac{Y_2'}{Y_1'}Y + \int\left(\frac{Y_2'}{Y_1'}\right)'Y\,dy\right].\end{aligned}$$

Posons

$$\left(\frac{X_2'}{X_1'}\right)'X = X_3',$$

$$\left(\frac{Y_2'}{Y_1'}\right)'Y = Y_3'.$$

Nous aurons donc, en supprimant les indices 3, les formules

$$(55)\quad \omega = \frac{u_1}{z_1}(X - Y) + \left[\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 - Y_1} + \frac{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)''}{\sqrt{X'_1}\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'} + \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{X'_2}{X'_1}\right)\frac{u_1}{z_1}\right] \frac{1}{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'} X'$$
$$- \frac{1}{\sqrt{X'_1}\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'} X'' - \left[\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 - Y_1} + \left(\frac{X_2 - Y_2}{X_1 - Y_1} - \frac{Y'_2}{Y'_1}\right)\frac{u_1}{z_1}\right] \frac{1}{\left(\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)'} Y',$$

$$(56)\quad \frac{u_1}{z_1} = - \frac{(X_2 - Y_2)X'_1 - (X_1 - Y_1)X'_2}{\sqrt{X'_1}\left[(X_2 - Y_2)^2 - (X_1 - Y_1)\left(\int \frac{1}{X'_1} X'^2_2\, dx - \int \frac{1}{Y'_1} Y'^2_2\, dy\right)\right]}$$

Nous obtiendrons l'équation (43) à laquelle satisfait ω en cherchant la valeur de λ par la formule

$$\lambda = \frac{\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x\, \partial y}\right]^2}{4\,\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}.$$

Si l'on exprime les dérivées de $\frac{1}{z_1}$ au moyen de u_1 et de $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, on obtient

$$(57)\qquad \lambda_1 = \left(-1 + \frac{1}{\lambda}\,\frac{u_1}{z_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \lambda.$$

Les formules (55), (56) et (57) nous permettent de former les équations de Laplace correspondant à une suite de quatre équations et leurs intégrales.

22. Nous appliquerons les formules précédentes à des cas particuliers. Prenons

$$X_2 = X_1^2,$$
$$Y_2 = Y_1^2.$$

Nous obtenons

$$u_1 = -\sqrt{X'_1}(X_1 - Y_1),$$
$$z_1 = \frac{1}{3}(X_1 - Y_1)^3,$$
$$\frac{u_1}{z_1} = -\frac{3\sqrt{X'_1}}{(X_1 - Y_1)^2},$$
$$\frac{X'_2}{X'_1} = 2X_1,$$
$$\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)' = 2X'_1.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (55), nous aurons

$$(58)\quad \omega = -\frac{3\sqrt{X'_1}}{(X_1 - Y_1)^2}(X - Y) + \frac{4X'^2_1 + (X_1 - Y_1)X''_1}{2(X_1 - Y_1)X'^2_1\sqrt{X'_1}}X' - \frac{1}{2X'_1\sqrt{X'_1}}X'' + \frac{\sqrt{X'_1}}{(X_1 - Y_1)Y'_1}Y'.$$

L'équation à laquelle satisfait ω est donnée par la formule (43). Nous obtenons pour cette équation

$$(59)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{4X'_1Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}\right]\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{4X'_1Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}\omega = 0.$$

Nous retrouvons l'équation (45) dans laquelle φ et φ_1 sont remplacées par X_1 et Y_1. L'intégrale donnée par la formule (58) est différente de celle que nous avions obtenue et qui est donnée par la formule (44).

23. Supposons dans les formules (58) et (59)

$$X_1 = x,$$
$$Y_1 = y.$$

On obtient l'intégrale et l'équation

$$\omega = -\frac{3}{(x - y)^2}(X - Y) + \frac{1}{(x - y)}(2X' + Y') - \frac{X''}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{x - y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{4}{(x - y)^2}\omega = 0.$$

Nous retrouvons l'équation (36). Si nous remplaçons dans l'intégrale X et Y par 2X et 2Y, nous retrouvons l'équation (37) que nous avons obtenue directement et que nous avons déjà retrouvée par la première application du théorème de M. Goursat.

