AXEL EGNELL

Géométrie infinitésimale vectorielle

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1919

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1919__15__1_0>

N° D'ORDRE :
1605.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. AXEL EGNELL.

1re THÈSE. — GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE VECTORIELLE.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 11 avril 1919, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
CL. GUICHARD, KŒNIGS, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen..................	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Professeurs honoraires...	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
Professeurs............	LIPPMANN..........	Physique.
	BOUTY..............	Physique.
	BOUSSINESQ.........	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	É. PICARD..........	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE........	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	KŒNIGS.............	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT............	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.............	Chimie organique.
	JOANNIS............	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET...........	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.........	Minéralogie.
	ANDOYER...........	Astronomie.
	PAINLEVÉ...........	Mécanique rationnelle.
	HAUG...............	Géologie.
	HOUSSAY...........	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE........	Physique générale.
	CAULLERY..........	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.........	Chimie appliquée.
	G. URBAIN..........	Chimie.
	EMILE BOREL........	Théorie des fonctions.
	MARCHIS...........	Aviation.
	JEAN PERRIN........	Chimie physique.
	G. PRUVOT.........	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT........	Botanique.
	ABRAHAM...........	Physique.
	CARTAN............	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD......	Géométrie supérieure.
	MOLLIARD..........	Physiologie végétale.
	LEBESGUE..........	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N....................	Histologie.
	N....................	Physiologie.
	N....................	Mathématiques générales.
	N....................	Géographie physique.
Professeurs adjoints.....	LEDUC.............	Physique.
	MICHEL............	Minéralogie.
	HÉROUARD.........	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER......	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON............	Physique.
	LESPIEAU..........	Chimie.
	GENTIL............	Pétrographie.
	SAGNAC............	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.............	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire..............	D. TOMBECK.	

5982 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE VECTORIELLE.

INTRODUCTION.

Le calcul vectoriel, qui est employé couramment, sous des formes variées, dans les recherches relatives à la physique mathématique, a reçu également des applications dans le domaine de la géométrie différentielle. Dans le livre *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, M. Burali-Forti a fait une application étendue du calcul géométrique à l'étude des courbes gauches et des surfaces réglées. Il a donné aussi quelques indications sur une application possible de la même méthode à la théorie des surfaces. S'engageant dans cette voie, M. Fehr a fait un exposé de la théorie des surfaces selon la méthode de Gauss, en faisant usage des notations du calcul vectoriel (1). Enfin, la plupart des traités de calcul vectoriel publiés depuis une vingtaine d'années contiennent des exemples de l'application qui peut être faite de ce calcul à la géométrie. C'est ainsi que, dans le livre *Vector analysis* contenant un exposé de la méthode de Gibbs, M. Wilson a appliqué ce calcul à l'étude de différentes questions de la théorie des surfaces, notamment à celles des lignes asymptotiques et des lignes géodésiques.

(1) *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale.*

J'ai cherché, dans le présent travail, à appliquer ces méthodes à l'étude d'un champ vectoriel quelconque. La notion fondamentale dont j'ai fait un usage systématique est celle de la dérivée d'un vecteur fonction de point, prise dans les différentes directions d'un plan ou de l'espace. Comme l'ont montré, entre autres, MM. Burali-Forti et Marco-Longo, la dérivée est une fonction linéaire du vecteur qui caractérise la direction de différentiation. On pourrait donc se servir dans cette étude des méthodes spéciales créées par ces auteurs pour les recherches concernant les « homographies vectorielles ». Il est cependant facile — et c'est ce qui a été fait ci-après — de développer une étude de géométrie différentielle à l'aide des notions du calcul vectoriel élémentaire, les symboles des homographies n'apportant guère de simplification dans ce genre de questions.

J'ai donné tout d'abord un résumé succinct des notions et des symboles du calcul vectoriel dont je fais usage. Ces symboles sont presque identiques à ceux adoptés dans l'ouvrage de M. J.-G. Coffin : *Calcul vectoriel*, traduction et notations françaises par M. Alex. Véronnet. Toutefois, il m'a semblé avantageux, du moins pour les applications géométriques, de conserver parmi les nombreux éléments géométriques introduits par Grassmann un élément superficiel — le « bivecteur » — analogue à l'élément linéaire, le vecteur. Le nom de bivecteur ayant été appliqué par différents auteurs à des éléments tout à fait dissemblables, j'ai préféré donner à l'élément superficiel un autre nom, celui de *rotateur*, qui me semble bien caractériser sa nature.

Dans le calcul différentiel, je fais usage de l'opérateur ∇ (le « nabla » d'Hamilton). On reproche à ce symbole de ne pouvoir être défini qu'à l'aide d'un système de coordonnées, auxiliaire dont le calcul vectoriel a la prétention de se passer. Pourtant la notion de dérivée d'une fonction de point dans une direction permet de définir cet opérateur à l'aide de trois directions quelconques, fixes ou variables, de l'espace. La dépendance d'un système de coordonnées n'est donc pas plus grande pour cet opérateur que pour les invariants I_1, I_2, I_3 introduits par MM. Burali-Forti et Marco-Longo et dont le premier sert, par exemple, à la définition de la divergence d'un vecteur. L'opérateur ∇ est incontestablement d'un emploi très commode dans le calcul différentiel ; il s'adapte étroitement aux propriétés des fonctions de point.

Avant d'aborder l'étude d'un champ vectoriel proprement dit, j'ai donné des exemples de l'application du calcul vectoriel à la théorie des courbes gauches et des surfaces réglées. Quelques-uns de ces exemples me semblent nouveaux. Cet exposé m'a permis, en outre, d'introduire un certain nombre de notations qui trouvent leur emploi dans la théorie du champ vectoriel.

En ce qui concerne cette théorie, j'ai développé d'abord les propriétés des dérivées d'un vecteur prises dans les différentes directions d'un plan. Lorsque ces dérivées sont parallèles à ce même plan — *plan tautologue* — on détermine très facilement certaines directions qui se distinguent par des propriétés spéciales et qui sont en rapport étroit avec les directions particulières envisagées dans la théorie des surfaces.

Passant ensuite à l'étude des dérivées prises dans les différentes directions de l'espace, j'ai montré comment les propriétés d'une homographie établie entre deux gerbes de droites et de plans se rattachent aux propriétés élémentaires d'un certain ellipsoïde qui caractérise l'homographie. Ce rapprochement ne me semble pas avoir été fait jusqu'ici.

Après avoir examiné succinctement les cas de dégénérescence de l'homographie, j'ai envisagé plus en détail les propriétés d'un champ vectoriel unitaire, qui est celui qui, au point de vue géométrique, offre le plus d'intérêt. Les propositions concernant un plan tautologue s'appliquent immédiatement au plan perpendiculaire à un tel champ. On peut considérer les courbes dont les tangentes sont contenues dans ce plan comme des trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes. Les propriétés de ces trajectoires ont fait l'objet d'une étude approfondie de M. Rogers. J'ai montré, après lui, comment les formules de Meunier, d'Euler et de Bonnet s'appliquent à ces courbes sous une forme généralisée, et comment on peut définir la courbure principale et la torsion principale dans un plan tautologue.

En supposant le champ vectoriel constant dans la direction du champ, j'ai fait une application de l'étude précédente à la théorie des congruences de droites, et j'ai déterminé notamment la variation de la courbure et de la torsion principales le long d'une droite de la congruence.

Envisageant ensuite la courbure tangentielle des trajectoires orthogonales d'un champ unitaire quelconque, j'ai établi pour ces courbes des formules qui peuvent être considérées comme une généralisation des formules de Codazzi. J'ai évalué enfin les dérivées secondes d'un vecteur perpendiculaire à une famille de surfaces; à l'aide des projections orthogonales de ce vecteur, on est conduit à la formule de Laguerre et à une formule analogue, signalée par Darboux, relative à la dérivée de la torsion géodésique. Dans un dernier paragraphe j'ai exposé comment un certain nombre de propriétés classiques des courbes tracées sur une surface peuvent être étendues, avec, parfois, de légères modifications, aux trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel quelconque.

I. — Algèbre vectorielle.

Je donne ci-après un résumé des éléments du calcul vectoriel dont il sera fait usage.

Un *vecteur* est une grandeur géométrique formée par la réunion des trois notions élémentaires : *longueur* (ou module), *direction* et *sens linéaire*. Une direction (ou une ligne droite) affectée d'un sens sera dite *pointée*. Des vecteurs, ou des droites pointées, seront dits *directement parallèles* s'ils ont même direction et même sens, *inversement parallèles* s'ils ont même direction mais des sens opposés.

Les lettres majuscules **A**, **B**, etc. désigneront des vecteurs. Le nombre réel (positif ou négatif) qui détermine la longueur de **A** et son sens par rapport à une direction pointée parallèle à **A** sera dit la *mesure algébrique* de **A** relative à cette direction.

Le sens de rotation, dans un faisceau de plans, est concordant avec le sens linéaire de l'axe du faisceau, lorsqu'un observateur, traversé par l'axe dans le sens des pieds à la tête, voit les plans tourner, dans leur rotation positive, de droite à gauche.

Un plan sur lequel a été fixé un sens de rotation positif sera dit *rotatif*.

Un *rotateur* est une grandeur géométrique formée par la réunion des trois notions élémentaires : aire ou *mesure* (module), *orientation* et *sens de rotation*. Des rotateurs, ou des plans rotatifs, seront dits *direc-*

tement parallèles s'ils ont même orientation et même sens, *inversement parallèles* s'ils ont même orientation mais des sens opposés.

Les lettres minuscules **a**, **b**, etc. désigneront des rotateurs. Le nombre qui détermine la mesure du rotateur **a** et son sens par rapport à une orientation rotative parallèle à **a** sera dit la *mesure algébrique* de **a** relative à cette orientation.

Soient α et β deux plans rotatifs non parallèles, r la droite intersection de ces plans. L'angle (α, β), formé par ces plans, est l'angle dont il faut faire tourner le plan α dans le faisceau r pour qu'il coïncide avec β en orientation et en sens. Cet angle est compris entre o et π. L'angle formé par deux rotateurs **a** et **b** est égal à l'angle formé par deux plans rotatifs directement parallèles à **a** et à **b** respectivement.

Le sens de rotation fixé sur un plan ρ détermine un sens de rotation concordant dans tout faisceau de plans dont l'axe est perpendiculaire à ρ, et par conséquent un sens linéaire concordant sur toute droite perpendiculaire à ρ. L'angle formé par une droite pointée et un plan rotatif sera considéré comme positif ou négatif, selon que la droite forme un angle aigu ou obtus avec la normale du plan affectée d'un sens linéaire concordant avec le sens de rotation fixé sur le plan.

L'angle formé par un vecteur **A** et un rotateur **u** est égal à l'angle formé par une droite pointée a et un plan rotatif υ directement parallèles à **A** et à **u** respectivement. Cet angle est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. **A** sera dit *directement perpendiculaire* à **u** quand l'angle $(\mathbf{A}, \mathbf{u})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$, *inversement perpendiculaire* à **u** quand cet angle est égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Si un vecteur **A** est directement perpendiculaire à un rotateur **u** de même module que **A**, je dirai que **A** est l'*orthogonal* de **u**, et **u** l'*orthogonal* de **A**, et j'écrirai

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{u}}; \qquad \mathbf{u} = \overline{\mathbf{A}}.$$

L'opération qui permet de déduire **A** de **u**, et réciproquement, sera dite *opération orthogonale*.

L'addition des vecteurs (qui s'opère comme l'addition géométrique des segments) est commutative et associative. La somme de deux rotateurs **a** et **b** est définie par la formule

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}}.$$

L'addition des rotateurs suit donc les mêmes règles de calcul que l'addition des vecteurs. L'opération orthogonale est distributive par rapport à l'addition. n étant un nombre quelconque, on pose, en outre,

$$\overline{n} = n.$$

Soient **A** et **B** deux vecteurs parallèles à un certain plan ρ. Attribuons à ρ le sens de la rotation, inférieure à deux angles droits, qui ferait coïncider, en direction et en sens, une droite pointée OA, directement parallèle à **A**, avec une droite pointée OB, directement parallèle à **B**. Traçons dans le plan ρ un parallélogramme OACB dont deux côtés adjacents OA et OB aient même longueur, même direction et même sens que les vecteurs **A** et **B** respectivement. Le produit **AB** de ces deux vecteurs est un rotateur **u** qui a même orientation et même sens que le plan ρ et dont le module est égal à l'aire du parallélogramme OACB. On a donc :

$$\operatorname{mod} \mathbf{u} = \operatorname{mod} \mathbf{A} \operatorname{mod} \mathbf{B} \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

La multiplication de deux vecteurs est distributive par rapport à l'addition ; cette opération n'est pas commutative. Si l'on change l'ordre des deux facteurs, le produit change de signe.

Le produit de deux rotateurs **a** et **b** est défini par la formule

$$\mathbf{ab} = \overline{\overline{\mathbf{a}}\,\overline{\mathbf{b}}}.$$

Ce produit est donc un vecteur **P** parallèle à la direction commune aux rotateurs **a** et **b**. Son module est donné par l'expression

$$\operatorname{mod} \mathbf{P} = \operatorname{mod} \mathbf{a} \operatorname{mod} \mathbf{b} \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

L'opération orthogonale est distributive par rapport à la multiplication de deux vecteurs ou de deux rotateurs.

Soient OA, OB, OC trois droites pointées formant un trièdre. Le sens de ce trièdre sera considéré comme positif, si la droite OC forme un angle positif avec le plan rotatif OAB, comme négatif dans le cas contraire.

Le produit d'un rotateur **u** et d'un vecteur **A** est un nombre k défini par l'expression

$$k = \mathrm{mod}\,\mathbf{u}\,\mathrm{mod}\,\mathbf{A}\sin(\mathbf{u}, \mathbf{A}).$$

J'écrirai

$$k = \mathbf{uA} = \mathbf{Au}.$$

Soient **A**, **B**, **C** trois vecteurs quelconques. Le produit **ABC** représente le nombre, produit du rotateur **AB** et du vecteur **C**. Ce produit est positif si les trois vecteurs sont directement parallèles aux arêtes d'un trièdre de sens positif; il est négatif dans le cas contraire. Enfin le produit est nul si les trois vecteurs sont coplanaires. Le produit de trois vecteurs suit les règles exprimées par les formules :

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{BCA} = \mathbf{CAB} = -\,\mathbf{BAC} = -\,\mathbf{ACB} = -\,\mathbf{CBA}.$$

Le produit **abc** est défini de la même manière :

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{ab})\mathbf{c},$$

et ce produit suit les mêmes règles de calcul. L'opération orthogonale est distributive par rapport à ces produits.

Le produit scalaire de deux vecteurs **A** et **B** est le produit de l'un par l'orthogonale de l'autre. C'est donc un nombre p défini par l'expression

$$p = \mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} = \mathrm{mod}\,\mathbf{A}\,\mathrm{mod}\,\mathbf{B}\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{B}\overline{\mathbf{A}}.$$

Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, l'angle $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est nul et l'on a

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} = \mathrm{mod}^2\mathbf{A}.$$

On convient d'écrire

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^2.$$

Le produit scalaire q de deux rotateurs est défini de la même manière :

$$q = \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\overline{\mathbf{a}} = \mathrm{mod}\,\mathbf{a}\,\mathrm{mod}\,\mathbf{b}\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

et l'on pose

$$\mathbf{a}\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^2 = \mathrm{mod}^2\mathbf{a}.$$

S'il s'agit de produits de plus de trois vecteurs, il est nécessaire de préciser comment les facteurs doivent être groupés. Ainsi, les produits

$$\mathbf{ABC.D}, \qquad \mathbf{AB.CD}, \qquad \mathbf{A.BCD}$$

désignent trois vecteurs généralement différents. La même observation s'applique aux produits formés, par exemple, de deux vecteurs et d'un rotateur. Ces produits composés suivent certaines règles de calcul contenues dans les formules ci-après :

$$\mathbf{AB}.\mathbf{u} = \mathbf{Au}.\mathbf{B} - \mathbf{Bu}.\mathbf{A}, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}.\mathbf{AB} = -\mathbf{u}\,\mathbf{A}.\mathbf{B} + \mathbf{uB}.\mathbf{A}, \tag{2}$$

$$\mathbf{uv}.\mathbf{A} = \mathbf{uA}.\mathbf{v} - \mathbf{vA}.\mathbf{u},$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{uv} = -\,\mathbf{Au}.\mathbf{v} + \mathbf{Av}.\mathbf{u}.$$

Si l'on développe le produit $\mathbf{AB}.\mathbf{CD}$ d'abord selon la formule (1), ensuite selon le formule (2), on trouve les deux expressions

$$\mathbf{AB}.\mathbf{CD} = \mathbf{ACD}.\mathbf{B} - \mathbf{BCD}.\mathbf{A},$$

$$\mathbf{AB}.\mathbf{CD} = -\,\mathbf{ABC}.\mathbf{D} + \mathbf{ABD}.\mathbf{C}.$$

Il en résulte que quatre vecteurs quelconques $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ sont liés par la relation

$$-\,\mathbf{BCD}.\mathbf{A} + \mathbf{CDA}.\mathbf{B} - \mathbf{DAB}.\mathbf{C} + \mathbf{ABC}.\mathbf{D} = 0.$$

Si les vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ne sont ni nuls ni coplanaires, on peut donc exprimer le vecteur $\mathbf{D}$, quel qu'il soit, sous la forme

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{DBC}}{\mathbf{ABC}}\mathbf{A} + \frac{\mathbf{DCA}}{\mathbf{BCA}}\mathbf{B} + \frac{\mathbf{DAB}}{\mathbf{CAB}}\mathbf{C}.$$

On appelle *système réciproque* du système $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ le système des trois vecteurs $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$, définis comme suit :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\overline{\mathbf{BC}}}{\mathbf{ABC}}; \qquad \mathbf{B}_0 = \frac{\overline{\mathbf{CA}}}{\mathbf{ABC}}; \qquad \mathbf{C}_0 = \frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\mathbf{ABC}}.$$

A l'aide de ce système, on peut exprimer le vecteur $\mathbf{D}$ sous l'une ou l'autre des formes :

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_0\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{A} + \mathbf{B}_0\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{B} + \mathbf{C}_0\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{C};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}\overline{\mathbf{D}}.\mathbf{C}_0. \tag{3}$$

Le seul système réciproque à lui-même est un système de trois vecteurs-unité parallèles chacun à l'une des arêtes d'un trièdre trirectangle. Si le trièdre a le sens positif, on désigne souvent ces vecteurs-unité par les symboles $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$.

U, **V**, **W** étant trois vecteurs-unité directement parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle de sens positif, et $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$ étant trois vecteurs quelconques satisfaisant aux relations

$$\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{L}_W\overline{\mathbf{V}}; \qquad \mathbf{L}_W\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{L}_U\overline{\mathbf{W}}; \qquad \mathbf{L}_U\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{L}_V\overline{\mathbf{U}},$$

on déduit de ce qui précède les formules suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{V}} + \mathbf{L}_V\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{W}} + \mathbf{L}_W\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{U}} \\ &\qquad - (\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{W}} + \mathbf{L}_V\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{V}} + \mathbf{L}_W\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{U}}) \\ &\qquad = \mathbf{L}_U\mathbf{L}_V\mathbf{L}_W; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{W}} + \mathbf{L}_W\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{U}} + \mathbf{L}_U\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{V}} - (\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{V}}.\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{W}} + \mathbf{L}_U\overline{\mathbf{W}}.\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{U}} \\ &\qquad + \mathbf{L}_V\overline{\mathbf{U}}.\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{V}}) = \mathbf{VWL}_U + \mathbf{WUL}_V + \mathbf{UVL}_W. \end{aligned}\right.$$

II. — Fonctions de point.

Soit φ un nombre, fonction de point dans une certaine région de l'espace et possédant en tous les points de cette région des dérivées continues et finies. Ce nombre définit une famille de surfaces de niveau, et la dérivée de φ a, en tout point P, sa plus grande valeur (positive) dans la direction de la normale à la surface de niveau, cette normale étant comptée comme positive dans le sens qui correspond à un accroissement de φ. Soit **N** le vecteur-unité directement parallèle à cette normale. Je désigne par $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}}$ la dérivée de φ dans la direction pointée de **N**, le symbole ∂ indiquant une différentiation dans une certaine direction.

La dérivée de φ dans la direction V d'un vecteur-unité **V** quelconque est alors donnée par l'expression

$$(1)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{V}} = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}}\cos(\mathbf{V},\mathbf{N}) = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}}\,\mathbf{V}\overline{\mathbf{N}}.$$

Le gradient du nombre φ est un vecteur **G** directement parallèle à **N** et dont le module est égal à $\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}}$:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{N}}\,\mathbf{N}.$$

Ce vecteur est, en général, une fonction de point ne dépendant que du nombre φ. On le désigne par le symbole

$$\mathbf{G} = \nabla\varphi,$$

∇ étant l'opérateur Hamiltonien d'un usage courant dans le calcul vectoriel. On définit généralement ce symbole par la relation

$$\nabla = \mathbf{I}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{K}\frac{\partial}{\partial z},$$

les points de l'espace étant rapportés à un système de coordonnées rectangulaires. A l'aide de ce symbole, la relation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial V} = \mathbf{V}\overline{\nabla\varphi}.$$

Il peut être utile d'exprimer l'opérateur ∇ à l'aide d'un système de coordonnées obliques. On y parvient comme suit : Soit **R** un vecteur de même mesure, direction et sens que le segment OP reliant l'origine des coordonnées O à un point variable P. **R** est le rayon vecteur du point P. Si les coordonnées sont rectangulaires, le vecteur **R** s'exprime comme suit :

$$\mathbf{R} = x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}.$$

Il est clair, d'après ce qui précède, que, **A** étant un vecteur quelconque, le symbole $\mathbf{A}\overline{\nabla\varphi}$ désigne la dérivée de φ dans la direction A de **A**, multipliée par mod **A** :

$$\operatorname{mod}\mathbf{A}.\frac{\partial\varphi}{\partial A} = \mathbf{A}\overline{\nabla\varphi}.$$

On exprime la même quantité sous la forme $(\mathbf{A}\overline{\nabla})\varphi$, le symbole $\mathbf{A}\overline{\nabla}$ désignant une différentiation dans la direction pointée de **A**, suivie d'une multiplication par mod **A**.

Supposons maintenant le rayon vecteur **R** défini à l'aide de trois vecteurs de référence quelconques, non coplanaires, **A**, **B**, **C** :

$$\mathbf{R} = \xi\mathbf{A} + \eta\mathbf{B} + \zeta\mathbf{C}. \tag{2}$$

Le nombre φ peut être considéré comme fonction des trois variables indépendantes ξ, η, ζ. Soient alors P_1 et P_2 deux points, $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ leurs rayons vecteurs définis par les expressions

$$\mathbf{R}_1 = \xi_1 \mathbf{A} + \eta_1 \mathbf{B} + \zeta_1 \mathbf{C},$$
$$\mathbf{R}_2 = \xi_2 \mathbf{A} + \eta_1 \mathbf{B} + \zeta_1 \mathbf{C}.$$

Supposons $\xi_2 > \xi_1$ et désignons par φ_1 et φ_2 les valeurs de φ aux points P_1 et P_2. Le vecteur $\mathbf{P}$ du segment $P_1 P_2$ est donné par l'expression

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = (\xi_2 - \xi_1)\,\mathbf{A}.$$

On a donc

$$\operatorname{mod} \mathbf{P} = (\xi_2 - \xi_1) \operatorname{mod} \mathbf{A}.$$

L'accroissement moyen de φ par unité de longueur dans la direction du vecteur $\mathbf{A}$ est égal à

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\xi_2 - \xi_1}\, \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{A}}.$$

Il en résulte que la dérivée $\frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{A}}$ s'exprime comme suit :

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{A}} = \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{A}}\, \frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \operatorname{mod} \mathbf{A}\, \frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{A}} = \mathbf{A}\overline{\nabla\varphi}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \mathbf{B}\overline{\nabla\varphi}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \mathbf{C}\overline{\nabla\varphi}.$$

D'après la formule (3, § I), le gradient de φ peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\nabla\varphi = \mathbf{A}\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{B}_0 + \mathbf{C}\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{C}_0,$$

ou bien, en vertu des relations précédentes,

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\mathbf{A}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\mathbf{B}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\mathbf{C}_0.$$

L'opérateur ∇ prend donc la forme

$$\nabla = \mathbf{A}_0\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathbf{B}_0\frac{\partial}{\partial\eta} + \mathbf{C}_0\frac{\partial}{\partial\zeta}. \tag{3}$$

Il y a encore intérêt à exprimer ∇ à l'aide des dérivées prises dans trois directions. Soit donc $\mathbf{O}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ un système de trois vecteurs-unité, non coplanaires, fixes ou variables. Désignons par $\mathbf{O}_0$, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_0$ le système réciproque du premier. Nous trouvons alors l'expression suivante :

$$\nabla\varphi = \mathbf{O}\,\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{O}_0 + \mathbf{P}\,\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}\,\overline{\nabla\varphi}.\mathbf{Q}_0 = \mathbf{O}_0\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{O}} + \mathbf{P}_0\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}} + \mathbf{Q}_0\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Q}}.$$

Si, en particulier, le système $\mathbf{O}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ est réciproque à lui-même, le symbole ∇ prend évidemment la forme

$$\nabla = \mathbf{O}\frac{\partial}{\partial \mathrm{O}} + \mathbf{P}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}} + \mathbf{Q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}}. \tag{4}$$

Ce même symbole permet d'exprimer la dérivée (prise dans une certaine direction) d'un vecteur, fonction de point. Soit $\mathbf{V}$ un vecteur fonction de point. Sa dérivée dans la direction U d'un vecteur-unité $\mathbf{U}$ est donnée par l'expression

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathrm{U}} = (\mathbf{U}\overline{\nabla})\mathbf{V}.$$

Supposons le vecteur $\mathbf{V}$ défini comme suit :

$$\mathbf{V} = v_x\mathbf{I} + v_y\mathbf{J} + v_z\mathbf{K}.$$

La divergence de $\mathbf{V}$ est donnée habituellement sous la forme

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

En employant l'opérateur ∇, on écrit

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \nabla\overline{\mathbf{V}} = \overline{\nabla}\mathbf{V}.$$

Si les points de l'espace sont définis par un rayon vecteur donné sous la forme (2) et le vecteur $\mathbf{V}$ par l'expression

$$\mathbf{V} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B} + r\mathbf{C},$$

il suffit d'appliquer l'expression (3) de ∇ pour voir que

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \nabla\overline{\mathbf{V}} = \frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{\partial q}{\partial\eta} + \frac{\partial r}{\partial\zeta}.$$

Enfin, la formule (4) permet encore d'écrire

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \overline{\mathbf{O}}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathrm{O}} + \overline{\mathbf{P}}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathrm{P}} + \overline{\mathbf{Q}}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathrm{Q}}.$$

Dans le cas où le vecteur **V** est le gradient d'un nombre φ, la divergence de **V** peut s'écrire comme suit :

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \overline{\nabla}\,\mathbf{V} = \overline{\nabla}.\nabla\varphi = (\nabla\overline{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi.$$

Si φ est défini à l'aide de coordonnées rectangulaires, cette expression prend la forme

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Le curl d'un vecteur **V** est défini habituellement comme suit :

$$\operatorname{curl}\mathbf{V} = \overline{\overline{\nabla}\mathbf{V}} = \mathbf{I}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \mathbf{J}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \mathbf{K}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Si l'on applique la formule (4), l'expression du curl prend la forme

$$\operatorname{curl}\mathbf{V} = \overline{\mathbf{O}\frac{\partial\mathbf{V}}{\delta\mathrm{O}}} + \overline{\mathbf{P}\frac{\partial\mathbf{V}}{\delta\mathrm{P}}} + \overline{\mathbf{Q}\frac{\partial\mathbf{V}}{\delta\mathrm{Q}}}.$$

En ce qui concerne les règles de calcul applicables à l'opérateur ∇, il suffit de remarquer que cet opérateur peut être traité comme un vecteur ordinaire sous les réserves suivantes :

1° En raison des opérations différentielles symbolisées par ∇, il n'est pas permis de changer, dans un produit, l'ordre des facteurs relativement à ∇, du moins en ce qui concerne les facteurs variables sur lesquels doivent porter les opérations de différentiation.

2° Si ∇ s'applique à une fonction de plusieurs grandeurs variables, on peut subdiviser l'opération symbolisée par ∇ en une somme de plusieurs autres opérations dans chacune desquelles ∇ ne s'applique qu'à une seule des grandeurs variables. Je désignerai par $\nabla_{(\varphi)}$ ou $\nabla_{(\mathrm{A})}$ un opérateur ne s'appliquant qu'au nombre φ ou au vecteur **A** (ainsi qu'aux fonctions de ces grandeurs).

III. — Dérivées d'ordre supérieur.

Afin de développer quelques formules relatives aux dérivées du second ordre d'un nombre ou d'un vecteur, fonctions de points, j'envisage d'abord un nombre φ et deux vecteurs-unité **U** et **V**. Ces grandeurs sont supposées continues et ayant des dérivées continues et finies en tous les points de la région. Il est clair, par exemple, que la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{U}}$, qui est fonction de φ et de $\mathbf{U}$, est aussi une fonction de point. Je désigne par

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{V}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{U}}\right)$$

la dérivée de $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{U}}$ dans la direction V. Ce nombre diffère, en général, du nombre

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{V}\, \partial \mathrm{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{U}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{V}}\right).$$

La dérivée $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} = \mathbf{V}\overline{\nabla}[(\mathbf{U}\overline{\nabla})\varphi].$$

Le symbole $\mathbf{V}\overline{\nabla}$ doit être appliqué aussi bien au vecteur $\mathbf{U}$ qu'au nombre φ. On peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} = \mathbf{V}\overline{\nabla}_{(\varphi)}[(\mathbf{U}\overline{\nabla})\varphi] + \mathbf{V}\overline{\nabla}_{(\mathrm{U})}[(\mathbf{U}\overline{\nabla})\varphi]$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} = (\mathbf{V}\overline{\nabla}_{(\varphi)})(\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(\varphi)})\varphi + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{V}}\overline{\nabla}\right)\varphi. \tag{1}$$

Le premier terme du second membre représente deux différentiations faites successivement dans les deux directions U et V supposées constantes. Je désigne ce terme par φ''_{UV}. Le second terme représente la dérivée de φ, prise dans la direction du vecteur $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{V}}$, multipliée par le module de ce dernier vecteur. On a ainsi la relation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{U}\, \partial \mathrm{V}} = \varphi''_{\mathrm{UV}} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathrm{V}}\overline{\nabla}\right)\varphi.$$

En changeant l'ordre des différentiations, on obtient de même

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{V}\, \partial \mathrm{U}} = \varphi''_{\mathrm{VU}} + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathrm{U}}\overline{\nabla}\right)\varphi.$$

Il est évident que, dans le terme φ''_{UV}, l'ordre des différentiations est indifférent, puisque les directions U et V sont considérées comme constantes. On a, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{U}\, \partial \mathbf{V}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{V}\, \partial \mathbf{U}} = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\overline{\nabla}\right)\varphi - \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}}\overline{\nabla}\right)\varphi = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}}\right)\overline{\nabla\varphi}.$$

Ainsi, les deux dérivées secondes qui figurent au premier membre sont égales si le vecteur $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}}$ est nul ou bien s'il est perpendiculaire à $\nabla\varphi$, c'est-à-dire parallèle au plan tangent à la surface de niveau, ce qui n'est pas le cas en général.

Posons maintenant dans la formule (1)

$$\mathbf{V} = \mathbf{U},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{U}^2} = (\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(\varphi)})(\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(\varphi)})\varphi + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}\overline{\nabla}\right)\varphi.$$

A l'aide de la notation

$$(\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(\varphi)})(\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(\varphi)})\varphi = (\mathbf{U}\overline{\nabla})^2\varphi,$$

on peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{U}^2} = (\mathbf{U}\overline{\nabla})^2\varphi + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}\overline{\nabla\varphi}.$$

Le premier terme du second membre désigne une différentiation, répétée deux fois, dans la direction U supposée constante. Quant au second terme, il s'annule si $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}$ est nul (c'est-à-dire si **U** est constant dans sa direction) ou bien si ce vecteur est parallèle au plan tangent à la surface de niveau. La dérivée $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}$ est toujours perpendiculaire au vecteur unité **U**, ce qui nous permet de remarquer, en passant, que $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}$ est certainement parallèle au plan tangent, si **U** est égal au vecteur **N**, directement parallèle à la normale à la surface de niveau. On a donc toujours

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{N}^2} = (\mathbf{N}\overline{\nabla})^2\varphi.$$

Des observations analogues s'appliquent aux dérivées d'un vecteur **S**, fonction de point. On peut écrire

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}\, \partial \mathbf{V}} = \mathbf{V}\overline{\nabla}\left[(\mathbf{U}\overline{\nabla})\mathbf{S}\right] = (\mathbf{V}\overline{\nabla}_{(S)})(\mathbf{U}\overline{\nabla}_{(S)})\mathbf{S} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\overline{\nabla}\right)\mathbf{S} = \mathbf{S}''_{UV} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}\overline{\nabla}\right)\mathbf{S}.$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{V}\, \partial \mathbf{U}} = \mathbf{S}''_{VU} + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}}\overline{\nabla}\right)\mathbf{S}.$$

Mais

$$\mathbf{S}''_{UV} = \mathbf{S}''_{VU},$$

et par conséquent

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}\, \partial \mathbf{V}} - \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{V}\, \partial \mathbf{U}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}}\right)\overline{\nabla}\right]\mathbf{S}.$$

Dans le cas où le vecteur **S** n'a de dérivée nulle dans aucune direction, le second membre de cette relation ne peut s'annuler que si

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}} = 0.$$

Dans le cas contraire, ledit membre s'annule encore si le vecteur **L** est parallèle à une direction d'invariabilité de **S**.

