PAUL FLAMANT

Sur une équation différentielle fonctionnelle linéaire

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1924

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1924__48__1_0>

N° D'ORDRE:

II E

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PAUL FLAMANT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
CHARGÉ D'UN COURS À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

1re THÈSE. — SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE LINÉAIRE.
2e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 octobre 1924 devant la Commission d'Examen.

MM.	É. BOREL,	*Président.*
	M. FRÉCHET,	*Examinateurs.*
	E. ESCLANGON,	
	G. VALIRON,	

PALERME
TIPOGRAFIA MATEMATICA G. SENATORE
PIAZZA REGALMICI, VICOLO GUCCIA, 15.

1924

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

MM.

DOYEN	MULLER (P.) Prof. de Chimie générale et Chimie physique.	
DOYEN HONORAIRE	BATAILLON (E.)	
PROFESSEURS	DENJOY (A.)	Mathématiques générales.
	VALIRON (G.)	Calcul différentiel et intégral.
	VILLAT (H.)	Mécanique.
	FRÉCHET (M.)	Analyse supérieure.
	ESCLANGON (E.)	Astronomie.
	WEISS (P.)	Physique générale.
	OLLIVIER (H.)	Physique générale.
	ROTHÉ (E.)	Physique du Globe.
	HACKSPILL (L.)	Chimie minérale.
	GAULT (H.)	Chimie organique.
	TOPSENT (E.)	Zoologie et Anatomie comparée.
	HOUARD (C.)	Botanique.
	TERROINE (E.)	Physiologie générale.
	LAPPARENT (J. de)	Pétrographie.
	GIGNOUX (M.)	Géologie et Paléontologie.
	CHATTON (E.)	Biologie générale
	BAUER (E.)	Physique mathématique.
	CORNEC (E.)	Chimie appliquée.
	LABROUSTE (H.)	Physique du Globe.
	RIBAUD (G.)	Physique générale.
	VLÈS (F.)	Physique biologique.
SECRÉTAIRE	RENARD (A.)	

A

MONSIEUR ÉMILE BOREL

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage respectueux
et sincèrement reconnaissant.

A

MONSIEUR GEORGES VALIRON

En témoignage de mes sentiments
cordialement dévoués.

Mémoire extrait du tome XLVIII (1924) des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

PREMIÈRE THÈSE.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE LINÉAIRE.

INTRODUCTION.

J'ai été conduit au problème qui fait l'objet de ce mémoire en voulant généraliser la notion d'équation différentielle linéaire. La condition imposée à la fonction inconnue $f(x)$ par une telle équation peut s'énoncer ainsi: en effectuant sur $f(x)$ une suite déterminée d'opérations (dérivations, multiplications par des fonctions données, additions), on doit obtenir une fonction donnée.

La généralisation naturelle des opérations en question est constituée par les opérations fonctionnelles distributives de M. S. PINCHERLE, étudiées ensuite indépendamment par CARLO BOURLET sous le nom de transmutations additives [1]).

Avec C. BOURLET, j'appelle *transmutation* toute opération faisant correspondre à une fonction $f(z)$ une autre fonction $g(x)$; cette dernière, la *transmuée* de $f(z)$, est, si l'on veut, une fonctionnelle de $f(z)$, dépendant en outre d'une variable x, ce que j'écris:

$$g(x) = U[f(z)|x]$$

Avec M. HADAMARD [2]) je dis que la *transmutation est linéaire,* si elle possède les

---

[1]) S. PINCHERLE, *Sulle operazioni funzionali distributive* [Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. IV, 1er sem. 1895, pp. 142-149] et *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* [Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), pp. 325-382].

C. BOURLET, *Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini* [Annales de l'École Normale Supérieure, 3e série, t. XIV (1897), pp. 133-190].

[2]) J. HADAMARD, *La série de* TAYLOR *et son prolongement analytique,* ch. VIII, p. 76 (Paris, Gauthier-Villars, collection Scientia, série PM, nº 12, 1901).

deux propriétés suivantes:

$$U[f_1(z)+f_2(z)|x] = U[f_1(z)|x] + U[f_2(z)|x]$$
$$U[cf(z)|x] = c\,U[f(z)|x]$$

c étant une constante réelle ou complexe. Comme l'explique fort bien M. Pincherle dans l'introduction de son mémoire, le point de vue actuel est très différent de celui de l'analyse fonctionnelle ordinaire et du calcul des variations. A ce dernier point de vue, le fait dominant est que $g(x)$ dépend de toutes les valeurs de $f(z)$ que l'on considère comme des variables indépendantes; on cherche donc à déterminer pour ainsi dire la part d'influence sur $g(x)$ de chaque valeur de $f(z)$; ce point de vue s'impose pous les fonctions de variable réelle. Le point de vue de Bourlet et de M. Pincherle met au premier plan la nature de l'opération qui permet de passer de $f(z)$ à $g(x)$; on compare la façon dont $g(x)$ dépend de x à la façon dont $f(z)$ dépend de z, ce qui conduit à désigner habituellement par la même lettre les deux variables indépendantes; ce point de vue n'est guère possible que pour les fonctions analytiques qui ont une individualité bien marquée et ne sont pas simplement des collections de valeurs.

La plupart des transformations qu'on a appliquées effectivement aux fonctions analytiques sont des transmutations linéaires; citons la dérivation et l'intégration, le changement de variable, la multiplication par une fonction donnée, le calcul des différences finies, la dérivation d'ordre fractionnaire, etc...

La généralisation naturelle de l'intégration d'une équation différentielle linéaire est donc *l'inversion d'une transmutation linéaire donnée.* Ce problème extrêmement général, a été abordé par Bourlet dans le mémoire cité, et ramené à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre infini.

Ce résultat n'a guère qu'une valeur formelle, car les questions de limites et de convergence manquent totalement de rigueur. D'ailleurs, sauf dans le cas où l'équation d'ordre infini a ses coefficients constants, la transformation du problème ne semble guère avantageuse.

Au lieu d'aborder le problème dans toute sa généralité, il me semble nécessaire d'étudier en détail des cas particuliers nouveaux, comme l'ont déjà été les équations différentielles linéaires, les équations intégrales, les équations fonctionnelles linéaires telles que celles d'Abel et de Schroder.

J'ai particularisé la question en supposant que la transmutation qu'il s'agit d'inverser peut être réalisée en effectuant un nombre fini des opérations suivantes: dérivation, substitution d'une fonction donnée à la variable, multiplication par une fonction donnée, addition. Le problème se traduit donc par l'équation:

$$(1)\quad \sum a_0(x)f[\omega_0(x)] + \sum a_1(x)f'[\omega_1(x)] + \cdots + \sum a_n(x)f^{(n)}[\omega_n(x)] = g(x)$$

qu'on peut appeler *équation différentielle fonctionnelle linéaire.* Elle admet pour cas particuliers les équations différentielles, les équations aux différences finies et les équations fonctionnelles ordinaires, ainsi que les équations de la forme

$$a_0(x)f(x) + A_0(x)f(x+h) + a_1(x)f'(x) + A_1(x)f'(x+h) = g(x)$$

qu'on peut écrire encore, en posant

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad \text{et} \qquad \Delta f'(x) = f'(x+h) - f'(x)$$

$$[a_0(x) + A_0(x)]f(x) + A_0(x).\Delta f(x) + [a_1(x) + A_1(x)]f'(x) + A_1(x).\Delta f'(x) = g(x),$$

et qui ont été appelées *équations aux différences mêlées* parce qu'elles contiennent des dérivées et des différences finies; elles se recontrent dans certains problèmes de géométrie, et leur intégration a été étudiée par POISSON [3]).

J'ai restreint beaucoup plus le problème en prenant une équation (1) de la forme

$$a_0(x)f[\omega_0(x)] + a_1(x)f'[\omega_1(x)] = g(x).$$

En exprimant x en fonction d'une nouvelle variable $z = \omega_1(x)$ et en résolvant par rapport à la dérivée, cette équation s'écrit

$$f'(z) = a(z)f[\omega(z)] + b(z). \tag{2}$$

L'étude des singularités de la fonction $f(z)$ définie par cette équation fait intervenir les itérés successifs d'un point par la substitution $[z, \omega(z)]$ et la substitution inverse: le cas le plus simple sera donc celui où cette substitution est bi-univoque, ce qui donne l'équation

$$f'(z) = a(z)f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) + b(z) \tag{3}$$

Par un changement de variable homographique, on peut amener les points doubles de la substitution $\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ à l'origine et à l'infini lorsqu'ils sont distincts, ou à l'infini lorsqu'ils sont confondus; l'équation est alors réduite à l'une des formes:

$$f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + b(x) \tag{4}$$

$$f'(y) = a(y)f(y-h) + b(y) \tag{5}$$

Dans la première, on peut supposer $|\sigma| \geqq 1$.

Les équations (4) et (5) peuvent d'ailleurs se ramener l'une à l'autre par le changement de variable $y = \log x$. Mais il faut remarquer qu'à une fonction quelconque

---

3) POISSON, ***Mémoire sur les équations aux différences mêlées*** [Journal de l'École Polytechnique, t. VI, 13ᵉ cahier (1806), pp. 126-147].

de y correspond ainsi une fonction multiforme de x ayant l'origine pour point critique et qu'à une fonction uniforme de x correspond une fonction périodique de y.

Ces équations n'ont guère été étudiées que pour les fonctions de variables réelles par M. ERHARD SCHMIDT et ses élèves. Mlle OLGA POLOSSUCHIN a ramené l'équation (2) à une équation intégrale moyennant une hypothèse convenable sur la fonction $\omega(z)$ [4]). M. E. SCHMIDT a étudié l'équation (5) lorsque $a(y)$ est une constante, et les équations analogues d'ordre supérieur [5]). Enfin M. GUIDO HOHEISEL a étudié les mêmes équations lorsque les coefficients sont des polynômes du premier ou du second degré [6]). En ce qui concerne les fonctions analytiques, M. LEAU a donné dès 1894, le théorème d'existence des solutions d'équations de la forme (1) (et d'équations plus générales, non linéaires, ou d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles) moyennant des hypothèses convenables. Il a récemment simplifié la démonstration [7]). D'autre part, dans un chapitre de sa thèse, Mlle POLOSSUCHIN a déterminé des solutions de l'équation (5) où $a(y)$ est une constante, ce qui correspond pour l'équation (4) à $a(x) = \frac{1}{x}$ [$b(x)$ pouvant être multiforme autour de l'origine].

C'est l'équation (4) que j'étudie dans le présent travail, dont je vais indiquer ici les grandes lignes, en mettant en relief les analogies et les différences qu'elle présente avec l'équation différentielle ordinaire correspondant à $\sigma = 1$.

Dans le chapitre I^er^, j'établis d'abord par la méthode des approximations successives le théorème d'existence dû à M. LEAU. L'équation (4) admet une solution, et une seule, prenant à l'origine la valeur donnée c_0, et par suite il y en a une, et une seule, qui prend une valeur donnée en un point donné. L'analogie avec l'équation différentielle semble complète à première vue; elle est pourtant imparfaite; dans le cas le plus simple où $a(x)$ et $b(x)$ sont holomorphes à l'origine, $f(x)$ est déterminée quand on lui impose, outre l'équation, deux conditions: être régulière à l'origine et prendre une valeur donnée soit à l'origine, soit en un autre point. Si on lui imposait comme conditions celles d'être régulière en un point autre que l'origine, et d'y prendre une valeur donnée, l'unicité de la solution ne serait plus démontrée; j'ajoute, en anticipant sur un résultat du chapitre III, que, dans le cas $|\sigma| > 1$, il resterait une grande indétermination. Le

---

[4]) O. POLOSSUCHIN, *Über eine besondere Klasse von differentialen Funktionalgleichungen* (Inaugural Dissertation, Zürich, 1910).

[5]) E. SCHMIDT, *Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen* [Mathematische Annalen, Band 70 (1911), pp. 499-524].

[6]) G. HOHEISEL, *Lineare funktionale Differentialgleichungen I. Mitteilung* [Mathematische Zeitschrift, Band 14 (1922), pp. 35-98] (ou Inaugural Dissertation, Berlin, 1920).

[7]) L. LEAU, *Sur les équations fonctionnelles* [Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 119 (2^e^ semestre 1894), pp. 901-902] et *Sur l'emploi de certaines fonctions majorantes dans les théorèmes d'existence* [ibidem, t. 178, [(1^er^ semestre 1924), pp. 453-458].

point double attractif de la substitution $\left(x, \frac{x}{\sigma}\right)$ joue donc un rôle très remarquable. Je donne ensuite quelques généralisations du théorème d'existence et d'unicité, dont une seule nouvelle: celle relative au cas où les équations et les fonctions inconnues sont en nombre infini. Puis j'étudie pour l'équation unique (4) les solutions dont l'existence vient d'être établie; je cherche en particulier quelles sont leurs singularités lorsque $b(x)$, régulière à l'origine, admet un point singulier x_0 de nature assez simple. Les points x_0, σx_0, $\sigma^2 x_0$, ... sont tous singuliers pour $f(x)$ (de même nature que x_0 pour l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire), ce qui conduit à distinguer trois cas suivant que $|\sigma|$ est supérieur ou égal à 1, et quand il y a égalité, suivant que σ est ou non racine de l'unité. Dans chacun de ces cas, et pour chaque espèce de point singulier envisagé, j'ai obtenu une représentation analytique de $f(x)$ valable dans tout son domaine d'existence et mettant en évidence la position et la nature des points singuliers. Dans le dernier cas, la fonction admet pour coupure le cercle de rayon $|x_0|$ et elle est en général continue jusque sur ce cercle, sauf en un certain nombre de points.

Le chapitre II est consacré à la résolution de certains systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues qui se présenteront au chapitre III.

Dans celui-ci, je détermine des solutions de l'équation (4) lorsque l'origine est point singulier de $b(x)$, $a(x)$ étant toujours régulière. En supposant que $a(x)$ ne s'annule pas à l'origine, j'ai pu y étudier des points singuliers de nature plus générale que ceux considérés au chapitre I^{er}; par exemple en ce qui concerne les points isolés autour desquels la fonction reste uniforme, j'ai traité seulement le cas d'un pôle lorsqu'il n'est pas à l'origine, tandis qu'à l'origine j'ai envisagé aussi le cas d'un point singulier essentiel.

Les résultats obtenus sont très différents suivant que $|\sigma|$ est supérieur ou égal à 1. Le dernier cas est entièrement analogue à celui de l'équation différentielle ordinaire, les solutions ont leur partie irrégulière complétement déterminée; par suite elles ne dépendent que d'une constante arbitraire et se déduisent de l'une d'elles en lui ajoutant la solution générale de l'équation homogène définie au chapitre I^{er}.

Dans le premier cas au contraire, la partie irrégulière dépend d'une constante arbitraire, ce qui fait connaître pour l'équation homogène des solutions irrégulières qui admettent l'origine pour point critique. La solution donneé par le théorème d'existence du chapitre I^{er} ne représente donc que l'ensemble des solutions régulières à l'origine; on peut l'appeler *solution générale régulière*, mais ce n'est pas la solution absolument générale.

Cette étude est évidemment incomplète. Je signale en particulier le point suivant. Lorsque $|\sigma|$ est plus grand que 1 et que $b(x)$ a un point singulier x_0 non situé à l'origine, on peut concevoir des solutions ayant pour points singuliers $\frac{x_0}{\sigma}$, $\frac{x_0}{\sigma^2}$, ... et ne rentrant par conséquent pas dans la solution régulière à l'origine obtenue au chapitre Ier.

Par exemple, on vérifie aisément que l'équation à coefficient constant

$$f'(x) = af\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b}{x - x_0}$$

admet une solution ayant le pôle simple $\frac{x_0}{\sigma}$, le pôle double $\frac{x_0}{\sigma^2}$ etc. Je compte faire ultérieurement l'étude de ces solutions.

Les principaux résultats nouveaux contenus dans ce mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris (séances des 26 décembre 1923 et 12 mai 1924) [8]).

Je suis heureux de remercier ici M. EMILE BOREL qui m'a incité à entreprendre un travail de recherches, et M. GEORGES VALIRON qui a bien voulu suivre la présente étude avec le plus bienveillant intérêt.

CHAPITRE I.

SOLUTIONS RÉGULIÈRES A L'ORIGINE.

I.

Détermination d'une solution par sa valeur à l'origine.

1. Soit l'équation

$$(1) \qquad f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + b(x) \qquad |\sigma| \geqq 1.$$

Nous supposons $a(x)$ et $b(x)$ holomorphes dans un domaine D fermé, simplement connexe, et possédant les propriétés suivantes.

Soit z l'affixe d'un ponit quelconque de D, le point d'affixe $\frac{z}{\sigma}$ appartient aussi à

---

[8]) P. FLAMANT, *Sur une équation différentielle fonctionnelle* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 178 (1er semestre 1924), pp. 60-62], et *Sur la forme des solutions d'une équation différentielle fonctionnelle* [ibidem, t. 178 (1er semestre 1924), pp. 1595-1597].

D, et ces deux points peuvent être joints par un chemin situé tout entier dans D et de longueur inférieure à un nombre fixe l. L'origine appartient nécessairement à un tel domaine D, mais elle peut être aussi bien un point de la frontière qu'un point intérieur. Nous supposons enfin que tout point de D peut être joint à l'origine par un chemin situé dans D et de longueur inférieure à un nombre fixe L.

Nous cherchons à déterminer une fonction $f(x)$ holomorphe dans D et prenant une valeur numérique donnée c_0 pour $x = 0$.

L'ensemble des conditions imposées à la fonction $f(x)$ par l'équation (1) et la valeur initiale peut s'exprimer par la seule équation

$$f(x) = c_0 + \int_0^x \left[a(z)f\left(\frac{z}{\sigma}\right) + b(z)\right]dz, \tag{2}$$

le chemin d'intégration étant situé tout entier dans le domaine D, et n'ayant, par suite de l'holomorphie des fonctions, aucune influence sur la valeur de l'intégrale.

Cette équation (2) est une équation intégrale linéaire qui pourrait se ramener à un type classique en faisant le changement de variable d'intégration $\frac{z}{\sigma} = y$. C'est cette équation (2) que nous allons résoudre par la méthode classique des approximations successives.

2. Soit $g(x)$ une fonction arbitraire, holomorphe dans D. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) = c_0 + \int_0^x \left[a(z)g\left(\frac{z}{\sigma}\right) + b(z)\right]dz, \\ f_2(x) = c_0 + \int_0^x \left[a(z)f_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) + b(z)\right]dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) = c_0 + \int_0^x \left[a(z)f_{n-1}\left(\frac{z}{\sigma}\right) + b(z)\right]dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{3}$$

les intégrales étant prises le long d'un chemin γ situé dans D. Lorsque le point z décrit γ, l'argument de la fonction $g(x)$ dans la première intégrale, $\frac{z}{\sigma}$, décrit un chemin $\frac{\gamma}{\sigma}$ [9]) situé dans D, d'après l'hypothèse faite au n° 1; la fonction intégrée est donc bien holomorphe dans D, l'intégrale est indépendante du chemin γ pourvu qu'il soit

[9]) F désignant une figure quelconque tracée sur le plan de la variable complexe z, je désigne par $F\sigma$, $\frac{F}{\sigma}$, $F + h$, etc., les figures obtenues en appliquant à F l'homothétie-rotation, la translation, etc., qui traduisent gémétriquement la multiplication ou la division par σ, l'addition de h, etc.

tracé dans D, et la fonction $f_1(x)$ définie par la première relation est holomorphe dans D.

Pour la même raison, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ..., existent et sont holomorphes dans D.

Pour établir que $f_n(x)$ tend (pour n infini) vers une fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation (2), il est commode de regarder $f_n(x)$ comme la somme des n premiers termes d'une série, en posant:

$$u_1(x) = f_2(x) - f_1(x), \dots \; u_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x), \dots$$

de sorte que

$$f_n(x) = f_1(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_{n-1}(x), \tag{4}$$

D'après les relations (3) qui définissent les $f_n(x)$, les $u_n(x)$ peuvent être déterminées par

$$u_1(x) = \int_0^x a(z)\left[f_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right] dz, \tag{5}$$

$$u_n(x) = \int_0^x a(z)\, u_{n-1}\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz \quad \text{pour} \quad n \geqq 2. \tag{6}$$

Tout point z_0 de D peut être joint à l'origine par un chemin γ de longueur moindre qu'un nombre fixe L (nº 1). Considérons l'ensemble Γ des points des chemins

$$\gamma, \frac{\gamma}{\sigma}, \dots, \frac{\gamma}{\sigma^n}, \dots$$

(si σ est une racine de l'unité, ces chemins sont en nombre fini). Les fonctions $f_n(x)$ et $u_n(x)$ peuvent être obtenues en tous les points de cet ensemble en prenant les intégrales des formules (3), (5) et (6) le long de ces chemins. z désignant un point de l'un d'eux, $\gamma(z)$ désignera l'arc Oz de ce chemin et $s(z)$ sa longueur. En effectuant une homothétie-rotation on voit que l'on a:

$$s\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{s(z)}{\Sigma} \tag{7}$$

Σ représentant le module de σ.

Les fonctions $a(z)$ et $f_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g\left(\frac{z}{\sigma}\right)$ étant holomorphes dans D, sont bornées en module:

$$|a(z)| < A, \qquad \left|f_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| < M.$$

Il résulte de la formule (5) que l'on a:

$$|u_1(x)| \leqq \int_{\gamma(x)} |a(z)| \cdot \left|f_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| ds(z) < M.A\, s(x)$$

Pour appliquer la formule (6) au cas de $n = 2$, nous avons besoin d'une expression simple limitant supérieurement $\left|u_1\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right|$:

$$\left|u_1\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| < M.As\left(\frac{z}{\sigma}\right) = \frac{M}{\Sigma} As(z).$$

On a alors:

$$|u_2(x)| \leqq \int_{\gamma(x)} |a(z)|\cdot\left|u_1\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| ds(z) < \frac{M}{\Sigma}\int_{\gamma(x)} As(z)\, d\,[As(z)] = \frac{M}{2\Sigma}[As(x)]^2$$

d'où:

$$\left|u_2\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| < \frac{M}{2\Sigma}\left[As\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right]^2 = \frac{M}{2\,\Sigma^{1+2}}[As(x)]^2$$

On a ensuite:

$$|u_3(x)| \leqq \int_{\gamma(x)} |a(z)|\cdot\left|u_2\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| ds(z) < \frac{M}{2\,\Sigma^{1+2}}\int_{\gamma(x)} [As(z)]^2 d[As(z)] = \frac{M}{3!\,\Sigma^{1+2}}[As(x)]^3$$

De même, on trouverait en général:

$$|u_n(x)| < \frac{M}{n!\,\Sigma^{1+2+\cdots+n-1}}[As(x)]^n.$$

$s(x)$ étant toujours moindre que L, on a, quelle que soit la valeur de x dans D:

$$|u_n(x)| < \frac{M(AL)^n}{n!\,\Sigma^{1+2+\cdots+n-1}}.$$

La série qui admet $u_n(x)$ pour terme général est normalement convergente dans D [10]). [On voit que la série de comparaison converge très rapidement lorsque Σ est grand]. $f_n(x)$ étant, d'après (4), la somme des $n - 1$ premiers termes de cette série et de $f_1(x)$, elle converge uniformément vers une fonction limite $f(x)$ holomorphe dans D. La convergence étant uniforme, on peut faire croître n indéfiniment et passer à la limite dans les relations (3), ce qui montre que la fonction obtenue $f(x)$ vérifie l'équation (2).

Dans le cas où Σ est plus grand que 1, on peut n'avoir qu'un seul chemin d'intégration on choisissant γ de telle sorte que $\frac{\gamma}{\sigma}$ soit un arc de γ. Je désignerai par C un tel chemin. Il est aisé de voir que tout point z_0 de D peut être atteint par un chemin C. Par hypothèse (n° 1), on peut joindre z_0 et $\frac{z_0}{\sigma}$ par une ligne c dont la lon-

[10]) Cette locution, due à M. René Baire, signifie que les modules de ses termes sont inférieurs à des nombres positifs formant une série convergente.

gueur est moindre qu'une longueur fixe l. En réunissant les lignes

$$c, \frac{c}{\sigma}, \dots, \frac{c}{\sigma^n}, \dots,$$

on relie z_0 à O par un chemin C, dont la longueur est d'ailleurs inférieure à un nombre L indépendant de z_0.

Si Σ était égal à 1, le chemin C n'aboutirait plus à l'origine et ne pourrait plus être utilisé.

3. La solution du problème posé au n° 1 est unique. En effet, si deux fonctions vérifient l'équation (2), leur différence vérifie l'équation homogène

$$(8) \qquad \varphi(x) = \int_0^x a(z)\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)dz.$$

Il s'agit de montrer qu'une telle fonction est identiquement nulle.