L'application du théorème de M. Goursat nous permet donc de former les équations de Laplace auxquelles correspondent des suites comprenant un nombre pair d'équations et leurs intégrales en partant de l'équation simple

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

24. Supposons que l'on connaisse une intégrale quelconque de l'équation (3)

$$f(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0.$$

On a

$$f(u_1) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\,\frac{\partial u_1}{\partial y} - \lambda u_1 = 0.$$

Nous allons montrer *que l'équation* (3) *peut se mettre sous la forme*

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} = 0,$$

et que si l'on détermine une nouvelle fonction φ *par les conditions*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathrm{N},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathrm{M},$$

on retrouve les équations de la transformation de M. Goursat.

Nous considérerons la combinaison des équations $f(u)$ et $f(u_1)$

$$u_1 f(u) - u f(u_1) = 0. \tag{60}$$

Elle peut s'écrire

$$u_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - u \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = 0. \tag{61}$$

Nous exprimerons les différences des dérivées au moyen des dérivées de $\frac{u}{u_1}$. On a

$$u_1 \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u_1}{\partial y} = u_1^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right),$$

$$u_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - u \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y} = u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right) + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right).$$

L'équation (61) devient

$$u_1 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \lambda}{\partial x}\,u_1\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) = 0. \tag{62}$$

Nous ajouterons dans la parenthèse l'expression $u_1 f(u_1)$ qui est nulle et nous multiplierons l'équation par le facteur $\frac{1}{\lambda}\,\frac{du_1}{dy}$.

L'équation (62) devient

$$(63)\quad \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right) - \left[u_1^2 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) = 0.$$

Nous introduirons une nouvelle fonction z_1 satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = u_1^2,$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2.$$

La fonction est déterminée par la relation

$$z_1 = \int u_1^2\, dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Nous retrouvons la fonction déterminée par la formule (4) et satisfaisant à l'équation (1).

L'équation (63) devient en remplaçant u_1^2 et $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{du_1}{dy}\right)^2$ par leurs valeurs exprimées en fonction de z_1

$$\frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) + \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) - z_1 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right) - \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right) = 0.$$

Nous obtenons donc l'équation

$$(64)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[z_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right)\right] = 0.$$

Cette relation nous permet de déterminer une nouvelle fonction φ par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = z_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{u_1}\right),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(z_1 - \frac{1}{\lambda} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_1}\right).$$

Si l'on remplace φ par $\frac{z_1\omega}{u_1}$, on retrouve les équations (50) de la transformation de M. Goursat.

25. Nous allons montrer que l'on obtient par l'application du théorème de M. Goursat toutes les équations de Laplace auxquelles correspondent des suites comprenant un nombre pair d'équations et leurs intégrales.

Nous considérons la fonction donnée par la relation (54) résultant de la combinaison des formules (50)

$$\omega = u - \frac{u_1}{z_1}\int\left(u_1 u\,dx + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy\right). \tag{54}$$

Nous supposerons qu'à l'équation à laquelle satisfait u correspond une suite comprenant $2n$ équations. Nous avons vu dans la première partie de ce travail que l'intégrale u est de rang $n+1$ par rapport à x et de rang n par rapport à y.

Nous montrerons que, en général, la fonction ω est de rang $n+2$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y.

L'intégrale u peut être représentée par la formule

$$u = \mathrm{M}\mathrm{X} + \mathrm{M}_1\mathrm{X}' + \ldots + \mathrm{M}_n\mathrm{X}^{(n)} + \mathrm{N}\mathrm{Y} + \mathrm{N}_1\mathrm{Y}' + \ldots + \mathrm{N}_{n-1}\mathrm{Y}^{(n-1)}.$$

Posons

$$f(u) = \mathrm{M}u + \mathrm{M}_1 u' + \ldots + \mathrm{M}_n u^{(n)},$$
$$f_1(u) = \mathrm{N}u + \mathrm{N}_1 u' + \ldots + \mathrm{N}_{n-1}u^{(n-1)}.$$

On a

$$u = f(\mathrm{X}) + f_1(\mathrm{Y}).$$

Nous représenterons par ω_1 et ω_2 les valeurs que nous donne la formule (54) si l'on remplace u successivement par les fonctions $f(\mathrm{X})$ et $f_1(\mathrm{Y})$. Il est clair que l'on a

$$\omega = \omega_1 + \omega_3. \tag{65}$$

Nous calculerons successivement ces deux expressions. Nous avons d'abord

$$\omega_1 = f(\mathrm{X}) - \frac{u_1}{z_1}\int\left[u_1 f(\mathrm{X})\,dx + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial f(\mathrm{X})}{\partial y}dy\right]. \tag{66}$$

Si l'on appelle $g(u)$ le polynome adjoint de $f(u)$, on sait que l'on a une relation de la forme

$$v f(u) - u g(v) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}(u, v), \tag{67}$$

dans laquelle $\mathrm{B}(u, v)$ est une fonction bilinéaire de u, v et de leurs dérivées.