En posant

$$\mathbf{V} = \mathbf{U},$$

on déduit de la relation (2)

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{U}^2} = \mathbf{U}\overline{\nabla}\left[(\mathbf{U}\overline{\nabla})\mathbf{S}\right] = (\mathbf{U}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}}\overline{\nabla}\right)\mathbf{S}.$$

Soient **O**, **P**, **Q** trois vecteurs-unité directement parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle de sens positif. Formons la somme

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} + (\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} + (\mathbf{Q}\overline{\nabla})^2\mathbf{S}.$$

On peut écrire cette somme comme suit :

$$\mathbf{Z} = \left[\mathbf{O}(\mathbf{O}\overline{\nabla})\overline{\nabla} + \mathbf{P}(\mathbf{P}\overline{\nabla})\overline{\nabla} + \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\overline{\nabla})\overline{\nabla}\right]\mathbf{S},$$

ou bien

$$\mathbf{Z} = \left\{\left[\mathbf{O}(\mathbf{O}\overline{\nabla}) + \mathbf{P}(\mathbf{P}\overline{\nabla}) + \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\overline{\nabla})\right]\overline{\nabla}\right\}\mathbf{S}$$

et, d'après la formule [(3), § I],

$$(5) \qquad (\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} + (\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} + (\mathbf{Q}\overline{\nabla})^2\mathbf{S} = (\nabla\overline{\nabla})\mathbf{S} = \nabla^2\mathbf{S}.$$

Le symbole $\nabla^2\mathbf{S}$ représente ainsi (comme pour les nombres) la somme de trois dérivées de la forme $(\mathbf{O}\bar{\nabla})^2\mathbf{S}$ prises dans trois directions trirectangles, chacune de ces dérivées étant obtenue par deux différentiations successives dans la même direction supposée constante.

IV. — Application à la théorie des courbes gauches.

Pour les applications à la théorie des courbes gauches, je me servirai des notations adoptées par M. Burali-Forti dans son Ouvrage *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*. Je désignerai ainsi par **T**, **N**, **B** trois vecteurs-unité parallèles respectivement à la tangente, à la normale principale et à la binormale d'une courbe et ayant chacun le même sens que la droite correspondante. Pour abréger, j'appellerai ces vecteurs le *tangent*, le *normal principal* et le *binormal* de la courbe. Les rayons de courbure et de torsion seront désignés par ρ et τ respectivement, l'arc de la courbe par s.

On sait que la vitesse instantanée du trièdre principal relatif à une courbe se compose d'une vitesse de translation dans le sens de la tangente (vitesse dont la mesure peut être prise pour unité), d'une vitesse de rotation autour de la binormale $\left(\text{la mesure de cette vitesse est alors égale à } \frac{1}{\rho}\right)$ et d'une vitesse de rotation autour de la tangente $\left(\text{cette vitesse a pour mesure } -\frac{1}{\tau}\right)$.

A côté de ce trièdre principal, je vais considérer un trièdre secondaire dont la première arête coïncide avec la normale principale, la troisième avec la droite rectifiante, la seconde arête étant perpendiculaire aux deux autres. Ce trièdre secondaire ayant également le sens positif, il suffit de fixer le sens de la droite rectifiante pour que les trois axes soient parfaitement définis. Je fixe le sens sur la droite rectifiante de telle sorte que cette droite forme un angle aigu avec la binormale positive. Quant à la seconde arête du trièdre secondaire, elle se trouve dans le plan rectifiant; le plan rectifiant — et, par conséquent, l'un et l'autre trièdre — a une rotation nulle autour de cette droite, qui est perpendiculaire à la droite rectifiante, axe instantané de rotation dudit plan. J'appellerai donc cette droite la *droite irrotationnelle* de la courbe.

Je désigne par **E** et **F** deux vecteurs-unité directement parallèles à la droite irrotationnelle et à la droite rectifiante respectivement. Soit θ l'angle formé par la droite rectifiante et la tangente. Cet angle, compté à partir de la droite rectifiante dans le sens positif du plan rectifiant, est compris entre o et π. On a alors les relations suivantes qui permettent de passer d'un trièdre à l'autre :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathbf{T}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{T}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta, \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} \mathbf{T} &= -\mathbf{E}\sin\theta + \mathbf{F}\cos\theta, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{F}\sin\theta. \end{aligned}$$

Je désigne enfin par $\frac{1}{R}$ le nombre, toujours positif, qui mesure la courbure totale de la courbe :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}.$$

L'angle θ satisfait aux relations

$$\sin\theta = \frac{R}{\rho}, \qquad \cos\theta = -\frac{R}{\tau}, \qquad \operatorname{tang}\theta = -\frac{\tau}{\rho}.$$

Il est aisé de voir que la vitesse instantanée du trièdre secondaire se compose d'une vitesse de translation égale à celle du trièdre principal, d'une vitesse de rotation de la mesure $\frac{1}{R}$ autour de la droite rectifiante et d'une vitesse de rotation de la mesure $-\frac{d\theta}{ds}$ autour de la normale principale. Si l'on pose, pour plus de symétrie,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T},$$

on en conclut, d'après la méthode exposée par Darboux, que les vecteurs qui caractérisent le trièdre secondaire satisfont aux relations

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{E}; \qquad \frac{d\mathbf{E}}{ds} = -\frac{1}{R}\mathbf{N} - \frac{1}{T}\mathbf{F}; \qquad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{1}{T}\mathbf{E}.$$

Comme on le voit, ces formules sont entièrement analogues aux formules de Frenet.

Par la considération du trièdre secondaire, on réalise une simplification notable dans beaucoup de problèmes relatifs aux courbes gauches. Ainsi, la plupart des courbes qu'on étudie habituellement dans leurs rapports avec une courbe donnée — développées et développantes, lieu des centres des sphères osculatrices, arête de rebroussement de la surface rectifiante, lignes géodésiques de la surface rectifiante, de la surface polaire, etc., — présentent cette particularité qu'un de leurs trièdres reste constamment parallèle à un des deux trièdres relatifs à la courbe donnée. Le parallélisme de deux axes de rotation permet de conclure à l'égalité des vitesses de rotation correspondantes ; on déduit ainsi immédiatement deux ou plusieurs relations entre les courbures des deux courbes envisagées.

Je me propose de montrer par quelques exemples les avantages de cette méthode. En employant les notations ci-dessus mentionnées, je désignerai par des indices ce qui se rapporte à l'une ou à l'autre des courbes envisagées. Il y a lieu de remarquer que, si l'on choisit comme unité la vitesse de translation du trièdre principal d'une courbe C_1, la vitesse de translation relative à une seconde courbe C_2 aura pour mesure $\frac{ds_2}{ds_1}$, et les différentes vitesses de rotation relatives à la courbe C_2 se trouveront multipliées par ce même facteur.

Comme premier exemple, je vais traiter le problème classique résolu par Bertrand : Déterminer une courbe C_1 dont la normale principale soit en même temps la normale principale d'une seconde courbe C_2. Soient P_1 et P_2 les deux points qui décrivent les courbes C_1 et C_2, $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ les rayons vecteurs de ces points rapportés à une origine arbitraire. On a alors la relation

$$(1)\qquad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + a\mathbf{N}_1,$$

le nombre a désignant la longueur du segment P_1P_2, mesurée dans le sens de la normale principale de C_1. En différentiant cette relation par rapport à l'arc s_1 de la courbe C_1, on trouve

$$(2)\qquad \mathbf{T}_2\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{da}{ds_1}\mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1\left(1 - \frac{a}{\rho_1}\right) - \mathbf{B}_1\frac{a}{\tau_1}.$$

$\mathbf{T}_2$ doit être perpendiculaire à $\mathbf{N}_1$, ce qui exige que le nombre a soit constant. $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{B}_1$ sont alors coplanaires et l'on peut écrire

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{B}_1 \cos\varphi + \mathbf{T}_1 \sin\varphi, \tag{3}$$

en désignant par φ l'angle $(\mathbf{B}_1, \mathbf{T}_2)$.

Pour que la normale principale de C_2 coïncide avec celle de C_1, il faut et il suffit que la dérivée de $\mathbf{T}_2$ soit parallèle à $\mathbf{N}_1$, ou bien, d'après la relation (3), que l'angle φ soit constant. Cette condition est équivalente à la suivante : le rapport entre les coefficients des vecteurs $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{B}_1$ figurant dans la relation (2) doit être constant. On trouve ainsi comme condition la relation linéaire bien connue entre la courbure et torsion de la courbe C_1.

Pour déterminer les relations qui existent entre les éléments des courbes C_1 et C_2, on peut procéder comme suit. La coïncidence des normales principales entraîne le parallélisme des deux plans rectifiants, d'où l'on conclut au parallélisme des axes instantanés de rotation de ces plans, c'est-à-dire des droites rectifiantes des deux courbes. Ces deux droites ont nécessairement le même sens, puisque la vitesse de rotation autour de chacune d'elles est positive. On a donc la relation

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1. \tag{4}$$

En désignant par ε l'unité positive ou négative selon que les normales principales de C_1 et de C_2 ont même sens ou des sens opposés, on a, en outre,

$$\mathbf{N}_2 = \varepsilon \mathbf{N}_1 \tag{5}$$

et, de ces deux relations, on déduit

$$\mathbf{E}_2 = \varepsilon \mathbf{E}_1. \tag{6}$$

Soit par une différentiation des formules (4) et (5), soit en remarquant que les vitesses de rotation autour des axes parallèles sont égales, on déduit les deux formules

$$\begin{aligned} d\theta_2 &= \varepsilon\, d\theta_1; \\ \frac{ds_2}{R_2} &= \frac{ds_1}{R_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Le nombre a étant constant, le résultat de la différentiation de l'équation (1) peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathbf{T}_2 \frac{ds_2}{ds_1} = \mathbf{T}_1 + \frac{a}{R_1} \mathbf{E}_1.$$

En multipliant successivement les termes de cette relation par $\varepsilon \overline{\mathbf{E}_2}$ et par $\overline{\mathbf{F}_2}$ et en tenant compte des relations (4) et (6), on déduit

$$-\varepsilon \sin\theta_2 \frac{ds_2}{ds_1} = -\sin\theta_1 + \frac{a}{R_1},$$

$$\cos\theta_2 \frac{ds_2}{ds_1} = \cos\theta_1.$$

Si, en vertu de (7), on remplace dans ces relations $\frac{ds_2}{ds_1}$ par $\frac{R_2}{R_1}$, on peut écrire le système suivant, qui est symétrique par rapport aux deux courbes et qui contient toutes les relations qui relient leurs différents éléments :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds_1}{R_1} &= \frac{ds_2}{R_2}, \\ d\theta_1 &= \varepsilon\, d\theta_2, \\ R_1 \cos\theta_1 &= R_2 \cos\theta_2, \\ R_1 \sin\theta_1 - \varepsilon R_2 \sin\theta_2 &= a. \end{aligned} \right.$$

De ces relations on pourrait d'ailleurs déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les éléments de C_1 en éliminant les quantités R_2, θ_2 et $\frac{ds_2}{ds_1}$.

On peut remarquer que les quatre équations (8) ont une signification géométrique très simple, qui permettrait de les établir *a priori*, sans calcul, comme condition du problème. En passant des éléments R et θ aux éléments ρ et τ, on trouve, en effet,

$$R_1 \sin\theta_1 = \frac{R_1^2}{\rho_1} = \frac{\frac{1}{\rho_1}}{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2}} = \frac{\rho_1 \tau_1^2}{\rho_1^2 + \tau_1^2}.$$

Cette quantité est égale, on le sait, à la distance entre le point P_1 et le point central de la normale principale. De même

$$R_1 \cos\theta_1 = -\frac{R_1^2}{\tau_1} = -\frac{\rho_1^2 \tau_1}{\rho_1^2 + \tau_1^2}.$$

Changée de signe, cette expression est égale au paramètre de distribution de la surface des normales principales.

La première des équations (8) exprime que les vitesses de rotation autour des droites rectifiantes des courbes C_1 et C_2 sont égales, ou encore que l'angle élémentaire formé par deux normales principales, infiniment voisines, de C est égal au même angle relatif à C_2. La seconde équation indique que les vitesses de rotation autour de la normale principale commune sont égales, ou encore que l'angle formé par les deux tangentes de C_1 et de C_2 reste constant tout le long des courbes. La troisième exprime que le paramètre de distribution de la surface des normales principales est le même, qu'il soit évalué à l'aide des éléments de l'une ou de l'autre courbe. Enfin, la quatrième équation indique que la différence algébrique entre les distances de chacun des points P_1 et P_2 au point central de la normale principale est constante et égale à la longueur du segment P_1P_2.

La seconde des relations (8) peut s'écrire

$$\theta_2 = \varepsilon\theta_1 + \varkappa, \tag{9}$$

$\varkappa$ désignant l'angle constant formé par les tangentes.

Du système (8) on déduirait très aisément toutes les formules classiques de la théorie des courbes de Bertrand. Je me borne à en signaler une que je crois nouvelle. Si des deux dernières équations (8), jointes à l'équation (9), on élimine les angles θ_1 et θ_2, on trouve

$$R_1^2 + R_2^2 - 2\,R_1R_2\cos\varkappa = a^2.$$

De cette formule on peut déduire une construction géométrique très simple du rayon de courbure totale R_2, les quantités R_1, $\varkappa$ et a étant supposées connues.

La méthode exposée ci-dessus permettrait de résoudre aisément le problème suivant : Trouver une courbe C_1 telle que les axes centraux de C_1 soient les normales principales d'une seconde courbe C_2. On peut remarquer que l'axe central coïncide avec la droite de plus courte distance entre deux normales principales infiniment voisines et que, réciproquement, la normale principale est la droite de plus courte distance entre deux axes centraux infiniment voisins. Il en résulte que la normale principale de la courbe C_1 est aussi axe central de C_2. Le paramètre de distribution de la surface des axes centraux d'une courbe gauche peut être exprimé sous la forme

$$\frac{d(\mathrm{R}\sin\theta)}{d\theta}.$$

Il suffit alors de remarquer que, l'axe central étant parallèle à la droite rectifiante, la vitesse de rotation autour de la normale principale de chacune des courbes est égale à la vitesse de rotation autour de la droite rectifiante de l'autre. En exprimant cette égalité et en évaluant, à l'aide des éléments de l'une et de l'autre courbe, le paramètre de distribution de la surface des axes centraux et celui de la surface des normales principales, on trouve le système suivant dans lequel ε_1 et ε_2 désignent l'unité positive ou négative :

$$\frac{ds_2}{\mathrm{R}_2} = -\varepsilon_1 d\theta_1; \qquad \frac{ds_1}{\mathrm{R}_1} = -\varepsilon_2 d\theta_2,$$

$$\frac{d}{d\theta_2}(\mathrm{R}_2\sin\theta_2) = -\mathrm{R}_1\cos\theta_1,$$

$$\frac{d}{d\theta_1}(\mathrm{R}_1\sin\theta_1) = -\mathrm{R}_2\cos\theta_2.$$

En éliminant les éléments de l'une des courbes, on trouve notamment que la courbe cherchée doit satisfaire à la condition suivante :

$$\frac{d(\mathrm{R}\sin\theta)}{d\theta} = \left(c - \int\cos\theta\,ds\right)\cot\left(\varkappa - \varepsilon\int\frac{ds}{\mathrm{R}}\right),$$

c et $\varkappa$ désignant deux constantes d'intégration [1].

Je vais étudier maintenant le problème suivant : le point de rebroussement du plan de la courbure totale peut-il se trouver sur la droite irrotationnelle ?

On sait que le plan de la courbure totale est perpendiculaire à la droite rectifiante; il contient donc la normale principale et la droite irrotationnelle. Sa droite caractéristique (qui est l'axe instantané de rotation de ce plan) est parallèle à la normale principale, la rotation autour de la droite irrotationnelle étant nulle. Il s'agit donc de

(1) Il serait aisé de démontrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Je laisse de côté cette démonstration, le problème présentant bien peu d'intérêt.

trouver, sur la droite irrotationnelle, un point décrivant une courbe dont la tangente soit parallèle à la normale principale de la courbe donnée.

Le rayon vecteur d'un point situé sur la droite irrotationnelle, à la distance z du point P_1, est défini par l'expression

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + z\,\mathbf{E}_1.$$

On en déduit, par une différentiation,

$$\mathbf{T}_2 \frac{ds_2}{ds_1} = \mathbf{T}_1 + \frac{dz}{ds_1}\mathbf{E}_1 - \frac{z}{\mathrm{R}_1}\mathbf{N}_1 - z\frac{d\theta_1}{ds_1}\mathbf{F}_1. \tag{10}$$

Les points situés sur la droite caractéristique du plan de la courbure totale ont leurs tangentes parallèles à ce plan. Le point d'intersection de cette droite caractéristique et de la droite irrotationnelle est donc défini par la condition

$$\mathbf{T}_2\overline{\mathbf{F}_1} = 0.$$

En multipliant par $\overline{\mathbf{F}_1}$ les termes de l'équation (10), on déduit ainsi

$$0 = \cos\theta_1 - z\frac{d\theta_1}{ds_1}, \tag{11}$$

ce qui donne pour la distance z la valeur

$$z = \mathrm{T}_1 \cos\theta_1. \tag{12}$$

Si le tangent $\mathbf{T}_2$ est parallèle au normal principal $\mathbf{N}_1$ on doit avoir, en outre,

$$\mathbf{T}_2\overline{\mathbf{E}_1} = 0.$$

Multipliant les termes de l'équation (10) par $\overline{\mathbf{E}_1}$, on déduit

$$0 = -\sin\theta_1 + \frac{dz}{ds_1}.$$

La condition cherchée peut donc s'écrire sous la forme

$$\sin\theta_1 = \frac{d}{ds_1}(\mathrm{T}_1\cos\theta_1)$$

ou bien

$$\mathrm{T}_1\sin\theta_1 = \frac{d}{d\theta_1}(\mathrm{T}_1\cos\theta_1),$$

soit encore

$$2\mathbf{T}_1 \sin\theta_1 = \cos\theta_1 \frac{d\mathbf{T}_1}{d\theta_1};$$

on en déduit, par une intégration,

$$\frac{1}{\mathbf{T}_1} = a \cos^2\theta_1,$$

et, par une seconde intégration, on trouve finalement

$$\operatorname{tang}\theta_1 = -\frac{\tau_1}{\rho_1} = as_1 + b,$$

a et b désignant des constantes.

Si l'on tient compte des relations (11) et (12), l'équation (10) prend la forme

$$\mathbf{T}_2 \frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{z}{\mathbf{R}_1}\mathbf{N}_1 = -\cos\theta_1 \frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{R}_1}\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{T}_1}{\tau_1}\mathbf{N}_1.$$

Il résulte de cette relation que $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{N}_1$ ont même sens ou des sens opposés selon que z est négatif ou positif. En désignant par ε l'unité positive ou négative, on peut écrire

$$(13) \qquad \mathbf{T}_2 = \varepsilon \mathbf{N}_1, \qquad \frac{ds_2}{ds_1} = \varepsilon \frac{\mathbf{T}_1}{\tau_1}.$$

Le tangent $\mathbf{T}_2$ étant parallèle au normal principal $\mathbf{N}_1$, le plan normal de C_2 est parallèle au plan rectifiant de C_1 et coïncide donc avec ce plan. La droite rectifiante de C_1 coïncide ainsi avec la droite polaire de C_2, la courbe C_1 est le lieu des centres de courbure de C_2 et la droite irrotationnelle de C_1 est en même temps normale principale de C_2.

Le trièdre principal de C_2 étant parallèle au trièdre secondaire de C_1, l'égalité des vitesses de rotation autour des axes parallèles permet d'écrire

$$\frac{ds_2}{\rho_2} = \frac{ds_1}{\mathbf{R}_1}, \qquad \frac{ds_2}{\tau_2} = \varepsilon\, d\theta_1.$$

En vertu de la formule (13), ces relations peuvent s'écrire

$$\rho_2 = \varepsilon \frac{\mathbf{R}_1}{\tau_1}\mathbf{T}_1 = -\varepsilon \mathbf{T}_1 \cos\theta_1 = -\varepsilon z, \qquad \frac{1}{\tau_2}\frac{1}{\tau_1}\mathbf{T}_1 = \frac{d\theta_1}{ds_1} = \frac{1}{\mathbf{T}_1}$$

ou bien

$$\rho_2 = -\frac{\varepsilon}{a}\sqrt{1+(as_1+b)^2}, \qquad \frac{1}{\tau_1\tau_2} = \left(\frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right)^2 = \frac{a^2}{[1+(as_1+b)^2]^2}.$$

Comme dernier exemple, je vais déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les éléments d'une courbe C_1 pour que la ligne de striction de la surface engendrée par les normales principales de C_1 soit en même temps une ligne asymptotique de cette surface.

On sait que le plan tangent à la surface des normales principales au point central P_2 de la génératrice est le plan central de la courbe, lequel est perpendiculaire à la droite irrotationnelle. La tangente de la courbe C_2, ligne de striction de la surface envisagée, est donc perpendiculaire à la droite irrotationnelle de C_1; C_2 est une ligne asymptotique si sa normale principale est contenue dans le plan tangent à la surface, c'est-à-dire si cette normale principale est perpendiculaire elle aussi à la droite irrotationnelle de C_1.

En désignant pour le moment par q la distance entre le point P_1 et le point P_2, nous pouvons écrire comme suit le rayon vecteur de P_2 :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + q\mathbf{N}_1.$$

Une différentiation nous donne

$$\mathbf{T}_2\frac{ds_2}{ds_1} = \mathbf{T}_1 + \frac{dq}{ds_1}\mathbf{N}_1 + \frac{q}{\mathrm{R}_1}\mathbf{E}_1$$

et une seconde différentiation

$$\mathbf{T}_2\frac{d^2s_2}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2\mathbf{N}_2 = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{d^2q}{ds_1^2}\right)\mathbf{N}_1 + \left(\frac{2}{\mathrm{R}_1}\frac{dq}{ds_1} - \frac{q}{\mathrm{R}_1^2}\frac{d\mathrm{R}_1}{ds_1}\right)\mathbf{E}_1$$
$$- \frac{q}{\mathrm{R}_1}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1}\mathbf{N}_1 + \frac{1}{\mathrm{T}_1}\mathbf{F}_1\right).$$

Si nous remarquons que les vecteurs $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{F}_1$ sont tous les trois perpendiculaires à $\mathbf{E}_1$, nous trouvons, en multipliant les termes de cette dernière équation par $\overline{\mathbf{E}_1}$,

$$\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2\mathbf{N}_2\overline{\mathbf{E}_1} = \frac{2}{\mathrm{R}_1}\frac{dq}{ds_1} - \frac{q}{\mathrm{R}_1^2}\frac{d\mathrm{R}_1}{ds_1}.$$

La normale principale de C_2 est perpendiculaire à la droite irrotationnelle de C_1, si le second membre de cette équation est nul. En intégrant l'équation différentielle ainsi formée et en désignant par a^2 une constante d'intégration (nécessairement positive), nous trouvons

$$q^2 = a^2 R_1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne de striction de la surface des normales principales soit en même temps une ligne asymptotique sur cette surface est donc que la distance entre le point P_1 et le point central de la normale principale soit proportionnelle à la racine carrée du rayon de courbure totale de la courbe.

En substituant à q sa valeur $R_1 \sin \theta_1$, on trouve que cette condition peut encore s'exprimer sous la forme suivante :

$$R_1 \sin^2 \theta_1 = a^2,$$

et, si l'on passe aux éléments ρ et τ, on déduit

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} = \left(\frac{1}{a\rho}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{14}$$

On peut comparer cette équation à l'équation caractéristique, donnée par Mannheim, des courbes dont la normale principale est la binormale d'une seconde courbe. Ces deux équations ne diffèrent que par l'exposant du second membre de l'équation (14), lequel, dans le cas des courbes de Mannheim, est égal à l'unité.

Dans le cas qui nous occupe, la ligne de striction jouit d'une propriété curieuse. On sait, en effet, que la droite caractéristique du plan central passe par le point central de la normale principale et par le point de rebroussement de la droite rectifiante. Ce plan central coïncide, dans notre cas, avec le plan osculateur de la courbe C_2. Sa droite caractéristique est donc la tangente de la courbe C_2 et le point P_2 est, par conséquent, le point de rebroussement de ladite droite caractéristique. Si l'on appelle courbe rectifiante d'une courbe C quelconque l'arête de rebroussement sur la surface rectifiante de C, on voit, d'autre part, que le plan central de la courbe C est en même temps le plan rectifiant de la courbe rectifiante C' de C, et l'arête de rebroussement de la surface, enveloppe des plans centraux, est donc la courbe rectifiante de C'. Il s'ensuit que, dans le cas étudié, la ligne de striction C_2 de la surface des normales principales de C_1 est aussi la courbe rectifiante de C', courbe rectifiante elle-même de la courbe donnée C_1.

V. — Application à la théorie des surfaces réglées.

Il est facile de développer la théorie des surfaces réglées à l'aide des méthodes du calcul vectoriel. Je vais me borner à déduire certaines propositions élémentaires dont je ferai ensuite quelques applications.

Soient P un point variable et **R** son rayon vecteur. Si **R** est fonction de deux variables indépendantes u et v, le point P décrit une surface lorsque u et v varient. Le plan tangent à cette surface est parallèle au rotateur $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$. Ceci rappelé, je désigne par **P** un rayon vecteur fonction d'une seule variable. Quand **P** varie, le point P décrit une certaine courbe C dans l'espace. Je suppose qu'en chaque point de cette courbe se trouve défini un vecteur unité **Q**. Envisageons un point L défini par le rayon vecteur

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} + t\mathbf{Q},$$

t désignant un nombre variable. Admettons pour plus de simplicité que **P** et **Q** soient fonctions de l'arc s de la directrice C. Lorsque s et t varient, le point L décrit une surface réglée. Le plan tangent à cette surface est parallèle au rotateur

$$(1) \qquad \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = \left(\mathbf{T} + t\frac{d\mathbf{Q}}{ds}\right)\mathbf{Q} = \mathbf{TQ} - t\mathbf{QQ}'.$$

La condition pour que ce rotateur ait une orientation constante tout le long d'une génératrice de la surface est qu'il reste parallèle à sa dérivée par rapport à t, c'est-à-dire que

$$\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0,$$

relation qui peut s'écrire

$$(\mathbf{TQ} - t\mathbf{QQ}').\mathbf{QQ}' = \mathbf{TQ}.\mathbf{QQ}' = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad \mathbf{TQQ}' = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, la surface est développable. La relation (2) exprime que $\mathbf{Q}'$ est nul ($\mathbf{Q}$ est alors constant et la surface est cylindrique) ou bien que ce vecteur est coplanaire à $\mathbf{T}$ et $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{Q}'$ est perpendiculaire à $\mathbf{Q}$ (qui est un vecteur-unité). Dans le cas particulier où la directrice est une trajectoire orthogonale des génératrices, $\mathbf{Q}$ est perpendiculaire, en chaque point, au tangent $\mathbf{T}$, et la surface est développable si $\mathbf{Q}'$ est parallèle à $\mathbf{T}$. Ainsi, des normales menées par les différents points d'une courbe C engendrent une surface développable, si la dérivée du vecteur-unité parallèle à la normale est parallèle à la tangente de la courbe C.

Soient $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ deux vecteurs-unité perpendiculaires tous les deux au tangent $\mathbf{T}$ et parallèles chacun aux génératrices d'une surface développable. Les dérivées de $\mathbf{Q}_1$ et de $\mathbf{Q}_2$ sont donc parallèles à $\mathbf{T}$ et perpendiculaires à la fois à $\mathbf{Q}_1$ et à $\mathbf{Q}_2$. On a, par conséquent, les relations

$$\mathbf{Q}'_1\overline{\mathbf{Q}_2} = 0, \qquad \mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}'_2} = 0;$$

d'où l'on déduit par une addition

$$\mathbf{Q}'_1\overline{\mathbf{Q}_2} + \mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}'_2} = \frac{d}{ds}(\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}_2}) = 0. \tag{3}$$

Il en résulte que

$$\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}_2} = \cos(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \text{const.}, \tag{4}$$

relation qui contient la proposition bien connue : Les génératrices de deux surfaces développables, se rencontrant le long d'une trajectoire orthogonale commune, forment entre elles un angle constant. Réciproquement, de la relation (4) on déduit la relation (3), et si l'un des termes de son premier membre est nul, l'autre l'est aussi. Si, par exemple, $\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}'_2}$ est nul, il en résulte que $\mathbf{Q}'_2$ est perpendiculaire à la fois à $\mathbf{Q}_1$ et à $\mathbf{Q}_2$, et parallèle par conséquent à $\mathbf{T}$. La surface dont les génératrices sont parallèles à $\mathbf{Q}_2$ engendrent donc une surface développable.

Dans le cas d'une surface développable, on peut déterminer comme suit le point de rebroussement de la génératrice. Il suffit de choisir pour le nombre t une fonction de s telle que la tangente de la courbe décrite par le point ainsi défini coïncide avec la génératrice. Cette tangente est parallèle au vecteur

$$\frac{d\mathbf{L}}{ds} = \mathbf{T} + t\mathbf{Q}' + \frac{dt}{ds}\mathbf{Q},$$

lequel est coplanaire aux vecteurs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{Q}$, le nombre $\mathbf{TQQ}'$ étant nul par hypothèse. En désignant par α et β deux nombres convenables, on peut donc écrire

$$\mathbf{T} + t\mathbf{Q}' + \frac{dt}{ds}\mathbf{Q} = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{Q}.$$

Si l'on multiplie par $\overline{\mathbf{Q}'}$ les termes de cette relation, on déduit

$$\mathbf{T}\overline{\mathbf{Q}'} + t(\mathbf{Q}')^2 = \alpha\mathbf{T}\overline{\mathbf{Q}'}$$

et l'on aura $\alpha = 0$, à condition de déterminer t par la formule

$$t = -\frac{\mathbf{T}\overline{\mathbf{Q}'}}{(\mathbf{Q}')^2}.$$

Supposons maintenant que la surface soit gauche. La relation (1) peut s'écrire

$$\mathbf{u} = t\left(\frac{1}{t}\mathbf{TQ} - \mathbf{QQ}'\right).$$

Il en résulte que le plan asymptotique, tangent à la surface au point $t = \infty$, est parallèle au rotateur $\mathbf{QQ}'$. Le plan central, perpendiculaire au plan asymptotique, est donc parallèle au rotateur $\overline{\mathbf{Q}'}$ et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{Q}'$.

Le point central, qui est le point de contact du plan central avec la surface, peut être déterminé comme suit. La valeur t_s correspondant au point central doit satisfaire à la relation

$$\mathbf{TQ} - t_s\mathbf{QQ}' = -p\overline{\mathbf{Q}'}, \tag{5}$$

p désignant un nombre convenable. En multipliant les termes de cette relation d'abord par $\mathbf{Q}'$, ensuite par $\mathbf{T}$, on trouve

$$p = -\frac{\mathbf{TQQ}'}{(\mathbf{Q}')^2}, \qquad t_s = -\frac{\mathbf{T}\overline{\mathbf{Q}'}}{(\mathbf{Q}')^2}.$$

La courbe directrice C est donc ligne de striction sur la surface, si la dérivée $\mathbf{Q}'$ est perpendiculaire au tangent $\mathbf{T}$ tout le long de la courbe. C'est ce qui résulte encore de la remarque, faite plus haut, que le plan central est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{Q}'$.

Supposons que la directrice soit la ligne de striction. Le plan tangent au point central est caractérisé, d'après (5), par le rotateur

$$\mathbf{u}_0 = -p\overline{\mathbf{Q}'}.$$

A une distance k quelconque du point central le plan tangent est caractérisé par le rotateur

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - k\mathbf{Q}\mathbf{Q}' = -(p\overline{\mathbf{Q}'} + k\mathbf{Q}\mathbf{Q}').$$

Le vecteur $\mathbf{u}_0\mathbf{u}$ définit le sens dans lequel tourne le plan tangent à la surface quand on avance sur la génératrice. La valeur de ce vecteur s'obtient comme suit :

$$\mathbf{u}_0\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{u}_0 - k\mathbf{Q}\mathbf{Q}') = kp\overline{\mathbf{Q}'}.\mathbf{Q}\mathbf{Q}' = kp(\mathbf{Q}')^2\mathbf{Q}.$$

On a, d'autre part,

$$\mathbf{u}_0\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0^2 + kp\mathbf{Q}'\mathbf{Q}\mathbf{Q}' = p^2(\mathbf{Q}')^2.$$

On voit que le sens de rotation du plan tangent autour de la génératrice concorde avec le sens linéaire défini par $k\mathbf{Q}$, si le nombre p est positif. Ces sens sont, au contraire, discordants, si p est négatif. Désignons par ϑ l'angle $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})$. On a

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\mathbf{u}_0\mathbf{u}\overline{\mathbf{Q}}}{\mathbf{u}_0\overline{\mathbf{u}}} = \frac{k}{p}.$$

Le nombre p est donc égal au paramètre de distribution de la surface.

A l'aide des formules qui précèdent on peut démontrer très simplement les propositions suivantes concernant deux surfaces réglées qui se rencontrent le long de leur ligne de striction commune : Si les paramètres de distribution ont même valeur sur les génératrices qui se rencontrent, celles-ci se coupent sous un angle constant. Si les génératrices se rencontrent sous un angle constant, les deux surfaces ont même paramètre de distribution, à condition qu'elles ne soient pas tangentes l'une à l'autre le long de leur courbe commune.

Soient $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ deux vecteurs-unité caractérisant les génératrices des surfaces. On a alors la formule

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}_2}) = \mathbf{Q}'_1\overline{\mathbf{Q}_2} + \overline{\mathbf{Q}_1}\mathbf{Q}'_2.$$

Si la courbe commune est ligne de striction sur les deux surfaces, on a, d'autre part, d'après (5),

$$\mathbf{Q}'_1 = -\frac{1}{p_1}\overline{\mathbf{T}\mathbf{Q}_1}, \qquad \mathbf{Q}'_2 = -\frac{1}{p_2}\overline{\mathbf{T}\mathbf{Q}_2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}_2}) = -\frac{1}{p_1}\mathbf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 - \frac{1}{p_2}\mathbf{T}\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\mathbf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2.$$

Donc, si $p_1 = p_2$, l'angle $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ est constant. Si cet angle est constant sans que les vecteurs $\mathbf{T}$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ soient coplanaires, on en déduit que $p_1 = p_2$.