Considérons d'abord un ensemble de points Γ comme au n° précédent. Nous allons établir qu'une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation (8) sur Γ est nulle sur Γ, ou tout au moins sur la partie de Γ voisine de l'origine.

Soit h un nombre positif, $\Gamma(h)$ l'ensemble des points z de Γ pour lesquels on a

$$0 \leqq s(z) \leqq h$$

et μ la borne supérieure de $|\varphi(z)|$ sur $\Gamma(h)$. Pour tout point x de l'ensemble $\Gamma(h).\sigma$ [qui coincide avec $\Gamma(\Sigma h)$, d'après la formule (7)], le chemin d'intégration $\gamma(x)$ fera partie de $\Gamma(\Sigma h)$, et l'argument $\frac{z}{\sigma}$ de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intégrale restera sur $\Gamma(h)$. Par suite:

$$(9) \qquad |\varphi(x)| \leqq A\mu s(x) \leqq \mu A\Sigma h \qquad \text{pour } x \text{ sur } \Gamma(\Sigma h).$$

Le nombre h peut être choisi de manière que le membre de droite soit plus petit que μ; il suffit que

$$A\Sigma h < 1 \quad \text{ou} \quad h < \frac{1}{A\Sigma}$$

(ce choix ne fait pas intervenir la valeur de μ). En donnant par exemple à h la valeur $\frac{1}{2A\Sigma}$, on trouve que la borne supérieure de $\varphi(z)$ sur $\Gamma(\Sigma h)$ est $\frac{\mu}{2}$. Si μ n'était pas nul, cette conclusion serait absurde puisque $\Gamma(\Sigma h)$ contient $\Gamma(h)$; donc μ est nul. Le raisonnement employé pour établir l'inégalité (9) permet de passer à $\Gamma(\Sigma^2 h), \dots$ $\dots, \Gamma(\Sigma^n h)$; μ étant nul, on en conclut que $\varphi(x)$ est nulle sur tous ces ensembles. Lorsque Σ est plus grand que 1, on peut englober ainsi tout Γ; au contraire lorsque Σ est égal à 1, la conclusion ne vaut que pour $\Gamma\left(\frac{1}{A}\right)$, h devant être inférieur à $\frac{1}{A}$, mais pouvant s'en rapprocher autant qu'on veut.

Ce résultat est remarquable dans les deux cas suivants:

1° Σ étant supérieur à 1, on choisit un chemin C pour l'ensemble Γ.

2° σ est une racine de l'unité; dans ce cas les chemins considérés sont en nombre fini.

La fonction $\varphi(x)$ envisagée au début du présent n°, est holomorphe dans D et vérifie l'équation (8). Etant nulle sur un ensemble $\Gamma(b)$ qui comprend des lignes, elle est nulle dans tout le domaine, et les deux solutions imaginées coïncident.

Mais on peut affirmer davantage. Imaginons une fonction $g(x)$ solution de l'équation (1) et qui tende vers c_0 lorsque x tend vers o sur Γ, l'existence et l'holomorphie de $g(x)$ n'étant plus supposées dans tout le domaine D, mais seulement dans un domaine D' contenant la partie de Γ voisine de l'origine [11]). Désignons par $f(x)$ la solution holomorphe dans D déterminée au n° 2. La fonction

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

satisfait encore à l'équation (8) sur Γ; elle est donc nulle dans D' où elle est supposée holomorphe; son domaine d'existence n'est donc pas limité à D'. La fonction $g(x)$ existe et coïncide avec $f(x)$ dans tout le domaine D.

4. Remarque. — Dans les raisonnements qui précèdent, l'holomorphie des fonctions données $a(x)$ et $b(x)$ [et de la fonction arbitraire $g(x)$ servant de point de départ pour les approximations successives] dans D est intervenue de deux manières: d'abord par l'indépendance des intégrales vis-à vis du chemin d'intégration, puis par le fait que ces fonctions étaient bornées dans D. Ces fonctions peuvent donc avoir pour points singuliers des points de la frontière de D pourvu qu'elles restent bornées au voisinage de ces points. Par exemple, le théorème d'existence s'applique à l'équation

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + b(x)$$

σ étant un nombre réel et positif; le domaine D étant le demi-cercle défini par $|x| \leqq R$, partie réelle de $x \geqq 0$; $b(x)$ étant un polynôme, ou une fonction entière, ou encore un polynôme par rapport à $e^{-\frac{1}{x}}$.

Il s'applique encore au cas où $a(x)$ et $b(x)$ ont l'origine pour point critique algébrique et y prennent une valeur finie, le domaine D étant un cercle de centre O coupé suivant un chemin C (coupé suivant un rayon lorsque σ est réel et positif).

5. Généralisations. — La méthode précédente peut s'appliquer à des équations ou à des systèmes d'équations plus généraux.

---

[11]) Pur exemple, D' peut être la portion du plan balayée par un petit cercle vu de l'origine sous un angle constant lorsque son centre décrit $\Gamma(b)$.

1° La fonction $f(x)$ peut intervenir par sa valeur en plusieurs points $\frac{x}{\sigma}$, et même en une infinité de points. Soit l'équation

$$(10)\qquad f'(x)=b(x)+a_0(x)f\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)+a_1(x)f\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)+\cdots+a_k(x)f\left(\frac{x}{\sigma_k}\right)+\cdots$$

où

$$|\sigma_0|=\Sigma_0\geqq 1,\qquad |\sigma_1|=\Sigma_1\geqq 1,\ \ldots,\ |\sigma_k|=\Sigma_k\geqq 1,\ \ldots$$

Pour simplifier, nous traitons le problème dans un cercle de centre O; toutefois si les σ_k sont des puissances d'un même nombre σ, on peut prendre le domaine D défini au n° 1. Nous supposons $b(x)$ et les $a(x)$ holomorphes dans ce domaine, ces dernières formant une série normalement convergente (ce qui est toujours réalisé quand le nombre des termes est fini).

Envisageons la formule définissant la première approximation:

$$f_1(x)=c_0+\int_0^x\left[b(z)+a_0(z)g\left(\frac{z}{\sigma_0}\right)+a_1(z)g\left(\frac{z}{\sigma_1}\right)+\cdots+a_k(z)g\left(\frac{z}{\sigma_k}\right)+\cdots\right]dz.$$

Les points $\frac{z}{\sigma_0}, \frac{z}{\sigma_1}, \ldots, \frac{z}{\sigma_k}, \ldots$ restent dans D lorsque z décrit le chemin d'intégration; si la fonction $g(x)$ dont on part est holomorphe dans D, la fonction intégrée reste inférieure à

$$B+(A_0+A_1+\cdots+A_k+\cdots)G=B+AG$$

chaque grande lettre désignant la borne supérieure du module de la fonction correspondante.

La fonction $f_1(x)$ est donc elle même bornée

$$|f_1(x)|\leqq|c_0|+(B+AG)L$$

et il en est de même pour $f_1(x)-g(x)$. La convergence des approximations successives et l'unicité de la solution se démontrent comme aux n^{os} 2 et 3, en évaluant comme ci-dessus le module de la série à intégrer.

2° On peut traiter de la même manière un système de $n+1$ équations à $n+1$ fonctions inconnues du type

$$(11)\qquad f'_i(x)=\sum_{j=0}^{j=n}\sum_{k=0}^{\infty}a_{ijk}(x)f_j\left(\frac{x}{\sigma_k}\right)+b_i(x)\qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

En posant

$$A_{ijk}=\max|a_{ijk}(x)|\quad \text{dans } D,$$

on supposera convergentes les séries:

$$A_{ij0}+A_{ij1}+\cdots+A_{ijk}+\cdots$$

et on raisonnera exactement comme ci-dessus.

Le théorème d'existence est par suite établi pour une équation d'ordre supérieur au premier. L'équation du second ordre

$$f''(x) = a(x)f'\left(\frac{x}{\sigma}\right) + b(x)f\left(\frac{x}{\tau}\right) + c(x),$$

par exemple, se ramène au système:

$$\begin{cases} f'(x) = f_1(x) \\ f'_1(x) = a(x)f_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) + b(x)f\left(\dfrac{x}{\tau}\right) + c(x) \end{cases}$$

3° Lorsque les équations et les fonctions inconnues sont en nombre infini, la méthode s'applique encore en faisant certaines hypothèses de convergence.

Soit le système

$$(12) \qquad f'_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(x)f_j\left(\frac{x}{\sigma_k}\right) + b_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

soit

$$A_{ijk} = \max |a_{ijk}(x)| \text{ dans } D$$

Nous supposons convergentes les séries

$$A_{ij0} + A_{ij1} + \cdots + A_{ijk} + \cdots$$

comme dans le cas précédent; mais en outre nous supposons que leurs sommes satisfont aux inégalités:

$$A_{ij0} + A_{ij1} + \cdots + A_{ijk} + \cdots \leqq \alpha_i \beta_j,$$

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots; \qquad \beta_0, \beta_i, \ldots \beta_j, \ldots,$$

étant deux suites de nombres positifs telles que la série

$$A = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_i\beta_i + \cdots$$

soit convergente.

Les fonctions $b_i(x)$ sont assujetties à vérifier dans D les inégalités

$$|b_i(x)| < B\alpha_i$$

B étant un nombre fixe.

Nous n'envisageons que les solutions définies par des valeurs initiales $c_i = f_i(0)$, faisant converger la série:

$$C = \beta_0|c_0| + \beta_1|c_1| + \cdots + \beta_i|c_i| + \cdots$$

Formons les approximations successives à partir d'un système de fonctions $g_i(x)$ holomorphes dans D et dont les bornes supérieures G_i font converger la série

$$G = \beta_0 G_0 + \beta_1 G_1 + \cdots + \beta_i G_i + \cdots$$

La première approximation sera définie par:

$$f_i^{(1)}(x) = c_i + \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z) g_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) + b_i(z) \right] dz$$

Les points $\frac{z}{\sigma_k}$ sont toujours dans D; en évaluant par excès le module de la fonction à intégrer, on peut écrire

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{ijk} \right) G_j + B\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \beta_j G_j + B\alpha_i = (G+B)\alpha_i$$

Donc

$$\max |f_i^{(1)}(x)| \leqq |c_i| + (G+B)L\alpha_i$$

La propriété de convergence imposée aux $g_i(x)$ appartient aussi aux $f_i^{(1)}(x)$, car en multipliant les deux membres de cette inégalité par β_i et en additionnant membre à membre les inégalités analogues, les termes du second membre engendreront deux séries supposées convergentes. Les $f_i^{(1)}(x)$ pourront être utilisées comme les $g_i(x)$, et les approximations successives pourront toujours être poursuivies. Pour établir leur convergence, remarquons que, d'après ce qui précède, en appelant M_i la borne supérieure de $|f_i^{(1)}(x) - g_i(x)|$, la série

$$M = \beta_0 M_0 + \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_i M_i + \cdots$$

est convergente.

Dans la formule

$$u_i^{(1)}(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z) \left[f_j^{(1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) - g_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) \right] dz,$$

évaluons le module de la fonction à intégrer comme dans la formule de $f_i^{(1)}(x)$, nous voyons qu'il est inférieur à $M\alpha_i$, et que l'on a, par suite,

$$|u_i^{(1)}(x)| \leqq M\alpha_i s(x).$$

Prenons la formule

$$u_i^{(2)}(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z) u_j^{(1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) dz.$$

Pour toutes les valeurs de la même fonction $u_j^{(1)}(x)$ qui figurent dans l'intégrale, on a:

$$\left| u_j^{(1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) \right| \leqq M\alpha_j s\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) = M\alpha_j \frac{s(z)}{\Sigma_k} \leqq M\alpha_j s(z).$$

En utilisant cette expression indépendante de l'indice k, mais dépendant de z, à la place de la borne supérieure M_j dans le calcul précédent, on trouve

$$|u_i^{(2)}(x)| \leqq \frac{M}{A} \alpha_i \frac{[As(z)]^2}{2!}$$

et, en continuant ainsi,

$$|u_i^{(n)}(x)| \leqq \frac{M}{A}\alpha_i \frac{[A s(z)]^n}{n!}.$$

Pour chaque valeur de l'entier i, la série qui a $u_i^{(n)}(x)$ pour terme de rang n est normalement convergente. On peut donc poser

$$f_i(x) = f_i^{(1)}(x) + u_i^{(1)}(x) + u_i^{(2)}(x) + \cdots + u_i^{(n)}(x) + \cdots$$

Pour toutes ces séries, les séries de comparaison ne diffèrent que par le facteur α_i; de telle sorte que, ε étant arbitrairement donné, il existe un entier N tel que l'on ait:

$$|f_i(x) - f_i^{(n)}(x)| \leqq \varepsilon\alpha_i \quad \text{pour} \quad n \geqq N$$

quel que soit x dans D. Grâce à cette remarque, nous allons montrer que la relation

$$(13) \qquad f_i^{(n)}(x) = c_i + \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z) f_j^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) + b_i(z)\right] dz$$

devient

$$(14) \qquad f_i(x) = c_i + \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z) f_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) + b_i(z)\right] dz$$

qui exprime que les fonctions $f_i(x)$ constituent une solution du problème posé. Le premier membre de (14) est la limite pour n infini de celui de (13); pour démontrer l'égalité (14), il suffit de montrer que son second membre est la limite de celui de (13). La différence de ces expressions est

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z)\left[f_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) - f_j^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right)\right] dz.$$

On a

$$\left|f_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) - f_j^{(n-1)}\left(\frac{z}{\sigma_k}\right)\right| \leqq \varepsilon\alpha_j \quad \text{si} \quad n - 1 \geqq N.$$

Evaluons toujours de la même manière le module de la fonction à intégrer

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{ijk}\right)\varepsilon\alpha_j \leqq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i\beta_j\varepsilon\alpha_j = \varepsilon\alpha_i \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\beta_j = A\varepsilon\alpha_i$$

et l'intégrale elle-même est moindre que $AL\varepsilon\alpha_i$, quantité arbitrairement petite, *C. Q. F. D.*

Si l'on n'envisage comme solutions que les systèmes de fonctions dont les bornes supérieures M_i rendent convergente la série

$$\beta_0 M_0 + \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_i M_i + \cdots$$

dans tout le domaine, la solution est unique. Cette condition de convergence est analogue à celle qui a été imposée aux valeurs initiales et aux fonctions $g_i(x)$ à partir desquelles on a calculé les approximations successives.

Imaginons deux solutions distinctes; en retranchant les fonctions correspondantes, on obtient des fonctions $\varphi_i(x)$ vérifiant la même condition de convergence, et solutions du système d'équations homogènes

$$\varphi_i(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk}(z)\varphi_j\left(\frac{z}{\sigma_k}\right) dz.$$

Soient $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots,$ les modules maxima de $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots$ dans un cercle de rayon h; en raisonnant toujours de même, on voit que, dans ce cercle

$$|\varphi_i(x)| < \mu h \alpha_i$$

en posant

$$\mu = \beta_0\mu_0 + \beta_1\mu_1 + \cdots + \beta_i\mu_i + \cdots$$

(la série converge par hypothèse); donc

$$\mu_i \leqq \mu h \alpha_i$$

d'où en multipliant par β_i et additionnant

$$\mu \leqq \mu . A h,$$

si h est assez petit pour que $Ah < 1$, il faut avoir $\mu = 0$; comme les termes de la série μ sont tous positifs, on en conclut que

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_i = \cdots = 0$$

et par suite les $\varphi_i(x)$ sont identiquement nulles [12]).

II.

Généralités sur les solutions obtenues.

6. Lorsque $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions entières, les solutions sont des fonctions entières, le théorème d'existence étant applicable dans un cercle de centre O et de rayon arbitraire. Soient $A(r)$, $B(r)$ et $F(r)$ les modules maxima des fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sur le cercle $|x| = r$.

En intégrant suivant le rayon vecteur, on déduit de l'équation (2):

$$F(r) \leqq |c_0| + \int_0^r \left[A(\rho) F\left(\frac{\rho}{\Sigma}\right) + B(\rho)\right] d\rho. \tag{15}$$

[12]) Ce qui précède est l'extension aux équations différentielles fonctionnelles de l'étude faite dans ma note *Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires en nombre infini* [Bulletin des Sciences Mathématiques; 2e série, tome XLV (1921); 1e partie, p. 81-87].

Il est vraisemblable que, par suite, la fonction $F(r)$ est inférieure ou égale à la solution de l'équation

$$(16) \qquad M(r) = |c_0| + \int_0^r \left[A(\rho) M\left(\frac{\rho}{\Sigma}\right) + B(\rho)\right] d\rho.$$

En retranchant membre à membre (16) de (15), on voit que la fonction $\Phi(r) = F(r) - M(r)$ satisfait à

$$(17) \qquad \Phi(r) \leqq \int_0^r A(\rho) \Phi\left(\frac{\rho}{\Sigma}\right) d\rho.$$

Nous allons démontrer rigoureusement que cette fonction est négative ou nulle.

Soit $\mu(\alpha, \beta)$ la borne supérieure de $\Phi(r)$ (en valeur qualifiée) dans l'intervalle (α, β). Supposons d'abord r inférieur à h; $\frac{\rho}{\Sigma}$ reste alors dans l'intervalle $\left(0, \frac{h}{\Sigma}\right)$ la fonction $A(r)$ étant positive, on augmente le valeur de l'intégrale en remplaçant $\Phi\left(\frac{\rho}{\Sigma}\right)$ par sa borne supérieure $\mu\left(0, \frac{h}{\Sigma}\right)$.

Donc:

$$\Phi(r) \leqq \mu\left(0, \frac{h}{\Sigma}\right) \int_0^r A(\rho) d\rho \quad \text{pour} \quad r \leqq h$$

et par suite

$$(18) \qquad \mu(0, h) \leqq \mu\left(0, \frac{h}{\Sigma}\right) \int_0^h A(\rho) d\rho.$$

Comme, d'autre part, $\mu\left(0, \frac{h}{\Sigma}\right)$ est au plus égal à $\mu(0, h)$ on a aussi

$$\mu(0, h)\left[1 - \int_0^h A(\rho) d\rho\right] \leqq 0.$$

On peut choisir h assez petit pour que le facteur entre crochets soit positif; on en conclut que $\mu(0, h)$ est négatif ou nul pour h assez petit.

Lorsque Σ est plus grand que 1, l'application réitérée de l'inégalité (18) permet d'étendre la conclusion à un intervalle aussi grand qu'on veut.

Dans le cas où $\Sigma = 1$, soit h_0 une valeur pour laquelle on a déjà démontré l'inégalité

$$\mu(0, h_0) \leqq 0.$$

Ecrivons l'inégalité (17) sous la forme

$$\Phi(r) \leqq \int_0^{h_0} A(\rho) \Phi(\rho) d\rho + \int_{h_0}^r A(\rho) \Phi(\rho) d\rho.$$

On a alors

$$\Phi(r) \leqq \mu(0, h_0)\int_0^{h_0} A(\rho)\,d\rho + \mu(h_0, h)\int_{h_0}^{r} A(\rho)\,d\rho \quad \text{pour} \quad h_0 \leqq r \leqq h$$

d'où

$$\mu(h_0, h) \leqq \mu(0, h_0)\int_0^{h_0} A(\rho)\,d\rho + \mu(h_0, h)\int_{h_0}^{h} A(\rho)\,d\rho$$

et enfin

$$\mu(h_0, h)\left[1 - \int_{h_0}^{h} A(\rho)\,d\rho\right] \leqq \mu(0, h_0)\int_0^{h_0} A(\rho)\,d\rho.$$

Si h est assez voisin de h_0 pour que le facteur entre crochets soit positif, $\mu(h_0, h)$ sera négatif ou nul. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite de nombres positifs croissants définis par les conditions:

$$\int_0^{h_1} A(\rho)\,d\rho = \int_{h_1}^{h_2} A(\rho)\,d\rho = \cdots = \int_{h_{n-1}}^{h_n} A(\rho)\,d\rho = \cdots = \theta < 1;$$

ces nombres croissent indéfiniment, car s'ils tendaient vers une limite l'intégrale de $A(r)$ deviendrait infinie pour cette limite, ce qui est impossible. L'extension précédente pourra être faite dans les intervalles successifs $(0, h_1)$, (h_1, h_2), $\ldots$, (h_{n-1}, h_n), $\ldots$; et par suite $\Phi(r)$ est bien négative ou nulle pour toute valeur de r. *C. Q. F. D.*

7. Considérons maintenant le cas où $a(x)$ et $b(x)$ sont régulières à l'origine, et admettent des points singuliers à distance finie. Un point singulier x_0 de l'une de ces fonctions sera, en général, pour les solutions $f(x)$ définies par leur valeur à l'origine, un point singulier, et même un point critique autour duquel s'échangeront différentes branches de la fonction (ce fait se présente déjà pour une équation différentielle ordinaire). De plus, l'examen de l'équation (1) montre qu'il en sera de même pour tous les points σx_0, $\sigma^2 x_0$, $\ldots$, $\sigma^n x_0$, $\ldots$. En effet, le second membre, contenant $f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, aura une singularité pour $\frac{x}{\sigma} = x_0$, c'est-à-dire $x = \sigma x_0$; le premier membre $f'(x)$ aura la même singularité, ce qui entraîne la singularité de $f(x)$.

L'existence d'un point singulier de $a(x)$ ou de $b(x)$, même lorsque ces fonctions sont uniformes dans tout le plan, fait que les solutions seront multiformes. Il y aura d'abord lieu de déterminer la nature du point singulier, c'est-à-dire l'allure de la fonction lorsque la variable tend vers le point singulier, et la modification qu'elle subit lorsque la variable tourne autour du point singulier. Mais en outre, la fonction étant définie par l'équation (1), une nouvelle question se pose, trouver la signification précise de cette phrase: la fonction multiforme $f(x)$ satisfait à l'équation (1). Etant donnée la dérivée d'une des branches de la fonction au point x, l'équation (1) n'est vérifiée que si l'on met au second membre la valeur au point $\frac{x}{\sigma}$ d'une branche bien déterminée de la fonction. Par quel chemin faut-il prolonger de x à $\frac{x}{\sigma}$ la branche dont la dérivée figure au premier membre pour obtenir la branche qui doit figurer au second membre? La réponse à cette dernière question est d'ailleurs facile. L'équation (1) est vérifiée par les valeurs $f'(0)$ et $f(0)$ de l'élément défini primitivement autour de l'origine. Elle sera toujours vérifiée si l'on prolonge par le même chemin C les deux membres $f'(x)$ et $a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right)+b(x)$; prolonger ce second membre le long de C revient à prendre en $\frac{x}{\sigma}$ la branche issue de l'élément primitif par prolongement suivant $\frac{C}{\sigma}$. On voit aussi que si $a(x)$ et $b(x)$ étaient multiformes, ce sont les valeurs résultant du prolongement le long C des éléments initiaux qui devraient figurer au second membre.

8. Considérons la famille des solutions de l'équation (1) définies par la valeur initiale c_0 considérée comme paramètre arbitraire. Ces solutions sont données par la formule

$$f(x) = c_0\varphi(x) + f_0(x)$$

où $f_0(x)$ est la solution particulière correspondant à la valeur initiale 0, et $\varphi(x)$ la solution particulière de l'équation homogène

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{19}$$

correspondant à la valeur initiale 1.

Les deux fonctions $f_0(x)$ et $\varphi(x)$ dépendent de $a(x)$, tandis que $f_0(x)$ seule dépend de $b(x)$. La relation entre $f_0(x)$ et $b(x)$ est d'ailleurs une transmutation linéaire, de telle sorte que si $b(x)$ est une somme de deux fonctions $b_1(x)$ et $b_2(x)$, $f_0(x)$ est aussi la somme des solutions analogues correspondant respectivement à $b_1(x)$ et $b_2(x)$. De ce fait, l'influence des singularités de $b(x)$ sur les solutions semble plus facile à étudier que celle des singularités de $a(x)$. Cette idée est corroborée par l'observation suivante: un pôle de $a(x)$ n'entraine pas toujours une singularité pour la fonction $\varphi(x)$; en effet, $\varphi(x)$ étant une fonction entière admettant des zéros, si l'on pose

$$a(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)},$$

cette fonction a des pôles (les zéros du dénominateur), et il est évident que les solutions de l'équation (19) correspondante sont les fonctions entières $C\varphi(x)$.

III.

Influence des pôles de $b(x)$ sur les solutions obtenues.

9. Supposons que $a(x)$ soit holomorphe et $b(x)$ méromorphe dans un domaine D analogue à celui défini au n° 1. Dans ce domaine, $b(x)$ peut être décomposée en une somme d'une fonction holomorphe et d'un certain nombre d'éléments simples (au sens de la théorie des fractions rationnelles); d'après la remarque faite au n° précédent, la solution $f_0(x)$ de l'équation considérée est la somme de celles des équations obtenues en remplaçant $b(x)$ par chacune de ses parties. La partie holomorphe de $b(x)$ donnera une solution holomorphe. Il suffit donc d'étudier la nature des solutions obtenues lorsque $b(x)$ est un élément simple.

