

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

GASTON JULIA

**Étude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles, ou complexes, ou à indéterminées conjuguées**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1917

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1917\\_\\_13\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1917__13__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE  
1891.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GASTON JULIA,

Ancien élève de l'École Normale supérieure,  
Sous-lieutenant au 34<sup>e</sup> régiment d'Infanterie.

1<sup>o</sup> THÈSE. — ÉTUDE SUR LES FORMES BINAIRES NON QUADRATIQUES A INDÉTERMINÉES RÉELLES, OU COMPLEXES, OU A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES.

2<sup>o</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7<sup>e</sup> DEC 1917 devant la Commission d'Examen.

MM. ÉMILE PICARD, *Président.*

LEBESGUE, }  
HUMBERT, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

ENS BM



M026760

# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

### MM.

<b>Doyen</b> .....	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
<b>Professeur honoraire</b> .....	Ch. WOLF.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVÉ.....	Mécanique rationnelle.
	HAUG.....	Géologie.
<b>Professeurs</b> .....	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER.....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND.....	Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	ÉMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD.....	Mathématiques générales.
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Histologie.
	N.....	Physiologie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
<b>Professeurs adjoints</b> .....	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
<b>Secrétaire</b> .....	D. TOMBECK.	

26263

T

A LA MÉMOIRE

DE MES

**CAMARADES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

TUÉS A L'ENNEMI



---

---

# PREMIÈRE THÈSE.

---

## ÉTUDE

SUR LES

# FORMES BINAIRES NON QUADRATIQUES

A INDÉTERMINÉES RÉELLES OU COMPLEXES,

OU

A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES;

PAR M. GASTON JULIA.

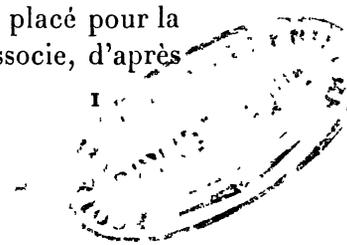
---

## INTRODUCTION.

Le Mémoire actuel est une contribution à la théorie arithmétique des formes non quadratiques, en particulier à l'étude du problème de la *réduction* qui domine toute cette théorie. On s'est limité aux formes binaires à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées. Les bases de la théorie de ces formes ont été jetées par Hermite dans une série de Mémoires *Sur les fonctions homogènes à deux indéterminées*, et surtout dans l'admirable Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (Tome I de ses *Œuvres*). C'est de la lecture attentive de ce dernier Mémoire qu'est né le Mémoire actuel, et son objet peut être ainsi résumé : mettre en lumière et étendre la belle méthode de réduction continue créée par Hermite pour l'étude arithmétique des formes.

Hermite n'envisage dans ses *Œuvres*, sauf peut-être dans le Mémoire *Sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés*, que des variables *réelles*, en particulier dans son Mémoire sur les variables continues. C'est aussi dans cette hypothèse qu'on s'est d'abord placé pour la première Partie de ce Mémoire. A la forme proposée  $f$ , on associe, d'après

J.



Hermite, une forme quadratique binaire définie dépendant de paramètres continus  $(t, u)$  et l'on donne d'abord, en s'aidant des représentations usuelles des formes quadratiques binaires définies, une interprétation géométrique de la méthode de réduction continue qui, pour les formes quadratiques binaires indéfinies, se réduit à l'interprétation de Stephen Smith. Cette interprétation conduit à associer à toute forme binaire  $f$  à coefficients réels un certain *polygone convexe non euclidien*  $D$  du demi-plan analytique qui sert aux représentations. La considération simultanée de ce domaine  $D$  et de la division modulaire connue du demi-plan donne une image immédiate des substitutions que conduit à faire sur  $f$  la méthode d'Hermite, en même temps qu'elle donne une définition intuitive des formes  $(f)$  équivalentes à  $f$  que cette méthode associe à  $f$  : ce sont toutes les formes équivalentes à  $f$  dont le domaine  $D$  associé a un point commun au moins avec  $\mathfrak{D}_0$ , domaine fondamental connu du groupe modulaire. On aperçoit de suite cette conclusion que le seul cas (hors le cas banal où la forme  $f$  n'aurait pour racines réelles que des nombres rationnels), où l'ensemble  $(f)$  ne compte qu'un nombre fini de formes, est celui où  $f$  n'a pas de racines réelles (formes positives). A ce titre la théorie des formes positives apparaît comme plus simple que celle des formes dont le signe est variable, et la proposition précédente aurait pu suffire à établir la réduction. Mais, poursuivant avec Hermite le choix d'une ou plusieurs des formes  $(f)$  qui joueront le rôle de réduites, on met en évidence le rôle d'une fonction  $\theta$  des paramètres  $(t, u)$  que comporte la forme quadratique associée à  $f$ , pour la limitation des coefficients de  $(f)$  (cette valeur minimum de  $\theta$  est dite *déterminant de  $f$* ). Les valeurs des  $(t, u)$  qui rendent  $\theta$  minimum absolu donnent la forme quadratique  $\varphi$  qu'on appelle *correspondante de  $f$* . La réduction de  $f$  se fait par la même substitution que celle de  $\varphi$ ;  $\varphi$  est un covariant quadratique de  $f$ . Une réduite de  $f$  est une forme équivalente à  $f$  dont la correspondante  $\varphi$  est réduite. Il peut d'ailleurs y avoir plusieurs réduites (1).