Comme application, je me propose de déterminer, sur une surface réglée, les lignes conjuguées des trajectoires orthogonales des génératrices. Le plan tangent à la surface le long d'une de ces lignes conjuguées a, en chaque point, une caractéristique parallèle à la trajectoire orthogonale des génératrices et perpendiculaire par conséquent à la génératrice elle-même. Je suppose la surface rapportée à la ligne de striction comme directrice. Dans ces conditions, le plan tangent à la surface en un point quelconque est parallèle au rotateur

$$\mathbf{u} = -(p\overline{\mathbf{Q}'} + t\mathbf{Q}\mathbf{Q}').$$

Il s'agit de déterminer t en fonction de s de façon que la caractéristique du plan tangent soit perpendiculaire à $\mathbf{Q}$. Cette caractéristique est parallèle au vecteur $\mathbf{u}\frac{d\mathbf{u}}{ds}$. Nous déduisons

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = -\left(\frac{dp}{ds}\overline{\mathbf{Q}'} + p\overline{\mathbf{Q}''} + \frac{dt}{ds}\mathbf{Q}\mathbf{Q}' + t\mathbf{Q}\mathbf{Q}''\right)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\frac{d\mathbf{u}}{ds} = {} & p^2\overline{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}''} + p\frac{dt}{ds}(\mathbf{Q}')^2\mathbf{Q} \\ & + pt\mathbf{Q}'\overline{\mathbf{Q}''}.\mathbf{Q} - t\frac{dp}{ds}(\mathbf{Q}')^2\mathbf{Q} + pt\mathbf{Q}\overline{\mathbf{Q}''}.\mathbf{Q}' - pt\mathbf{Q}'\overline{\mathbf{Q}''}.\mathbf{Q} + t^2\mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}''.\mathbf{Q}.\end{aligned}$$

La condition pour que ce vecteur soit perpendiculaire à $\mathbf{Q}$ s'exprime donc comme suit :

$$p^2 \mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}'' + p\frac{dt}{ds}(\mathbf{Q}')^2 - t\frac{dp}{ds}(\mathbf{Q}')^2 + t^2\mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}'' = 0. \tag{6}$$

L'intégrale de cette équation différentielle donnera la famille de courbes cherchée. Divisons les termes de l'équation (6) par $p^2(\mathbf{Q}')^2$ et posons

$$\frac{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}''}{(\mathbf{Q}')^2} = \frac{d\lambda}{ds}.$$

Cette équation peut alors s'écrire

$$\frac{d\lambda}{ds}\left(1 + \frac{t^2}{p^2}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{t}{p}\right) = 0$$

et nous trouvons son intégrale générale sous la forme

$$t = p \operatorname{tang}(k - \lambda),$$

k désignant une constante d'intégration. En remplaçant λ par sa valeur, on obtient

$$t = p \operatorname{tang}\left(k - \int \frac{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}''}{(\mathbf{Q}')^2} ds\right). \tag{7}$$

Je vais démontrer quelques propositions concernant ces courbes que j'appellerai pour abréger les courbes I. La formule (7) fait voir que l'angle formé par les plans tangents à la surface en les points où une même génératrice rencontre deux courbes I quelconques reste constant tout le long de ces courbes. On en conclut, en particulier, que, si un point P_1 décrit une courbe I, le point P_2, conjugué de P_1, par rapport au point central de la génératrice, décrit une seconde courbe I, le plan tangent en P_2 étant perpendiculaire au plan tangent en P_1.

En second lieu, on peut remarquer que la courbure moyenne de la surface s'annule aux points où une courbe I coupe la génératrice sous un angle droit. En effet, en un tel point, la direction perpendiculaire à la génératrice rectiligne est conjuguée à elle-même; elle est donc une direction asymptotique de la surface. La seconde direction asymptotique — celle de la génératrice rectiligne — est perpendiculaire à la première, ce qui prouve que les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires. La courbure moyenne est donc nulle. Chaque fois qu'une ligne tracée sur une surface réglée possède deux des propriétés suivantes : être une trajectoire orthogonale des génératrices, une ligne asymptotique, une ligne I, elle possède donc la troisième, et la surface est formée des normales principales de cette ligne.

Si le nombre $QQ'Q''$ est nul tout le long de la directrice, on en conclut que le vecteur Q est constamment parallèle à un plan fixe, et la surface est par conséquent à plan directeur. L'expression (7) prend alors la forme

$$t = p \operatorname{tang} k.$$

On en conclut : la ligne de striction d'une surface réglée est une courbe I, si la surface est à plan directeur.

On déduit, en outre, que chaque ligne I conserve une distance fixe de la ligne de striction, si la surface est à plan directeur et à paramètre de distribution constant.

Je ferai encore la remarque suivante : Une surface réglée peut être considérée comme engendrée par les droites irrotationnelles d'une courbe tracée sur elle, si parmi les lignes I il en existe une qui soit en même temps une ligne géodésique de la surface. En effet, le plan tangent à la surface le long d'une ligne géodésique se confond avec le plan rectifiant de cette ligne ; la droite caractéristique du plan tangent est la droite rectifiante de la ligne géodésique. Si cette droite rectifiante est perpendiculaire aux génératrices rectilignes, celles-ci coïncident donc avec les droites irrotationnelles de la ligne géodésique. On voit ainsi qu'une surface réglée quelconque ne peut pas être considérée comme une surface de droites irrotationnelles, car, en général, aucune des courbes I définies plus haut n'est en même temps une ligne géodésique de la surface.

On peut aisément généraliser l'expression (7) en l'étendant au cas où la surface se trouve rapportée à une directrice quelconque. Désignons à cet effet par s l'arc de la ligne de striction, par σ l'arc de la directrice. On a alors les relations

$$Q' = \frac{dQ}{ds} = \frac{dQ}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}; \qquad Q'' = \frac{d^2Q}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 + \frac{dQ}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{ds^2};$$

$$QQ'Q'' = Q\frac{dQ}{d\sigma}\frac{d^2Q}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^3; \qquad (Q')^2 = \left(\frac{dQ}{d\sigma}\right)^2\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

et, par conséquent,

$$d\lambda = \frac{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'\mathbf{Q}''}{(\mathbf{Q}')^2}\,ds = \frac{\mathbf{Q}\,\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\,\dfrac{d^2\mathbf{Q}}{d\sigma^2}}{\left(\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma.$$

Si l'on désigne par q la distance d'un point de la directrice au point central de la génératrice, on trouve ainsi l'expression

$$t = q + p\,\mathrm{tang}\left[k - \int \frac{\mathbf{Q}\,\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\,\dfrac{d^2\mathbf{Q}}{d\sigma^2}}{\left(\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\right)^2}\,d\sigma\right].$$

Cette expression prend une forme particulièrement simple, s'il s'agit de la surface des normales principales d'une courbe C. On a, dans ce cas,

$$q = \mathrm{R}\sin\theta; \qquad p = -\,\mathrm{R}\cos\theta; \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{N}; \qquad \frac{d\mathbf{Q}}{d\sigma} = \frac{1}{\mathrm{R}}\mathbf{E}; \qquad \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{R}^2};$$

$$\frac{d^2\mathbf{Q}}{d\sigma^2} = -\,\frac{1}{\mathrm{R}^2}\,\frac{d\mathrm{R}}{d\sigma}\,\mathbf{E} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}\,\mathbf{N} - \frac{1}{\mathrm{RT}}\,\mathbf{F}.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathbf{Q}\,\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\,\dfrac{d^2\mathbf{Q}}{d\sigma^2}}{\left(\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\sigma}\right)^2} = -\,\frac{1}{\mathrm{R}^2\mathrm{T}} : \frac{1}{\mathrm{R}^2} = -\,\frac{d\theta}{d\sigma},$$

et les courbes I se trouvent ainsi définies par l'expression

$$(8) \qquad t = \mathrm{R}\sin\theta - \mathrm{R}\cos\theta\,\mathrm{tang}(k+\theta) = \frac{\sin k}{\dfrac{\cos k}{\tau} + \dfrac{\sin k}{\rho}}.$$

La directrice, qui est une ligne asymptotique et une trajectoire orthogonale, est aussi une ligne I; elle correspond à la valeur zéro de la constante k. Pour $k = \frac{\pi}{2}$ on trouve

$$t = \rho.$$

Ainsi, le lieu des centres de courbure de la courbe C est une ligne I sur la surface des normales principales. C'est ce qui résulte d'ailleurs de la remarque que le centre de courbure est le conjugué du point correspondant de la directrice.

S'il existe une ligne I dont tous les points sont à une distance fixe de la directrice, cette ligne est nécessairement une trajectoire orthogonale des génératrices. Elle est donc aussi une ligne asymptotique, c'est-à-dire les normales principales de la directrice sont en même temps les normales principales d'une seconde courbe, et la directrice est une courbe de Bertrand. C'est ce qui résulte d'ailleurs de la forme de l'expression (8), la fraction figurant au dernier membre ne pouvant être une constante que si les éléments de la directrice satisfont à l'équation caractéristique des courbes de Bertrand.

La ligne de striction est en même temps une ligne I, si la surface des normales principales est à plan directeur, c'est-à-dire si la directrice est une hélice.

Un calcul analogue permet de déterminer les courbes I tracées sur la surface des droites irrotationnelles d'une courbe donnée. On trouve

$$t = \cos\theta \frac{\cos k}{\dfrac{\cos k}{\mathrm{T}} + \dfrac{\sin k}{\mathrm{R}}}.$$

On remarquera l'analogie entre cette expression et la formule (8), les éléments ρ et τ étant remplacés par les éléments R et T. La directrice correspond à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de la constante k. A la valeur $k = 0$ correspond une courbe définie par la coordonnée

$$t = \mathrm{T}\cos\theta.$$

D'après une remarque faite au paragraphe IV le point ainsi défini se trouve à l'intersection de la droite irrotationnelle et de la droite caractéristique du plan de la courbure totale. Il est le conjugué du point correspondant de la directrice.

Pour déterminer dans quelles conditions la ligne de striction est une ligne I, il suffit de remarquer que le nombre $\mathrm{QQ'Q''}$ peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{QQ'Q''} = \frac{1}{\mathrm{T}^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\right).$$

Ce nombre est donc nul : 1° si

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire si la directrice est une hélice; 2° si

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}\right) = 0$$

ou bien

$$\mathrm{R}\frac{d\theta}{ds} = \text{const.} \tag{9}$$

En remarquant que le trièdre principal d'une courbe C_1 est parallèle au trièdre secondaire d'une développée C_2 de C_1 et que les vitesses de rotation autour des axes parallèles sont égales, on peut écrire

$$\frac{ds_2}{\mathrm{R}_2} = \frac{ds_1}{\rho_1}; \qquad d\theta_2 = \varepsilon\frac{ds_1}{\tau_1}.$$

Il en résulte que

$$\mathrm{R}_2\frac{d\theta_2}{ds_2} = \varepsilon\frac{\rho_1}{\tau_1}.$$

L'équation (9) caractérise donc les développées des hélices. En résumé, la ligne de striction de la surface des droites irrotationnelles d'une courbe C est une ligne I sur cette surface, si la courbe C est une hélice ou la développée d'une hélice.

VI, — Dérivées d'un vecteur dans les différentes directions d'un plan.

Afin d'étudier la géométrie différentielle d'un champ vectoriel, je vais examiner les dérivées d'un vecteur, fonction de point, prises dans les différentes directions de l'espace. Soit **L** un vecteur, fonction de point continue, défini dans une certaine région de l'espace et possédant en chaque point de cette région des dérivées continues et finies dans toutes les directions. En un point déterminé P la dérivée de **L** prise dans la direction d'un vecteur unité **U** peut être considérée comme fonction de ce vecteur **U**. Posons

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{U}} = \mathbf{U}\overline{\nabla}.\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathrm{U}}.$$

On sait que $\mathbf{L}_{\mathrm{U}}$ est une fonction vectorielle linéaire de **U**, c'est-à-dire que la correspondance entre ces vecteurs est une homographie. Si l'on considère deux gerbes de droites ayant pour sommets les points A_1 et A_2 respectivement et que l'on fasse correspondre à chaque droite u_1 de A_1 dont la direction U est prise comme direction de différentiation, la droite u_2 de A_2 parallèle à la dérivée $\mathbf{L}_U$, on établit une homographie entre les deux gerbes. A des droites u_1, v_1, w_1, contenues dans un même plan passant par A_1, correspondent des droites u_2, v_2, w_2, contenues dans un plan passant par A_2. A chaque plan de la gerbe A_1 correspond ainsi un plan de la gerbe A_2.

En raison de l'importance que présente, au point de vue des applications géométriques, la correspondance entre des vecteurs-unité coplanaires et les dérivées de $\mathbf{L}$ prises dans les directions de ces vecteurs, je vais examiner pour commencer cette correspondance, qui est équivalente à la relation entre deux faisceaux de droites homographiques.

Soient U et V deux vecteurs-unité parallèles à un certain plan α, $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_V$ les dérivées correspondantes, lesquelles sont parallèles à un certain plan α'. Tout autre vecteur unité S du plan α peut être exprimé sous la forme

$$\mathbf{S} = s_u \mathbf{U} + s_v \mathbf{V} \tag{1}$$

s_u et s_v étant des nombres convenablement déterminés. La dérivée $\mathbf{L}_S$ prise dans la direction de S est alors donnée par l'expression

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{S}\overline{\nabla} . \mathbf{L} = s_u \mathbf{U}\overline{\nabla} . \mathbf{L} + s_v \mathbf{V}\overline{\nabla} . \mathbf{L} = s_u \mathbf{L}_U + s_v \mathbf{L}_V. \tag{2}$$

$\mathbf{L}_S$ est parallèle au plan α'. En outre, si $\mathbf{L}_U$ était parallèle à $\mathbf{L}_V$ il en serait de même de toutes les dérivées prises dans les différentes directions du plan α. L'homographie serait dégénérée, et il existerait un certain vecteur T du plan α donnant naissance à une dérivée $\mathbf{L}_T^{|}$ nulle. Je supposerai par la suite que l'homographie est propre, c'est-à-dire que les dérivées prises dans deux directions différentes ne sont pas parallèles.

Pour représenter les différentes dérivées prises dans les directions du plan α, on peut procéder comme suit. Menons à partir du point P un segment PP_s dont le vecteur égale $\mathbf{L}_S$. Lorsque le vecteur S tourne dans le plan α, le segment PP_s varie en direction et en longueur et son extrémité P_s décrit une courbe que j'appellerai l'*indicatrice des dérivées* de $\mathbf{L}$ relative au plan α.

Il résulte de la formule (2) que cette courbe est une ellipse tracée dans le plan α' et ayant le point P comme centre. Si l'on choisit ce point comme origine d'un système d'axes de coordonnées obliques (x, y) parallèles à $\mathbf{L}_U$ et à $\mathbf{L}_V$ respectivement, les coordonnées du point P_s par rapport à ces axes sont données par les expressions

$$x = s_u l_u; \qquad y = s_v l_v$$

l_u et l_v désignant les modules des vecteurs $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_V$. Portant dans la relation (1) les valeurs de s_u et de s_v déduites de ces formules et élevant au carré les deux membres de la relation ainsi obtenue, on trouve l'équation de l'indicatrice

$$\frac{x^2}{l_u^2} + \frac{y^2}{l_v^2} + \frac{2xy}{l_u l_v} \mathbf{U}\overline{\mathbf{V}} = 1.$$

Si, en particulier, $\mathbf{U}$ est perpendiculaire à $\mathbf{V}$, cette équation prend la forme

$$\frac{x^2}{l_u^2} + \frac{y^2}{l_v^2} = 1.$$

Les axes de coordonnées sont dans ce cas des diamètres conjugués de l'ellipse. Réciproquement, si les dérivées de $\mathbf{L}$ prises dans deux directions U et V sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice, les directions de différentiation sont rectangulaires.

Il existe, en particulier, deux directions rectangulaires O et P telles que les dérivées prises dans ces directions sont parallèles aux directions O′ et P′ des axes principaux de l'indicatrice. Je dirai que O et P sont les *directions principales de différentiation* du plan α, O′ et P′ les *directions principales dérivées*.

Si l'on connaît les dérivées $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_V$ prises dans deux directions rectangulaires U et V, la longueur l de chacun des demi-axes principaux de l'indicatrice se trouve déterminée par l'équation

$$l^4 - l^2(\mathbf{L}_U^2 + \mathbf{L}_V^2) + (\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V)^2 = 0.$$

L'angle α que la direction principale de différentiation forme avec U est donné par l'expression

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{L}_V}}{\mathbf{L}_U^2 - \mathbf{L}_V^2}.$$

La valeur de α est indéterminée dans le seul cas où $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_V$ ont même module et des directions rectangulaires. Il est clair que, dans ce cas, toutes les dérivées prises dans les différentes directions du plan α ont même module. L'indicatrice des dérivées est un cercle.

Envisageons deux faisceaux homographiques A_1 et A_2 ayant leur sommet commun au point P et situés l'un dans un plan α, l'autre dans un plan α'. L'homographie est définie à l'aide de trois droites u_1, v_1, w_1 du faisceau A_1 auxquelles correspondent les trois droites u_2, v_2, w_2 du faisceau A_2. Désignons par $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{W}_1$; $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{W}_2$ six vecteurs-unité parallèles respectivement à ces six directions. Choisissons deux vecteurs $\mathbf{L}_V$ et $\mathbf{L}_W$ parallèles à $\mathbf{V}_2$ et à $\mathbf{W}_2$ respectivement

$$\mathbf{L}_V = p\mathbf{V}_2; \qquad \mathbf{L}_W = q\mathbf{W}_2,$$

p et q étant des nombres à déterminer.

Le vecteur $\mathbf{U}_1$ étant coplanaire à $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{W}_1$, il existe deux nombres v et w tels que

$$\mathbf{U}_1 = v\mathbf{V}_1 + w\mathbf{W}_1.$$

Posons, en outre,

$$\mathbf{L}_U = pv\mathbf{V}_2 + qw\mathbf{W}_2.$$

Les trois vecteurs $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{W}_2$ étant coplanaires, il existe trois nombres n_1, n_2, n_3 (définis à un facteur près) tels que

$$n_1\mathbf{U}_2 = n_2\mathbf{V}_2 + n_3\mathbf{W}_2.$$

Le vecteur $\mathbf{L}_U$ est donc parallèle à $\mathbf{U}_2$ si les nombres p et q sont déterminés par les relations

$$p = \frac{n_2}{v}; \qquad q = \frac{n_3}{w}.$$

Il en résulte que toute homographie établie entre deux faisceaux A_1 et A_2 définit dans le plan α' de A_2 une ellipse E_2 (dont les axes sont déterminés à un facteur de proportionnalité près). Elle définit donc, de même, une ellipse E_1 tracée dans le plan α de A_1, et si l'on effectue les mêmes calculs que ci-dessus, on voit que les axes principaux de E_1 ont des longueurs inversement proportionnelles à celles des axes de E_2. Si aux directions f_1 et g_1 du faisceau A_1 correspondent les directions f_2 et g_2 du faisceau A_2, les diamètres de l'ellipse E_2 parallèles à f_2 et à g_2 respectivement sont inversement proportionnels aux diamètres de l'ellipse E_1, parallèles à f_1 et à g_1 respectivement.

Les dérivées du vecteur **L** prises dans deux directions rectangulaires du faisceau A_1 sont parallèles à deux diamètres conjugués de E_2. Il est clair que, si deux dérivées de **L** sont perpendiculaires l'une à l'autre, les directions de différentiation sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse E_1. Si à deux directions de différentiation rectangulaires O et P corrrespondent deux dérivées perpendiculaires l'une à l'autre, les directions O et P sont les directions principales de différentiation, parallèles aux axes principaux de E_1, et les dérivées prises dans ces directions sont parallèles aux axes principaux de E_2, c'est-à-dire leurs directions sont les directions principales dérivées.

Envisageons le cas où l'homographie serait une égalité. Il faut alors qu'à deux directions rectangulaires quelconques de A_1 correspondent deux directions rectangulaires de A_2, ce qui n'est possible que si l'indicatrice des dérivées est un cercle. Le cercle E_2, tracé dans le plan du faisceau A_2, correspond alors à un cercle E_1, tracé dans le plan de A_1.

Réciproquement, si les ellipses E_1 et E_2 sont des cercles, l'homographie établie entre les faisceaux A_1 et A_2 est une égalité.

VII. — Dérivées d'un vecteur dans un plan tautologue.

Si aux différentes directions d'un plan ρ correspondent des dérivées du vecteur **L** parallèles à ce même plan, le plan ρ est dit *tautologue*. Les deux faisceaux A_1 et A_2 envisagés au paragraphe VI sont alors confondus. Soient **O** et **P** deux vecteurs-unité parallèles aux directions principales de différentiation. Désignons par $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ les dérivées de **L** prises dans les directions pointées de **O** et de **P**. Fixons sur le plan ρ un sens de rotation tel que le rotateur **OP** ait le sens positif, et désignons par φ l'angle, compris entre o et π, dont il faut faire tourner le vecteur **O**, dans le sens positif du plan, pour qu'il devienne parallèle (directement ou inversement) au vecteur $\mathbf{L}_1$. On peut donc écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathbf{L}_1 = l_1(\ \ \mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi), \\ \mathbf{L}_2 = l_2(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi), \end{cases}$$

les nombres l_1 et l_2 étant positifs ou négatifs. Ces nombres ont même signe ou des signes contraires, selon que le rotateur $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ a le sens positif ou le sens négatif, c'est-à-dire selon que l'homographie est directe ou inverse.

On sait qu'une homographie (non identique) établie dans un faisceau de droites comporte deux éléments doubles, lesquels peuvent être soit réels et distincts, soit réels et confondus, soit tous les deux imaginaires. Un élément double correspond ici à une direction de différentiation S telle que la dérivée de L prise dans cette direction est parallèle à S. Une telle direction est dite *tautologue*. Pour déterminer les directions tautologues du plan ρ, choisissons un vecteur-unité $\mathbf{S}$ défini par l'expression

$$\mathbf{S} = \cos\alpha\,\mathbf{O} + \sin\alpha\,\mathbf{P}.$$

$\mathbf{S}$ est parallèle à une direction tautologue, si l'on a la relation

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{S}} = \cos\alpha\,\mathbf{L}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{L}_2 = \sigma\mathbf{S},$$

σ désignant la mesure algébrique de la dérivée $\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{S}}$ par rapport à la direction pointée de $\mathbf{S}$.

La condition pour que l'angle α caractérise une direction tautologue peut donc s'écrire

$$(2)\qquad \cos\alpha\,\mathbf{L}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{L}_2 = \sigma(\cos\alpha\,\mathbf{O} + \sin\alpha\,\mathbf{P}).$$

En multipliant les termes de cette équation par $\overline{\mathbf{O}}$ et $\overline{\mathbf{P}}$ successivement, et en tenant compte des relations (1), nous trouvons

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\alpha(l_1\cos\varphi - \sigma) - \sin\alpha\,.\,l_2\sin\varphi = 0, \\ \cos\alpha\,.\,l_1\sin\varphi + \sin\alpha(l_2\cos\varphi - \sigma) = 0. \end{cases}$$

On en déduit que le nombre σ et l'angle α sont déterminés par les équations suivantes :

$$(4)\qquad \sigma^2 - \sigma\cos\varphi(l_1 + l_2) + l_1 l_2 = 0,$$

$$(5)\qquad \operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}\alpha\,\frac{l_1 - l_2}{l_2}\cot\varphi + \frac{l_1}{l_2} = 0.$$

Ces équations ont toutes les deux, soit deux racines réelles distinctes, soit une racine double, soit deux racines imaginaires, selon que le nombre

$$(l_1 - l_2)^2\cot^2\varphi - 4 l_1 l_2$$

est positif, nul ou négatif. Dans le cas où l_1 et l_2 ont des signes contraires (c'est-à-dire si l'homographie est inverse), les directions tautologues sont toujours réelles.

En désignant par α_1 et α_2 les deux racines de l'équation (5), on déduit

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{l_1 - l_2}{l_2}\cot\varphi : \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = -\cot\varphi,$$

soit

$$(6)\qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi; \qquad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

k étant égal à 0 ou à 1. Les bissectrices (toujours réelles) des deux directions tautologues forment donc des angles de 45° avec les bissectrices des angles formés par chacune des directions principales de différentiation et par la direction principale dérivée correspondante.

L'angle α_0 formé par les deux directions tautologues est donné par l'expression

$$\operatorname{tang}\alpha_0 = \frac{\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_1}{1 + \operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2} = \pm\frac{\sqrt{(l_1 - l_2)^2\cot^2\varphi - 4 l_1 l_2}}{l_1 + l_2}.$$

En particulier, l'homographie est parabolique (les éléments doubles confondus) si

$$\cot\varphi = \pm\frac{2\sqrt{l_1 l_2}}{l_1 - l_2}.$$

La seule direction tautologue (qui est à considérer comme deux directions tautologues confondues) forme avec O l'angle α défini par l'expression

$$\operatorname{tang}\alpha = \pm\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

On en déduit que

$$\operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \pm\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

formule qui résulte encore de (6) si l'on y pose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Le nombre σ a la valeur

$$\sigma = \pm\sqrt{l_1 l_2}.$$

Pour que l'équation (2) soit satisfaite par plus de deux valeurs de α, il faut qu'on ait à la fois

$$\mathbf{L}_1 = \sigma\mathbf{O}, \qquad \mathbf{L}_2 = \sigma\mathbf{P}.$$

Ces équations indiquent que $\mathbf{L}_1$ est parallèle à $\mathbf{O}$, $\mathbf{L}_2$ à $\mathbf{P}$ et que $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ ont même module. L'indicatrice des dérivées est alors un cercle et l'homographie est une identité.

Considérons le cas où l'indicatrice serait un cercle et désignons par $\mathbf{S}$ un vecteur-unité quelconque, par $\mathbf{T}$ un vecteur-unité déduit de $\mathbf{S}$ par une rotation de 90° dans le sens positif. Les dérivées $\mathbf{L}_S$ et $\mathbf{L}_T$ prises dans les directions de ces vecteurs ont même module l, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{L}_S = l(\mathbf{S}\cos\psi + \mathbf{T}\sin\psi), \qquad \mathbf{L}_T = l(\mathbf{S}\cos\chi + \mathbf{T}\sin\chi).$$

Pour que le module d'une dérivée prise dans une autre direction quelconque du plan soit égal à l, il faut que $\mathbf{L}_S$ soit perpendiculaire à $\mathbf{L}_T$. Les angles ψ et χ doivent ainsi satisfaire à l'une ou à l'autre des conditions

$$\chi - \psi = \frac{\pi}{2}, \qquad \chi - \psi = -\frac{\pi}{2}.$$

Dans le premier cas, l'homographie est directe : elle est une égalité. Il n'y a aucune direction tautologue réelle, à moins que l'égalité ne soit une identité, c'est-à-dire que toutes les directions du plan ne soient tautologues.

Dans le second cas, l'homographie est inverse : elle est une symétrie. L'équation (5), dans laquelle l_1 et l_2 ont alors même valeur absolue, mais des signes contraires, fait voir que les deux directions tautologues sont rectangulaires (le produit des deux racines de $\tan g\alpha$ étant égal à -1). Nous convenons, dans ce cas, de considérer ces directions tautologues comme les directions principales de différentiation. Ce qui précède permet de conclure :

Si dans un plan ρ il y a plus de deux directions tautologues, toutes les directions du plan sont tautologues. S'il y a seulement deux directions tautologues, ces directions sont rectangulaires dans le seul cas où elles coïncident avec les directions principales de différentiation.

La condition nécessaire et suffisante pour que, dans un plan tautologue ρ, il existe deux directions tautologues rectangulaires est que le curl du vecteur **L** soit nul ou parallèle au plan ρ. En effet, choisissons un système trirectangle composé des deux directions de différentiation principales O et P et d'une troisième direction U perpendiculaire au plan ρ. Le curl du vecteur **L** peut alors être exprimé comme suit :

$$\operatorname{curl}\mathbf{L} = \overline{\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{U}}} + \overline{\mathbf{O}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{O}}} + \overline{\mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{P}}}. \tag{7}$$

U étant perpendiculaire à ρ, le premier terme du second membre désigne un vecteur qui est nul ou parallèle à ρ. Si le plan ρ contient deux directions tautologues rectangulaires (parallèles, d'après ce qui précède, à O et à P), chacun des deux derniers termes est nul. La condition énoncée est donc nécessaire. Supposons maintenant que $\operatorname{curl}\mathbf{L}$ soit parallèle à ρ. Il en résulte que la somme des deux derniers termes de l'équation (7) représente un vecteur nul ou parallèle à ρ. Or, le plan étant tautologue, chacun des termes de cette somme est nul ou perpendiculaire à ρ. Leur somme est donc nécessairement nulle,

$$\mathbf{O}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{O}} + \mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{P}} = 0. \tag{8}$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{O}} = \alpha_1\mathbf{O} + \beta_1\mathbf{P}, \qquad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{P}} = \alpha_2\mathbf{O} + \beta_2\mathbf{P},$$

on déduit de l'équation (8)

$$\alpha_2 = \beta_1. \tag{9}$$

D'autre part, $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{O}}$ étant perpendiculaire à $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathrm{P}}$, on a

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$$

ou bien, en vertu de la relation (9),

$$\beta_1(\alpha_1 + \beta_2) = 0.$$

Si

$$\beta_1 = \alpha_2 = 0,$$

il en résulte que $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{O}}$ est parallèle à $\mathbf{O}$, $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}}$ à $\mathbf{P}$. O et P sont donc deux directions tautologues et rectangulaires. Si

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0,$$

cette relation, jointe à (9), montre que les deux vecteurs $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{O}}$ et $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}}$ ont même module et que l'homographie est inverse. Elle est donc une symétrie, et nous avons déjà vu qu'il existe alors deux directions tautologues rectangulaires. La proposition est ainsi démontrée.

Dans le cas envisagé, on peut déduire des formules plus simples relatives à l'indicatrice des dérivées. Je vais examiner ce cas, qui présente un intérêt particulier pour les applications à la théorie des surfaces. Soient $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ deux vecteurs-unité quelconques du plan ρ. Les dérivées $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_V$, prises dans les directions de ces vecteurs, satisfont à la relation

$$\mathbf{V}\overline{\mathbf{L}}_U = \mathbf{U}\overline{\mathbf{L}}_V. \tag{10}$$

En effet,

$$\mathbf{V}\overline{\mathbf{L}}_U = \overline{\mathbf{V}}.\overline{\mathbf{U}}\nabla.\mathbf{L} = \overline{\mathbf{U}\mathbf{V}}.\nabla.\mathbf{L} + \overline{\mathbf{U}}.\mathbf{V}\overline{\nabla}.\mathbf{L}.$$

Mais

$$\overline{\mathbf{U}\mathbf{V}}.\nabla.\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{V}\,\overline{\nabla \mathbf{L}} = \mathbf{U}\mathbf{V}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{L} = 0.$$

Donc

$$\mathbf{V}\overline{\mathbf{L}}_U = \overline{\mathbf{U}}.\mathbf{V}\overline{\nabla}.\mathbf{L} = \mathbf{U}\overline{\mathbf{L}}_V.$$

Supposons d'abord que les directions U et V soient rectangulaires. Un vecteur-unité $\mathbf{S}$ quelconque du plan peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\cos\vartheta + \mathbf{V}\sin\vartheta. \tag{11}$$

La dérivée $\mathbf{L}_S$ satisfait aux deux relations

$$\mathbf{S}\overline{\mathbf{L}}_U = \mathbf{U}\overline{\mathbf{L}}_S, \qquad \mathbf{S}\overline{\mathbf{L}}_V = \mathbf{V}\overline{\mathbf{L}}_S. \tag{12}$$

En remarquant que les directions des axes principaux de l'indicatrice sont des directions tautologues, on voit que $\mathbf{S}$ est parallèle à un axe principal, si l'on a

$$L_S = \sigma S,$$

σ désignant la mesure algébrique de L_S, égale, en valeur absolue, à la longueur du demi-axe principal correspondant. En substituant cette expression de L_S dans les relations (12), on trouve

$$\overline{S}L_U = \sigma U\overline{S}, \qquad \overline{S}L_V = \sigma V\overline{S},$$

ou bien, en vertu de (11),

$$(13) \qquad \begin{cases} \overline{U}L_U \cos\vartheta + \overline{V}L_U \sin\vartheta = \sigma \cos\vartheta, \\ \overline{U}L_V \cos\vartheta + \overline{V}L_V \sin\vartheta = \sigma \sin\vartheta. \end{cases}$$

Éliminant ϑ entre ces deux relations, on trouve que le nombre σ est déterminé par l'équation

$$(14) \qquad \sigma^2 - \sigma(\overline{U}L_U + \overline{V}L_V) + \overline{U}L_U.\overline{V}L_V - \overline{V}L_U.\overline{U}L_V = 0.$$

Effectuons la transformation

$$\overline{V}L_U.\overline{U}L_V = L_U L_V.\overline{V}.\overline{U} + \overline{V}L_V.\overline{U}L_U$$

et substituons cette expression dans l'équation (14). Désignons par **M** un vecteur unité directement perpendiculaire au plan ρ, c'est-à-dire au rotateur **UV**,

$$M = \overline{UV}.$$

On a alors les formules

$$\overline{U}L_U = VML_U = -MVL_U, \qquad \overline{V}L_V = MUL_V, \qquad L_U L_V.\overline{V}.\overline{U} = -ML_U L_V.$$

L'équation (14) prend ainsi la forme

$$\sigma^2 - \sigma(MUL_V - MVL_U) + ML_U L_V = 0.$$

En introduisant un dénominateur **MUV**, égal à 1, on peut encore écrire

$$(15) \qquad \sigma^2 - \sigma\frac{MUL_V - MVL_U}{MUV} + \frac{ML_U L_V}{MUV} = 0.$$

Il est aisé de voir que les deux coefficients qui représentent la somme et le produit des racines σ_1 et σ_2 sont des invariants, quels que soient les vecteurs **U** et **V**, rectangulaires ou non. On s'en rend compte en substituant à $\mathbf{U}$ et à $\mathbf{V}$ deux vecteurs-unité choisis arbitrairement. Par analogie avec les expressions employées dans la théorie des surfaces, je dirai que le coefficient de σ représente la courbure moyenne du champ dans le plan ρ, et le terme indépendant de σ la courbure totale du champ dans ce plan; j'étendrai ces dénominations à un plan tautologue quelconque. Remarquons que la courbure totale est positive ou négative, selon que les deux rotateurs $\mathbf{UV}$ et $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V$ ont même sens ou des sens opposés, c'est-à-dire selon que l'homographie est directe ou inverse. Désignant par H et K les deux courbures, on peut écrire l'équation (15) sous la forme

$$\sigma^2 - \sigma H + K = 0.$$

Si des équations (13) on élimine le nombre σ, on trouve, pour déterminer l'angle ϑ, l'expression suivante :

$$\cot 2\vartheta = \frac{\overline{\mathbf{U}}\mathbf{L}_U - \overline{\mathbf{V}}\mathbf{L}_V}{2\,\overline{\mathbf{V}}\mathbf{L}_U} = -\frac{\mathbf{MUL}_V + \mathbf{MVL}_U}{2\,\mathbf{MUL}_U}.$$

Cette expression peut encore s'écrire

$$\cot 2\vartheta = \frac{2\,\mathbf{VML}_U}{2\,\mathbf{MUL}_U} - \frac{\mathbf{MUL}_V - \mathbf{MVL}_U}{2\,\mathbf{MUL}_U . \mathbf{MUV}} = \frac{\overline{\mathbf{U}}\mathbf{L}_U}{\mathbf{MUL}_U} - \frac{H}{2\,\mathbf{MUL}_U}.$$

Si l'on désigne par η l'angle $(\mathbf{U}, \mathbf{L}_U)$, on voit que la première fraction du dernier membre est égale à $\cot\eta$. On trouve ainsi

$$\cot 2\vartheta = \cot\eta - \frac{H}{2\,\mathbf{MUL}_U}.$$

Cette expression de ϑ est indépendante du choix du vecteur $\mathbf{V}$ (le nombre H étant un invariant). On voit, en particulier, que si H est nul les directions principales sont les bissectrices des angles formés par chacun des vecteurs du plan et par la dérivée prise dans sa direction. D'ailleurs, dans ce cas, les deux racines σ_1 et σ_2 sont égales, mais de signes contraires; l'indicatrice des dérivées est un cercle, la courbure totale est négative et l'homographie est une symétrie.