Premier cas: $\Sigma > 1$.

10. *Pôle simple.* Prenons d'abord l'équation

$$f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b}{x - x_0}. \tag{20}$$

Nous pouvons modifier un peu le domaine D pour que, dans le domaine D' obtenu, les hypothèses faites au n° 1 soient réalisées. Il faut d'abord exclure l'intérieur d'un petit cercle γ de centre x_0 pour que la fonction $\frac{b}{x - x_0}$ soit holomorphe dans le domaine restant. Il faut aussi exclure les points intérieurs aux cercles $\gamma\sigma$, $\gamma\sigma^2$, ..., qui se trouvent dans D, de façon qui le domaine restant D' contienne son transformé $\frac{D'}{\sigma}$. Enfin pour qu'il soit à connexion simple, il faut effectuer une coupure suivant une ligne l joignant les points x_0 et σx_0, et les lignes $l\sigma$, $l\sigma^2$, ... [13]). Nous nous occuperons seulement de la solution s'annulant avec x, c'est-à-dire de celle qui vérifie l'équation

$$f(x) = \int_0^x \left[a(z)f\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \frac{b}{z - x_0}\right] dz. \tag{21}$$

Le théorème d'existence établi dans la section I s'applique à l'équation (21) dans le domaine D'; la fonction $f(x)$ est donc holomorphe dans ce domaine. L'équation (21) peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \int_0^x a(z)f\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz + b \log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right), \tag{22}$$

la détermination du logarithme étant celle qui s'annule à l'origine. La fonction $f(x)$ étant régulière en $\frac{x_0}{\sigma}$, on voit que si l'on fait tendre x vers x_0 (en supposant le rayon de γ de plus en plus petit), ou si l'on fait franchir par x la coupure l, l'intégrale sera régulière et uniforme; la fonction $f(x)$ a donc en x_0 la même singularité que

[13]) Ceci n'est qu'un exemple simple d'une coupure rendant le domaine simplement connexe; on pourrait varier beaucoup son tracé,

$b\log\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)$. En raisonnant de la même manière, on verrait aisément qu'en chacun des points $\sigma^n x_0$ la partie irrégulière de $f(x)$ est de la forme $\varphi_n(x)\log\left(1-\dfrac{x}{\sigma^n x_0}\right)$, $\varphi_n(x)$ étant une fonction holomorphe dans D.

11. Supposons que, dans l'équation (20), $a(x)$ soit une fonction entière. On peut alors prendre pour domaine D l'intérieur d'un cercle de rayon arbitrairement grand. On en conclut que $f(x)$ n'a comme singularités à distance finie que les points critiques logarithmiques x_0, σx_0, ... $\sigma^n x_0$, ...

On peut essayer de la représenter par un développement du type

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \varphi(x) + \varphi_0(x)\log\left(1-\frac{x}{x_0}\right) + \varphi_1(x)\log\left(1-\frac{x}{\sigma x_0}\right) + \cdots \\ \cdots + \varphi_n(x)\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right) + \cdots \end{aligned}\right.$$

$\varphi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., étant des fonctions entières.

Cherchons à déterminer pour l'équation (20) une solution formelle du type (23) où, pour commencer, nous supposerons seulement $\varphi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... uniformes dans tout le plan. Pour le faire, nous utiliserons la remarque suivante: les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ étant supposées uniformes autour de x_0, tandis que la fonction $t(x)$ admet ce point pour point critique, une identité de la forme

$$u(x) + v(x)t(x) = 0$$

ne peut avoir lieu que si $u(x)$ et $v(x)$ sont identiquement nulles (sinon, $t(x)$ s'exprimerait par le quotient de deux fonctions uniformes). Par suite, $U(x)$ et $V(x)$ étant aussi uniformes, une identité de la forme

$$u(x) + v(x)t(x) = U(x) + V(x)t(x)$$

n'est possible que si l'on a à la fois

$$u(x) = U(x) \quad \text{et} \quad v(x) = V(x)$$

Exprimons alors $f\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$ et $f'(x)$ en groupant les parties uniformes et les termes logarithmiques:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\left(1-\frac{x}{\sigma x_0}\right) + \varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\left(1-\frac{x}{\sigma^2 x_0}\right) + \cdots \\ \cdots + \varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\varphi_0(x)}{x-x_0} + \frac{\varphi_1(x)}{x-\sigma x_0} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)}{x-\sigma^n x_0} + \cdots \\ + \varphi_0'(x)\log\left(1-\frac{x}{x_0}\right) + \varphi_1'(x)\log\left(1-\frac{x}{\sigma x_0}\right) + \cdots + \varphi_n'(x)\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right) + \cdots \end{aligned}\right.$$

et par suite le second membre de (20) devient:

$$(25)\quad \begin{cases} a(x)f\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)+\dfrac{b}{x-x_0}=a(x)\varphi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)+\dfrac{b}{x-x_0} \\ +a(x)\varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)\log\left(1-\dfrac{x}{\sigma x_0}\right)+\cdots+a(x)\varphi_{n-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)\log\left(1-\dfrac{x}{\sigma^n x_0}\right)+\cdots \end{cases}$$

Dans un cercle de centre O et contenant le point x_0 sans contenir σx_0, et les suivants, la seule fonction multiforme est $\log\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)$; pour que les expressions (24) et (25) soient identiques, il faut et il suffit que les coefficients de $\log\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)$ soient égaux dans les deux membres, ainsi que la somme des termes restants. En considérant cette somme dans un cercle contenant σx_0 et aucun autre point critique, on verra que les coefficients de $\log\left(1-\dfrac{x}{\sigma x_0}\right)$ doivent être les mêmes, et ainsi de suite. Les coefficients de chaque logarithme et les parties uniformes doivent être égaux chacun à chacun dans (24) et (25), d'où

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi_0'(x)=0,\ \varphi_1'(x)=a(x)\varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right),\ \varphi_2'(x)=a(x)\varphi_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right),\ \ldots \\ \ldots,\ \varphi_n'(x)=a(x)\varphi_{n-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right),\ \ldots \end{cases}$$

$$(27)\quad \varphi'(x)+\frac{\varphi_0(x)}{x-x_0}+\frac{\varphi_1(x)}{x-\sigma x_0}+\cdots+\frac{\varphi_n(x)}{x-\sigma^n x_0}+\cdots=a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)+\frac{b}{x-x_0}$$

Les équations (26) déterminent successivement $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., par quadratures, c'est-à-dire en introduisant pour chacune une nouvelle constante arbitraire; $\varphi_0(x)$ est une constante et $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... sont des fonctions entières. Quant à $\varphi(x)$, elle est déterminée par l'équation (27), équation différentielle du type (1) dans laquelle

$$b(x)=\frac{b}{x-x_0}-\frac{\varphi_0(x)}{x-x_0}-\frac{\varphi_1(x)}{x-\sigma x_0}-\cdots-\frac{\varphi_n(x)}{x-\sigma^n x_0}-\cdots$$

Cette fonction $b(x)$ étant holomorphe autour de l'origine, on pourra appliquer les résultats déjà obtenus en exigeant que $\varphi(x)$ tende vers une limite lorsque x tend vers o sur un chemin C. D'ailleurs, pour que le développement (23) représente, au voisinage de l'origine, en prenant les déterminations principales des logarithmes, la solution de l'équation (21) (à laquelle nous nous sommes restreints au début du n° 10), il faut et il suffit que $\varphi(x)$ tende vers o avec x. Dans ces conditions, $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe tant que $b(x)$ reste holomorphe, mais le pôle de $b(x)$ le plus rapproché de l'origine est un point critique logarithmique pour $\varphi(x)$ (n° 10). Pour que $\varphi(x)$ soit uniforme, il faut que $b(x)$ n'ait aucun pôle, ce qui détermine les constantes d'intégration des équations (26). On obtient ainsi:

$$(28)\left\{\begin{aligned}&\varphi_0(x) = b,\ \varphi_1(x) = \int_{\sigma x_0}^{x} a(x)b\,.\,dx,\ \varphi_2(x) = \int_{\sigma^2 x_0}^{x} a(x)\varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx,\ \ldots\\ &\qquad \ldots,\ \varphi_n(x) = \int_{\sigma^n x_0}^{x} a(x)\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx,\ \ldots\end{aligned}\right.$$

$b(x)$ étant alors une fonction entière, $\varphi(x)$ est aussi une fonction entière.

12. La série (23) ainsi déterminée n'est pas convergente en général. Par exemple, dans le cas très simple où $a(x) = 1$, $b = 1$, les formules (28) donnent:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = \frac{x - \sigma x_0}{1},\ \varphi_2(x) = \frac{(x - \sigma^2 x_0)^2}{2!\,\sigma},\ \ldots,\ \varphi_n(x) = \frac{(x - \sigma^n x_0)^n}{n!\,\sigma^{1+2+\cdots+n-1}},\ \ldots$$

Si l'on donne à x une valeur non nulle, pour n assez grand, x sera très petit par rapport à $\sigma^n x_0$, et le terme $\varphi_n(x)\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^n x_0}\right)$ de la série (23), sera de l'ordre de

$$\frac{(\sigma^n x_0)^n}{n!\,\sigma^{1+2+\cdots+n-1}}\cdot\frac{x}{\sigma^n x_0} = \frac{\sigma^{\frac{n(n-1)}{2}} x_0^{n-1} x}{n!}$$

qui grandit indéfiniment avec n.

On peut modifier la méthode en remplaçant le développement (23) par

$$(29)\left\{\begin{aligned}&f(x)=\varphi(x)+\varphi_0(x)\left[\log\left(1-\frac{x}{x_0}\right)-P_0(x)\right]+\varphi_1(x)\left[\log\left(1-\frac{x}{\sigma x_0}\right)-P_1(x)\right]+\cdots\\ &\qquad\cdots+\varphi_n(x)\left[\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right)-P_n(x)\right]+\cdots\end{aligned}\right.$$

$P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ... dèsignant des polynômes. On a alors

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) &+ \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\log\left(1 - \frac{x}{\sigma x_0}\right) - P_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]\\ &+ \varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^2 x_0}\right) - P_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] + \cdots\\ &\cdots + \varphi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^{n+1} x_0}\right) - P_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] + \cdots\end{aligned}$$

ou, en mettant en évidence, pour chaque point critique, la même fonction multiforme que dans (29):

$$(30)\quad \begin{cases} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[P_1(x) - P_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] + \cdots \\ \cdots + \varphi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[P_{n+1}(x) - P_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] + \cdots \\ + \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\log\left(1 - \frac{x}{\sigma x_0}\right) - P_1(x)\right] + \cdots \\ \cdots + \varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^n x_0}\right) - P_n(x)\right] + \cdots \end{cases}$$

Les formules (24) et (25) sont alors remplacées par d'autres où les fonctions multiformes ont les mêmes coefficients; $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ doivent encore satisfaire aux équations (26) et sont par suite des fonctions entières. Dans les parties uniformes, les pôles ne peuvent provenir que de $\frac{b}{x - x_0}$ et des dérivées des logarithmes, ce sont les mêmes que dans (27); et par suite, pour qu'ils disparaissent, il faut que les fonctions $\varphi_0(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ soient les mêmes que dans le développement purement formel (23). Ces fonctions étant ainsi indépendantes des polynômes, on peut choisir ces derniers de manière que la série (29) soit convergente.

Soient M_0, M_1, $\ldots$ M_n, $\ldots$, les bornes supérieures des modules de $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$, respectivement dans les cercles de centre O et de rayons R, $R\Sigma$, $\ldots$, $R\Sigma^n$, $\ldots$, et M'_0, M'_1, $\ldots$, M'_n, $\ldots$ les bornes supérieures des modules de leurs dérivées dans les mêmes cercles.

Il existe des nombres positifs ε_0, ε_1, $\ldots$, ε_n, $\ldots$ tels que les trois séries

$$M_0\varepsilon_0 + M_1\varepsilon_1 + \cdots + M_n\varepsilon_n + \cdots, \quad M_0\varepsilon_1 + M_1\varepsilon_2 + \cdots + M_n\varepsilon_{n+1} + \cdots,$$
$$M'_0\varepsilon_0 + M'_1\varepsilon_1 + \cdots + M'_n\varepsilon_n + \cdots$$

soient convergentes.

Considérons un cercle de centre O et de rayon R, et enlevons de ce cercle la bande balayée par un petit cercle dont le centre décrit les lignes l, $l\sigma$, $l\sigma^2$, $\ldots$, du n° 10; soit E le domaine étoilé restant; tout point de E peut être joint à l'origine par un chemin de longueur inférieure à un nombre fixe λ.

La fonction $\frac{1}{x - x_0}$ est holomorphe dans E et peut donc y être représentée avec l'approximation ε par un polynôme

$$\left|\frac{1}{x - x_0} - p_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{pour } x \text{ dans } E;$$

d'où l'on conclut, en intégrant de o à x:

$$\left|\log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) - \int_0^x p_\varepsilon(z)\,dz\right| < \lambda\varepsilon \qquad \text{pour } x \text{ dans } E$$

En remplaçant x par $\dfrac{x}{\sigma^n}$, on voit que:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{x-\sigma^n x_0} - \frac{1}{\sigma^n} p_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma^n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\Sigma^n} \\ &\left|\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right) - \int_0^{\frac{x}{\sigma^n}} p_\varepsilon(z)\,dz\right| < \lambda\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ pour } x \text{ dans } E\sigma^n$$

En adoptant pour les formules (29) les polynômes

$$P_n(x) = \int_0^{\frac{x}{\sigma^n}} p_{\varepsilon_n}(z)\,dz,$$

on aura, d'après les inégalités précédentes:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{x-\sigma^n x_0} - P'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon_n}{\Sigma^n} \\ &\left|\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right) - P_n(x)\right| < \lambda\varepsilon_n \end{aligned}\right\} \text{ pour } x \text{ dans } E\sigma^n$$

Le domaine E faisant partie du cercle de rayon R, $E\sigma^n$ fait partie du cercle de rayon $R\Sigma^n$, et par suite,

$$|\varphi_n(x)| < M_n \qquad |\varphi'_n(x)| < M'_n \qquad \text{pour } x \text{ dans } E\sigma^n$$

Dans un domaine $E\sigma^N$ en considérant les termes à partir de celui qui a pour point critique $\sigma^N x_0$, on voit que la série (29) est normalement convergente, ainsi que les deux séries dans lesquelles on a décomposé $f'\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)$ suivant la formule (30), et les deux séries qui constituent $f'(x)$ lorsqu'on sépare la partie uniforme d'une part, et les termes ayant un point critique d'autre part. Dans ces conditions, les raisonnements faits au n° précédent s'appliquent ici en toute rigueur; par suite, la série (29) est convergente et représente bien la fonction cherchée, satisfaisant à l'équation (24). Il est bien clair que, si les fonctions $\varphi_n(x)$ sont les mêmes, quel que soit le choix des polynômes $P_n(x)$, la fonction $\varphi(x)$ au contraire dépend de ce choix [en particulier, elle n'est pas la même que dans la solution formelle (23)].

Jusqu'ici, chaque logarithme désignait la branche s'annulant avec x; cette branche est d'ailleurs une fonction holomorphe dans le domaine où on considérait ce logarithme. Il suffit de donner aux logarithmes leur sens général pour que la série (29) représente la fonction $f(x)$ dans tout son domaine d'existence. En effet, une branche quelconque de $f(x)$ s'obtient en prolongeant l'élément primitivement considéré le long d'un chemin entourant de façon plus ou moins compliquée des points critiques pris dans la suite $x_0, \sigma x_0, \ldots, \sigma^n x_0, \ldots$; toutefois, ce chemin doit rester à distance finie; par suite pour une valeur assez grande de N, il est tout entier contenu dans le domaine $E\sigma^N$. Le raisonnement fait à l'alinéa précédent prouve que le reste de la série (29) (à partir d'un terme convenable) est une fonction holomorphe dans $E\sigma^N$. En regardant $f(x)$ comme la somme des termes précédents et du reste, on voit que la circulation effectuée par x n'a d'effet que sur un nombre fini de termes ; cet effet est un changement de branche du logarithme correspondant. Il en résulte aussi que la détermination obtenue après cette circulation ne dépend que du nombre total de tours (comptés avec un signe correspondant à leur sens) faits par le chemin autour de chaque point critique, et non pas de l'ordre dans lequel ils se succèdent. Au point de vue du calcul, pour avoir une valeur quelconque de la fonction $f(x)$, il faut prendre une détermination quelconque pour certains logarithmes en nombre fini (mais non borné supérieurement), et la détermination primitivement envisagée pour tous les logarithmes à partir d'un certain rang. Dans l'application du résultat précédent à une fonction $b(x)$ ayant des pôles simples, si plusieurs de ces pôles appartiennent à la même suite de points $x_0, \sigma x_0, \sigma^2 x_0, \ldots,$ il est clair qu'il y aura intérêt à les grouper pour déterminer d'un seul coup tous les termes logarithmiques qui en résultent. La valeur obtenue pour les constantes d'intégration serait seule changée.

13. *Pôle double.* Prenons d'abord l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_2}{(x - x_0)^2} \tag{31}$$

généralisant l'équation (20), en supposant toujours $\Sigma > 1$. En raisonnant comme au début du n° 10, on verra que la solution de l'équation

$$f(x) = \int_0^x \left[a(z) f\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \frac{b_2}{(z - x_0)^2}\right] dz,$$

généralisation de l'équation (21), est holomorphe dans le domaine D'.

En effectuant la quadrature portant sur le second terme, cette équation s'écrit :

$$f(x) = \int_0^x a(z) f\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz - b_2\left(\frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{x_0}\right)$$

En remarquant, comme pour l'équation (22), que la fonction représentée par l'intégrale est régulière au voisinage de x_0, on en conclut que ce point est un pôle simple pour $f(x)$, la partie infinie étant $-\dfrac{b_2}{x - x_0}$, et ceci a lieu pour toutes les solutions de l'équation (31).

Plus généralement, lorsque dans l'équation (1) $b(x)$ contient un terme de la forme $\dfrac{b_2}{(x - x_0)^2}$, $f(x)$ a par là-même un terme $-\dfrac{b_2}{x - x_0}$.

Prenons alors l'équation

$$f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_2}{(x - x_0)^2} + \frac{b_1}{x - x_0}, \tag{32}$$

et faisons le changement de fonction inconnue

$$f(x) = g(x) - \frac{b_2}{x - x_0}.$$

L'équation qui détermine $g(x)$ est alors

$$g'(x) = a(x)g\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{b^2 \sigma a(x)}{x - \sigma x_0} + \frac{b_1}{x - x_0}$$

La fonction qui remplace $b(x)$ admet les deux pôles simples x_0 et σx_0; on peut la décomposer en une fonction entière et deux éléments simples; par suite $g(x)$ sera la somme des solutions des deux équations

$$g'(x) = a(x)g\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \text{fonction entière}$$

$$g'(x) = a(x)g\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_1}{x - x_0} - \frac{b_2 \sigma a(\sigma x_0)}{x - \sigma x_0}.$$

La solution de la dernière équation est représentable par une série de la forme (29); et celle de la précédente est une fonction entière, qu'on peut réunir au premier terme du développement (29). Dans l'expression de $f(x)$, il y a en outre l'élément simple $-\dfrac{b_2}{x - x_0}$; si l'on veut grouper tous les termes uniformes, l'expression rentre encore dans le même type (29); mais $\varphi(x)$ désignera alors, au lieu d'une fonction entière, une fonction ayant pour toute singularité à distance finie le pôle simple x_0.

14. *Pôle multiple.* Sous cette forme, il est aisé de voir que le résultat se généralise pour un pôle d'ordre de multiplicité quelconque. En raisonnant comme au début du n° 13, on verra aisément que la présence dans $b(x)$ d'un terme $\dfrac{b_p}{(x - x_0)^p}$ entraîne dans $f(x)$ celle d'un terme $-\dfrac{b_p}{(p - 1)(x - x_0)^{p-1}}$.

Considérons alors l'équation

$$f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_n}{(x - x_0)^n} + \cdots + \frac{b_2}{(x - x_0)^2} + \frac{b_1}{x - x_0}; \tag{33}$$

nous y ferons le changement de fonction inconnue:

$$f(x) = g(x) - \frac{b_n}{(n - 1)(x - x_0)^{n-1}} - \cdots - \frac{b_2}{x - x_0}$$

L'équation déterminant $g(x)$ sera alors

$$g'(x) = a(x) g\left(\frac{x}{\sigma}\right) - a(x)\left[\frac{b_n \sigma^{n-1}}{(n-1)(x-\sigma x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_2 \sigma}{x - \sigma x_0}\right] + \frac{b_1}{x - x_0}$$

La fonction qui, dans cette équation, joue le rôle de $b(x)$ admet le pôle simple x_0 et le pôle multiple σx_0 d'ordre $n-1$; le groupe d'éléments simples relatifs à ce pôle est connu. Par un nouveau changement de fonction inconnue analogue au précédent, on réduirait l'équation à une nouvelle forme où $b(x)$ aurait les pôles simples x_0 et σx_0 et le pôle multiple $\sigma^2 x_0$ d'ordre $n-2$. En continuant ainsi, on arriverait à une équation dans laquelle $b(x)$ possèderait les n pôles simples $x_0, \sigma x_0, \ldots, \sigma^{n-1} x_0$. Ce résultat une fois prévu, on peut exposer la réduction plus brièvement ainsi qu'il suit. Faisons le changement de fonction inconnue:

$$(34) \quad \left\{\begin{aligned} f(x) = g(x) &+ G_{n-1}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) + G_{n-2}\left(\frac{1}{x-\sigma x_0}\right) + \cdots \\ &\cdots + G_2\left(\frac{1}{x-\sigma^{n-3}x_0}\right) + G_1\left(\frac{1}{x-\sigma^{n-2}x_0}\right) \end{aligned}\right.$$

$G_q(u)$ désignant un polynôme de degré q en u sans terme constant, dont les coefficients vont être déterminés par la suite. Des expressions

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x}{\sigma}\right) &+ G_{n-1}\left(\frac{\sigma}{x-\sigma x_0}\right) + G_{n-2}\left(\frac{\sigma}{x-\sigma^2 x_0}\right) + \cdots \\ &\cdots + G_2\left(\frac{\sigma}{x-\sigma^{n-2}x_0}\right) + G_1\left(\frac{\sigma}{x-\sigma^{n-1}x_0}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = F'(x) &- \frac{1}{(x-x_0)^2} G'_{n-1}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - \frac{1}{(x-\sigma x_0)^2} G'_{n-2}\left(\frac{1}{x-\sigma x_0}\right) - \cdots \\ &\cdots - \frac{1}{(x-\sigma^{n-3}x_0)^2} G'_2\left(\frac{1}{x-\sigma^{n-3}x_0}\right) - \frac{1}{(x-\sigma^{n-2}x_0)^2} G'_1\left(\frac{1}{x-\sigma^{n-2}x_0}\right), \end{aligned}$$

on déduit l'équation qui détermine $F(x)$. En groupant dans le second membre les termes qui ont le même pôle, elle s'écrit

$$\begin{aligned} F'(x) = a(x) F\left(\frac{x}{\sigma}\right) &+ \frac{1}{(x-x_0)^2} G'_{n-1}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) + \frac{1}{(x-x_0)^n} + \frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots \\ &\cdots + \frac{b_2}{(x-x_0)^2} + \frac{b_1}{x-x_0} \\ &+ \frac{1}{(x-\sigma x_0)^2} G'_{n-2}\left(\frac{1}{x-\sigma x_0}\right) + a(x) G_{n-1}\left(\frac{\sigma}{x-\sigma x_0}\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{(x-\sigma^{n-2}x_0)^2} G'_1\left(\frac{1}{x-\sigma^{n-2}x_0}\right) + a(x) G_2\left(\frac{\sigma}{x-\sigma^{n-2}x_0}\right) \\ &+ a(x) G_1\left(\frac{\sigma}{x-\sigma^{n-1}x_0}\right). \end{aligned}$$

Un produit du type $u^2 G'_q(u)$ est un polynôme de degré $q+1$ en u, sans terme constant ni terme en u. On peut donc déterminer les coefficients des polynômes par la condition que, dans chaque ligne, les termes de la dérivée détruisent les termes de même nature du produit suivant, de telle façon qu'il reste la somme d'une fonction entière et d'un élément simple du premier ordre. La fonction $F(x)$ sera, comme la fonction $g(x)$ du n° 13, représentable par une série (29). Si dans $f(x)$, on réunit toute la partie uniforme, on aura une expression du même type mais dans laquelle $\varphi(x)$ sera une fonction entière augmentée des fractions rationnelles introduites par le changement d'inconnue (34), autrement dit $\varphi(x)$ sera une fonction uniforme dont les points singuliers à distance finie seront les pôles $x_0, \sigma x_0, \ldots, \sigma^{n-2} x_0$ d'ordres respectifs, $n-1$, $n-2, \ldots, 1$.