Si l'on pose

$$u = X, \qquad v = u_1,$$

on aura donc

$$(68) \qquad u_1 f(X) - X g(u_1) = \frac{\partial}{\partial x} B(X, u_1).$$

La formule donnant ω_1 devient donc par une transformation facile

$$\omega_1 = f(X) - \frac{u_1}{z_1} B(X, u_1)$$
$$- \frac{u_1}{z_1} \int \left\{ X g(u_1)\, dx - \left[\frac{\partial}{\partial y} B(X, u_1) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial f(X)}{\partial y} \right] dy \right\}.$$

L'expression sous le signe d'intégration devant être une différentielle exacte, nous aurons

$$X \frac{\partial g(u_1)}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} B(X, u_1) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial f(X)}{\partial y} \right].$$

Si l'expression à dériver par rapport à x dans le second membre de cette relation n'est pas identiquement nulle, sa dérivée par rapport à x contiendra au moins une dérivée de la fonction X, la fonction $B(X, u_1)$ étant une fonction bilinéaire de X, u_1 et de leurs dérivées, et $f(X)$ étant une fonction linéaire de X et de ses dérivées. Le premier membre ne contenant que la fonction X, il s'ensuit donc que l'on doit avoir

$$(69) \qquad \frac{\partial g(u_1)}{\partial y} = 0,$$

$$(70) \qquad \frac{\partial}{\partial y} B(X, u_1) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial f(X)}{\partial y}.$$

Nous avons donc

$$(71) \qquad \omega_1 = f(X) - \frac{u_1}{z_1} \left[B(X, u_1) + \int X\, g(u_1)\, dx \right].$$

Pour obtenir la valeur de ω_2 nous remplacerons dans la formule (54) u par $f_1(Y)$. Nous avons

$$(72) \qquad \omega_2 = f_1(Y) - \frac{u_1}{z_1} \int \left[u_1 f_1(Y)\, dx + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial f_1(Y)}{\partial y} dy \right].$$

Nous représenterons par $g_1(u)$ le polynome adjoint de $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial f_1(u)}{\partial y}$ Posons

$$(73) \qquad \frac{1}{\lambda} v \frac{\partial f_1(u)}{\partial y} - u\, g_1(v) = \frac{\partial}{\partial y} B_1(u, v).$$

Nous ferons dans cette relation

$$u = \mathrm{Y}, \qquad v = \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

On a

$$(74) \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial f_1(\mathrm{Y})}{\partial y} - \mathrm{Y} g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

La valeur de ω_2 devient par une transformation facile

$$\omega_2 = f_1(\mathrm{Y}) - \frac{u_1}{z_1}\left(\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \int\left\{\left[u_1 f_1(\mathrm{Y}) - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]dx \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathrm{Y} g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)dy\right\}\right).$$

L'expression sous le signe d'intégration devant être une différentielle exacte, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u_1 f_1(\mathrm{Y}) - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] = \mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial x}\left[g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right].$$

Nous obtenons, par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour obtenir les relations (69) et (70),

$$(75) \qquad \frac{\partial}{\partial x} g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(76) \qquad u_1 f_1(\mathrm{Y}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right).$$

La fonction ω_2 est donc donnée par la formule

$$(77) \qquad \omega_2 = f_1(\mathrm{Y}) - \frac{u_1}{z_1}\left[\mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \int \mathrm{Y} g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)dy\right].$$

La valeur de ω est donnée par la formule (66) où nous remplaçons ω_1 et ω_2 par leurs valeurs données par les formules (72) et (77). On a donc

$$(78) \qquad \omega = f(\mathrm{X}) + f_1(\mathrm{Y}) - \frac{u_1}{z_1}\left[\mathrm{B}(\mathrm{X}, u_1) + \mathrm{B}_1\left(\mathrm{Y}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + \int \mathrm{X}\, g(u_1)\,dx + \int \mathrm{Y}\, g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)dy\right].$$

