HENRI MINEUR

Sur la théorie analytique des groupes continus finis

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1924

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1924__49__1_0>

N° D'ORDRE :
1816

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR HENRI MINEUR

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Français de Dusseldorf.

1re THÈSE. — SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE DES GROUPES CONTINUS FINIS.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le devant la Commission d'Examen.

MM. E PICARD, *Président.*
GOURSAT,
ANDOYER, *Examinateurs.*
CARTAN,

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1924

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

73582-24 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

A MES PARENTS

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA

THÉORIE ANALYTIQUE DES GROUPES

CONTINUS FINIS

INTRODUCTION.

La théorie des groupes continus finis a été fondée par S. Lie, et depuis de nombreux géomètres en ont développé les bases et les applications. Dans toutes ces recherches, on définit un groupe continu G par des transformations infinitésimales

$$X_i f = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

dont on suppose les coefficients ξ_{ki} holomorphes dans le voisinage d'un point; on définit les transformations de G dans le voisinage de ce point en se bornant à l'étude des transformations voisines de la transformation identique. Lorsqu'on étudie la similitude entre deux groupes g et G, on se contente d'établir qu'il existe une transformation f holomorphe, ainsi que f^{-1}, dans le voisinage du point considéré et telle que

$$fgf^{-1} = G.$$

Dans ce travail, nous nous sommes proposé d'étudier les groupes continus G, sans nous restreindre ni à la considération des transformations de G voisines de la transformation identique, ni à l'étude des transformations de G et de la transformation f dans le voisinage d'un point. Ce travail se compose de trois Parties :

Dans la première Partie, nous supposons les ξ_{kl} algébriques et le groupe g birationnel; nous faisons en outre une hypothèse sur la structure de g. Au groupe G correspond un groupe (g') birationnel, comprenant une infinité discontinue de transformations. Si (g') est discontinu au sens de H. Poincaré, la transformation f est uniforme, ainsi que les transformations de G qui correspondent biuniformément à celles de g. Dans le cas contraire, G contient un sous-groupe singulier (G) composé d'une infinité discontinue de transformations.

Dans la deuxième Partie, nous étudions une structure particulière de groupe qui nous conduit à considérer des transcendantes uniformes appelées « ultrakleinéennes ». Nous étudions également G sur sa multiplicité invariante; cette dernière théorie, qui complète dans un autre sens celle de la similitude des groupes, peut s'étendre à des structures plus générales que celles que nous avons envisagées.

Dans la dernière Partie, en partant de fonctions kleinéennes, nous avons défini des fonctions ultrakleinéennes et des groupes G pour lesquels les ξ_{kl} sont algébriques. L'étude de ces groupes, dont on ne peut former les équations finies et qui se ramène à l'étude d'un groupe kleinéen, termine ce travail.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Propriétés des solutions de certaines équations fonctionnelles algébriques.

1. Exposons d'abord quelques résultats qui servent de guide dans nos recherches.

Soient $f(x)$ une fonction méromorphe et x une valeur particulière quelconque de la variable, en général l'équation

$$f(x') = f(x),$$

où x' est l'inconnue, a une infinité de racines qui sont des fonctions analytiques de x. Cette équation définit donc une infinité de transformations qui constituent ce que nous appellerons le groupe de la fonction f. Cette définition s'étend sans difficulté à un système de n fonctions de n variables.

Nous dirons qu'une relation entre deux variables y_1, y_2 est algébroïde, si à une valeur de y_1 correspondent au plus un nombre fini N de valeurs de y_2 et réciproquement. N est dit le degré de la relation considérée par rapport à y_2.

Théorème I. — *Si deux fonctions méromorphes $f(x)$ et $g(x)$ sont liées par une relation algébroïde, $f(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsqu'on y effectue toutes les substitutions du groupe de g.* Ce nombre est au plus égal au degré de la relation considérée par rapport à f.

Théorème II. — *Soient $f(x)$ une fonction méromorphe et $x' = \psi(x, a)$ les équations d'un groupe continu g de transformations birationnelles à un paramètre. S'il existe, quel que soit x, une relation algébroïde de degré maximum* N *entre $f(x)$ et $f[\psi[x, a]]$ et si l'on considère* $N+1$ *transformations $h_1, h_2, \ldots, h_{N+1}$ du groupe de f, deux de ces* $N+1$ *transformations h_p et h_q sont telles que $h_p h_q^{-1}$ est permutable avec toutes les transformations de g.*

Les fonctions

$$f(x) \quad \text{et} \quad f[\psi[x, a]]$$

étant liées par une relation algébroïde de degré N par rapport à $f(\psi)$, en vertu du théorème I, deux au moins des $N+1$ quantités

$$f[\psi[h_m(x), a]] \qquad (m = 1, 2, \ldots, N+1)$$

sont égales :

$$f[\psi[h_p(x), a]] = f[\psi[h_q(x), a]],$$

ou, en posant $h(x) = h_p[h_q^{-1}(x)]$,

$$f[\psi[h(x), a]] = f[\psi(x, a)].$$

Il existe donc une substitution $h'(x)$ du groupe de f telle que

$$\psi[h(x), a] = h'[\psi[x, a]].$$

Les substitutions h et h' dépendent de a; mais comme les substitutions h' forment un ensemble dénombrable, pour une infinité de valeurs de a voisines d'une valeur quelconque α, h et h' sont les mêmes. Prenons pour α la valeur du paramètre a qui correspond à la transformation identique, et choisissons pour x une valeur telle que h et h' soient holomorphes dans son voisinage; la fonction

$$\psi[h(x), a] - h'[\psi[x, a]]$$

holomorphe par rapport à x et à a, est nulle pour une infinité de valeurs de a voisines de α; elle est donc identiquement nulle et pour a voisin de α, on a

$$\psi[h(x), a] = h'[\psi[x, a]].$$

Faisons dans cette équation $a = \alpha$, il reste

$$h(x) = h'(x);$$

par suite,

$$\psi[h(x), a] = h[\psi[x, a]],$$

quel que soit a; $h(x) = h_p h_q^{-1}$ est donc permutable avec toutes les transformations de g.

Une conséquence de ce théorème est la proposition suivante déjà connue : Une fonction méromorphe qui admet un théorème d'addition algébrique est soit une fonction rationnelle, soit une fonction rationnelle de e^{Kz}, soit une fonction elliptique.

Ces deux théorèmes s'étendent sans difficulté à un système de n fonctions de n variables.

II. — Indication d'un procédé de définition de certaines transcendantes.

2. Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions méromorphes liées par une relation algébrique

$$F[f_1(x), f_2(x)] = 0.$$

Nous appellerons groupe du système (f_1, f_2) l'ensemble des transformations communes aux groupes de f_1 et de f_2. Soient de même $n+1$ fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liées par une relation algébrique

$$F[f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n)] = 0$$

Le groupe de ce système est formé des transformations (x, x') définies par

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Nous dirons que deux systèmes

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) \quad \text{et} \quad (g_1, g_2, \ldots, g_{n+1})$$

sont liés par une relation algébroïde si chacune des fonctions de l'un des systèmes est une fonction algébroïde des fonctions de l'autre. Par extension, nous appellerons degré de cette relation par rapport à (f) le nombre des systèmes (f) qui correspondent à un système (g) donné.

Symboliquement, on peut écrire un tel système sous la forme $y = f(x)$; f est en définitive le symbole d'une correspondance entre les systèmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les points de la surface algébrique

$$F[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}] = 0.$$

Grâce à l'emploi de cette forme symbolique, il est facile de voir que les démonstrations des théorèmes I et II s'étendent aux systèmes de $n+1$ fonctions de n variables. En particulier, considérons le cas où dans l'énoncé du théorème II, N égale 1. Les relations algébroïdes considérées sont alors uniformes. Soit h une substitution du groupe de f; si nous lui associons la transformation identique qui fait aussi partie de ce groupe, nous avons ainsi $N+1$ substitutions du groupe de f et, en appliquant le théorème II, nous voyons que h est permutable avec toutes les transformations de g.

3. Il existe, comme on sait, trois procédés principaux de définition communs à l'exponentielle et aux fonctions elliptiques; seuls deux d'entre eux permettent de définir les fonctions fuschiennes et kleinéennes comme le montre le Tableau ci-dessous :

EXPONENTIELLE.	FONCTIONS ELLIPTIQUES.	FONCTIONS KLEINÉENNES.
Série e^x.	Séries $\wp(u)$, $\zeta(u)$.	Séries thétakleinéennes.
Équation différentielle $y' = y$.	Inversion de l'intégrale elliptique de première espèce.	Inversion du quotient de deux intégrales d'une équation linéaire
Équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$.	Théorème d'addition algébrique.	

Nous nous proposons dans ce travail de combler le vide que présente ce Tableau; d'une façon plus précise, au moyen d'équations fonctionnelles analogues à celles du théorème d'addition des fonctions elliptiques, nous définirons des systèmes de transcendantes dont le groupe est formé de transformations birationnelles d'une nature donnée à l'avance. A titre d'exemple, cherchons les systèmes de quatre fonctions de trois variables x_1, x_2, x_3 dont le groupe est formé de transformations de la forme

$$g'. \qquad x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\gamma x_2 + \delta}, \qquad x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}, \qquad x_3' = \frac{\gamma x_1 + \delta x_3}{\gamma x_2 + \delta}.$$

Il suffit pour cela de remarquer que ces transformations sont permutables avec celles du groupe

$$g. \qquad x_1' = \frac{a x_1 + b x_2}{c x_3 + d}, \qquad x_2' = \frac{c x_1 + d x_2}{c x_3 + d}, \qquad x_3' = \frac{a x_3 + b}{c x_2 + d}.$$

Si donc on connaît un système de quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 de trois variables liées par une relation algébrique et telles que les quantités

$$f_i\left(\frac{a x_1 + b x_2}{c x_3 + d}, \frac{c x_1 + d x_2}{c x_3 + d}, \frac{a x_3 + b}{c x_3 + d}\right)$$

soient des fonctions uniformes des $f_i(x_1, x_2, x_3)$, ce système se répétera par des transformations du groupe g'. Si dans $f_i(x_1, x_2, x_3)$ par exemple, on fait $x_1 = x_3 = 0$, on obtient une fonction kleinéenne de x_2, car pour $x_1 = x_3 = 0$ une substitution du groupe g' se réduit à

$$x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}.$$

4. Considérons pour simplifier un système de deux fonctions d'une variable f_1, f_2 liées par la relation algébrique $F(f_1, f_2) = 0$ et un groupe g continu à un paramètre : $x' = \psi(x, a)$. Supposons que $f_1(x')$ et $f_2(x')$ soient des fonctions uniformes de $f_1(x)$ et $f_2(x)$:

$$f_1(x') = R_1[f_1(x), f_2(x)],$$
$$f_2(x') = R_2[f_1(x), f_2(x)],$$

Les transformations ainsi définies

$$X'_1 = R_1[X_1, X_2],$$
$$X'_2 = R_2[X_1, X_2]$$

forment un groupe G, conservent la courbe algébrique $F(X_1, X_2) = 0$ et sont uniformes sur cette courbe. Les groupes g et G sont donc semblables et les fonctions $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ peuvent être considérées comme définissant une transformation f telle que

$$(1) \qquad fgf^{-1} = G.$$

D'après la théorie de Lie, réciproquement, si g et G sont deux groupes continus semblables, il existe une infinité de transformations f vérifiant l'équation (1). Dans ce travail nous ferons donc l'étude de la similitude des groupes continus de transformations et des transformations f correspondantes. Nous montrerons dans quels cas les fonctions ainsi définies sont uniformes et nous retrouverons sous une forme plus précise le groupe de ces fonctions.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $fgf^{-1} = G$.

I. — Simplification du problème.

1. Soient g et G deux groupes continus finis et semblables. Dans l'étude des transformations f définies par l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad fgf^{-1} = G,$$

nous nous limiterons au cas où la solution f de (1) dépend de constantes arbitraires. D'après S. Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XIX), il faut et il suffit pour cela que les groupes g et G soient transitifs. Soit g' le groupe continu fini des transformations permutables avec toutes celles de g. Ainsi que nous l'avons démontré dans les préliminaires, le groupe d'une solution de l'équation (1) est un sous-groupe de g'. Le nombre de paramètres dont dépend g' est maximum lorsque g et G sont simplement transitifs. C'est ce cas que nous considérerons désormais.

Supposons donc g et G simplement transitifs et isomorphes; il en résulte qu'ils sont semblables. Précisons la signification de l'équation (1). Soient : s le nombre de paramètres de g, X_1, X_2, ..., X_s, s transformations infinitésimales indépendantes de g et Y_1, Y_2, ..., Y_s, s transformations de G liées par les mêmes relations de structure que les transformations correspondantes de g. L'équation symbolique (1) signifie que la transformation f fait correspondre X_i à Y_i. Il pourrait arriver que G admette s autres transformations infinitésimales Y'_1, Y'_2, ..., Y'_s liées par les mêmes relations de structure que X_1, X_2, ..., X_s; on ne considérera pas comme solution de (1) une transformation qui fait correspondre les X_i et les Y'_i.

2. *Relation entre les solutions de deux équations fonctionnelles.* — Soit g_1 un groupe semblable à g; considérons les équations analogues à (1),

$$\tau g \tau^{-1} = g, \tag{2}$$

$$\tau' g_1 \tau'^{-1} = \mathrm{G}. \tag{3}$$

Soient T, τ et τ' des solutions particulières respectives de (1), (2) et (3). De ces équations, on déduit

$$g_1 \tau^{-1} f^{-1} \tau' = \tau^{-1} f^{-1} \tau' g_1.$$

La transformation $f' = \tau^{-1} f^{-1} \tau'$ est donc permutable avec toutes les transformations de g_1; f' est donc une solution de

$$f' g_1 f'^{-1} = g_1. \tag{4}$$

Réciproquement si f', τ et τ' sont des solutions respectives de (4), (2) et (3), $f = \tau f' \tau'^{-1}$ est solution de (1).

L'étude des solutions de (1), où g et G sont des groupes de structure donnée, est donc ramenée à celle des équations de la forme

$$\tau g_1 \tau^{-1} = \mathrm{G},$$

où g_1 est un groupe possédant la structure donnée, choisi une fois pour toutes et G un groupe quelconque isomorphe à g_1.

On peut tirer des considérations précédentes une autre conséquence intéressante : si f est une solution particulière de l'équation (1), toute autre solution f' de cette même équation sera de la forme

$$f' = f\tau,$$

τ étant une transformation permutable avec toutes les transformations de g. Il suffit donc d'étudier une seule solution de l'équation (1).

3. *Nature des transformations de g.* — Nous prendrons pour g un groupe de transformations birationnelles; les transcendantes solutions de l'équation (1) admettront pour groupe un sous-groupe de g'. Comme notre but est de former des transcendantes dont le groupe se compose de transformations birationnelles, il faut chercher dans quel cas il en est ainsi pour g'.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe simplement transitif g et son groupe permutable g' se composent de transformations birationnelles est que g dépende birationnellement de ses paramètres par un choix convenable de ceux-ci.*

1° *La condition est suffisante.* — Soient en effet $x' = \psi(x, a)$ les équations de g, x_1 un point fixe et $x_2 = \mathrm{T}x_1$ son transformé par T; on a, quel que soit a,

$$\mathrm{T}[\psi(x_1, a)] = \psi[\mathrm{T}(x), a] = \psi(x_2, a).$$

Soit x' un point quelconque, comme g est simplement transitif et dépend birationnellement de ses paramètres a, il existe en général un système a et un seul tel que $x' = \psi(x_1, a)$. Le transformé x'' de x' par T sera

$$x'' = \mathrm{T}x' = \mathrm{T}[\psi(x_1, a)] = \psi(x_2, a).$$

On obtient l'équation $x'' = \mathrm{T}x'$ d'une transformation de g' en éliminant a entre les équations $x'' = \psi(x_2, a)$, $x' = \psi(x, a)$. T est donc birationnelle.

2° *Réciproquement*, supposons g et g' birationnels. Prenons pour paramètres définissant une transformation T de g les coordonnées du point A transformé d'un point fixe O par T ; soient M un point quelconque, M' son transformé par T, je dis que M' est une fonction birationnelle de A et de M. Soit $\mathfrak{r}$ une transformation de g, telle que $\mathrm{M} = \mathfrak{r}\mathrm{O}$ ($\mathfrak{r}$ existe puisque g' est simplement transitif) et soit

$$\mathrm{M}'_1 = \mathfrak{r}\mathrm{A},$$

on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{TO};$$

donc

$$\mathrm{M}'_1 = \mathfrak{r}\mathrm{TO} = \mathrm{T}\mathfrak{r}\mathrm{O} = \mathrm{TM} = \mathrm{M}';$$

donc $\mathrm{M}' = \mathfrak{r}\mathrm{A}$, $\mathfrak{r}$ étant birationnel. La proposition énoncée est démontrée. Nous prendrons désormais pour g un groupe birationnel dépendant birationnellement de ses paramètres.

II. — Réduction d'un groupe continu de transformations birationnelles.

4. *Le théorème de M. Enriques.* — Avant d'aborder l'étude de l'équation (1), cherchons les singularités d'un groupe continu de transformations birationnelles. Reprenons la démonstration d'un théorème de M. Enriques (1) qui doit nous être utile par la suite et d'après lequel un groupe de transformations birationnelles g à s variables se ramène simplement à un groupe continu de transformations homographiques.

Considérons une famille G de multiplicités algébriques à $s - 1$ dimensions : $\mathrm{G}(x_1, x_2, \ldots, x_s; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0$.

---

(1) *Sui gruppi continui di transformazioni cremoniane nel piano* (*Atti della reale Accademia dei Lincei*, 1893, p. 468).

Transformons-les par toutes les transformations de g, nous obtenons une nouvelle famille F qui dépend de paramètres arbitraires. Soit F′ le plus petit système linéaire de multiplicité à $s-1$ dimensions qui contient F, je dis que F′ est invariant par g :

Si cela n'était pas, le système linéaire F″ transformé de F′ par g contiendrait F et serait différent de F′ ; le système commun à F′ et F″ serait linéaire, contiendrait F et serait plus petit que F′ et F″, c'est-à-dire dépendrait d'un nombre plus petit de paramètres, ce qui est contraire à l'hypothèse. Soit donc

$$\lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, r_s) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots, x_s) + \ldots + \lambda_p g_p(x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0$$

le système F′ invariant par g. Posons

$$\begin{aligned} u_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_s), \\ u_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_s), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p &= g_p(x_1, x_2, \ldots, x_s). \end{aligned}$$

Considérons $u_1, u_2, \ldots, u_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace E_1 à $p-1$ dimensions. Nous obtenons dans l'espace E_1 une multiplicité P à s dimensions dont les coordonnées s'expriment rationnellement au moyen des paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Le groupe g définit sur P un groupe de transformations birationnelles qui conserve la famille des sections planes de P d'équation

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = 0.$$

Les équations de g sont donc celles d'un ensemble de transformations linéaires homogènes si l'on prend comme variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Considérons ces transformations comme appliquées à l'espace E_1 tout entier; elles forment un groupe sur la multiplicité P, mais comme elles sont linéaires homogènes, et comme $s+1$ quelconques des variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendantes sur P, les identités entre les coefficients de ces transformations qui expriment qu'elles forment un groupe sur P expriment aussi qu'elles forment un groupe dans tout l'espace E_1. Elles constituent donc un groupe continu g_1 de transformations homographiques de E_1, laissant P invariant et se réduisant sur P au groupe g à condition de prendre comme variables $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

En résumé : *Étant donné un groupe continu g de transformations birationnelles de l'espace* $E(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ *il existe un groupe continu de transformations homographiques de l'espace* $\frac{u_1}{u_p}, \frac{u_2}{u_p}, \ldots, \frac{u_{p-1}}{u_p}$ *conservant une multiplicité rationnelle* P·

$$u_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et se réduisant à g sur P *à condition de prendre pour variables* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (¹).

5. *Singularités d'un groupe de transformations birationnelles.* — La correspondance entre les points de l'espace $E(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ et de P ainsi définie n'est pas nécessairement biuniforme. Considérons, par exemple, le groupe de l'espace à trois dimensions :

$$x' = \frac{cy + dzx}{c + dz},$$

$$y' = \frac{ay + bzx}{a + bz},$$

$$z' = \frac{c + dz}{a + bz}.$$

L'équation de la famille F' sera de la forme

$$F(y, z, zx, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0,$$

F étant un polynome entier, et les u_i seront de la forme

$$u_i = g_i(y, z, zx),$$

les g_i étant des polynomes. On peut supposer que les g_i ne s'annulent pas tous lorsque z est nul ; si cette circonstance se présentait, on pourrait mettre en facteur commun dans tous les g_i une certaine puis-

---

(¹) Cette démonstration ne peut pas s'étendre aux groupes continus de transformations birationnelles d'une multiplicité algébrique $\mathfrak{M}$ en elle-même, si les transformations cessent d'être birationnelles hors de la multiplicité $\mathfrak{M}$; on ne peut affirmer en effet qu'une famille de multiplicités algébriques tracées sur $\mathfrak{M}$ soit contenue dans un système linéaire. On peut, du reste, en utilisant cette remarque, établir que les surfaces hyperelliptiques sont irrégulières.

sance de z et supprimer partout ce facteur puisque ceux-ci représentent des coordonnées homogènes. Quelle que soit la famille initiale G choisie, à la multiplicité à deux dimensions $z=0$ de l'espace x, y, z correspond sur P la courbe à une dimension $u_i = g_i(y, 0, 0)$. La correspondance entre P et l'espace x, y, z ne peut donc être biuniforme pour $z=0$.

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_s$ sont des fonctions rationnelles de u_1, $u_2, \ldots, u_p$, ces variables représentant les coordonnées homogènes d'un point de P. Les points singuliers pour le groupe g seront les points d'indétermination des fonctions $u(x)$ et ceux des fonctions $x(u)$.

6. *Application à l'équation* (1). — Dans l'étude de l'équation fonctionnelle

$$fgf^{-1} = G, \tag{1}$$

au lieu de considérer la transformation f comme appliquée au point $x_1, x_2, \ldots, x_s$ de l'espace E, nous la considérerons comme appliquée au point correspondant de P. Soit A un point de P, deux cas peuvent se présenter : 1° dans le voisinage de A les coordonnées d'un point de P sont des fonctions de s paramètres $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ holomorphes pour $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \ldots, \bar{x}_s = 0$, et telles que la correspondance entre les points de P et les points de l'espace $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ soit biuniforme dans le voisinage de A et de $\bar{x}_i = 0$. Désignons respectivement par $\bar{g}$ et $\bar{f}$ le groupe g et la transformation f exprimés au moyen des $\bar{x}$, $\bar{f}$ vérifie

$$\bar{f}\bar{g}\bar{f}^{-1} = G, \tag{1'}$$

Il suffit donc d'étudier les solutions de (1′) dans le voisinage de $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \ldots, \bar{x}_s = 0$, (1′) a la même forme que (1), mais il est facile de voir que les coefficients des transformations infinitésimales de $\bar{g}$ sont holomorphes dans le voisinage de $\bar{x}_i = 0$. En effet, une transformation infinitésimale de $\bar{g}$ est de la forme

$$Xf = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \mu_{ik} u_i \frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{p} \nu_i u_i \sum_{k=1}^{p} u_k \frac{\partial f}{\partial u_k}.$$

Or les u_i sont des fonctions holomorphes des $\bar{x}$; il en est donc de même des coefficients de la transformation Xf exprimée au moyen des $\bar{x}$.