Dans son *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque*, Ph. Gilbert a défini la *flexion* d'une surface suivant une direction. La flexion est égale au module de la dérivée du vecteur-unité normal à la surface, dérivée prise dans la direction envisagée. Étendant cette notion à un champ vectoriel quelconque, on peut appeler *flexion du champ* dans une certaine direction le module de la dérivée prise dans cette direction.

Par analogie avec une expression employée quelquefois dans la théorie des surfaces, on peut appeler *direction caractéristique* d'un plan tautologue quelconque une direction dans laquelle le carré de la flexion du champ est égal à la valeur absolue de la courbure totale dans le plan. Pour déterminer les directions caractéristiques, on peut poser

$$\mathbf{S} = \mathbf{O} \cos\gamma + \mathbf{P} \sin\gamma,$$

d'où l'on déduit que

$$(16) \qquad \mathbf{L}_\varsigma = \mathbf{L}_1 \cos\gamma + \mathbf{L}_2 \sin\gamma$$

et que

$$\mathbf{L}_\varsigma^2 = l_1^2 \cos^2\gamma + l_2^2 \sin^2\gamma.$$

L'angle γ définit une direction caractéristique si l'on a

$$l_1^2 \cos^2\gamma + l_2^2 \sin^2\gamma = \varepsilon\, l_1\, l_2,$$

l'unité ε ayant même signe que la courbure totale dans le plan. Cette équation peut s'écrire

$$\varepsilon\, l_1\, l_2 (1 + \operatorname{tang}^2\gamma) = l_1^2 + l_2^2 \operatorname{tang}^2\gamma,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}^2\gamma = \varepsilon \frac{l_1}{l_2}, \qquad \operatorname{tang}\gamma = \pm\sqrt{\varepsilon \frac{l_1}{l_2}}.$$

On voit, en particulier, que, si dans un plan tautologue les deux directions tautologues sont confondues, elles coïncident avec l'une des directions caractéristiques. D'autre part si, dans un plan à courbure totale négative, les directions principales de différentiation sont les bissectrices des directions tautologues, c'est-à-dire si

$$\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2 = 0,$$

celles-ci coïncident avec les deux directions caractéristiques du plan. D'après la formule (5), ce cas se produit si $\cot\varphi = 0$, c'est-à-dire si chacune des directions principales de différentiation est perpendiculaire à la direction dérivée correspondante. Les mesures algébriques σ_1 et σ_2 sont alors égales, mais de signes contraires.

Évaluons l'angle μ que, dans le cas général, le vecteur $\mathbf{L}_S$ défini par (16) forme avec la direction O. On trouve

$$\mathbf{L}_S\overline{\mathbf{P}} = l_1 \cos\gamma \sin\varphi + l_2 \sin\gamma \cos\varphi,$$
$$\mathbf{L}_S\overline{\mathbf{O}} = l_1 \cos\gamma \cos\varphi - l_2 \sin\gamma \sin\varphi;$$

d'où l'on déduit que

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{l_1 \operatorname{tang}\varphi + l_2 \operatorname{tang}\gamma}{l_1 - l_2 \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\gamma}.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\operatorname{tang}\gamma$, on trouve

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{l_1}{l_2}\operatorname{tang}(\mu - \varphi). \tag{17}$$

Désignons par υ l'angle $(\mathbf{S}, \mathbf{L}_S)$, c'est-à-dire posons

$$\upsilon = \mu - \gamma = (\mu - \varphi) - (\gamma - \varphi).$$

On a donc

$$\operatorname{tang}\upsilon = \frac{l_2 \operatorname{tang}\gamma - l_1 \operatorname{tang}(\gamma - \varphi)}{l_1 + l_2 \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}(\gamma - \varphi)}.$$

Si la courbure totale dans le plan est positive, $\operatorname{tang}\gamma$ et $\operatorname{tang}(\mu - \varphi)$ ont toujours même signe. Donc, si γ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, μ est compris entre φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$ et υ est compris entre $\varphi - \frac{\pi}{2}$ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Cherchons les maxima et minima de l'angle υ. On les détermine en posant

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\gamma} = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial\mu}{\partial\gamma} = 1;$$

soit, d'après (17),

$$\frac{1}{\cos^2\gamma} = \frac{l_1}{l_2}\frac{1}{\cos^2(\mu - \varphi)}$$

ou bien

$$\frac{l_2}{l_1} = \cos^2\gamma[1 + \operatorname{tang}^2(\mu - \varphi)] = \cos^2\gamma\left(1 + \frac{l_2^2}{l_1^2}\operatorname{tang}^2\gamma\right) = \cos^2\gamma + \frac{l_2^2}{l_1^2}\sin^2\gamma.$$

soit enfin

$$l_1 l_2 = l_1^2 \cos^2\gamma + l_2^2 \sin^2\gamma. \tag{18}$$

C'est l'équation qui détermine les directions caractéristiques dans un plan à courbure totale positive. C'est donc dans ces directions que la dérivée atteint sa plus grande ou sa plus petite élongation de la direction de différentiation. Si la courbure totale dans le plan est négative, l'équation (18) n'a pas de racine réelle en γ; il n'y a donc pas de maximum ni de minimum de l'angle υ, ce qui est d'ailleurs évident, puisque, la direction de différentiation tournant dans un certain sens dans le plan, la direction de la dérivée tourne en sens inverse.

Les directions caractéristiques d'un plan à courbure totale positive sont definies par les angles

$$\operatorname{tang}\gamma = \varepsilon\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

On en déduit les valeurs correspondantes υ_m de l'angle υ

$$\operatorname{tang}\upsilon_m = \frac{\varepsilon(l_2 - l_1) + 2\operatorname{tang}\varphi\sqrt{l_1 l_2}}{\varepsilon(l_1 - l_2)\operatorname{tang}\varphi + 2\sqrt{l_1 l_2}}.$$

En particulier, si $\upsilon_m = 0$, les directions tautologues coïncident.

Je me propose de déterminer maintenant, dans un plan tautologue ρ, une direction U telle que la dérivée de **L** prise dans cette direction soit perpendiculaire à U. Soit **U** un vecteur-unité défini par l'expression

$$\mathbf{U} = \cos\beta\,\mathbf{O} + \sin\beta\,\mathbf{P}.$$

La dérivée de **L** dans cette direction a la valeur suivante :

$$\mathbf{L}_U = \cos\beta\,\mathbf{L}_1 + \sin\beta\,\mathbf{L}_2,$$

ou bien, en vertu des formules (1),

$$\mathbf{L}_U = l_1\cos\beta(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi) + l_2\sin\beta(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi). \tag{19}$$

Si $\mathbf{L}_U$ est perpendiculaire à **U**, on peut écrire

$$\mathbf{L}_U = \psi(-\mathbf{O}\sin\beta + \mathbf{P}\cos\beta), \tag{20}$$

ψ étant un nombre égal, en valeur absolue, à $\operatorname{mod}\mathbf{L}_U$.

Des relations (19) et (20), on déduit

$$\begin{aligned} \cos\beta \,.\, l_1 \cos\varphi \qquad &- \sin\beta\,(l_2 \sin\varphi - \psi) = 0, \\ \cos\beta\,(l_1 \sin\varphi - \psi) + \sin\beta \,.\, l_2 \cos\varphi \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Le nombre ψ et l'angle β sont donc déterminés par les équations suivantes :

$$\psi^2 - \psi \sin\varphi\,(l_1 + l_2) + l_1 l_2 = 0, \tag{21}$$

$$\operatorname{tang}^2\beta + \operatorname{tang}\beta \frac{l_1 - l_2}{l_2} \operatorname{tang}\varphi + \frac{l_1}{l_2} = 0. \tag{22}$$

Ces équations ont toutes les deux soit deux racines réelles distinctes, soit une racine double, soit deux racines imaginaires, selon que le nombre

$$(l_1 - l_2)^2 \operatorname{tang}^2\varphi - 4 l_1 l_2$$

est positif, nul ou négatif.

Les deux directions définies par l'équation (22) seront dites les *directions asymptotiques* du plan ρ. Si l'homographie est inverse, les directions asymptotiques sont toujours réelles. En désignant par β_1 et β_2 les deux racines de l'équation (22), on déduit

$$\operatorname{tang}(\beta_1 + \beta_2) = -\frac{l_1 - l_2}{l_2} \operatorname{tang}\varphi : \left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) = \operatorname{tang}\varphi,$$

soit

$$\beta_1 + \beta_2 = \varphi + k\pi\,; \qquad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{\varphi}{2} + k\frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

k étant égal à 0 ou à 1.

Les bissectrices (toujours réelles) des deux directions asymptotiques sont donc en même temps les bissectrices des angles formés par chacune des directions principales de différentiation et par la direction principale dérivée correspondante.

L'angle β_0 formé par les deux directions asymptotiques est donné par l'expression

$$\operatorname{tang}\beta_0 = \frac{\operatorname{tang}\beta_2 - \operatorname{tang}\beta_1}{1 + \operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\beta_2} = \pm \frac{\sqrt{(l_1 - l_2)^2 \operatorname{tang}^2\varphi - 4 l_1 l_2}}{l_1 + l_2}.$$

En particulier, les directions asymptotiques sont confondues, si

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm \frac{2\sqrt{l_1 l_2}}{l_1 - l_2}.$$

La seule direction asymptotique forme avec **O** l'angle β défini par l'expression

$$\operatorname{tang}\beta = \mp \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang}(\beta - \varphi) = \pm \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

et par conséquent

$$\beta = \frac{\varphi}{2} + k\frac{\pi}{2},$$

formule qui résulte encore de (23) si l'on y pose

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta.$$

La direction asymptotique unique coïncide donc avec l'une des directions caractéristiques du plan. On voit d'ailleurs que, dans ce cas,

$$\psi = \pm \sqrt{l_1 l_2},$$

valeur qui définit une direction caractéristique.

D'autre part, si, dans un plan à courbure totale négative, les directions principales de différentiation sont les bissectrices des directions asymptotiques, c'est-à-dire si

$$\operatorname{tang}\beta_1 + \operatorname{tang}\beta_2 = 0,$$

celles-ci coïncident avec les deux directions caractéristiques du plan. D'après la formule (22), ce cas se produit si $\operatorname{tang}\varphi = 0$, c'est-à-dire si les directions principales de différentiation coïncident avec les directions principales dérivées correspondantes, autrement dit, si elles sont tautologues. Les mesures algébriques ψ_1 et ψ_2 sont alors égales, mais de signes contraires, comme cela résulte de (21).

En se reportant aux formules (5) et (22), on voit que les directions tautologues et les directions asymptotiques sont toutes imaginaires, si l'angle φ satisfait aux inégalités suivantes :

$$\frac{4 l_1 l_2}{(l_1 - l_2)^2} > \operatorname{tang}^2\varphi > \frac{(l_1 - l_2)^2}{4 l_1 l_2}.$$

Ces conditions ne sont compatibles que si

$$4 l_1 l_2 > (l_1 - l_2)^2,$$

ce qui exige que le rapport entre les nombres l_1 et l_2 soit enfermé entre les limites suivantes :

$$3+2\sqrt{2}>\frac{l_1}{l_2}>3-2\sqrt{2}.$$

En particulier, les deux directions tautologues sont confondues ainsi que les deux directions asymptotiques, si

$$\operatorname{tang}^2\varphi=1; \qquad \frac{l_1}{l_2}=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Je vais encore examiner le cas déjà signalé où les directions principales de différentiation sont tautologues. On a, dans ce cas,

$$\mathbf{L}_1=l_1\mathbf{O}; \qquad \mathbf{L}_2=l_2\mathbf{P}.$$

Un vecteur **S** étant exprimé sous la forme

$$\mathbf{S}=\mathbf{O}\cos\gamma+\mathbf{P}\sin\gamma,$$

la dérivée $\mathbf{L}_S$ a pour valeur

$$\mathbf{L}_S=l_1\cos\gamma\,\mathbf{O}+l_2\sin\gamma\,\mathbf{P}.$$

L'angle μ que $\mathbf{L}_S$ forme avec **O** est donné par l'expression

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{l_2}{l_1}\operatorname{tang}\gamma,$$

laquelle peut se déduire de (17) si l'on y pose $\varphi=0$.

Supposons d'abord l_1 et l_2 positifs tous les deux ; tangμ a même signe que tangγ. La direction de la dérivée et la direction de différentiation se trouvent dans le même quadrant déterminé par les axes principaux de l'indicatrice, et si γ est aigu, μ est plus grand ou plus petit que γ, selon que l_2 est plus grand ou plus petit que l_1. Supposons, en second lieu, que les nombres l_1 et l_2 aient des signes contraires; tangμ a donc le signe contraire de tangγ; la direction de différentiation et la dérivée correspondante se trouvent dans deux quadrants séparés par une direction principale. Soit l_2, par exemple, le nombre négatif. $\mathbf{L}_1$ est alors directement parallèle à **O**, tandis que $\mathbf{L}_2$ est inversement parallèle à **P**. Lorsque le vecteur **S** tourne dans un sens déterminé à partir de la position **O**, la dérivée $\mathbf{L}_S$ tourne en sens inverse. $\mathbf{L_S}$ est perpendiculaire à $\mathbf{S}$, si

$$\operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}\mu = -1,$$

c'est-à-dire si

$$\operatorname{tang}\gamma = \pm\sqrt{-\frac{l_1}{l_2}}, \tag{24}$$

conformément aux résultats obtenus plus haut.

Soient $\mathbf{U}$ un vecteur unité quelconque du plan ρ et $\mathbf{M}$ le vecteur-unité directement perpendiculaire à ρ. On dit que la direction du vecteur $\overline{\mathbf{ML_U}}$ (perpendiculaire à $\mathbf{L_U}$) est *conjuguée* de la direction U de $\mathbf{U}$. Soit $\mathbf{V}$ un vecteur unité directement parallèle à $\overline{\mathbf{ML_U}}$. $\mathbf{V}$ étant perpendiculaire à la dérivée $\mathbf{L_U}$, il résulte de la formule (10) que $\mathbf{U}$ est perpendiculaire à $\mathbf{L_V}$. La direction U est donc conjuguée à la direction V. Attribuons un sens à la direction conjuguée de U, le sens du vecteur $\overline{\mathbf{ML_U}}$, et posons

$$\lambda\mathbf{V} = \overline{\mathbf{ML_U}}; \qquad \nu\mathbf{U} = \overline{\mathbf{ML_V}}.$$

On en déduit

$$\overline{\mathbf{ML_U}}.\overline{\mathbf{ML_V}} = -\lambda\nu\mathbf{UV}. \tag{25}$$

Mais

$$\overline{\mathbf{ML_U}}.\overline{\mathbf{ML_V}} = \overline{\mathbf{M}}.\mathbf{ML_U L_V}.$$

En portant cette expression dans la relation (25) et en multipliant les termes des deux membres par $\mathbf{M}$, on trouve

$$\mathbf{ML_U L_V} = -\lambda\nu\mathbf{MUV}$$

ou bien

$$\lambda\nu = -\frac{\mathbf{ML_U L_V}}{\mathbf{MUV}} = -K.$$

Si le vecteur $\mathbf{V}$ est directement parallèle à la direction conjuguée de $\mathbf{U}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{U}$ est directement parallèle à la direction conjuguée de $\mathbf{V}$ ($\nu > 0$) dans le cas où la courbure totale est négative. Si cette courbure est positive, $\mathbf{U}$ est inversement parallèle à la direction conjuguée de $\mathbf{V}$.

La dérivée prise dans une direction asymptotique étant perpendiculaire à la direction de différentiation, il en résulte qu'une direction asymptotique est conjuguée à elle-même. Les deux directions asymptotiques, définies par les deux valeurs (24) de $\operatorname{tang}\gamma$, diffèrent cependant lorsqu'on tient compte des sens. Supposons toujours l_1 positif et envisageons la direction asymptotique pour laquelle γ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. L'angle $\mu (= \mathbf{O}, \mathbf{L}_S)$ est négatif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. Il en résulte que $\overline{\mathbf{ML}_S}$ est directement parallèle à $\mathbf{S}$. Au contraire, pour la seconde direction asymptotique, γ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, μ entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$, et le vecteur $\overline{\mathbf{ML}_S}$ est donc inversement parallèle à $\dot{\mathbf{S}}$. Pour cette direction asymptotique, les deux directions conjuguées sont confondues, mais par sens opposés.

VIII. — Dérivées d'un vecteur dans les différentes directions de l'espace.

Je vais examiner maintenant l'homographie établie entre les différentes directions de l'espace, considérées comme des directions de différentiation et les directions des dérivées correspondantes. Cette homographie sera supposée propre : à trois directions de différentiation non coplanaires correspondront trois dérivées non coplanaires, et la dérivée de $\mathbf{L}$ n'est nulle dans aucune direction de l'espace.

Soient alors $\mathbf{U}; \mathbf{V}, \mathbf{W}$ trois vecteurs-unité non coplanaires, $\mathbf{L}_U, \mathbf{L}_V, \mathbf{L}_W$ les dérivées prises dans ces directions et $\mathbf{T}$ un vecteur-unité défini par l'expression

$$\mathbf{T} = k_1 \mathbf{U} + k_2 \mathbf{V} + k_3 \mathbf{W},$$

k_1, k_2, k_3 désignant trois nombres. La dérivée de $\mathbf{L}$, prise dans la direction de $\mathbf{T}$, est donnée par la formule

$$\mathbf{L}_T = k_1 \mathbf{L}_U + k_2 \mathbf{L}_V + k_3 \mathbf{L}_W. \tag{1}$$

Menons à partir du point P un segment PP_T correspondant à chaque direction T, le vecteur de ce segment étant égal à $\mathbf{L}_T$. L'ensemble des extrémités P_T de ces segments engendre une surface que j'appellerai l'indicatrice des dérivées de $\mathbf{L}$ au point P. Il résulte de la formule (1) que cette surface est un ellipsoïde. Dans son livre, *Vectoranalysis*, M. Valentiner a attiré l'attention sur cet ellipsoïde. Je vais montrer plus loin les rapports étroits qui existent entre les propriétés de cet ellipsoïde et la nature de l'homographie établie entre deux gerbes de droites et de plans.

Supposons, pour plus de simplicité, que les vecteurs U,V,W forment un système trirectangle. Si l'on choisit le point P comme origine de trois axes de coordonnees obliques (x, y, z), parallèles à $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$, respectivement, les coordonnées du point P_1, par rapport à ces axes, sont données par les nombres

$$x = k_1 l_u; \qquad y = k_2 l_v, \qquad z = k_3 l_w,$$

l_u, l_v et l_w désignant les modules des dérivees $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$. T étant un vecteur-unité on a, d'autre part,

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1,$$

d'où l'on déduit l'équation de l'indicatrice sous la forme

$$\frac{x^2}{l_u^2} + \frac{y^2}{l_v^2} + \frac{z^2}{l_w^2} = 1. \tag{2}$$

Il est évident que l'indicatrice des dérivées relative à un plan α est constituee par l'ellipse, intersection entre cet ellipsoïde et le plan α' des dérivées prises dans les différentes directions du plan α.

La forme de l'équation (2) fait voir que l'ellipsoïde est rapporté à des axes formés par trois diamètres conjugués de l'indicatrice. Réciproquement, on voit sans peine que si les dérivées de L, prises dans trois directions U, V, W, sont parallèles à trois diamètres conjugués de l'indicatrice, les directions U, V, W forment un système trirectangle.

Il existe, en particulier, trois directions trirectangles O, P, Q, telles que les dérivées prises dans ces directions sont parallèles aux directions O′, P′, Q′ des axes principaux de l'ellipsoïde. Les directions O, P, Q seront dites les *directions principales de différentiation du champ*, O′, P′ Q′ les *directions principales dérivées*. A l'aide des trois dérivées $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$, prises dans trois directions trirectangles, on peut déterminer les cosinus directeurs α, β, γ de chacune des directions principales de différentiation. Ces nombres sont définis par le système

$$\begin{aligned}
&\alpha(\mathbf{L}_U^2 - l^2) + \beta\,\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{L}_V} + \gamma\,\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{L}_U} = 0,\\
&\alpha\,\mathbf{L}_U\overline{\mathbf{L}_V} + \beta(\mathbf{L}_V^2 - l^2) + \gamma\,\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{L}_W} = 0,\\
&\alpha\,\mathbf{L}_W\overline{\mathbf{L}_U} + \beta\,\mathbf{L}_V\overline{\mathbf{L}_W} + \gamma(\mathbf{L}_W^2 - l^2) = 0.
\end{aligned}$$

Le nombre l représente la longueur du demi-axe principal de l'indicatrice correspondant à la direction envisagée. Il est déterminé par la formule bien connue :

$$l^6 - l^4(\mathbf{L}_U^2 + \mathbf{L}_V^2 + \mathbf{L}_W^2) + l^2\left(\overline{\mathbf{L}_V\,\mathbf{L}_W}^2 + \overline{\mathbf{L}_W\,\mathbf{L}_U}^2 + \overline{\mathbf{L}_U\,\mathbf{L}_V}^2\right) - (\mathbf{L}_U\,\mathbf{L}_V\,\mathbf{L}_W)^2 = 0.$$

Par un raisonnement analogue à celui exposé à propos des dérivées parallèles à un plan, on peut montrer qu'une homographie quelconque établie entre deux gerbes de droites A_1 et A_2 définit (à un facteur près) un ellipsoïde H_2 équivalent à l'indicatrice des dérivées envisagée ci-dessus, ayant comme centre le sommet de la gerbe A_2. Il est évident que l'on peut construire de même un ellipsoïde H_1 ayant pour centre le sommet de la gerbe A_1. Les longueurs des axes de H_1 sont inversement proportionnelles à celles des axes de H_2 et la même proportionnalité inverse existe entre tous les diamètres qui se correspondent dans les deux ellipsoïdes.

Les dérivées du vecteur **L** prises dans trois directions trirectangles de A_1 sont parallèles à trois diamètres conjugués de H_2. Réciproquement, si les directions de différentiation sont parallèles à trois diamètres conjugués de H_1, les dérivées forment un système trirectangle. Les trois directions de différentiation et les trois dérivées correspondantes ne peuvent former deux systèmes trirectangles que si les premières sont parallèles aux axes principaux de H_1 (directions principales de différentiation), auquel cas les dérivées sont parallèles aux axes principaux de H_2 (directions principales dérivées).

J'ai exposé plus haut certaines relations concernant les directions faisant partie de deux faisceaux de droites qui se correspondent. Il est clair que l'homographie établie dans la gerbe permet de développer des relations analogues relatives à deux faisceaux de plans qui se correspondent.

Soit $\mathbf{L}_U$ la dérivée de **L**, prise dans la direction d'un certain vecteur **U**. A chaque plan passant par un axe u, parallèle à **U**, correspond un plan passant par un axe u', parallèle à $\mathbf{L}_U$. Je vais examiner l'homographie qui fait correspondre le faisceau u' au faisceau u. A cet effet, je choisis deux vecteurs-unité, **V** et **W**, formant avec **U** un système trirectangle. Au plan ρ_v, parallèle au rotateur **UV**, correspond le plan ρ'_v, parallèle au rotateur $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V$; de même au plan ρ_w, parallèle à **UW**, correspond le plan ρ'_w, parallèle à $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_W$. Les trois vecteurs $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$ sont parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde H_2.

Soit **S** un vecteur défini par la relation

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\cos\vartheta + \mathbf{W}\sin\vartheta.$$

La dérivée $\mathbf{L}_S$ peut s'écrire

$$\mathbf{L}_S = \mathbf{L}_V\cos\vartheta + \mathbf{L}_W\sin\vartheta. \tag{3}$$

Au plan ρ_s, parallèle à **US**, correspond le plan ρ'_s, parallèle à $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_S$; $\mathbf{L}_U$ et $\mathbf{L}_S$ sont parallèles à deux diamètres conjugués de ce plan, puisque **S** est perpendiculaire à **U**.

Multiplions par $\pi\mathbf{L}_U$ les termes de la relation (3). Il vient

$$\pi\mathbf{L}_U\mathbf{L}_S = \pi\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V\cos\vartheta + \pi\mathbf{L}_U\mathbf{L}_W\sin\vartheta. \tag{4}$$

L'ellipse, intersection entre le plan ρ'_s et l'ellipsoïde H_2, a une superficie égale à $\pi \operatorname{mod} \mathbf{L}_U\mathbf{L}_S$. De même, les modules des rotateurs $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V$ et $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_W$ sont proportionnels aux aires des sections faites par les plans ρ'_v et ρ'_w. D'après la formule (4), chaque plan ρ'_s du faisceau u' est ainsi défini quant à son orientation et quant à la mesure de son intersection avec l'ellipsoïde par une somme de deux termes dont chacun exprime la mesure et l'orientation des sections faites par les plans ρ'_v et ρ'_w, multipliés, l'un par $\cos\vartheta$, l'autre par $\sin\vartheta$, ϑ étant l'angle que le plan ρ_s forme avec ρ_v. L'analogie avec l'homographie entre deux faisceaux de droites ressort ainsi de façon parfaite. La longueur des diamètres conjugués de l'ellipse se trouve remplacée par la superficie des sections des plans conjugués.

On peut en déduire qu'il existe, dans le faisceau u, deux plans rectangulaires α et β auxquels correspondent deux plans rectangulaires de u'. Par analogie avec les formules établies pour les faisceaux de droites, on conclut que ces deux plans α et β forment, avec ρ_v, des angles donnés par la formule

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2\,\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V\,\overline{\mathbf{L}_U\mathbf{L}_W}}{\overline{\mathbf{L}_U\mathbf{L}_V}^2 - \overline{\mathbf{L}_U\mathbf{L}_W}^2}.$$

En particulier, l'homographie ne peut être une égalité que si tous les rotateurs $\mathbf{L}_U\mathbf{L}_S$ ont même module, quel que soit le vecteur **S**, perpendiculaire à **U**.

IX. — Directions tautologues et plans tautologues. Champs irrotationnels.

On sait que toute homographie dans une gerbe comporte trois droites doubles (dont une au moins réelle) et trois plans doubles (dont un au moins réel). Ces éléments doubles correspondent à ce que l'on appelle des directions tautologues et des plans tautologues. Je vais maintenant déterminer ces éléments doubles. Soient $\mathbf{O}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ trois vecteurs-unité parallèles aux directions principales de différentiation, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ les dérivées de $\mathbf{L}$ dans ces directions. Si le vecteur $\mathbf{S}$, défini par l'expression

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{O} + \beta \mathbf{P} + \gamma \mathbf{Q},$$

est parallèle à une direction tautologue, on doit avoir

$$\mathbf{L}_S = \alpha \mathbf{L}_1 + \beta \mathbf{L}_2 + \gamma \mathbf{L}_3 = \sigma \mathbf{S} = \sigma(\alpha \mathbf{O} + \beta \mathbf{P} + \gamma \mathbf{Q}).$$

En multipliant par $\overline{\mathbf{O}}$, $\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{Q}}$ successivement, on trouve les relations :

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha(\mathbf{L}_1\overline{\mathbf{O}} - \sigma) + \beta\, \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{O}} + \gamma\, \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{O}} = 0, \\ \alpha\, \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{P}} + \beta(\mathbf{L}_2\overline{\mathbf{P}} - \sigma) + \gamma\, \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{P}} = 0, \\ \alpha\, \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{Q}} + \beta\, \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{Q}} + \gamma(\mathbf{L}_3\overline{\mathbf{Q}} - \sigma) = 0. \end{cases}$$

Le nombre σ est ainsi déterminé par l'équation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{O}} - \sigma, & \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{O}}, & \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{O}} \\ \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{P}}, & \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{P}} - \sigma, & \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{P}} \\ \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{Q}}, & \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{Q}}, & \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{Q}} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (2) qui, étant du troisième degré en σ, a au moins une racine réelle, fait connaître le module et le sens de la dérivée de $\mathbf{L}$ dans la direction tautologue S. Le système (1) détermine ensuite la direction tautologue correspondant à chacune des racines σ. Si le système (1) est satisfait par plus de trois séries de valeurs différentes de α, β, γ, il est satisfait par une infinité de valeurs de ces quantités. S'il y a plus de trois directions tautologues dans un champ, il y en a donc une infinité : c'est une propriété bien connue de l'homographie.

Je vais déterminer maintenant l'orientation des plans tautologues au point P. Soit **u** un rotateur-unité parallèle à un plan tautologue. Il peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{u} = \lambda\overline{\mathbf{O}} + \mu\overline{\mathbf{P}} + \nu\overline{\mathbf{Q}}, \tag{3}$$

λ, μ, ν étant les cosinus directeurs de la normale du plan par rapport aux directions principales de différentiation. Par hypothèse, la dérivée de **L** prise dans une direction quelconque parallèle à **u** est elle-même parallèle à **u**. Je choisis alors trois directions dont les cosinus directeurs ont respectivement les valeurs suivantes :

$$\left(\text{o}, \frac{\nu}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \frac{-\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right); \quad \left(\frac{-\nu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \text{o}, \frac{\lambda}{\sqrt{1-\mu^2}}\right); \quad \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-\nu^2}}, \frac{-\lambda}{\sqrt{1-\nu^2}}, \text{o}\right).$$

Ces directions sont toutes parallèles à **u**. En ecrivant que la dérivée de **L** dans chacune de ces directions est parallèle à **u**, on obtient le système de trois équations que voici :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{u}(\nu\,\mathbf{L}_2 - \mu\mathbf{L}_3) = \text{o}, \\ &\mathbf{u}(\lambda\,\mathbf{L}_3 - \nu\,\mathbf{L}_1) = \text{o}, \\ &\mathbf{u}(\mu\mathbf{L}_1 - \lambda\,\mathbf{L}_2) = \text{o}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Multiplions les termes de la seconde des relations (4) par $-\nu$, ceux de la troisième par μ, et additionnons ensuite membre à membre. Il vient

$$\mathbf{u}(\mu^2\mathbf{L}_1 + \nu^2\mathbf{L}_1 - \lambda\mu\mathbf{L}_2 - \nu\lambda\mathbf{L}_3) = \text{o}.$$

Introduisons la notation

$$\mathbf{L}_T = \lambda\mathbf{L}_1 + \mu\mathbf{L}_2 + \nu\mathbf{L}_3 \tag{5}$$

et remplaçons $\mu^2 + \nu^2$ par $1 - \lambda^2$. Nous trouvons

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}_1 - \lambda\mathbf{L}_T) = \text{o}. \tag{6}$$

Un calcul analogue nous donne

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}_2 - \mu\mathbf{L}_1) = \text{o}. \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}_3 - \nu\,\mathbf{L}_1) = \text{o}. \tag{8}$$

Posons

$$\mathfrak{T} = \mathbf{u}\mathbf{L}_1$$

et remplaçons dans les produits $\mathbf{uL}_1$, $\mathbf{uL}_2$, $\mathbf{uL}_3$ le rotateur $\mathbf{u}$ par l'expression (3). Les équations (6), (7) et (8) peuvent alors s'écrire

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \lambda(\mathbf{L}_1\overline{\mathbf{O}}-\mathfrak{S}) & +\mu\ \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{P}} & +\nu\ \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{Q}} & =0, \\ \lambda\ \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{O}} & +\mu(\mathbf{L}_2\overline{\mathbf{P}}-\mathfrak{S}) & +\nu\ \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{Q}} & =0, \\ \lambda\ \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{O}} & +\mu\ \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{P}} & +\nu(\mathbf{L}_3\overline{\mathbf{Q}}-\mathfrak{S}) & =0. \end{array}\right.$$

La quantité $\mathfrak{S}$ est ainsi déterminée par l'équation

$$(10)\qquad \left|\begin{array}{lll} \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{O}}-\mathfrak{S}, & \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{P}}, & \mathbf{L}_1\overline{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{O}}, & \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{P}}-\mathfrak{S}, & \mathbf{L}_2\overline{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{O}}, & \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{P}}, & \mathbf{L}_3\overline{\mathbf{Q}}-\mathfrak{S} \end{array}\right| = 0.$$

L'équation (10) faisant connaître trois valeurs de $\mathfrak{S}$, dont une au moins réelle, le système (9) détermine ensuite l'orientation des plans tautologues.