Posons

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{X}'_1}{g(u_1)}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{Y}'_1}{g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}.$$

La formule donnant ω devient, en supprimant les indices 1 des fonctions X_1 et Y_1,

$$(79)\quad \omega = f\left[\frac{X'}{g(u_1)}\right] + f_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}\right] - \frac{u_1}{z_1}\left\{B\left(\frac{X'}{g(u_1)}, u_1\right) + B_1\left[\frac{Y'}{g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right] + X + Y\right\}.$$

Les fonctions X et Y ne figurent sous aucun signe d'intégration.

26. Nous pouvons simplifier cette formule. Nous supposerons que l'intégrale u_1 a été obtenue en remplaçant dans l'intégrale générale X et Y par X_1 et Y_1. On a

$$u_1 = MX_1 + M_1 X_1' + \ldots + M_n X_1^{(n)} + NY_1 + N_1 Y_1' + \ldots + N_{n-1} Y_1^{(n-1)}.$$

D'après la formule (68), $g(u_1)$ ne dépend pas de y. Il faut donc que les termes contenant la fonction Y_1 disparaissent. On a donc

$$g[f_1(Y_1)] = 0.$$

Nous avons, par conséquent,

$$g(u_1) = g[f(X_1)].$$

Nous poserons

$$(80)\quad \varphi(u) = g[f(u)].$$

On a de même

$$g_1\left[\frac{\partial f(X_1)}{\partial y}\right] = 0,$$

$$g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = g_1\left[\frac{\partial f_1(Y_1)}{\partial y}\right].$$

Nous poserons aussi

$$(81)\quad \varphi_1(u) = g_1\left[\frac{\partial f_1(u)}{\partial y}\right].$$

Si nous remplaçons $g(u_1)$ et $g_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ par $\varphi(X_1)$ et $\varphi_1(Y_1)$, nous obtenons

$$(82)\quad \omega = f\left[\frac{X'}{\varphi(X_1)}\right] + f_1\left[\frac{Y'}{\varphi_1(Y_1)}\right] - \frac{u_1}{z_1}\left\{B\left[\frac{X'}{\varphi(X_1)}, u_1\right] + B_1\left[\frac{Y'}{\varphi_1(Y_1)}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right] + X + Y\right\}.$$

Les valeurs de $\varphi(X_1)$ et $\varphi_1(Y_1)$ ne sont pas nulles en général.

Si l'on calcule les coefficients des termes d'ordre supérieur de ces fonctions, on voit qu'ils ne sont pas nuls.

27. Nous avons supposé que l'intégrale u est de rang $n+1$ par rapport à x et de rang n par rapport à y.

Nous montrerons qu'en général l'intégrale ω *est de rang* $n+2$ *par rapport à* x *et de rang* $n+1$ *par rapport à* y.

Nous supposons que les fonctions $\varphi(X_1)$ et $\varphi_1(Y_1)$ ne sont pas nulles, ce qui est le cas en général. Nous avons vu, dans la première partie de ce travail, que l'intégrale u peut être représentée par la formule (27) et est formée avec $2n$ paires de valeurs $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2n}, y_{2n})$. La valeur de u s'annule donc si l'on remplace X et Y par x_h et y_h. Si l'on remplace dans u_1 les fonctions X_1 et Y_1 par x_h et y_h, u_1 s'annulera identiquement ainsi que toutes ses dérivées. Nous avons donc

$$g(u_1) = \varphi(x_h) = 0.$$

L'équation linéaire

$$\varphi(u) = g[f(u)],$$

dont les coefficients sont des fonctions de x, admet donc les solutions particulières $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

Nous avons de même, si l'on remplace X_1 et Y_1 par x_h et y_h,

$$g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \varphi_1(y_h) = 0.$$

L'équation linéaire

$$\varphi_1(u) = g_1\left[\frac{\partial f_1(u)}{\partial y}\right]$$

est d'ordre $2n$ et admet les solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$.