2° A est un point singulier de P : soient $u_i = 0$ les coordonnées de ce point et

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_{n_1} = 0, \quad F_{n_1+1} = 0, \quad \ldots, \quad F_{n_2} = 0, \quad \ldots, \quad F_{n_h} = 0$$

les équations de P dans le voisinage de ce point; supposons que les développements de $F_{n_i+1}, F_{n_i+2}, \ldots, F_{n_{i+1}}$ commencent par des termes de degré i en $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et que le système obtenu en égalant à zéro les termes de moindre degré de $F_1, F_2, \ldots, F_{n_h}$ ne se réduit pas à un système de moins de $p - s$ équations. Les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_h$ caractérisent la singularité de P en A. Soit A′ le transformé de A par une transformation quelconque t de g; en prenant en A′ des coordonnées convenables $v_1, v_2, \ldots, v_p$, on peut faire en sorte que t ait pour équation $v'_i = u_i$ et, comme t est homographique, ce changement de coordonnées est biuniforme. Les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_h$ sont donc les mêmes en A et A′.

Si A est un point singulier isolé des points singuliers de même espèce, A est invariant par t.

Si A fait partie d'une ligne L deux points singuliers de même espèce, cette ligne L est invariante par t. Ainsi les points singuliers de P font partie de multiplicités tracées sur P invariantes par g; ces multiplicités seront, dans chaque cas, l'objet d'une étude spéciale.

En résumé : dans l'étude des solutions f de l'équation (1), on peut toujours supposer que dans le voisinage de tout point de P qui ne fait partie d'aucune multiplicité de P invariante par g, les coefficients des transformations infinitésimales de g sont des fonctions holomorphes des paramètres qui fixent la position d'un point de P, quitte à multiplier ensuite f par une transformation $\bar{x} = U(x)$ dans laquelle les $\bar{x}$ se comportent comme des fonctions rationnelles des x.

Nous avons supposé implicitement que le point considéré de P était à distance finie; dans le cas contraire, on le ramène à distance finie par une homographie.

III. — Étude d'une solution de l'équation (1).

7. *Énoncé des hypothèses.* — Faisons sur les groupes g et G les hypothèses suivantes :

I. g est un groupe continu de transformations birationnelles de l'espace $E(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, défini par s transformations infinitésimales indépendantes

$$X_i f = \sum_{k=1}^{s} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

g dépend birationnellement de ses paramètres par un choix convenable de ceux-ci. Soit δ le déterminant des coefficients ξ_{ki}, δ n'est pas identiquement nul. Enfin les X_i sont liés par les relations de structure

$$(X_i, X_k) = \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} X_h$$

et les c_{ikh} sont tels que le groupe g n'admet pas de transformation infinitésimale distinguée.

Définition. — Nous appellerons *transformation distinguée* d'un groupe une transformation finie permutable avec toutes les transformations de ce groupe. Nous supposerons que g ne contient pas de transformation distinguée autre que la transformation identique.

II. Soient

$$Y_i f = \sum_{k=1}^{s+1} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial y_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

s transformations infinitésimales dont les coefficients η_{ki} sont des fonctions rationnelles des variables $y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}$ liées par la relation algébrique

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}) = 0. \tag{5}$$

Cette relation (5) définit dans l'espace à $s+1$ dimensions une multiplicité algébrique $\mathfrak{M}$.

Les relations

$$Y_i F = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$(Y_i, Y_k) = \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} Y_h \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s)$$

sont des conséquences de la relation (5).

Il en résulte que les Y définissent un groupe continu G formé de transformations de la variété $\mathfrak{M}$ en elle-même.

Soit M_0 un point de $\mathfrak{M}$; si en ce point $\frac{\partial F}{\partial y_{s+1}}$ n'est pas nul, nous prendrons comme coordonnées d'un point M voisin de M_0 ses s premières coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_s$; la relation (5) définit y_{s+1} sans ambiguïté dans le voisinage de M_0.

$$\begin{aligned}\overline{Y}_i f &= \sum_{k=1}^{s} \eta_{ki}(y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+1}[y_1, \ldots, y_s]) \frac{\partial f}{\partial y_k} \\ &= \sum_{k=1}^{s} \overline{\eta}_{ki}(y_1, y_2, \ldots, y_s) \frac{\partial f}{\partial y_k};\end{aligned}$$

on vérifie sans peine que

$$(\overline{Y}_i, \overline{Y}_k) = \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} \overline{Y}_h.$$

Ces relations s'écrivent, en effet :

$$\sum_{l=1}^{s} \left[\overline{\eta}_{il} \frac{\partial \overline{\eta}_{km}}{\partial y_l} - \overline{\eta}_{kl} \frac{\partial \overline{\eta}_{im}}{\partial y_l} \right] = \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} \overline{\eta}_{hm}$$

mais

$$\frac{\partial \overline{\eta}_{km}}{\partial y_l} = \frac{\partial \eta_{km}}{\partial y_l} + \frac{\partial \eta_{km}}{\partial y_{s+1}} \frac{\partial y_{s+1}}{\partial y_l}$$

et la relation à vérifier devient

$$\sum_{l=1}^{s} \left[\frac{\partial \eta_{km}}{\partial y_l} - \eta_{kl} \frac{\partial \eta_{im}}{\partial y_l} \right] + \sum_{l=1}^{s} \left(\eta_{il} \frac{\partial y_{s+1}}{\partial y_l} \frac{\partial \eta_{km}}{\partial y_{s+1}} - \eta_{kl} \frac{\partial y_{s+1}}{\partial y_l} \frac{\partial \eta_{im}}{\partial y_{s+1}} \right) - \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} \eta_{hm} = 0.$$

D'après la relation $Y_i F = 0$, on a

$$\eta_{i\,s+1} = \sum_{l=1}^{s} \eta_{il} \frac{\partial y_{s+1}}{\partial y_l}$$

et, en tenant compte de (5) les relations considérées se réduisent aux, conditions

$$(Y_i, Y_k) = \sum_{h=1}^{s} c_{ikh} Y_h,$$

qui sont vérifiées par hypothèse. Les Y_i définissent donc dans le voisinage de M_0 un groupe continu G sur la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Si en M_0 tous les $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ sont nuls, on exprime les coordonnées d'un points M de $\mathfrak{M}$ voisin de M_0 au moyen de s paramètres $v_1, v_2, \ldots, v_s$, et l'on fait le même raisonnement que précédemment. Pour abréger l'écriture, nous supposerons que $\left(\frac{\partial F}{\partial y_{s+1}}\right)_0$ n'est pas nul.

Si en un point M_0 les $\overline{\eta}_{ki}$ sont des fonctions holomorphes de $y_1, \ldots, y_s$, et si le déterminant $\Delta = \|\overline{\eta}_{ki}\|$ n'est pas nul, nous dirons que M_0 est un point *régulier*. Si les $\overline{\eta}_{ki}$ sont holomorphes et si Δ est nul, nous dirons que M_0 appartient *à la multiplicité* Δ. Si les $\overline{\eta}_{ki}$ ne sont pas holomorphes, nous dirons que M_0 est un point *singulier*.

III. Enfin, nous ferons sur les $\overline{Y}_i$ l'hypothèse suivante : en certains points irréguliers $M_0(y_i^0)$ il existe une transformation algébrique :

$$y_i = u_i(z_1, z_2, \ldots z_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

telle que $y_i^0 = u_i\,(0, 0, \ldots, 0)$ et telle que si l'on exprime les $\overline{Y}_i$ au moyen des variables z :

$$\overline{\overline{Y}}_i f = \sum_{k=1}^{s} \overline{\overline{\eta}}_{ik}(z) \frac{\partial f}{\partial z_k}.$$

Les coefficients $\overline{\overline{\eta}}_{ik}$ des $\overline{\overline{Y}}$ sont des fonctions holomorphes des z dans le voisinage de $z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ \ldots,\ z_s = 0$; en un tel point M_0 nous désignerons par Δ le déterminant $\|\overline{\overline{\eta}}_{ik}\|$, s'il est nul nous dirons que M_0 appartient à Δ.

Les raisonnements que nous ferons s'appliquent du reste au cas plus général où les y_k sont des fonctions algébriques des z_i et des $e^{\frac{1}{z_i}}$. Pour abréger le langage, nous nous bornerons au cas où la transformation $y = u(z)$ est algébrique. Si, en outre, les fonctions $u(z)$ sont rationnelles, M_0 sera dit point singulier rationnel ; si elles sont birationnelles, M_0 sera dit point singulier birationnel.

Si en un point irrégulier, il n'est pas possible de trouver une transformation $y = u(z)$ vérifiant les conditions précédentes, nous dirons que ce point appartient à la *multiplicité* Δ_1.

Remarquons, pour terminer, que la vérification de ces hypothèses n'exige que des opérations rationnelles.

8. *Définition d'une solution dans le voisinage d'un point.* — Soit M_0 $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{s+1}^0)$ un point régulier de $\mathfrak{M}$ n'appartenant pas à Δ et m_0 $(x_1^0, \ldots, x_s^0)$ un point de E n'appartenant pas à δ. D'après la théorie de Lie on obtient une solution $y = f(x)$ de l'équation (1) $fgf^{-1} = G$ en égalant à zéro s intégrales indépendantes du système

$$(6) \qquad X_i\Phi + \overline{Y}_i\Phi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Ce système admet une solution et une seule $\Phi_h(x, y)$ holomorphe dans le voisinage des points m_0 et M_0 et se réduisant à $y_h - y_h^0$ pour $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Le système

$$(\text{II}) \qquad \Phi_h(x, y) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, s), \qquad F(y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}) = 0$$

définit pour $y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}$ des fonctions $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ holomorphes dans un domaine d_0 entourant m_0. Il définit de même pour $x_1, x_2, \ldots, x_s$ des fonctions d'un point de $\mathfrak{M}$:

$$x_i = f_i^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{s+1})$$

holomorphes dans un domaine D_0 de $\mathfrak{M}$ entourant M_0.

Exprimons les équations de G dans le voisinage de M_0 au moyen de ses paramètres canoniques $a_1, a_2, \ldots, a_s$:

$$y'_i = \psi_i(y, a) \qquad \text{ou} \qquad y' = T_a y.$$

Pour obtenir les ψ_i on forme l'intégrale du système

$$\frac{dy'_i}{dt} = \sum_1^s \lambda_k \bar{\eta}_{ki}(y') \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

vérifiant les conditions initiales $t = 0$, $y'_i = y_i$; cette intégrale $y'_i = \psi_i(y; a)$ ne dépend que de $a_1 = \lambda_1 t$, $a_2 = \lambda_2 t$, ..., $a_s = \lambda_s t$; si l'on y considère les y comme des variables, elle définit les transformations de G.

Soit D'_0 le domaine homothétique de D_0 par rapport à M_0 dans le rapport $\frac{1}{2}$; les ψ_i sont holomorphes lorsque y est dans D'_0 et lorsque $|a_i| < \rho$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Nous appellerons *transformation infiniment petite* de G dans D'_0, ou pour abréger en M_0 une transformation T_a correspondant à des valeurs des paramètres a vérifiant ces inégalités.

Soient de même $x'_i = \varphi_i(x; a)$ les équations de g exprimées au moyen des mêmes paramètres canoniques. δ n'étant pas nul en m_0, à une transformation infiniment petite de g correspond un seul système de valeurs des paramètres canoniques et de même pour G. Faisons correspondre entre elles les transformations de g et de G définies par les mêmes valeurs des paramètres canoniques. Il résulte de ce que nous venons de dire que la correspondance entre les transformations infiniment petites de g et G est *biunivoque*. Il est nécessaire de remarquer que ρ dépend du point M_0 considéré; la transformation f^{-1} est définie dans le domaine D_0; nous allons étudier maintenant son prolongement analytique sur la multiplicité $\mathfrak{M}$ tout entière.

Nous poserons dorénavant

$$x_k = x'_k + i x''_k, \qquad y_h = y'_h + i y''_h;$$

nous désignerons par E′ l'espace à $2s$ dimensions $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_s, x''_s$, et par $\mathfrak{M}'$ la multiplicité à $2s$ dimensions $y'_1, y''_1, \ldots, y'_{s+1}, y''_{s+1}$, les y étant liés par la relation (5).

9. *Étude du prolongement analytique de f^{-1} le long d'un chemin ne rencontrant pas Δ ou Δ_1.* — Soit C un chemin partant de M_0 tracé sur $\mathfrak{M}'$; cherchons le prolongement analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_s$

lorsque M suit C. Soit $M_1(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{s+1}^{(1)})$ un point de D'_0 situé sur C ; appliquons à M_1 toutes les transformations de G infiniment petites en M_1 ; nous obtenons ainsi un domaine D_1. Recommençons cette opération en remplaçant M_1 par un point M_2 de D_1 situé sur C et ainsi de suite ; nous obtiendrons au bout de n opérations un domaine D_n ; $D'_0, D_1, \ldots, D_n$ forment un domaine tubulaire entourant un arc de C.

THÉORÈME. — *Si* C *n'a aucun point commun avec les multiplicités* Δ *et* Δ_1, *un point arbitrairement donné de* C *finira par se trouver dans le domaine* D_n *pourvu que* n *soit suffisamment grand.*

Supposons d'abord que M soit à distance finie ainsi que la portion M_0M de C et que C ne passe par aucun point singulier de G.

A tout point $M(y)$ de C correspond un nombre positif $\rho(M)$ tel que les inégalités $|a_i| < \rho(M)$ définissent les transformations de G infiniment petites en M. L'ensemble des valeurs $\rho(M)$ correspondant à tous les points de C a un minimum ρ_0 non nul, sans quoi en un certain point M de C, $\rho(M)$ serait nul. Imaginons que dans la construction des domaines successifs, $D'_0, D_1, \ldots, D_n$ nous ne considérions comme infiniment petites que les transformations pour lesquelles $|a_i| < \rho_0$; nous aurons une autre succession de domaines $\overline{D}_0, \overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_p$, $\overline{D}_0$ sera intérieur à D'_0, D_1 sera intérieur à $D'_0\, D_1$, et ainsi de suite ; si donc un point de C se trouve dans un domaine $\overline{D}_p$ il sera *a fortiori* dans un domaine D_n. Grâce à cette nouvelle convention, si une transformation T_a de G est infiniment petite en un point de C, elle l'est également en tout point de C ainsi que la transformation inverse T_a^{-1} qui correspond aux valeurs $-a_1$, $-a_2, \ldots, -a_s$ des paramètres canoniques.

Soit donc M un point de C ; si quelque grand que soit n, D_n ne contenait pas M, il y aurait un point P sur l'arc M_0M possédant la même propriété, et tel que, quel que soit le point P' choisi sur l'arc M_0P, $\overline{D}_n$ finirait par contenir P' pour n assez grand. En ce point P, Δ n'est pas nul ; en appliquant à P une transformation infiniment petite convenablement choisie de G, nous aurions pour transformé de P un point P' de l'arc M_0 et P étant contenu dans $\overline{D}_n$ serait certainement dans $\overline{D}_{n+1}$.

Supposons maintenant que M soit à l'infini, il suffit de faire une transformation birationnelle convenable τ ramenant l'arc M_0M à distance finie, en appliquant la démonstration précédente à l'arc transformé de M_0M et au groupe $\tau G \tau^{-1}$, on démontre la proposition énoncée.

Admettons maintenant que C passe par un point singulier M'_0, soit D un petit domaine entourant ce point, nous remplacerons dans D $y_1, y_2, \ldots, y_s$ par les variables $z_1, z_2, \ldots, z_s$ définies au paragraphe **7** dans l'espace $z'_1, z''_1, \ldots, z'_s, z''_s$, C a pour homologue une courbe C′ passant par le point $O(z_i = 0, i = 1, 2, \ldots, s)$. Les coefficients des transformations infinitésimales de G exprimées au moyen des variables z sont holomorphes en ce point et leur déterminant n'est pas nul, on peut donc appliquer à une portion de C′ comprenant le point O le raisonnement précédent.

THÉORÈME. — *Les x_i sont des fonctions birationnelles des y_i dans le domaine D_n si D_n ne contient pas de point singulier de* G.

Nous dirons que des fonctions sont birationnelles, ou se comportent comme des fonctions birationnelles dans un domaine lorsque, en effectuant sur ces fonctions une transformation birationnelle convenable, on obtient des fonctions holomorphes en tout point du domaine considéré. Les seules singularités de ces fonctions sont des pôles ou des points d'indétermination. Lorsque le point

$$M(y'_1, y''_1, \ldots, y'_{s+1}, y''_{s+1})$$

décrit la courbe C, le point homologue $m(x'_1, x''_1, \ldots, x'_s, x''_s)$ décrit dans l'espace E′ une courbe c, soit $m_i(x'^{(i)}_1, \ldots, x''^{(i)}_s)$ l'homologue de M_i, d_i le domaine homologue de D_i.

Par hypothèse, C ne rencontre pas de point singulier de G, supposons le théorème démontré pour le domaine D_{n-1} et démontrons-le pour D_n :

Le point M_n est situé à l'intérieur de D_{n-1}, il lui correspond donc par la transformation f^{-1} un point déterminé m_n de d_{n-1}. Soient $|a_i| < \rho, i = 1, 2, \ldots, s$ les inégalités qui définissent les transformations de G infiniment petites le long de C ; lorsque les a_i varient d'une façon quelconque en vérifiant ces inégalités, le point $y = \psi[y^{(n-1)}, a]$

transformé de M_{n-1} par T_a décrit le domaine D_n. La transformation $x = f^{-1}y$ est donc définie dans D_n par l'équation

$$y = f^{-1}y = f^{-1}(\psi[y^{(n-1)}, a]) = \varphi(x^{(n-1)}, a).$$

Or l'équation $y = \psi(y^{(n-1)}, a)$ définit les a comme des fonctions holomorphes des y dans D_n et il est facile de voir que $\varphi(x^{(n-1)}, a)$ est une fonction rationnelle des a_i dans le domaine $|a_i| < \rho$:

Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe II, le groupe g peut être considéré comme un groupe de transformations homographiques

$$u'_h = \frac{\Sigma \alpha_{hi} u_i + \alpha_h}{\Sigma \beta_i u_i + \beta}$$

d'une multiplicité rationnelle P de l'espace $u_1, u_2, \ldots, u_p$ en elle-même ; les coefficients α et β sont des fonctions de $a_1, \ldots, a_s$ holomorphes dans un domaine $|a_i| < R$, R étant une constante. Il peut arriver pour certaines valeurs des u_i et pour $|a_i| < R$ que $\Sigma \beta_i u_i + \beta$ s'annule ; dans le voisinage d'un tel point de P, on effectuera sur les u un changement de variables tel que cette circonstance ne se présente plus avec les nouvelles variables. En revenant aux variables x, on en déduit que les x_i sont des fonctions rationnelles des a pour $|a_i| < R$.

Comme R est une constante, on peut, ainsi que nous l'avons vu, supposer, sans inconvénient, que $\rho \leqq R$. Si en un point M_n on est conduit à une valeur ρ_n supérieure à R, on la remplace par R et les raisonnements précédents ne sont pas modifiés.

Il résulte de là que les x sont les fonctions rationnelles des y_i dans D_n et, par un raisonnement analogue, on établit que les y sont des fonctions rationnelles des x dans d_n.

10. *Définition des transformations finies de* G. — On définit un groupe en se donnant soit ses équations en termes finis, soit ses transformations infinitésimales. Dans le premier cas, on sait ce que l'on entend par transformation finie du groupe ; dans le second, nous appellerons transformation finie du groupe le produit d'un nombre fini de transformations infiniment petites.

Soit M un point de D_n. Il existe $n + 1$ transformations infiniment petites de G, la première faisant correspondre M_0 à M_1, la seconde M_1 à M_2, la $(n+1)^{\text{ième}}$ M_n à M_{n-1}, le produit de ces $n+1$ transformations fait correspondre M_0 à M. Il existe donc une transformation finie T de G holomorphe dans le voisinage de M_0 qui fait correspondre M_0 à M ; nous dirons que C *est le chemin de définition de* T.

Au produit des $n+1$ transformations infiniment petites de G correspond le produit des $n+1$ transformations infiniment petites correspondantes de g, ce produit de transformations fait correspondre m_0 à m.

Ainsi, en même temps que nous étendons le prolongement analytique des $x_1, \ldots, x_s$, nous établissons une correspondance entre les transformations finies de g et G.

11. *Étude du cas où* D_n *contient un point singulier de* G. — Ce cas s'étudie facilement en remplaçant dans D_n les variables y par les variables z. Soit D' le domaine décrit par le point $z_1, z_2, \ldots, z_s$ lorsque M décrit D_n. On démontre comme précédemment que les x sont des fonctions rationnelles des z dans D' et les z des fonctions rationnelles des x dans d_n. On en déduit que les x sont des fonctions algébriques des y dans D_n. Les y sont des fonctions des x dans d_n, algébriques si le point singulier est quelconque, rationnelles si le point singulier est rationnel. Les transformations infiniment petites de G exprimées au moyen des z sont des fonctions holomorphes des variables z et des paramètres, exprimées au moyen des y ce seront des fonctions algébriques des variables et des paramètres. Nous les étudierons par la suite d'une façon précise.

En résumé : *Les x sont des fonctions algébriques du point* M *de la multiplicité* $\mathfrak{M}$ *dans le voisinage de tout point de* $\mathfrak{M}$ *non situé sur* Δ.

Désignons par $\mathfrak{D}$ le domaine ouvert ou fermé décrit par le point $x'_1, x''_1, \ldots, x'_s, x''_s$ lorsque M décrit la multiplicité $\mathfrak{M}'$, domaines Δ et Δ_1 exclus ; le point $x_1, \ldots, x_s$ correspondant à un point M donné de $\mathfrak{M}$ dépend non seulement de ce point, mais aussi du chemin décrit pour aller de M_0 à M. On a également le résultat suivant :

Les y sont des fonctions algébriques des x dans le voisinage de tout point intérieur à $\mathfrak{D}$.