Remarquons que l'équation (10) est identique à (2). On a donc

$$\mathfrak{S} = \sigma.$$

Le vecteur $\mathbf{L}_1$ défini par (5) est la dérivée de $\mathbf{L}$ dans la direction perpendiculaire au plan tautologue. $\mathfrak{S}$ est égal à la mesure algébrique de la projection de $\mathbf{L}_1$ sur la direction de différentiation. Si l'on fait correspondre à la direction tautologue définie par la valeur σ_1 de σ le plan tautologue défini par la valeur $\mathfrak{S}_1$ égale à σ_1, on peut donc conclure ce qui suit :

La projection sur la normale d'un plan tautologue de la dérivée de $\mathbf{L}$, prise dans la direction de cette normale, a même mesure algébrique que la dérivée de $\mathbf{L}$ prise dans la direction tautologue correspondante.

On voit en outre que, s'il y a dans le champ trois directions tautologues réelles, il y a aussi trois plans tautologues réels; il va de soi que ces plans contiennent chacun deux des directions tautologues. Ces conclusions résultent d'ailleurs immédiatement de la considération de l'homographie dans la gerbe.

Examinons en quel cas un plan tautologue peut être perpendiculaire à une direction tautologue. Dans le plan tautologue, il existe deux directions rectangulaires U et V telles que les dérivées prises dans ces directions sont également rectangulaires. La direction tautologue W étant perpendiculaire au plan tautologue, on a ainsi un système de directions de différentiation trirectangle donnant naissance à trois dérivées qui forment également un système trirectangle. Il en résulte que la direction tautologue W est une direction principale et, par conséquent, le plan tautologue un plan principal de l'indicatrice des dérivées.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au point P trois directions tautologues formant un système trirectangle est que le curl du vecteur **L** soit nul en ce point. Si les directions tautologues sont trirectangles, elles coïncident avec les directions principales de différentiation. On peut exprimer curl **L** comme suit :

$$\operatorname{curl}\mathbf{L} = \overline{\mathbf{O}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{O}}} + \overline{\mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{P}}} + \overline{\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Q}}} = \overline{\mathbf{OL}_1} + \overline{\mathbf{PL}_2} + \overline{\mathbf{QL}_3}.$$

Les directions principales de différentiation étant tautologues, chacun des trois termes du dernier membre de cette relation est nul. La condition est donc nécessaire. Supposons, réciproquement, que curl **L** soit nul. Il existe dans le champ une direction tautologue U. Choisissons comme directions de différentiation la direction U et deux autres directions quelconques, V et W formant avec U un système trirectangle. Nous pouvons alors exprimer curl **L** sous la forme :

$$\operatorname{curl}\mathbf{L} = \overline{\mathbf{UL}_U} + \overline{\mathbf{VL}_V} + \overline{\mathbf{WL}_W}.$$

Le premier terme du second membre est nul, U étant une direction tautologue. Mais curl **L** est nul. On a donc

$$\mathbf{VL}_V + \mathbf{WL}_W = 0.$$

En multipliant les termes de cette équation d'abord par **W**, ensuite par **V**, on voit que les dérivées $\mathbf{L}_V$ et $\mathbf{L}_W$ sont coplanaires à **V** et **W**. Le plan ρ, perpendiculaire à U, est donc un plan tautologue et U est une direction principale de l'indicatrice. D'autre part, curl **L** étant nul, il existe dans le plan tautologue ρ, d'après ce qui a été démontré au paragraphe VII, deux directions tautologues rectangulaires. C'est ce qui achève la démonstration.

Un champ vectoriel est dit *irrotationnel* lorsque le curl du vecteur **L** est nul en tous les points du champ. L'homographie envisagée est dans ce cas une *dilatation*. Les champs irrotationnels jouissent de propriétés analogues à celles exposées au paragraphe VII à propos des plans tautologues parallèles à curl **L**. On voit d'abord que la démonstration de la formule

$$\mathbf{V}\overline{\mathbf{L}_{U}} = \mathbf{U}\overline{\mathbf{L}_{V}}$$

donnée dans ce paragraphe reste valable, **U** et **V** représentant ici deux vecteurs-unité quelconques de l'espace. Cette formule permet de déterminer, très simplement, les axes principaux de l'indicatrice des dérivées. Soient **U**, **V**, **W** trois vecteurs-unité quelconques formant un système trirectangle et **S** un vecteur-unité défini par l'expression

$$\mathbf{S} = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V} + \gamma\mathbf{W}.$$

Les directions tautologues coïncidant avec les directions principales de l'indicatrice, **S** est parallèle à une de ces directions, si l'on a

$$\mathbf{L}_{S} = \alpha\mathbf{L}_{U} + \beta\mathbf{L}_{V} + \gamma\mathbf{L}_{W} = \sigma\mathbf{S},$$

et le raisonnement exposé au début de ce paragraphe permet de déterminer σ par l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L}_{U}\overline{\mathbf{U}} - \sigma, & \mathbf{L}_{V}\overline{\mathbf{U}}, & \mathbf{L}_{W}\overline{\mathbf{U}} \\ \mathbf{L}_{U}\overline{\mathbf{V}}, & \mathbf{L}_{V}\overline{\mathbf{V}} - \sigma, & \mathbf{L}_{W}\overline{\mathbf{V}} \\ \mathbf{L}_{U}\overline{\mathbf{W}}, & \mathbf{L}_{V}\overline{\mathbf{W}}, & \mathbf{L}_{W}\overline{\mathbf{W}} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant et en tenant compte des formules (4) et (5) du paragraphe I, on trouve

$$\sigma^3 - \sigma^2(\mathbf{VWL}_{U} + \mathbf{WUL}_{V} + \mathbf{UVL}_{W})$$
$$+ \sigma(\mathbf{UL}_{V}\mathbf{L}_{W} + \mathbf{VL}_{W}\mathbf{L}_{U} + \mathbf{WL}_{U}\mathbf{L}_{V}) - \mathbf{L}_{U}\mathbf{L}_{V}\mathbf{L}_{W} = 0,$$

ou bien, en introduisant un dénominateur **UVW** égal à 1,

$$(11) \qquad \sigma^3 - \sigma^2\frac{\mathbf{VWL}_{U} + \mathbf{WUL}_{V} + \mathbf{UVL}_{W}}{\mathbf{UVW}}$$
$$+ \sigma\frac{\mathbf{UL}_{V}\mathbf{L}_{W} + \mathbf{VL}_{W}\mathbf{L}_{U} + \mathbf{WL}_{U}\mathbf{L}_{V}}{\mathbf{UVW}} - \frac{\mathbf{L}_{U}\mathbf{L}_{V}\mathbf{L}_{W}}{\mathbf{UVW}} = 0.$$

Les coefficients qui figurent dans cette équation sont les trois invariants I_1, I_2, I_3 de l'homographie, définis par MM. Burali-Forti et Marco-Longo. Ils gardent la même valeur, quels que soient les trois vecteurs **U**, **V**, **W**. On peut donc supprimer la condition d'orthogonalité imposée tout d'abord à ces vecteurs.

Par une extension de la terminologie employée dans la théorie des surfaces, on peut dire que l'invariant I_1 représente la courbure moyenne du champ vectoriel. A l'aide du système réciproque de **U**, **V**, **W**, on peut écrire ce coefficient comme suit :

$$I_1 = \overline{\mathbf{U}}_0 \mathbf{L}_U + \overline{\mathbf{V}}_0 \mathbf{L}_V + \overline{\mathbf{W}}_0 \mathbf{L}_W.$$

I_1 est donc égal à la divergence du vecteur **L**.

De même, le coefficient

$$I_3 = \frac{\mathbf{L}_U \mathbf{L}_V \mathbf{L}_W}{\mathbf{UVW}}$$

peut être pris comme mesure de la courbure totale spatiale du champ. On pourrait donner au coefficient I_2 le nom de *courbure mixte du champ*. J'étendrai ces dénominations à un champ quelconque, irrotationnel ou non.

Supposons que, dans un champ quelconque, les trois vecteurs **U**, **V**, **W** soient directement parallèles aux arêtes d'un trièdre de sens positif. Le nombre I_3 est alors positif ou négatif selon qu'un trièdre, dont les arêtes sont directement parallèles à $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$ respectivement, a le sens positif ou le sens négatif. Si, en particulier, les vecteurs **U**, **V**, **W** sont parallèles aux trois directions tautologues du champ, et que l'on désigne par σ_1, σ_2, σ_3 les mesures algébriques des dérivées de **L** dans ces trois directions, on voit que

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Soit **U** un vecteur-unité parallèle à une direction tautologue. Je dirai que cette direction est de première ou de seconde espèce, selon que la dérivée $\mathbf{L}_U$ est directement ou inversemont parallèle à **U**. Soient **V** et **W** deux vecteurs-unité non coplanaires à **U**. Les deux rotateurs **UV** et **UW** définissent deux plans rotatifs α et β du faisceau de plans u dont l'axe est parallèle à **U**. Aux plans α et β correspondent, en vertu de l'homographie dans le faisceau, deux autres plans α' et β' directement parallèles à $\mathbf{UL}_V$ et à $\mathbf{UL}_W$ respectivement. Il est évident que l'homographie dans le faisceau u est directe ou inverse, selon que les nombres **UVW** et $\mathbf{UL_v L_w}$ ont même signe ou des signes contraires. On en conclut que, dans un faisceau tautologue de première espèce, l'homographie est directe ou inverse, selon que la courbure totale du champ est positive ou négative, tandis que, dans un faisceau de seconde espèce, l'homographie est directe si la courbure totale est négative, inverse dans le cas contraire.

On peut distinguer, de même, deux espèces de plans tautologues. Soit α un plan tautologue sur lequel a été fixé un sens de rotation arbitraire. Choisissons un vecteur unité **U** non parallèle à α. Le plan tautologue α sera dit de première ou de seconde espèce, selon que les angles $(\mathbf{U}, \alpha)$ et $(\mathbf{L_1}, \alpha)$ ont même signe ou des signes contraires. On voit sans peine que, dans un plan tautologue de première espèce, l'homographie est directe ou inverse selon que la courbure totale (spatiale) du champ est positive ou négative. Dans un plan tautologue de seconde espèce, c'est le contraire qui a lieu.

X. — Homologie dans une gerbe.

Si l'homographie définie dans une gerbe comporte plus de trois éléments doubles, elle en comporte une infinité : elle est alors une homologie. On sait que dans toute homologie il existe un plan dont toutes les droites sont des droites doubles, et une droite, axe d'un faisceau dont tous les plans sont des plans doubles. Le champ vectoriel que nous avons à examiner comporte donc un plan dont toutes les directions sont tautologues — je dirai qu'un tel plan est *parfait* — et une direction parallèle à l'axe d'un faisceau composé de plans tautologues. Cette direction (ou la droite, axe du faisceau) sera dite *parfaite*.

La correspondance établie par l'homologie dans le plan parfait est une identité. D'après une remarque faite au paragraphe VI, il faut donc que l'indicatrice des dérivées relatives à ce plan soit un cercle. Il en résulte que le plan parfait coïncide avec l'une des sections centrales circulaires de l'ellipsoïde H_2, laquelle se trouve confondue avec l'une des sections circulaires de H_1. Tout ellipsoïde ayant deux sections centrales circulaires réelles, on voit que l'homologie peut être engendrée de deux manières différentes, selon que l'une ou l'autre des sections circulaires de H_2 coïncide avec la section de H_1 à laquelle elle correspond. Dans une homologie, la disposition réciproque des directions principales de différentiation et des directions principales dérivées, ainsi que la direction et l'orientation des éléments parfaits, se trouvent ainsi complètement définies par les axes de l'ellipsoïde H_2.

On sait que les deux sections circulaires passent par l'axe principal moyen de l'ellipsoïde; le demi-axe principal est égal au rayon de la section circulaire. Ladite section constituant, d'autre part, un plan parfait, il en résulte que l'axe principal moyen de H_1 coïncide avec l'axe principal moyen de H_2. Les plans principaux perpendiculaires à ces axes coïncident donc également et constituent, par conséquent, un plan tautologue π. Ce plan tautologue contient une droite tautologue u_1, intersection entre π et la section circulaire parfaite. Le plan π contient donc une seconde droite tautologue u_2 (laquelle, dans un cas particulier, peut coïncider avec u_1). La droite u_2 est une droite parfaite. En effet, si elle coïncide avec u_1, tout plan passant par u_1 contient deux directions tautologues confondues et est, par conséquent, lui-même tautologue. Si u_2 est distincte de u_1, tout plan ρ passant par u_2 rencontre la section circulaire parfaite selon une droite qui est nécessairement tautologue. Le plan ρ contient donc deux directions tautologues; il est tautologue. Tous les plans passant par u_2 sont donc tautologues et la droite u_2 est parfaite.

L'homographie produite dans le faisceau de plans dont l'axe est la droite u_2 est une identité. D'après une remarque faite à la fin du paragraphe VIII, on peut donc conclure que les sections faites dans l'ellipsoïde par les différents plans du faisceau u_2 ont toutes la même aire. Cette conclusion étant vraie pour les deux homologies réalisables, on voit que tout ellipsoïde comporte deux diamètres réels, généralement distincts, situés dans le plan principal perpendiculaire à l'axe principal moyen, et qui sont les axes de deux faisceaux de plans découpant dans l'ellipsoïde des sections d'une aire constante. On peut remarquer l'analogie qui existe entre ces axes des sections égales et les plans des diamètres égaux (sections circulaires).

On sait, d'ailleurs, qu'une homographie entre deux gerbes quelconques A_1 et A_2 comporte toujours deux faisceaux de droites a_1 et b_1

dans A_1 auxquels correspondent dans A_2 deux faisceaux de droites a_2 et b_2 égaux à a_1 et à b_1 respectivement. D'après ce qui vient d'être dit, il est évident que ces faisceaux de droites coïncident avec les sections circulaires des ellipsoïdes H_1 et H_2. L'homographie comporte également deux faisceaux de plans α_1 et β_1 dans A_1 auxquels correspondent dans A_2 deux faisceaux de plans α_2 et β_2 égaux à α_1 et à β_1, respectivement. Les axes de ces faisceaux sont précisément les axes des sections égales des ellipsoïdes.

Je vais examiner l'homographie produite par l'homologie dans le plan π perpendiculaire aux axes principaux moyens des ellipsoïdes, et je déterminerai ainsi la direction des axes des sections égales. Le plan π contient les directions principales de différentiation Q et O et les axes principaux parallèles à $\mathbf{L}_3$ et à $\mathbf{L}_1$. On peut donc écrire

$$\mathbf{L}_3 = \lambda_3(\mathbf{Q}\cos\varphi + \mathbf{O}\sin\varphi), \qquad \mathbf{L}_1 = \lambda_1(-\mathbf{Q}\sin\varphi + \mathbf{O}\cos\varphi).$$

Posons, en outre,

$$\mathbf{L}_2 = \lambda_2 \mathbf{P}.$$

Désignons par ζ_1 et ζ_2 les angles que les directions tautologues du plan π forment avec le vecteur $\frac{1}{\lambda_3}\mathbf{L}_3$. Les angles que ces directions forment avec $\mathbf{Q}$ sont donc $\varphi + \zeta_1$ et $\varphi + \zeta_2$.

Les équations [(3), (4) et (5), § VII] déterminent les nombres σ_1 et σ_2 ainsi que les angles α_1 et α_2 relatifs aux directions tautologues. Il y a lieu de poser dans ces formules

$$l_1 = \lambda_3, \qquad l_2 = \lambda_1, \qquad \alpha = \varphi + \zeta.$$

Une des racines, σ_1 par exemple, doit être égale à λ_2; il en résulte que la seconde racine σ_2 est donnée par l'expression

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2}.$$

L'angle φ doit donc satisfaire à la condition

$$\cos\varphi = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_1)}.$$

En portant ces valeurs de φ, de σ_1 et de σ_2 dans les équations [(3), § VII], on déduit

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \operatorname{tang}(\varphi + \zeta_1) = \pm\sqrt{\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}},$$

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \operatorname{tang}(\varphi + \zeta_2) = \pm\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}};$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{tang}\zeta_1 = \pm\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\sqrt{\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}, \qquad \operatorname{tang}\zeta_2 = \pm\sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}}.$$

Les angles ζ_1 définisseut l'orientation des sections circulaires, les angles ζ_2 la direction des axes des sections égales. Ces angles sont nécessairement réels, puisque λ_2^2 est compris entre λ_1^2 et λ_3^2.

On voit, en particulier, que l'homologie peut être « spéciale » (la droite parfaite contenue dans le plan parfait), si la racine σ_2 est égale à σ_1, c'est-à-dire à λ_2. La condition pour qu'il en soit ainsi est donc que

$$\lambda_2^2 = \lambda_3\lambda_1.$$

Les axes des sections égales sont donc contenus dans les sections circulaires si la longueur de l'axe principal moyen de l'ellipsoïde est la moyenne géométrique des longueurs des deux autres axes.

L'homographie dans le plan π est alors parabolique.

De même que tout ellipsoïde comporte, en plus des sections centrales circulaires réelles, quatre sections centrales circulaires imaginaires, il comporte aussi quatre diamètres imaginaires, axes de sections égales. Ces quatre diamètres sont situés, deux par deux, dans les deux autres plans principaux et si l'on détermine les directions des six axes de sections égales, on constate qu'ils sont contenus trois par trois dans quatre plans imaginaires passant par le centre. On peut dire ainsi que les axes des sections égales sont les arêtes d'un quadrilatère complet dans la gerbe, quadrilatère formé par quatre plans imaginaires orientés symétriquement par rapport aux axes principaux. Les plans principaux de l'ellipsoïde sont les plans diagonaux de ce quadrilatère.

Le plan parfait et la droite parfaite sont de première espèce, si la courbure totale du champ est positive; de seconde espèce, si cette courbure est négative.

Si l'ellipsoïde, indicatrice des dérivées, est de révolution, seule la direction principale parallèle à l'axe de révolution se trouve définie. Les deux autres directions principales de l'indicatrice, ainsi que les directions principales de différentiation auxquelles elles correspondent, sont indéterminées. Une homologie ne peut être engendrée que par la coïncidence des deux plans principaux des ellipsoïdes H_1 et H_2 qui sont perpendiculaires à l'axe de révolution.

Enfin, si l'indicatrice est une sphère, les directions principales de différentiation et les directions principales dérivées sont toutes indéterminées. Il y a cependant, en tous les cas, une direction tautologue réelle U, qui peut être choisie comme une des directions principales. Le plan ρ perpendiculaire à U est évidemment un plan tautologue. Si l'homographie dans ce plan est directe, il n'y a généralement aucune autre direction tautologue que U. L'homographie dans la gerbe est une égalité équivalente à une rotation d'un certain angle φ autour de l'axe parallèle à U, et se composant avec une symétrie par rapport au plan ρ dans le cas où la direction tautologue U est de seconde espèce. Si l'angle φ est égal à o ou à π, l'homographie est une homologie, le plan ρ étant parfait. Si l'homographie dans le plan ρ est inverse, ce plan comporte deux directions tautologues rectangulaires V et W dont l'une est de première et l'autre de seconde espèce. Une de ces directinos, soit V, est donc de même espèce que U et le plan parallèle à U et à V est un plan parfait. L'homographie est une homologie.

Dans toute homologie, le plan parfait est perpendiculaire à la direction parfaite. Si les directions (tautologues) du plan parfait sont de première espèce, l'homologie est une identité ou une symétrie par rapport au plan parfait selon que celui-ci est de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire selon que la courbure totale est positive ou négative. Si les directions du plan parfait sont de seconde espèce, l'homologie est une symétrie par rapport à la direction parfaite ou une symétrie par rapport au sommet de la gerbe, selon que la courbure totale est positive ou négative.

XI. — Champs vectoriels à dérivées nulles.

Jusqu'ici, j'ai admis que le vecteur **L** n'a de dérivée nulle dans aucune direction. Je me propose d'examiner maintenant le cas où une ou plusieurs des dérivées s'annuleraient. Il est d'abord évident que si les dérivées de **L**, prises dans trois directions non coplanaires, sont nulles toutes les trois, la dérivée est nulle dans n'importe quelle direction.

Supposons donc que les dérivées soient nulles dans deux directions différentes V et W, ces directions étant ainsi des directions d'invariabilité du vecteur **L**. Soit ρ le plan passant par le point P et parallèle à V et à W. La dérivée de **L** est alors nulle dans toutes les directions du plan ρ. Désignons par **U** un vecteur-unité perpendiculaire à ρ. On voit de suite que la dérivée prise dans une direction quelconque non parallèle à ρ est parallèle à la dérivée $\mathbf{L}_U$ prise dans la direction de **U**. En effet, **V** et **W** étant deux vecteurs rectangulaires du plan ρ, tout vecteur-unité **S** peut être exprimé sous la forme

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{U} + \beta \mathbf{V} + \gamma \mathbf{W},$$

et il en résulte que

$$\mathbf{L}_S = \alpha \mathbf{L}_U.$$

α étant toujours plus petit que 1 (si **S** est différent de **U**), on constate, en outre, que mod $\mathbf{L}_S$ est plus petit que mod $\mathbf{L}_U$. La direction O du vecteur $\mathbf{L}_U$ est une direction tautologue, et elle est la seule, exception faite des directions du plan ρ.

On peut dire que, dans ce cas, l'indicatrice des dérivées est un segment de droite ayant pour centre le point P et pour extrémités deux points P_U et P'_U tels que les vecteurs des segments PP_U et PP'_U sont égaux à $\mathbf{L}_U$ et à $-\mathbf{L}_U$ respectivement. L'ellipsoïde H_2 s'est contracté sur un de ses axes principaux. Réciproquement, dans l'ellipsoïde H_1 deux axes principaux ont une longueur infinie; cet ellipsoïde s'est donc transformé en deux plans, parallèles au plan ρ et équidistants de ρ.

La courbure totale et la courbure mixte du champ sont évidemment nulles. La courbure moyenne est nulle, elle aussi, dans le cas où $\mathbf{L}_U$ est parallèle au plan ρ. Le champ est irrotationnel si $\mathbf{L}_U$ est parallèle à $\mathbf{U}$, c'est-à-dire si l'indicatrice des dérivées est perpendiculaire au plan ρ.

Supposons enfin qu'il existe, au point P, une seule direction d'invariabilité de $\mathbf{L}$. La courbure totale du champ est toujours nulle. Inversement, si cette courbure est nulle, les dérivées $\mathbf{L}_U$, $\mathbf{L}_V$, $\mathbf{L}_W$ sont coplanaires, quelles que soient les directions U, V, W. On en conclut qu'il existe une direction dans laquelle la dérivée est nulle. Considérons trois vecteurs-unité $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ formant un système trirectangle, $\mathbf{U}$ étant parallèle à la direction d'invariabilité. Désignons par ρ le plan des vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$. Les dérivées $\mathbf{L}_V$ et $\mathbf{L}_W$ ne sont pas parallèles (sans quoi il existerait dans ρ une direction d'invariabilite, contrairement à l'hypothèse). Ces dérivées définissent donc un certain plan ρ', et il est évident que toutes les dérivées de $\mathbf{L}$ sont parallèles à ce plan ρ'.

Soit $\mathbf{S}$ un vecteur-unité défini par la relation

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{U} + \beta \mathbf{V} + \gamma \mathbf{W},$$

α n'étant ni nul ni égal à 1. $\mathbf{S}$ détermine avec $\mathbf{U}$ un plan qui coupe ρ selon une droite t. La dérivée $\mathbf{L}_S$ est alors parallèle à la dérivée $\mathbf{L}_T$ prise dans la direction de t, et l'on a en outre

$$\operatorname{mod} \mathbf{L}_S < \operatorname{mod} \mathbf{L}_T;$$

mod $\mathbf{L}_S$ diminue au fur et à mesure que α augmente en valeur absolue et s'annule pour $\alpha = \pm 1$. Les dérivées prises dans les directions t_i du plan ρ ont donc chacune un module maximum par rapport aux dérivées prises dans les directions du plan déterminé par t_i et U.

L'indicatrice E_2 des dérivées prises dans les différentes directions du plan ρ est une ellipse tracée dans le plan ρ'. Il est aisé de voir que l'indicatrice des dérivées prises dans les directions d'un plan σ quelconque, ne contenant pas U, est une ellipse, tangente intérieurement à l'ellipse E_2 et dont les points de contact avec E_2 sont les extrémités du diamètre parallèle à la dérivée prise dans la direction commune aux plans ρ et σ. Quant aux plans passant par U, leur indicatrice est un segment de droite égal au diamètre parallèle à la dérivée prise dans l'intersection de chacun de ces plans et du plan ρ. On peut donc dire que l'indicatrice des dérivées du champ est formée par l'espace superficiel compris à l'intérieur de l'ellipse E_2.

Dans l'ellipsoïde H_1, un axe principal (parallèle à la direction d'invariabilité U) a une longueur infinie. Cet ellipsoïde s'est donc transformé en un cylindre elliptique dont les deux autres axes principaux se trouvent dans le plan ρ. La section droite E_1 du cylindre H_1 correspond à l'ellipse E_2.

Le plan ρ' est un plan tautologue, et les propositions énoncées plus haut concernant les propriétés d'un plan tautologue restent évidemment valables pour le plan ρ'.

Il peut arriver, en particulier, que la direction d'invariabilité U soit parallèle au plan ρ' des dérivées de **L**. Dans ce cas, l'homographie dans ρ' est dégénérée. L'indicatrice des dérivées relative au plan ρ' est un segment de droite, parallèle à la dérivée prise dans la direction V du plan ρ' qui est perpendiculaire à U. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la courbure mixte du champ soit nulle également. En effet, la dérivée $\mathbf{L}_U$ étant nulle, les deux derniers termes de l'expression de la courbure mixte [*voir* la relation (11), § IX] sont nuls, et cette courbure a la valeur

$$\frac{\mathbf{U}\mathbf{L}_V\,\mathbf{L}_W}{\mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{W}}.$$

Ce terme est nul si le vecteur **U** est parallèle au rotateur $\mathbf{L}_V\mathbf{L}_W$. Réciproquement, si ce terme est nul, on peut conclure : ou bien que **U** est parallèle à $\mathbf{L}_V\mathbf{L}_W$ (c'est le cas envisagé), ou bien que $\mathbf{L}_V$ est parallèle à $\mathbf{L}_W$ (ou que l'un d'eux est nul), ce qui exigerait l'existence d'une seconde direction d'invariabilité différente de U.

Il y a un cas particulièrement important où le vecteur **L** possède une direction d'invariabilité : c'est celui où son module est constant. On peut supposer ce module égal à l'unité; le champ sera dit alors un *champ unitaire*. Je désignerai par **M** le vecteur d'un champ unitaire. Les dérivées d'un vecteur à module constant étant toutes perpendiculaires à ce vecteur, on voit que le plan tautologue ρ' des dérivées de **M** est perpendiculaire à **M**.

Supposons tout d'abord qu'en chaque point du champ la direction d'invariabilité soit parallèle à **M**. Ce vecteur ne change donc pas quand on s'éloigne de P dans la direction de **M**; autrement dit, **M** est constant tout le long d'une droite passant par P. Le champ vectoriel est ainsi représenté par une congruence de droites.

Il peut arriver, d'autre part, que le plan tautologue ρ' soit parallèle à curl**M**. **M**, qui est perpendiculaire à ρ', est donc perpendiculaire à son curl. On sait que lorsqu'un vecteur est constamment perpendiculaire à son curl, il est perpendiculaire à une famille de surfaces. Le vecteur-unité **M** représente donc la normale d'une famille de surfaces, et les diverses propositions relatives à ce cas exposées au paragraphe VII s'appliquent ainsi à la théorie des surfaces. Par exemple, la proposition bien connue relative aux directions tautologues rectangulaires peut s'énoncer comme suit : La condition nécessaire et suffisante pour que, dans tout plan tautologue d'un champ unitaire, il existe deux directions tautologues rectangulaires, est que le vecteur soit perpendiculaire à une famille de surfaces.

On voit aisément que, quelle que soit la direction d'invariabilite du vecteur-unité **M**, la courbure mixte du champ est égale à la courbure totale dans le plan tautologue ρ' perpendiculaire à **M**.

Si la direction d'invariabilité est parallèle à **M**, l'indicatrice des dérivées de **M** relative au plan tautologue constitue le pourtour de l'indicatrice des dérivées dans l'espace. S'il s'agit d'un vecteur perpendiculaire à une famille de surfaces, l'indicatrice des dérivées relative au plan tautologue est tangente intérieurement au pourtour de l'indicatrice des dérivées dans l'espace, lequel pourtour est déterminé par les dérivées prises dans les directions du plan ρ perpendiculaire à la direction d'invariabilité de **M**. La courbure totale de la surface, qui est égale à la courbure totale dans le plan tautologue, est égale à la courbure mixte du champ. Cette courbure s'annule si la direction d'invariabilité U est parallèle au plan tautologue ρ'. Dans ce cas, la formule [(10), § VII] montre que la dérivée de **M** dans une autre direction quelconque du plan ρ' est perpendiculaire à U ; la surface est développable. Quant à la courbure moyenne de la surface, elle est égale à la courbure moyenne du champ et par conséquent à la divergence du vecteur **M**.

Les rayons de courbure principaux de la surface sont les inverses des mesures algébriques des dérivées de **M** dans les directions principales de différentiation, lesquelles directions coïncident évidemment avec les directions principales de la surface. Le signe de chaque rayon de courbure principal est positif ou négatif, selon que la direction tautologue correspondante est de première ou de seconde espèce.

On voit que, si les deux directions tautologues sont de première espèce, la normale tend à s'incliner en avant quand on avance sur la surface dans une de ces directions. L'homographie étant directe, la dérivée dans n'importe quelle direction forme un angle aigu avec la direction de différentiation. La surface est donc située tout entière d'un même côté du plan tangent.

Si, au contraire, une direction tautologue est de première et l'autre de seconde espèce, la normale tend à s'incliner tantôt en avant, tantôt en arrière, et la surface est située de part et d'autre du plan tangent. Les directions asymptotiques séparent les secteurs dans lesquels la dérivée et la direction de différentiation forment un angle aigu de ceux où cet angle est obtus; c'est donc dans ces directions que la surface traverse le plan tangent.

Il a été remarqué, au paragraphe VII, que la direction asymptotique qui forme un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ avec la direction principale tautologue de première espèce est directement parallèle à sa direction conjuguée, tandis que celle pour laquelle cet angle est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π est inversement parallèle à sa direction conjuguée. Dans le premier cas, le plan tangent tend donc à tourner dans le sens positif quand on avance dans la direction asymptotique (sens de rotation concordant avec le sens linéaire du déplacement); dans le second cas, le plan tangent tend à tourner dans le sens négatif.

Rappelons que la torsion d'une courbe gauche est négative ou positive, selon que le plan osculateur tend à tourner dans le sens positif ou dans le sens négatif quand on avance dans la direction de la tangente. Pour une ligne asymptotique tracée sur une surface, le plan osculateur coïncide avec le plan tangent à la surface. Il en résulte que l'on peut distinguer comme suit le signe de la torsion des deux lignes asymptotiques se rencontrant en un point de la surface. Un observateur, debout sur le plan tangent à la surface et regardant dans la direction principale dans laquelle la surface s'incurve au-dessous du plan tangent (direction tautologue de première espèce), voit à sa gauche la ligne asymptotique dont la torsion est négative, à sa droite celle dont la torsion est positive. On voit aisément que cette distinction est indépendante du côté du plan sur lequel est placé l'observateur.

XII. — Théorèmes de Meunier et d'Euler généralisés. Indicatrice des courbures.

Envisageons dans un champ vectoriel une trajectoire isogonale F du champ, c'est-à-dire une courbe dont la tangente forme un angle constant avec la direction du champ. Il est évident que les éléments de cette courbe sont indépendants du module du vecteur défini dans le champ. Pour l'étude de ces éléments, on peut donc admettre que le champ est unitaire. En désignant par **M** ce vecteur-unité, par **T** le tangent de la courbe F, on a tout le long de F la relation

$$\mathbf{M}\overline{\mathbf{T}} = \text{const.}$$

Par une différentiation dans la direction du tangent **T**, on trouve

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathrm{T}}\overline{\mathbf{T}} + \frac{1}{\rho}\mathbf{M}\overline{\mathbf{N}} = 0.$$

Désignons par ω l'angle $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ que le normal principal de F forme avec **M**. Il vient

$$(1) \qquad \frac{\cos\omega}{\rho} = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathrm{T}}\overline{\mathbf{T}} = -\overline{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathrm{T}}.$$

Le second membre de cette relation ne dépend que du vecteur **M** et de la direction de **T**. Il en résulte que le rayon de courbure de toute courbe isogonale passant en un point P parallèlemnt à une direction donnée est proportionnel au cosinus de l'angle oblique que le normal principal forme avec la direction du champ. Si l'angle ω était droit, le membre gauche de la relation (1) serait nul. $\overline{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathrm{T}}$ serait donc nul également et le rayon de courbure ρ ne serait pas déterminé par l'équation (1).

Supposons, en particulier, que la courbe F soit une trajectoire orthogonale du champ. Sa tangente, perpendiculaire à **M**, est alors parallèle au plan tautologue. Attribuons au plan normal de F un sens de rotation concordant avec le sens linéaire de la tangente et comptons l'angle ω dans le sens positif à partir de la direction pointée de **M**. On peut alors exprimer le normal principal et le binormal de F par les relations suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathbf{N} = \mathbf{M}\cos\omega + \overline{\mathbf{TM}}\sin\omega, \\ \mathbf{B} = -\mathbf{M}\sin\omega + \overline{\mathbf{TM}}\cos\omega. \end{cases}$$

Si le normal principal de F est parallèle à **M**, on a

$$\cos\omega = \pm 1.$$

Dans ce cas, on convient d'attribuer un signe au rayon de courbure de F, le considérant comme négatif si **N** est directement parallèle à **M**, comme positif dans le cas contraire. En désignant par r le rayon de courbure d'une courbe dont le normal principal est parallèle à la direction du champ, nous avons alors la relation

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \overline{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathrm{T}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = -\frac{1}{r}.$$

Le théorème de Meunier reste donc valable pour les trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel quelconque. Le nombre $\frac{1}{r}$ représente ce qu'on appelle la *courbure normale de la courbe*. Il résulte de la formule (3) que ce nombre est nul pour les directions asymptotiques.