La fonction u s'annule quand on remplace X et Y par x_h et y_h. La formule (78) nous montre que $\frac{z_1\omega}{u_1}$ s'annule aussi. La valeur de ω donnée par la formule (82) s'annulera donc lorsqu'on y remplacera X et Y par

$$\int x_h \varphi(X_1)\,dx, \qquad \int y_h \varphi_1(Y_1)\,dy.$$

Nous devons pour cela choisir convenablement la constante que l'on peut ajouter à l'une des intégrales.

Les dérivées de la fonction $\frac{z_1\omega}{u_1}$ données par la formule (78) s'annulent quand on remplace X et Y par X_1 et Y_1, car u

devient égal à u_1. La valeur de ω donnée par la formule (82) s'annulera donc quand on remplacera X et Y par

$$\int X_1 \varphi(X_1)\,dx, \qquad \int Y_1 \varphi_1(Y_1)\,dy.$$

Nous devrons pour cela choisir convenablement les valeurs des constantes que l'on ajoute à ces intégrales.

La fonction ω donnée par la formule (82) s'annule aussi quand on y remplace X et Y par $+1$ et -1.

Nous avons donc obtenu $2n+2$ paires de valeurs pour X et Y qui annulent la fonction ω. Les fonctions de chaque groupe sont linéairement indépendantes. Si l'on avait par exemple une relation linéaire entre les fonctions du groupe

$$1, \quad \int X_1 \varphi(X_1)\,dx, \quad \int x_1 \varphi(X_1)\,dx, \quad \ldots, \quad \int x_{2n} \varphi(X_1)\,dx,$$

il y aurait une relation entre leurs dérivées, ce qui est impossible si X_1 ne satisfait pas à l'équation

$$\varphi(X_1) = 0,$$

et n'est pas une combinaison linéaire des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

La fonction ω donnée par la formule (82) est donc de rang $n+2$ par rapport à x et de rang $n+1$ par rapport à y.

Nous avons donc démontré que la transformation de M. Goursat nous conduit, en général, d'une solution u à une solution ω d'un rang supérieur de deux à celui de u.

28. *Nous allons montrer maintenant que l'on peut, en choisissant convenablement la fonction* u_1, *passer d'une intégrale de rang* $n+1$ *par rapport à* x *et de rang* n *par rapport à* y *à une intégrale de rang* n *par rapport à* x *et de rang* $n-1$ *par rapport à* y.

Nous supposerons que l'on a seulement

$$\varphi_1(Y_1) = 0,$$

et

$$Y_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{2n} y_{2n},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ étant des constantes.

Nous remplacerons X_1 et Y_1 par

$$X_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_{2n} x_{2n},$$
$$Y_1 - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 - \ldots - \lambda_{2n} y_{2n},$$

pour réduire Y_1 à zéro. La valeur de u_1 ne change pas. Nous remplacerons donc Y_1 par zéro, X_1 restant arbitraire.

Si l'on fait

$$X = X_1, \qquad Y = 0,$$

u devient égal à u_1. Les fonctions $g(u_1)$, $g_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$ se réduisent, ainsi que nous l'avons vu, aux valeurs $g\,[f(X_1)]$ et $g_1\left[\frac{\partial f_1(Y_1)}{\partial y}\right]$ et nous avons remplacé ces fonctions par les expressions plus simples $\varphi(X_1)$ et $\varphi_1(Y_1)$. Si l'on fait le même changement dans la formule (78), on a

$$\begin{aligned}\frac{z_1\omega}{u_1} &= \frac{z_1}{u_1}[f(X)+f_1(Y)]\\ &\quad -\left[B(X, u_1)+B_1\left(Y, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+\int X\,\varphi(X_1)\,dx+\int Y\,\varphi_1(Y_1)\,dy\right]\end{aligned}$$

Nous ferons dans cette formule

$$X = X_1, \qquad Y = 0, \qquad Y_1 = 0.$$

Nous aurons aussi, puisque Y_1 est nul,

$$u_1 = f(X_1).$$

La formule (4) nous donne

$$z_1 = \int\left[u_1^2\,dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 dy\right]$$

Nous avons donc

$$z_1 = \int\left\{f^2(X_1)\,dx + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial f(X_1)}{\partial y}\right]^2 dy\right\}.$$

La valeur de ω est donc donnée par la formule

$$\begin{aligned}\frac{z_1\omega}{u_1} &= \int\left\{f^2(X_1)\,dx + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial f(X_1)}{\partial y}\right]^2 dy\right\}\\ &\quad - B(X_1, f(X_1)) - \int X_1\,\varphi(X_1)\,dx.\end{aligned}$$