En particulier, si G n'admet que des points singuliers rationnels, les y sont des fonctions uniformes des x dans le voisinage de tout point de $\mathcal{D}$; il faut se garder d'en conclure que les y sont des fonctions uniformes des x, car ainsi que nous le montrerons, $\mathcal{D}$ peut fort bien ne pas être simplement connexe.

12. *Étude du prolongement analytique de la transformation f dans un domaine de connexion quelconque.* — Soit c un contour fermé quelconque tracé dans $\mathcal{D}$, ne passant par aucun point de δ. Si c peut être réduit à un point par une déformation continue sans sortir de $\mathcal{D}$, les y n'ont à l'intérieur de c que des singularités algébriques connues.

Étudions maintenant le prolongement analytique des y le long de c lorsque ce contour ne peut se réduire à un point sans sortir de $\mathcal{D}$.

THÉORÈME. — *Si le point* M *décrit un arc de courbe* $M_0 M'_0$ *ne se fermant pas lorsque m décrit un certain contour fermé c, en d'autres termes, si les y ne reprennent pas la même valeur lorsque les x décrivent c, il existe une transformation distinguée de G qui fait correspondre* M'_0 *à* M_0.

Soient c un contour fermé tracé dans $\mathcal{D}$, m_0 un point de c, $M_0 C M'_0$ l'arc de courbe tracé sur $\mathfrak{M}'$ correspondant au parcours $m_0 c m'_0$. Représentons symboliquement par $f(m)$ le système de fonctions $y_1, \ldots, y_{s+1}$ du point $m(x_1, \ldots, x_s)$ situé dans le domaine D_0. Soit T une transformation infiniment petite de G dans D_0, t la transformation correspondante de g, on a symboliquement

$$f(t) = T(f). \tag{7}$$

Prolongeons analytiquement les x le long de C comme nous l'avons fait au paragraphe IV de ce Chapitre. On forme une succession de domaines $D_0, D_1, \ldots, D_n$, soient $d_0, \ldots, d_n$ les domaines correspondants de l'espace E'. Comme c est fermé, d_n contiendra m_0 pour un valeur convenable de n. Représentons par $f'(m)$ le prolongement analytique de f dans d_n lorsque m a décrit le contour fermé c ; on peut choisir m_0 de façon que M_0 et M'_0 soient deux points réguliers ; les deux branches $f(m)$ et $f'(m)$ dont donc holomorphes respectivement dans d_0 et dans d_n. d_0 et d_n contenant tous deux le point m_0 ont une partie commune d ; dans d, d'après la définition de la fonction f,

$$f'(t) = T(f'). \tag{8}$$

Les transformations t et T qui figurent dans cette formule sont les mêmes que celles qui figurent dans la formule (7), ce sont des transformations infiniment petites définies comme nous l'avons montré au paragraphe **8**. Comme les coefficients des Yf sont des fonctions uniformes, la transformation TM par exemple est une fonction uniforme du point M auquel on l'applique lorsque M décrit C.

Soit $f(m_0) = f_0, f'(m_0) = f'_0$ et D' un petit domaine entourant f_0 ; les deux branches de la fonction f, $f(m)$ et $f'(m)$ sont fonctions l'une de l'autre,

$$f' = U(f). \tag{9}$$

Supposons la transformation U holomorphe dans D'. Si cela n'avait pas lieu on remplacerait m_0 par un autre point. L'équation (8) s'écrit donc

$$U[f(t)] = T[U(f)],$$

mais

$$f(t) = T(f); \tag{7}$$

donc

$$U[T(f)] = T[U(f)].$$

Cette dernière équation est valable quelle que soit la transformation infiniment petite t considérée et quelque soit le point M de D. Il en résulte que U *est permutable avec toutes les transformations infiniment petites de* G.

Je dis, d'autre part, *que la transformation* U *appartient au groupe* G.

Ainsi que nous l'avons vu, en suivant le prolongement analytique de f^{-1} le long de C on définit des transformations de G qui à un point de D_0 font correspondre un point de D_n. Soit T_1 une de ces transformations, désignons par t_1 la transformation correspondante de g.

On a la relation

$$f'(t_1 m) = \mathrm{T}_1[f'(m)].$$

Soient m un point de d, t_1 la transformation de g définie au moyen de C comme nous venons de le dire, telle que

$$t_1 m = m.$$

Par hypothèse les transformations de g dépendent birationnellement des paramètres, il n'existe donc qu'une transformation de g qui à un point donné fasse correspondre un autre point donné, t_1 se réduit donc à la transformation identique et

$$f'(m) = \mathrm{T}_1[f(m)].$$

Il en résulte que $\mathrm{U} = \mathrm{T}_1$ appartient à G.

Réciproque. — *Si en définissant de proche en proche les transformations de* G, *le long d'une courbe* C *issue d'un point* M_0, *on obtient une transformation* T_1 *distinguée dans le groupe* G *et telle que* $\mathrm{M}'_0 = \mathrm{T}\mathrm{M}_0$, *le contour* c *de l'espace* E' *homologue de* $\mathrm{M}_0\,\mathrm{C}\,\mathrm{M}'_0$ *est fermé.*

Soient en effet $m_0\, c\, m'_0$ le contour homologue de $\mathrm{M}_0\,\mathrm{C}\,\mathrm{M}'_0$ et θ la transformation de g homologue de T_1 ; on a $m'_0 = \theta m_0$, par un raisonnement analogue à celui du théorème précédent, on établit que θ est une transformation distinguée de g ; en vertu des hypothèses, elle se réduit à la transformation identique et $m_0 = m'_0$, c est donc fermé.

Corollaire — *La condition nécessaire et suffisante pour que les* y *soient des fonctions uniformes des* x *est que* G *ne contienne pas de transformation distinguée.*

13. *Étude du prolongement analytique de* f^{-1} *dans un domaine de connexion quelconque :*

Théorème. — *Lorsque le point* M *décrit un contour fermé* Γ, *les* x *subissent une substitution permutable avec toutes les transformations de* g.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de reprendre le début de la démonstration du paragraphe **12** :

Soient M_0 un point de Γ, D_0 un domaine entourant M_0, désignons symboliquement par $f^{-1}(M)$ le système de fonctions x d'un point de D_0, par $f'^{-1}(M)$ le prolongement analytique de f^{-1} lorsque M décrit le contour Γ. Soit

$$f'^{-1} = U(f^{-1}).$$

On a cette fois

$$f^{-1}(TM) = tf^{-1}(M),$$
$$f'^{-1}(TM) = tf'^{-1}(M).$$

On en déduit, comme au paragraphe **12**,

$$tU = Ut. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette fois U ne fait pas partie de g ; on peut bien définir par prolongement analytique le long de Γ une transformation T_1 telle que, pour un point particulier M de D_0, on ait

$$M = T_1 M,$$

mais T_1 ne se réduit pas à la transformation identique et à partir de ce moment, l'ancien raisonnement ne s'applique plus.

Soit g' le groupe réciproque de g, c'est-à-dire le groupe formé de toutes les transformations permutables avec celles de g ; la transformation U fait partie de g'. L'ensemble de toutes les transformations U forme un sous-groupe (g') de g' qui comprend une infinité discontinue de transformations.

A tout contour fermé tracé sur $\mathcal{M}'$ correspond une substitution de (g').

THÉORÈME. — *Deux contours fermés Γ et Γ' pouvant se réduire l'un à l'autre par une déformation continue sans rencontrer de point singulier de G correspondent à la même transformation de (g').*

Soient S une surface limitée par Γ et Γ' ne contenant aucune singularité de G, C un arc de courbe joignant un point M de Γ et un point M' de Γ' ; l'aire A de S intérieure au contour $M\Gamma MCM'\Gamma'M'CM$ ne contient pas de point singulier de G, x est donc une fonction uniforme de y dans cette aire et ne subit pas de substitution lorsque y décrit un contour fermé intérieur à A pouvant se réduire à un point ; prenons comme contour la frontière de A, on a en désignant par τ et τ' les substitutions de (g') qui correspondent respectivement à Γ et à Γ' :

$$\tau\tau'^{-1} = 1, \qquad \text{donc} \qquad \tau = \tau'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons un système de substitutions fondamentales de (g') ; une substitution de (g') est le produit d'un certain nombre de substitutions fondamentales ; les substitutions fondamentales sont de deux sortes.

Les unes correspondent sur $\mathfrak{M}'$ à des cycles ; elles sont analogues aux périodes cycliques des intégrales abéliennes.

Les autres correspondent à des contours de M pouvant se réduire à un point, mais en rencontrant des points singuliers de G ; elles sont analogues aux périodes polaires.

En raison de ces analogies, nous appelerons les premières substitutions *cycliques* et les secondes substitutions *polaires*.

IV. — Étude des transformations de G.

14. *Prolongement analytique d'une transformation de* G. — Étant donné un arc de courbe MCM′ on peut définir n transformations $T_1, T_2, \ldots, T_n$ infiniment petites respectivement en n points $M = M_1, M_2, \ldots, M_n$ de cet arc, et telles que $M_i = T_{i-1} M_{i-1}$, $M' = T_n M_n$; leur produit $T = T_n T_{n-1} \ldots, T_1$ est une transformation finie de G et $M' = TM$. Les coordonnées des points $P' = TP$ sont des fonctions des coordonnées de P holomorphes lorsque P reste dans un petit domaine D entourant M.

Nous allons étudier le prolongement analytique de cette transformation $P' = TP$ lorsque P se déplace d'une façon quelconque sur $\mathfrak{M}'$. Il peut arriver que l'une des transformations intermédiaires T_i cesse d'être définie pour certaines positions de P sans que pour cela T cesse de l'être.

Les transformations T admettent sur $\mathfrak{M}'$ ainsi que nous le verrons des singularités algébriques et essentielles ; dans certains cas, elles admettent des coupures essentielles.

THÉORÈME. — *Soient* Γ *un contour fermé tracé sur* $\mathfrak{M}'$, M_0 *un point de* Γ, T *une transformation de* G *définie au moyen d'un chemin* M_0CM_1 *et* $M_1 = TM_0$ (*fig.* 1). *Supposons que* M *décrivant le contour*

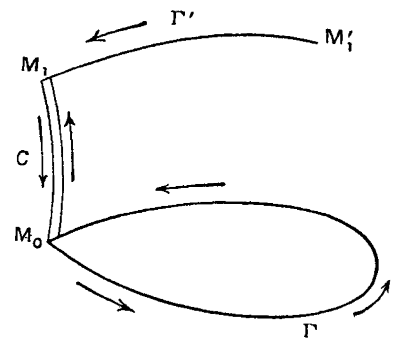

Fig 1.

$M_0 \Gamma M_0$ *le point* $M' = TM$ *soit constamment défini et décrive un chemin* $M_1 \Gamma' M'_1$ *non fermé. La transformation* TM *n'est pas uniforme à l'intérieur de* Γ. *Je dis qu'il existe une transformation distinguée de* G *qui au point* M_1 *fait correspondre le point* M'_1.

Deux cas sont à distinguer :

1° Γ peut être réduit à un point sans rencontrer de point singulier de G. Désignons par des petites lettres les éléments de l'espace E

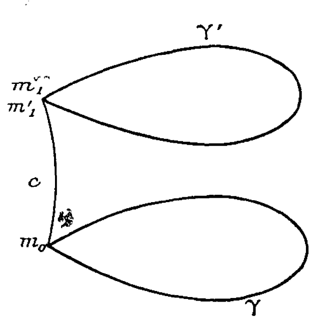

Fig 2.

homologues des éléments précédents de $\mathfrak{M}'$. A Γ correspond un contour fermé $m_0 \gamma m_0$ (*fig.* 2), comme la transformation t est birationnelle par conséquent uniforme, m_1 et m'_1 coïncident lorsque

M décrit le chemin $M_1 C M_0 C' M'_1$, m décrit un contour fermé, d'après le théorème du paragraphe **13**, il existe une transformation distinguée T_1 de G telle que $M'_1 = T_1 M_1$.

2° Lorsque M décrit Γ le point m subit une substitution τ de (g') et décrit un chemin $m_0 \gamma m'_0$ (*fig.* 3); $m_1 \gamma' m'_1$ est le chemin transformé

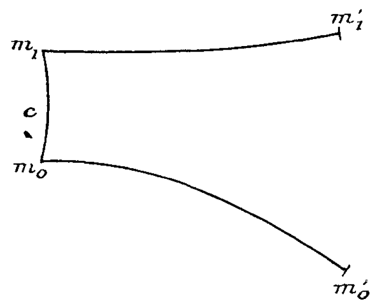

Fig. 3.

du précédent par t et comme t et τ sont permutables on a $m'_1 = \tau m_1$. Lorsque M décrit le contour $M_1 C M_0 \Gamma M_0 C M_1$, m subit la substitution τ puisque le contour précédent se réduit à Γ sans rencontrer de singularité de G, le chemin homologue de $M'_1 M_1 C M_0 \Gamma M_0 C M_1$ dans E' est donc fermé et il existe encore une transformation distinguée de G, T_1 telle que $M'_1 = T_1 M_1$.

Théorème. — *Soient* T_1 *une transformation de* G, M_0 *un point,* $M'_0 = T_1 M_0$ *son transformé par* T_1. *Lorsque* M *décrit le chemin de définition* $M_0 C M'_0$ *de* T_1 *le transformé* $M' = TM$ *de* M *par une transformation quelconque* T *de* G *décrit un chemin* $M_0 C' M'_1$; *la transformation* T'_1 *de* G *définie par ce chemin et qui fait correspondre* M'_1 *à* M'_0 *est distinguée.*

Il suffit de remarquer que le chemin $m_0 c m_1$ homologue de $M_0 C M_1$ est fermé. Le chemin $m'_0 c' m'_1$ transformé de $m_0 c m_1$ par t est donc également fermé, or $m'_0 c m'_1$ est homologue de $M_0 C' M'_1$. C. Q. F. D.

Théorème. — *Étant données une transformation distinguée* T_1 *de* G *et une transformation non distinguée* T *de* G, *il existe toujours un contour fermé* Γ, *tel que lorsque* M *décrit* Γ *le point* $M' = TM$ *subit la substitution* T_1.

La démonstration de ce théorème exige une étude approfondie des groupes g et g', nous la donnerons dans les cas plus particuliers que nous rencontrerons dans la deuxième partie.

15. *Définition du groupe* (G). — On peut considérer les transformations distinguées de G comme formant un sous-groupe (G) de G. Soient, en effet, M un point de $\mathfrak{M}$, T_1 une transformation distinguée de G, holomorphe dans un petit domaine D entourant M ; soient M′ et D′ les transformés de M et D par T et T'_1 une autre transformation distinguée de G holomorphe dans D′. La transformation $T''_1 = T'_1 T_1$ est holomorphe dans D, c'est encore une transformation distinguée. Si T_1 est une transformation distinguée holomorphe dans un petit domaine D et non uniforme sur $\mathfrak{M}$, les diverses déterminations de la transformation T_1 sont encore des transformations distinguées qu'on doit considérer comme distinctes de T_1 si l'on se limite au domaine D.

En résumé : Les fonctions y des variables x ne sont pas uniformes ; en général, étant donnée une détermination de ces fonctions, on obtient toutes les autres en effectuant sur cette détermination les transformations de (G). Les transformations finies de G ne sont pas uniformes non plus, en général, et l'on obtient de la même façon toutes leurs déterminations.

En particulier, si (G) se réduit à la transformation identique, les transformations de G sont uniformes, donc biuniformes puisqu'elles forment un groupe de Lie, et les y sont des fonctions uniformes des x. Lorsqu'on effectue sur les x une substitution de (g'), les y reprennent la même valeur, ce sont des fonctions automorphes relativement à (g').

V. — Étude de la correspondance entre les transformations de g et G.

Comme nous l'avons démontré au début du paragraphe **9** en même temps qu'on définit le prolongement analytique des fonctions g, on établit une correspondance entre les transformations finies de g et G.

16. Théorème. — *A une transformation de* G *correspond une transformation de g et une seule.*

Soient M_0 un point de $\mathfrak{M}$, $M_0 C M_1$ un chemin définissant une transformation T telle que $M_1 = TM_0$, soient m_0, c, m_1 les éléments correspondants de E′. Supposons un instant qu'en suivant un autre chemin C′ allant de M_0 à M_1, on obtienne la même transformation T mais que les éléments homologues de E′ m_0, c', m'_1, t' ne soient plus les mêmes. A la transformation T pourraient donc correspondre deux transformations t, t'. Le contour fermé $M_1 C M_0 C' M_1$ correspond au chemin $m_1 c m_0 c' m'_1$ (*fig.* 4); d'après ce que nous avons vu, la

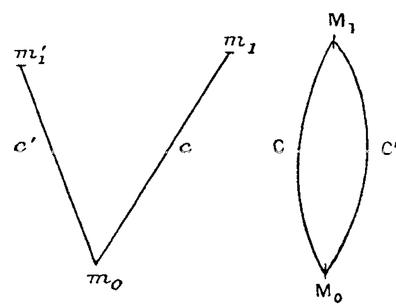

Fig. 4.

transformation τ qui fait passer de m_1 à m'_1 est permutable avec toutes les transformations de g ; or τ appartient à g puisqu'elle est l'homologue de la transformation TT^{-1} de G qui fait correspondre M_1 à lui-même ; en vertu des hypothèses, τ se réduit à la transformation identique et $t = t'$.

On démontrerait de la même façon le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si deux transformations* T *et* T′ *de* G *correspondent à une même transformation de* g, $T' T^{-1}$ *est une transformation distinguée de* G.

Ainsi que nous l'avons vu T n'est pas uniforme sur $\mathfrak{M}$ et $T' = T_1 T$ est une branche de T; on peut dire si l'on veut qu'à une transformation de g correspondent les diverses branches d'une seule transformation de G.

Cas particulier : Ces considérations s'éclaircissent si l'on suppose les transformations de G biuniformes. Dans ce cas, *la correspondance entre les transformations de* g *et* G *est biunivoque.* Ce fait est remarquable, car il ne se produit pas pour les structures de groupe autres que celles que nous considérons :

Considérons, par exemple, une courbe algébrique de genre 1 qui admet un groupe continu G de transformations birationnelles en elle-même ; G est semblable au groupe $g'_1 : x' = x + a$. La correspondance entre les transformations des deux groupes n'est pas biuniforme ; à une transformation de G correspondent une infinité de transformations de g de la forme

$$x' = a + m\omega + m'\omega',$$

m et m' etant deux entiers.

DEUXIÈME PARTIE.

LES FONCTIONS ULTRAKLEINÉENNES ET LES FONCTIONS KLEINÉENNES.

1. Nous nous proposons d'appliquer les résultats de la première Partie à la définition des fonctions kleinéennes.

Une fonction kleinéenne est une fonction analytique $f(z)$ qui se répète par les substitutions d'un groupe discontinu homographique

$$(g') \qquad z' = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad f\left[\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right] = f(z).$$

Une substitution permutable avec toutes les substitutions du groupe continu $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ est permutable avec toutes celles de (g'); seule la transformation identique possède cette propriété.

On ne peut donc définir directement une fonction kleinéenne quelconque au moyen de l'équation fonctionnelle étudiée dans la première Partie. Pour que cela fût possible, il faudrait, en effet, qu'il existât une infinité de transformations permutables avec toutes les substitutions du groupe kleinéen (g') relatif à cette fonction. Or ceci ne peut avoir lieu que si (g') n'admet que deux substitutions fondamentales et si en outre ces deux substitutions sont permutables entre elles, c'est-à-dire, ont les mêmes points doubles. Les fonctions fuchsiennes et kleinéennes satisfaisant à ces conditions ont été étudiées par M. Fubini (*Annali di Matematica*, 1908). Elles se ramènent aux fonctions elliptiques par un changement de variables rationnel-logarithmique. On pourrait aussi, en utilisant les résultats obtenus par M. Fubini, sur certaines fonctions hyperfuchsiennes de deux variables, définir des fonctions fuchsiennes plus générales que les précédentes, mais encore particulières. Nous ne nous arrêterons pas à ces cas particuliers et nous chercherons à définir les fonctions kleinéennes les plus générales.

I. — Recherche d'une équation fonctionnelle permettant de définir des fonctions kleinéennes.

2. *Recherche de g.* — Prenons pour g un groupe simplement transitif à trois paramètres, l'équation fonctionnelle $f(g) = G(f)$ définit des fonctions $f(x_1, x_2, x_3)$ de trois variables, se répétant par des substitutions du groupe g', permutables avec toutes les transformations de g. Considérons les valeurs de $f(x_1, x_2, x_3)$ le long d'une courbe Γ définie paramétriquement par les formules

$$x_1 = \lambda(u), \qquad x_2 = \mu(u), \qquad x_3 = \nu(u)$$

et soit $f[\lambda(u), \mu(u), \nu(u)] = f(u)$.

Nous savons *a priori* que $f(x_1, x_2, x_3)$ se répète par des substitutions de g', nous connaîtrons le groupe de $f(u)$ si g' laisse la courbe Γ invariante, et $f(u)$ sera une fonction kleinéenne de u si g' se réduit sur Γ au groupe $u' = \dfrac{au+b}{cu+d}$.

Les courbes Γ' transformées de Γ par les transformations de g sont invariantes par g' ; comme g' est simplement transitif deux cas peuvent se présenter :

1° Les courbes Γ' coïncident avec Γ; dans ce cas, toutes les transformations de g admettent comme points doubles tous les points de Γ, puisque seule la transformation identique est permutable avec les transformations $u' = \dfrac{au+b}{cu+d}$.

La courbe la plus simple qui puisse jouer le rôle de Γ est une droite ; désignons par

$$\begin{aligned}
X_1 f &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_3},\\
X_2 f &= \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_3},\\
X_3 f &= \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},
\end{aligned}$$

les transformations de g. La surface δ qui a pour équation

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

est invariante par les transformations de g ; la courbe Γ sera sur cette surface δ. Comme nous aurons à faire l'étude du groupe g sur δ, il faut prendre g de façon que δ soit le plus simple possible, par exemple, soit un plan. Mais si l'on cherche les groupes continus de transformations homographiques possédant les propriétés que nous venons d'énoncer et pour lesquels δ est un plan, on trouve qu'il n'en existe pas ; nous ne reproduisons pas ici le calcul sans grand intérêt qui conduit à ce résultat. Abandonnons donc la condition que δ est un plan ; parmi les groupes qui vérifient les conditions restantes, nous citerons le groupe

$$x'_1 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \qquad x'_2 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}, \qquad x'_3 = \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}.$$

La droite $x_1 = x_2 = x_3$ joue le rôle de Γ et δ se compose des trois plans passant par Γ et par les axes des coordonnées.