Afin de déterminer la variation du rayon de courbure r dans les différentes directions du plan tautologue, je vais évaluer le second membre de la relation (3). Je pose à cet effet :

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathrm{O}} = \mathbf{M}_1 = m_1(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathrm{P}} = \mathbf{M}_2 = m_2(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi).$$

En désignant par ϑ l'angle que le tangent **T** forme avec la direction principale de différentiation O, on peut écrire

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}\cos\vartheta + \mathbf{P}\sin\vartheta.$$

On a donc

$$(4) \quad \mathbf{M}_{\mathrm{T}} = \mathbf{M}_1\cos\vartheta + \mathbf{M}_2\sin\vartheta$$
$$= \mathbf{O}(m_1\cos\varphi\cos\vartheta - m_2\sin\varphi\sin\vartheta) + \mathbf{P}(m_1\sin\varphi\cos\vartheta + m_2\cos\varphi\sin\vartheta),$$

d'où il résulte que

$$(5)\quad \frac{1}{r} = \overline{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathrm{T}} = \cos\varphi\,(m_1\cos^2\vartheta + m_2\sin^2\vartheta) + (m_1 - m_2)\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Les valeurs $\frac{1}{r_o}$ et $\frac{1}{r_p}$ de la courbure normale, relatives aux directions principales de différentiation, sont donc données par les expressions

$$(6)\qquad \frac{1}{r_o} = m_1\cos\varphi; \qquad \frac{1}{r_p} = m_2\cos\varphi.$$

A l'aide de ces quantités on peut écrire la formule (5) comme suit :

$$(7)\qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_o} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_p} + \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_p}\right)\operatorname{tang}\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

De la relation (7) on déduit que le maximum et le minimum de la courbure $\frac{1}{r}$ sont fournis par des directions caractérisées par un angle ϑ tel que

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \operatorname{tang}\varphi,$$

ce qui donne les deux valeurs suivantes de ϑ :

$$\vartheta_1 = \frac{\varphi}{2}; \qquad \vartheta_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

D'après une remarque faite au paragraphe VII, les directions définies par ces angles sont les bissectrices des directions asymptotiques. Les valeurs de la courbure normale dans ces directions sont les suivantes :

$$(8)\quad \frac{1}{r_1} = \frac{m_1 - m_2}{2} + \cos\varphi\frac{m_1 + m_2}{2}; \qquad \frac{1}{r_2} = -\frac{m_1 - m_2}{2} + \cos\varphi\frac{m_1 + m_2}{2}$$

ou bien

$$\frac{1}{r_1} = m_1\cos^2\frac{\varphi}{2} - m_2\sin^2\frac{\varphi}{2}; \qquad \frac{1}{r_2} = -m_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + m_2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

On peut appeler ces courbures les *courbures principales relatives au plan tautologue*. En introduisant ces quantités, on peut écrire la formule (5) sous la forme

$$(9)\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\cos^2\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{r_2}\sin^2\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Cette relation est analogue, comme on le voit, à la formule d'Euler, qui correspond au cas particulier où $\varphi = 0$. Comme dans le cas des surfaces, on peut interpréter la formule (9) à l'aide d'une indicatrice, que j'appellerai l'*indicatrice des courbures*, et qui est analogue à l'indicatrice de Dupin. Si l'on envisage l'homographie qui fait correspondre aux différentes directions du plan tautologue les dérivées de **M** prises dans ces directions, l'indicatrice des courbures est ce qu'on appelle une *indicatrice de l'homographie*. Les axes principaux de cette indicatrice sont les bissectrices des angles que chaque direction principale de différentiation forme avec la direction principale dérivée correspondante.

L'indicatrice des courbures est une ellipse ou une hyperbole, selon que les courbures $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ ont même signe ou des signes contraires, c'est-à-dire d'après (8) selon que le nombre

$$\cos^2\varphi\,(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2$$

est positif ou négatif, ou bien, ce qui revient au même, selon que le nombre

$$4\,m_1 m_2 - (m_1 - m_2)^2 \operatorname{tang}^2\varphi$$

est positif ou négatif. En effet, si ce nombre est négatif, il existe dans le plan deux directions asymptotiques réelles; la courbure normale étant nulle dans ces directions, le nombre r est infini.

On peut remarquer que, contrairement à ce qui a lieu pour les surfaces, l'indicatrice des courbures peut être une hyperbole même dans le cas où l'homographie est directe.

Si, en particulier, l'angle φ égale $\frac{\pi}{2}$, les formules (8) montrent que les courbures principales ont même valeur absolue, mais des signes contraires. L'indicatrice des courbures est une hyperbole équilatérale. L'équation (5) prend alors la forme

$$\frac{1}{r} = (m_1 - m_2)\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Envisageons une direction tautologue S du plan. La dérivée de **M** dans cette direction est donnée par la formule

$$\mathbf{M}_S = \sigma\mathbf{S}.$$

d'où il résulte que

$$\mathbf{M}_S \overline{\mathbf{S}} = \sigma.$$

La formule (3) prend ainsi la forme

$$\frac{1}{r} = \sigma.$$

Pour une direction tautologue, la courbure normale est donc égale en valeur absolue au module de la dérivée de **M**, c'est-à-dire à la flexion du champ dans cette direction.

XIII. — Théorème de Bonnet généralisé.

Des formules [(2), § XII] on déduit les relations suivantes valables pour toute trajectoire orthogonale du champ :

$$\mathbf{N}\overline{\mathbf{M}} = \cos\omega; \qquad \mathbf{B}\overline{\mathbf{M}} = -\sin\omega.$$

Par une différentiation de ces relations dans la direction de la tangente à la courbe, on déduit

$$-\frac{1}{\rho}\mathbf{T}\overline{\mathbf{M}} - \frac{1}{\tau}\mathbf{B}\overline{\mathbf{M}} + \mathbf{N}\overline{\mathbf{M}_T} = -\sin\omega\frac{d\omega}{ds},$$

$$\frac{1}{\tau}\mathbf{N}\overline{\mathbf{M}} + \mathbf{B}\overline{\mathbf{M}_T} = -\cos\omega\frac{d\omega}{ds}.$$

Si, dans ces relations, on substitue à **N** et à **B** leurs valeurs tirées des mêmes relations (2) et que l'on remarque que **M** est perpendiculaire à **T** et à $\mathbf{M}_T$, on obtient

$$\frac{\sin\omega}{\tau} + \sin\omega\,\mathbf{TMM}_T = -\sin\omega\frac{d\omega}{ds},$$

$$\frac{\cos\omega}{\tau} + \cos\omega\,\mathbf{TMM}_T = -\cos\omega\frac{d\omega}{ds}.$$

Ces formules donnent d'une façon concordante, et quelle que soit la valeur de l'angle ω,

(1) $$\frac{1}{\tau} + \frac{d\omega}{ds} = \mathbf{MTM}_1.$$

M. Rogers a donné au membre gauche de cette relation le nom de *torsion normale* de la trajectoire. L'inverse de ce nombre sera dit le rayon de torsion normal et désigné par t. Le membre droit de la relation (1) ne dépend que de **M** et de la direction T; il représente la mesure algébrique de la projection de la dérivée $\mathbf{M}_T$ sur la direction pointée du plan tautologue perpendiculaire à **T** et formant avec **M** et **T** un système trirectangle de sens positif. Il en résulte que toutes les trajectoires orthogonales du champ dont les tangentes sont parallèles à une même direction ont la même torsion normale.

Je vais évaluer maintenant le membre droit de la relation (1). En employant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, on voit que

$$(2)\quad \frac{1}{t} = \mathbf{MTM}_T = \sin\varphi(m_1\cos^2\vartheta + m_2\sin^2\vartheta) - (m_1 - m_2)\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Les valeurs $\frac{1}{t_o}$ et $\frac{1}{t_p}$ de la torsion normale relative aux directions principales de différentiation sont donc données par les expressions

$$\frac{1}{t_o} = m_1\sin\varphi; \qquad \frac{1}{t_p} = m_2\sin\varphi.$$

A l'aide de ces quantités, on peut écrire la formule (2) comme suit :

$$\frac{1}{t} = \frac{\cos^2\vartheta}{t_o} + \frac{\sin^2\vartheta}{t_p} - \left(\frac{1}{t_o} - \frac{1}{t_p}\right)\cot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Si l'on détermine l'angle ϑ pour lequel la torsion normale passe par un maximum ou un minimum, on trouve les deux valeurs suivantes :

$$\vartheta_1 = \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}; \qquad \vartheta_2 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

D'après une remarque faite au paragraphe VII, les directions définies par ces angles sont les bissectrices des directions tautologues. Dans ces dernières directions la torsion normale est évidemment nulle.

Si dans la relation (2) on porte les valeurs ϑ_1 et ϑ_2, on trouve les valeurs suivantes de la torsion normale :

$$(3)\quad \frac{1}{t_1} = \frac{m_1 - m_2}{2} + \sin\varphi\frac{m_1 + m_2}{2}; \qquad \frac{1}{t_2} = -\frac{m_1 - m_2}{2} + \sin\varphi\frac{m_1 + m_2}{2}$$

On peut appeler ces nombres les torsions principales relatives au plan tautologue. En introduisant ces quantités on peut écrire la formule (2) sous la forme

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1}\cos^2\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{t_2}\sin^2\left(\vartheta - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{4}$$

Si **M** est perpendiculaire à une famille de surfaces, c'est-à-dire si $\varphi = 0$, la formule (2) se réduit à la suivante

$$\frac{1}{t} = (m_2 - m_1)\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

qui est la formule de Bonnet.

Dans le cas général, la formule (4) présente une grande analogie avec la formule d'Euler, et est susceptible d'une interprétation semblable. Elle permet de construire une indicatrice des torsions, qui est une conique analogue à l'indicatrice de Dupin. Dans le cas des surfaces, cette indicatrice est une hyperbole équilatérale.

Les axes principaux de l'indicatrice des torsions forment, avec la direction principale de différentiation O, les angles ϑ_1, ϑ_2, définis ci-dessus. Il en résulte que les directions principales de cette indicatrice et les directions principales de l'indicatrice des courbures sont les bissectrices les unes des autres. Les axes principaux de l'indicatrice des torsions coincident avec les directions principales de différentiation, dans le cas où l'angle φ est droit.

On voit aisément que l'indicatrice des torsions est une ellipse ou une hyperbole, selon que les directions tautologues du plan sont imaginaires ou réelles. En effet, dans une direction tautologue, $\frac{1}{t}$ est nul et le nombre t est donc infini.

Dans une direction asymptotique la torsion normale est égale, en valeur absolue, au module de la dérivée de **M**, c'est-à-dire à la flexion du champ dans cette direction, la dérivée étant perpendiculaire à la direction de différentiation.

Comme application, je vais déterminer la torsion normale (ou géodésique) de la ligne de striction d'une surface réglée. Soient **Q** un vecteur-unité, parallèle à la génératrice, **T** le tangent de la ligne de striction et η l'angle $(\mathbf{T}, \mathbf{Q})$. On peut donc poser

$$(5) \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{\sin\eta}\,\overline{\mathbf{TQ}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathbf{M}_{\mathrm{T}} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sin\eta}\right)\overline{\mathbf{TQ}} + \frac{1}{\sin\eta}\,\frac{1}{\rho}\,\overline{\mathbf{NQ}} + \frac{1}{\sin\eta}\,\overline{\mathbf{TQ}'},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{MTM}_{\mathrm{T}} &= \frac{1}{\sin\eta}\,\overline{\mathbf{TQ}}\,.\,\mathbf{T}\,.\,\frac{1}{\sin\eta}\left(\frac{1}{\rho}\,\overline{\mathbf{NQ}} + \overline{\mathbf{TQ}'}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2\eta}\,[\overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{TQ}}.\overline{\mathbf{T}}]\left(\frac{1}{\rho}\,\overline{\mathbf{NQ}} + \overline{\mathbf{TQ}'}\right) = \frac{1}{\sin^2\eta}\left\{-\mathbf{TQQ}' - \frac{\cos\eta}{\rho}\,\mathbf{TNQ}\right\}.\end{aligned}$$

Mais

$$\mathbf{Q}' = -\frac{1}{p}\,\overline{\mathbf{TQ}},$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{TQQ}' = -\frac{1}{p}\,\overline{\mathbf{TQ}}^2 = -\frac{1}{p}\sin^2\eta.$$

D'autre part,

$$\mathbf{TNQ} = -\mathbf{TQN} = -\sin\eta\,\mathbf{M}\overline{\mathbf{N}} = -\sin\eta\cos\omega.$$

On trouve ainsi

$$\mathbf{MTM}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{1}{p}\sin^2\eta + \frac{1}{\rho}\sin\eta\cos\eta\cos\omega\right) = \frac{1}{p} + \frac{\cos\omega}{\rho}\cot\eta.$$

La torsion géodésique de la ligne de striction se trouve ainsi exprimée sous la forme suivante :

$$(6) \qquad \frac{1}{\tau} + \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{p} + \frac{\cos\omega}{\rho}\cot\eta.$$

Envisageons la surface réglée conjuguée de la surface donnée et désignons, par les indices 1 et 2, ce qui se rapporte à l'une et à l'autre de ces surfaces. Pour que le vecteur $\mathbf{M}$, défini par la formule (5), conserve le même sens pour la seconde surface que pour la première, on doit poser

$$\eta_2 = \eta_1 \pm \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\cot\eta_2 = -\tan\eta_1.$$

La formule (6), appliquée à l'une et à l'autre surface, peut donc s'écrire

$$\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{p_1}=\frac{\cos\omega}{\rho}\cot\eta_1,$$

$$\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{p_2}=-\frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{tang}\eta_1.$$

On en déduit

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds}-\frac{1}{p_2}\right)=-\frac{\cos^2\omega}{\rho^2}.$$

Cette formule exprime ainsi le paramètre de distribution de la seconde surface à l'aide de celui de la première et des éléments de la ligne de striction.

P. Serret a montré que les deux paramètres de distribution sont égaux si la ligne de striction est en même temps une ligne asymptotique sur les surfaces. D'ailleurs, dans ce cas, le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de la ligne de striction, comme le montre la formule (6). De la relation (7) on déduit réciproquement que si les deux paramètres p_1 et p_2 sont égaux, la ligne de striction est en même temps une ligne asymptotique. En effet, dans ce cas, les deux membres de la relation (7) ont des signes contraires. Il sont donc nuls tous les deux et l'on a

$$\cos\omega=0.$$

Une proposition établie au paragraphe V permet de résoudre aisément le problème suivant : Déterminer toutes les surfaces réglées qui admettent comme ligne de striction une courbe donnée G et dont le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de G. En effet, les génératrices d'une telle surface doivent former un angle constant avec la binormale de G, sans se trouver, toutefois, dans le plan rectifiant de G. Si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs de la génératrice cherchée, par rapport aux axes du trièdre principal, on doit donc avoir

$$(8)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,;\qquad \gamma=\text{const.}\,;\qquad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\beta}{\rho}.$$

Cette dernière équation exprime la condition pour que la courbe G soit la ligne de striction de la surface cherchée. La solution $\beta=0$ est à écarter d'après ce qui précède, et l'on trouve, en intégrant le système (8) :

$$\alpha = b \sin\left(m \pm \int \frac{ds}{\rho}\right); \qquad \beta = \pm b \cos\left(m \pm \int \frac{ds}{\rho}\right); \qquad \gamma = \sqrt{1 - b^2},$$

m et b désignant deux constantes.

Si la ligne de striction est en même temps une ligne de courbure, la formule (7) se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{p_1 p_2} = -\frac{\cos^2 \omega}{\rho^2} = -\frac{1}{r^2}; \qquad p_1 p_2 = -r^2;$$

r étant le rayon de courbure principal correspondant à la ligne de striction.

XIV. — Surfaces réglées dont les génératrices sont parallèles à la direction du champ.

Soit C une trajectoire orthogonale d'un champ vectoriel unitaire. Menons par chaque point de C une droite parallèle à la direction du champ en ce point. L'ensemble de ces droites engendre une surface réglée que j'appellerai, pour abréger, la *normalie* relative à la courbe C. Je vais déterminer les éléments de ces surfaces à l'aide des dérivées du vecteur **M**, défini dans le champ. Ces éléments étant indépendants de la valeur de **M** en les points extérieurs à la courbe C, on peut supposer que **M** est constant dans sa direction.

Évaluons d'abord, en un point du champ, la valeur de la courbure totale K_C de la normalie. Si **T** est le tangent de la courbe C, le vecteur-unité normal à cette surface peut être représenté par l'expression $\overline{\mathbf{TM}}$. Le nombre K_C est alors défini comme suit :

$$K_C = \overline{\mathbf{TM}} \frac{\delta \overline{\mathbf{TM}}}{\delta \mathrm{T}} \frac{\delta \overline{\mathbf{TM}}}{\delta \mathrm{M}} = \mathbf{TM}\left(\frac{1}{\rho} \mathbf{NM} + \mathbf{TM}_{\mathrm{T}}\right) \frac{\delta \mathbf{TM}}{\delta \mathrm{M}}$$
$$= \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{TNM}.\mathbf{M} - \mathbf{MTM}_1.\mathbf{T}\right) \frac{\delta \mathbf{TM}}{\delta \mathrm{M}}.$$

La dérivée de $\overline{\mathbf{TM}}$, dans la direction de la génératrice (qui est une direction asymptotique de la normalie), est perpendiculaire à cette génératrice. On a donc

$$(1) \qquad \overline{\mathbf{M}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{M}} = 0,$$

et, par conséquent,

$$K_C = -\mathbf{MTM}_T.\overline{\mathbf{T}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{M}}.$$

Mais, d'après la formule [(10), § VII],

$$\overline{\mathbf{T}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{T}} = \mathbf{MTM}_T,$$

d'où il résulte que

$$K_C = -(\mathbf{MTM}_T)^2.$$

La courbure totale de la normalie est donc égale, en valeur absolue, au carré de la torsion normale de la trajectoire. En particulier, K_C est nulle et la normalie est développable, si la trajectoire est parallèle, en chaque point, à une direction tautologue du plan. La valeur absolue de K_C atteint un maximum ou un minimum en même temps que la torsion normale, c'est-à-dire dans les directions des axes principaux de l'indicatrice des torsions.

Évaluons maintenant la courbure moyenne H_C de la normalie. Nous trouvons

$$H_C = \overline{\mathbf{M}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{M}} + \overline{\mathbf{T}}\,\frac{\partial\overline{\mathbf{TM}}}{\partial\mathbf{T}}.$$

Le premier terme du second membre est nul, d'après (1). Il vient ainsi

$$H_C = \mathbf{T}\,\frac{\partial\mathbf{TM}}{\partial\mathbf{T}} = \mathbf{MT}\,\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{MTN} = -\frac{\sin\omega}{\rho}.$$

Par une extension de la terminologie en usage dans la théorie des surfaces, on peut donc dire que la courbure moyenne de la normalie est égale, en valeur absolue, à la courbure géodésique ou tangentielle de la trajectoire.

Déterminons la distance q entre un point de la trajectoire et le point central de la génératrice de la normalie. Cette distance peut être exprimée comme suit :

$$q = -\frac{\overline{\mathbf{TM}}_T}{(\mathbf{M}_T)^2}.$$

Elle est donc égale au quotient, changé de signe, de la courbure normale de la trajectoire par le carré de la flexion du champ dans sa direction. En tenant compte des formules [(4) et (5), § XII], on peut écrire

$$(2) \qquad q = -\frac{\cos\varphi(m_1\cos^2\vartheta + m_2\sin^2\vartheta) + (m_1 - m_2)\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}{m_1^2\cos^2\vartheta + m_2^2\sin^2\vartheta}.$$

Introduisons, à la place de l'angle ϑ, l'angle ν que la dérivée $\mathbf{M}_r$ forme avec la direction principale dérivée, lequel angle est défini par la relation

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{m_1}{m_2}\operatorname{tang}\nu.$$

Il vient

$$q = -\frac{1}{m_1 m_2}\{m_1\sin\nu\sin(\varphi+\nu) + m_2\cos\nu\cos(\varphi+\nu)\}.$$

On voit sans peine que cette expression passe par un maximum ou un minimum pour les deux valeurs suivantes de ν

$$(4) \qquad \nu_1 = -\frac{\varphi}{2}; \qquad \nu_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Les directions caractérisées par ces angles sont celles des axes principaux de l'indicatrice des courbures.

En désignant par q_1 et q_2 les valeurs extrêmes de q, on obtient

$$(5) \qquad q_1 = \frac{1}{m_2}\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{m_1}\cos^2\frac{\varphi}{2}; \qquad q_2 = \frac{1}{m_1}\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{m_2}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Si l'on introduit l'angle ε que la dérivée $\mathbf{M}_r$ forme avec l'axe principal de l'indicatrice des courbures, c'est-à-dire si l'on pose

$$\varepsilon = \nu + \frac{\varphi}{2},$$

la distance q peut s'écrire

$$q = -\frac{1}{m_2}\left(\sin^2\varepsilon\cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{m_1}\left(\cos^2\varepsilon\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

ou bien

$$q = q_1\cos^2\varepsilon + q_2\sin^2\varepsilon,$$

ce qui est la formule d'Hamilton. Les directions de différentiation qui correspondent aux valeurs extrêmes de q, sont caractérisées par les angles ζ_1 et ζ_2 qui, d'après (3) et (4), ont les valeurs suivantes :

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\zeta_1 = -\frac{m_1}{m_2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}; \qquad \operatorname{tang}\zeta_2 = \frac{m_1}{m_2}\cot\frac{\varphi}{2}.$$

J'appellerai ces directions les directions *horogènes* du plan. L'angle ζ_0, formé par elles, satisfait à la relation

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\zeta_0 = \operatorname{tang}(\zeta_1 - \zeta_2) = \frac{2m_1m_2}{m_1^2 - m_2^2}\,\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Lorsque la direction de la trajectoire orthogonale envisagée tourne dans le plan tautologue, le point central, relatif aux différentes normalies, se déplace sur la génératrice. Il atteint ses positions extrêmes dans les directions horogènes, définies par ζ_1 et ζ_2. Les plans centraux relatifs aux deux normalies correspondant à ces directions sont perpendiculaires aux dérivées $\mathbf{M}_r$, c'est-à-dire aux directions définies par ν_1 et ν_2; ils sont donc perpendiculaires aux axes principaux de l'indicatrice des courbures.

Des équations (5) on déduit

$$q_1 - q_2 = \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}.$$

Le segment de la génératrice parcouru par le point central — je l'appellerai le *segment central* — a donc une longueur indépendante de l'angle φ. Le milieu de ce segment, qui est dit le milieu de la génératrice, est défini par la distance

$$q_0 = \frac{q_1 + q_2}{2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\cos\varphi}{2}.$$

Déterminons les points centraux correspondant aux deux directions principales de différentiation. En posant, dans l'expression (2), $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$q(0) = -\frac{\cos\varphi}{m_1}; \qquad q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\varphi}{m_2}.$$

Comme on le voit, le milieu de ces deux points coïncide avec le milieu de la génératice. Déterminons, de même, les points centraux correspondant aux directions tautologues. Les normalies relatives à ces directions sont développables et les points en question sont donc les points de rebroussement de leurs génératrices. On a

$$\mathbf{M}_S = \sigma\mathbf{S}; \qquad q = -\frac{\mathbf{M}_S\overline{\mathbf{S}}}{\mathbf{M}_S^2} = -\frac{1}{\sigma}.$$

Les directions tautologues étant définies par les angles α_1 et α_2 (*voir* § VII) on trouve ainsi

$$(8) \qquad q(\alpha_1) = -\frac{1}{\sigma_1}; \qquad q(\alpha_2) = -\frac{1}{\sigma_2}.$$

Le milieu de ces deux points est déterminé par la distance

$$q_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_1\sigma_2}$$

et, d'après la formule [(4), § VII],

$$q_m = -\frac{\cos\varphi(m_1 + m_2)}{2m_1m_2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\cos\varphi}{2}.$$

Ce point coïncide, lui aussi, avec le milieu de la génératrice.

Il est évident que, si la trajectoire orthogonale est parallèle à une direction asymptotique, le point central correspondant se trouve sur la trajectoire, puisque dans une telle direction le nombre $\overline{\mathbf{T}}\mathbf{M}_{\mathrm{r}}$ est nul.

Je vais évaluer maintenant le paramètre de distribution d'une normalie. Ce paramètre est défini par le nombre

$$p = -\frac{\mathbf{TMM}_{\mathrm{T}}}{(\mathbf{M}_{\mathrm{T}})^2} = \frac{\mathbf{MTM}_{\mathrm{T}}}{(\mathbf{M}_{\mathrm{T}})^2}.$$

Il est donc égal au quotient de la torsion normale de la trajectoire par le carré de la flexion du champ dans sa direction. En tenant compte des formules [(4), § XII] et [(2), § XIII] on peut écrire

$$(9) \qquad p = \frac{\sin\varphi(m_1\cos^2\vartheta + m_2\sin^2\vartheta) - (m_1 - m_2)\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}{m_1^2\cos^2\vartheta + m_2^2\sin^2\vartheta}.$$

Introduisons, à la place de l'angle ϑ, l'angle λ que la dérivée $\mathbf{M}_{\mathrm{r}}$ forme avec la direction principale dérivée, lequel angle est défini par la relation

$$(10) \qquad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{m_1}{m_2}\operatorname{tang}\lambda,$$

Il vient

$$p = \frac{1}{m_1 m_2}\left\{-m_1 \sin\lambda \cos(\varphi+\lambda) + m_2 \cos\lambda \sin(\varphi+\lambda)\right\}.$$

Cette expression passe par un maximum ou un minimum pour les deux valeurs suivantes de λ :

$$(11) \qquad \lambda_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}; \qquad \lambda_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Les directions caractérisées par ces angles sont celles des axes principaux de l'indicatrice des torsions. En désignant par p_1 et p_2 les valeurs extrêmes de p on obtient

$$(12) \quad p_1 = \frac{1}{m_1}\frac{1+\sin\varphi}{2} - \frac{1}{m_2}\frac{1-\sin\varphi}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{m_2}\frac{1+\sin\varphi}{2} - \frac{1}{m_1}\frac{1-\sin\varphi}{2};$$

ou bien

$$p_1 = \frac{1}{m_1}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{m_2}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$
$$p_2 = \frac{1}{m_2}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{m_1}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Si l'on introduit l'angle θ que la dérivée $\mathbf{M}_T$ forme avec l'axe principal de l'indicatrice des torsions, c'est-à-dire si l'on pose

$$\theta = \lambda + \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

le paramètre p peut s'écrire

$$p = p_1 \cos^2\theta + p_2 \sin^2\theta.$$

Les directions de différentiation qui correspondent aux valeurs extrêmes de p sont caractérisées par les angles η_1 et η_2 qui d'après (10) et (11) ont les valeurs suivantes :

$$(13) \qquad \operatorname{tang}\eta_1 = \frac{m_1}{m_2}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right); \qquad \operatorname{tang}\eta_2 = -\frac{m_1}{m_2}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\eta_1 = \frac{m_1}{m_2}\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}; \qquad \operatorname{tang}\eta_2 = -\frac{m_1}{m_2}\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

J'appellerai ces directions les directions *paramétriques* du plan.

L'angle η_0 formé par elles satisfait à la relation

$$\operatorname{tang}\eta_0 = \operatorname{tang}(\eta_1 - \eta_2) = -\frac{2m_1m_2}{m_1^2 - m_2^2}\,\frac{1}{\cos\varphi}.$$

De cette formule et de la formule (7) on déduit que

$$\operatorname{tang}\eta_0 = -\operatorname{tang}\zeta_0 \operatorname{tang}\varphi.$$

Les plans centraux relatifs aux directions paramétriques sont perpendiculaires aux axes principaux de l'indicatrice des torsions.

Des équations (12) on déduit

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = -(q_1 - q_2).$$

La valeur moyenne de p est définie par le nombre

$$p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\sin\varphi}{2}, \tag{14}$$

d'où il résulte que

$$p_0 = -q_0 \operatorname{tang}\varphi.$$

Déterminons les valeurs des paramètres de distribution correspondant aux deux directions principales de différentiation. En posant, dans l'expression (9), $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$p(0) = \frac{\sin\varphi}{m_1}; \qquad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\varphi}{m_2}.$$

La moyenne arithmétique de ces nombres est égale à la moyenne p_0. Déterminons encore les valeurs de p dans les directions asymptotiques. On a, dans une telle direction,

$$\mathbf{M}_r = \psi\overline{\mathbf{MT}}$$

et, par conséquent,

$$p = -\frac{\psi\mathbf{TM}\,\overline{\mathbf{MT}}}{\psi^2} = \frac{1}{\psi}.$$

Les directions asymptotiques étant définies par les angles β_1 et β_2 (*voir* § VII) on trouve ainsi

$$p(\beta_1) = \frac{1}{\psi_1}; \qquad p(\beta_2) = \frac{1}{\psi_2}.$$

La valeur moyenne p_m de ces paramètres est donnée par l'expression

$$p_m = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2\psi_1\psi_2}$$

et, d'après la formule [(21), § VII],

$$p_m = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\sin\varphi}{2},$$

valeur qui est encore égale à la moyenne p_0.

Si la trajectoire orthogonale est parallèle à une direction tautologue, le paramètre de distribution est évidemment nul, la normalie étant développable.

Je vais encore évaluer la distance de la trajectoire orthogonale au point central correspondant aux directions paramétriques η_1 et η_2. Les dérivées prises dans ces directions sont parallèles aux axes principaux de l'indicatrice des torsions et forment donc des angles de 45° avec les axes principaux de l'indicatrice des courbures. Si dans la formule d'Hamilton on pose

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ou bien} \qquad \varepsilon = \frac{3\pi}{4},$$

on trouve

$$q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = q_0.$$

Les directions paramétriques qui fournissent les valeurs extrêmes du paramètre de distribution donnent donc comme point central le milieu de la génératrice. On démontre, de même, que les directions horogènes qui fournissent les valeurs extrêmes de la distance q donnent la valeur moyenne du paramètre de distribution.

Si le vecteur **M** est perpendiculaire à une famille de surface, l'angle φ est constamment nul, et les formules ci-dessus se trouvent notablement simplifiées. Les directions horogènes ainsi que les directions tautologues coïncident avec les directions principales de la surface qui sont aussi les directions principales de l'indicatrice des courbures. Les axes principaux de l'indicatrice des torsions sont les bissectrices des directions principales. Les directions paramétriques sont caractérisées par les angles

$$\operatorname{tang} \eta_1 = \frac{m_1}{m_2}; \qquad \operatorname{tang} \eta_2 = -\frac{m_1}{m_2}.$$

Les nombres m_1 et m_2 représentent les courbures principales de la surface. Les distances extrêmes q_1 et q_2 sont égales aux rayons de courbure principaux, changés de signe. Les valeurs extrêmes des paramètres de distribution sont égales à la moitié de la différence entre les rayons de courbure principaux. La valeur moyenne des paramètres de distribution est nulle.

XV. — Application aux congruences de droites.

Supposons que dans tout le champ la direction d'invariabilité du vecteur **M** coïncide avec la direction du champ. Le vecteur **M** est donc parallèle à une congruence de droites et l'on peut dire que le champ vectoriel représente cette congruence. Les normalies envisagées au paragraphe précédent sont donc les surfaces réglées de la congruence. Les directions tautologues sont celles qui donnent les surfaces développables. Les directions asymptotiques fournissent les surfaces réglées pour lesquelles la ligne de striction passe par le point P envisagé de la droite. Ces directions ne sont donc réelles que si le point P se trouve à l'intérieur du segment central. Les directions principales de différentiation fournissent deux surfaces réglées dont les plans tangents au point P sont perpendiculaires l'un à l'autre et dont les plans centraux sont également rectangulaires. Les directions horogènes fournissent les surfaces dont la ligne de striction passe par les points limites, les directions paramétriques celles dont la ligne de striction passe par le milieu de la génératrice.

Je me propose maintenant d'étudier la variation des éléments introduits ci-dessus lorsqu'on se déplace le long d'une droite de la congruence. Pour simplifier les écritures je poserai

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{n_1}(\quad \mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi),$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{n_2}(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi),$$

l'angle φ pouvant varier de zéro inclus à π exclus; les nombres n_1 et n_2 pouvant être positifs ou négatifs.

Il est clair que la quantité

$$(1)\qquad D = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = n_1 - n_2,$$

qui représente la longueur du segment central, est indépendante de la position du point P sur la droite. Il en est de même du nombre

$$p_0 = (n_1 + n_2)\frac{\sin\varphi}{2}$$

qui représente la valeur moyenne du paramètre de distribution. Enfin, si le point P subit un déplacement m dans le sens du vecteur **M**, le nombre

$$q_0 = -(n_1 + n_2)\frac{\cos\varphi}{2}$$

qui représente la distance du point P au milieu de la droite, subit une diminution de la quantité m. On a ainsi les trois équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial m}(n_1 - n_2) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\sin\varphi\right) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\cos\varphi\right) = 1.$$

Si l'on désigne par φ_0, ν_1, ν_2 les valeurs au point P des trois quantités φ, n_1, n_2, les intégrales des équations (2) peuvent s'écrire sous la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \cot\varphi &= \cot\varphi_0 + \frac{2m}{\sin\varphi_0(\nu_1 + \nu_2)}, \\ n_1 &= \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\sqrt{\frac{4m^2}{(\nu_1 + \nu_2)^2} + \frac{4m\cos\varphi_0}{\nu_1 + \nu_2} + 1}, \\ n_2 &= -\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\sqrt{\frac{4m^2}{(\nu_1 + \nu_2)^2} + \frac{4m\cos\varphi_0}{\nu_1 + \nu_2} + 1}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules déterminent la variation des éléments φ, n_1, n_2 le long de la droite. On en déduit, en particulier, que

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial m} = -\frac{2\sin\varphi}{n_1 + n_2}; \qquad \frac{\partial n_1}{\partial m} = \frac{\partial n_2}{\partial m} = \cos\varphi.$$

On peut évaluer, de même, la variation des vecteurs **O** et **P**, parallèles aux directions principales de différentiation. En désignant par $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ deux vecteurs-unité parallèles aux axes principaux de l'indicatrice des courbures, on peut écrire :

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathbf{O} = \mathbf{S}_1 \cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{S}_2 \sin\frac{\varphi}{2}, \\ \mathbf{P} = \mathbf{S}_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \mathbf{S}_2 \cos\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Les vecteurs $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ sont constants le long de la droite; ils sont, en effet, parallèles aux plans principaux de la congruence. Des relations (5) on déduit donc par une différentiation :

$$\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial m} = -\left(\mathbf{S}_1 \sin\frac{\varphi}{2} + \mathbf{S}_2 \cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{P},$$
$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m} = \left(\mathbf{S}_1 \cos\frac{\varphi}{2} - \mathbf{S}_2 \sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{O};$$

ou bien, en vertu de (4),

$$\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial m} = \frac{\sin\varphi}{n_1 + n_2}\mathbf{P}; \qquad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial m} = -\frac{\sin\varphi}{n_1 + n_2}\mathbf{O}.$$

Les formules (3) permettent de déterminer la valeur des différents éléments au milieu de la droite. Ce point correspond à la coordonnée

$$m_c = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\cos\varphi_0.$$

Si l'on porte cette valeur de m dans la première des relations (3), on trouve

$$\cot\varphi_c = 0.$$

Ainsi, au milieu de la droite l'angle φ est droit. Les directions principales de différentiation sont donc en même temps des directions asymptotiques et les deux surfaces de la congruence dont la ligne de striction passe par le milieu de la droite se rencontrent, en ce point, sous un angle droit.