Les transformations subies par $f(x)$ lorsque x se déplace dans le plan sont de même nature que dans le cas du pôle simple (la surface de RIEMANN à une infinité de feuillets serait la même). Tout ce qui a été dit à ce sujet à la fin du n° 12 subsiste sans aucun changement.

15. Il ne nous reste plus qu'à envisager l'allure de la fonction lorsque la variable tend vers l'un des points critiques $\sigma^p x_0$. Il suffit pour cela de regarder comment se comporte le terme T_p ayant $\sigma^p x_0$ pour point critique, et éventuellement aussi $\varphi(x)$ (dans le cas où cette fonction a des pôles); car la série formée par les autres termes est convergente et a une valeur finie.

Etudions d'abord comment se comporte le facteur $\log\left(\frac{x}{1-\sigma^p x_0}\right) - P_p(x)$; $P_p(x)$ étant un polynôme tend vers $P_p(\sigma^p x_0)$, limite finie et indépendante du chemin sur lequel x se rapproche de $\sigma^p x_0$.

En posant $x = \sigma^p x_0 + \rho e^{i\theta}$ on a (en désignant par L le logarithme réel)

$$\log\left(1-\frac{x}{\sigma^p x_0}\right) = \log\frac{\rho e^{i\theta}}{-\sigma^p x_0} = L\rho + i\theta - \log(-\sigma^p x_0) = -L\frac{1}{\rho} + i\theta - \log(-\sigma^p x_0).$$

Le dernier terme est fixe; le premier croit indéfiniment; le second reste borné si le chemin sur lequel x tend vers $\sigma^p x_0$ ne tourne pas indéfiniment autour de ce point; si $\sigma^p x_0$ est point asymptote pour la courbe décrite par x, $i\theta$ peut croître indéfiniment, et même aussi rapidement qu'on veut pour un choix convenable du chemin. J'appellerai respectivement *chemin ordinaire* et *chemin en spirale* ces deux espèces de courbes [14]).

[14]) On peut concevoir aussi des chemins très irréguliers sur lesquels $\overline{\lim\limits_{\rho=0}}\, \theta = +\infty$, et $\underline{\lim\limits_{\rho=0}}\, \theta =$ nombre fini ou $-\infty$ (ou inversement). Dans ces conditions le logarithme croît indéfiniment sans avoir un ordre déterminé. On verrait aisément que $f(x)$ ou bien croîtrait indéfiniment irrégulièrement, ou bien serait indéterminée.

En résumé, le facteur $\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^p x_0}\right) - P_p(x)$ croît toujours indéfiniment, comme $L\frac{1}{\rho}$ sur un chemin ordinaire, et avec une rapidité arbitraire (au moins égale à la précédente) sur un chemin en spirale.

Cherchons l'allure de la solution $f(x)$ d'une équation dans laquelle $b(x)$ a un pôle unique et simple x_0. $\varphi_0(x)$ est une constante b; si donc x tend vers x_0, ce qui précède s'applique au terme T_0, et par suite aussi à $f(x)$. Mais pour $p \geqq 1$, $\varphi_p(x)$ est une fonction entière ayant $\sigma^p x_0$ pour zéro [formules (28)]; donc elle tend vers o comme une puissance entière et positive de ρ; dans ces conditions, T_p tend vers o sur un chemin ordinaire, mais peut avoir une limite finie non nulle, ou même croitre indéfiniment sur un chemin en spirale. Par conséquent, sur un chemin ordinaire $f(x)$ a une limite finie indépendante de ce chemin, mais sur un chemin en spirale $f(x)$ peut tendre vers une limite différente ou croître indéfiniment.

Prenons maintenant la solution $F(x)$ d'une équation où $b(x)$ a plusieurs pôles simples parmi la suite $x_0, \sigma x_0, \ldots$ (par exemple la fonction $F(x)$ du n° 14, correspondant aux pôles simples $x_0, \sigma x_0, \ldots, \sigma^{n-1} x_0$). Lorsqu'un point $\sigma^p x_0$ est un pôle, la fonction $\varphi_p(x)$ correspondant est égale à celle donnée par la formule (28) augmentée du résidu de $b(x)$ au pôle considéré; pour le terme T_p correspondant, les conclusions sont analogues à celles formulées pour T_0 à l'alinéa précèdent. Quand x tend vers l'un des pôles simples de $b(x)$, l'allure de $F(x)$ est celle indiquée pour $f(x)$ quand x tend vers x_0; et quand x tend vers un point $\sigma^p x_0$ qui n'est pas pôle de $b(x)$, $F(x)$ se comporte comme $f(x)$ quand x tend vers $\sigma^p x_0$, $p > 1$.

Enfin, pour la solution $f(x)$ de l'équation (33) [pôle multiple de $b(x)$], il suffit de tenir compte de l'allure de $F(x)$ et de celle des groupes d'éléments simples $G_q(x)$, On est conduit à distinguer deux cas:

1° $p \leqq n - 1$: $f(x)$ croit toujours indéfiniment: sur un chemin ordinaire, comme $\frac{1}{\rho^{n-p-1}}$ $(p \leqq n-2)$ ou $L\frac{1}{\rho}$ $(p = n-1)$; sur un chemin en spirale, avec une rapidité arbitraire, au moins égale à la précédente.

2° $p \geqq n$: sur un chemin ordinaire $f(x)$ tend vers une limite finie, indépendante du chemin; sur un chemin en spirale, $f(x)$ peut tendre vers une limite différente, ou croître indéfiniment.

Deuxième cas: $\sigma^k = 1$.

16. *Pôle simple.* Reprenons l'équation (20) $f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b}{x - x_0}$.

Comme aux nos 9 et 10, nous supposons $a(x)$ holomorphe dans un domaine D contenant x_0 et satisfaisant aux conditions du n° 1 (dans le cas où σ est une racine de l'unité, ce domaine est invariant par la multiplication ou la division par σ). La construction du domaine D' satisfaisant aux mêmes conditions et dans lequel $b(x)$ sera aussi holomorphe va différer légèrement de celle du n° 10. Excluons les points intérieurs à un petit cercle γ de centre x_0, et aux cercles $\gamma\sigma$, $\gamma\sigma^2$, $\dots$, $\gamma\sigma^{k-1}$ qui sont en nombre fini, et tous situés dans D (je suppose, bien entendu, que σ est une racine k^{me} primitive de l'unité de façon que les puissances σ, σ^2, $\dots$, σ^{k-1} soient effectivement distinctes). Enfin, effectuons k coupures suivant une ligne l joignant x_0 à la frontière du domaine, et les lignes $l\sigma$, $l\sigma^2$, $\dots$, $l\sigma^{k-1}$.

La fonction $f(x)$ étant holomorphe dans D', les seuls points singuliers possibles sont x_0, σx_0, $\dots$, $\sigma^{k-1}x_0$.

Par analogie avec le premier cas, on est conduit à chercher pour les solutions un développement

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \varphi(x) + \varphi_0(x) \log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \varphi_1(x) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma x_0}\right) + \cdots \\ \cdots + \varphi_{k-2}(x) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma^{k-2}x_0}\right) + \varphi_{k-1}(x) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma^{k-2}x_0}\right) \end{aligned}\right.$$

du type (23), mais avec un nombre fini de termes. Une autre différence se présente dans la formule

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \varphi_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma x_0}\right) \\ + \varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma^2 x_0}\right) + \cdots + \varphi_{k-2}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log\left(1 - \frac{x}{\sigma^{k-1}x_0}\right), \end{aligned}$$

l'existence d'un terme ayant x_0 pour point critique.

En raisonnant comme au n° 11, on voit que les équations (26) et (27) sont remplacées par

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_0'(x) = a(x)\varphi_{k-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) & \varphi_0(x_0) = b \\ \varphi_1'(x) = a(x)\varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) & \varphi_1(\sigma x_0) = 0 \\ \varphi_2'(x) = a(x)\varphi_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) & \varphi_2(\sigma^2 x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi_{k+1}'(x) = a(x)\varphi_{k-2}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) & \varphi_{k-1}(\sigma^{k-1}x_0) = 0 \end{array}\right.$$

$$(37)\quad \varphi'(x) + \frac{\varphi_0(x)}{x - x_0} + \frac{\varphi_1(x)}{x - \sigma x_0} + \cdots + \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x - \sigma^{k-1}x_0} = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b}{x - x_0}$$

Pour que la solution $\varphi(x)$ de (37) soit uniforme, il faut que les solutions de (36) satisfassent aux conditions écrites en regard de ces équations. Le système (36) est un cas particulier du système (11) de la section I; mais, pour utiliser le théorème d'existence établi en cet endroit, il faudrait montrer qu'on peut disposer des constantes représentant les valeurs à l'origine des k fonctions de manière à leur faire prendre les valeurs particulières données aux points assignés. Il est plus commode de poser

$$\varphi_0(x)=\psi_0(x),\ \varphi_1(\sigma x)=\psi_1(x),\ \varphi_2(\sigma^2 x)=\psi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_{k-1}(\sigma^{k-1}x)=\varphi_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\psi_{k-1}(x)$$

Les équations (36) et les valeurs particulières imposées aux fonctions se transforment en

$$\begin{cases} \psi_0'(x) = a(x)\psi_{k-1}(x) & \psi_0(x_0) = b \\ \psi_1'(x) = \sigma a(\sigma x)\psi_0(x) & \psi_1(x_0) = 0 \\ \psi_2'(x) = \sigma^2 a(\sigma^2 x)\psi_1(x) & \psi_2(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \psi_{k-1}'(x) = \sigma^{k-1} a(\sigma^{k-1}x)\psi_{k-2}(x) & \psi_{k-1}(x_0) = 0 \end{cases}$$

système d'équations différentielles linéaires avec valeurs initiales de toutes les fonctions inconnues en un même point. On sait qu'il y a une solution unique, elle est constituée par des fonctions holomorphes dans le domaine D, où $a(x)$ est elle-même holomorphe. Le théorème d'existence appliqué à l'équation (37) montre que $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine. Si $a(x)$ est une fonction entière, ce sont des fonctions entières. Si au second membre de l'équation (20), on ajoutait des éléments simples ayant pour pôles simples certains des points $\sigma^p x_0$, il suffirait de tenir compte de leurs résidus dans les valeurs initiales des fonctions $\varphi_p(x)$.

Au début du n° 12, nous avons calculé les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., de la formule (23) dans un cas très simple. Calculons-les maintenant pour l'équation

$$f'(x) = f(-x) + \frac{1}{x - x_0},$$

où nous supposons en outre $\sigma = -1$, c'est-à-dire $k = 2$. il y aura deux fonctions ψ définies par le système

$$\begin{cases} \psi_0'(x) = \psi_1(x) & \psi_0(x_0) = 1 \\ \psi_1'(x) = -\psi_0(x) & \psi_1(x_0) = 0 \end{cases}$$

qui a pour solution

$$\psi_0(x) = \cos(x - x_0) \qquad \psi_1(x) = -\sin(x - x_0)$$

d'où les fonctions

$$\varphi_0(x) = \cos(x - x_0) \qquad \varphi_1(x) = \quad \sin(x + x_0)$$

La partie non uniforme de $f(x)$ sera donc

$$\cos(x - x_0)\log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \sin(x + x_0)\log\left(1 + \frac{x}{x_0}\right).$$

C'est d'ailleurs ce que l'on obtiendrait en portant dans le développement formel (23) les valeurs des $\varphi_p(x)$ trouvées au début du n° 12, et en réduisant les termes où figure le même logarithme par suite de la valeur -1 de σ.

Les relations entre les différentes branches de la fonction sont les mêmes que dans le premier cas, un peu simplifiées du fait que les points critiques sont en nombre fini.

17. *Pôle multiple.* Le changement de fonction inconnue (34) permet de ramener l'équation (33) à une équation en $F(x)$ dans laquelle $b(x)$ a plusieurs pôles simples. Le calcul est exactement le même qu'au n° 14 lorsque l'ordre de multiplicité du pôle est assez petit ($n \leqq k$).

Examinons le cas $n > k$. Ecrivons la formule (34) en rassemblant les termes qui ont le même pôle ($\sigma^k x_0$ et x_0 par exemple)

$$f(x) = F(x) + G_{n-1}\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + G_{n-2}\left(\frac{1}{x - \sigma x_0}\right) + \cdots$$
$$\cdots + G_{n-k+1}\left(\frac{1}{x - \sigma^{k-2} x_0}\right) + G_{n-k}\left(\frac{1}{x - \sigma^{k-1} x_0}\right)$$

Il y a un changement dans la formule

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x}{\sigma}\right) + G_{n-k}\left(\frac{\sigma}{x - x_0}\right) + G_{n-1}\left(\frac{\sigma}{x - \sigma x_0}\right) + G_{n-2}\left(\frac{\sigma}{x - \sigma^2 x_0}\right) + \cdots$$
$$\cdots + G_{n-k+1}\left(\frac{\sigma}{x - \sigma^{k-1} x_0}\right)$$

x_0 figure parmi les pôles (tout comme il figurait parmi les points critiques au n° précédent). L'équation déterminant $F(x)$ s'écrit par suite:

$$F'(x) = a(x) F\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$
$$+ \frac{1}{(x - x_0)^2} G'_{n-1}\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + a(x) G_{n-k}\left(\frac{\sigma}{x - x_0}\right) + \frac{b_n}{(x - x_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{x - x_0}$$
$$+ \frac{1}{(x - \sigma x_0)^2} G'_{n-2}\left(\frac{1}{x - \sigma x_0}\right) + a(x) G_{n-1}\left(\frac{\sigma}{x - \sigma x_0}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{(x - \sigma^{k-1} x_0)^2} G'_{n-k}\left(\frac{1}{x - \sigma^{k-1} x_0}\right) + a(x) G_{n-k+1}\left(\frac{\sigma}{x - \sigma^{k-1} x_0}\right).$$

La réduction des éléments simples d'ordre supérieur au premier détermine bien sans ambiguïté et sans impossibilité les coefficients des polynômes G_q. En effet, dans la première ligne, $a(x)\, G_{n-k}\left(\frac{\sigma}{x - x_0}\right)$ n'apporte aucun terme en $\frac{1}{x - x_0}$ de degré supérieur à $n - k$; donc pour les k termes de degrés n, $n - 1$, ..., $n - k + 1$, la réduction doit s'opérer uniquement entre ceux provenant de G'_{n-1} et ceux de $b(x)$, ce qui détermine les k premiers coefficients de G_{n-1}. La seconde ligne détermine de la même manière les k premiers coefficients de G_{n-2}, etc. Lorsque la dernière ligne aura fourni les k premiers coefficients de G_{n-k}, on reviendra à la première d'où l'on tirera la seconde tranche de k coefficients de G_{n-1}, et ainsi de suite jusqu'à épuisement.

L'allure de la fonction quand x tend vers un point singulier est la même que dans le cas précédent; il faut toutefois observer que les points singuliers sont seulement au nombre de k; l'entier p du nº 15 ne peut avoir que les valeurs 0, 1, ..., $k - 1$; le cas $p \geqq n$ ne se présente plus dès que $n \geqq k$.

Troisième cas; $\Sigma = 1$, σ *n'étant pas racine de l'unité.*

18. *Pôle simple.* Reprenons l'équation (20), en supposant comme dans les deux premiers cas (nºs 10 et 16) $a(x)$ holomorphe dans un cercle D ayant l'origine pour centre et un rayon supérieur à $|x_0|$ [15]). Le théorème d'existence ne peut s'appliquer que dans un cercle D' concentrique et de rayon inférieur à $|x_0|$. La solution est holomorphe dans un tel cercle. Par analogie avec les deux premiers cas, elle doit admettre x_0, σx_0, $\sigma^2 x_0$, ... pour points singuliers; ces points forment un ensemble dense sur tout le cercle de rayon $|x_0|$, qui doit par suite, être une coupure pour cette fonction. Nous voulons étudier comment elle se comporte quand x tend vers un point de ce cercle. Pour cela, nous allons la représenter par un développement (23). Les raisonnements faits au nº 11 établissaient, pour que la série (23) satisfasse formellement à l'équation (20), dans le cas $\Sigma > 1$, les conditions nécessaires et suffisantes suivantes: d'abord

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi_0(x) = b, \qquad \varphi_1(x) = \int_{\sigma x_0}^{x} a(x) b \, . \, dx, \\ \varphi_2(x) = \int_{\sigma^2 x_0}^{x} a(x) \varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx, \; \dots, \; \varphi_n(x) = \int_{\sigma^n x_0}^{x} a(x) \varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx, \; \dots, \end{cases}$$

---

[15]) Il suffit d'interpréter les conditions du nº 1 dans le cas actuel. La division par σ correspond géométriquement à une rotation d'amplitude incommensurable avec 2π. Un domaine D ne peut contenir son transformé $\frac{D}{\sigma}$, et par suite $\frac{D}{\sigma^2}$, ..., $\frac{D}{\sigma^p}$, ..., que s'il est formé de couronnes circulaires de centre 0; pour qu'il soit simplement connexe, il faut que ce soit l'intérieur d'un cercle.

puis, ces fonctions une fois déterminées, $\varphi(x)$ devait satisfaire à l'équation (27) que nous écrirons sous la forme

$$(27')\quad \varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{\varphi_1(x)}{x-\sigma x_0} - \frac{\varphi_2(x)}{x-\sigma^2 x_0} - \cdots - \frac{\varphi_n(x)}{x-\sigma^n x_0} - \cdots.$$

Le raisonnement montrant la nécessité de ces conditions perd toute valeur dans le cas présent; mais il est évident que, au point de vue formel comme au n° 11, elles sont toujours suffisantes. Nous allons voir d'ailleurs que leur valeur n'est pas purement formelle dans le cas actuel.

Tout d'abord, les formules (28) montrent clairement que les $\varphi_n(x)$ sont holomorphes dans D, comme $a(x)$. Nous pouvons même limiter supérieurement leurs modules conformément au tableau suivant. Posons: $A = \max |a(x)|$ dans D, $B = |b|$

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{lll}
|\varphi_1'(x)| \leqq AB & |\varphi_1(x)| \leqq B.A|x-\sigma x_0| & \left|\varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq B.A|x-\sigma^2 x_0| \\
|\varphi_2'(x)| \leqq AB.A|x-\sigma^2 x_0| & |\varphi_2(x)| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^2 x_0|)^2}{2!} & \left|\varphi_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right| B \leqq \frac{(A|x-\sigma^3 x_0|)^2}{2!} \\
|\varphi_3'(x)| \leqq AB.\frac{(A|x-\sigma^3 x_0|)^2}{2!} & |\varphi_3(x)| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^3 x_0|)^3}{3!} & \left|\varphi_3\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^4 x_0|)^3}{3!} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

(dans chaque ligne, on passe de la 1[re] inégalité à la 2[me] en prenant l'intégrale correspondante de (28) le long d'une droite; la 3[me] résulte immédiatement de la 2[me] et de $|\sigma| = 1$).

On aurait, en général,

$$|\varphi_n'(x)| \leqq AB.\frac{(A|x-\sigma^n x_0|)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad |\varphi_n(x)| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^n x_0|)^n}{n!}$$

$$\left|\varphi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^{n+1} x_0|)^n}{n!} \qquad \left|\frac{\varphi_n(x)}{x-\sigma^n x_0}\right| \leqq AB\frac{(A|x-\sigma^n x_0|)^{n-1}}{n!}.$$

La dernière de ces inégalités permet de voir que la série du second membre de l'équation (27′) est normalement convergente et représente une fonction holomorphe dans D. Soient en effet r_0 le module de x_0, R et R' les rayons respectifs des circonférences limitant D et D' ($R' < r_0 < R$). Quel que soit x dans D, et quel que soit l'entier n, on a

$$|x-\sigma^n x_0| \leqq |x| + |\sigma^n x_0| < R + r_0,$$

d'où résulte immédiatement le fait annoncé; $\varphi(x)$ est donc, comme les $\varphi_n(x)$, une fonction holomorphe dans D.

La convergence normale des séries figurant aux seconds membres de (23), (24) et (25) s'établirait d'une manière analogue, en utilisant les autres inégalités, et en supposant x dans D', de manière que les modules de tous les logarithmes admettent une même borne supérieure finie (il s'agit des déterminations s'annulant à l'origine).

Il est donc établi que la série (23) représente, dans tout le cercle D, une fonction holomorphe satisfaisant à l'équation (20). D'après le théorème d'unicité (section I, n° 3) cette fonction coïncide avec la solution obtenue par approximations successives et prenant à l'origine la valeur $\varphi(x_0)$.

Laissons maintenant varier x dans tout le cercle C_0 de rayon r_0, y compris la circonférence. Les logarithmes n'admettent plus de borne supérieure finie mais on a:

$$\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^n x_0}\right) = \log \frac{x - \sigma^n x_0}{-\sigma^n x_0} = L\left|\frac{x - \sigma^n x_0}{-\sigma^n x_0}\right| + i \arg \frac{x - \sigma^n x_0}{-\sigma^n x_0}.$$

L'argument reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, puisqu'il s'agit de la détermination du logarithme qui s'annule avec x. D'autre part,

$$\rho_n = |x - \sigma^n x_0| \leqq 2 r_0$$

donc

$$L\left|\frac{x - \sigma^n x_0}{-\sigma^n x_0}\right| = L\frac{\rho_n}{r_0} \leqq L2.$$

Lorsque ce logarithme est positif, il est donc borné supérieurement; c'est seulement lorsqu'il est négatif qu'il peut être très grand en valeur absolue mais alors

$$\left|L\frac{\rho_n}{r_0}\right| = L\frac{r_0}{\rho_n} < \frac{r_0}{\rho_n} \cancel{-1}.$$

On a donc dans tous les cas

$$\left|L\frac{\rho_n}{r_0}\right| < \frac{r_0}{\rho_n} \cancel{-1} + L2$$

et par suite

$$\left|\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^n x_0}\right)\right| < \frac{r_0}{\rho_n} \cancel{-1} + L2 + \frac{\pi}{2} = \frac{r_0}{\rho_n} + C.$$

Comme d'autre part nous avons trouvé

$$|\varphi_n(x)| \leqq B\frac{(A\rho_n)^n}{n!}$$

il en résulte que

$$\left|\varphi_n(x)\log\left(1 - \frac{1}{\sigma^n x_0}\right)\right| < B\frac{A r_0 (A\rho_n)^{n-1}}{n!} + BC\frac{(A\rho_n)^n}{n!}.$$

Nous n'appliquerons pas cette formule à la valeur 0 de l'indice n; alors on augmente encore le membre de droite en remplaçant ρ_n par sa borne supérieure $2r_0$, ce qui donne

$$\left|\varphi_n(x)\log\left(1-\frac{x}{\sigma^n x_0}\right)\right| < B\left(\frac{1}{2}+C\right)\frac{(2Ar_0)^n}{n!}.$$

Si on met à part le terme correspondant à l'indice o, la série (23) est donc normalement convergente jusque sur le cercle C_0, et elle y représente une fonction finie et continue. Quant au terme laissé de côté

$$b\log\left(1-\frac{x}{x_0}\right),$$

il devient infini comme $L\frac{1}{\rho_0}$ quand x tend vers x_0. La fonction $f(x)$ a donc bien x_0 pour point singulier. Il résulte immédiatement de l'équation que σx_0, $\sigma^2 x_0$, ..., seront aussi points singuliers. La circonférence C_0 est donc bien une coupure naturelle comme on l'avait prévu, quoique $f(x)$ y soit finie et continue sauf en x_0.

Si maintenant, nous avons une équation dans laquelle $b(x)$ admet un certain nombre fini de pôles simples parmi les points x_0, σx_0, ..., certaines des formules (28) en nombre fini seront modifiées par l'addition de constantes d'intégration égales aux résidus. Toutes les fonctions correspondantes seront holomorphes et bornées dans D. Il suffira de commencer le tableau analogue à (38) au rang à partir duquel toutes les constantes d'intégration sont nulles; les inégalités seront par exemple du type

$$|\varphi_n(x)| \leqq B\frac{(A|x-\sigma^n x_0|)^{n-q}}{(n-q)!}$$

q étant un entier fixe, ce qui ne change rien aux raisonnements. Pour l'étude de $f(x)$ jusque sur le cercle C_0, on mettra à part les termes correspondant à tous les pôles; la fonction devient infinie comme le logarithme quand x tend vers un de ces points; elle est continue partout ailleurs.