2° Les courbes Γ engendrent une surface. Tel est le cas du groupe

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{ax_1 + bx_2}{cx_3 + d},\\
x'_2 &= \frac{cx_1 + dx_2}{cx_3 + b},\\
x'_3 &= \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}.
\end{aligned}$$

En écrivant ces transformations en coordonnées homogènes, il est facile de voir qu'elles forment un groupe

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a x_1 + b x_2,\\
x'_2 &= c x_1 + d x_2,\\
x'_3 &= \qquad\qquad a x_3 + b x_4,\\
x'_4 &= \qquad\qquad c x_3 + d x_4.
\end{aligned}$$

g laisse invariante le quadrique $(\delta) x_1 - x_2 x_3 = 0$ et chaque génératrice du système (I) de δ d'équations $x_1 = \lambda x_3, x_2 = \lambda$. Il transforme les unes dans les autres les génératrices de l'autre système (II) $x_1 = \mu x_2$, $x_3 = \mu$.

Le groupe g' formé des transformations permutables avec toutes les transformations de g est

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \alpha x_1 + \beta x_3,\\
x'_2 &= \alpha x_2 + \beta x_4,\\
x'_3 &= \gamma x_1 + \delta x_3,\\
x'_4 &= \gamma x_2 + \delta x_4,
\end{aligned}$$

Il laisse invariant δ et chaque génératrice du système (II); il transforme les unes dans les autres génératrices (I). Sur une génératrice (II) g' se réduit à $x'_2 = \dfrac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}$.

L'un quelconque des deux groupes que nous venons de citer peut jouer le rôle de g; nous choisirons le second de ces groupes. On pourrait développer avec le premier une théorie semblable à celle qui va suivre.

II. — Définition des fonctions ultrakleinéennes.

3. En définitive, nous prenons pour g le groupe

$$(g) \qquad x'_1 = \frac{a x_1 + b x_2}{c x_3 + d}, \qquad x'_2 = \frac{c x_1 + d x_2}{c x_3 + d}, \qquad x'_3 = \frac{a x_3 + b}{c x_3 + d}.$$

Dans le cas présent G est un groupe continu à quatre variables y_1, y_2, y_3, y_4 et trois paramètres conservant la multiplicité

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

et vérifiant les hypothèses que nous avons énoncées dans la première

Partie; g' ne contient pas de transformation distinguée et dépend birationnellement des paramètres $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$. Supposons, par exemple, que les $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ soient des fonctions uniformes, le groupe (g') de ces fonctions est un sous-groupe de g'. Si y_1 est holomorphe sur une région de δ, la valeur $f_1(\mu z, z, \mu)$ prise par y_1 sur une génératrice (II), est une fonction kleinéenne de z sur cette génératrice, le groupe (g') se réduit à $z' = \frac{az+b}{cz+d}$.

Pour cette raison, nous dirons que les y_i sont des *fonctions ultrakleinéennes* des trois variables x_1, x_2, x_3.

4. *Recherche du domaine fondamental de* (g'). — Nous appellerons ainsi un domaine P de l'espace $E'(x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3)$ tel que tout point de $\mathcal{D}$ soit transformé d'un point de P par une substitution et une seule de (g'). En d'autres termes, dans P les fonctions y_1, y_2, y_3, y_4 prennent une fois et une seule des valeurs quelconques c_1, c_2, c_3, c_4 vérifiant la relation $F(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$ (sauf peut-être certaines valeurs exceptionnelles). On obtient ce domaine de la façon suivante :

Imaginons que dans la multiplicité $\mathfrak{M}'$ on ait tracé des coupures à 5 dimensions rendant cette multiplicité simplement connexe ; et telles qu'un contour fermé quelconque tracé sur $\mathfrak{M}'$ ne traversant aucune des coupures ne puisse se réduire à un point sans rencontrer de point singulier de G. Désignons par $\overline{\mathfrak{M}}$ la multiplicité ainsi découpée. Faisons décrire au point $M(y'_1, y''_1, y'_2, y''_2, y'_3, y''_3, y'_4, y''_4)$, la multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$; le point m correspondant décrit un domaine P qui est un domaine fondamental de (g'), car il y a correspondance biunivoque entre P et $\overline{\mathfrak{M}}$.

Si l'on décrit sur $\mathfrak{M}'$ un contour fermé traversant une des coupures, le point m correspondant décrit un contour non fermé et subit une substitution de (g'). Employons la terminologie de M. Giraud [1]. Le domaine P est limité par des faces à 5 dimensions, il a des « arêtes » à 4, 3, 2, 1 dimensions et des sommets. Aux deux bords d'une coupure de M correspondent deux faces opposées de P.

---

[1] *Leçons sur les fonctions automorphes* (Gauthier-Villars).

5. *Le domaine* P *comprend-t-il des points de* δ? — Si l'on considère un groupe de transformations birationnelles tel que g, il existe toujours une multiplicité singulière que le groupe laisse invariante; elle s'obtient, comme nous l'avons vu, en annulant le déterminant des coefficients des transformations infinitésimales. Il n'en est plus de même pour les groupes continus tels que G engendrés par des transformations infinitésimales à coefficients rationnels sur une multiplicité algébrique. Soient

$$Y_1 f = \eta_{11}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{12}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{13}\frac{\partial f}{\partial y_3} + \eta_{14}\frac{\partial f}{\partial y_4},$$
$$Y_2 f = \eta_{21}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{22}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{23}\frac{\partial f}{\partial y_3} + \eta_{24}\frac{\partial f}{\partial x_4},$$
$$Y_3 f = \eta_{31}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{32}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{33}\frac{\partial f}{\partial y_3} + \eta_{34}\frac{\partial f}{\partial y_4}.$$

Supposons qu'en un point de $\mathfrak{M}$, $\frac{\partial F}{\partial y_4}$ ne soit pas nul, et que les équations de G soient holomorphes. Une multiplicité invariante est définie dans le voisinage de M par

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais il se peut que tout point de $\mathfrak{M}$ vérifiant l'équation $\Delta_4 = 0$ vérifie aussi $\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$. D'une façon plus générale, soit Δ_i le déterminant obtenu en supprimant la colonne de rang i dans la matrice des η_{ik} il se peut que $\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$ soit une conséquence de $\Delta_i = 0$ quel que soit i; dans ce cas, s'il existe une multiplicité invariante, elle coïncide la multiplicité singulière S définie par les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0.$$

En un point de $\Delta_i = 0$ on peut exprimer les coordonnées de $\mathfrak{M}$ au moyen de trois paramètres v_1, v_2, v_3; exprimons les transformations $Y_i f$ au moyen de v_1, v_2, v_3 et formons le déterminant correspondant Δ. Bien que sur S on ait $\Delta_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4,$) il se peut que Δ ne soit pas nul. Il peut donc arriver qu'aucune multiplicité tracée sur $\mathfrak{M}$, même se réduisant à un point, ne soit invariante par G. Il faut donc considérer deux cas suivant qu'il y a ou non sur $\mathfrak{M}$ une multiplicité invariante.

6. *Cas où il n'y a sur* $\mathfrak{M}$ *aucun élément invariant pour* G. — Considérons un domaine D_0 de $\mathfrak{M}$ et suivons le prolongement analytyque des fonctions x_1, x_2, x_3 de y_1, y_2, y_3, y_4 en dehors de D_0. Comme nous l'avons fait au Chapitre précédent, transformons D_0 par une transformation infiniment petite T_1 de G, puis le domaine ainsi obtenu par T_2 et ainsi de suite; je dis que si $\mathfrak{M}$ ne contient aucun élément invariant, on finit par recouvrir ainsi $\overline{\mathfrak{M}}$ tout entier au bout d'un nombre fini p d'opérations en choisissant convenablement les transformations T_1, T_2, ..., T_p.

Si cela n'était pas, il y aurait au moins un point M_n qui, après la $n^{\text{ième}}$ opération, ne serait pas dans le domaine transformé de D_0, et cela quel que soit n; les points M_n auraient au moins un point limite M qui ne serait le transformé d'aucun point de D_0 par une transformation finie de G; mais le lieu des points M possédant cette propiété est manifestement invariant par G, ce qui contredit l'hypothèse.

Considérons le domaine d_0 de l'espace x_1, x_2, x_3 correspondant à D_0 et les transformations t_1, t_2, ..., t_p correspondant à T_1, T_2, ..., T_p; si l'on applique à d_0 successivement les transformations t_1, t_2, ..., t_p, on obtient un domaine qui ne contient aucun point de δ ni à son intérieur ni sur sa frontière et qui contient le domaine fondamental P de (g').

Dans ce cas, P ne contient aucun point de δ; réciproquement, il est facile de voir que si le domaine fermé P ne contient aucun point de δ aucune multiplicité de $\mathfrak{M}$ n'est invariante par G. Tous les points de δ sont alors des points singuliers essentiels des fonctions y.

III. — Étude des fonctions ultrakleinéennes sur δ.

7. *Hypothèses supplémentaires.* — Nous ferons désormais les hypothèses supplémentaires suivantes :

1° Il y a une multiplicité à deux dimensions Δ invariante pour G.

2° Sur Δ les déterminants d'ordre 2 issus de la matrice η_{ik} sont nuls.

3° En un point $y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0$ de Δ où par exemple $\frac{\partial F}{\partial y_4}$ n'est pas nul, le développement du déterminant suivant les puissances de $y_1 - y_1^0$, $y_2 - y_2^0, y_3 - y_3^0$ commence par des termes du second degré non nuls.

Le groupe G étant défini par trois transformations infinitésimales, la vérification de ces hypothèses n'exige que des calculs rationnels.

Il résulte de là que sur Δ les transformations infinitésimales $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ sont liées par deux relations linéaires à coefficients variables. Sur Δ les trajectoires Q_1 d'un sous-groupe quelconque de G à un paramètre ne dépendent donc pas du sous-groupe considéré ; ces courbes Q_1 forment une famille à un paramètre et chacune d'elles est invariante pour G. Soit G′ le groupe des transformations permutables avec toutes celles de G ; comme conséquence de ces hypothèses, Δ est invariant pour G′.

En certains points singuliers de Δ, les hypothèses précédentes seront vérifiées à condition de faire auparavant sur les g un changement de variables algébrique. Il existe, ainsi que nous le verrons sur des exemples, une autre multiplicité Δ_1 invariante par G sur laquelle les hypothèses précédentes ne sont pas vérifiées.

Si les hypothèses (1), (2) et (3) sont vérifiées, les fonctions y sont holomorphes sur une certaine région de δ. Pour démontrer cette proposition, nous montrerons que les x sont des fonctions algébroïdes sur Δ tout entier. Auparavant, nous étudierons g et G respectivement sur δ et Δ.

8. *Étude de g sur δ.* – Le groupe g est isomorphe au groupe homographique à une variable. Les sous-groupes g_1 de g à un paramètre sont donc formés des transformations de g telles que les transformations $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ qui correspondent aux mêmes valeurs de a, b, c, d ont deux points doubles donnés α et β, ces dernières transformations sont de la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \theta \frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Les équations d'un sous-groupe à un paramètre de g sont donc

$$x'_1 = \frac{(\alpha - \theta\beta)x_1 - \alpha\beta(1-\theta)x_2}{(1-\theta)x_3 + \alpha\theta - \beta},$$
$$x'_2 = \frac{(1-\theta)x_1 + (\alpha\theta - \beta)x_2}{(1-\theta)x_3 + \alpha\theta - \beta},$$
$$x'_3 = \frac{(\alpha - \beta\theta)x_3 - \alpha\beta(1-\theta)}{(1-\theta)x_3 + \alpha\theta - \beta},$$

où α et β sont des valeurs fixes arbitraires et où θ désigne le paramètre. Désignons par t la transformation précédemment écrite, la transformation t^n, où n est un entier positif ou négatif correspond à la valeur θ^n du paramètre.

Considérons un point quelconque $m(x_1, x_2, x_3)$ de l'espace E, la trajectoire du sous-groupe g_1 issue de ce point s'obtient en considérant x'_1, x'_2, x'_3 comme les coordonnées d'un point courant et θ comme un paramètre; c'est une droite dans l'espace à trois dimensions x_1, x_2, x_3.

Dans l'espace imaginaire à six dimensions $E'(x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3)$ cette trajectoire est une multiplicité à deux dimensions dont les coordonnées s'expriment rationnellement au moyen de θ' et θ'' si l'on pose $\theta = \theta' + i\theta''$.

Appliquons au point m la transformation t^n de g_1 et faisons tendre n vers l'infini, nous obtenons le point limite

$$(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} X_1 = \beta \dfrac{x_1 - \alpha x_2}{x_3 - \alpha}, \\ X_2 = \dfrac{x_1 - \alpha x_2}{x_3 - \alpha}, \\ X_3 = \beta, \end{cases}$$

si $|\theta| > 1$, et le point

$$(\mathrm{L}') \qquad \begin{cases} X'_1 = \alpha \dfrac{x_1 - \beta x_2}{x_3 - \alpha}, \\ X'_2 = \dfrac{x_1 - \beta x_2}{x_3 - \alpha}, \\ X'_3 = \alpha, \end{cases}$$

si $|\theta| < 1$. Le point (L) dépend de $m(x_1, x_2, x_3)$, mais quel que soit m, il se trouve sur la génératrice P'_β $x_3 = \beta$, $x_1 = \beta x_2$ du système (II) de δ; (L′) se trouve sur la génératrice $P'_\alpha\ x_3 = \alpha,\ x_1 = \alpha x_2$ du même système.

Les trajectoires de g_1 sont donc les droites qui rencontrent P'_α et P'_β; elles forment une congruence linéaire qui a pour directrices deux génératrices du système (II). Les formules précédentes définissent une transformation qui au point m fait correspondre le point (L); on peut convenir d'appeler une telle transformation *transformation infinie* de g; il lui correspondra dans G des transformations infinies.

Dans ce qui précède, nous avons supposé α et β distincts; considérons maintenant un sous-groupe g_1 pour lequel les deux génératrices doubles sont confondues; les points limites d'un tel sous-groupe sont sur la génératrice double, et les trajectoires sont des droites tangentes à δ en un point de cette génératrice.

Un sous-groupe à deux paramètres g_2 de g s'obtient en donnant dans les équations de g_1 une valeur constante à α et des valeurs arbitraires à β. Les trajectoires de g_2 sont les plans qui passent par P'_α; ils sont donc tangents à δ. Soit A un point de la génératrice P'_α, toute droite issue de A peut être considérée comme une trajectoire d'un sous-groupe à un paramètre de g_2.

Désignons par

$$X_1 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_3 f = x_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - (x_1 - x_2 x_3) \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

trois transformations infinitésimales de g; on a

$$\delta = (x_1 - x_3 x_3)^2;$$

on vérifie facilement que si $x_1 - x_2 x_3 = 0$, les mineurs du second ordre de δ sont nuls. L'étude de g' est analogue à celle de g; il suffit dans le raisonnement d'échanger les deux systèmes de génératrices de δ.

9. *Étude de* G *sur* Δ. — Nous désignerons par $\bar{g}$ le groupe que l'on obtient lorsque dans les équations de g on suppose le point $m(x_1,$

x_2, x_3) sur δ; le point x'_1, x'_2, x'_3 est également sur δ; nous pouvons supposer par exemple que dans g on remplace x_3 par $\frac{x_1}{x_2}$, on obtient alors les équations de $\overline{g}$ exprimées au moyen des variables x_1, x_2. Nous désignerons de même par $\overline{G}$ ce que devient G lorsqu'on se borne à la considération des points de Δ; nous supposerons $\overline{G}$ écrit au moyen de y_1 et de y_2.

Sur δ les mineurs du second ordre issus du déterminant $\|\xi_{ik}\|$ sont nuls; on a donc, ainsi que nous l'avons déjà dit, des identités de la forme

$$\overline{X^2}f = \varphi_1(x_1, x_2)\overline{X_1}f, \qquad \overline{X_3}f = \varphi_2(x_1, x_2)\overline{X_1}f.$$

De même, en vertu des hypothèses du paragraphe **7**,

$$\overline{Y_2}f = \psi_1(y_1, y_2)\overline{Y_1}f, \qquad \overline{Y_3}f = \psi_1(y_1, y_2)\overline{Y_1}f.$$

Les groupes $\overline{g}$ et $\overline{G}$ sont-ils semblables? En d'autres termes existe-t-il des transformations $\overline{f}$ de δ en Δ telles que $\overline{G} = \overline{f}\,\overline{g}\,\overline{f}^{-1}$? D'après Lie (*Théorie des transformations-gruppen*, Chap. XIX), une telle transformation $\overline{f}$ doit vérifier les relations

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2) &= \psi_1(y_1, y_2),\\ \varphi_2(x_1, x_2) &= \psi_2(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Il semble que $\overline{f}$ soit entièrement définie; nous allons montrer qu'il n'en est rien et que les deux relations précédentes se réduisent à une seule.

Considérons la transformation infinitésimale

$$Xf = \lambda X_1 f + \mu X_2 f + \nu X_3 f$$

de g; écrivons que Xf admet le point x_1^0, x_2^0, de δ comme point double. En vertu des relations entre les X, nous obtenons la condition

$$\lambda + \mu\varphi_1(x_1^0, x_2^0) + \nu\varphi_2(x_1^0, x_2^0) = 0.$$

L'ensemble des transformations Xf vérifiant la condition précédente constitue un sous-groupe de g à deux paramètres; en vertu des relations de structure

$$(X_1, X_2) = X_1, \qquad (X_1, X_3) = 2X_3, \qquad (X_2, X_3) = X_2,$$

un sous-groupe à deux paramètres est défini par une équation linéaire en λ, μ, ν de la forme

$$\lambda + \mu\theta + \nu\theta^2 = 0,$$

où θ est une constante arbitraire. Il en résulte que

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \varphi_1^2(x_1, x_2).$$

Dans le raisonnement précédent, seule la structure de g est intervenue, on a donc de la même façon $\psi_2(y_1, y_2) = \psi_1^2(y_1, y_2)$. Les relations $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$ se réduisent par suite à une seule, à savoir

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \psi_1(y_1, y_2).$$

On peut interpréter géométriquement cette relation. Ainsi que nous le verrons par la suite, le groupe G' laisse invariantes une infinité de courbes Q_{II} dépendant d'un paramètre; ces courbes Q_{II} sont les trajectoires d'un sous-groupe quelconque de G'. Soit t' une transformation de g', g_2 un sous-groupe de g à deux paramètres, l'identité

$$g_2 = t' g_2 t'^{-1}$$

montre que si un point m de δ est un point double de g_2 il en est de même de tous les points de la génératrice P' du système II passant par m. Un raisonnement analogue montre que si un point M de Δ est point double d'un sous-groupe G_2, il en est de même de tous les points de la courbe Q_{II} issue de M. Le lieu des points doubles d'un sous-groupe G_2 a pour équation $\psi_1(y_1, y_2) = \text{const.}$, les courbes Q_{II} sont donc algébriques. Si dans la similitude établie entre g et G, g_2 et G_2 se correspondent, les courbes P' et Q_{II}, lieux des points doubles respectifs de g_2 et G_2, se correspondent également. La relation $\varphi_1 = \psi_1$, établit donc la correspondance entre les génératrices du système II de δ et les courbes Q_{II}; on voit que cette correspondance est algébrique.

Soit g_1 un sous-groupe à un paramètre de g défini par la transformation infinitésimale

$$Xf = \lambda X_1 f + \mu X_2 f + \nu X_3 f.$$

g_1 admet comme lieu de points doubles deux génératrices du système II qui sont définies par

$$\lambda + \mu x_3 + \nu x_3^2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \text{II}' & x_3 = \dfrac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu}}{2\nu}, \\ \text{II}'' & x_3 = \dfrac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu}}{2\nu}. \end{cases}$$

Le sous-groupe G_1 correspondant admet aussi deux courbes Q_{II} comme lieu de points doubles; en effet, G_1 est défini par

$$Yf = \lambda Y_1 f + \mu Y_2 f + \nu Y_3 f,$$

et l'équation qui détermine les points doubles

$$\lambda + \mu\psi_1 + \nu\psi_2 = 0$$

se décompose en deux en vertu de $\psi_2 = \psi_1^2$:

$$Q_{\text{II}'} \qquad \psi_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu}}{2\nu},$$

$$Q_{\text{II}''} \qquad \psi_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu_1 - 4\lambda\nu}}{2\nu}.$$

$Q_{\text{II}'}$ correspond à la génératrice II′ de δ et $Q_{\text{II}'}$ à II″.

10. *Recherche des racines de l'équation en* S *relative à une transformation infinitésimale de* g. — Considérons une transformation infinitésimale de g

$$\begin{aligned} Xf &= \lambda X_1 f + \mu X_2 f + \nu X_3 f \\ &= (\lambda x_2 + \mu x_1 + \nu x_1 x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} - \nu(x_1 - x_2 x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda + \mu x_3 + \nu x_3^2)\frac{\partial f}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Soit m_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) un point double de Xf, m_0 vérifie les conditions

$$\begin{aligned} \lambda + \mu x_3^0 + \nu x_3^{0\,2} &= 0, \\ x_1^0 - x_2^0 x_3^0 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Faisons une translation des axes de façon à amener l'origine en m_0

$$x_1 = x_2^0 x_3^0 + x'_1, \qquad x_2 = x_2^0 + x'_2, \qquad x_3 = x_3^0 + x'_3,$$

et bornons-nous dans le calcul de Xf aux termes du premier ordre par rapport aux x'

$$\begin{aligned} Xf = & \left\{ (\mu + \nu x_3^0) x'_1 - x_3^0 (\mu + \nu x_3^0) x'_2 + \ldots \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_1} \\ & + \left\{ -\nu x'_1 \qquad + \nu x_3^0 x'_2 + \nu x_3^0 x'_3 \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_2} \\ & + \left\{ (\mu + 2\nu x_3^0) x'_3 \right\} \frac{\partial f}{\partial x'_3}. \end{aligned}$$

Nous appellerons équation en S relative à Xf et au point m_0, l'équation en S relative aux trois formes linéaires en x'_1, x'_2, x'_3 qui constituent l'ensemble des termes de plus bas degré des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial x'_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x'_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x'_3}$ dans Xf. Ces racines sont

$$s_1 = \mu + 2\nu x_3^0 = s, \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = s,$$

x_3^0 est une fonction de λ, μ, ν; remplaçons x_3^0 par sa valeur, nous obtenons $s = \varepsilon\sqrt{\mu^2 - 4\lambda\nu}$ avec $\varepsilon^2 = 1$, la présence du signe $\mp$ n'a rien qui doive nous étonner, un sous-groupe g_1 admet en effet deux génératrices de points doubles, on ne peut donc caractériser entièrement une génératrice II par un sous-groupe de g à un paramètre qui la laisse invariante.