L'expression $\frac{z_1\omega}{u_1}$ doit se réduire à une constante, ainsi que le fait ressortir la formule (54). Nous supposerons que la fonction X_1 satisfait à la relation

$$\varphi(X_1) = 0.$$

Nous devons donc obtenir une constante pour la valeur de l'expression

$$\int \left\{ f^2(X_1)\,dx + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial f(X_1)}{\partial y}\right]^2 dy \right\} - B(X_1, f(X_1)).$$

Les formules (68) et (70) nous donnent

$$f^2(X_1) = \frac{\partial}{\partial x} B[X_1, f(X_1)],$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial f(X_1)}{\partial y}\right]^2 = \frac{\partial}{\partial y} B[X_1, f(X_1)].$$

La substitution de ces valeurs dans l'expression précédente nous montre que cette expression est nulle, si l'on choisit convenablement la constante d'intégration.

Nous supposerons que la solution X_1 de l'équation $\varphi(X_1) = 0$ est donnée par la formule

$$X_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_{2n} x_{2n},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant des constantes.

Il résulte de ce qui précède que *le rang de la fonction* ω *donnée par la formule* (82) *sera abaissé à* n *par rapport à* x *si nous remplaçons* X *par*

$$[(\mu_1 - \lambda_1)x_1 + (\mu_2 - \lambda_2)x_2 + \ldots + (\mu_{2n} - \lambda_{2n})x_{2n}]\int X\,dx.$$

Le rang de la fonction ω *sera de même abaissé à* $n - 1$ *par rapport à* y *si nous remplaçons* Y *par*

$$[(\lambda_1 - \mu_1)y_1 + (\lambda_2 - \mu_2)y_2 + \ldots + (\lambda_{2n} - \mu_{2n})y_{2n}]\int Y\,dy.$$

Le rang de la fonction ω *par rapport à* x *et à* y *ne pourra pas être inférieur de plus de deux par rapport à celui de* u, *car la transformation inverse ne peut pas l'élever de plus de deux.*

Les valeurs obtenues pour X_1 et Y_1 nous donneront la valeur u_1 de la fonction u. Nous calculerons ensuite z_1 au moyen de u_1 et nous pourrons former l'équation à laquelle satisfait la fonction ω, la valeur de la fonction λ étant obtenue au moyen de la formule

$$\lambda = \frac{\left[\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}{\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial x}\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{z_1}\right)}{\partial y}}.$$

Nous pourrons donc transformer les intégrales et les équations et ramener les intégrales à être des solutions de la plus simple des équations. Il s'ensuit donc que *la transformation de M. Goursat permet d'obtenir toutes les équations de Laplace correspondant à des suites comprenant un nombre pair d'équations et leurs intégrales en partant de l'équation simple* (47)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Nous appliquerons les résultats précédents à des exemples.

29. Nous considérerons l'équation (47)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$u = X,$$

X étant une fonction arbitraire de x.

Une solution particulière de l'équation est

$$u_1 = X_1,$$

X_1 étant une fonction particulière quelconque de x.

Nous aurons

$$f(u) = u, \qquad g(u) = -u', \qquad B(u, v) = uv,$$
$$f_1(u) = 0.$$

Nous avons vu que l'équation (47) correspond au cas où la fonction λ de l'équation (1) et de l'équation correspondante (3) est nulle. La fonction u, ainsi que nous l'avons vu, est donnée par la première des formules (50), où la variable y est considérée comme étant constante. La fonction z est donnée par la première des formules (2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u^2.$$

La valeur particulière z_1 de la fonction z, correspondant à la valeur particulière u_1 de u, peut être représentée par la formule

$$z_1 = \int X_1^2\, dx - Y_1,$$

la fonction Y_1 étant une fonction arbitraire de y.