19. *Pôle multiple.* Comme au n° 14, l'équation (33) sera réduite par le changement de fonction inconnue (34) à une équation en $F(x)$ où $b(x)$ a plusieurs pôles simples. Comme dans le premier cas, la fonction $\varphi(x)$ de la série (23) aura des pôles. Quand x tend vers un point $\sigma^p x_0$, $f(x)$ se comporte comme dans le premier cas, mais on ne doit envisager que des chemins ordinaires.

De plus, sauf aux points x_0, σx_0, ..., $\sigma^{n-1} x_0$, la fonction est continue jusque sur le cercle C_0.

IV.

Indications sur d'autres singularités de $b(x)$.

20. Lorsque la fonction $b(x)$ de l'équation (1) présente un point critique logarithmique, la méthode précédente s'applique aussi, et les résultats sont presque les mêmes.

Soit en effet l'équation

$$f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x)\log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$$

$c(x)$ étant une fonction holomorphe dans le même domaine que $a(x)$. Cherchons à déterminer une solution formelle du type (23); la formule (24) n'est pas changée tandis que (25) est remplacée par

$$a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x)\log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x)\log\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$$
$$+ a(x)\varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\sigma x_0}\right) + \cdots + a(x)\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\sigma^n x_0}\right) + \cdots.$$

Il en résulte que la première équation (26) et l'équation (27) sont remplacées respectivement par

$$\varphi_0'(x) = c(x), \qquad \varphi'(x) + \frac{\varphi_1(x)}{x - x_0} + \frac{\varphi_1(x)}{x - \sigma x_0} + \cdots = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

D'où les solutions

$$\varphi_0(x) = \int_{x_0}^{x} c(x)dx, \quad \varphi_1(x) = \int_{\sigma x_0}^{x} a(x)\varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx, \quad \varphi_2(x) = \int_{\sigma^2 x_0}^{x} a(x)\varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)dx, \ldots,$$

au lieu de celles données par les formules (28).

En tenant compte de ces changements, l'étude faite dans la section précédente pour le pôle simple est applicable au cas du point critique logarithmique. On remarquera que $\varphi_0(x)$ est ici une fonction holomorphe qui s'annule en x_0, et que par suite $f(x)$ tend vers o lorsque x tend vers x_0 sur un chemin ordinaire.

Lorsque la fonction $b(x)$ de l'équation (1) présente des point critiques algébriques, leur influence sur les solutions est beaucoup plus complexe. Il n'y a rien d'analogue à la décomposition en éléments simples signalée au n° 9, qui ramenait l'étude des pôles à celle d'un pôle unique. Si, par exemple, $b(x)$ était une fonction algébrique, il faudrait tenir compte de toutes ses singularités à la fois pour étudier leur répercussion sur la solution $f(x)$. Quand $a(x)$ est une fonction entière et que $b(x)$ n'a pour point singulier à distance finie qu'un seul point critique algébrique x_0 (non situé à l'origine), l'équation peut être étudiée par une méthode analogue à celle de la section précédente, mais le résultat obtenu a beaucoup moins de portée.

Soit m l'ordre de multiplicité du point critique; $b(x)$ considérée comme fonction de $(x - x_0)^{\frac{1}{m}}$ est uniforme et ne peut avoir pour point singulier à distance finie que le pôle x_0, elle peut être représentée sous la forme $b(x) = (x - x_0)^{-\frac{n}{m}} \times$ fonction entière de $(x - x_0)^{\frac{1}{m}}$.

En groupant dans la fonction entière les termes dont les degrés sont congrus entre eux (mod m), $b(x)$ sera la somme de m fonctions entières de $x - x_0$ multipliées respectivement par $(x - x_0)^{\frac{-n}{m}}$, $(x - x_0)^{\frac{1-n}{m}}$, $(x - x_0)^{\frac{2-n}{m}}$, etc. Il suffit donc d'étudier le cas où

$$b(x) = (x - x_0)^{\nu} c(x)$$

ν étant un nombre fractionnaire et $c(x)$ une fonction entière. La nature du nombre ν n'intervenant presque jamais dans le raisonnement, nous supposerons que c'est un nombre quelconque (réel ou complexe), autre qu'un entier réel (dans ce dernier cas, la fonction $b(x)$ serait uniforme).

Premier cas: $\Sigma > 1$.

21. Soit l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x - x_0)^{\mu - 1} c(x). \tag{39}$$

Soit D un cercle de centre O et de rayon fini, modifions le comme au n° 10; dans le domaine obtenu D', $(x - x_0)^{\mu-1}$ est uniforme pourvu qu'une détermination ait été choisie en un point, à l'origine par exemple. Toute solution de l'équation (39) est, d'après la section I, holomorphe dans D', et en particulier au voisinage de $\frac{x_0}{\sigma}$. L'équation (39) mise sous forme d'équation intégrale, s'écrit (pour la solution nulle à l'origine):

$$f(x) = \int_0^x a(z) f\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz + \int_0^x (z - x_0)^{\mu-1} c(z)\, dz,$$

la première intégrale reste holomorphe quand x tend vers x_0, $f(x)$ aura donc la même singularité que la seconde intégrale. En développant $c(z)$ suivant les puissances de $z - x_0$, on voit immédiatement qu'elle sera le produit de $(x - x_0)^{\mu}$ par une fonction entière. En raisonnant de la même manière, on verrait aisément qu'en chacun des points $\sigma^n x_0$, la partie irrégulière de $f(x)$ est de la forme $(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n} \varphi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ étant une fonction entière.

Comme au n° 11, nous allons chercher à satisfaire formellement à l'équation (39) par un développement du type

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)^{\mu} \varphi_0(x) + (x - \sigma x_0)^{\mu+1} \varphi_1(x) + \cdots + (x - \sigma^n x_0)^{\mu+n} \varphi_n(x) + \cdots \tag{40}$$

$\varphi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... désignant des fonctions uniformes dans tout le plan. Dans le plan coupé suivant les lignes $l\sigma^n$, $l\sigma^{n+1}$, ..., les différentes branches de la fonction $(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n}$ sont des fonctions holomorphes distinctes; le choix d'une de ces fonctions équivaut au choix d'un argument de $x - \sigma^n x_0$. Prenons pour σ d'une part et pour $- x_0$ d'autre part, l'un quelconque de leurs arguments choisi une fois pour toutes, il en résulte pour le produit $-\sigma^n x_0$ un argument déterminé; l'argument de $x - \sigma^n x_0$, x mobile dans le plan coupé, qui coïncide avec le précédent pour $x = 0$ sera appelé argument principal, et la détermination correspondante d'une puissance de $x - \sigma^n x_0$, détermination principale. On a entre les arguments principaux des fonctions la relation

$$\arg(x - \sigma^{p+q} x_0) - \arg\left(\frac{x}{\sigma^p} - \sigma^q x_0\right) = p \cdot \arg \sigma,$$

car lorsque x ne traverse pas les coupures $l\sigma^{p+q}$; $l\sigma^{p+q+1}$, ..., $\frac{x}{\sigma^p}$ ne traverse pas $l\sigma^q$, $l\sigma^{q+1}$, ..., les deux arguments principaux sont donc continus; leur différence qui est un argument du nombre fixe σ^p reste constante, il suffit de donner à x la valeur o pour voir que c'est l'argument choisi pour σ qui intervient au second membre. On aura aussi entre les déterminations principales des puissances la relation

$$(x - \sigma^{p+q} x_0)^\nu = \left(\frac{x}{\sigma^p} - \sigma^q x_0\right)^\nu \cdot \sigma^{p\nu},$$

$\sigma^{p\nu}$ désignant un nombre parfaitement déterminé, calculé avec l'argument choisi pour σ.

Nous nous proposons de déterminer le développement (40) de telle sorte que, dans le plan coupé suivant l, $l\sigma$, $l\sigma^2$, ..., il satisfasse à l'équation (39) en prenant dans un membre comme dans l'autre les déterminations principales. Exprimons les quantités qui figurent dans l'équation (39) en groupant les termes qui ont le même point critique:

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x - \sigma x_0)^\mu \frac{1}{\sigma^\mu} \varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$
$$+ (x - \sigma^2 x_0)^{\mu+1} \frac{1}{\sigma^{\mu+1}} \varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \cdots + (x - \sigma^{n+1} x_0)^{\mu+n} \frac{1}{\sigma^{\mu+n}} \varphi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \cdots.$$

Les deux membres de l'équation sont alors:

$$(41)\quad \begin{cases} f'(x) = \varphi'(x) + (x - x_0)^{\mu-1}[(x - x_0)\varphi_0'(x) + \mu\varphi_0(x)] \\ \qquad + (x - \sigma x_0)^\mu[(x - \sigma x_0)\varphi_1'(x) + (\mu + 1)\varphi_1(x)] \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (x - \sigma^n x_0)^{\mu+n-1}[(x - \sigma^n x_0)\varphi_n'(x) + (\mu + n)\varphi_n(x)] \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(42)\quad \begin{cases} a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x - x_0)^{\mu-1}c(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x - x_0)^{\mu-1}c(x) \\ \qquad + (x - \sigma x_0)^\mu \frac{a(x)}{\sigma^\mu}\varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + (x - \sigma^n x_0)^{\mu+n-1}\frac{a(x)}{\sigma^{\mu+n-1}}\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

D'après la remarque qui nous a déjà servi au n° 11, les coefficients de chaque fonction multiforme doivent être les mêmes, et les termes uniformes également; d'où les équations

$$(43)\qquad \begin{cases} (x - x_0)\varphi_0'(x) + \mu\varphi_0(x) = c(x) \\ (x - \sigma x_0)\varphi_1'(x) + (\mu + 1)\varphi_1(x) = \dfrac{a(x)}{\sigma^\mu}\varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x - \sigma^n x_0)\varphi_n'(x) + (\mu + n)\varphi_n(x) = \dfrac{a(x)}{\sigma^{\mu+n-1}}\varphi_{n-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(44)\qquad \varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

Chacune des équations (43) peut être regardée comme rentrant soit dans le type étudié par BRIOT et BOUQUET, soit dans le type étudié par FUCHS; elle admet une seule intégrale uniforme autour du point où s'annule le coefficient de la dérivée; on voit de proche en proche que cette intégrale est une fonction entière parce que le second membre est une fonction entière. Quant à l'équation (44), c'est l'équation homogène correspondant à l'équation donnée (39), ses solutions sont des fonctions entières.

22. La série (40) ne sera pas convergente en général; il suffit en effet de prendre le cas ou $a(x)$ et $c(x)$ sont constantes et égales à 1, pour voir que

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\mu}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\mu(\mu+1)\sigma^\mu}, \ \dots, \ \varphi_n(x) = \frac{1}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)\sigma^{\mu+\mu+1+\dots+\mu+n-1}}, \ \dots$$

le terme général de la série (40) est donc dans ce cas

$$\frac{(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n}}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)\sigma^{\mu+\mu+1+\dots+\mu+n-1}};$$

il se réduit pour $x = 0$ à $\dfrac{\sigma^{\frac{n(n+1)}{2}}(-x_0)^{\mu+n}}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)}$ qui grandit indéfiniment avec n. La divergence de cette série est d'ailleurs tout à fait comparable à celle de la série analogue rencontrée au début du n° 12.

Nous allons baser le raisonnement sur la considération des fonctions multiformes $(x - \sigma^n x_0)^{\mu-1} - P_n(x)$, les $P_n(x)$ étant des polynômes. Nous remplacerons donc le développement (40) par le suivant

$$(45)\qquad f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)(x - \sigma^n x_0)^{n+1}[(x - \sigma^n x_0)^{\mu-1} - P_n(x)].$$

Le terme général de cette série peut encore s'écrire

$$\varphi_n(x)[(x-\sigma^n x_0)^{n+\mu}-(x-\sigma^n x_0)^{n+1}P_n(x)]$$

dont la dérivée est

$$\begin{aligned}
&\varphi'_n(x)[(x-\sigma^n x_0)^{n+\mu}-(x-\sigma^n x_0)^{n+1}P_n(x)]\\
+\,&\varphi_n(x)[(n+\mu)(x-\sigma^n x_0)^{n+\mu-1}-(n+1)(x-\sigma^n x_0)^n P_n(x)-(x-\sigma^n x_0)^{n+1}P'_n(x)]\\
=\,&[(x-\sigma^n x_0)\varphi'_n(x)+(n+\mu)\varphi_n(x)](x-\sigma^n x_0)^n[(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}-P_n(x)]\\
&+\varphi_n(x)(x-\sigma^n x_0)^n[(\mu-1)P_n(x)-(x-\sigma^n x_0)P'_n(x)],
\end{aligned}$$

en mettant en évidence la même fonction multiforme que dans $f(x)$, et d'autre part une partie uniforme. D'une manière analogue, le terme d'indice $n-1$ de $f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma^n}(x-\sigma^n x_0)^n\left[\frac{1}{\sigma^{\mu-1}}(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}-P_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]\\
&\quad=\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma^{\mu+n-1}}(x-\sigma^n x_0)^n[(x-\sigma^n)^{\mu-1}-P_n(x)]\\
&\quad+\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma^{\mu+n-1}}(x-\sigma^n x_0)^n\left[P_n(x)-\sigma^{\mu-1}P_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right].
\end{aligned}$$

Les expressions (41) et (42) seront donc remplacées par les suivantes

$$\left\{\begin{array}{l}
f'(x)=\varphi'(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)(x-\sigma^n x_0)^n[(\mu-1)P_n(x)-(x-\sigma^n x_0)P'_n(x)]\\
\quad+[(x-x_0)\varphi'_0(x)+\mu\varphi_0(x)][(x-x_0)^{\mu-1}-P_0(x)]\\
\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\quad+[(x-\sigma^n x_0)\varphi'_n(x)+(n+\mu)\varphi_n(x)](x-\sigma^n x_0)^n[(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}-P_n(x)]\\
\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right. \tag{46}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right)+(x-x_0)^{\mu-1}c(x)=a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)+c(x)P_0(x)\\
\qquad+a(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{\mu+n-1}}(x-\sigma^n x_0)^n\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\left[P_n(x)-\sigma^{\mu-1}P_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]\\
\qquad\qquad+c(x)[(x-x_0)^{\mu-1}-P_0(x)]\\
\qquad\qquad+\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad+\frac{a(x)}{\sigma^{\mu+n-1}}\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)(x-\sigma^n x_0)^n[(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}-P_n(x)]\\
\qquad\qquad+\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right. \tag{47}$$

On voit immédiatement que les $\varphi_n(x)$ devront vérifier les mêmes équations (43); ces fonctions sont donc indépendantes des polynômes $P_n(x)$ et on peut choisir ces derniers de façon à rendre convergentes la série (45) et les séries qui figurent dans (46) et (47).

Soit R un nombre positif choisi arbitrairement et r_0 le module de x_0.

Posons

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \max |\varphi_n(x)| \\ M'_n &= \max |(x - \sigma^n x_0)\varphi'_n(x) + (n + \mu)\varphi_n(x)| \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \qquad |x| \leqq R\Sigma^n$$

Il existe des nombres positifs $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ faisant converger les séries ayant pour termes généraux

$$M_n(R + r_0)^n |\sigma^{n(\mu+n)}| \varepsilon_n, \qquad M_n(R + r_0)^n |\sigma^{n(\mu+n)}| \varepsilon_{n+1}, \qquad \text{et} \qquad M'_n(R + r_0)^n |\sigma^{n(\mu+n)}| \varepsilon_n.$$

Considérons, comme au n° 12, le domaine étoilé E obtenu en excluant du cercle $|x| \leqq R$ une bande entourant les lignes l, $l\sigma$, $l\sigma^2$, ...

Soit $p_\varepsilon(x)$ un polynome tel que

$$|(\mu - 1)(x - x_0)^{\mu-2} - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour } x \text{ dans } E$$

d'où, en intégrant,

$$\left|(x - x_0)^{\mu-1} - (- x_0)^{\mu-1} - \int_0^x p_\varepsilon(z)\,dz\right| < \lambda\varepsilon.$$

Posons

$$q_\varepsilon(x) = (- x_0)^{\mu-1} + \int_0^x p_\varepsilon(z)\,dz.$$

Nous avons

$$\left.\begin{aligned} |(\mu - 1)(x - x_0)^{\mu-2} - q'_\varepsilon(x)| &< \varepsilon \\ |(x - x_0)^{\mu-1} - q_\varepsilon(x)| &< \lambda\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour } x \text{ dans } E.$$

En prenant comme terme de comparaison $(\mu - 1)(x - x_0)^{\mu-1}$ on voit aisément que

$$|(\mu - 1)q_\varepsilon(x) - (x - x_0)q'_\varepsilon(x)| < \varepsilon(R + r_0 + \lambda|\mu - 1|) \qquad \text{pour } x \text{ dans } E.$$

En remplaçant x par $\dfrac{x}{\sigma^n}$ et en multipliant par une puissance convenable de σ on a

$$\left.\begin{aligned} &\left|(\mu-1)(x-\sigma^n x_0)^{\mu-2} - \sigma^{n(\mu-2)}q'_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma^n}\right)\right| < \varepsilon|\sigma^{n(\mu-2)}| \\ &\left|(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1} - \sigma^{n(\mu-1)}q_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma^n}\right)\right| < \lambda\varepsilon|\sigma^{n(\mu-1)}| \\ &\left|(\mu-1)\sigma^{n(\mu-1)}q_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma^n}\right) - (x-\sigma^n x_0)\sigma^{n(\mu-2)}q'_\varepsilon\left(\frac{x}{\sigma^n}\right)\right| < \varepsilon(R+r_0+\lambda|\mu-1|)|\sigma^{n(\mu-1)}| \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{pour } x \\ \\ \text{dans } E\sigma^n.\end{array}$$

En prenant les polynômes

$$P_n(x) = \sigma^{n(\mu-1)} q_{\varepsilon_n}\left(\frac{x}{\sigma^n}\right)$$

on aura donc

$$\left.\begin{array}{r}|(\mu-1)(x-\sigma^n x_0)^{\mu-2}-P_n'(x)|<|\sigma^{n(\mu-2)}|\varepsilon_n \\ |(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}-P_n(x)|<\lambda|\sigma^{n(\mu-1)}|\varepsilon_n \\ |(\mu-1)P_n(x)-(x-\sigma^n x_0)P_n'(x)|<(R+r_0+\lambda|\mu-1|)|\sigma^{n(\mu-1)}|\varepsilon_n\end{array}\right\}\ \text{pour } x \text{ dans } E\sigma^n.$$

En prenant pour terme de comparaison $(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}$, et en remarquant que $\frac{x}{\sigma}$ est dans $E\sigma^{n-1}$ lorsque x est dans $E\sigma^n$, on verra que

$$\left|P_n(x)-\sigma^{\mu-1}P_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|<\lambda|\sigma^{n(\mu-1)}|(\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1}) \qquad \text{pour } x \text{ dans } E\sigma^n.$$

Toutes ces inégalités permettent de voir que, dans un domaine $E\sigma^N$, en considérant les termes à partir de celui dont $\sigma^N x_0$ est le point critique, la série (45) et celles qui figurent dans les seconds membres de (46) et (47) sont normalement convergentes. La solution de l'équation (39) est donc bien la somme de la série (45); il est clair que la fonction $\varphi(x)$ de cette dernière série n'est pas donnée par l'équation (44), mais par une équation non homogène qui serait obtenue en égalant les parties uniformes des seconds membres de (46) et (47); la fonction $b(x)$ de cette équation serait une fonction entière et $\varphi(x)$ est aussi une fonction entière.

23. Il suffit de donner maintenant leur sens général aux symboles $(x-\sigma^n x_0)^{\mu-1}$ qui désignaient jusqu'à présent la détermination principale, pour que la fonction $f(x)$ soit représentée par la série (45) dans tout son domaine d'existence. On pourrait répéter ici tout ce qui a été dit au n° 12. Il faut noter toutefois que si μ est un nombre réel fractionnaire, il n'y a qu'un nombre fini de branches autour de chaque point critique.

Etudions maintenant l'allure de $f(x)$ quand x tend vers $\sigma^p x_0$. Il suffit d'étudier dans la série (45) le terme T_p qui a $\sigma^p x_0$ pour point critique, car la somme des autres termes est normalement convergente, et tend vers une limite finie et fixe, sa valeur au point $\sigma^p x_0$.

Mettons ce terme sous la forme $T_p=\varphi_p(x)[(x-\sigma^p x_0)^{p+\mu}-(x-\sigma^p x_0)^{p+1}P_p(x)]$. $\varphi_p(x)$ étant une fonction entière, tend vers une limite déterminée $\varphi_p(\sigma^p x_0)$, les équations (43) montrent que cette limite n'est pas nulle si $c(x)$ ne s'annule pas en x_0 (ce qu'on peut toujours supposer) et si $a(x)$ ne s'annule en aucun des points $\sigma^n x_0$. Le second terme de la différence entre crochets tend vers o. Par suite, T_p se comporte en général comme $(x-\sigma^p x_0)^{p+\mu}$. Posons

$$x=\sigma^p x_0+\rho e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad \mu=\alpha+\beta i$$

d'où il résulte

$$\log(x-\sigma^p x_0)=L\rho+i\theta$$

$$(p+\mu)\log(x-\sigma^p x_0)=(p+\alpha)L\rho-\beta\theta+i[(p+\alpha)\theta+\beta L\rho]$$

et, comme

$$(x - \sigma^p x_0)^{p+\mu} = e^{(p+\mu)\log(x-\sigma^p x_0)},$$

$$|(x - \sigma^p x_0)^{p+\mu}| = \rho^{p+\alpha} e^{-\beta\theta}.$$

Envisageons d'abord le cas le plus simple, celui où μ est *réel*; le module ci-dessus est alors indépendant de θ, il tend vers o ou $+\infty$ suivant le signe de $p+\alpha$, c'est-à-dire de $p+\mu$ (cette quantité ne peut pas être nulle puisque μ n'est pas un entier réel). D'où les deux cas suivants:

1° $p < -\mu$ (ce cas ne peut se produire que si μ est negatif): $f(x)$ croît indéfiniment comme $\rho^{p+\mu}$.

2° $p > -\mu$: $f(x)$ tend vers une limite finie indépendante du chemin.

Lorsque μ est *imaginaire*, il y a lieu de distinguer le cas du chemin ordinaire et le cas du chemin en spirale. Lorsque $p+\alpha$ n'est pas nul, on a des conclusions analogues aux précédentes (α remplaçant μ) pour un chemin ordinaire; un chemin en spirale peut toujours être choisi de manière que T_p tende vers o, croisse indéfiniment avec une rapidité arbitraire, ou ne tende vers aucune limite [ce qui a lieu lorsque $(x-\sigma^p x_0)^{p+\mu}$ a un module constant et un argument qui augmente indéfiniment]. Lorsque $p+\alpha$ est nul, (ce cas ne peut se produire que si α est un entier négatif), c'est sur un chemin en spirale que l'allure est la plus simple, $(x-\sigma^p x_0)^{p+\mu}$ tend vers o ou ∞ suivant le sens dans lequel s'enroule la spirale. Sur un chemin arrivant en $\sigma^p x_0$ avec une tangente déterminée, $(x-\sigma^p x_0)^{p+\mu}$ tend vers une limite déterminée qui varie avec cette tangente. Il en est de même de $f(x)$.

Deuxième cas: $\sigma^k = 1$.