Étant donnés λ, μ, ν et ε ou, ce qui revient au même, g_1 et la génératrice double qu'on étudie, s_1, s_2, s_3 sont déterminés. Les racines de l'équation en S pour un sous-groupe g_1 sont les mêmes en tous les points d'une même génératrice double.

Ceci est évident *a priori*. En effet, soient m_0 et m'_0 deux points de la génératrice II' par exemple et T' une transformation de g' telle que $m'_0 = T' m_0$, l'identité $g_1 = T' g_1 T'^{-1}$ montre qu'en m_0 et en m'_0 les racines de l'équation en S relative à g_1 sont les mêmes, puisque ces racines restent invariantes si l'on fait un changement de variables.

Cherchons les racines de l'équation en S relative à m_0 et à $\overline{X}f$; l'équation de δ est

$$x'_1 - x_2^0 x'_3 - x_3^0 x'_2 - x'_2 x'_3 = 0.$$

$\overline{X}f$ a donc pour expression, en se limitant aux termes du premier degré,

$$\overline{X}f = \{ + \ldots \} \frac{\partial f}{\partial x'_2} + \{ (\mu + 2\nu x_3^0) x'_3 + \ldots \} \frac{\partial f}{\partial x'_3}.$$

Les racines de l'équation en S correspondante sont donc s_1 et s_2.

11. *Étude des racines de l'équation en* S *relative à une transformation de* G. — Nous allons démontrer que les racines de l'équation en S relative à un sous-groupe G_1 sont égales à celles de l'équation s en relatives au sous-groupe correspondant g_1 en un point de la génératrice double correspondante.

D'après ce que nous avons démontré au paragraphe **9** les groupes $\overline{g}$ et $\overline{G}$ sont semblables et les transformations $\overline{f}$ qui vérifient l'équation

$$\overline{f}\,\overline{g}\,\overline{f}^{-1} = \overline{G}$$

dépendent d'une fonction arbitraire. Comme les racines de l'équation en S relative à une transformation infinitésimale ne changent pas si l'on effectue un changement de variables, les racines relatives à $\overline{X}f$ et à $\overline{Y}f$ sont les mêmes en deux points homologues. Les racines S_1 et S_2 relatives à $\overline{Y}f$ sont donc $S_1 = s_1 = s$, $S_2 = s_2 = 0$.

Il est manifeste que deux racines de l'équation en S relative à Yf sont égales à celles de $\overline{Y}f$; nous allons montrer que la troisième racine S_3 est égale à s_3, c'est-à-dire à s.

Soit O un point de Δ, dans le voisinage de O faisons un changement de variables tel que, si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les paramètres qui servent à définir un point de $\mathfrak{M}$, le point O ait pour coordonnées $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, Δ ait pour équation $v_3 = 0$ et les courbes Q_u $v_3 = 0$, $v_2 = \text{const}$. Désignons par $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ trois transformations infinitésimales de G telles que $Z_1 f$ et $Z_2 f$ admettent O comme point double; Z_1 et Z_2 forment donc un groupe à deux paramètres et d'après Lie (t. III, Chap. I) on peut choisir Z_1, Z_2, Z_3 de telle sorte que

$$(Z_1, Z_2) - Z_1 = 0, \qquad (Z_1, Z_3) - 2Z_2 = 0, \qquad (Z_2, Z_3) - Z_3 = 0.$$

Développons les coefficients des Z suivant les puissances de v_1, v_2, v_3;

en vertu des hypothèses faites sur G, ces développement ont la forme

$$\begin{aligned}
Z_1 f = {} & (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_{11} v_1^2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_1} \\
& + v_3(a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_2} + v_3(A_0 + A_1 v_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_3}, \\
Z_2 f = {} & (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_{11} v_1^2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_1} \\
& + (b_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_2} + v_3(B_0 + B_1 v_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_3}, \\
Z_3 f = {} & (\gamma_0 + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 + \gamma_{11} v_1^2 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_1} \\
& + v_3(c_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_2} + v_3(C_0 + C_1 v_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_3}.
\end{aligned}$$

Substituons aux variables v les variables $\overline{v}$ définies par

$$\begin{aligned}
\overline{v_1} &= v_1 + h v_2 + k v_3, \\
\overline{v_2} &= v_2 + l v_3, \\
\overline{v_3} &= v_3.
\end{aligned}$$

Δ a encore pour équation $v_3 = 0$ et les courbes Q_{II} $v_3 = 0$, $v_2 = \text{const.}$

Exprimons les Yf au moyen des variables $\overline{v}$; les nouveaux coefficients $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_3} &= \alpha_3 + h a_0 + k A_0, \\
\overline{\beta_3} &= \beta_3 + h b_0 + k B^0
\end{aligned}$$

Le déterminant $a_0 B_0 - b_0 A_0$ n'est pas nul, car le développement de Δ suivant les puissances des v est

$$\Delta = \gamma_0(a_0 B_0 - b_0 A_0) v_3^2 + \ldots$$

et si $a_0 B_0 - b_0 A_0$ était nul, Δ commencerait par des termes du troisième ordre au moins, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc choisir h et k de façon que $\overline{\alpha}_0 = 0$, $\overline{\beta}_3 = 0$. En d'autres termes, on peut supposer les variables v choisies de telle sorte que α_3 et β_3 soient nuls, ce que nous ferons par la suite.

Considérons une transformation $Zf = \lambda Z_1 f + \mu Z_2 f$ admettant O comme point double, les racines de l'équation en S relative à cette transformation sont

$$s = \mu\beta_1, \qquad t_1 = 0, \qquad s_3 = \mu B_0.$$

Substituons les expressions précédemment écrites de Z_1, Z_2, Z_3 dans l'identité $(Z_1, Z_2) - Z_3 \equiv 0$ et annulons tous les termes de degré inférieur à 2, il vient

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2(\beta_1 - 1) = 0, \qquad \alpha_0\beta_2 - b_0\alpha_2 = 0,$$
$$A_0 b_0 - B_0 a_0 - a_0 = 0, \qquad A_0 = 0.$$

Annulons de même le terme constant de $(Z_2, Z_3) - Z_3$, d'où

$$\gamma_0(1 + \beta_1) = 0.$$

γ_0 ne peut être nul, sans quoi le point O serait point double de toutes les transformations de G et les mineurs du premier ordre de Δ s'y annuleraient, ce qui est contraire à l'hypothèse (1); donc $B_1 = -1$, ceci montre que $s_1 = -\mu$. Cette racine s_1 ne dépend pas de G, nous retrouvons ainsi un résultat déjà établi. Si l'on tient compte de $B_1 = -1$ les premières relations trouvées donnent

$$\alpha_1 = \alpha_2 = A_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_0(1 + B_0) = 0, \qquad a_0\beta_2 = 0.$$

Mais a_0 ne peut être nul, sans quoi la transformation $Z_1 f$ serait du second ordre et puisque Z_1 est du premier ordre, Δ commencerait par des termes du troisième ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc $B_0 = -1$, c'est-à-dire $s_3 = s_1$ et $\beta_2 = 0$, en définitive Z_1 et Z_2 sont de la forme

$$Z_1 f = \quad (+\ldots) \quad \frac{\partial f}{\partial v_1} + (a_0 v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_2} \quad (+\ldots) \quad \frac{\partial f}{\partial v_3},$$
$$Z_2 f = (-v_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_1} + (b_0 v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_2}(-v_3 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial v_3},$$

les termes non écrits étant du second ordre.

12. *Étude des trajectoires d'un sous-groupe de* G *dans le voisinage de* O. — Les trajectoires d'un sous-groupe G défini par Z_1, Z_2 admettent O comme point double et sont définies par le système

$$(2) \qquad \frac{dv_1}{\xi} = \frac{dv_2}{\eta} = \frac{dv_3}{\xi},$$

où l'on pose $Zf = \lambda Z_1 f + \mu Z_2 f = \xi \frac{df}{dv_1} + \eta \frac{df}{dv_2} + \zeta \frac{df}{dv_3}$. Dans le voisinage de O, ξ, η, ζ ont des développements de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= sv_1 + \ldots, \\ \eta &= \qquad (\lambda a_0 + \mu b_0) v_3 + \ldots, \\ \varphi &= \qquad\qquad s v_3 + \ldots. \end{aligned}$$

Faisons sur les v la transformation

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= s v_2 - (\lambda a_0 + \mu b_0) v_3, \\ u_3 &= v_3 \end{aligned}$$

ξ, η, ζ deviennent

$$\begin{aligned} \xi &= s u_1 + \ldots, \\ \varphi &= s u_3 + \ldots, \\ \eta &= \quad + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré au moins égal à 2.

D'après un théorème classique sur les équations différentielles, le système (2) admet des intégrales dépendant de deux constantes C_1 et C_2 et représentées par les équations

$$\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(C_1 e^{st}, C_2 e^{st}), \\ v_2 &= \varphi_2(C_1 e^{st}, C_2 e^{st}), \\ v_3 &= \varphi_3(C_1 e^{st}, C_2 e^{st}). \end{aligned}$$

Les fonctions $\varphi_i(\alpha, \beta)$ sont holomorphes et se réduisent à zéro pour $\alpha = \beta = 0$ et le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi_1, \varphi_3)}{D(\alpha, \beta)}$ n'est pas nul pour $\alpha = \beta = 0$. Il y a donc une infinité simple de trajectoires de Zf dépendant d'un paramètre et passant par O; elles sont situées sur la surface S_0 d'équations

$$v_i = \varphi_i(\alpha, \beta) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Comme $\frac{D(\varphi_1, \varphi_3)}{D(\alpha, \beta)}$ n'est pas nul, S_0 n'est pas tangente à Δ qui, rappelons-le, a pour équation $v_3 = 0$, S_0 contient la droite $v_2 = v_3 = 0$ qui est une trajectoire de Zf.

Cherchons l'équation du plan tangent en O à la surface S_0, soit

$$A v_1 + B v_2 + C v_3 + \ldots = 0;$$

l'équation de S_0, comme le plan tangent en O, contient la droite $v_2 = v_3 = 0$, $A = 0$; de plus, S_0 étant invariante par Zf,

$$Z(Bv_2 + Cv_3 + \ldots) = 0$$

ou

$$[B(\lambda a_0 + \mu b_0) - \mu C]v_3 + \ldots = 0;$$

on a donc

$$\frac{C}{B} = \frac{\lambda a_0 + \mu b_0}{\mu}$$

et l'équation du plan tangent à est

$$-\mu v_2 + (\lambda a_0 + \mu b_0)v_3 = 0.$$

a_0 ne peut être nul; nous avons démontré en effet que $\alpha_3 = 0$; si a_0 était nul, $Z_1 f$ serait du second ordre en O, ce qui est contraire aux hypothèses. On peut donc choisir λ et μ, c'est-à-dire la transformation Zf, laissant O invariant de façon que le plan tangent à S_0 soit un plan arbitrairement donné passant par la droite $v_2 = v_3 = 0$ et distinct du plan $v_3 = 0$.

Soit I(o, V, o) un point double de G_1 voisin de O; on peut raisonner sur I comme on a raisonné sur O; il existe une infinité simple de trajectoires de Zf passant par I; elles sont situées sur une surface S_1 non tangente à Δ et coupant Δ suivant la droite $v_2 = V$. Dans le voisinage de O faisons un changement de coordonnées (v_1, v_2 v_3 ; w_1, w_2, w_3) tel que les nouvelles coordonnées w de O soient (o, o, o), celles de I (o, V, o) et que les équations de Δ et S_i soient respectivement $w_3 = 0$, $w_2 = V$, G laisse invariante la famille de plans $w_2 = \text{const}$.

Soit $Zf = \xi_1 \frac{df}{dw_1} + \xi_3 \frac{df}{dw_3}$; les équations des transformations de G_1, exprimées au moyen du parametre canonique, s'obtiennent en intégrant le système

$$\frac{dw_1}{d\theta} = \xi_1, \qquad \frac{dw_2}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dw_3}{d\theta} = \xi_3$$

$w_2 = C_2$ est une intégrale première de ce système qui se réduit donc à

$$\frac{dw_1}{d\theta} = \xi_1(w_1, C_2, w_3),$$

$$\frac{dw_3}{d\theta} = \xi_3(w_1, C_2, w_3).$$

Par un changement de variables, la forme canonique des termes du premier degré de ξ, η, ζ n'a pas changé ; le système précédent admet donc, d'après la théorie classique, deux intégrales de la forme

$$\Theta_1(w_1, C_2, w_3) = C_1 e^{s\theta},$$
$$\Theta_2(w_1, C_2, w_3) = C_3 e^{s\theta}.$$

Θ_1, Θ_2 s'annulent pour $w_1 = w_3 = 0$ quel que soit w_2 et le déterminant $\dfrac{D(\Theta_1, \Theta_2)}{D(w_1, w_3)}$ n'est pas nul pour $w_1 = w_2 = 0$. Il en résulte que les équations de G_1 sont de la forme

$$w'_2 = w_2,$$
$$\Theta_1(w'_1, w'_2, w'_3) = e^{s\theta}\Theta_1(w_1, w_2, w_3),$$
$$\Theta_2(w'_1, w'_2, w'_3) = e^{s\theta}\Theta_2(w_1, w_2, w_3).$$

Sous cette forme, la répartition des trajectoires de G dans le voisinage de O apparaît nettement. Étant donnée une direction quelconque issue de O et située dans le plan $w_2 = 0$, il existe une trajectoire de G_1 et une seule tangente en O à cette direction.

13. *Étude de f^{-1} dans le voisinage d'un point de Δ.* — Tout d'abord, introduisons la convention de langage suivante : Soit $f(x_1, x_2, x_3)$ une fonction analytique d'un point $m(x_1, x_2, x_3)$ de l'espace à trois dimensions et soit γ une courbe analytique de cet espace définie par les formules paramétriques

$$x_1 = \varphi_1(z), \qquad x_2 = \varphi_2(z(, \qquad x_3 = \varphi_3(z).$$

Nous appellerons *fonction f sur la courbe γ* la fonction de z

$$f(z) = f[\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)],$$

Nous dirons que f est une fonction holomorphe de x_1, x_2, x_3 sur γ si $f(z)$ est holomorphe.

Théorème. — *Les x sont des fonctions homolorphes des y dans le voisinage de Δ sur les trajectoires des sous-groupes à un paramètre de G pour lesquels $\mu^2 - 4\lambda\nu$ n'est pas nul.*

Conservons les notations du paragraphe précédent; désignons par T une transformation de G_1 pour laquelle $|e^{r\theta}| < 1$, et par M_0 un point de coordonnées w_1^0, w_2^0, w_3^0 voisin de O et non situé sur Δ. D'après la forme que prennent les équations de G_1 dans le voisinage de O le point $T^n M_0$ tend vers le point M'_0 (o, o, w_3^0) pour n infini. Soient t la transformation de g_1 qui correspond à T et m_0 le point homologue de M_0; comme nous l'avons vu au paragraphe **8**, le point $t^n m_0$ tend vers un point m'_0 qui est point double de g_1. Par un changement de variables les équations de g_1 peuvent dans le voisinage de m'_0 se mettre sous la forme

$$\begin{gathered} X'_3 = X_3, \\ \theta_1(X'_1, X'_2, X'_3) = e^{s\theta}\theta_1(X_1, X_2, X_3), \\ \theta_2(X'_1, X'_2, X'_3) = e^{s\theta}\theta_2(X_1, X_2, X_3). \end{gathered}$$

On peut s'en assurer directement en examinant les équations écrites au paragraphe **8**; la valeur de s est la même pour g_1 et G_1 ainsi que que nous l'avons vu. Soient X_1^0, X_2^0, X_3^0 les coordonnées de m_0. La trajectoire Γ de G_1 qui passe par M_0 a pour équations

$$\frac{\Theta_1[w_1, w_2, w_3]}{\Theta_2[w_1, w_2, w_3]} = \frac{\Theta_1[w_1^0, w_2^0, w_3^0]}{\Theta_2[w_1^0, w_2^0, w_3^0]} = C_0 \qquad (w_3 = w_3^0),$$

les w désignant des coordonnées courantes; de même la trajectoire de g_1 issue de m_0 a pour équations

$$\frac{\theta_1[X_1, X_2, X_3]}{\theta_2[X_1, X_2, X_3]} = \frac{\theta_1[X_1^0, X_2^0, X_3^0]}{\theta_2[X_1^0, X_2^0, X_3^0]} = C_0 \qquad (X_3 = X_3^0).$$

Les points M_0 et m_0 se correspondent par la transformation f; il en est donc de même des points $M = TM_0$ et $m = tm_0$; soient w_1, w_2, w_3 les coordonnées de M et X_1, X_2, X_3 celles de m, comme T et t correspondent à la même valeur du paramètre canonique θ on a la relation

$$\frac{\Theta_1(w_1, w_2, w_3)}{\theta_1(X_1, X_2, X_3)} = \frac{\Theta_1(w_1^0, w_2^0, w_3^0)}{\theta_1(X_1^0, X_2^0, X_3^0)} = C'_0.$$

Cette équation, jointe aux équations de γ, montre que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions de w_1, w_2, w_3 holomorphes sur Γ dans le voisinage du point double M'_0 puisque le déterminant $\frac{D(\theta_1, \theta_2)}{D(X_1, X_2)}$ n'est pas nul en M'_0. Réciproquement les w sont des fonctions des X holomorphes sur γ dans le voisinage de m'_0.

THÉORÈME. — *Les x sont des fonctions holomorphes des y dans le voisinage de O sur toute courbe passant par O non tangente à Δ.*

Ainsi que nous l'avons vu, on peut toujours trouver un sous-groupe Zf admettant O comme point double et pour lequel la surface S_0 correspondante est tangente à un plan arbitraire contenant la droite $v_2 = v_3 = 0$ et distinct de $v_3 = 0$; de plus, il existe une trajectoire de Zf tangente à une direction arbitraire du plan tangent à S_0. Étant donnée une direction arbitraire issue de O et non tangente à Δ, il existe donc une trajectoire d'un sous-groupe Zf tangente à cette direction. On peut donc faire un changement de variables, qui substitue aux w les coordonnées u_1, u_2, u_3 tel que Δ ait toujours pour équation $u_3 = 0$ et que les trajectoires des sous-groupes issues de O aient pour équations

$$u_1 = c u_3, \qquad u_2 = c' u_3,$$

Soient $u_k = u^k + i u''_k$ $(k = 1, 2, 3)$; considérons dans l'espace à six dimensions u'_1, u''_1, u'_2, u''_2, u'_3, u''_3 un cône Γ à 5 dimensions de sommet $u'_i = u''_i = 0$ dont aucune génératrice ne se trouve dans la multiplicité Δ': $u''_3 = u'_3 = 0$; désignons par D le domaine délimité par ce cône qui ne contient pas Δ'. Posons

$$U_1 = \frac{u_1}{u_3}, \qquad U_2 = \frac{u_2}{u_3}, \qquad U_2 = u';$$

au domaine D correspond dans l'espace U'_1, U''_1, U'_2, U''_2, U'_3, U''_3 un domaine D'. D'après le théorème précédent, les x sont des fonctions holomorphes des y sur les trajectoires des sous-groupes de G; or ces trajectoires sont les courbes $U_1 = C$, $U_2 = C'$.

De plus, lorsque $U_3 = C''$ les x sont des fonctions holomorphes de U_1, U_2 dans le domaine que l'on obtient en coupant D' par la multiplicité $U_3 = C''$. En effet, si C'' n'est pas nul, la multiplicité $U_3 = C''$ n'a aucun point commun avec Δ et si U_3 est nul, l'intersection du domaine D' et de $U_3 = 0$ se réduit au point O et lorsque le point u_1, u_2, u_3 tend vers O le point x_1, x_2, x_3 corrrespondant tend vers un point déterminé de δ.

Il résulte de là que les x sont des fonctions holomorphes de U_1, U_2, U_3 dans D′; il suffit pour s'en asssurer de se rappeler le théorème suivant :

« Si une fonction de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction holomorphe de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ lorsqu'on donne à x_n une valeur constante arbitraire et une fonction holomorphe de x_n lorsqu'on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des valeurs quelconques, c'est une fonction holomorphe de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. »

Le théorème énoncé découle immédiatement des résultats précédents, car, étant donnée une courbe γ issue de O non tangente à Δ, on peut choisir le cône Γ de telle sorte que γ soit dans le domaine D; sur la courbe γ' homologue de γ dans l'espace U_1, U_2, U_3 les x sont des fonctions holomorphes de U_1, U_2, U_3; ils sont donc des fonctions holomorphes des y sur γ. C. Q. F. D.

Théorème. — *Les x sont des fonctions holomorphes des y dans le voisinage de tout point de* Δ. — Dans le voisinage d'un point O de Δ faisons un changement de coordonnées. Soient z_1, z_2, z_3 les nouvelles coordonnées; on peut choisir ce nouveau système de telle sorte qu'aucune des courbes coordonnées

$$\begin{cases} z_1 = \text{const.}, \\ z_2 = \text{const.}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 = \text{const.}, \\ z_3 = \text{const.}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_3 = \text{const.}, \\ z_1 = \text{const.}, \end{cases}$$

ne soit tangente à Δ dans le voisinage de O. D'après le théorème précédent, les x sont donc holomorphes sur ces courbes, en d'autres termes les x sont des fonctions de z_1, z_2, z_3 holomorphes par rapport à une de ces variables lorsqu'on suppose les deux autres constantes; en vertu d'un théorème déjà énoncé au cours de la démonstration précédente, les x sont des fonctions holomorphes de z_1, z_2, z_3.

14. *Étude des fonctions f sur δ.* — Essayons d'appliquer aux fonctions f les raisonnements du paragraphe précédent. Soient m'_0 un point de δ, m_0 un point non situé sur δ et t une transformation de g telle que $t^n m_0$ tende vers m'_0 lorsque n augmente indéfiniment. Soit M_0 l'homologue de m_0 et T la transformation correspondante de G; nous ne pouvons affirmer que $T^n M_0$ tende vers un point limite lorsque n devient infini.

Or, le raisonnement du paragraphe précédent était basé sur ce fait que, quels que soient t et m_0, $t^n m_0$ tend vers un point limite; nous l'avions déduit des équations finies de g exprimées au moyen des paramètres canoniques. On ne peut donc démontrer que les fonctions y des variables x sont holomorphes partout sur δ.