Pour les valeurs u et v des nombres n_1 et n_2, au milieu de la droite *on trouve, en vertu des formules (3), les expressions suivantes :*

$$u = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \sin \varphi_0,$$

$$v = -\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \sin \varphi_0.$$

Si l'on tient compte de la relation (1) ainsi que de la formule [(14), § XIV], on peut écrire

$$u = \frac{1}{2} \mathrm{D} + p_0; \qquad v = -\frac{1}{2} \mathrm{D} + p_0.$$

Je vais préciser, comme suit, les notations adoptées. En considérant le plan tautologue passant par le milieu de la droite je choisis comme direction principale de différentiation O celle qui correspond à la dérivée ayant le plus grand module. Je pose donc

$$|u| \leqq |v|.$$

D'autre part, je fixe un sens sur la droite (en changeant, au besoin, le sens du vecteur **M**) de telle sorte que le nombre v soit positif, le nombre u pouvant être positif ou négatif.

Au milieu de la droite, les différents éléments de la congruence prennent alors les valeurs ci-après indiquées.

Les deux équations qui déterminent les directions tautologues et les mesures algébriques des dérivées prises dans ces directions prennent la forme suivante :

$$(6) \qquad \operatorname{tang}^2 \alpha + \frac{v}{u} = 0; \qquad \sigma^2 + \frac{1}{uv} = 0.$$

L'angle α_0, formé par les deux directions tautologues, est défini par l'expression

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \alpha_0 = \pm \frac{2\sqrt{-uv}}{u+v} = \frac{2}{\sigma(u+v)}.$$

Les directions tautologues sont donc réelles ou imaginaires selon que u est négatif ou positif. Ainsi : la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces développables de la congruence soient réelles est que l'homographie soit inverse au milieu de la droite.

L'angle φ étant égal à $\frac{\pi}{2}$, on se trouve d'ailleurs dans le cas signalé aux pages 49 et 50 : les directions tautologues coïncident avec les directions caractéristiques du plan.

La formule [(5), § XII] qui détermine la courbure normale des trajectoires orthogonales prend, au milieu de la droite, la forme

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Les courbures principales ont les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right); \qquad \frac{1}{r_2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right),$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta,$$

relation dont la forme est analogue à celle de la formule de Bonnet.

La formule [(2), § XIII] prend la forme

$$\frac{1}{t} = \frac{\cos^2\vartheta}{u} + \frac{\sin^2\vartheta}{v}$$

et les rayons de torsion principaux sont donnés par les expressions

$$t_1 = u, \qquad t_2 = v.$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{\tau} + \frac{d\omega}{ds} = \frac{\cos^2\vartheta}{t_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{t_2},$$

équation dont la forme est analogue à celle de la formule d'Euler dans le cas des surfaces.

D'après la formule [(5), § XIV], les coordonnées des points limites de la droite ont les valeurs

$$q_1 = -\frac{u - v}{2}, \qquad q_2 = \frac{u - v}{2}.$$

Les directions horogènes sont définies par les angles

$$\operatorname{tang}\zeta_1 = -\frac{v}{u}, \qquad \operatorname{tang}\zeta_2 = \frac{v}{u}.$$

Les directions principales de différentiation sont donc les bissectrices des directions horogènes.

D'après la formule [(12), § XIV], les valeurs extrêmes du paramètre de distribution sont les suivantes :

$$p_1 = u, \qquad p_2 = v;$$

d'où il résulte que

$$p_0 = \frac{u+v}{2}.$$

La formule (7) peut donc s'écrire

$$\cot\alpha_0 = \sigma p_0.$$

Les directions paramétriques sont confondues avec les directions principales de différentiation, car, d'après [(13), § XIV],

$$\operatorname{tang}\eta_1 = 0, \qquad \operatorname{tang}\eta_2 = \infty.$$

En résumé, on voit qu'au milieu de la droite les directions suivantes sont confondues en une paire de directions rectangulaires : directions principales de différentiation, directions principales dérivées, directions asymptotiques, axes principaux de l'indicatrice des torsions, directions paramétriques.

Les relations (3) ci-dessus s'écrivent comme suit :

$$(8)\quad \begin{cases} \cot\varphi = \dfrac{2m}{u+v}, \\ n_1 = \dfrac{u-v}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4m^2+(u+v)^2}, \qquad n_2 = -\dfrac{u-v}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4m^2+(u+v)^2}. \end{cases}$$

De la première de ces relations on conclut que $\cot\varphi$ a même signe que m, le dénominateur $u+v$ étant positif quel que soit le signe de u. Ainsi, quand on s'éloigne du milieu dans le sens positif de la droite, l'angle φ diminue et tend vers zéro pour $m = +\infty$. Par contre, quand m passe de 0 à $-\infty$, l'angle φ augmente et tend vers π.

Les relations (8) permettent de déterminer la valeur des rayons de courbure principaux et celle des rayons de torsion principaux en un point quelconque de la droite. Si l'on remarque que $\sin\varphi$ est toujours positif et que, par conséquent, $\cos\varphi$ a même signe que $\cot\varphi$, c'est-à-dire que m, on peut écrire

$$\cos\varphi = \frac{2m}{\sqrt{4m^2+(u+v)^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{u+v}{\sqrt{4m^2+(u+v)^2}}.$$

Des deux dernières relations (8) il résulte que

$$n_1 n_2 = m^2 + uv.$$

Les relations [(8), § XII] peuvent alors s'écrire

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{n_1 n_2}\left(-\frac{n_1 - n_2}{2} + \cos\varphi\,\frac{n_1 + n_2}{2}\right),$$
$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{n_1 n_2}\left(-\frac{n_1 - n_2}{2} + \cos\varphi\,\frac{n_1 + n_2}{2}\right);$$

d'où l'on déduit que

$$r_1 = \frac{m^2 + uv}{m - \frac{u - v}{2}}, \qquad r_2 = \frac{m^2 + uv}{m + \frac{u - v}{2}}.$$

De même, les formules [(3), § XIII] peuvent s'écrire

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{n_1 n_2}\left(-\frac{n_1 - n_2}{2} + \sin\varphi\,\frac{n_1 + n_2}{2}\right),$$
$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{n_1 n_2}\left(\frac{n_1 - n_2}{2} + \sin\varphi\,\frac{n_1 + n_2}{2}\right).$$

On en déduit que

$$t_1 = u + \frac{m^2}{v}, \qquad t_2 = v + \frac{m^2}{u}.$$

Le rapport $\frac{t_1}{t_2}$ entre les deux rayons de torsion principaux reste donc constant et égal à $\frac{u}{v}$ tout le long de la droite.

Je vais examiner maintenant les valeurs que prennent les éléments de la congruence en les deux foyers F_1 et F_2 de la droite. Ces foyers n'étant réels que si l'homographie est inverse au milieu de la droite, je suppose que le nombre u est négatif. F_1 et F_2 sont caractérisés par les valeurs $-\frac{1}{\sigma_1}$ et $-\frac{1}{\sigma_2}$ de la coordonnée m. Désignons par φ', n'_1, n'_2; φ'', n''_1, n''_2 les valeurs de φ, n_1 et n_2 aux foyers F_1 et F_2 respectivement. Soit F_1 le foyer correspondant à la valeur

$$m = -\frac{1}{\sigma_1} = \sqrt{-uv}.$$

De la première des relations (8) il résulte alors que

$$\cot\varphi' = \frac{2\sqrt{-uv}}{u+v}, \tag{9}$$

d'où l'on déduit que

$$\cos\varphi' = \frac{2\sqrt{-uv}}{v-u}, \qquad \sin\varphi' = \frac{u+v}{v-u}.$$

Les deux dernières relations (8) donnent pour les nombres n_1 et n_2 les valeurs suivantes

$$n'_1 = 0, \qquad n'_2 = v - u.$$

Ainsi au foyer F_1 la dérivée de **M** devient infinie dans la direction principale de différentiation O (laquelle, par hypothèse, est celle qui, au milieu, donne le module maximum de la dérivée). La direction de cette dérivée infinie est définie par l'angle φ'.

Pour déterminer les directions tautologues, on peut écrire la formule [(5), § VII] comme suit :

$$\cot^2\alpha - \cot\alpha\,\frac{n_2 - n_1}{n_2}\cot\varphi + \frac{n_1}{n_2} = 0,$$

n_1 étant nul au foyer F_1, cette équation prend la forme

$$\cot^2\alpha - \cot\alpha\cot\varphi' = 0,$$

équation qui donne pour l'angle α les deux valeurs

$$\alpha_1 = \varphi', \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

La première direction tautologue T_1 est donc parallèle à la direction principale dérivée O′, c'est-à-dire à la dérivée infinie $\mathbf{M}_1$. La seconde direction tautologue T_2 coincide avec la direction principale de différentiation P. D'ailleurs, la comparaison des deux formules (7) et (9) montre que

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right).$$

La formule [(4), § VII] peut s'écrire

$$\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\cos\varphi(n_1 + n_2) + n_1 n_2 = 0,$$

relation qui se réduit à la suivante

$$\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} n'_2 \cos\varphi' = 0,$$

laquelle donne les deux racines

$$\sigma'_1 = \infty, \qquad \sigma'_2 = \frac{1}{n'_2 \cos\varphi'} = \frac{1}{2\sqrt{-uv}}.$$

La racine σ'_1 est relative à la surface dont l'arête de rebroussement passe par le foyer F_1. Elle correspond à l'angle $\alpha_1 = \varphi'$, caractérisant la première direction tautologue. La racine σ'_2 est relative à la seconde direction tautologue, parallèle à la direction principale de différentiation P.

De même, pour déterminer les directions asymptotiques et les mesures algébriques des dérivées relatives à ces directions, on peut écrire comme suit les formules [(21) et (22), § VII],

$$\cot^2\beta + \cot\beta \frac{n_2 - n_1}{n_2} \tang\varphi + \frac{n_1}{n_2} = 0,$$

$$\frac{1}{\psi^2} - \frac{1}{\psi} \sin\varphi (n_1 + n_2) + n_1 n_2 = 0,$$

relations qui se réduisent aux suivantes :

$$\cot^2\beta + \cot\beta \tang\varphi' = 0, \qquad \frac{1}{\psi^2} - \frac{1}{\psi} n'_2 \sin\varphi' = 0.$$

Elles fournissent les racines

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta_2 = \varphi' + \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{\psi_1} = n'_2 \sin\varphi' = u + v, \qquad \frac{1}{\psi_2} = 0.$$

Ainsi la première direction asymptotique coïncide avec la direction principale de différentiation P; la mesure algébrique de la dérivée prise dans cette direction est égale à $\frac{1}{n'_2 \sin\varphi'}$. La seconde direction asymptotique est perpendiculaire à la direction principale dérivée O'. La dérivée prise dans cette direction est donc parallèle à O' et son module est infini.

Ce qui précède fait voir qu'au foyer F_1 la surface développable dont l'arête de rebroussement passe par F_1 est parallèle à la direction principale dérivée O'. La seconde direction tautologue est confondue avec une des directions asymptotiques et avec la direction principale de différentiation P. La dérivée prise dans cette direction est donc indéterminée : tantôt on trouve une dérivée parallèle à la direction principale dérivée et dont la mesure algébrique égale $\frac{1}{n'_2}$; tantôt une dérivée parallèle à P (direction tautologue) et dont la mesure algébrique égale $\frac{1}{n'_2 \cos\varphi'}$; tantôt une dérivée perpendiculaire à P (direction asymptotique) et dont la mesure algébrique égale $\frac{1}{n'_2 \sin\varphi'}$. On peut remarquer toutefois que toutes ces dérivées ont la même projection sur la direction P'. Ainsi la dérivée prise dans la seconde direction principale de différentiation P a une projection déterminée, égale à $\frac{1}{n'_2}(-\mathbf{O}\cos\varphi' + \mathbf{P}\sin\varphi')$ sur la direction principale dérivée P', mais sa projection sur la direction O' est indéterminée. Dans toutes les autres directions du plan, la dérivée est infinie et parallèle à O'. On en conclut que dans le voisinage du foyer F_1 toutes les droites de la congruence, exception faite des génératrices de la surface développable S_1 dont l'arête de rebroussement passe par F_1, se trouvent dans la direction parallèle à la seconde surface développable de la congruence.

Les formules [(5), § XII et (2), § XIII] montrent que toutes les trajectoires orthogonales du champ qui passent par le point F_1 ont, en ce point, une courbure normale et une torsion normale infinies, excepté celles pour lesquelles l'angle φ égale $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire dont la tangente est parallèle à la direction principale de différentiation P. Pour ces dernières, ces nombres sont indéterminés. De même, la distance q entre le foyer F_1 et le point central relatif aux surfaces de la congruence est nulle dans toutes les directions, excepté dans la direction P pour laquelle cette distance est indéterminée. Les directions horogènes sont confondues et parallèles à la direction P. Le paramètre de distribution est nul dans toutes les directions autres que P et les directions paramétriques sont confondues, elles aussi, avec la direction P.

On peut remarquer qu'en tous les points situés entre le milieu de la droite et le foyer F_1 le nombre n_1 est négatif, et l'homographie est par conséquent inverse. En F_1, le nombre n_1 s'annule, et en tout point situé au delà de F_1, ce nombre est positif et l'homographie est directe. Il en résulte que, dans une congruence quelconque, l'homographie est directe en tous les points situés en dehors du segment limité par les foyers. Si les foyers sont réels, l'homographie est inverse en les points situés à l'intérieur de ce segment. Aux foyers mêmes l'homographie est dégénérée.

Si l'on examine les éléments relatifs au second foyer F_2, on trouve des résultats analogues. Pour $m = -\sqrt{-uv}$, les nombres φ, n_1 et n_2 prennent les valeurs suivantes :

$$\cot\varphi'' = -\frac{2\sqrt{-uv}}{u+v}, \qquad \cos\varphi'' = \frac{2\sqrt{-uv}}{u-v}, \qquad \sin\varphi'' = \frac{u+v}{v-u};$$
$$n''_1 = 0, \qquad n''_2 = v - u.$$

Ainsi, c'est encore la dérivée prise dans la direction O qui devient infinie au foyer F_2. Toutefois, l'angle φ'' étant obtus, c'est maintenant la direction tautologue T_2 qui coïncide avec la direction principale dérivée O', tandis que la direction principale de différentiation P coïncide avec la direction tautologue T_1.

Pour déterminer la valeur des éléments de la congruence aux points limites de la droite, il suffit de poser, dans les formules (8),

$$m = \pm \frac{u-v}{2}.$$

En désignant par φ_e, N_1 et N_2 les valeurs des nombres φ, n_1 et n_2 en ces points, on trouve

$$\cot\varphi_e = \pm\frac{u-v}{u+v},$$
$$N_1 = \frac{u-v}{2} + \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}; \qquad N_2 = -\frac{u-v}{2} + \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

On en déduit que

$$N_1 N_2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2.$$

Si l'on détermine les directions asymptotiques en un point limite, on voit que ces directions sont confondues.

D'après une remarque faite page 53, on en conclut que la direction asymptotique coïncide avec une des directions caractéristiques du plan tautologue. Et, en effet, la mesure algébrique ψ a la valeur

$$\psi = \frac{2}{u+v} = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}}.$$

On sait en outre (*voir* § XII) que la direction asymptotique unique coïncide avec un des axes principaux de l'indicatrice des courbures. Si nous choisissons, par exemple, le point limite correspondant à une valeur positive de m, nous avons

$$\cot\varphi_e = \frac{v-u}{v+u}; \qquad \sin\varphi_e = \frac{u+v}{\sqrt{2(u^2+v^2)}}; \qquad \cos\varphi_e = \frac{v-u}{\sqrt{2(u^2+v^2)}}.$$

Pour la direction asymptotique, on trouve la valeur

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{v-u+\sqrt{2(u^2+v^2)}}{u+v}.$$

D'autre part,

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi_e}{2} = \frac{1-\cos\varphi_e}{\sin\varphi_e} = \frac{u-v+\sqrt{2(u^2+v^2)}}{u+v},$$

d'où il résulte que

$$\beta = \frac{\varphi_e}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Évaluons, d'après les formules [(6), § XIV], les angles caractérisant les directions horogènes du plan. Nous trouvons

$$\operatorname{tang}\zeta_1 = -\frac{v-u+\sqrt{2(u^2+v^2)}}{u+v}, \qquad \operatorname{tang}\zeta_2 = \left(\frac{v-u+\sqrt{2(u^2+v^2)}}{u+v}\right).$$

Ainsi, la direction horogène H_1, caractérisée par l'angle ζ_1, coïncide, elle aussi, avec la direction asymptotique. La formule [(17), § VII] permet, en effet, de vérifier que la dérivée prise dans la direction H_1 forme, avec la direction principale de différentiation O, un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$. La direction horogène H_2, caractérisée par l'angle ζ_2, fournit une dérivée parallèle à la direction asymptotique. On voit enfin que les angles ζ_1 et ζ_2 satisfont à la relation

$$\operatorname{tang}\zeta_2 = -\operatorname{tang}^3\zeta_1.$$

Le rayon de courbure principal r_1 a pour valeur

$$r_1 = \frac{(u+v)^2}{4(v-u)}.$$

La courbure $\frac{1}{r_2}$ est nulle, l'axe correspondant de l'indicatrice des courbures étant parallèle à la direction asymptotique.

En tout point situé en dehors du segment central, les directions asymptotiques sont imaginaires. On peut donc conclure que, pour les congruences dont les surfaces développables sont imaginaires, le rapport entre les modules des dérivées prises dans les directions principales de différentiation se trouve enfermé entre les limites indiquées page 54 en tous les points extérieurs au segment central. Ces modules étant l'un un maximum, l'autre un minimum parmi les modules des dérivées du plan tautologue, il en résulte que les mêmes limites enferment le rapport entre les modules de deux dérivées quelconques de ce plan.

Je vais examiner maintenant en quels cas les deux directions tautologues peuvent être confondues. Si l'on se place au milieu de la droite, on voit, d'après la formule (6), que les deux valeurs de α sont égales si l'un des nombres u et v s'annule ou devient infini. Conformément à l'hypothèse faite au sujet de ces nombres, il y a donc lieu de distinguer les deux cas suivants :

$$1^\circ \qquad u = 0;$$
$$2^\circ \qquad v = \infty.$$

Dans le premier cas, σ est infini et $\frac{1}{\sigma}$ est nul. Les deux foyers sont donc venus se confondre au milieu de la droite. Les directions tautologues sont confondues avec la direction principale de différentiation P. La dérivée $\mathbf{M}_1$ a un module infini. Les formules concernant les différents éléments de la congruence se simplifient notablement. Les points limites sont définis par les coordonnées $\pm \frac{v}{2}$. Pour un point P quelconque situé à la distance m du milieu, la courbure totale dans le plan tautologue est égale à $\frac{1}{m^2}$. Les deux courbures principales sont données par les expressions

$$\frac{1}{r_1} = \frac{m + \frac{v}{2}}{m^2}; \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{m - \frac{v}{2}}{m^2}.$$

Pour les torsions principales, on trouve

$$\frac{1}{t_1} = \frac{v}{m^2}; \qquad \frac{1}{t_2} = 0.$$

La seconde torsion principale est donc nulle tout le long de la droite. En effet, dans l'indicatrice des torsions, l'axe principal correspondant à cette torsion est confondu avec la direction tautologue. On peut encore remarquer qu'aux points limites l'angle φ est égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à $\frac{3\pi}{4}$. Les directions principales dérivées sont donc, en ces points, les bissectrices des directions principales de différentiation, et réciproquement.

Dans le cas où le nombre v est infini, il résulte des relations (8) que $\cot\varphi$ reste nul, et le nombre n_2 infini tout le long de la droite. Le vecteur **M** a, en chaque point de la droite, une dérivée nulle dans une certaine direction fixe, qui est la direction P. La dérivée de **M**, dans n'importe quelle direction d'un plan tautologue, est donc parallèle à la direction d'invariabilité, laquelle est à considérer comme une direction tautologue. D'après la formule (6), le nombre σ est nul et les deux foyers confondus sont rejetés à l'infini. Le segment central s'est étendu sur toute la droite et n'importe quel point peut être considéré comme le milieu de la droite. Si ces conditions sont vérifiées en tous les points du champ, les surfaces développables sont cylindriques : la congruence est composée des génératrices d'une famille de cylindres.

Je vais encore examiner les deux cas particuliers où l'on aurait, au milieu d'une droite de la congruence, soit $u = v$, soit $u = -v$.

Si $u = v$, les formules (8) prennent la forme

$$\cot\varphi = \frac{m}{u}; \qquad n_1 = n_2 = \sqrt{m^2 + u^2}.$$

Il en résulte qu'en chaque point de la droite les dérivées $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ ont même module. L'indicatrice des dérivées est un cercle. Les directions principales de différentiation sont indéterminées. Il n'y a pas de directions asymptotiques réelles, excepté au milieu de la droite, où toutes les directions sont asymptotiques. Le segment central s'est contracté en un seul point. La congruence est isotrope.

D'après la formule [(9), § XIV], on voit qu'en chaque point le paramètre de distribution est constant pour toutes les surfaces de la congruence et a la valeur

$$u \sin \varphi = \frac{u^2}{\sqrt{m^2 + u^2}}.$$

Les formules qui déterminent les angles caractérisant les directions horogènes et les directions paramétriques donnent les valerus suivantes :

$$\zeta_1 = \pi - \frac{\varphi}{2}, \qquad \zeta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}; \qquad \eta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \qquad \eta_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Toutefois, dans le cas présent, ces directions sont indéterminées, et les valeurs ci-dessus sont à considérer simplement comme des limites vers lesquelles tendent les angles en question, lorsque u et v tendent vers une même valeur.

Les rayons de courbure principaux ont les valeurs

$$r_1 = r_2 = m + \frac{u^2}{m},$$

et les rayons de torsion principaux les valeurs

$$t_1 = t_2 = u + \frac{m^2}{u},$$

nombres qui déterminent la courbure et la torsion normales dans une direction quelconque.

Enfin, dans le cas où $u = -v$, il résulte, de la première des formules (8), que

$$\cot \varphi = \infty.$$

L'angle φ est donc nul et la congruence est perpendiculaire à une famille de surfaces parallèles.

Les foyers de la droite coïncident avec les points limites. Les deux dernières formules (8) se réduisent aux suivantes :

$$n_1 = u + m; \qquad n_2 = -u + m.$$

On a, en outre,

$$r_1 = n_1; \qquad r_2 = n_2; \qquad t_1 = u - \frac{m^2}{u}; \qquad t_2 = -u + \frac{m^2}{u}.$$

Au milieu de chaque droite de la congruence, l'indicatrice des dérivées est un cercle, et la valeur de φ en ce point est donc indéterminée.

Évaluons le curl du vecteur $\mathbf{M}$ définissant la congruence. On trouve

$$\operatorname{curl}\mathbf{M} = \overline{\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{M}}} + \overline{\mathbf{O}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{O}}} + \overline{\mathbf{P}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{P}}} = \overline{\mathbf{OM}_1} + \overline{\mathbf{PM}_2} = (m_1 + m_2)\sin\varphi\,\mathbf{M}$$

Ce vecteur ne peut s'annuler que si $\sin\varphi = 0$, c'est-à-dire si la congruence est perpendiculaire à une famille de surfaces. Pour les autres congruences, le module du curl passe par un maximum au milieu de la droite, si l'homographie est directe en ce point. Il diminue et tend vers zéro quand on s'éloigne infiniment dans un sens ou dans l'autre de la droite. Si, au contraire, l'homographie est inverse au milieu, le module du curl passe en ce point par un minimum. Il devient infini aux foyers de la droite et diminue ensuite pour tendre vers zéro comme dans le cas précédent.

XVI. — Courbure tangentielle.

Reprenant l'etude d'un champ vectoriel unitaire quelconque, je vais d'abord déterminer les dérivées des vecteurs-unité $\mathbf{O}$ et $\mathbf{P}$ dans les directions de ces vecteurs. J'affecte des indices 1 et 2 tout ce qui se rapporte aux directions principales de différentiation. On a alors

$$\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial \mathbf{O}} = \frac{1}{\rho_1}\mathbf{N}_1; \qquad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{\rho_2}\mathbf{N}_2,$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{O}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{O}}\overline{\mathbf{MO}} = -\overline{\mathbf{O}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{O}}} + \overline{\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial \mathbf{O}}} = -\overline{\mathbf{OM}_1} + \frac{1}{\rho_1}\overline{\mathbf{MN}_1}.$$

Mais, d'après les formules [(2), § XII], on peut écrire

$$(1) \qquad \mathbf{N}_1 = \mathbf{M}\cos\omega_1 + \overline{\mathbf{OM}}\sin\omega_1 = \mathbf{M}\cos\omega_1 - \mathbf{P}\sin\omega_1.$$

D'autre part,

$$\mathbf{OM}_1 = \mathbf{O}\,m_1(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi) = m_1\sin\varphi\,\mathbf{OP} = m_1\sin\varphi\,\overline{\mathbf{M}}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathrm{O}} = - m_1 \sin\varphi \, \mathbf{M} + \frac{\sin\omega_1}{\rho_1} \mathbf{O}.$$

En remarquant que

$$(2) \qquad \mathbf{N}_2 = \mathbf{M} \cos\omega_2 + \overline{\mathbf{PM}} \sin\omega_2 = \mathbf{M} \cos\omega_2 + \mathbf{O} \sin\omega_2,$$

on déduit de la même manière

$$\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial \mathrm{P}} = m_2 \sin\varphi \, \mathbf{M} - \frac{\sin\omega_2}{\rho_2} \mathbf{P}.$$

Soit maintenant C une trajectoire orthogonale dont le tangent $\mathbf{T}$ forme avec la direction principale de différentiation O un angle ϑ

$$\mathbf{T} = \mathbf{O} \cos\vartheta + \mathbf{P} \sin\vartheta.$$

Par une différentiation dans la direction du vecteur $\mathbf{T}$, on déduit

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{N} = \mathbf{T}\overline{\nabla}.\mathbf{T} = \left(\cos\vartheta \, \mathbf{O}\overline{\nabla} + \sin\vartheta \, \mathbf{P}\overline{\nabla}\right)(\mathbf{O} \cos\vartheta + \mathbf{P} \sin\vartheta),$$

soit, en vertu des formules ci-dessus,

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{\rho}\mathbf{N} + \frac{\cos^2\vartheta}{\rho_1}\mathbf{N}_1 + \sin\vartheta\cos\vartheta \\ & \times \left(- m_1 \sin\varphi \, \mathbf{M} + \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\mathbf{O} + m_2 \sin\varphi \, \mathbf{M} - \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\mathbf{P}\right) \\ & + \frac{\sin^2\vartheta}{\rho_2}\mathbf{N}_2 + (-\sin\vartheta\cos\vartheta \, \mathbf{O} + \cos^2\vartheta \, \mathbf{P})\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{O}} \\ & + (-\sin^2\vartheta \, \mathbf{O} + \sin\vartheta\cos\vartheta \, \mathbf{P})\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{P}}. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans cette équation, les vecteurs $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ par leurs valeurs d'après (1) et (2), et le vecteur $\mathbf{N}$ par l'expression suivante :

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \cos\omega + \overline{\mathbf{TM}} \sin\omega = \mathbf{M} \cos\omega - \mathbf{P} \sin\omega \cos\vartheta + \mathbf{O} \sin\omega \sin\vartheta.$$

Nous obtenons ainsi une équation linéaire contenant seulement les trois vecteurs $\mathbf{O}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$. Ces trois vecteurs n'étant pas coplanaires, la somme des coefficients de chacun d'eux est nulle. On déduit ainsi les trois équations suivantes :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos^2\vartheta + \frac{\cos\omega_2}{\rho_2}\sin^2\vartheta - (m_1 - m_2)\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\frac{\sin\omega}{\rho}\sin\vartheta = \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\left(\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{O}} + \sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{P}}\right),$$

$$-\frac{\sin\omega}{\rho}\cos\vartheta = -\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\cos^2\vartheta - \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \cos\vartheta\left(\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{O}} + \sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{P}}\right).$$

La première de ces relations est équivalente à la relation d'Euler généralisée [équation (5), § XII]. Les deux dernières déterminent, d'une façon concordante, la courbure tangentielle de la courbe C.

Si l'on désigne par G_1 et G_2 les courbures tangentielles des courbes parallèles aux directions principales de différentiation, et si l'on remarque que le nombre

$$\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{O}} + \sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{P}}$$

représente la dérivée de l'angle ϑ dans la direction de la courbe C, c'est-à-dire sa dérivée par rapport à l'arc s de cette courbe, on peut écrire comme suit la formule qui exprime la courbure tangentielle de C :

$$(3) \qquad \frac{\sin\omega}{\rho} = G_1\cos\vartheta + G_2\sin\vartheta - \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Comme on le voit, cette formule est identique à celle qui donne la courbure géodésique d'une courbe quelconque tracée sur une surface, les nombres G_1 et G_2 désignant alors les courbures géodésiques des lignes de courbure.

Dans le cas général, on peut déterminer les nombres G_1 et G_2 en fonctions des éléments m_1, m_2 et φ, et de leurs dérivées prises dans les directions principales de différentiation, ainsi que de la dérivée de **M** prise dans la direction du champ. Je vais donc poser

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{M}} = \mu_1\mathbf{O} + \mu_2\mathbf{P}.$$

Pour déterminer G_1 et G_2, il faudra d'abord évaluer les dérivées

$$\mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{O}\overline{\nabla}.\mathbf{M} = \mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_1; \qquad \mathbf{O}\overline{\nabla}.\mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M} = \mathbf{O}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_2.$$

On déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_1 &= \mathbf{P}\overline{\nabla}[m_1(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi)]\\ &= \frac{\partial m_1}{\partial \mathrm{P}}(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi) + m_1\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}}(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi)\\ &\quad + m_1\cos\varphi\left(m_2\sin\varphi\,\mathbf{M} - \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\mathbf{P}\right) + m_1\sin\varphi\left(\frac{\cos\omega_2}{\rho_2}\mathbf{M} + \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\mathbf{O}\right).\end{aligned}$$

Le coefficient de **M** dans cette relation est égal à

$$m_1\sin\varphi\left(m_2\cos\varphi + \frac{\cos\omega_2}{\rho_2}\right).$$

Les nombres $m_2\cos\varphi$ et $-\frac{\cos\omega_2}{\rho_2}$ représentent l'un et l'autre la courbure normale d'une courbe parallèle à la direction P [*voir* formule (6), § XII]. Le coefficient de **M** est donc nul et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_1 = \quad &\mathbf{O}\left(\cos\varphi\frac{\partial m_1}{\partial \mathrm{P}} - m_1\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}} + m_1\sin\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\right)\\ &+\mathbf{P}\left(\sin\varphi\frac{\partial m_1}{\partial \mathrm{P}} + m_1\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{P}} - m_1\cos\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\right).\end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}\mathbf{O}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_2 = \quad &\mathbf{O}\left(-\sin\varphi\frac{\partial m_2}{\partial \mathrm{O}} - m_2\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{O}} + m_2\cos\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\right)\\ &+\mathbf{P}\left(\quad\cos\varphi\frac{\partial m_2}{\partial \mathrm{O}} - m_2\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{O}} + m_2\sin\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\right).\end{aligned}$$

Évaluons encore le vecteur

$$\frac{\partial\mathbf{O}}{\partial \mathrm{P}} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial \mathrm{O}} = (m_1 + m_2)\sin\varphi\,\mathbf{M} - \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\mathbf{O} - \frac{\sin\omega_2}{\rho_2}\mathbf{P}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\mathbf{O}}{\partial \mathrm{P}} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial \mathrm{O}}\right)\overline{\nabla}.\mathbf{M} &= (m_1 + m_2)\sin\varphi(\mu_1\mathbf{O} + \mu_2\mathbf{P})\\ &\quad - m_1\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}(\mathbf{O}\cos\varphi + \mathbf{P}\sin\varphi) - m_2\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}(-\mathbf{O}\sin\varphi + \mathbf{P}\cos\varphi).\end{aligned}$$

Mais, d'après la formule [(3), § III],

$$\mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_2 = \left(\frac{\partial\mathbf{O}}{\partial \mathrm{P}} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial \mathrm{O}}\right)\overline{\nabla}.\mathbf{M}.$$

En substituant dans cette relation les expressions ci-dessus et en égalant les coefficients de **O** et de **P** qui figurent dans les deux membres de la relation ainsi obtenue, on déduit les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\cos\varphi\frac{\partial m_1}{\partial P} - m_1\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial P} + m_1\sin\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2} + \sin\varphi\frac{\partial m_2}{\partial O}\\
&\qquad + m_2\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial O} - m_2\cos\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\\
&\quad = \mu_1\sin\varphi(m_1+m_2) - m_1\cos\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1} + m_2\sin\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2},\\
&\sin\varphi\frac{\partial m_1}{\partial P} + m_1\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial P} - m_1\cos\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2} - \cos\varphi\frac{\partial m_2}{\partial O}\\
&\qquad + m_2\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial O} - m_2\sin\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\\
&\quad = \mu_2\sin\varphi(m_1+m_2) - m_1\sin\varphi\frac{\sin\omega_1}{\rho_1} - m_2\cos\varphi\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}.
\end{aligned}$$

De ces deux équations on déduit les expressions des courbures tangentielles $\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}$ et $\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}$:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
(m_1-m_2)\frac{\sin\omega_1}{\rho_1} &= -\frac{\partial m_1}{\partial P} - m_2\frac{\partial\varphi}{\partial O} + \sin\varphi(m_1+m_2)(\mu_1\cos\varphi+\mu_2\sin\varphi),\\
(m_1-m_2)\frac{\sin\omega_2}{\rho_2} &= -\frac{\partial m_2}{\partial O} + m_1\frac{\partial\varphi}{\partial P} + \sin\varphi(m_1+m_2)(\mu_1\sin\varphi-\mu_2\cos\varphi).
\end{aligned}\right.$$

Ces relations, jointes aux relations déjà démontrées,

$$\frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = -m_1\cos\varphi;\qquad \frac{\cos\omega_2}{\rho_2} = -m_2\cos\varphi,$$

déterminent complètement les angles ω_1, ω_2 et les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 en fonctions des éléments m_1, m_2, φ, de leurs dérivées dans les directions principales de différentiation, ainsi que des nombres μ_1 et μ_2.