24. Les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution sont applicables à l'équation (39) dans le domaine D' indiqué au début du n° 16. Les seuls points singuliers possibles de la solution étant $x_0, \sigma x_0, \ldots, \sigma^{k-1}x_0$, on cherchera á la représenter par la formule suivante à un nombre limité de termes:

$$(48)\qquad \begin{cases} f(x) = \varphi(x) + (x-x_0)^{\mu}\varphi_0(x) + (x-\sigma x_0)^{\mu+1}\varphi_1(x) + \cdots \\ \cdots + (x-\sigma^{k-2}x_0)^{\mu+k-2}\varphi_{k-2}(x) + (x-\sigma^{k-1}x_0)^{\mu+k-1}\varphi_{k-1}(x) \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x-x_0)^{\mu+k-1}\frac{1}{\sigma^{\mu+k-1}}\varphi_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) + (x-\sigma x_0)^{\mu}\frac{1}{\sigma^{\mu}}\varphi_0\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$
$$+ (x-\sigma^2 x_0)^{\mu+1}\frac{1}{\sigma^{\mu+1}}\varphi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \cdots + (x-\sigma^{k-1}x_0)^{\mu+k-2}\frac{1}{\sigma^{\mu+k-2}}\varphi_{k-2}\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

La présence dans cette expression d'un terme ayant x_0 pour point critique va changer, dans la formule (42), la partie ayant le même point critique:

$$(x - x_0)^{\mu-1} c(x) \text{ sera remplacé par } (x - x_0)^{\mu-1}\left[c(x) + \frac{\alpha(x)(x - x_0)^k}{\sigma^{\mu+k-1}} \varphi_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]$$

En outre, les formules (41) et (42) sont limitées à un nombre fini de termes. Le système (43) va donc être remplacé par

$$(49) \quad \begin{cases} (x - x_0)\varphi'_0(x) + \mu\,\varphi_0(x) = \dfrac{\alpha(x)(x - x_0)^k}{\sigma^{\mu+k-1}} \varphi_{k-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) + c(x) \\ (x - \sigma x_0)\varphi'_1(x) + (\mu + 1)\varphi_1(x) = \dfrac{a(x)}{\sigma^{\mu}} \varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) \\ (x - \sigma^2 x_0)\varphi'_2(x) + (\mu + 2)\varphi_2(x) = \dfrac{a(x)}{\sigma^{\mu+1}} \varphi_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x - \sigma^{k-1} x_0)\varphi'_{k-1}(x) + (\mu + k - 1)\varphi_{k-1}(x) = \dfrac{a(x)}{\sigma^{\mu+k-2}} \varphi_{k-2}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) \end{cases}$$

Par le changement de fonctions inconnues

$$\varphi_0(x) = \psi_0(x),\ \varphi_1(\sigma x) = \psi_1(x),\ \varphi_2(\sigma^2 x) = \psi_2(x), \dots, \varphi_{k-1}(\sigma^{k-1} x) = \varphi_{k-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \psi_k(x)$$

le système (49) se ramène à un système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{array}{llr} (x - x_0)\psi'_0(x) + \mu\,\psi_0(x) & -\dfrac{a(x)(x - x_0)^k}{\sigma^{\mu+k-1}}\psi_{k-1}(x) & = c(x) \\ (x - x_0)\psi'_1(x) - \dfrac{a(\sigma x)}{\sigma \mu}\psi_0(x) + (\mu + 1)\psi_1(x) & & = 0 \\ (x - x_0)\psi'_2(x) & -\dfrac{a(\sigma^2 x)}{\sigma_{\mu+1}}\psi_1(x) + (\mu + 2)\psi_2(x) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ (x - x_0)\psi'_{k-2}(x) & -\dfrac{a(\sigma^{k-1} x)}{\sigma^{\mu+k-2}}\psi_{k-2}(x) + (\mu + k - 1)\psi_{k-1}(x) & = 0 \end{array}$$

qui peut être regardé comme rentrant dans le type étudié par Fuchs. Il admet une solution et une seule formée de fonctions holomorphes autour de x_0, ces fonction restent d'ailleurs holomorphes dans tout le domaine où $a(x)$ et $c(x)$ le sont elles-mêmes. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont également holomorphes dans ce domaine.

L'allure de la fonction quand x s'approche d'un point singulier $\sigma^p x_0$ est la même que dans le cas précèdent; toutefois comme l'entier p ne peut pas dépasser $k - 1$, si μ (ou sa partie réelle) est inférieur à $-(k - 1)$, $f(x)$ croit indéfinement quand x tend vers tout point critique (sur un chemin ordinaire quand μ est imaginaire).

Troisième cas: $\Sigma = 1$, σ n'étant pas racine de l'unité.

25. Supposons les fonctions $a(x)$ et $c(x)$ de l'équation (39) holomorphes dans un cercle D de centre O et de rayon R supérieur à r_0. La série (40) satisfait formellement à l'équation (39) si les fonctions $\varphi_n(x)$ vérifient le système (43) et la fonction $\varphi(x)$ l'équation (44); ces conditions, qui étaient nécessaires et suffisantes dans le premier cas, restent évidemment suffisantes dans le cas actuel. Les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\varphi(x)$ sont holomorphes dans D comme $a(x)$ et $c(x)$. Nous allons limiter supérieurement leurs modules, en supposant

$$|a(x)| \leqq A \qquad \text{et} \qquad |c(x)| \leqq C \qquad \text{pour } x \text{ dans } D.$$

L'intégrale générale de la première équation (43) est

$$\varphi_0(x) = (x - x_0)^{-\mu} \int^x (x - x_0)^{\mu-1} c(x)\, dx$$

en remplaçant $c(x)$ par son developpement de Taylor autour du point x_0

$$c(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

et en intégrant terme à terme, on a:

$$\varphi_0(x) = (x - x_0)^{-\mu}\left[K + \frac{c_0}{\mu}(x - x_0)^{\mu} + \frac{c_1}{\mu+1}(x - x_0)^{\mu+1} + \frac{c_2}{\mu+2}(x - x_0)^{\mu+2} + \cdots\right].$$

L'intégrale holomorphe (qui seule nous importe) correspond à la valeur 0 de la constante K. Lorsque l'exposant μ est tel que $(x - x_0)^{\mu}$ tende vers 0 quand x tend vers x_0 en ligne droite, cette intégrale peut s'écrire

$$\varphi_0(x) = (x - x_0)^{-\mu} \int_{x_0}^{x} (x - x_0)^{\mu-1} c(x)\, dx,$$

la quadrature étant effectuée le long d'une droite; les puissances de $x - x_0$ étant évaluées avec le même argument sous le signe $\int$ et en avant du signe $\int$.

Cette formule a sur la précèdente l'avantage d'être valable dans tout le domaine D. On a déjà vu (n.° 23) que

$$|(x - x_0)^{\mu-1}| = |x - x_0|^{\alpha-1} e^{-\beta \arg(x - x_0)} \qquad (\mu = \alpha + \beta i).$$

L'argument étant constant le long du chemin d'intégration employé, on voit que

$$\left|\int_{x_0}^{x} (x - x_0)^{\mu-1} c(x)\, dx\right| \leqq C e^{-\beta \arg(x - x_0)} \int_{x_0}^{x} |x - x_0|^{\alpha-1} |dx| = C e^{-\beta \arg(x - r_0)} \frac{|x - x_0|^{\alpha}}{\alpha}.$$

Comme d'ailleurs

$$|(x - x_0)^{-\mu}| = |x - x_0|^{-\alpha} e^{\beta \arg(x - x_0)}$$

on obtient

$$|\varphi_0(x)| \leqq C \frac{1}{\alpha},$$

ceci dans l'hypothèse

$$\alpha > 0.$$

Nous pouvons de proche en proche limiter supérieurement en module le second membre de chacune des équations (43) et par suite l'intégrale de cette équation, conformément au tableau

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{ll}
|\varphi_0(x)| \leqq C \dfrac{1}{\alpha} & \left|\dfrac{\alpha(x)}{\sigma^{\mu}} \varphi_0\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq C \dfrac{A e^{\beta \arg \sigma}}{\alpha} \\
|\varphi_1(x)| \leqq C \dfrac{A e^{\beta \arg \sigma}}{\alpha(\alpha+1)} & \left|\dfrac{\alpha(x)}{\sigma^{\mu+1}} \varphi_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq C \dfrac{(A e^{\beta \arg \sigma})^2}{\alpha(\alpha+1)} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
|\varphi_n(x)| \leqq C \dfrac{(A e^{\beta \arg \sigma})^n}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} & \left|\dfrac{a(x)}{\sigma^{\mu+n}} \varphi_n\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)\right| \leqq C \dfrac{(A e^{\beta \arg \sigma})^{n+1}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.$$

On a d'ailleurs

$$|(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n}| = |x - \sigma^n x_0|^{\alpha+n} e^{-\beta \arg(x - \sigma^n x_0)}$$

Comme nous considérons la détermination principale, x restant dans le cercle C_0 de rayon r_0, l'argument de $x - \sigma^n x_0$ différera de celui de $-\sigma^n x_0$ en plus ou en moins d'un angle au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, ce que nous écrirons

$$\arg(x - \sigma^n x_0) = \arg(-\sigma^n x_0) + \theta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où

$$-\beta \arg(x - \sigma^n x_0) = -\beta \arg(-\sigma^n x_0) - \beta\theta$$

et enfin

$$-\beta \arg(x - \sigma^n x_0) \leqq -n\beta \arg \sigma - \beta \arg(-x_0) + |\beta| \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, x étant à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle C_0

$$|x - \sigma^n x_0| < 2 r_0.$$

En tenant compte de ces inégalités on aura

$$|(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n}| \leqq (2 r_0)^{\alpha+n} (e^{-\beta \arg \sigma})^n e^{|\beta| \frac{\pi}{2} - \beta \arg(-x_0)}$$

et

$$|(x - \sigma^n x_0)^{\mu+n} \varphi_n(x)| \leqq C e^{|\beta| \frac{\pi}{2} - \beta \arg(-x_0)} (2 r_0)^{\alpha} \frac{(2 A r_0)^n}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$$

La série (40) est donc normalement convergente dans le domaine C_0, et sa somme $f(x)$ est une fonction continue jusque sur le cercle. Les inégalités du tableau (50) (2^e colonne) permettraient de démontrer la convergence normale de la série figurant au second membre de (42); le second membre de (41) est la même série d'après le choix des fonctions $\varphi_n(x)$, elle est donc convergente dans les mêmes conditions. La fonction $f(x)$ vérifie donc bien l'équation (39). Comme elle est holomorphe à l'origine, elle coïncide avec l'une des solutions déterminées dans la section I.

Si maintenant l'on avait

$$\alpha \leqq 0$$

on commencerait le tableau d'inégalités (50) à une fonction $\varphi_q(x)$ d'indice assez élevé pour avoir

$$\alpha + q > 0.$$

Les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_{q-1}(x)$ sont holomorphes et bornées dans D; le second membre de l'équation déterminant $\varphi_q(x)$ est donc inférieur en module à un nombre C', d'où:

$$\varphi_n(x) \leqq C' \frac{(A e^{\beta \arg \sigma})^{n-q}}{(\alpha + q)(\alpha + q + 1) \ldots (\alpha + n)}$$

$$\left| \frac{a(x)}{\sigma^{\mu+n}} \varphi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| \leqq C' \frac{(A e^{\beta \arg \sigma})^{n-q+1}}{(\alpha + q)(\alpha + q + 1) \ldots (\alpha + n)}.$$

La série, commencée au terme ayant $\sigma^q x_0$ pour point critique, est normalement convergente. La fonction $f(x)$ est donc continue jusque sur le cercle C_0 sauf peut-être aux points x_0, σx_0, $\ldots$, $\sigma^{q-1} x_0$; pour connaître son allure quand x tend vers un de ces points, il suffit de considérer le terme correspondant de la série; la conclusion est la même que dans le premier cas (n° 23).

Chapitre II.

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INFINITÉ D'INCONNUES.

Généralités.

1. La résolution de l'équation différentielle fonctionnelle lorsque l'origine est point singulier de $b(x)$ conduit à résoudre des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues du type suivant :

$$
(1)\quad \begin{cases}
b_1 + a_1 x_1 + g_1 x_2 + c_2 g_1 x_3 + c_3 g_1 x_4 + \cdots + c_{p-1} g_1 x_p + \cdots = 0 \\
b_2 \qquad + a_2 x_2 + \quad g_2 x_3 + c_2 g_2 x_4 + \cdots + c_{p-2} g_2 x_p + \cdots = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_n \qquad\qquad + a_n x_n + g_n x_{n+1} + \cdots + c_{p-n} g_n x_p + \cdots = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

où les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont en progression arithmétique, $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ en progression géométrique de raison σ, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ sont les coefficients d'une fonction entière et $c_2, c_3, \ldots, c_p, \ldots$ ceux d'une fonction holomorphe. Nous allons étudier ce système en évitant de faire intervenir ces hypothèses particulières, mais en nous bornant aux cas dont nous aurons besoin par la suite.

Le système (1) est très simple lorsque les coefficients c_p sont tous nuls. La solution générale s'obtient en laissant x_1 arbitraire et en tirant x_2 de la première équation, puis x_3 de la deuxième, et ainsi de suite. L'idée directrice de ce chapitre étant de ramener le cas général à ce cas particulier, nous allons écrire le système (1) sous la forme :

$$
(2)\quad \begin{cases}
x_2 \;\; = e_1 + d_1 x_1 - (c_2 x_3 \;\; + c_3 x_4 \;\; + \cdots + c_p x_{1+p} + \cdots) \\
x_3 \;\; = e_2 + d_2 x_2 - (c_2 x_4 \;\; + c_3 x_5 \;\; + \cdots + c_p x_{2+p} + \cdots) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+1} = e_n + d_n x_n - (c_2 x_{n+2} + c_3 x_{n+3} + \cdots + c_p x_{n+p} + \cdots) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

en posant

$$
d_n = -\frac{a_n}{g_n} \qquad e_n = -\frac{b_n}{g_n}.
$$

La solution du système

$$
(3)\quad \begin{cases}
x_2 \;\; = e_1 + d_1 x_1 \\
x_3 \;\; = e_2 + d_2 x_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+1} = e_n + d_n x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

que j'appellerai *système simple*, est

$$
(4)\quad \begin{cases}
x_2 \;\; = d_1 x_1 + e_1 \\
x_3 \;\; = d_1 d_2 x_1 + e_1 d_2 + e_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n+1} = d_1 d_2 \ldots d_n x_1 + e_1 d_2 d_3 \ldots d_n + e_2 d_3 \ldots d_n + \cdots + e_{n-1} d_n + e_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

2. Cherchons à résoudre le système (2) par la méthode d'approximations successives suivante. Remplaçons d'abord par o les inconnues situées dans les parenthèses des seconds membres, et prenons pour première approximation une solution du système ainsi simplifié. Nous calculerons ensuite chaque approximation en remplaçant les inconnues situées dans les parenthèses par leurs valeurs respectives dans l'approximation précédente. On voit qu'on est ainsi conduit à résoudre une succession de systèmes simples. Comme d'habitude, nous allons mettre en évidence la différence des valeurs de chaque inconnue dans deux approximations consécutives; les systèmes envisagés sont formés des équations

$$u^{(1)}_{n+1} = e_n + d_n u^{(1)}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

qui ne diffèrent de (3) que par le nom des inconnues; et, à partir de $\nu = 2$,

$$u^{(\nu)}_{n+1} = d_n u^{(\nu)}_n - (c_2 u^{(\nu-1)}_{n+2} + c_3 u^{(\nu-1)}_{n+3} + \cdots + c_p u^{(\nu-1)}_{n+p} + \cdots) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

qu'on peut écrire

$$u^{(\nu)}_{n+1} = e^{(\nu)}_n + d_n u^{(\nu)}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

en posant

$$e^{(\nu)}_n = -(c_2 u^{(\nu-1)}_{n+2} + c_3 u^{(\nu-1)}_{n+3} + \cdots + c_p u^{(\nu-1)}_{n+p} + \cdots). \tag{8}$$

Il faut démontrer:

1° que cette série (8) converge pour toutes les valeurs de n et de ν, afin que les approximations successives existent;

2° que ces approximations sont convergentes;

3° que les valeurs obtenues pour les inconnues x_n vérifient le système (2).

Les coefficients d_n sont les mêmes dans tous les systèmes (6); la nature de la série formée par ces quantités joue un rôle important; pour simplifier l'exposition, je ferai dès maintenant une distinction à ce sujet.

Premier cas: La série d_n est absolument convergente.

3. La solution de chaque système est donnée par des formules analogues à (4). $u^{(1)}_{n+1}$ est donc linéaire par rapport à $u^{(1)}_1$; par suite, d'après la formule (8), $e^{(2)}_n$ est linéaire par rapport à $u^{(1)}_1$. $u^{(2)}_{n+1}$ est linéaire par rapport à $u^{(2)}_1$ et aux $e^{(2)}_n$, et par conséquent linéaire par rapport à $u^{(1)}_1$ et $u^{(2)}_1$; et ainsi de suite. De plus, le coefficient de $u^{(2)}_1$ dans $u^{(2)}_{n+1}$ est le même que celui de $u^{(1)}_1$ dans $u^{(1)}_{n+1}$; par suite $u^{(2)}_1$ a dans $e^{(3)}_n$ le coefficient que $u^{(1)}_1$ a déjà dans $e^{(2)}_n$; et enfin $u^{(2)}_1$ entre dans $u^{(3)}_{n+1}$ comme $u^{(1)}_1$ dans $u^{(2)}_{n+1}$. Le fait est général, comme on le verrait de proche en proche, et on peut poser

$$\left\{\begin{array}{l}
u^{(1)}_{n+1} = v^{(1)}_{n+1} + w^{(0)}_{n+1} u^{(1)} \\
u^{(2)}_{n+1} = v^{(2)}_{n+1} + w^{(1)}_{n+1} u^{(1)}_1 + w^{(0)}_{n+1} u^{(2)}_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u^{(\nu)}_{n+1} = v^{(\nu)}_{n+1} + w^{(\nu-1)}_{n+1} u^{(1)}_1 + w^{(\nu-2)}_{n+1} u^{(2)}_1 + \cdots + w^{(1)}_{n+1} u^{(\nu-1)}_1 + w^{(0)}_{n+1} u^{(\nu)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{9}$$

La série $e_n^{(\nu)}$ convergera si, quand on l'ordonne par rapport à $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(\nu-1)}$, les coefficients de ces quantités et le terme indépendant sont des séries convergentes; dans ces conditions les v et w du tableau (9) sont définis.

Occupons nous d'abord des coefficients des $u_1^{(i)}$ (qui ne dépendent que des c et des d). Tout d'abord

$$w_{n+1}^{(0)} = d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Le coefficient de $u_1^{(1)}$ dans $e_n^{(2)}$ est

$$f_n^{(1)} = -(c_2 w_{n+2}^{(0)} + c_3 w_{n+3}^{(0)} + \cdots).$$

Pour avoir le terme en $u_1^{(1)}$ dans $u_{n+1}^{(2)}$, il suffit de réduire dans la formule analogue à (4) donnant $u_{n+1}^{(2)}$, chaque $e_n^{(2)}$ à son terme en $u_1^{(1)}$. Donc

$$w_{n+1}^{(1)} = f_1^{(1)} d_2 d_3 \ldots d_n + f_2^{(1)} d_3 \ldots d_n + \cdots + f_{n-1}^{(1)} d_n + f_n^{(1)}.$$

On passerait des $w_{n+1}^{(\nu-1)}$ aux $w_{n+1}^{(\nu)}$ par deux opérations entièrement analogues.

En posant

$$C_n = |c_n| \qquad D_n = |d_n|$$

on a

$$|w_{n+1}^{(0)}| = D_1 D_2 \ldots D_n \tag{10}$$

et

$$|f_n^{(1)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_{n+1}(C_2 + C_3 D_{n+2} + C_4 D_{n+2} D_{n+3} + \cdots)$$

D_{n+p} tendant vers o pour p infini, la série entre parenthèses est convergente lorsque $C_2, C_3, \ldots$ sont les coefficients d'une série entière non toujours divergente. Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$C_2 + C_3 z_n + C_4 z_n z_{n+1} + C_5 z_n z_{n+1} z_{n+2} + \cdots = C(z_n).$$

On a alors

$$|f_n^{(1)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_{n+1} C(D_{n+2})$$

et par suite, chacun des termes de la somme $w_{n+1}^{(1)}$ vérifie

$$|f_i^{(1)} d_{i+1} \ldots d_n| \leqq D_1 D_2 \ldots D_{i+1} C(D_{i+2}) D_{i+1} \ldots D_n = D_1 D_2 \ldots D_n D_{i+1} C(D_{i+2}).$$

Donc

$$|w_{n+1}^{(1)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_n [D_2 C(D_3) + D_3 C(D_4) + \cdots + D_{n+1} C(D_{n+2})].$$

La série ayant $D_n C(D_{n+1})$ pour terme général est convergente comme la série D_n car, à partir d'un certain rang, $C(D_{n+1})$ reste inférieur à un nombre fixe; en effet $D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots$ étant tous inférieurs à ε,

$$C(D_{n+1}) < C_2 + C_3 \varepsilon + C_4 \varepsilon^2 + \cdots.$$

En posant

$$\Delta_1 = D_2 C(D_3) + D_3 C(D_4) + \cdots + D_n C(D_{n+1}) + \cdots, \tag{11}$$

on a, a fortiori,

$$|w_{n+1}^{(1)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_n . \Delta_1 .$$

En utilisant comme l'égalité (10) cette inégalité et celles qu'on en déduirait, on voit que, en ce qui concerne les termes en $u_1^{(i)}$, le calcul des approximations peut se poursuivre indéfiniment, et que l'on a

$$(12) \qquad |w_{n+1}^{(\nu)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_n . \Delta_1^{\nu} .$$

Considérons maintenant les termes indépendants des $u_1^{(i)}$. Dans $e_n^{(2)}$, ce terme est

$$\varphi_n^{(2)} = -(c_2 v_{n+2}^{(1)} + c_3 v_{n+3}^{(1)} + \cdots);$$

et on voit, en réduisant les $e_n^{(2)}$ à leur terme indépendant, que

$$v_{n+1}^{(2)} = \varphi_1^{(2)} d_2 d_3 \ldots d_n + \varphi_2^{(2)} d_3 \ldots d_n + \cdots + \varphi_{n-1}^{(2)} d_n + \varphi_n^{(2)} .$$

Ainsi ce sont les deux mêmes opérations qui permettent le passage des $v_n^{(\nu-1)}$ aux $v_n^{(\nu)}$ ou des $w_n^{(\nu-1)}$ aux $w_n^{(\nu)}$. Pour pouvoir appliquer au module de $\varphi_n^{(2)}$ le même calcul qu'à $f_n^{(1)}$, nous allons *supposer que les* $v_n^{(1)}$ *vérifient les inégalités*

$$(13) \qquad |v_{n+1}^{(1)}| \leqq k_1 k_2 \ldots k_n$$

les k_n *étant des nombres positifs tendant vers* o, et auxquels nous pourrons imposer d'autres conditions. On aura alors

$$|\varphi_n^{(2)}| \leqq k_1 k_2 \ldots k_{n+1} C(k_{n+2})$$

et

$$|\varphi_i^{(1)} d_{i+1} \ldots d_n| \leqq k_1 k_2 \ldots k_{i+1} C(k_{i+2}) D_{i+1} \ldots D_n = t_i$$

$$|v_{n+1}^{(2)}| \leqq t_1 + t_2 + \cdots + t_n .$$

Pour pouvoir appliquer à $\varphi_n^{(3)}$ le même mode de calcul qu'à $\varphi_n^{(2)}$, il faut limiter supérieurement $|v_{n+1}^{(2)}|$ par un produit, comme $|v_{n+1}^{(1)}|$ dans l'inégalité (13). On remarque aisément que, pour une somme de termes positifs, on a :

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n < t_1\left(1 + \frac{t_2}{t_1}\right)\left(1 + \frac{t_3}{t_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{t_n}{t_{n-1}}\right).$$

Dans le cas actuel

$$\frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{k_{i+1} C(k_{i+2})}{D_i C(k_{i+1})}$$

$$t_1\left(1+\frac{t_2}{t_1}\right) \ldots \left(1+\frac{t_n}{t_{n-1}}\right) = k_1 k_2 C(k_3) D_2 \ldots D_n\left[1+\frac{k_3 C(k_4)}{D_2 C(k_3)}\right] \ldots \left[1+\frac{k_{n+1} C(k_{n+2})}{D_n C(k_{n+1})}\right]$$
$$= k_1 k_2 C(k_3)\left[D_2 + k_3 \frac{C(k_4)}{C(k_3)}\right] \ldots \left[D_n + k_{n+1} \frac{C(k_{n+2})}{C(k_{n+1})}\right].$$

Nous supposerons que l'on a les inégalités

$$(14) \qquad D_i + k_{i+1}\frac{C(k_{i+2})}{C(k_{i+1})} \leqq k_i \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

Dans ces conditions, nous aurons

$$|v^{(2)}_{n+1}| < k_1 k_2 \ldots k_n . k_2 C(k_3),$$

et, plus généralement

$$(15) \qquad |v^{(\nu)}_{n+1}| < k_1 k_2 \ldots k_n [k_2 C(k_3)]^{\nu-1}.$$

La valeur de x_{n+1} fournie par les approximations successives s'obtient en additionnant membre à membre les relations (9). L'ensemble des seconds membres peut être regardé comme formant une série double; cherchons si elle est absolument convergente en groupant d'abord les termes par colonnes. D'après les inégalités (15) et (12), chaque colonne est comparable à une série géométrique de raison $k_2 C(k_3)$ pour la première et Δ_1 pour les suivantes; chaque colonne sera absolument convergente si l'on a à la fois

$$(16) \qquad \Delta_1 < 1 \quad \text{et} \quad k_2 C(k_3) < 1.$$

A partir de la deuxième, les colonnes diffèrent par l'indice supérieur des $u^{(\nu)}_1$ et par un décalage de ligne des facteurs $w^{(\nu)}_{n+1}$. Donc, dans la série des modules comme dans la série elle-même, les sommes de ces colonnes différeront seulement par le facteur $|u^{(\nu)}_1|$ ou $u^{(\nu)}_1$. Il y aura donc convergence absolue si l'on choisit pour valeurs des arbitraires $u^{(\nu)}_1$ les termes d'une série absolument convergente. En posant

$$v_{n+1} = v^{(1)}_{n+1} + v^{(2)}_{n+1} + \cdots + v^{(\nu)}_{n+1} + \cdots$$

$$w_{n+1} = w^{(0)}_{n+1} + w^{(1)}_{n+1} + \cdots + w^{(\nu)}_{n+1} + \cdots$$

et en remarquant que

$$x_1 = u^{(1)}_1 + u^{(2)}_1 + \cdots + u^{(\nu)}_1 + \cdots$$

les valeurs obtenues seront

$$(17) \qquad x_{n+1} = v_{n+1} + w_{n+1} x_1.$$

On obtiendrait ces mêmes valeurs en donnant aux arbitraires les valeurs

$$u^{(1)}_1 = x_1, \qquad u^{(2)}_1 = u^{(3)}_1 = \cdots = u^{(\nu)}_1 = \cdots = 0.$$

Nous supposerons que l'on a opéré de cette manière pour montrer que le résultat obtenu vérifie bien le système (2). On obtiendra la n^{me} équation (2) en additionnant membre à membre l'équation (5) et les équations (6) pour toutes les valeurs de ν, à condition que les séries entre parenthèses dans les seconds membres puissent être additionnées en groupant d'abord les termes par colonnes. Il suffit donc de montrer que la série double formée par toutes ces séries est absolument convergente. D'après les valeurs données aux $u_1^{(1)}$, les formules (9) se réduisent à

$$u_{n+1}^{(\nu)} = v_{n+1}^{(\nu)} + w_{n+1}^{(\nu-1)} x_1 .$$

La série $e_n^{(\nu)}$ qui figure au second membre d'une équation (6) se réduit à

$$e_n^{(\nu)} = \varphi_n^{(\nu)} + f_n^{(\nu-1)} x_1 ,$$

et, d'après les inégalités établies plus haut, la série des modules a une somme moindre que

$$k_1 k_2 \ldots k_{n+1} C(k_{n+2})[k_2 C(k_3)]^{\nu-2} + D_1 D_2 \ldots D_{n+1} C(D_{n+2}) \Delta_1^{\nu-2} .$$

Lorsque ν varie, on a la somme des termes de même rang de deux progressions géométriques convergentes, et par suite, la série double converge absolument, C.Q.F.D.