Par contre, soit O un point de Δ, nous avons montré qu'il existait un point M_0 et une transformation T de G tels que $T^n M_0$ tende vers O; si l'on désigne par m_0 le point homologue de M_0 et par t la transformation homologue de T, $t^n m_0$ tend vers un point limite m'_0 et en répétant le raisonnement du paragraphe **13** sur les fonctions y, on démontre que celles-ci sont des fonctions holomorphes des x dans le voisinage de m'_0. L'ensemble des points tels que m'_0 constitue un domaine $\overline{\mathfrak{D}}$ de δ à quatre dimensions, d'où le théorème : *Les y sont des fonctions holomorphes des x sur une certaine région de δ.*

Il est facile de trouver la forme de ce domaine $\overline{\mathfrak{D}}$: Supposons que les y soient des fonctions algébroïdes des x, en un point m_0 de δ; soient G_1 la génératrice du système I issue de m_0, M_0 le point de Δ homologue de m_0, Q_I la courbe homologue de G_1. Nous avons montré au paragraphe **3** que la relation $\varphi_1 = \psi_1$ établissait une correspondance algébrique entre les génératrices du système II de δ et les courbes Q_{II} ou ce qui revient au même entre les points homologues des courbes G_1 et Q_I. Les y considérées comme fonctions d'un point de G_1 sont algébriques, elles sont donc définies en tout point de G_1. Le domaine $\overline{\mathfrak{D}}$ est donc engendré de la façon suivante : Soit $\overline{\overline{\mathfrak{D}}}$ le domaine d'une génératrice II de δ dans lequel les y sont définies. $\overline{\mathfrak{D}}$ est formé des génératrices I issues de tous les points de $\overline{\overline{\mathfrak{D}}}$.

15. *Cas où les transformations de* G *sont birationnelles.* — Nous allons démontrer que si les transformations de G sont birationnelles, il en est de même des fonctions y :

Soient a $(y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$ un point de Δ et G_1 un sous-groupe de G à un paramètre admettant a comme point double, l'ensemble des trajectoires de G_1 passant par a forme, ainsi que nous l'avons vu, une surface S_a; écrivons les équations de G_1 dans le voisinage de a

$$y'_i = f_i[y_1, y_2, y_3, y_4, e^{s\theta}] \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

θ désignant le paramètre canonique de G_1, la surface S_a a pour équation

$$y_i^0 = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, 0) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

elle est donc algébrique. S_a est l'homologue d'un plan tangent à la quadrique δ; or toute droite de l'espace x_1, x_2, x_3 peut être considérée comme l'intersection de deux plans tangents à δ. Les courbes de la multiplicité $\mathfrak{M}$ homologues des droites de l'espace $E(x_1, x_2, x_3)$, c'est-à-dire les trajectoires G d'un sous-groupe quelconque G_1 de G à un paramètre sont algébriques. Considérons une transformation rationnelle T et imposons-lui les conditions suivantes :

T transforme $\mathfrak{M}$ en elle-même, est birationnelle, conserve chaque courbe G et est permutable avec toute transformation de G_1. Ces conditions sont algébriques et par conséquent l'ensemble des transformations T ainsi définies dépend algébriquement d'un certain nombre de paramètres; or, il est manifeste qu'une telle transformation T fait partie de G_1 puisque sur une courbe G, seule une transformation de G_1 est permutable avec toutes les autres transformations de ce sous-groupe. G_1 dépend donc algébriquement de ses paramètres et comme G_1 est un sous-groupe quelconque, il en est de même de G.

Il résulte de là que les transformations de G qui, à un point donné de $\mathfrak{M}$ font correspondre un autre point donné de cette multiplicité sont en nombre fini N. En reprenant le raisonnement fait au paragraphe **13** du Chapitre I, on en déduit que (g') ne comprend qu'un nombre fini N de transformations.

Les transformations de G étant birationnelles, on démontre sans difficultés que la fonction f^{-1} solution de l'équation

$$f^{-1}G = gf^{-1}$$

se comporte comme une fonction algébrique en tout point de $\mathfrak{M}$.

A un système de valeurs des y correspondent donc N systèmes de valeurs des x. Une fonction symétrique quelconque de ces N valeurs est une fonction uniforme des y qui se comporte partout comme une fonction rationnelle, elle est donc rationnelle et x_1, x_2, x_3 sont des fonctions algébriques des y. Il en résulte qu'inversement, les y sont des fonctions algébriques des x. Nous avons montré dans la première Partie que les transformations T et les fonctions $y(x)$ sont uniformes en même temps; il résulte de là que ces dernières fonctions sont rationnelles.

IV. — Application à certaines équations différentielles.

16. Considérons une transformation infinitésimale de G

$$\mathrm{Y}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial y_4},$$

nous allons appliquer les résultats précédemment obtenus à l'étude des trajectoires de $\mathrm{Y}f$. Le système

$$\frac{dy_i}{d\theta} = \xi_i(y) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

où les y sont les coordonnées d'un point de $\mathfrak{M}$ et où θ désigne le temps, peut être considéré comme définissant le mouvement du point y.

Représentons un point de $\mathfrak{M}$ par le point correspondant m (x_1, x_2, x_3) du polygone P. Soient $\mathrm{X}f$ la transformation de g homologue de $\mathrm{Y}f$, V et V′ les deux génératrices doubles de $\mathrm{X}f$, $\mathfrak{S}$ la congruence formée par les droites qui rencontrent V et V′; les trajectoires de $\mathrm{Y}f$ ont pour homologues les droites de l'espace $\mathrm{E}(x_1, x_2, x_3)$ appartenant à la congruence linéaire $\mathfrak{S}$; toute droite de cet espace est l'homologue d'une trajectoire d'un certain sous-groupe de G.

Soit τ une substitution de (g'), τ est contenue dans un sous-groupe g'_1 de g', soient U et U′ les génératrices doubles de g'_1; soient D la droite passant par l'intersection de U et V et par celle de U′ et de V′ et m_0 un point de D. Le point $m_1 = \tau m_0$ se trouve sur D, D rencontrant V et V′ est une trajectoire de $\mathrm{X}f$, il existe donc une transformation t du sous-groupe $\mathrm{X}f$ telle que $m_1 = t\, m_0$.

Soit ω la valeur du paramètre canonique θ qui correspond à t. La trajectoire de $\mathrm{Y}f$ homologue de D est une solution périodique du système (10); en effet, lorsque le temps augmente de ω, le point m de l'espace E subit la substitution τ de (g') et le point M correspondant reprend la même position.

Ainsi : *A toute substitution de* (g') *correspond une solution périodique du système* (10).

Dans ce qui précède, nous ne nous sommes inquiétés ni de la réalité de la solution, ni de celle de la période ω. L'étude des solutions asymptotiques est aussi ramenée à celle du groupe ultrakleinéen (g').

TROISIÈME PARTIE.

I. — Théorèmes réciproques.

Dans ce qui précède, nous avons défini des fonctions kleinéennes en passant par l'intermédiaire des fonctions ultrakleinéennes. Dans ce Chapitre, nous allons démontrer qu'une fonction kleinéenne peut toujours être définie par ce procédé.

On pourrait être tenté de définir des fonctions thêta de trois variables qui joueraient, vis-à-vis des fonctions ultrakleinéennes, un rôle analogue à celui des fonctions thétakleinéennes vis-à-vis des fonctions kleinéennes.

Soit

$$(\gamma') \qquad z' = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

un groupe kleinéen. Considérons le groupe

$$(g') \quad x_{1.k} = \frac{a_k x_1 + b_k x_3}{c_k x_2 + d_h}, \qquad x_{2.k} = \frac{a_k x_2 + b_k}{c_k x_2 + d_k}, \qquad x_{3.k} = \frac{c_k x_1 + d_k x_3}{c_k x_3 + d_k},$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

et formons

$$\frac{D(x_{1.k}, x_{2,k}, x_{3.k})}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{(a_k d_k - b_k c_k)^2}{(c_k x_2 + d_k)^4} = \left(\frac{dx_{2.k}}{dx_2}\right)^2.$$

Soit $R(x_1, x_2, x_3)$ une fonction rationnelle; la série

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \sum_1^\infty \left(\frac{dx_{2.k}}{dx_2}\right)^2 R(x_{1.k}, x_{2.k}, x_{3.k}),$$

où m est un entier positif est convergente, sauf pour les valeurs de x_2 qui sont les affixes d'un point limite de γ' et pour les points dont un transformé au moins par quelque substitution de (g') est un infini de R.

Le quotient de deux telles séries θ correspondant au même entier m est une fonction ultrakleinéenne. Il est visible que l'on peut choisir les fonctions rationnelles R de telle sorte que pour $x_1 = x_3 = 0$ cette fonction ultrakleinéenne se réduise à une fonction kleinéenne donnée. Mais une étude approfondie montre que le quotient de deux séries θ ne représente pas une fonction ultrakleinéenne dans tout son domaine d'existence. Entre quatre fonctions ultrakleinéennes correspondant au même groupe (g'), il n'y a pas, en général, de relation algébrique, car les singularités essentielles de ces fonctions dépendent des fonctions rationnelles R qui interviennent dans leur définition. Les conditions que doivent vérifier ces fonctions R pour qu'une relation algébrique existe entre quatre fonctions ultrakleinéennes semblent difficiles à établir.

Aussi, suivons-nous pour former des fonctions ultrakleinéennes une toute autre voie.

1. *Formation de fonctions ultrakleinéennes.* — Soit (γ') un groupe fuchsien

$$z_i = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots; \ a_i d_i - b_i c_i = 1)$$

et K un entier positif au moins égal à 2. Nous allons former un système de fonctions zétafuchsiennes $X_1(z)$, $Y_1(z)$, $Z_1(z)$, $T_1(z)$ vérifiant les équations

$$\begin{aligned}
X_1(z_i) &= [a_i X_1(z) + b_i Y_1(z)](c_i z + d_i)^k,\\
Y_1(z_i) &= [c_i X_1(z) + d_i Y_1(z)](c_i z + d_i)^k,\\
Z_1(z_i) &= [a_i Z_1(z) + b_i T_1(z)](c_i z + d_i)^k,\\
T_1(z_i) &= [c_i Z_1(z) + d_i T_1(z)](c_i z + d_i)^k.
\end{aligned}$$

et tel que $\frac{1}{T_1} = z$.

Remarquons pour cela que Z_1 et T_1 n'interviennent que dans les deux dernières équations et prenons pour T_1 une fonction thétafuchsienne T de l'ordre $\frac{k+1}{2}$

$$T_1 = T.$$

Cette fonction vérifie la condition $T(z_i) = T(z)(c_i z + d_i)^{k+1}$.

Posons

$$Z(z) = zT(z),$$

on aura bien

$$T(z_i) = [c_i zT(z) + d_i T(z)](c_i z + d_i)^k,$$
$$Z(z_i) = [a_i zT(z) + b_i T(z)](c_i z + d_i)^k.$$

Comme système $[X(z),\ Y(z)]$ vérifiant les conditions imposées, on peut prendre le système $[Z(z),\ T(z)]$. Le système des quatre fonctions

$$X_1(z) = Z(z), \qquad Y_1(z) = T(z), \qquad Z_1(z) = Z(z), \qquad T_1(z) = T(z).$$

vérifie donc les conditions imposées.

Par la suite, nous aurons besoin d'un second système X_2, Y_2, Z_2, T_2 vérifiant les mêmes conditions, mais distinct du précédent. Nous prendrons

$$Z_2(z) = Z(z), \qquad T_2(z) = T(z).$$

Soit $\theta_1(z)$ une fonction thétafuchsienne d'ordre $\frac{K}{2}$. Le système de fonctions $u(z) = \frac{Z(z)}{\theta_1(z)}$, $v(z) = \frac{T(z)}{\theta_1(z)}$ vérifie les équations

$$u(z_i) = a_i u(z) + b_i v(z),$$
$$v(z_i) = c_i u(z) + d_i v(z).$$

Soit $y = f_1(z)$ une fonction fuchsienne relativement au groupe (γ'); le système de fonctions

$$\frac{u'(z)}{f'_1(z)}, \quad \frac{v'(z)}{f'_1(z)}$$

vérifie les mêmes équations que le système (u, v) et l'on peut prendre

$$X_2(z) = \theta_1(z)\frac{u'(z)}{f'_1(z)} = \frac{f'_1}{\theta_1}\left(\frac{\theta_1}{Z}\right)',$$
$$Y_2(z) = \theta_1(z)\frac{v'(z)}{f'_1(z)} = \frac{f'_1}{\theta_1}\left[\frac{\theta_1}{Z} + z\left(\frac{\theta_1}{Z}\right)'\right].$$

Nous sommes ainsi en possession de deux systèmes distincts

$$(X_1, Y_1, Z, T), \quad (X_2, Y_2, Z, T)$$

vérifiant les équations proposées. Soit $g(z)$ une fonction fuchsienne relativement à (γ'). Je dis que le système

$$\frac{y_1 X_1(z) + y_2 X_2(z)}{T(z)} = x_1,$$

$$\frac{y_1 Y_1(z) + y_2 Y_2(z)}{T(z)} = x_3,$$

$$z = \frac{Z}{T} = x_2, \qquad y_3 = f_1(z), \qquad y_4 = g(z),$$

définit quatre fonctions uniformes y_1, y_2, y_3, y_4 de x_1, x_2, x_3. Si l'on se donne, en effet x_1, x_2, x_3; z est égal à x_2 d'après la troisième équation, y_3 et y_4 sont donc déterminées, les deux premières équations définissent y_1 et y_2 sans ambiguïté si le déterminant $X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ n'est pas nul, ou encore si $\frac{X^1}{Y_1} - z = \frac{\frac{T}{\theta_1}}{\left(\frac{T}{\theta_1}\right)'}$ n'est pas nul, ce qui a lieu lorsque T n'est pas identiquement nul.

Je dis de plus que les y sont des fonctions ultrafuchsiennes relativement au groupe (g') :

$$x_{1,i} = \frac{a_i x_1 + b_i x_3}{c_i x_2 + d_i}, \qquad x_{2,i} = \frac{a_i x_2 + b_i}{c_i x_2 + d_i}, \qquad x_{3,i} = \frac{c_i x_1 + d_i x_3}{c_i x_2 + d_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous préciserons ce point de la façon suivante : les deux fonctions fuchsiennes f_1 et g sont liées par une relation algébrique

$$F[f_1(z), g(z)] = 0.$$

Les fonctions y_1, y_2, y_3, y_4 sont donc liées par la relation

$$F(y_3, y_4) = 0.$$

Soit $y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0$ un système de quatre valeurs des y vérifiant la relation précédente, je dis que tous les systèmes de valeurs x'_1, x'_2, x'_3 tels que

$$y_i(x'_1, x'_2, x'_3) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

se déduisent de l'un d'entre eux x_1, x_2, x_3 par toutes les substitutions de (g').

Les équations

$$f_1(x'_2) = y_3^0 \qquad g(x'_2) = y_4^0$$

montrent que x'_2 se déduit de x_2 par une certaine substitution de (γ')

$$x'_2 = \frac{a_i x_2 + b_i}{c_i x_2 + d_i} = x_{2.i}$$

et les formules de définitions de y_1, y_2 donnent

$$x'_1 = \frac{y_1^0 X_1(x_{2.i}) + y_2^0 X_2(x_{2.i})}{T(x_{2.i})}.$$

$$x'_3 = \frac{y_1^0 Y_1(x_{2.i}) + y_2^0 Y_2(x_{2.i})}{T(x_{2.i})}.$$

c'est-à-dire

$$x'_1 = \frac{a_i \dfrac{y_1^0 X_1(x_2) + y_2^0 X_2(x_2)}{T(x_2)} + b_i \dfrac{y_1^0 Y_1(x_2) + y_2^0 Y_2(x_2)}{T(x_2)}}{c_i x_2 + d_i} = \frac{a_i x_1 + b_i x_3}{c_i x_2 + d_i},$$

$$x'_2 = \frac{c_i \dfrac{y_1^0 X_1(x_2) + y_2^0 X_2(x_2)}{T(x_2)} + d_i \dfrac{y_1^0 Y_1(x_2) + y_2^0 Y_2(x_2)}{T(x_2)}}{c_i x_2 + d_i} = \frac{c_i x_1 + d_i x_3}{c_i x_2 + d_i}.$$

C. Q. F. D.

Posons $\frac{T(z)}{\theta_1(z)} = \theta(z)$, θ est une fonction thétafuchsienne d'ordre $\frac{1}{2}$. En résolvant le système qui définit les y, on trouve

$$y_1 = x_3 - (x_1 - x_1 x_3)\frac{\theta'}{\theta}(x_2),$$

$$y_2 = (x_1 - x_2 x_3) f'_1(x_2),$$

$$y_3 = f_1(x_2),$$

$$y_4 = g(x_2).$$

Il reste à former une fonction θ d'ordre $\frac{1}{2}$: Soient $g(z)$ et $h(z)$ deux fonctions fuchsiennes, $h'(z)$ est une fonction θ d'ordre 1, donc $\theta = g(z)\sqrt{h'(z)}$ est une fonction θ d'ordre $\frac{1}{2}$; elle n'est pas uniforme, mais il est facile de voir que $\frac{\theta'}{\theta} = \frac{g'}{g} + \frac{1}{2}\frac{h''}{h'}$ est uniforme, et cela suffit pour ce que nous avons en vue.

On vérifie facilement sur ces expressions que les y ne changent pas lorsqu'on effectue sur les x une substitution de (g').

2. *Formation du groupe* G. — Bornons-nous à une étude sommaire des fonctions y précédemment définies.

Ces fonctions se comportent comme des fonctions rationnelles des x en tout point x_1, x_2, x_3 pour lequel la valeur correspondante de x_2 n'est pas l'affixe d'un point limite de (γ'). Le polyèdre fondamental de (g') est facile à trouver: Soit S un polynome fuchsien correspondant au groupe (γ'), prenons pour P le domaine suivant : (x_2 intérieur à S, x_1 et x_3 arbitraires). Je dis que tout point $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ est le transformé d'un point $M(x_1, x_2, x_3)$ de P par une substitution de (g') et par une seule.

Il existe un seul point x_2 intérieur à S et une seule substitution τ_1 de (γ') tels que

$$x'_2 = \tau_1 x_2.$$

Soit τ la substitution de (g') qui correspond à τ_1 et $M = \tau^{-1} M'$, le point M est intérieur à P et $M' = \tau M$; d'après sa construction, M est unique ainsi que τ. C. Q. D. F.

Les y se comportent comme des fonctions rationnelles à l'intérieur de P.

Effectuons sur les variables x une transformation t du groupe g :

$$(t) \qquad x'_1 = \frac{a x_1 + b x_2}{c x_3 + d}, \qquad x'_2 = \frac{c x_1 + d x_2}{c x_3 + d}, \qquad x'_3 = \frac{a x_3 + b}{c x_3 + d}.$$

Les fonctions subiront une transformation T que nous nous proposons d'étudier. Soit.

$$y'_i = y_i(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Les y' sont des fonctions ultrafuchsiennes de x_1, x_2, x_3, relativement au groupe (g'), on pourrait être tenté d'en conclure que les y' sont des fonctions rationnelles des y et que T est birationnelle. Une telle conclusion est manifestement inexacte, car s'il en était ainsi, les singularités essentielles des y et des y' seraient les mêmes; or, un point singulier des y' s'obtient en transformant par t^{-1} un point singulier des y et l'ensemble de ces points n'est pas invariant par t.

On peut seulement affirmer que la transformation T est biuniforme; en effet, les y étant donnés, les x sont définis à une transformation près τ de (g'); mais t étant permutable avec τ les diverses valeurs correspondantes des x' se déduisent d'une d'entre elles par les transformations de (g'), les y' sont donc définis sans ambiguïté par la donnée des y.

Considérons une transformation infiniment petite t de g, t^{-1} déplacera infiniment peu les singularités essentielles des y; supposons que t dépende d'un paramètre α et se réduise à la transformation identique pour $\alpha = 0$ les fonctions

$$\frac{y_i(x'_1, x'_2, x'_3) - y_i(x_1, x_2, x_3)}{\alpha}$$

sont des fonctions ultrafuchsiennes de x_1, x_2, x_3 quel que soit α; lorsque α tend vers zéro; on obtient donc des fonctions ultrafuchsiennes $\xi_i(x_1, x_2, x_3)$ qui ont les mêmes singularités essentielles que les y; cette fois, il n'y a plus d'impossibilité à ce que les ξ soient des fonctions rationnelles des y; nous allons démontrer qu'il en est ainsi.

Remarquons que

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \xi_4 \frac{\partial f}{\partial y_4}$$

est une transformation infinitésimale de G. Formons donc les transformation Y_1, Y_2, Y_3 de G homologues de X_1, X_2, X_3 et exprimons leurs coefficients au moyen des y. Soit

$$Y_i f = \sum_{k=1}^{k=4} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

on aura

$$\xi_{ik} = X_i y_k$$

et, par suite,

$$\xi_{11} = x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 1, \qquad \xi_{12} = 0, \qquad \xi_{13} = 0, \qquad \xi_{14} = 0;$$

$$\xi_{21} = x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = x_3 - (x_1 - x_2 x_3) \frac{\theta'}{\theta}(x_2) = y_1;$$

$$\xi_{22} = y_2, \qquad y_{23} = 0, \qquad \xi_{24} = 0;$$

et

$$\xi_{31}=x_1x_3\frac{\partial y_1}{\partial x_1}-(x_1-x_2x_3)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+x_3^2\frac{\partial y_1}{\partial x_3}=y_1^2+y_2^2\frac{\dfrac{\theta''}{\theta}-2\dfrac{\theta'^2}{\theta^2}}{f_1'^2};$$

$$\xi_{32}=2y_1y_2+y_2^2\frac{2f_1'\dfrac{\theta'}{\theta}-f_1''}{f_1'^2};$$

$$\xi_{33}=-y_2,\qquad y_{34}=y_2\frac{F'_{y_3}}{F'_{y_4}}.$$

Vérifions que $\frac{1}{f_1'^2}\left[\frac{\theta''}{\theta}-2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right]$ et $\frac{1}{f_1'^2}\left[2f_1'\frac{\theta'}{\theta}-f_1''\right]$ sont des fonctions fuchsiennes.