Nous avons donc pour ω, en remplaçant dans la formule (78) les fonctions par leur valeur, et en remplaçant la constante d'intégration par Y, Y étant une fonction arbitraire de y,

$$\omega = X - \frac{X_1}{\int X_1^2\,dx - Y_1}\left(X_1 X - \int X_1' X\,dx + Y\right).$$

Une réduction facile nous donne

$$\omega = X - \frac{X_1}{\int X_1^2\,dx - Y_1}\left(\int X_1 X'\,dx + Y\right).$$

La fonction ω s'exprimera sans intégrales si l'on remplace X_1 par $\sqrt{X_1'}$ et X' par $\frac{X'}{\sqrt{X_1'}}\cdot$ La formule devient

$$\omega = \frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}X - \frac{1}{\sqrt{X_1'}}X' - \frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}Y.$$

Nous retrouvons la formule (29) donnant l'intégrale de l'équation générale correspondant à une suite de deux équations.

30. Nous appliquerons la formule (82) à l'intégrale que nous avons obtenue. L'intégrale peut s'écrire

$$u = \frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}X - \frac{1}{\sqrt{X_1'}}X' - \frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}Y.$$

L'équation à laquelle elle satisfait est, d'après la formule (28),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{X_1' Y_1'}{(X_1 - Y_1)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{X_1' Y_1'}{(X_1 - Y_1)^2}u = 0.$$

Nous avons donc

$$f(u) = \frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}u - \frac{1}{\sqrt{X_1'}}u,$$

$$f_1(u) = -\frac{\sqrt{X_1'}}{X_1 - Y_1}u,$$

$$\lambda = -\frac{X_1' Y_1'}{(X_1 - Y_1)^2}\cdot$$

Nous en déduisons

$$g(u) = \left(\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1 - Y_1} - \frac{X''_1}{2X'_1\sqrt{X'_1}}\right)u + \frac{1}{\sqrt{X'_1}}u',$$

$$\varphi(u) = g[f(u)] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u'}{X'_1}\right),$$

$$B(u, v) = -\frac{uv}{\sqrt{X'_1}},$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f_1(u)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{X'_1}}u + \frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{X'_1}\,Y'_1}u',$$

$$g_1(u) = \left[\frac{2}{\sqrt{X'_1}} + \frac{(X_1 - Y_1)\,Y''_1}{\sqrt{X'_1}\,Y'^2_1}\right]u - \frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{X'_1}\,Y'_1}u'.$$

$$\varphi_1(u) = g_1\left[\frac{\partial f_1(u)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u'}{Y'_1}\right),$$

$$B_1(u; v) = \frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{X'_1}\,Y'_1}uv.$$

Nous montrerons d'abord que l'on peut abaisser le rang trois de l'intégrale u à un, de manière que cette intégrale devienne une solution de l'équation (47)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Nous devons chercher des solutions des équations

$$\varphi(X_2) = 0,$$
$$\varphi_1(Y_2) = 0.$$

Prenons

$$X_2 = X_1,$$
$$Y_2 = Y_1.$$

La substitution de $X_1\int X\,dx$ et $Y_1\int X\,dx$ à X et Y dans l'intégrale u nous donne

$$u = -\frac{X_1 X}{\sqrt{X'_1}}.$$

Nous obtenons une solution de l'équation (47) et nous voyons que l'on peut bien ramener toutes les intégrales des équations (3) à satisfaire à cette équation.

La formule (82) donne, si l'on remplace les fonctions par leurs valeurs,

$$\omega = -\frac{u_1}{z_1}(X+Y)$$
$$-\left[\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1-Y_1}+\frac{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)''}{\sqrt{X'_1}\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'}+\left(\frac{X_2-Y_2}{X_1-Y_1}-\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)\frac{u_1}{z_1}\right]\frac{1}{\left(\frac{X'_2}{X'_1}\right)'}X'$$
$$+\frac{1}{\sqrt{X'_1}\left(\frac{X'_1}{X'_2}\right)'}X''-\left[\frac{\sqrt{X'_1}}{X_1-Y_1}+\left(\frac{X_2-Y_2}{X_1-Y_1}-\frac{Y'_2}{Y_1}\right)\frac{u_1}{z_1}\right]\frac{1}{\left(\frac{Y'_2}{Y'_1}\right)'}Y',$$
$$\frac{u_1}{z_1} = -\frac{(X_2-Y_2)X'_1-(X_1-Y_1)X'_2}{\sqrt{X'_1}\left[(X_2-Y_2)^2-(X_1-Y_1)\left(\int\frac{1}{X'_1}X'^2_2\,dx-\int\frac{1}{Y'_1}Y'^2_2\,dy\right)\right]}.$$

Nous retrouvons la formule (55) en remplaçant X par — X.