On s'attache ensuite (Chap. II) à étudier l'application de la méthode aux formes cubiques et biquadratiques qu'Hermite n'a traitées qu'en partie. On a fait usage de la représentation géométrique pour relier simplement la correspondante  $\varphi$  à la forme  $f$  et l'on y est parvenu dans tous les cas. Les représentations trouvées pour cette correspondante sont toujours simples et mettent en évidence la propriété de covariance de  $\varphi$ .

Suivent des remarques utiles pour simplifier les calculs de la méthode, c'est

---

(1) Bien entendu, on suppose dans tout ceci que les coefficients de la forme sont réels, mais pas forcément entiers. Si l'on envisage plus particulièrement les formes à coefficients entiers, les limitations des coefficients des réduites en fonction du déterminant permettent d'affirmer que pour un déterminant donné il n'y a qu'un nombre limité de classes de formes à coefficients entiers.

l'objet du Chapitre III. Des exemples variés choisis parmi les formes cubiques et biquadratiques montrent l'utilité de ces remarques pour supprimer beaucoup de calculs, et pour relier entre elles les diverses façons dont s'applique la méthode à une forme d'un degré donné, dans les diverses hypothèses possibles sur le nombre des racines réelles. L'exemple des formes biquadratiques, en particulier, montre que du cas le plus simple des formes positives du degré 4, on peut, sans aucun calcul, déduire l'étude de celles qui admettent deux ou quatre racines réelles.

Le Chapitre IV traite d'une nouvelle façon d'envisager la méthode d'Hermite et met en évidence l'intérêt qu'il y a à grouper deux par deux les racines réelles ou imaginaires conjuguées. Les résultats obtenus pour les formes biquadratiques avec cette nouvelle conception sont rapides et simples, et ils donnent la raison des propriétés géométriques élégantes qui relient le point représentatif de la correspondante aux points racines de la forme proposée. Cette nouvelle conception est surtout utile à la généralisation qui fait l'objet de la troisième Partie de ce Mémoire.

La deuxième Partie est une première extension de la méthode d'Hermite aux formes binaires à coefficients et indéterminées complexes <sup>(1)</sup>. La nécessité de cette extension est ici aussi nécessaire et rationnelle que l'introduction des nombres complexes l'est pour l'étude même de toutes les racines des équations à coefficients réels. En particulier elle apporte à l'étude qui fait l'objet de la première Partie (formes à coefficients réels) une aide qui met dans son véritable jour le rôle des différentes racines de la forme proposée. Elle montre que toutes ces racines jouent en définitive *le même rôle*, et ainsi la nouvelle méthode met une unité complète dans ce qu'avait d'un peu disparate à première vue la méthode d'Hermite : c'est seulement parce qu'on l'envisageait du seul point de vue réel que cette méthode semblait disparate ; elle ne l'est plus quand, avec l'extension qu'on lui donne ici, on l'envisage du point de vue complexe.