Imaginons qu'on effectue sur la variable z la substitution $z_1=\frac{az+b}{cz+d}$ du groupe (γ'); en posant $f_1(z_1)=f_2(z)$, $\theta(z_1)=\theta_2(z)$, on obtient successivement

$$f_2=f_1,\qquad f_2'=f_1'(cz+d)^2,\qquad f_2''=f_1''(cz+d)^4+2f_1'c(cz+d)^3;$$

$$\theta_2=\theta,\qquad \left[\frac{\theta'}{\theta}\right]_2=\frac{\theta'}{\theta}(cz+d)^2+c(cz+d);$$

$$\left[\frac{\theta''}{\theta}-\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right]_2=\left[\frac{\theta''}{\theta}-\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right](cz+d)^4+\frac{\theta'}{\theta}2c(cz+d)^3+c^2(cz+d)^2;$$

$$\left[\frac{\theta''}{\theta}-2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right]_2=\left[\frac{\theta''}{\theta}-2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right](cz+d)^4;$$

d'où

$$\left\{\frac{1}{f_1'^2}\left[\frac{\theta''}{\theta}-2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right]\right\}_2=\frac{1}{f_1'^2}\left[\frac{\theta''}{\theta}-2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right].$$

De même

$$\left\{\frac{1}{f_1'^2}\left[2f_1'\frac{\theta'}{\theta}-f_1''\right]\right\}_2=\frac{1}{f_1'^2}\left[2f_1'\frac{\theta'}{\theta}-f_1''\right].$$

Les deux fonctions proposées sont donc des fonctions fuchsiennes de z, c'est-à-dire des fonctions rationnelles φ et ψ de $f_1(z)$ et $g(z)$. Les transformations infinitésimales de G sont, en définitive,

$$\mathrm{Y}_1f=\frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$\mathrm{Y}_2f=y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$\mathrm{Y}_3f=[y_1^2+y_2^2\varphi(y_3,y_4)]\frac{\partial f}{\partial y_1}+[2y_1y_2+y_2^2\psi(y_3,y_4)]\frac{\partial f}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial f}{\partial y_3}+y_2\frac{F'_{y_3}}{F'_{y_4}}\frac{\partial f}{\partial y_4},$$

y_3, y_4 étant liés par la relation

$$F(y_3, y_4) = 0.$$

3. *Relation entre la théorie précédente et celle des équations linéaires.* — Les fonctions rationnelles φ et ψ qui interviennent dans y_3 sont définies par les deux équations :

$$\varphi = \frac{1}{f_2'^4}\left[\frac{\theta''}{\theta} - 2\frac{\theta'^2}{\theta^2}\right], \qquad \psi = \frac{1}{f_1'^2}\left[2f_1'\frac{\theta'}{\theta} - f_1''\right].$$

Éliminons θ entre ces équations.

On tire de la première $\dfrac{\theta'}{\theta} = \dfrac{f_1'' + f_1'^2\psi}{2f_1'}$.

Désignons par ψ' la dérivée de ψ considérée comme fonction de y^3

$$\frac{\theta''}{\theta} - \frac{\theta'^2}{\theta^2} = \frac{f_1''' + 2f_1'f_1''\psi + f_1'^3\psi'}{2f_1'} - \frac{f_1''[f_1'' + f_1'^2\psi]}{2f_1'^2},$$

d'où

$$\varphi = \frac{1}{f_1'^4}[2f_1'f_1''' - 3f_1''^2 - f_1'^4(\psi^2 - 2\psi')]$$

et finalement

$$\frac{2f_1'f_1''' - 3f_1''^2}{4f_1'^4} = \varphi + \frac{\psi^2 - 2\psi'}{4} = A(f, g).$$

La fonction $f_1(x_2)$ est donc définie par l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} = A(x, y), \qquad F(x, y) = 0.$$

II. — Étude de G.

4. *Simplification de* G. — Le groupe G se simplifie si l'on substitue aux variables y_1, y_2, y_3, y_4 les variables $[y_1]$, $[y_2]$, $[y_3]$, $[y_4]$ définies par le changement de variables birationnel

$$[y_1] = y_1 + y_2\frac{\psi(y_3)}{2}, \qquad [y_2] = y_2, \qquad [y_3] = y_3, \qquad y_4 = [y_4];$$

les Y_i prennent la forme suivante :

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1},$$
$$Y_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$Y_3 f = [y_1^2 + y_2^2 A(y_3)] \frac{\partial y_2}{\partial f} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3},$$

où l'on a posé

$$A = \varphi + \frac{\psi^2 - 2\psi'_{y_3}}{4}.$$

Calculons les $[y]$ en fonction de x_1, x_2, x_3 :

$$y_1 = x_3 - \frac{1}{2} x_1 = x_2 x_3 \frac{f''_1(x_2)}{f'_1(x^2)}, \qquad y_2 = (x_1 - x_2 x_3) f'_1(x_2),$$
$$y_3 = f_1(x_2), \qquad y_4 = g(x_2).$$

C'est avec ces variables que nous étudierons désormais G.

On peut former des équations finies des sous-groupes Y_1 et Y_2

$$(Y_1) \qquad y'_1 = y_1 + t, \qquad y'_2 = y_2, \qquad y'_3 = y_3, \qquad y'_4 = y_4.$$

Il est facile de vérifier directement que lorsqu'on effectue sur $x_1\, x_2\, x_3$ une transformation du sous-groupe $X_1 f$

$$(X_1) \qquad x'_1 = x_1 + t x_2, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3 + t,$$

les y subissent une substitution du sous-groupe Y_1.

On peut reprendre sur Y_2 des considérations analogues

$$(X_2) \qquad x'_1 = x_1 e^t, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3 e^t,$$
$$(Y_2) \qquad y'_1 = y_1 e^t, \qquad y'_2 = y_2 e^t, \qquad y'_3 = y'_3, \qquad y'_4 = y_4.$$

En général, on ne peut former les équations finies de Y_3. On vérifie sans peine que les relations de structure entre les Y sont identiquement vérifiées quelles que soient la fonction A et l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f(g) = G(f)$$

définit alors des fonctions ultrafuchsiennes y_1, y_2, y_3, y_4 et l'on peut choisir G de telle sorte que pour $x_1 = x_3 = 0$, y_3 se réduise à une fonction fuchsienne arbitrairement donnée.

5. *Domaine d'existence des transformations de* G. — Dans le cas présent, les y sont des fonctions uniformes des x, il en résulte ainsi que nous l'avons établi dans la première Partie que les transformations T de G sont biuniformes et correspondent biuniformément aux transformations de g. On peut du reste le vérifier directement.

Étudions le domaine d'existence d'une transformation $y' = \mathrm{T}y$ de G. Deux cas peuvent se présenter :

1° L'ensemble des points limites de (γ') forme une ligne continue; par exemple $f_1(x_2)$ est une fonction fuchsienne admettant le cercle $|x_2| = 1$ comme coupure essentielle. Les fonctions $y = f(x)$ ne sont donc définies que si $|x_2| < 1$, par exemple. Soit t la transformation de g homologue de T d'équations

$$x'_1 = \frac{ax_1 + bx_2}{cx_3 + d}, \qquad x'_2 = \frac{cx^1 + dx_2}{cx_1 + d}, \qquad x'_3 = \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}.$$

On peut écrire les équations $y' = \mathrm{T}y$ de T de la façon suivante :

$$y' = f(x'), \qquad y = f(x), \qquad x' = tx.$$

y' cessera d'être définie si $|x'_2| > 1$, c'est-à-dire si

$$\left|\frac{cx_1 + dx_2}{cx_3 + d}\right| > 1.$$

La multiplicité $\left|\frac{cx_1 + dx_2}{cx_3 + d}\right| = 1$ de l'espace x_1, x_2, x_3 a pour homologue une multiplicité $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{M}$; lorsque le point y traverse $\mathcal{E}$, T cesse d'être définie. Dans le cas présent les transformations T admettent donc des coupures essentielles.

Posons-nous le problème suivant : « Soit M un point de $\mathfrak{M}$, quelles sont les transformations T définies en ce point? » Soit x_1, x_2, x_3 le point homologue de l'espace x, on a évidemment $|x_2| < 1$, une transformation T sera définie en M si $\left|\frac{cx_1 + dx_2}{cx_3 + d}\right| < 1$.

Si x_1 et x_3 sont finis, $\dfrac{\frac{c}{d}x_1 + x_2}{\frac{c}{d}x_3 + 1}$ tend vers x_2 lorsque $\frac{c}{d}$ tend vers zéro et comme $|x_2| < 1$, la condition imposée sera certainement réalisée en prenant pour $\frac{c}{d}$ une valeur suffisamment petite, ou encore en prenant pour T une transformation suffisamment voisine de la transformation identique.

Il n'en est plus de même si x_1 et x_3 sont infinis; posons

$$x_1 = u_1 u_3^{-1}, \qquad x_2 = u_2 u_3^{-1}, \qquad x_3 = u_3^{-1},$$

x_3 étant infini et x_2 étant fini, on aura $u_2 = u_3 = 0$ et la condition imposée s'écrit $|u_1| < 1$.

Donc si $|u_1| > 1$ aucune transformation T, même infiniment petite n'est définie en M. Cherchons les coordonnées y de M. On a

$$\begin{aligned} y_1 &= u_3^{1} + \frac{1}{2}(u_2 - u_1 u_3) u_3^{-1} f''_1(x_2) f'^{-1}_1(x_2), \\ y_2 &- (u_1 u_3 - u_2) u_3^{-2} f'_1(x_2), \\ y_3 &= f_1(x_2). \end{aligned}$$

Posons $z_1 = y_1^{-1}$, $z_2 = y_2 y_1^{-1}$, $z_3 = y_3$; on déduit des équations précédentes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2 u_3 f'_1(x_2)}{2 + (x_2 - u_1) f''_1(x_2)}, \\ z_2 &= \frac{-2(x_2 - u_1) f'^2_1(x_2)}{2 + (x_2 - u_1) f'^2_1(x_2)}, \\ z_3 &= f_1(x_3); \\ u_1 &= x_2 + \frac{2 f'_1 z_2}{2 f'^2_1 + z_2 f''_1}, \\ u_2 &= \frac{2 f'^2_1 z_1}{2 f'^2_1 + z_2 f''}, \\ y_3 &= f\left(\frac{u_2}{u_3}\right). \end{aligned}$$

Donc si $u_2 = u_3 = 0$ et si $|u_1| < 1$, on a

$$\begin{gathered} z_1 = 0, \\ \left| x_2 + \frac{2 f'_1(x_2) z_2}{2 f'^2_1(x_2) + z_2 f''_1(x_2)} \right| < 1, \\ z_3 \text{ arbitraire}; \end{gathered}$$

en un tel point de $\mathfrak{M}$, aucune transformation de G n'existe.

Par contre, si $|u_1| < 1$, toutes les transformations T sont définies en ce point. Il est à remarquer que les points $u_2 = u_3 = 0$ font partie de Δ. Les points M tels que $z_1 = 0$ constituent ce que nous avons appelé Δ_1; en ces points, on ne peut pas définir les transformations infiniment petites de G.

On peut du reste retrouver ce résultat en se plaçant à un autre point de vue. Le domaine d'existence des fonctions y est formé de l'ensemble des points intérieurs à la multiplicité $\mathcal{S}\,|x_2| = 1$; on peut considérer $\mathcal{S}$ comme engendrée par les multiplicités $x_2 = C$ issues des points de $|x_2| = 1$, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; or ces multiplicités $x_2 = C$ ou $u_2 = Cu_3$ passent par la droite $u_2 = u_3 = 0$; en d'autres termes, la frontière du domaine d'existence des y admet $u_2 = u_3 = 0$ comme ligne double. Écrivons la transformation t avec les variables u:

$$u'_1 = \frac{au_1 + bu_2}{a + bu_3}, \qquad u'_2 = \frac{cu_1 + du_2}{a + bu_3}, \qquad u'_3 = \frac{c + du_3}{a + bu_3};$$

appliquons t au point u_1, 0, 0:

$$u'_1 = u_1, \qquad u'_2 = \frac{c}{a}u_1, \qquad u'_3 = \frac{c}{a}.$$

Les coordonnées du point M correspondant sont

$$z'_1 = \frac{\frac{c}{a}f'_1(u_1)}{u_1\left(1 - \frac{c}{a}\right)f''_1(u_1)}, \qquad z'_2 = 0, \qquad z'_3 = f_1(u_1).$$

On voit donc que si $|u_1| > 1$ ce point n'existe pas et aucune transformation T n'est définie. Si $|u_1| < 1$, ce point z' est défini et dépend rationnellement des paramètres a, b, c, d, toutes les transformations de G sont définies en ce point. Il faut également remarquer que si t se réduit à la transformation identique z'_1, z'_2, z'_3 ne tendent pas vers z_1, z_2, z_3.

2° L'ensemble des points limites de (γ') ne forme pas une ligne continue, mais est formée par exemple des points du cercle $|x_2| = 1$ appartenant à un certain ensemble parfait A qui n'est dense dans aucun intervalle; ni les $y(x)$ ni les transformations T n'admettent de coupures essentielles; elles admettent seulement des multiplicités de points singuliers essentiels. La multiplicité $y_1 = \infty$, $y_2 = \infty$ constitue encore Δ_1; en un point de Δ_1 on ne peut définir aucune transformation de G si u_1 appartient à A; au contraire, elles sont toutes définies si u_1 n'appartient pas à A.

6. *Singularité des transformations de* G. — En dehors de ses singularités essentielles que nous venons d'étudier, une transformation T sera singulière lorsque (x), t ou $f^{-1}(y)$ sera singulier. t étant homographique n'admet pas de singularités, $f(x)$ n'admet d'autres singularités que les pôles de $f_1(x)$ et $f^{-1}(y)$ ne sera singulier que lorsque le déterminant fonctionnel $\frac{D(y)}{D(x)}$ s'annule; or

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = f_1'^2(x_2).$$

Nous n'aurons donc à examiner que les pôles de f_1 et les zéros de f'_1.

$f'_1(x_2)$ s'annule soit en un point double d'une substitution elliptique de (γ'), soit en un point où $\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$.

7. *Étude d'un point double d'une substitution elliptique de* (γ'). — Soit x_2^0 un tel point; posons $f_1(x_2^0) = 0$, $g(x_2^0) = y_4^0$, $x_2 = x_2^0 + z$, et soit $f_1(x_2) = z^p + \ldots$, p désignant un entier, on a

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_3 - \frac{p-1}{2}[x_1 - x_2 x_3]\left[\frac{1}{z} + \ldots\right],\\
y_2 &= p(x_1 - x_2 x_3)[z^{p-1} + \ldots],\\
y_3 &= z^p + \ldots.
\end{aligned}$$

Lorsque z tend vers zéro, y_3 tend vers zéro, y_4 vers y_4^0, y_1 vers l'infini et y_2 vero zéro. Faisons tendre maintenant y_3 vers zéro et y_4 vers y_4^0, z tend vers zéro, y_1 vers l'infini et y_2 vers zéro, à moins que $x_1 - x_2\ x_3$ ne tende vers zéro ou l'infini. Si $x_1 - x_2\ x_3$ tend vers zéro, le point y correspondant tend vers un point de Δ, si $x_1 - x_2 x_3$ tend vers l'infini, y tend vers un point de Δ_1. Soient y_1^0, y_2^0 deux quantités arbitraires, il n'existe donc pas de point x_1, x_2, x_3 hors de Δ et Δ_1 tels que

$$y_1 = y_1^0, \qquad y_2 = y_2^0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = y_4^0,$$

à moins que l'on ait $y_4^0 = \infty$, $y_2^0 = 0$.

Résolvons les formules par rapport à x_1, x_2, x_3 :

$$x_2 = x_2^0 + y_3^{\frac{1}{p}} + \ldots,$$
$$x_3 = y_1 + \frac{p-1}{2p} y_2 y_3^{-1} + \ldots,$$
$$x_1 = x_2^0 \left[y_1 + \frac{p-1}{2p} y_2 y_3^{-1} \right] + y_1 y_3^{\frac{1}{p}} + \frac{p+1}{2p} y_2 y_3^{\frac{1}{p}-} + \ldots.$$

Lorsque y_3 tend vers zéro, x_1 et x_3 tendent vers l'infini, à moins que y_2 ne tende vers zéro et y_1 vers l'infini. Nous arrivons à la conclusion suivante :

Le point y_1^0, y_2^0, o, y_4^0 appartient à Δ_1 si y_1^0 n'est pas infini et si y_2^0 n'est pas nul. Par contre, si $y_1^0 = \infty$, $y_2^0 = 0$ le point considéré est un point singulier rationnel, au sens que nous avons donné à ce mot, et l'on peut prendre, pour transformation $z = u(y)$, la transformation

$$z_1 = y_3^{\frac{1}{p}}, \qquad z_2 = y_1 y_3^{\frac{1}{p}} + \frac{p+1}{2p} y_2 y_3^{\frac{1}{p}-1}, \qquad z_2 = y_1 + \frac{p-1}{2p} y_2 y_3^{-1};$$

on constate sans peine que A admet $y_3 = 0$ pour pôle et que

$$A = \frac{1-p^2}{4p^2} y_3^{-2} + \ldots.$$

8. *Étude d'un point où* $\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$. — Supposons que, pour $y_3 = y_4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y_4}$ s'annule, et que F soit de la forme

$$F = y_3 - y_4^2 - \alpha y_4^2 + \ldots = 0.$$

Soit x_2^0 la valeur de x_2 telle que $f_1(x_2^0) = 0$, $g(x_2^0) = 0$ et posons $x_2 = x_2^0 + z$. Soient

$$y_3 = z^2 + a z^3 + \ldots,$$
$$y_4 = z + b z^2 + \ldots,$$

les développements de y_3 et y_4, on constate sans peine que $\alpha = a - 2b$; formons les développements des y_i :

$$y_1 = x_3 - \frac{x_1 - x_2 x_3}{z} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} a z + \ldots \right].$$
$$y_2 = (x_1 - x_2 x_3)(2z + 3az^2 + \ldots),$$
$$y_3 = z^2 + a z^3 + \ldots, \qquad y_4 = z + b z^2 + \ldots$$

et réciproquement

$$
\begin{aligned}
z &= y_4 + \ldots, \\
x_3 &= y_1 + y_2 y_4^{-2}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\alpha y_4 + \ldots\right], \\
x_1 &= x_2^0 x_3 + y_1 y_4 + \frac{3}{2} y_2 y_4^{-1} + \ldots .
\end{aligned}
$$

Lorsque z tend vers zéro, y_1 tend vers l'infini et y_2 vers zéro; on constate, comme au paragraphe précédent, que le point y_1^0, y_2^0, o, o appartient à Δ_1, sauf si $y_1^0 = \infty$, $y_2^0 = 0$.

Dans ce dernier cas, le point est un point singulier birationnel et l'on peut prendre, pour $z = u(y)$, la transformation suivante :

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{4} y_2 y_4^{-2}, \qquad z_2 = y_2 y_4^{-1}, \qquad z_3 = y_4;$$

on a de plus

$$A = -\frac{3}{16} y_4^{-4} - \frac{3\alpha}{8} y_4^{-3} + \ldots .$$

9. *Étude d'un pôle de $f_1(x_2)$.* — Soit x_2^0, un tel pôle,

$$x_2 = x_2^0 + y \qquad \text{et} \qquad f_1(x_2) = \frac{1}{z} + \ldots,$$

y_1 et y_2 deviennent infinis pour $z = 0$ et le point y_1^0, y_2^0, ∞, y_4^0 appartient à Δ_1 si y_1^0 et y_2^0 sont finis. La transformation u est ici

$$z_1 = y_3^{-1}, \qquad z_2 = y_2 y_3^{-2}, \qquad z_3 = y_1 + y_2 y_3^{-1},$$

et $A = A_1 y_3^{-4}$, A_1 étant holomorphe.

III. — Étude directe de G au moyen de ses transformations infinitésimales.

Considérons le groupe G défini par les transformations infinitésimales :

$$F(y_3, y_4) = 0,$$

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \qquad Y_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$Y_3 f = [y_1^2 + y_2^2 A(y_3, y_4)]\frac{\partial f}{\partial y_1} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_2 \frac{F'_{y_3}}{F'_{y_4}} \frac{\partial f}{\partial y_4},$$

et proposons-nous d'étudier ce groupe.

Le domaine Δ a pour équation $y_2 = 0$, les seules singularités des $Y_i f$ sont les points où une des coordonnées y_1, y_2, y_3 est infinie, les pôles de A et les zéros de F'_{y_4}. Examinons successivement ces singularités.

10. *Pôles de* A. — Soit y_3^0, y_4^0 un pôle de A; en remplaçant y_3 par $y_3 - y_3^0$, on peut poser $y_3^0 = 0$. Faisons sur A l'hypothèse suivante :

$$A = A_1 y_3^{-2},$$

A_1 étant un développement de y_3 holomorphe pour $y_3 = 0$ et dont le développement commence par le terme

$$A_1 = \frac{1 - p^2}{4p^2},$$

p désignant un entier positif égal au moins à 2.

Faisons le changement de variables :

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{p+1}{2} z_3 - \frac{p-1}{2} z_1^{-1} z_2, \\
y_2 &= p(z_2 - z_1 z_3) z_1^{p-1}, \\
y_3 &= z_1^p; \\
z_1 &= y_3^{\frac{1}{p}}, \\
z_2 &= y_1 y_3^{\frac{1}{p}} + \frac{p+1}{2p} y_2 y_3^{\frac{1}{p}-1}, \\
z_3 &= y_1 + \frac{p-1}{2p} y_2 y_3^{-1}.
\end{aligned}$$

Exprimons Y_1, Y_2, Y_3 au moyen des variables z :

$$\begin{aligned}
Y_1 f &= z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial z_3}, \\
Y_2 f &= z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial z_3}, \\
Y_3 z_1 &= -(z_2 - z_1 z_3), \\
Y_3 z_2 &= z_1 z_3^2 \frac{1-p^2}{4} + z_2 z_3 \frac{1+p^2}{2} - p^2\left[A_1 - \frac{1-p^2}{4p^2}\right] z_3 + p^2\left[A_1 - \frac{1-p^2}{4p^2}\right] z_2 z_1^{-1}, \\
Y_3 z_3 &= \left[p^2 A_1 + \frac{p^2+3}{4}\right] z_3^2 + p^2[z_2^2 z_1^{-2} - 2 z_1^{-1} z_2 z_3]\left[A_1 + \frac{p^2-1}{4p^2}\right];
\end{aligned}$$

on en déduit que $\Delta = (z_1 z_3 - z_2)^2$. On constate sans peine que Y_1, Y_2, Y_3 ont leurs coefficients holomorphes lorsque $z_2 = z_2^0$, $z_3 = z_3^0$, $z_1 = 0$.

En effet, dans $Y_3 z_2$, le seul terme susceptible de devenir infini provient de $p^2\left[A_1 - \frac{1-p^2}{4p^2}\right]z_2 z_1^{-1}$, mais comme le développement de A_1 est de la forme

$$A_1 = \frac{1-p^2}{4p^2} + a_1 z_1^p + \dots$$

le développement de ce terme ne contient pas de terme en z_1 à exposant négatif.

La même remarque s'applique au terme

$$p^2\left[A_1 + \frac{p^2-1}{4p^2}\right](z_2^2 z_1^{-2} - 2 z_1^{-1} z_2 z_3)$$

de $Y_3 z_3$ si l'on se rappelle en outre que p est au moins égal à 2; comme p est un entier, $A_1(z_1^p)$ est une fonction holomorphe de z_1.