31. Nous allons vérifier sur un exemple que la transformation de M. Goursat permet d'abaisser le rang de l'intégrale d'une équation (3).

Nous considérons l'équation que nous avons déjà rencontrée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{4}{(x-y)^2}u = 0.$$

Une intégrale de cette équation est

$$u = -\frac{6(X-Y)}{(x-y)^2}+\frac{2(2X'+Y')}{x-y}-X''.$$

Nous avons

$$f(u) = -\frac{6}{x-y}u+\frac{4}{x-y}u'-u'',$$
$$g(u) = -\frac{2}{(x-y)^2}u-\frac{4}{x-y}u'-u'',$$
$$\varphi(u) = g[f(u)] = u^{(\text{IV})},$$
$$B(u, v) = \frac{4}{x-y}uv-u'v+uv',$$
$$f_1(u) = \frac{6}{(x-y)^2}u+\frac{2}{x-y}u',$$
$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f_1(u)}{\partial y} = -\frac{3}{x-y}u-2u'-\frac{1}{2}(x-y)u'',$$
$$\varphi_1(u) = g_1\left[\frac{\partial f_1(u)}{\partial y}\right] = -u^{(\text{IV})},$$
$$B_1(u, v) = -\frac{1}{2}[5uv+(x-y)(u'v-uv')].$$

Pour appliquer la formule (78) et abaisser le rang de l'intégrale u par rapport à x et à y, il nous faut calculer une valeur particulière u_1 de u en prenant pour X et Y des valeurs qui satisfont aux équations $\varphi(X) = 0$ et $\varphi_1(Y) = 0$, mais qui n'annulent pas u. Nous prendrons

$$X = x, \qquad Y = 1.$$

Nous obtenons pour u la valeur particulière

$$u_1 = -2\frac{x + 2y - 3}{(x - y)^2}.$$

La formule (4) nous donne ensuite

$$z_1 = -4\frac{x^2 + xy + y^2 - 3(x + y - 1)}{(x - y)^3}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{u_1}{z_1} = \frac{(x + 2y - 3)(x - y)}{2[x^2 + xy + y^2 - 3(x + y - 1)]}.$$

Nous remplacerons X et Y par

$$(x - 1)\int X\,dx,$$

$$(1 - y)\int Y\,dy.$$

Les termes qui contiennent les intégrales disparaissent. Nous obtenons l'intégrale de rang trois

$$\omega = \frac{(x - 1)^3 + 2(y - 1)^3}{(x - y)[x^2 + xy + y^2 - 3(x + y - 1)]} X - (x - 1)X'$$
$$+ \frac{3(xy - x - y + 1)(y - 1)}{(x - y)[x^2 + xy + y^2 - 3(x + y - 1)]} Y.$$

Des simplifications faciles donnent pour cette intégrale la valeur

$$\omega = \frac{(x - 1)^3 + 2(y - 1)^3}{(x - 1)^3 - (y - 1)^3} X - (x - 1)X' + \frac{3(x - 1)(y - 1)^2}{(x - 1)^3 - (y - 1)^3} Y.$$

L'équation à laquelle satisfait la fonction ω s'obtient en calculant λ par la formule (57). La valeur de λ est

$$\lambda = -\frac{9(x - 1)^2(y - 1)^2}{[(x - 1)^3 - (y - 1)^3]^2}.$$

Nous retrouvons la même valeur pour λ si l'on pose dans la formule (53), donnant les équations correspondant à une suite de deux équations,

$$X_1 = (x-1)^3,$$
$$Y_1 = (y-1)^3.$$

La formule (52) donnant l'intégrale de l'équation (53) nous donne, si l'on remplace les fonctions X_1 et Y_1 par ces valeurs,

$$\omega = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{(x-1)^3-(y-1)^3}X - \frac{1}{(x-1)\sqrt{3}}X' - \frac{(x-1)\sqrt{3}}{(x-1)^3-(y-1)^3}Y$$

Nous retrouvons la valeur de ω que nous avons obtenue si nous remplaçons dans cette formule X et Y par $\sqrt{3}(x-1)^2X$ et $-\sqrt{3}(y-1)^2Y$. Les résultats que nous avons obtenus sont donc bien exacts.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 janvier 1925,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 17 janvier 1925,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

PAUL APPELL.