4. Nous allons simplifier autant que possible les conditions imposées au cours du raisonnement. Nous trouverons une condition suffisante pour que l'inégalité (13) ait lieu eu traitant la somme

$$v_{n+1}^{(1)} = e_1 d_2 d_3 \ldots d_n + e_2 d_3 \ldots d_n + \cdots + e_{n-1} d_n + e_n$$

comme celle qui donne $v_{n+1}^{(2)}$. Posons

$$E_n \geq |e_n| \quad ^{16)}$$

$$|e_i d_{i+1} \ldots d_n| \leq E_i D_{i+1} \ldots D_n = t_i'$$

$$\frac{t_i'}{t_{i-1}'} = \frac{E_i}{E_{i-1} D_i}$$

$$t_1'\left(1 + \frac{t_2'}{t_1'}\right) \cdots \left(1 + \frac{t_n'}{t_{n-1}'}\right) = E_1 D_2 \ldots D_n \left(1 + \frac{E_2}{E_1 D_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{E_n}{E_{n-1} D_n}\right)$$
$$= E_1 \left(D_2 + \frac{E_2}{E_1}\right) \cdots \left(D_n + \frac{E_n}{E_{n-1}}\right).$$

Si l'on a

(18) $$E_1 = k_1$$

(19) $$D_i + \frac{E_i}{E_{i-1}} \leq k_i \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

les inégalités (13) seront vérifiées pour toutes les valeurs de n.

Si nous imposons aux k de décroître constamment à partir de k_3, le rapport

---

16) Il est nécessaire de ne pas s'astreindre à prendre pour E_n le module même de e_n, de façon à pouvoir supposer les E_n non nuls et même variant avec une certaine régularité.

$\frac{C(k_{i+2})}{C(k_{i+1})}$ sera plus petit que 1, et les inégalités

$$D_i + k_{i+1} \leqq k_i \qquad (i = 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

seront suffisantes pour que les inégalités (14) aient lieu. En additionnant membre à membre plusieurs inégalités (20) consécutives, nous obtenons

$$D_n + D_{n+1} + \cdots + D_{n+q} + k_{n+q+1} \leqq k_n.$$

Ceci devant avoir lieu quel que soit q, et les k étant positifs, il faut avoir

$$k_n \geqq D_n + D_{n+1} + \cdots + D_{n+q} + \cdots = \rho_n.$$

En posant

$$k_n = \rho_n + \delta_n, \tag{21}$$

les inégalités (19) et (20) se traduisent par

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} \leqq \rho_{i+1} + \delta_i \qquad \delta_{i+1} \leqq \delta_i. \tag{22}$$

Il suffit donc de *supposer l'existence de nombres* $\delta_2, \delta_3, \ldots$, *positifs, décroissants et tendant vers* 0, *tels que les inégalités* (22) *soient vérifiées.* Les nombres k sont alors définis par (18) et (21).

5. Supposons maintenant qu'il existe de nombres δ remplissant les conditions précédentes, mais que l'une au moins des inégalités (16) n'ait pas lieu. On peut mettre de côté un certain nombre d'équations en tête du système, ce qui fait disparaître le même nombre d'inconnues. Le système restant est de même nature. S'il commence par la q^{me} équation, les coefficients d et e, et par suite les ρ, δ et k, sont les mêmes, mais à partir de l'indice $q+1$, par analogie avec (18), il faut remplacer k_q par E_q, la somme Δ_1 est remplacée par le reste Δ_q de la même série; cette série étant convergente, et les k tendant vers 0, il est clair qu'on peut choisir q assez grand pour que les inégalités

$$\Delta_q < 1 \qquad k_{q+1}\, C(k_{q+2}) < 1$$

analogues à (16) soient toutes deux vérifiées. Le système ainsi restreint a donc une infinité de solutions données par des formules analogues à (17)

$$x_{n+1} = v'_{n+1} + w'_{n+1}\, x_q \qquad (n = q, q+1, \ldots). \tag{23}$$

En substituant ces valeurs dans les seconds membres des équations mises de coté chaque série se décompose en deux autres, dont la convergence résulte des inégalités

$$|v'_{n+1}| \leqq \frac{E_q k_{q+1} \ldots k_n}{1 - k_{q+1}\, C(k_{q+2})} \qquad |w'_{n+1}| \leqq \frac{D_q D_{q+1} \ldots D_n}{1 - \Delta_q}. \tag{24}$$

Il reste donc à résoudre un système de $q-1$ équations à $q-1$ inconnues; il admet évidemment une solution unique lorsque $d_1, d_2, \ldots, d_{q-1}$ sont différents de o. Le système complet (2) admet donc une infinité de solutions de la forme (23) ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Par suite des inégalités (24) et du fait que k_1 est plus grand que D_1 d'après (14), les valeurs trouvées vérifient des inégalités de la forme

$$|x_{n+1}| \leqq K . k_{q+1} k_{q+2} \ldots k_n \quad \text{pour} \quad n > q. \tag{25}$$

6. Je vais montrer que *toute solution dans laquelle les valeurs des inconnues vérifient des inégalités de la forme*

$$|x_{n+1}| \leqq K . h_{N+1} h_{N+2} \ldots h_n \quad \text{pour} \quad n > N \tag{26}$$

les h étant des nombres positifs tendant vers o, *est l'une des solutions précédentes*

En augmentant les h s'il y a lieu, on peut supposer qu'ils sont de la forme

$$h_n = \delta_n + \varepsilon_n$$

les ε tendant vers o en décroissant, et étant au moins égaux aux δ. Dans ces conditions, les h seront au moins égaux aux k, et satisferont comme eux aux inégalités (14). Il existe un entier q au moins égal à N tel que

$$\Delta_q < 1 \quad \text{et} \quad h_{q+1} C(h_{q+2}) < 1.$$

Le système (2) privé de ses $q - 1$ premières équations admet une solution (23) où x_q a la même valeur que dans la solution imaginée. La différence des valeurs de chaque inconnue dans ces deux solutions constitue une solution du système homogène

$$\left\{\begin{aligned} y_{q+1} &= \quad -(c_2 y_{q+2} + c_3 y_{q+3} + \cdots + c_p y_{q+p} + \cdots) \\ y_{n+1} &= d_n y_y - (c_2 y_{n+2} + c_3 y_{n+3} + \cdots + c_p y_{n+p} + \cdots) \end{aligned}\right. \quad (n = q+1, q+2, \ldots), \tag{27}$$

solution dans laquelle les valeurs des inconnues vérifient des inégalités de la forme

$$|y_{n+1}| \leqq K h_{q+1} h_{q+2} \ldots h_n . \tag{28}$$

D'après ces inégalités, les parenthèses des seconds membres des équations (27) sont inférieures en module aux expressions

$$K h_{q+1} h_{q+2} \ldots h_n h_{n+1} C(h_{n+2}).$$

La 1ère équation (27) donne donc

$$|y_{q+1}| \leqq K h_{q+1} C(h_{q+2}).$$

En utilisant cette nouvelle limitation dans le terme $d_{q+1} y_{q+1}$ de la 2me équation (27), on a:

$$|y_{q+2}| \leqq D_{q+1} K h_{q+1} C(h_{q+2}) + K h_{q+1} h_{q+2} C(h_{q+3})$$

et, d'après l'inégalité analogue à (14) vérifiée par les h

$$|y_{q+2}| \leqq K h_{q+1} \cdot h_{q+1}\, C(h_{q+2}).$$

En continuant le raisonnement, on obtient en général

$$|y_{n+1}| \leqq K h_{q+1} h_{q+2} \ldots h_n \cdot h_{q+1}\, C(h_{q+2})$$

ce qui exprime que les inégalités (28) restent vraies si on y multiplie K par le facteur $h_{q+1}\, C(h_{q+2})$ inférieur à 1; en répétant l'opération, on pourra multiplier K par un facteur arbitrairement petit, ce qui prouve que les y sont nuls. Donc, à partir de x_q, les inconnues ont la même valeur dans la solution imaginée, et dans la solution (23). Si l'on prend les $q-1$ premières équations, les valeurs de x_q, x_{q+1}, ..., déterminent d'une seule manière x_1, x_2, ..., x_{q-1}; par suite, les solutions sont identiques.

REMARQUE. — Lorsque les coefficients e sont nuls à partir d'un certaine rang n, le système (2) admet une solution dans laquelle les inconnues sont nulles à partir du même rang.

Deuxième cas: $|d_n|$ croît avec n.

7. Au lieu de prendre la solution générale (4) du système (3), nous lui appliquerons la méthode des réduites. En supprimant les équations et les inconnues de rang supérieur à p, on a un système qui se résoud immédiatement à partir de la dernière équation, *en supposant les d différents de* 0. On obtient:

$$x_p = -\frac{e_p}{d_p}, \quad x_{p-1} = -\frac{e_{p-1}}{d_{p-1}} - \frac{e_p}{d_{p-1} d_p}, \ldots, x_n = -\frac{e_n}{d_n} - \frac{e_{n+1}}{d_n d_{n+1}} - \ldots - \frac{e_p}{d_n d_{n+1} \ldots d_p}, \ldots.$$

En faisant croître p indéfiniment, on est conduit à poser

$$x_1 = -\frac{e_1}{d_1} - \frac{e_2}{d_1 d_2} - \cdots - \frac{e_p}{d_1 d_2 \ldots d_p} - \cdots, \quad \ldots, x_n = -\frac{e_n}{d_n} - \frac{e_{n+1}}{d_n d_{n+1}} - \cdots.$$

En supposant convergente la série

$$s = -\frac{e_1}{d_1} - \frac{e_2}{d_1 d_2} - \cdots - \frac{e_p}{d_1 d_2 \ldots d_p} - \cdots \tag{29}$$

et en appellant r_1, r_2, ..., les restes successifs, le résultat s'écrit:

$$x_1 = s, \quad s_2 = d_1 r_1, \ldots, \quad x_n = d_1 d_2 \ldots d_{n-1} r_{n-1}, \quad x_{n+1} = d_1 d_2 \ldots d_n r_n, \ldots \tag{30}$$

ce qui constitue bien une solution de (3); on pourrait l'obtenir en faisant $x_1 = s$ dans les formules (4).

Pour le système (5) et chacun des systèmes (6), nous prendrons la solution fournie par cette méthode. Soient R_n des nombre positifs décroissants respectivement supérieurs aux $|r_n|$; si la série (29) est absolument convergente, on peut prendre les restes de la série des modules. La solution de (5) vérifie les inégalités

$$|u_{n+1}^{(1)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_n R_n. \tag{31}$$

Pour la série (8) ($\nu = 2$), on a donc

$$|e_n^{(2)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_{n+1}(C_2 R_{n+1} + C_3 D_{n+2} R_{n+2} + C_4 D_{n+2} D_{n+3} R_{n+3} + \cdots)$$

Pour que la série entre parenthèses soit convergente, nous supposerons qu'il existe des λ *positifs, décroissants et tendant vers* o, satisfaisant aux inégalités

$$\frac{D_i R_i}{R_{i-1}} \leqq \lambda_i \tag{32}$$

d'où par multiplication membre à membre de plusieurs inégalités consécutives

$$D_i D_{i+1} \ldots D_{i+j} R_{i+j} \leqq \lambda_i \lambda_{i+1} \ldots \lambda_{i+j} R_{i-1}.$$

Cette transformation donne pour la série considérée

$$|e_n^{(2)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_{n+1} R_{n+1} C(\lambda_{n+2}).$$

Pour la 2$^{\text{me}}$ approximation, la série analogue à (29) a donc son terme de rang n inférieur en module à

$$D_{n+1} R_{n+1} C(\lambda_{n+2}) \leqq R_n \lambda_{n+1} C(\lambda_{n+2}) < R_n \lambda_2 C(\lambda_3)$$

en vertu de l'inégalité (32) et de la décroissance des λ. Il résulte encore de (32) que les R_n forment une série convergente. On peut donc poser

$$R_n^{(2)} = \lambda_2 C(\lambda_3)(R_{n+1} + R_{n+2} + \cdots). \tag{33}$$

Ces quantités vérifieront a fortiori les inégalités analogues à (32), et par suite, les approximations pourront toujours se poursuivre indéfiniment.

Les solutions du système (6) vérifieront les inégalités

$$|u_{n+1}^{(\nu)}| \leqq D_1 D_2 \ldots D_n R_n^{(\nu)} \tag{34}$$

analogues à (31). Les approximations seront convergentes si la série qui a $R_n^{(\nu)}$ pour terme de rang ν est elle-même convergente.

En remplaçant le second membre de (33) par une série géométrique de comparaison on obtient

$$R_n^{(2)} \leqq \frac{\lambda_2 C(\lambda_3) R_{n+1}}{1 - \dfrac{\lambda_{n+2}}{D_{n+2}}} < \frac{\lambda_2 C(\lambda_3)}{1 - \dfrac{\lambda_{n+2}}{D_{n+2}}} \cdot \frac{\lambda_{n+1}}{D_{n+1}} R_n$$

On aurait la même relation entre $R_n^{(\nu)}$ et $R_n^{(\nu-1)}$. Le coefficient de R_n dans le second membre tend vers o pour n infini, donc il existe une valeur q de n à partir de laquelle il est plus petit que 1. Les approximations sont donc convergentes, au moins pour les inconnues de rang assez élevé; on a alors, d'après (31) et (34)

$$(35) \qquad |x_{n+1}| < KD_1 D_2 \ldots D_n R_n \leqq KS\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

On peut donc appliquer la méthode indiquée au système (2), soit complet, soit restreint. Le résultat obtenu est bien une solution du système considéré; cela résulte d'un raisonnement entièrement analogue à celui du premier cas. Lorsqu'on a opéré sur un système restreint, la solution rend convergente les seconds membres des premières équations, et l'on peut terminer la résolution.

Remarque. — Lorsque la série (29) est absolument convergente, en prenant pour les R les restes de la série des modules, on peut simplifier la condition (32).

Il suffit en effet qu'à partir d'un certain rang, le rapport d'un terme au précédent reste inférieur à un nombre fixe pour qu'il en soit de même du rapport des restes. Les inégalités (32) auront donc lieu si l'on a

$$(36) \qquad \frac{E_{i+1}}{E_i} \leqq \lambda_i \frac{D_{i+1}}{D_i}$$

8. Je vais démontrer que, dans le cas présent, *la solution obtenue est la seule dans laquelle les valeurs des inconnues satisfont à des inégalités de la forme* (26).

Pour un système simple, les formules (4) montrent que les différences des valeurs des inconnues dans deux solutions distinctes sont de la forme

$$x'_2 - x_2 = d_1(x'_1 - x_1), \ \ldots\ldots, \ x'_{n+1} - x_{n+1} = d_1 d_2 \ldots d_n(x'_1 - x_1) \ \ldots\ldots$$

Par suite, s'il existe une solution vérifiant des inégalités de la forme

$$|x'_{n+1}| \leqq KD_{N+1} D_{N+2} \ldots D_n l_n \qquad \text{pour} \qquad n > N$$

l_n tendant vers o pour n infini, une telle solution est unique. C'est le cas pour la solution fournie par la méthode des réduites lorsque la série (29) converge.

Revenons au système (2) et imaginons une solution satisfaisant aux inégalités (26); en augmentant les h si c'est nécessaire, on peut supposer qu'ils vont en décroissant et sont au moins égaux aux λ de même rang. Posons alors

$$(37) \quad D_{N+1} \frac{R'_{N+1}}{R_N} = h_{N+1} \qquad \text{et} \qquad D_i \frac{R'_i}{R'_{i-1}} = h_i \qquad (i = N+2, N+3, \ldots)$$

les R' ainsi définis sont au moins égaux aux R, et les égalités (37) sont semblables aux inégalités (32); tout ce qui précède subsiste donc en remplaçant à partir du rang $N+1$ les R et les λ respectivement par les R' et les h.

D'après (35), la solution obtenue vérifie

$$|x_{n+1}| \leqq K' h_{N+1} h_{N+2} \ldots h_n,$$

et par hypothèse, la solution imaginée vérifie (26) qui a la même forme.

La différence de ces deux solutions est une solution du système homogène

$$(38)\quad y_{n+1} = d_n y_n - (c_2 y_{n+2} + c_3 y_{n+3} + \dots + c_p y_{n+p} + \dots) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et vérifie des inégalités analogues; soit K'' leur coefficient.

En remplaçant dans les seconds membres chaque parenthèse par sa valeur effectuée, on obtient un système simple, que vérifient encore $y_1, y_2, \dots y_n, \dots$ La valeur de la parenthèse effectuée est pour un rang assez élevé, inférieure en module à

$$\mathfrak{C}_n = K'' h_{N+1} h_{N+2} \dots h_n h_{n+1} C(h_{n+2})$$

ce qui montre immédiatement que la série analogue à (29) est absolument convergente.

Il résulte des égalités (37) que

$$(39)\qquad K'' h_{N+1} h_{N+2} \dots h_n = K''' D_{N+1} D_{N+2} \dots D_n R'_n.$$

Cette nouvelle forme donnée à la limite supérieure de $|y_{n+1}|$ permet d'affirmer que les y constituent, pour le système simple envisagé, la solution fournie par la méthode des réduites.

D'après la valeur de $\mathfrak{C}_n$, on a:

$$\frac{\mathfrak{C}_n}{D_1 D_2 \dots D_n} = K_1 h_{n+1} C(h_{n+2}) R'_n < K_1 h_{N+1} C(h_{N+2}) R'_n$$

On peut donc majorer le reste de cette série par

$$\mathfrak{R}_n = K_1 h_{N+2} C(h_{N+2})(R'_{n+1} + R'_{n+2} + \cdots)$$

La série entre parenthèses étant comparable à une série géométrique, on aura:

$$\mathfrak{R}_n < \frac{K_1 h_{N+1} C(h_{N+2}) R'_{n+1}}{1 - \dfrac{h_{n+2}}{D_{n+2}}} = \frac{K_1 h_{N+1} C(h_{N+2})}{1 - \dfrac{h_{n+2}}{D_{n+2}}} \cdot \frac{h_{n+1}}{D_{n+1}} R'_n$$

La solution donnée par la méthode des réduites satisfait à

$$|y_{n+1}| \leqq D_1 D_2 \dots D_n \mathfrak{R}_n$$

Le rapport de cette nouvelle limitation à l'ancienne [second membre de (39)] est donc, à un facteur constant près, $\dfrac{\mathfrak{R}_n}{R'_n}$, qui tend vers 0. A partir d'un rang assez élevé, mais bien déterminé, on peut multiplier par un facteur plus petit que 1 la limite supérieure de $|y_n|$ sans qu'elle cesse d'être valable. L'application réitérée de cette opération montre que, pour ces rangs élevés, les y sont nuls. (38) se réduit donc à un système d'un nombre fini d'équations linéaires homogènes au même nombre d'inconnues qui n'admet pour solution que la solution *zéro*.

Conclusion.

9. Dans les applications que nous avons en vue, les coefficients du système (1) suivant les lois indiquées au n° 1, D_n se comporte comme $\frac{n}{\sigma}$ quand n croît indéfiniment. Le premier cas correspond donc à $|\sigma| < 1$ et le second à $|\sigma| = 1$.

Les inconnues x doivent être, comme les termes connus b, les coefficients d'une fonction entière. Pour qu'une suite de nombres u_n soit dans ce cas, il faut et il suffit que $\sqrt[n]{|u_n|}$ tende vers o, ou que

$$|u_n| = \alpha_n^n, \qquad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0.$$

On peut remplacer les α par des β *qui tendent vers* o *en décroissant* (en appelant par exemple β_n la borne supérieure de $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$); on a donc

$$|u_n| \leqq \beta_n^n$$

et, a fortiori

$$|u_n| \leqq \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \tag{40}$$

Si ces inégalités ont lieu à partir d'un certain rang, les u sont les coefficients d'une fonction entière, d'après la règle de d'ALEMBERT. C'est ce caractère que nous allons utiliser.

D'après lui, les solutions qui nous intéressent sont celles qui vérifient des inégalités de la forme (26). Les solutions trouvées sont acceptables d'après (25) (1^er^ cas) ou (35) (2^e^ cas), et ce sont les seules. Reste à voir si les hypothèses faites pour appliquer les méthodes de résolution sont bien réalisées.

Dans le premier cas, en majorant les b_n sous la forme (40), on peut prendre

$$E_n = \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}{|g_n|}$$

puisque

$$e_n = -\frac{b_n}{g_n}.$$

On a alors

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \beta_i \frac{|g_{i-1}|}{|g_i|} = \frac{\beta_i}{|\sigma|},$$

ce qui permet de choisir des δ satisfaisant aux inégalités (22).

Dans le second cas D_n croît indéfiniment comme n. Dans la série (29), le module du terme général est moindre que

$$\frac{E_p}{D_1 D_2 \ldots D_p} = \frac{1}{|g_p|} \cdot \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}{D_1 D_2 \ldots D_p},$$

terme général d'une série convergente. La série (29) étant absolument convergente, on peut appliquer la condition (36); l'existence des λ décroissants et tendant vers o est assurée puisque $\frac{D_{i+1}}{D_i}$ tend vers 1.

Chapitre III.

LE TERME $b(x)$ ADMET L'ORIGINE POUR POINT SINGULIER.

Le cas le plus simple est celui où $b(x)$ est uniforme autour de l'origine et où ce dernier point est un point singulier isolé (pôle ou point essentiel).

I.

Pôle ou point essentiel isolé. Solutions logarithmiques.

1. L'analogie avec l'équation différentielle obtenue en faisant $\sigma = 1$, aussi bien que l'analogie avec le cas où $b(x)$ admet un pôle hors de l'origine, nous conduisent à penser qu'il existe pour l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + b(x) \tag{1}$$

quand l'origine est un pôle de $b(x)$ une solution de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \log x$$

$\psi(x)$ étant une fonction holomorphe dans le même domaine que $a(x)$, et $\varphi(x)$ étant une fonction, uniforme dans ce domaine et pouvant avoir l'origine pour pôle.