Pour cette étude, on a dû remplacer, les indéterminées étant complexes, le groupe modulaire réel par le groupe modulaire complexe, qu'une terminologie aujourd'hui adoptée appelle *groupe de Picard*, depuis que M. Picard a mis en évidence la division du demi-espace en pentaèdres, à laquelle ce groupe donne naissance. On a aussi remplacé la forme quadratique définie associée par une *forme quadratique définie à indéterminées conjuguées* (forme d'Hermite),

---

(1) Les formes non quadratiques à coefficients complexes ont fait l'objet d'un important Mémoire de M. Jordan, *sur l'équivalence des formes*, inséré dans le 48<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. La méthode dont je me suis servi ici, directement inspirée de celle d'Hermite, diffère de celle de M. Jordan qui visait les formes à un nombre quelconque de variables. On pourra rapprocher les limitations que j'ai données pour les coefficients des réduites, de celles qu'a données M. Jordan, et les conclusions qu'on en peut tirer pour les formes à coefficients entiers.

dépendant d'autant de paramètres positifs  $t_i^2$  que la forme proposée a de racines. Le Chapitre II donne alors l'exposé complet de la méthode. La représentation usuelle des formes d'Hermite définies conduit à associer à  $f$  un domaine  $D$  qui n'est autre que le *polyèdre convexe non euclidien ayant pour sommets les racines de  $f$* .

Ce polyèdre, envisagé concurremment avec la division pentaédrique du demi-espace, donne une interprétation géométrique de cette méthode de réduction continue tout à fait analogue à celle exposée dans la première Partie. Il n'y a naturellement plus ici de distinction entre les formes positives et les formes non toujours positives, le polyèdre a tous ses sommets dans le plan de la variable complexe. L'ensemble des  $(f)$  associées à  $f$  par réduction continue est toujours infini (sauf le cas banal où toutes les racines de  $f$  seraient rationnelles), et l'importance du choix de *la réduite* équivalente à  $f$  (ou *des réduites*, car il peut y en avoir plusieurs) est plus grande encore que dans la première Partie. Il y a une fonction  $\theta$  dépendant des  $t_i$  qui joue un rôle primordial dans la limitation des coefficients des  $(f)$ .

Pour les valeurs des  $t_i$  qui la rendent minimum absolu, on obtient la correspondante  $\varphi$  de  $f$ , et cette correspondante quadratique à indéterminées conjuguées est un covariant de  $f$  par toute substitution linéaire. La réduction de  $f$  se fait par la même substitution que celle de  $\varphi$  : *une réduite est une forme équivalente à  $f$  dont la correspondante est une forme d'Hermite réduite*.

Au Chapitre II on étudie l'application de la méthode aux formes quadratiques, cubiques et biquadratiques. Pour les formes quadratiques, on retrouve l'idée de réduction de M. Bianchi. Passant aux formes cubiques, on arrive pour la correspondante  $\varphi$  à une représentation géométrique très simple qui donne immédiatement, et par une voie naturelle, l'interprétation du covariant quadratique d'Eisenstein (hessien) à laquelle M. Klein (1) est parvenu en interprétant la théorie algébrique des covariants. Pour les formes biquadratiques, l'idée exposée au Chapitre IV de la première Partie (association des racines deux à deux) donne de façon très simple : 1° la correspondante de la forme  $f$ ; 2° une série de propriétés géométriques de son point représentatif d'où découle en particulier une interprétation géométrique du covariant  $T$  du sixième degré de la forme biquadratique, à laquelle M. Klein était arrivé, sinon explicitement du moins implicitement, en interprétant certains résultats de la théorie algébrique des covariants de cette forme. On voit aussi nettement, dans le cas des formes cubiques et biquadratiques, pourquoi la correspondante est un covariant quadratique à indéterminées conjuguées de la forme proposée  $f$  : cela tient aux relations géométriques simples qui relient son point représentatif aux racines de  $f$ .

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX.

Le Chapitre IV envisage l'application de la méthode de cette deuxième Partie aux formes à coefficients réels. Comme on devait s'y attendre, on retombe sur la méthode d'Hermite exposée dans la première Partie. Mais on voit cette dernière méthode d'un point de vue plus large qui fait apparaître son unité profonde. Les divers cas que peut présenter dans la première Partie une forme d'un degré donné, selon qu'elle a 0, 2, 4, ... racines imaginaires, et auxquels la méthode d'Hermite semble s'appliquer *différemment*, reçoivent ici une seule et même application de la nouvelle méthode. L'une des conséquences les plus importantes que j'ai pu tirer de l'unité qu'apportait cette nouvelle méthode, est la réponse à une question qu'Hermite se posait relativement aux formes à coefficients réels et à l'équation qui relie le *déterminant* d'une telle forme (valeur minimum de la fonction  $\theta$  dont il a été question plus haut) à ses coefficients : « On observe alors, dit Hermite, cette circonstance remarquable que, pour chaque degré, c'est toujours la même équation en  $D$  ( $D = \sqrt{\theta}$ ) qui vient s'offrir, bien que les calculs par lesquels on y arrive diffèrent beaucoup suivant le nombre des racines réelles et imaginaires, mais je n'ai pu jusqu'à présent découvrir la raison générale de ce fait important (*Œuvres*, p. 92 et 93 du Tome I).