Les équations (4) peuvent être considérées comme une généralisation des formules de Codazzi.

Si le champ est représenté par une congruence de droites, les termes qui contiennent μ_1 et μ_2 disparaissent. Enfin, dans le cas où le vecteur **M** est perpendiculaire à une famille de surfaces, l'angle φ et ses dérivées sont nuls. Les nombres m_1 et m_2 sont les inverses des rayons de courbure principaux r_1 et r_2, et, en introduisant ces grandeurs, on peut écrire les équations (4) sous la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\omega_1}{\rho_1}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)=\dfrac{1}{r_1^2}\dfrac{\partial r_1}{\partial s_2}, \\ \dfrac{\sin\omega_2}{\rho_2}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)=\dfrac{1}{r_2^2}\dfrac{\partial r_2}{\partial s_1}. \end{cases}$$

Les dérivées dans les directions O et P peuvent, en effet, être remplacées par les dérivées partielles prises par rapport aux arcs s_1 et s_2 des lignes de courbure. Joint aux équations

$$(6)\qquad \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}=-\frac{1}{r_1}; \qquad \frac{\cos\omega_2}{\rho_2}=-\frac{1}{r_2},$$

le système (5) permet d'exprimer comme suit les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 des lignes de courbure ainsi que les angles ω_1 et ω_2 que les plans rectifiants de ces courbes forment avec le plan tangent à la surface :

$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{r_2^2}{r_1^2(r_1-r_2)^2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial s_2}\right)^2; \qquad \frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{r_2^2}+\frac{r_1^2}{r_2^2(r_1-r_2)^2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial s_1}\right)^2;$$

$$\operatorname{tang}\omega_1=\frac{r_2}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial s_2}; \qquad \operatorname{tang}\omega_2=\frac{r_1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial s_1}.$$

A titre d'exemple, je vais examiner ci-dessous un problème relatif aux congruences de droites non perpendiculaires à une famille de surfaces. Envisageons, au milieu Π d'une droite de la congruence, une surface réglée S_1 parallèle à la direction asymptotique O du plan tautologue, les génératrices de S_1 étant parallèles à la direction du champ. J'appellerai *lignes des milieux* la courbe intersection entre la surface S_1 et la surface centrale de la congruence (lieu des milieux des droites). La question à résoudre est la suivante : Dans quelles conditions la ligne des milieux est-elle en même temps ligne de striction sur la surface S_1?

Sur la surface centrale, l'angle φ est constant et égal à $\frac{\pi}{2}$. La normale à cette surface est donc parallèle au vecteur $\nabla\varphi$ et la direction de la ligne des milieux est celle du vecteur

$$\mathbf{U}=\mathbf{OM}.\overline{\nabla\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial 0}\mathbf{M}-\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{O}.$$

L'angle u que cette direction forme avec la direction O est donné par l'expression

$$\operatorname{tang} u = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\delta O}}{\frac{\partial \varphi}{\partial m}}.$$

D'autre part, la ligne de striction de la surface S_1 forme avec la direction O un angle v qui peut être défini comme suit :

$$\operatorname{tang} v = -\frac{\delta}{\delta O}\left(\frac{\mathbf{M}_1\bar{\mathbf{O}}}{\mathbf{M}_1^2}\right) = -\frac{\delta}{\delta O}\left(\frac{\cos\varphi\, m_1}{m_1^2}\right) = -\frac{\delta}{\delta O}\left(\frac{\cos\varphi}{m_1}\right).$$

Mais

$$\frac{\delta}{\delta O}\left(\frac{\cos\varphi}{m_1}\right) = -\frac{m_1 \sin\varphi \frac{\delta\varphi}{\delta O} + \cos\varphi \frac{\partial m_1}{\delta O}}{m_1^2}.$$

Au milieu de la droite, on a

$$\cos\varphi = 0; \qquad \sin\varphi = 1$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang} v = \frac{1}{m_1}\frac{\delta\varphi}{\delta O}.$$

La ligne des milieux est donc en même temps ligne de striction, si l'on a

$$-\frac{\partial\varphi}{\delta O} = \frac{1}{m_1}\frac{\delta\varphi}{\delta O}\frac{\partial\varphi}{\partial m}.$$

On trouve ainsi les deux solutions suivantes :

$$\frac{\partial\varphi}{\delta O} = 0; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial m} = -m_1.$$

Dans le premier cas, l'angle u est nul. La ligne des milieux et la ligne de striction se confondent avec la trajectoire orthogonale de la surface au point II. La surface est donc engendrée par les binormales de ladite trajectoire.

Pour déterminer la seconde solution, il suffit de remarquer que

$$(7) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial m} = -2\sin\varphi\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = -\frac{2\, m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

On trouve donc

$$m_1 = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1+m_2},$$

c'est-à-dire

$$m_1 = m_2.$$

Cette relation exprime que la congruence est isotrope. Au milieu d'une droite d'une telle congruence, toutes les surfaces sont parallèles à une direction asymptotique. Pour toutes ces surfaces, la ligne des milieux est donc en même temps ligne de striction. Le segment central étant contracté en un point unique, cette solution est d'ailleurs évidente.

Envisageons, en second lieu, dans quelles conditions la même ligne des milieux peut être une ligne asymptotique sur la surface S_1. A cet effet, il faut et il suffit que la dérivée du normal à cette surface prise dans la direction de la ligne des milieux soit perpendiculaire à la direction de la différentiation. Le normal de la surface S_1 est le vecteur $\mathbf{P}$. La condition énoncée peut donc s'écrire comme suit :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{U}\bar{\nabla})\mathbf{P} = 0. \tag{8}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\bar{\nabla}.\mathbf{P} &= \frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}}\mathbf{M}\bar{\nabla}.\mathbf{P} - \frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{O}\bar{\nabla}.\mathbf{P}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}}\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{O} - \frac{\partial\varphi}{\partial m}\left(-m_1\mathbf{M} + \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\mathbf{O}\right)\\ &= m_1\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{M} + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\left[\frac{1}{2}\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} - \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\right]\mathbf{O}.\end{aligned}$$

Soit, en vertu de la première des formules (4),

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\bar{\nabla}.\mathbf{P} &= m_1\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{M} + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\left[\frac{1}{2}\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} + \frac{1}{m_1 - m_2}\left(\frac{\delta m_1}{\delta \mathrm{P}} + m_2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}}\right)\right]\mathbf{O}\\ &= m_1\frac{\partial\varphi}{\partial m}\mathbf{M} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m}\frac{1}{m_1 - m_2}\left[(m_1 + m_2)\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} + 2\frac{\delta m_1}{\delta \mathrm{P}}\right]\mathbf{O}.\end{aligned}$$

L'équation (8) prend donc la forme

$$m_1\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}}\frac{\partial\varphi}{\partial m} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right)^2\frac{1}{m_1 - m_2}\left[(m_1 + m_2)\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} + 2\frac{\delta m_1}{\delta \mathrm{P}}\right] = 0$$

ou bien

$$2m_1^2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} - 2m_1m_2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} - (m_1 + m_2)\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}}\frac{\partial\varphi}{\partial m} - 2\frac{\delta m_1}{\delta \mathrm{P}}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = 0.$$

Soit, en vertu de (7),

$$2m_1^2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} - 2m_1m_2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} + 2m_1m_2\frac{\delta\varphi}{\delta \mathrm{O}} + \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}\frac{\delta m_1}{\delta \mathrm{P}} = 0.$$

Soit enfin

$$\frac{\partial\varphi}{\partial O} = -\frac{2\, m_1 m_2}{m_1^2\,(m_1 + m_2)}\,\frac{\partial m_1}{\partial P} = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{m_1}\right).$$

Si la congruence satisfait à cette condition, on trouve, pour l'angle u, la valeur suivante :

$$\operatorname{tang} u = -\frac{\partial\varphi}{\partial O} : \frac{\partial\varphi}{\partial m} = \frac{\partial\varphi}{\partial O} : \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{m_1}\right).$$

XVII. — Dérivées secondes.

Je vais évaluer ci-après les dérivées secondes d'un vecteur-unité **M** perpendiculaire à une famille de surfaces parallèles. D'après la formule [(4), § III] le vecteur

$$\mathbf{M}_{OO} = (\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\,\mathbf{M}$$

peut être calculé comme suit

$$(\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\,\mathbf{M} = \mathbf{O}\overline{\nabla}.\,\mathbf{O}\overline{\nabla}.\,\mathbf{M} - \left(\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial O}\,\overline{\nabla}\right)\mathbf{M}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbf{O}\overline{\nabla}.\,\mathbf{O}\overline{\nabla}.\,\mathbf{M} &= \mathbf{O}\overline{\nabla}.\,(m_1\,\mathbf{O})\\ &= \mathbf{O}\overline{\nabla}\left(\frac{1}{r_1}\,\mathbf{O}\right) = \frac{\partial}{\partial O}\left(\frac{1}{r_1}\right)\mathbf{O} + \frac{1}{r_1}\left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\,\mathbf{M} - \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\,\mathbf{P}\right)\end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial O}\,\overline{\nabla}\right)\mathbf{M} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\,\mathbf{M}\overline{\nabla}.\,\mathbf{M} - \frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\,\mathbf{P}\overline{\nabla}.\,\mathbf{M} = -\frac{1}{r_2}\,\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\,\mathbf{P}.$$

On obtient donc

$$(\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\,\mathbf{M} = -\frac{1}{r_1^2}\,\mathbf{M} + \mathbf{O}\,\frac{\partial}{\partial O}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \mathbf{P}\,\frac{\sin\omega_1}{\rho_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

et, en vertu de la première des formules [(5), § XVI],

$$(\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\,\mathbf{M} = -\frac{1}{r_1^2}\,\mathbf{M} + \mathbf{O}\,\frac{\partial}{\partial O}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \mathbf{P}\,\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

En remarquant que

$$\mathbf{M}\,\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r_1^2}\,\mathbf{M},$$

on voit que l'on peut encore écrire

$$(\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} = \nabla\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

On trouve de même

$$(\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} = -\frac{1}{r_2^2}\mathbf{M} + \mathbf{O}\frac{\partial}{\partial \mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right) + \mathbf{P}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r_2}\right).$$

Dans le cas envisagé, on a par hypothèse

$$\mathbf{M}\overline{\nabla}.\mathbf{M} = 0.$$

En tenant compte de la formule [(5), § III], on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{M} &= (\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + (\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + (\mathbf{M}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} = \nabla\left(\frac{1}{r_1}\right) + \nabla\left(\frac{1}{r_2}\right)\\ &= \nabla\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \nabla \mathrm{H},\end{aligned}$$

H désignant la courbure moyenne de la surface.

Si l'on projette ce vecteur sur la direction pointée de la normale à la surface, on obtient un vecteur dont la mesure algébrique est définie comme suit :

$$\overline{\mathbf{M}}.\nabla^2\mathbf{M} = \overline{\mathbf{M}}\nabla\mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{M}} = -\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right).$$

L'expression $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$ a été proposée par Casorati comme mesure de la courbure d'une surface (courbure moyenne quadratique). Il est curieux de constater que, dans son Livre *Die Geometrie der Wirbelfelder*, le Dr Foppl a proposé de considérer le vecteur $\nabla^2\mathbf{L}$ comme une mesure de la courbure d'un champ vectoriel quelconque défini par le vecteur **L**.

Il reste encore à déterminer le vecteur

$$\mathbf{M}_{\mathrm{OP}} = \mathbf{P}\overline{\nabla}.\mathbf{M}_1 - \left(\frac{\partial \mathbf{O}}{\partial \mathrm{P}}\overline{\nabla}\right)\mathbf{M}.$$

On trouve, à l'aide des formules du paragraphe XVI,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{OP}} = \mathbf{O}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial \mathrm{P}} - \mathbf{P}.\frac{1}{r_1}\frac{\sin\omega_2}{\rho_2} + \mathbf{P}\frac{1}{r_2}\frac{\sin\omega_2}{\rho_2}$$

ou bien

$$\mathbf{M}_{\mathrm{OP}} = \mathbf{O}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \mathbf{P}\frac{\partial}{\partial \mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right).$$

Les formules qui précèdent, permettent d'évaluer la dérivée seconde de **M** dans une direction quelconque. Soit **T** un vecteur défini par l'expression

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}\cos\vartheta + \mathbf{P}\sin\vartheta.$$

Pour le vecteur $(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}$ on déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} &= (\cos\vartheta\,\mathbf{O}\overline{\nabla} + \sin\vartheta\,\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} \\ &= \cos^2\vartheta\,(\mathbf{O}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + \sin^2\vartheta\,(\mathbf{P}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathbf{M}_{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

ou bien

$$(1)\qquad \begin{aligned}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} &= \cos^2\vartheta\,\nabla\left(\frac{1}{r_1}\right) + \sin^2\vartheta\,\nabla\left(\frac{1}{r_2}\right) \\ &\quad + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\left[\mathbf{O}\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \mathbf{P}\frac{\partial}{\partial\mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right)\right].\end{aligned}$$

La mesure algébrique de la projection de ce vecteur sur la normale est donnée par l'expression

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} = -\cos^2\vartheta\,\frac{1}{r_1^2} - \sin^2\vartheta\,\frac{1}{r_2^2} = -\mathbf{M}_{\mathrm{T}}^2.$$

Projetons, d'autre part, le vecteur $(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}$ sur la direction du vecteur **T** et sur celle du vecteur $\overline{\mathbf{MT}}$, perpendiculaire à **T**. Nous trouvons

$$(2)\qquad \begin{aligned}\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} &= \cos^3\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + 3\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right) \\ &\quad + 3\sin\vartheta\cos^2\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \sin^3\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_2}\right)\end{aligned}$$

et

$$(3)\qquad \begin{aligned}\mathbf{MT}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} &= (\cos\vartheta\,\overline{\mathbf{P}} - \sin\vartheta\,\overline{\mathbf{O}})(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} \\ &= \cos\vartheta(\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta)\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_1}\right) - \sin\vartheta(\sin^2\vartheta - 2\cos^2\vartheta)\frac{\partial}{\partial\mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right) \\ &\quad - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_1}\right) + \sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_2}\right).\end{aligned}$$

Ces formules sont utiles lorsqu'il s'agit de déterminer la dérivée de la courbure ou de la torsion d'une courbe tracée sur la surface. De la formule

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = -\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}$$

on déduit, en effet, par une différentiation dans la direction de $\mathbf{T}$,

$$-\frac{\sin\omega}{\rho}\frac{d\omega}{ds}-\frac{\cos\omega}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}=-\frac{1}{\rho}\overline{\mathbf{N}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}-\frac{1}{\rho}\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{N}\overline{\nabla})\mathbf{M}-\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}.$$

Si l'on substitue à $\mathbf{N}$ l'expression

$$\mathbf{N}=-\mathbf{M}\cos\omega-\overline{\mathbf{MT}}\sin\omega$$

~~et que l'on~~ remarque que

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}=0,\qquad \mathbf{M}\overline{\nabla}.\mathbf{M}=0,\qquad \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{MT}\nabla)\mathbf{M}=\mathbf{MT}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}=\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds},$$

il vient :

$$\frac{\cos\omega}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}+3\frac{\sin\omega}{\rho}\frac{d\omega}{ds}+2\frac{\sin\omega}{\rho\tau}=\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}.$$

En substituant dans cette relation la valeur du membre droit donnée par l'équation (2), on trouve la formule de Laguerre.

De même, une différentiation de la formule

$$\frac{1}{\tau}+\frac{d\omega}{ds}=\mathbf{MT}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M},$$

faite dans la direction du vecteur $\mathbf{T}$, donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right)+\frac{d^2\omega}{ds^2}&=|(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}|.\mathbf{T}.(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}\\&+\frac{1}{\rho}\mathbf{MN}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}+\frac{1}{\rho}\mathbf{MT}(\mathbf{N}\overline{\nabla})\mathbf{M}+\mathbf{MT}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}.\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est nul, deux des vecteurs de ce triple produit étant égaux. En remplaçant $\mathbf{N}$ par sa valeur, comme ci-dessus, on déduit

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right)+\frac{d^2\omega}{ds^2}=-\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho^2}-\frac{\sin\omega}{\rho}\mathbf{MT}(\mathbf{MT}\nabla)\mathbf{M}+\mathbf{MT}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}.$$

Remarquons que, d'après la formule d'Euler,

$$\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M}=\frac{1}{r_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{r_2}\sin^2\varphi,$$

et que l'on peut déduire $\mathbf{MT}(\mathbf{MT}\nabla)\mathbf{M}$ en remplaçant dans cette expression ϑ par $\vartheta + \frac{\pi}{2}\cdot$ On obtient ainsi

$$\mathbf{MT}(\mathbf{MT}\nabla)\mathbf{M} = \frac{1}{r_1}\sin^2\vartheta + \frac{1}{r_2}\cos^2\vartheta = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})\mathbf{M} = \mathbf{H} + \frac{\cos\omega}{\rho},$$

d'où il résulte que

$$(4)\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{2\sin\omega\cos\omega}{\rho^2} + \frac{\sin\omega}{\rho}\mathbf{H} = \mathbf{MT}(\mathbf{T}\nabla)^2\mathbf{M}.$$

Dans la *Théorie générale des surfaces*, Darboux a donné une formule dont le membre gauche concorde (à un signe près) avec l'expression ci-dessus, et il a fait remarquer que le membre droit ne dépend que de la direction T. En substituant au second membre l'expression (3), on obtient une relation qui détermine la dérivée de la torsion géodésique.

La connaissance du vecteur $(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}$ suffit ainsi pour déterminer les quantités figurant dans la formule de Laguerre et dans la formule (4) ci-dessus. Afin de représenter la variation de ce vecteur, lorsque $\mathbf{T}$ varie dans le plan tangent à la surface, on peut tracer une indicatrice des dérivées secondes, analogue à celle définie plus haut pour les dérivées premières. La forme de cette indicatrice peut être déterminée comme suit :

Le vecteur $\mathbf{R}$ du segment PP_s, dont l'extrémité P_s décrit l'indicatrice, est défini par la formule (1). Nous pouvons écrire

$$(5)\qquad \mathbf{R} = (\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} = \mathbf{O}.\overline{\mathbf{O}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + \mathbf{P}.\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M} + \mathbf{M}.\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{T}\overline{\nabla})^2\mathbf{M}.$$

Si l'on pose

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_1}\right),\qquad u_2 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{O}}\left(\frac{1}{r_2}\right);\qquad v_1 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_1}\right),\qquad v_2 = \frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}\left(\frac{1}{r_2}\right),$$

on obtient, d'après (5) et (1),

$$\begin{aligned}\mathbf{R} = \mathbf{O}&(\cos^2\vartheta\, u_1 + \sin^2\vartheta\, u_2 + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\, v_1)\\ &+ \mathbf{P}(\cos^2\vartheta\, v_1 + \sin^2\vartheta\, v_2 + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\, u_2) - \mathbf{M}\left(\cos^2\vartheta\frac{1}{r_1^2} + \sin^2\vartheta\frac{1}{r_2^2}\right)\cdot\end{aligned}$$

Substituons à ϑ l'angle $\alpha = 2\vartheta$. Il vient

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathbf{R} = {} & \mathbf{O}\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}u_1 + \frac{1-\cos\alpha}{2}u_2 + \sin\alpha . v_1\right) \\ & + \mathbf{P}\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}v_1 + \frac{1-\cos\alpha}{2}v_2 + \sin\alpha . u_2\right) \\ & - \mathbf{M}\left(\frac{1+\cos\alpha}{2r_1^2} + \frac{1-\cos\alpha}{2r_2^2}\right). \end{aligned}$$

Introduisons un vecteur **H** indépendant de α et défini comme suit :

$$\mathbf{H} = \mathbf{O}\frac{u_1+u_2}{2} + \mathbf{P}\frac{v_1+v_2}{2} - \mathbf{M}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Ce vecteur peut encore être exprimé sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\nabla \mathbf{H}.$$

On peut alors écrire la formule (6) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{H} + \mathbf{O}\left[\frac{u_1-u_2}{2}\cos\alpha + v_1 \sin\alpha\right] \\ + \mathbf{P}\left[\frac{v_1-v_2}{2}\cos\alpha + u_2\sin\alpha\right] + \mathbf{M}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\frac{\cos\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Cette expression fait voir que, quand α varie de 0 à 2π (c'est-à-dire quand ϑ varie de 0 à π), le point P_s décrit une ellipse ayant pour centre le point P_h dont le rayon vecteur égale **H**.

On peut en tirer une première conclusion : le centre de l'indicatrice des dérivées secondes se trouve sur la normale à la surface dans le seul cas où la courbure moyenne de la surface est constante. En effet, dans ce cas, le vecteur **H** est parallèle à **M**.

Le plan de l'indicatrice est généralement incliné sur le plan tangent à la surface; ces deux plans sont parallèles dans le seul cas où

$$\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} = 0,$$

c'est-à-dire aux ombilics et aux points où la courbure moyenne s'annule.

La projection R_t du vecteur $R - H$ sur le plan tangent à la surface est égal à

$$R - H - M \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \cos\alpha.$$

Lorsque le vecteur T (formant avec O l'angle ϑ), tourne dans le sens positif du plan tangent, le vecteur R_t tourne dans un sens déterminé. Pour voir quel est ce sens, on peut poser

$$T_1 = O \cos\vartheta_1 + P \sin\vartheta_1, \qquad T_2 = O \cos\vartheta_2 + P \sin\vartheta_2,$$

d'où l'on déduit que

$$T_1 T_2 = OP \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Aux vecteurs T_1 et T_2 correspondent les projections R'_t et R''_t du vecteur $R - H$. Ces projections sont définies par les formules :

$$R'_t = O\left[\frac{u_1 - u_2}{2} \cos 2\vartheta_1 + v_1 \sin 2\vartheta_1\right] + P\left[\frac{v_1 - v_2}{2} \cos 2\vartheta_1 + u_2 \sin 2\vartheta_1\right],$$
$$R''_t = O\left[\frac{u_1 - u_2}{2} \cos 2\vartheta_2 + v_1 \sin 2\vartheta_2\right] + P\left[\frac{v_1 - v_2}{2} \cos 2\vartheta_2 + u_2 \sin 2\vartheta_2\right].$$

Le rotateur $R'_t R''_t$ a donc pour valeur

$$R'_t R''_t = OP\left[u_2 \frac{u_1 - u_2}{2} - v_1 \frac{v_1 - v_2}{2}\right] \sin 2(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Il en résulte que la projection R_t tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif du plan tangent, selon que le nombre

$$\psi = u_2(u_1 - u_2) - v_1(v_1 - v_2)$$

est positif ou négatif.

On peut remarquer, en particulier, que ce nombre est toujours négatif, si la courbure moyenne est constante; car, dans ce cas,

$$u_2 = -u_1, \qquad v_2 = -v_1.$$

Si le nombre ψ est nul, le rotateur $R'_t R''_t$ est nul, c'est-à-dire tous les vecteurs R_t sont parallèles. Le plan de l'indicatrice des dérivées secondes est perpendiculaire au plan tangent à la surface, et la projection de cette indicatrice sur le plan tangent est un segment de droite, ayant pour centre le point P_k défini par le vecteur

$$\mathbf{K} = \mathbf{O}\,\frac{u_1+u_2}{2} + \mathbf{P}\,\frac{v_1+v_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{O}\,\frac{\partial H}{\partial O} + \mathbf{P}\,\frac{\partial H}{\partial P}\right).$$

On voit aisément que la longueur de ce segment est égale au double du module de **K**.

XVIII. — Trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel.

En commentant un Mémoire de M. Rogers sur les trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes, Darboux a montré comment on peut rattacher les propriétés de ces trajectoires aux propriétés des congruences de droites signalées par Hamilton et Kummer. Les formules développés au paragraphe XIV expriment ces rapports. Dans le cas où la congruence de courbes envisagée est une congruence de droites, les formules du paragraphe XV permettent, en outre, de calculer la variation des courbures normales et des torsions normales des trajectoires en les différents points d'une droite de la congruence.

Darboux a signalé diverses généralisations dont sont susceptibles les définitions de certaines courbes tracées sur une surface, telles que les lignes asymptotiques et les lignes de courbure. Il a mentionné notamment les courbes de courbure normale nulle, les courbes de plus grande et de plus petite courbure normale, les courbes de torsion normale nulle, et y a ajouté les courbes de torsion normale maximum et minimum. Il résulte des remarques faites plus haut que, parmi les trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel quelconque, celles qui sont parallèles soit aux directions principales de différentiation, soit aux directions principales dérivées, soit aux directions tautologues, soit aux directions horogènes, soit enfin aux axes principaux de l'indicatrice des courbures, peuvent toutes être considérées comme des généralisations des lignes de courbure d'une surface. Parmi toutes ces courbes, ce sont celles qui sont parallèles aux directions tautologues, et que l'on peut appeler *les lignes tautologues du champ*, qui présentent le plus d'analogie avec les lignes de courbure classiques. Je vais mentionner brièvement quelques-unes des propriétés de ces lignes tautologues.

On a vu que les droites menées en les différents points d'une ligne tautologue parallèlement à la direction du champ engendrent une surface développable, ce qui permet de conclure que les théorèmes de Joachimsthal s'appliquent à un champ unitaire quelconque sous la forme suivante : Si une courbe C est une ligne tautologue pour deux champs vectoriels superposés, les directions de ces champs forment le long de C un angle constant. Si une courbe C est une ligne tautologue pour un champ vectoriel, elle est tautologue pour tout autre champ vectoriel dont la direction, perpendiculaire à C, forme avec celle du premier champ un angle constant le long de C.

D'autre part, en chaque point d'une ligne tautologue, le tangent es parallèle à la dérivée du vecteur **M** dans la direction de la courbe, et le nombre $\mathbf{MTM}_1$ est donc nul. La torsion normale d'une ligne tautologue est nulle. Réciproquement, toute trajectoire orthogonale dont la torsion normale est nulle est une ligne tautologue. La ligne tautologue est plane, si sa normale principale forme un angle constant avec la direction du champ.

La courbure normale de la ligne tautologue est égale à la flexion du champ dans la direction de cette courbe.

Le produit des courbures normales de deux lignes tautologues qui se rencontrent en un point P est égal à la courbure totale dans le plan tautologue passant par P. Si une ligne tautologue est parallèle à une direction tautologue double, sa courbure normale est donc égale à la racine carrée de la courbure totale dans le plan.

Les trajectoires orthogonales parallèles aux directions asymptotiques du plan tautologue — on peut les désigner sous le nom de *lignes asymptotiques du champ* — présentent, de même, une grande analogie avec les lignes asymptotiques d'une surface. La courbure normale d'une ligne asymptotique est nulle en chaque point, puisque la dérivée du vecteur **M** dans la direction de la courbe est perpendiculaire à cette direction. Si la ligne asymptotique n'est pas une droite, son plan osculateur est donc perpendiculaire à la direction du champ, et sa binormale est parallèle à cette direction. On trouve ainsi

$$\mathbf{B} = \varepsilon\mathbf{M} \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

d'où l'on déduit, par une différentiation,

$$-\frac{1}{\tau}\mathbf{N} = \varepsilon\,\mathbf{M}_T.$$

La torsion normale d'une ligne asymptotique est égale à sa torsion, et cette torsion est égale, en valeur absolue, à la flexion du champ dans la direction de la courbe. Le produit des torsions de deux lignes asymptotiques se rencontrant en un point P est égale, d'après la formule [(21), § VII], à la courbure totale dans le plan tautologue. Mais, dans le cas général, les torsions de ces deux courbes n'ont pas la même valeur absolue. Les deux racines de l'équation [(21), § VII] ont même signe ou des signes contraires, selon que le produit $l_1 l_2$ est positif ou négatif. Il en résulte que deux lignes asymptotiques qui se rencontrent en un point ont des torsions de même signe ou de signes contraires, selon que l'homographie est directe ou inverse.

En dehors du cas des surfaces, une ligne asymptotique a encore une torsion égale, en valeur absolue, à la racine carrée de la courbure totale dans le plan, si les deux directions asymptotiques sont confondues, cette direction étant alors une direction caractéristique du plan.

Les courbes spécialement étudiées par M. Rogers sont celles dont la normale principale est parallèle, en chaque point, à la direction du champ (lignes géodésiques). On a, le long d'une telle courbe,

$$\mathbf{N} = \varepsilon\,\mathbf{M} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Par une différentiation, on en déduit

$$\frac{1}{R}\mathbf{E} = \varepsilon\,\mathbf{M}_T.$$

La dérivée du vecteur **M** dans la direction d'une ligne géodésique est parallèle à la droite irrotationnelle de la courbe. La flexion du champ dans une direction quelconque est égale à la courbure totale de la ligne géodésique parallèle à cette direction. On déduit ainsi que la courbure totale, dans un plan tautologue quelconque, est égale, en valeur absolue, au carré de la courbure totale de la ligne géodésique dirigée selon une direction caractéristique du plan.

Dans le cas des surfaces à courbure totale négative, ces directions coincident avec les directions asymptotiques. La courbure totale de la surface est donc égale, en valeur absolue, au carré de la courbure totale d'une ligne géodésique parallèle à une direction asymptotique. Et, en effet, dans une telle direction, la ligne géodésique a une courbure nulle; sa courbure totale se confond avec la valeur absolue de sa torsion, laquelle est égale à la torsion de la ligne asymptotique qui a même direction. On retombe ainsi sur la formule d'Enneper.

De même que pour les surfaces, les lignes géodésiques d'un champ quelconque ont une torsion normale égale à leur torsion. Cette torsion est donc nulle, si la ligne géodésique est parallèle à une direction tautologue. Les formules [(4) et (3), § XVII] font voir que, si une ligne géodésique tracée sur une surface est parallèle en un point à une direction principale, la dérivée de la torsion en ce point est égale à la dérivée de la courbure principale de la surface relative à la même direction, cette dérivée étant prise dans la seconde direction principale. En posant dans lesdites formules

$$\omega = 0, \qquad \vartheta = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

Si l'on tient compte des formules [(5) et (6), § XVI], on peut encore écrire :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\operatorname{tang}\omega_1}{r_1} = \varepsilon\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{r_1^2}},$$

l'unité ε ayant même signe que $\dfrac{\operatorname{tang}\omega_1}{r_1}$; ce nombre est positif ou négatif selon que la normale (positive) de la surface forme un angle aigu ou obtus avec la binormale de la ligne de courbure parallèle à la direction principale envisagée (O).

Pour une ligne géodésique d'un champ quelconque, la courbure tangentielle est nulle. Si dans la formule [(3), § XVI] on annule le premier membre, on trouve une équation différentielle définissant l'angle ϑ que la tangente de la ligne géodésique forme avec la direction principale de différentiation O. Cette équation est de la forme

$$\frac{d\vartheta}{ds} = G_1 \cos\vartheta + G_2 \sin\vartheta,$$

G_1 et G_2 désignant les courbures tangentielles des courbes parallèles aux directions principales de différentiation. On voit que l'équation ci-dessus est identique à celle qui détermine les lignes géodésiques sur une surface.

Vu et approuvé :

Paris, le 25 février 1919.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 25 février 1919.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. POINCARÉ.

ERRATA.

Page 9, ligne 8, *au lieu de* $= \mathbf{L}_U \mathbf{L}_V \mathbf{L}_W$, *lire* $= - \mathbf{L}_U \mathbf{L}_V \mathbf{L}_W$.

Page 9, ligne 10, *au lieu de* $= \mathbf{VWL}_U + \mathbf{WUL}_V + \mathbf{UVL}_W$,

lire $= \mathbf{UL}_V \mathbf{L}_W + \mathbf{VL}_W \mathbf{L}_U + \mathbf{WL}_U \mathbf{L}_V$.

Page 22, ligne 6, *au lieu de* C, *lire* C_1.

Page 23, ligne 12 en remontant, *au lieu de* $- \varepsilon \int \frac{ds}{R}$, *lire* $- \int \frac{ds}{R}$.

Page 90, ligne 10 en remontant, *au lieu de* $\theta = \lambda + \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$, *lire* $\theta = \lambda + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Page 102, ligne 13, *au lieu de* $(- \mathbf{O} \cos\varphi' + \mathbf{P} \sin\varphi')$, *lire* $(- \mathbf{O} \sin\varphi' + \mathbf{P} \cos\varphi')$.

Page 117, ligne 4, *au lieu de* $\frac{\partial}{\delta P}\left(\frac{1}{r^2}\right)$, *lire* $\frac{\delta}{\delta P}\left(\frac{1}{r_2}\right)$.

Page 119, ligne 4, *au lieu de* $= - \mathbf{M} \cos\omega$, *lire* $= \mathbf{M} \cos\omega$.