Les coefficients des $Y_i f$ sont holomorphes en

$$M_0(z_1 = 0,\ z_2 = z_2^0,\ z_3 = z_3^0)$$

et Δ n'est pas nul; comme nous l'avons montré dans la première partie, à ce point correspond un point $m_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ et la correspondance entre les x et les z est biuniforme dans le voisinage de m_0 et M_0; en m_0 les y sont donc des fonctions rationnelles des x. Lorsque le point y_1, y_2, y_3 décrit un contour fermé entourant la multiplicité $y_3 = 0$, les x ne reprennent pas les mêmes valeurs, ils subissent donc une substitution τ de (g'), τ laisse invariante la multiplicité $x_2 = x_2^0$ et l'on a $\tau^p = 1$.

Dans les formules du changement de variables (y, z), faisons $z_1 = 0$, $z_2 = z_2^0$, $z_3 = z_3^0$; on obtient $y_1 = \infty$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; le change- de variables précédent ne nous permet donc d'étudier G que dans le voisinage du point $y_1 = \infty$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Nous allons montrer que le point $(y_1^0, y_2^0, 0)$ appartient à Δ_1, excepté lorsque $y_1^0 = \infty$, $y_2^0 = 0$.

Le système différentiel qui définit une transformation du sous-groupe $Y_3 f$ est en effet

$$\frac{dy_1}{y_1^2 y_3^2 + y_2^2 A_1} = \frac{dy_2}{2 y_1 y_2 y_3^2} = \frac{dy_3}{-y_2 y_3^3} = \frac{dt}{y_3^2} = d\tau.$$

L'intégrale de ce système qui vérifie les conditions initiales

$$\tau = 0, \quad y_1 = y_1^0, \quad y_2 = y_2^0, \quad y_3 = 0, \quad t = 0,$$

est

$$y_1 = y_1^0 + (y_2^0)^2 \frac{1 - p^2}{4p^2}\tau, \quad y_2 = y_2^0, \quad y_3 = 0, \quad t = 0,$$

car $\frac{dy_2}{d\tau}$, $\frac{dy_3}{d\tau}$ et $\frac{dt}{d\tau}$ sont nuls pour $y_3 = 0$, alors que $\frac{dy_1}{d\tau}$ se réduit à $(y_2^0)^2 \frac{1-p^2}{4p^2}$ qui n'est pas nul si $y_2^0 \neq 0$. La dernière équation $t = 0$ nous montre que parmi les transformations du sous-groupe $Y_3 f$ seule la transformation identique est définie. Un point pour lequel y_2^0 est différent de zéro appartient donc à Δ_1.

Supposons donc $y_2^0 = 0$, prenons pour variables y_1, $y_3^{\frac{1}{p}}$ et $y_2 y_3^{\frac{1}{p}-1}$, on constate par un raisonnement analogue qu'aucune transformation de Y_3 n'est définie, à moins que $y_1^0 = \infty$.

Si y_1^0 n'est pas infini, si y_2^0 n'est pas nul, le point y_1^0, y_2^0, o appartient à Δ_1.

11. *Pôle de* A *d'une nature différente de la précédente.* — Nous supposerons cette fois que

$$A = A_1 y_3^{-2}, \qquad A_1 = \frac{1 - p^2}{4p^2},$$

p étant un nombre fractionnaire $p = \frac{q'}{q}$, faisons le même changement de variables qu'au paragraphe précédent, les coefficients Y_i ne sont plus holomorphes, car, p n'étant pas entier, $A_1(z_1^p)$ n'est pas une fonction uniforme de z_1.

Pour étudier cette singularité, nous étudierons directement les fonctions z des variables x. Ces fonctions sont définies en égalant à des constantes trois intégrales du système aux dérivées partielles

$$X_i f + Y_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Posons $Y_3 f = \xi \frac{\partial f}{\partial z_1} + \eta \frac{\partial f}{\partial z_2} + \xi \frac{\partial f}{\partial z_3}$. D'après un résultat classique, les z et les x sont liés par un système aux différentielles totales que l'on forme sans peine :

$$
(11)\quad \begin{cases}
(x_1 - x_2 x_3)\, dz_1 + \xi\, dx_2 = 0, \\
(x_1 - x_2 x_3)\, dz_2 + (x_3 z_1 - z_2)\, dx_1 + (\eta - x_2 z_2)\, dx_2 + (x_2 z_2 - x_1 z_1)\, dx_3 = 0, \\
(x_1 - x_2 x_3)\, dz_3 + (x_3 \quad - z_3)\, dx_1 + (\xi - x_3 z_3)\, dx_2 + (x_2 z_3 - x_1 \quad)\, dx_3 = 0.
\end{cases}
$$

Prenons comme variables :

$$
v = \left(\frac{z_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\frac{z_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad z_2, \quad z_3, \quad x_1, \qquad u = x_2^{\frac{1}{q}}, \quad x_3.
$$

Le système (11) prend la forme

$$
\begin{aligned}
u\, dv + v\, du &= \mathrm{A}\, du + \mathrm{B}\, dx_1 + \mathrm{C}\, dx_3, \\
dz_2 &= \mathrm{A}'\, du + \mathrm{B}'\, dx_1 + \mathrm{C}'\, dx_3, \\
dz_3 &= \mathrm{A}''\, du + \mathrm{B}''\, dx_1 + \mathrm{C}''\, dx_3.
\end{aligned}
$$

Les coefficients A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″ sont holomorphes pour

$$
u = v = 0, \qquad x_1 = x_1^0, \qquad x_3 = x_3^0, \qquad z_2 = z_2^0, \qquad z_3 = z_3^0,
$$

si x_1^0 et z_2^0 ne sont pas nuls. De plus, les développements de A, B, C contiennent u en facteur et commencent par des termes du second degré au moins en u, v.

En reprenant la démonstration de Briot et Bouquet relative à l'équation

$$
xy' - by = ax^2 + cxy + \ldots,
$$

on établit sans peine que le système précédent admet une intégrale holomorphe vérifiant les conditions initiales précédentes et telle que $\frac{v}{u}$ ne tend pas vers zéro en même temps que u. On en déduit que $\frac{\mathrm{D}(v, z_2, z_3)}{\mathrm{D}(x_1, u, x_3)}$ n'est pas nul au point considéré.

Revenons aux variables y et x ; les y admettent tous les points $(x_1^0, 0, x_3^0)$ comme points critiques, elles reprennent la même valeur si le point x_1, x_2, x_3 tourne q fois autour d'un tel point critique.

Il existe une substitution τ de (g') qui laisse la multiplicité $x_2 = 0$ invariante et l'on a $\tau^{q'} = 1$. Il existe une substitution T_1 de (G) qui laisse invariante $y_3 = 0$ et l'on a $\mathrm{T}^q = 1$. Nous appellerons « points singuliers de première espèce de G » les pôles de A de l'espèce précédente.

12. *Étude d'un point où* $\frac{\partial F}{\partial y_4} = 0$. — En opérant sur y_3 et y_4 une transformation birationnelle convenable, on peut supposer que les seuls points singuliers de la fonction $y_4(y_3)$ définie par $F = 0$ sont les points où F'_{y_4} est nul, F'_{y_3} ne l'étant pas, ainsi que $F''_{y_4^2}$. Soient

$$y_3 = 0, \qquad y_4 = 0$$

un tel point et

$$F = y_3 - y_4^2 - \alpha y_4^3 + \ldots = 0$$

l'équation de $\mathfrak{M}$. Nous supposerons que A admet le point $y_4 = 0$ comme pôle : $A = A_1 y_4^{-4}$ avec

$$A_1 = -\frac{3}{16} - \frac{3\alpha}{8} y_4 + \ldots.$$

On démontre, comme au paragraphe **11**, que le point $y_1^0, y_2^0, 0, 0$ appartient à Δ_1 si $y_1^0 \neq \infty$, $y_2^0 \neq 0$.

Pour étudier le point $y_1^0 = \infty$, $y_2^0 = 0$, $y_4^0 = 0$, faisons le changement de variables birationnel

$$y_1 = z_1 - \frac{1}{4} z_2 z_3^{-1}, \qquad y_2 = z_2 z_3, \qquad y_4 = z_3,$$

où

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{4} y_2 y_4^{-2}, \qquad z_2 = y_2 y_4^{-1}, \qquad z_3 = y_4.$$

On en déduit :

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial z_1}, \qquad Y_2 f = z_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2},$$

$$Y_3 z_3 = z_2 \lambda(z_3) \qquad \text{avec} \qquad \lambda(z_3) = -\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{4} z_3 + \ldots,$$

puis

$$Y_3 z_1 = z_1^2 + \left(A_1 + \frac{3}{16} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) z_2^2 z_3^{-2},$$

$$Y_3 z_2 = 2 z_1 z_2 + z_2 z_3^{-1} \left[\lambda + \frac{1}{2}\right].$$

En vertu des hypothèses faites sur A_1 et du développement de λ, ces coefficients sont holomorphes pour $z_3 = 0$ et Δ n'est pas nul si z_2 ne l'est pas non plus.

Le point singulier considéré est birationnel, il n'engendre ni transformation de (g'), ni transformation de (G). Nous l'appellerons « point singulier de seconde espèce ».

13. Étudions maintenant le cas où y_3 devient infini. Nous supposerons que le développement de A dans le voisinage de ce point est de la forme $A = A_1 y_3^{-4}$.

On reconnaît que le point y_1^0, y_2^0, ∞ appartient à Δ_1 si y_1^0 et y_2^0 sont finis; lorsque y_1, y_2, y_3 sont infinis, on fait le changement des variables

$$z_1 = y_3^{-1}, \qquad z_2 = y_2 y_3^{-1}. \qquad z_1 = y_1 + y_2 y_3^{-1},$$

et l'on obtient

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial z_2}, \qquad Y_2 f = z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial z_3},$$

$$Y_3 f = - z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + 2 z_2 z_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + (z_3^2 + A_1 z_2^2) \frac{\partial f}{\partial z_3}.$$

Le point considéré est un point singulier birationnel comme le précédent.

14. On reconnaît, comme au paragraphe **11**, que le point $y_1^0 = \infty$, $y_2^0 = \infty$, y_3^0 est un point de Δ_1, sauf si y_3^0 est infini; c'est alors le point étudié au paragraphe **14**.

15. *Étude de Δ en un point régulier*

$$\Delta = - y_2^2.$$

On vérifie sans peine qu'en un point singulier de première ou deuxième espèce, l'équation $\Delta = 0$ équivaut à $y_2 = 0$. La multiplicité Δ a donc pour équation

$$y_2 = 0.$$

Formons $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3$, c'est-à-dire faisons $y_2 = 0$ dans les transformations infinitésimales Y :

$$\overline{Y}_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$\overline{Y}_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

$$\overline{Y}_3 f = y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Il résulte de là que les déterminants du second ordre de $\Delta = \|\eta_{ik}\|$ s'annulent pour $y_2 = 0$. Le groupe $\overline{G}$ a pour trajectoires les courbes $Q_1 : y_2 = 0, y_3 =$ const. De plus, aucune transformation de G n'est du second ordre en ce point. Notre groupe G vérifie bien les conditions imposées précédemment.

16. *Étude des singularités des fonctions y.* — Ces singularités sont de deux sortes :

α. Les points $m_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ tels que, lorsque m tend vers m_0, le point $M(y_1, y_2, y_3, y_4)$ correspondant tend vers un point singulier de G. Nous les avons déjà étudiés. Les y sont des fonctions algébroïdes des x en m_0.

β. Les points m_0 tels que, lorsque m tend vers m_0, M ou M_0 n'a pas de limite ou tend vers un point de Δ_1. Ce sont des points singuliers essentiels des y. Nous allons montrer que les points singuliers m_0 sont les points de l'espèce E' pour lesquels x_2 appartient à un certain ensemble; en d'autres termes, ces points engendrent une multiplicité analogue à un cylindre dont les génératrices ont pour équation $x_2 =$ const.

Nous avons vu que les équations finies des sous-groupes (Y_1), (Y_2) étaient birationnelles :

$$(Y_1) \qquad y'_1 = y_1 + t_1, \qquad y'_2 = y_2, \qquad y'_3 = y_3,$$
$$(Y_2) \qquad y'_1 = y_1 e^{t_2}, \qquad y'_2 = y_2 e^{t_2}, \qquad y'_3 = y_3.$$

Les équations des sous-groupes corrrespondant de g sont :

$$(X_1) \qquad x'_1 = t_1 x_2 + x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3 + t_1,$$
$$(X_2) \qquad x'_1 = x_1 e^{t_2}, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3 e^{t_2}.$$

Soit donc $m_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ un point pour lequel les y_i sont holomorphes, soient $y_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Le point $m_1(x_1^{(1)}, x_2^0, x_3^{(1)})$ où $x_1^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ sont quelconques est le transformé de m_0 par une certaine transformation t du sous-groupe (x_1), (x_2). Comme la transformation T homologue de t est linéaire, il résulte de

$$f(tx) = \mathrm{T} f(x)$$

que les y_i sont holomorphes en m_1.

De même si m_0 est un point singulier essentiel, il en est de même de m_1. C. Q. F. D.

Nous allons utiliser le résultat précédent pour démontrer un théorème annoncé (1re partie, Chap. IV, § **14**).

17. Théorème. — *Étant donnée une transformation distinguée* T_1 *de* G *et une transformation non distinguée* T *de ce même groupe, il existe un contour fermé* Γ, *tel que lorsque* M *décrit* Γ, *le point* $\mathrm{M}' = \mathrm{TM}$ *subit la substitution* T_1.

Ainsi que nous l'avons vu, il existe un contour fermé c de l'espace E' tel que lorsque m décrit c, le point homologue M subit la transformation T_1. Soit c_1 la projection de c sur le plan x'_2, x''_2; tout contour c' qui se projette sur ce plan suivant c_1 possède la même propriété que c. Soient m_0 et m'_0 deux points appartenant respectivement à c et à c' et ayant même coordonnée x_2, soit d le segment de droite $m_0 m'_0$. Le contour fermé $m_0 c m_0 d m'_0 c' m'_0 d m_0$ tracé sur le cylindre $\mathfrak{S}$ de base c_1 de génératrices $x_2 = \text{const.}$, peut se réduire à un point par une déformation continue sans quitter $\mathfrak{S}$ et sans rencontrer de point singulier des fonctions $y = f(x)$; lorsque m décrit ce contour, M revient donc à sa valeur initiale; comme d'autre part M subit une substitution linéaire lorsque m décrit d, M subit la même substitution T_1 lorsque m décrit c et c'.

Soient t la transformation de g homologue de T, γ le contour transformé de c' par t^{-1}. Supposons un instant que γ n'entoure aucun point singulier des fonctions $y = f(x)$, le contour homologue Γ est fermé et lorsque m décrit γ, M décrit Γ, m' décrit c' et $\mathrm{M}' = \mathrm{TM}$ subit la substitution distinguée T_1.

Le contour γ n'entourera aucun point singulier de f s'il en est de même de sa projection γ_1 sur le plan x'_2, x''_2. Or on peut choisir c' sur $\mathfrak{S}$ de façon que γ_1 soit un contour γ_2 donné à l'avance. Soient, en effet,

$$(c_1) \qquad x_2 = f(\theta), \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$(\gamma_2) \qquad x_2 = g(\theta), \qquad (0 < \theta < 1),$$

les équations de c_1 et γ_1 et

$$x'_1 = \frac{ax_1 + bx_2}{cx_3 + d}, \qquad x'_2 = \frac{cx_1 + dx_2}{cx_3 + d}, \qquad x'_3 = \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d},$$

celles de t^{-1}. Il suffira de prendre pour $x_1(\theta)$ et $x_3(\theta)$ des fonctions vérifiant

$$g_1(\theta) = \frac{cx_1(\theta) + f(\theta)}{cx_3(\theta) + d}.$$

La courbe c' : $[x_1(\theta), f(\theta), x_3(\theta)]$ est tracée sur $\mathfrak{S}$ et sa transformée par t^{-1} a pour projection γ_2. Il suffira de prendre pour γ_2 un contour à l'intérieur duquel f est holomorphe et d'y appliquer le raisonnement. C. Q. F. D.

18. *Recherche du domaine fondamental* P. — Ainsi que nous l'avons vu, les points singuliers se répartissent sur des lignes singulières d'équation $y_3 = \text{const.}$, $\mathfrak{M}$ a pour équation $F(y_3, y_4) = 0$, soit $\mathfrak{R}$ la surface de Riemann correspondant à cette relation. Au point de vue de la connexion linéaire, on peut se représenter $\mathfrak{M}'$ comme un cylindre ayant pour base $\mathfrak{R}$ et dont les génératrices ont pour équation

$$y_3 = \text{const.}, \qquad y_4 = \text{const.}$$

Soit donc $\mathfrak{S}$ une coupure tracée sur $\mathfrak{R}$ rendant $\mathfrak{R}$ simplement connexe et tel que tout contour fermé se coupant par $\mathfrak{S}$ puisse se réduire à un point sans rencontrer de point singulier de première espèce. La variété ϖ à cinq dimensions engendrée par les hyperplans $y_3 = \text{const.}$, $y_4 = \text{const.}$ issus des points de $\mathfrak{S}$ réalise sur $\mathfrak{M}'$ la coupure exigée (2e partie, Chap. II, § 4).

L'homologue de ϖ dans l'espace E' est la frontière du domaine fondamental P des fonctions y; les variétés $y_3 = \text{const.}$ ont pour homologue les variétés $x_2 = \text{const.}$ de E'; donc, le domaine P est formé des points dont la projection sur le plan des x_2 est intérieure à un certain polygone R.

Remarquons que, pour $x_1 = x_3 = 0$, g' se réduit à $x'_2 = \dfrac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}$.

19. *Recherche des conditions d'uniformité des fonctions* y. —

Comme nous l'avons montré, si les transformations de G sont uniformes, les y le sont aussi. Il serait intéressant d'établir directement les conditions d'uniformité des transformations de G, car ces conditions convenablement généralisées permettraient de définir sans difficulté des fonctions de plusieurs variables qui généralisent les fonctions kleinéennes. Cette question est du reste liée à la recherche des substitutions fondamentales de (G).

20. *Genre zéro.* — Supposons la relation (5) $F(y_3, y_4) = 0$ de genre zéro. Par transformation birationnelle, on peut supposer que y_4 est une fonction rationnelle de y_3 et ne considérer que y_3. Supposons que G ait dans le plan y_3 n points singuliers de première espèce correspondant aux valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ du nombre p.

Si les p_h ne sont pas des entiers, à chaque point de première espèce correspond une substitution de (G). Nous n'avons pas pu démontrer que ces substitutions constituaient un système de substitutions fondamentales de (G). Si cette proposition était établie, les conditions d'uniformité des y en découleraient immédiatement, car si l'on suppose les p_h entiers, les substitutions considérées de (G) se réduisent toutes à la transformation identique.

Supposons les p_h entiers, (g') admet n substitutions fondamentales polaires, si l'on fait $x_1 = x_3 = 0$, (g') se reduit à un groupe kleinéen $(\overline{g'})$ dérivé de n substitutions elliptiques de multiplicateurs $e^{\frac{2\pi i}{p_h}}$, ce groupe $(\overline{g'})$ est discontinu dans une certaine région $\overline{\mathfrak{D}}$ du plan des x_2, ainsi que Poincaré l'a établi.

Soient R un polygone kleinéen de (g'), P le domaine de l'espace E' dont la projection sur le plan x_2 est R. De la discontinuité du groupe $(\overline{g'})$ engendré par R résulte la discontinuité du groupe (g') engendré par P, donc l'uniformité des fonctions y.

Dans ce cas, G est formé de transformations biuniformes qui correspondent biuniformément aux transformations de g.

21. *Genre quelconque,* — Supposons la relation (5) de genre N. Rendons $\mathfrak{R}$ simplement connexe comme l'a fait Riemann (*Abelschen Funktionen*, § **7**); on forme ainsi 2N coupures $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N$,

b_N; à ces $2N$ coupures correspondent $2N$ substitutions A_1, B_1, ..., A_N, B_N de (g'). Soit

$$(\tau) \quad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \frac{(\alpha - t\beta) x_1 - \alpha\beta(1-t) x_3}{(1-t) x_2 + \alpha t - \beta}, \\ x'_2 &= \frac{(\alpha - t\beta) x_2 - \alpha\beta(1-t)}{(1-t) x_2 + \alpha t - \beta}, \\ x'_3 &= \frac{(1-t) x_1 + (\alpha t - \beta) x_3}{(1-t) x_2 + \alpha t - \beta}, \end{aligned} \right.$$

une substitution de (g'), nous désignerons t sous le nom de multiplicateur de (τ).

Cela posé, nous considérons successivement les cas suivants :

1° Les multiplicateurs de $2N$ substitutions A_i, B_i sont réels. Le groupe $(\overline{g'})$ est alors un groupe de la première famille de genre N; il est discontinu et les y sont uniformes.

2° Les multiplicateurs des N substitutions A_1, A_2, ..., A_N sont réels, ceux des substitutions B_1, B_2, ..., B_N sont respectivement $e^{\frac{2\pi i}{p_1}}$, $e^{\frac{2\pi i}{p_2}}$, ..., $e^{\frac{2\pi i}{p_N}}$, p_1, ..., p_N étant des nombres réels. Il est facile de voir qu'après une circulation du point m autour d'un point double de B_i les y ne reprennent pas la même valeur si p_i n'est pas entier; on connaît donc N substitutions de (G). Si p_1, ..., p_N sont des entiers, $(\overline{g'})$ est un groupe kleinéen de deuxième espèce, si $p_1 = p_1 = \ldots = p_N = 1$, $(\overline{g'})$ est de première espèce et de troisième famille. Dans ces deux derniers cas, il est discontinu et les y sont uniformes.

22. Pour terminer, donnons l'exemple suivant :

Considérons l'intégrale elliptique

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 27y(\xi+1)}}.$$

Soient $\omega_1(y)$ et $\omega_2(y)$ deux périodes distinctes et $z = \frac{\omega_1(y)}{\omega_2(y)}$, y est une fonction modulaire de z : $y = \varphi(z)$; si nous prenons $f_1(x_2) = \varphi(x_2)$ et $\theta(x_2) = \sqrt{\varphi'(x_2)}$, nous obtiendrons le groupe G dont les transformations sont uniformes :

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \qquad Y_2 f = \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$Y_3 f = \left[y_1^2 + y_2^2 \left[\frac{1}{4(y_3 - 1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{y_3^2} - \frac{41}{144} \frac{1}{y_3(y_3 - 1)} \right] \right] \frac{\partial f}{\partial y_1}$$
$$+ 2 y_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - y^2 \frac{\partial f}{\partial y_3}.$$

Vu et approuvé :

Paris, le 5 mars 1924.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 5 mars 1924.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.