La fonction $f(x)$ étant multiforme, il faut bien préciser ce que nous entendons en disant qu'elle vérifie l'équation. L'interprétation donnée (n° 7, ch. I) pour les fonctions multiformes déjà rencontrées n'est pas applicable ici, car la fonction actuelle ne provient pas, par prolongement, d'un élément (uniforme) qui vérifiait déjà l'équation. La fonction ayant pour seul point critique l'origine, nous adopterons l'interprétation suivante, qui est la plus naturelle. Soit S une ligne joignant le point d'affixe 1 au point d'affixe σ sans passer par l'origine. Nous dirons qu'un élément de la fonction $f(x)$ au point x et un élément au point σx sont *associés* s'ils se déduisent l'un de l'autre par prolongement le long du chemin Sx semblable à S. Ce sont les éléments associés qui doivent être liés par l'équation (1). Il est clair que la ligne S n'intervient pour déterminer le mode d'association que par son enroulement autour de l'origine (il n'en serait plus de même pour une fonction ayant d'autres points critiques que l'origine). Le choix de S se traduit analytiquement par le choix d'un argument déterminé pour σ (la rotation du rayon vecteur d'un point parcourant S); c'est le logarithme correspondant qui figurera dans les formules. Au point-de-vue où nous nous plaçons maintenant, l'équation (1) est complètement définie par la donnée de $\log \sigma$ et non pas seulement de σ.

2. *Pôle simple.* Soit l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_1}{x} + \beta(x) \tag{2}$$

$a(x)$ et $\beta(x)$ étant holomorphes dans un domaine D (n° 1, ch. I) contenant l'origine à son intérieur. Pour exprimer que la fonction

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \log x \tag{3}$$

la vérifie, calculons

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{x} + \psi'(x) \log x$$

et

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)(\log x - \log \sigma) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log \sigma + \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log x.$$

D'après la remarque (n° 11, ch. I) déjà utilisée, les coefficients du logarithme doivent être égaux dans les deux membres et les parties uniformes égales ce qui donne les deux équations

$$\psi'(x) = a(x) \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{4}$$

$$\varphi'(x) = a(x) \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_1}{x} - \frac{\psi(x)}{x} + \beta(x) - a(x) \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \log \sigma. \tag{5}$$

L'équation (4) admet une solution homolorphe définie à un facteur constant près. Pour que l'équation (5) admette une solution holomorphe, il faut et il suffit que $b_1 - \psi(x)$ soit divisible par x. On doit donc prendre pour $\psi(x)$ la solution de (4) qui prend la valeur b_1 à l'origine; on peut alors prendre pour $\varphi(x)$ la solution générale de (5).

3. *Pôle multiple.* Soit l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{b_n}{x^n} + \cdots + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_1}{x} + \beta(x). \tag{6}$$

Par analogie avec le cas analogue (n° 14, ch. I) nous ferons le changement de fonction inconnue

$$f(x) = F(x) + \frac{c_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_1}{x}$$

et nous chercherons à déterminer les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ de telle manière que l'équation qui détermine $F(x)$ soit du type (2). Cette équation est

$$F'(x) - \frac{(n-1)c_{n-1}}{x^n} - \cdots - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{1c_1}{x^2}$$

$$= a(x)F\left(\frac{x}{\sigma}\right) + a(x)\left(\frac{\sigma^{n-1}c_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{\sigma^2 c_2}{x^2} + \frac{\sigma c_1}{x}\right) + \frac{b_n}{x^n} + \cdots + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_1}{x} + \beta(x).$$

La fonction jouant le rôle de $b(x)$ admet un pôle à l'origine; en posant

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + \cdots,$$

les puissances	ont pour coefficients:
-1	$b_1 + a_0\sigma c_1 + a_1\sigma^2 c_2 + a_2\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{n-2}\sigma^{n-1} c_{n-1}$
-2	$b_2 + 1\ c_1 + a_0\sigma^2 c_2 + a_1\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{n-3}\sigma^{n-1} c_{n-1}$
-3	$b_3 \quad + 2\ c_2 + a_0\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{n-4}\sigma^{n-1} c_{n-1}$
...	....
$-n$	$b_n \quad + (n-1)c_{n-1}.$

En égalant à o les $n-1$ derniers coefficients, on obtient un système de $n-1$ équations linéaires à $n-1$ inconnues qui admet évidemment une solution unique (la dernière déterminant c_{n-1}, l'avant dernière déterminant ensuite c_{n-2}, etc.). L'équation peut donc, par cette méthode, être réduite, d'une seule manière, à une équation en $F(x)$ qui sera en général du type (2). Elle pourra être du type régulier étudié au chapitre Ier lorsque les valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ ainsi définies annulent le premier coefficient.

On aura pour $F(x)$ une solution de la forme (3) dans laquelle $\psi(x)$ peut être nulle. En réunissant dans $f(x)$ toute la partie uniforme, la solution peut s'écrire de la même manière; mais alors $\varphi(x)$ désigne une fonction holomorphe sauf à l'origine qui est pour elle un pôle d'ordre $n-1$.

4. *Point singulier essentiel.* — Dant le cas où $b(x)$ admet l'origine pour point singulier essentiel, la partie principale étant

$$\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + \cdots,$$

nous pouvons employer la même méthode. Le changement de fonction inconnue

$$f(x) = F(x) + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \cdots$$

réduira l'équation à la forme (2) si les coefficients c_n vérifient le système d'équations linéaires

$$(7)\qquad \begin{cases} b_2 + 1\, c_1 + a_0\sigma^2 c_2 + a_1\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{p-2}\sigma^p c_p + \cdots = 0 \\ b_3 \qquad + 2\, c_2 \quad + a_0\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{p-3}\sigma^p c_p + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n + (n-1)c_{n-1} + a_0\sigma^n c_n + \cdots + a_{p-n}\sigma^p c_p + \cdots = 0 \end{cases}$$

S'ils vérifient en outre l'équation

$$(8)\qquad b_1 + a_0\sigma c_1 + a_1\sigma^2 c_2 + a_2\sigma^3 c_3 + \cdots + a_{p-1}\sigma^p c_p + \cdots = 0,$$

l'équation sera ramenée au type régulier, et il n'y aura pas de terme logarithmique.

Ce système (7) est du type (1) du chapitre II, et pourra se mettre sous la forme (2) de ce chapitre pourvu que a_0 *ne soit pas nul.* Toute solution du système (7) permet de faire le changement de fonction inconnue; on obtient alors pour $f(x)$ comme pour $F(x)$ une infinité de fonctions dépendant d'une constante arbitraire et qui se déduisent de l'une d'elles en lui ajoutant la solution générale régulière à l'origine de l'équation homogène (4). Nous dirons que ces solutions ne sont pas distinctes, en appellant *solutions distinctes* des solutions dont la différence n'est pas une fonction holomorphe.

L'équation

$$(9)\qquad f'(x) = a(x)f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \beta(x) + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + \cdots$$

admet donc, si $a(0) \neq 0$, *une infinité de solutions distinctes de la forme* (3) *lorsque* $|\sigma|$ *est plus grand que* 1 *et une seule lorsque* $|\sigma|$ *est égal à* 1, $\psi(x)$ étant toujours régulière à l'origine et $\varphi(x)$ ayant en général un point singulier essentiel.

La méthode et la conclusion sont applicables au cas du pôle; dans l'une des solutions ou dans la solution unique, l'origine est seulement un pôle de $\varphi(x)$ (c'est la solution obtenue au n° précédent).

II.

Pôle ou point essentiel isolé. — Solutions uniformes.

5. Pour qu'une des solutions soit uniforme, il faut et il suffit que l'équation (8) soit vérifiée par la solution utilisée du système (7) Dans le second cas ($|\sigma| = 1$), cela peut avoir lieu exceptionnellement pour l'unique solution. Dans le premier cas ($|\sigma| > 1$), cela aura lieu généralement pour l'une des solutions. En effet, les c sont linéaires par rapport à celui d'entre eux c_n qui est arbitraire; en substituant leurs expressions dans l'équation (8), on obtient une équation linéaire en c_n, qui admet une racine et une seule, en général.

Remarque. — Lorsque $|\sigma|$ est plus grand que 1, l'existence pour la même équation (9) de solutions distinctes entraîne, pour l'équation homogène (4), l'existence de solutions ayant l'origine pour point singulier, et en général pour point critique. Par suite les équations à coefficients réguliers admettent, non seulement les solutions régulières étudiées au chapitre I[er], mais encore des solutions singulières à l'origine de la forme (3) (c'est à dire généralement multiformes); elles dépendent d'une constante arbitraire. Nous verrons d'ailleurs que l'équation homogène admet un ensemble très riche de solutions multiformes. Par suite, pour une équation à coefficientes uniformes, il y a intérêt à se restreindre aux solutions uniformes : le mot solution a alors un sens simple et net, et ces solutions comportent beaucoup moins d'arbitraire.

III.

Point critique logarithmique.

6. Soit l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x) \log x. \tag{10}$$

où $c(x)$ est une fonction holomorphe dans le même domaine que $a(x)$. On peut encore déterminer une solution de la forme (3). Il faut et il suffit pour cela que

$$\psi'(x) = a(x)\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x) \tag{11}$$

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{\psi(x)}{x} - a(x)\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\sigma. \tag{12}$$

L'équation (11) admet une solution holomorphe prenant à l'origine une valeur arbitraire. Pour que l'équation (12) soit régulière, il faut et il suffit que $\psi(x)$ s'annule à l'origine. On a alors pour $\varphi(x)$ une infinité de fonctions dépendant d'une constante arbitraire.

Si dans l'équation (10), $c(x)$ admet à l'origine un pôle ou un point singulier essentiel non limite de pôles, l'équation (11) admet en général, quand $|\sigma|$ est plus grand que 1, une solution uniforme ayant à l'origine un point singulier essentiel. Le terme connu $b(x)$ de l'équation (12) admet l'origine comme point singulier essentiel. Lorsqu'on remplace $\psi(x)$ par une autre solution de (11) non distincte de la première, sa partie holomorphe seule est changée; par suite, dans l'équation (12), le changement de $b(x)$ ne porte que sur la partie holomorphe et le terme en $\frac{1}{x}$. Considérons une solution du système (7) attaché à l'équation (12); en remplaçant s'il y a lieu $\psi(x)$ par une solution non distincte, l'équation (8) sera vérifiée par la solution considérée; pour chaque solution uniforme de (11), (12) aura donc une infinité de solutions uniformes. On a finalement des solutions de la forme (3) où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions uniformes à point singulier essentiel. La possibilité pour deux solutions de différer dans $\varphi(x)$ par la partie principale et dans $\psi(x)$ seulement par la partie régulière était à prévoir comme conséquence de l'existence de solutions multiformes pour l'équation homogène.

7. Lorsque l'origine est pôle ou point essentiel de $c(x)$ on peut aussi chercher des solutions de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\log x + \chi(x)\log^2 x \tag{13}$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant des fonctions uniformes. On a

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{x} + \left[\psi'(x) + \frac{2\chi(x)}{x}\right]\log x + \chi'(x)\log^2 x$$

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\sigma + \chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log^2\sigma$$
$$+\left[\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 2\chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\sigma\right]\log x + \chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log^2 x.$$

Il faut et il suffit que $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ vérifient les équations

$$\chi'(x) = a(x)\chi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{14}$$

$$\psi'(x) = a(x)\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{2\chi(x)}{x} - 2a(x)\chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\sigma + c(x) \tag{15}$$

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{\psi(x)}{x} - a(x)\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log\sigma + a(x)\chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\log^2\sigma. \tag{16}$$

L'équation (14) admet une solution holomorphe contenant un facteur constant arbitraire. Le terme connu de l'équation (15) a un pôle ou un point essentiel à l'origine à cause de $c(x)$. Etant donnée une solution du système (7) attaché à (15), on peut profiter de la constante que contient $\chi(x)$ pour que l'équation (8) soit vérifiée; on a ainsi pour (15) une infinité de solutions uniformes distinctes. L'équation (16) se présente de la même manière. D'où l'existence d'une infinité de solutions de la forme (13), ou au moins d'une lorsque $|\sigma| = 1$; $\chi(x)$ est holomorphe, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ admettent un point essentiel ou peut-être un pôle à l'origine.

L'existence de solutions distinctes de cette forme entraine celle de solutions analogues pour l'équation homogène. On verrait aisément qu'il existe des solutions qui sont des polynômes de degré quelconque en log x dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x.

IV.

Point critique algébrique, et généralisation.

8. Soit l'équation

$$f'(x) = a(x) f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + x^{\mu-1} c(x) \tag{17}$$

μ étant un nombre réel ou complexe, autre qu'un entier réel; $a(x)$ et $c(x)$ étant holomorphes dans un domaine D contenant l'origine à son intérieur. Nous allons chercher une solution de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + x^{\mu} \psi(x) \tag{18}$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant uniformes. On a :

$$f'(x) = \varphi'(x) + x^{\mu-1}[x\psi'(x) + \mu\psi(x)]$$

$$f\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + x^{\mu-1} \frac{x}{\sigma^{\mu}} \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc :

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{19}$$

$$x\psi'(x) + \mu\psi(x) = \frac{x\,a(x)}{\sigma^{\mu}} \psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x). \tag{20}$$

Le fait que la fonction multiforme (18) vérifie l'équation (17) étant entendu conformément au n° 1 du présent chapitre, σ^{μ} désigne un nombre parfaitement déterminé calculé à partir de la valeur choisie pour $\log \sigma$.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont ici définies indépendamment l'une de l'autre; $\varphi(x)$ est holomorphe et dépend d'un facteur constant arbitraire.

Pour déterminer une solution holomorphe de l'équation (20), nous procéderons par approximations successives, à partir d'une fonction arbitraire $g(x)$ en posant

$$\left\{\begin{array}{l} x\psi_1'(x) + \mu\psi_1(x) = \dfrac{x\,a(x)}{\sigma^{\mu}} g(x) + c(x) \\ x\psi_2'(x) + \mu\psi_2(x) = \dfrac{x\,a(x)}{\sigma^{\mu}} \psi_1\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) + c(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x\psi_n'(x) + \mu\psi_n(x) = \dfrac{x\,a(x)}{\sigma^{\mu}} \psi_{n-1}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) + c(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{21}$$

Une équation différentielle de la forme

$$xy'(x) + \mu y(x) = v(x),$$

où $v(x)$ est régulière à l'origine, admet une seule intégrale uniforme autour de l'origine; cette intégrale est holomorphe dans le même domaine que $v(x)$ et peut être représentée par

$$y(x) = x^{-\mu} \int_0^x z^{\mu-1} v(z)\, dz \cdot$$

pourvu que x^{μ} tende vers 0 avec x sur le chemin d'intégration.

Si $g(x)$ a été prise holomorphe dans D, les $\psi_n(x)$ sont holomorphes dans le même domaine. Les fonctions

$$u_1(x) = \psi_2(x) - \psi_1(x), \quad u_2(x) = \psi_3(x) - \psi_2(x), \ldots, \quad u_n(x) = \psi_{n+1}(x) - \psi_n(x), \ldots$$

sont uniformes et vérifient les équations

$$x u_1'(x) + \mu u_1(x) = \frac{x a(x)}{\sigma^{\mu}}\left[\psi_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) - g(x)\right]$$

et

$$x u_n'(x) + \mu u_n(x) = \frac{x a(x)}{\sigma^{\mu}} u_{n-1}\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad \text{pour} \quad n \geqq 2.$$

Elles s'expriment donc par

$$u_1'(x) = x^{-\mu} \int_0^x \frac{z^{\mu} a(z)}{\sigma^{\mu}}\left[\psi_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g(z)\right] dz \tag{22}$$

$$u_n(x) = x^{-\mu} \int_0^x \frac{z^{\mu} a(z)}{\sigma^{\mu}} u_{n-1}\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz \tag{23}$$

Nous allons reprendre les raisonnements du ch. I$^{\text{er}}$, n° 2, avec les notations définies à cet endroit, en remplaçant les formules (5) et (6) de ce chapitre respectivement par (22) et (23), ce qui est possible dans le cas où il existe des nombres positifs fixes ω, k, K tels que l'on ait [17])

$$k[s(z)]^{\omega} \leqq |z^{\mu}| \leqq K[s(z)]^{\omega}. \tag{24}$$

---

[17]) Ordinairement, les chemins γ seront tels que le rapport $\frac{|z|}{s(z)}$, qui est moindre que 1, reste aussi supérieur à un nombre fixe non nul. La double inégalité (24) équivaut alors à

$$k'|z|^{\omega} \leqq |z^{\mu}| \leqq K'|z|^{\omega}.$$

Losque μ est réel, on a $\omega = \mu$: la méthode s'applique donc au cas où μ est positif.

Lorsque μ est imaginaire, en posant $\mu = \alpha + \beta i$, $z = \rho e^{i\theta}$, la double inégalité ci-dessus équivaut à une autre de la forme

$$k'' + pL\rho \leqq \theta \leqq K'' + pL\rho$$

qui exprime que les chemins γ sont comparables a une spirale logarithmique, la condition est alors

$$\alpha - p\beta > 0.$$

Dans ces conditions, on peut prendre $\gamma(x)$ pour chemin d'intégration dans (22) et (23), z^μ tendant vers o avec z sur un tel chemin. Posons

$$\Sigma_\mu = |\sigma^\mu|, \qquad A = \max|a(z)|, \qquad M = \max\left|\psi_1\left(\frac{z}{\sigma}\right) - g(z)\right| \qquad \text{dans } D.$$

La formule (22) nous donne

$$|u_1(x)| < \frac{1}{k[s(x)]^\omega}\int_{\gamma(x)} \frac{K[s(z)]^\omega A}{\Sigma_\mu} M ds(z) = \frac{M}{\omega+1}\cdot\frac{KAs(x)}{k\Sigma_\mu}$$

$$\left|u_1\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| < \frac{M}{(\omega+1)\Sigma}\cdot\frac{KAs(z)}{k\Sigma_\mu}.$$

D'après la formule (23) ($n = 2$):

$$|u_2(x)| < \frac{1}{k[s(x)]^\omega}\int_{\gamma(x)} \frac{K[s(x)]^\omega A}{\Sigma_\mu}\cdot\frac{M}{(\omega+1)\Sigma}\cdot\frac{KAs(z)}{k\Sigma_\mu}ds(z)$$

$$= \frac{M}{(\omega+1)\Sigma}\left(\frac{KA}{k\Sigma_\mu}\right)^2\frac{1}{[s(x)]^\omega}\int_{\gamma(x)}[s(z)]^{\omega+1}ds(z)$$

d'où

$$|u_2(x)| < \frac{M}{(\omega+1)(\omega+2)\Sigma}\left[\frac{KAs(x)}{k\Sigma_\mu}\right]^2$$

et

$$\left|u_2\left(\frac{z}{\sigma}\right)\right| < \frac{M}{(\omega+1)(\omega+2)\Sigma^{1+2}}\left[\frac{KAs(z)}{k\Sigma_\mu}\right]^2.$$

En continuant ainsi on trouve

$$\left|u_n(x)\right| < \frac{M}{(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n)\Sigma^{1+2+\quad+n-1}}\left[\frac{KAs(x)}{k\Sigma_\mu}\right]^n$$

$s(x)$ étant plus petit que L, $u_n(x)$ est le terme général d'une série normalement convergente dans D. Ce mode de convergence permet de passer à la limite pour n infini dans les équations (2). La somme $\psi(x)$ est donc une solution holomorphe de l'équation (20).

Cette équation n'admet qu'une seule solution holomorphe autour de l'origine, car toute solution holomorphe à l'origine de l'équation homogène

$$x\chi'(x) + \mu\chi(x) = \frac{xa(x)}{\sigma^\mu}\chi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

est identiquement nulle.

En effet, elle vérifie l'équation différentielle obtenue en remplaçant au premier membre seulement $\chi(x)$ par une fonction inconnue. On a donc aussi

$$(25) \qquad \chi(x) = x^{-\mu}\int_0^x \frac{z^\mu a(z)}{\sigma^\mu}\chi\left(\frac{z}{\sigma}\right)dz.$$

Soit m la borne supérieure de $\chi(x)$ sur $\Gamma(h)$ (notation du ch. I$^{\text{er}}$, n° 3); en raisonnant sur la formule (25) comme un peu plus haut sur (22), on trouve

$$|\chi(x)| < \frac{m}{\omega+1} \cdot \frac{K A s(x)}{k \Sigma_\mu} \leqq m \frac{K A \Sigma h}{(\omega+1) k \Sigma_\mu}$$

pour x sur $\Gamma(\Sigma h)$, qui conduit à une contradiction si m n'est pas nul (voir ch. I$^{\text{er}}$, n° 3).

Lorsque la double inégalité (24) est vérifiée, il existe donc une infinité de solutions de la forme (18) où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions holomorphes la première contenant un facteur constant arbitraire et la seconde complètement déterminée.

9. La condition (24) ne fait intervenir que les chemins γ et la constante μ: lorsqu'elle n'est pas satisfaite, nous supposerons qu'elle le devient lorsqu'on augmente μ d'un entier assez grand [18]).

Il est évident que, dans l'équation (17), on peut augmenter l'exposant μ d'un entier n en remplaçant $c(x)$ par une fonction ayant en général un pôle d'ordre n à l'origine. Nous allons donc étudier l'équation (17) en supposant remplie la condition (24), dans le cas où $c(x)$ *admet l'origine pour pôle ou même pour point essentiel isolé.* Pour obtenir une solution de la forme (18), il faut toujours résoudre les équations (19) et (20).

Nous allons chercher pour l'équation (20), dans le cas où $c(x)$ admet l'origine pour pôle ou pour point essentiel, une solution présentant le même caractere. Pour cela, essayons de réduire l'équation au cas où $c(x)$ est holomorphe par le changement de fonction inconnue:

$$\psi(x) = d(x) + \Psi(x)$$

$$d(x) = \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \cdots + \frac{d_n}{x^n} + \cdots.$$

La nouvelle inconnue $\Psi(x)$ satisfait à l'équation

$$x \Psi'(x) + \mu \Psi(x) = \frac{x a(x)}{\sigma^\mu} \Psi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + c(x) - [x d'(x) + \mu d(x)] + \frac{x a(x)}{\sigma^\mu} d\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

dont le terme connu doit être holomorphe dans D. Il l'est nécessairement, sauf peut-être à l'origine, comme $a(x)$, $c(x)$ et $d(x)$. Il suffit donc de choisir les coefficients de $d(x)$ de façon que les termes infinis des différentes parties se détruisent. Posons

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$c(x) = \text{partie régul.} + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n} + \cdots$$

---

[18]) C'est ce qui a lieu pour μ réel; et sous des conditions assez larges imposées aux chemins γ, pour μ imaginaire [voir note [17])].

Les d_n doivent vérifier le système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} b_1 + (1-\mu)d_1 + a_0\sigma^{2-\mu}d_2 + a_1\sigma^{3-\mu}d_3 + \cdots + a_{p-2}\sigma^{p-\mu}d_p + \cdots = 0 \\ b_2 \qquad\qquad + (2-\mu)d_2 + a_0\sigma^{3-\mu}d_3 + \cdots + a_{p-3}\sigma^{p-\mu}d_p + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n \qquad + (n-\mu)d_n + a_0\sigma^{n+1-\mu}d_{n+1} + \cdots + a_{p-n-1}\sigma^{p-\mu}d_p + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Ce système est du type (1) du chapitre II, et pourra se mettre sous la forme (2) pourvu que a_0 *ne soit pas nul.* Toute solution de ce système constituant les coefficients d'une fonction entière permet de faire le changement de fonction inconnue; on obtient alors une fonction holomorphe $\Psi(x)$ unique, et par conséquent une fonction $\psi(x)$ unique. Nous dirons que deux solutions $f(x)$ de la forme (18) sont *distinctes* lorsqu'elles correspondent à deux fonctions $\psi(x)$ différentes. Chaque fonction $\psi(x)$ fournit une infinité de fonctions $f(x)$ non distinctes, en prenant pour $\varphi(x)$ la solution générale régulière de l'équation homogène (19).

Étant donnée une équation (17), *où* $a(x)$ *et* $c(x)$ *désignent des fonctions holomorphes dans un domaine* D (défini au ch. I^{er}, n° 1), *sauf* $c(x)$ *à l'origine ou elle peut avoir un pôle ou un point essentiel; en supposant*

$$a(0) \neq 0,$$

elle admet une infinité de solutions distinctes de la forme (18) *lorsque* $|\sigma|$ *est plus grand que* 1 *et une seule lorsque* $|\sigma|$ *est égal à* 1. $\varphi(x)$ est la solution générale régulière de l'équation (19); $\psi(x)$ admet en général l'origine pour point singulier essentiel et est holomorphe dans tout le reste de D. Lorsque l'origine est un point régulier ou un pôle de $c(x)$, c'est aussi un point régulier ou un pôle de $\psi(x)$ dans l'une des solutions.

Remarque. — Lorsque $|\sigma|$ est plus grand que 1, la différence de deux solutions distinctes de l'équation (17) est une solution, multiforme autour de l'origine, de l'équation homogène (19). Les nouvelles solutions ainsi obtenues dépendent d'un facteur constant arbitraire.

Vu et approuvé :
Strasbourg, le 4 juin 1924
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
P. MULLER.

Vu et permis d'imprimer :
Strasbourg, le 5 juin 1924.
Le Recteur de l'Académie,
S. CHARLÉTY.

TABLE DES MATIÈRES