La deuxième Partie se termine sur quelques remarques relatives à une conception purement géométrique de la réduction, dont on pourrait faire usage pour certaines formes particulières.

La troisième Partie aborde un sujet qui me paraît absolument nouveau et auquel conduisaient tout naturellement les interprétations géométriques avec lesquelles les première et deuxième Parties de ce Mémoire (en particulier Chapitre IX de la première Partie et Chapitre III de la deuxième) rendent familier : c'est l'étude de *certaines formes à indéterminées conjuguées non quadratiques*. Jusqu'ici il n'existe, à ma connaissance, d'études que sur les formes *quadratiques* à indéterminées conjuguées ; la troisième Partie de ce Mémoire est un essai sur les formes de cette nature de degré supérieur à 2.

Le Chapitre I traite de celles de ces formes  $f$  qui sont un produit de formes d'Hermite définies. Elles généralisent les formes binaires à coefficients réels positives. On leur associe une forme d'Hermite positive dépendant de paramètres positifs  $t_i$ , dont le point représentatif, lorsque les  $t_i$  varient, décrit l'intérieur et la surface d'un *polyèdre convexe euclidien*  $D$  associé à  $f$  d'une façon très simple. On définit encore l'ensemble des  $(f)$  associées à  $f$  par réduction continue, et l'on introduit une fonction  $\theta$  des paramètres  $t_i$  qui joue le rôle essentiel pour la limitation des coefficients de  $(f)$ . Les valeurs des  $t$  rendant  $\theta$  minimum absolu (déterminant de  $f$ ) donnent la correspondante quadratique de  $f$ . On réduit  $f$  et sa correspondante par la même substitution. Les conclusions habituelles sur les formes à coefficients entiers du type étudié se tirent de là.

Passant au cas où  $f$  est un produit de formes d'Hermite *non toutes définies*, on prend d'abord, dans le Chapitre II, le cas des formes biquadratiques qui amène à des considérations inattendues et fort simples. Le domaine D associé à  $f$  est ici limité par des portions de sphère et des portions de cyclide de Dupin; on le définit immédiatement à l'aide des éléments géométriques qui représentent les formes composantes de  $f$ . On peut définir *une réduite unique* par l'intermédiaire d'une correspondante quadratique définie d'Hermite, sauf dans le cas où *les formes composantes de  $f$  sont indéfinies et à demi-sphères représentatives sécantes*. Il se produit dans ce dernier cas une circonstance analogue à celle des formes quadratiques binaires indéfinies à coefficients réels. Il y a en général une *infinité de réduites*. On tire des conclusions immédiates relatives à celles de ces formes qui sont à coefficients entiers et ne peuvent représenter zéro.

L'étude complète des formes biquadratiques décomposables à coefficients entiers fait l'objet du Chapitre IV. Au préalable, on donne dans le Chapitre III des relations nouvelles entre les groupes cycliques de substitutions modulaires complexes qui conservent une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers. Ces propositions nouvelles, complétées par une Note rejetée à la fin du Mémoire, éclairent en particulier la nature de toute substitution loxodromique du groupe de Picard en donnant des indications simples sur la valeur de l'argument de son multiplicateur K. A l'aide de ces résultats, l'étude des formes biquadratiques à coefficients entiers devient facile.

En particulier, on voit que, dans le cas d'exception signalé plus haut, les réduites en nombre infini se ramènent à un nombre fini de formes se reproduisant périodiquement lorsque les coefficients de la proposée sont entiers. C'est un résultat comparable à celui des formes quadratiques binaires indéfinies à coefficients entiers. Dans ce cas aussi la forme reste invariable par un groupe cyclique infini de substitutions modulaires complexes, toutes hyperboliques. On montre qu'une telle forme peut toujours, d'une infinité de façons, se ramener au type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$  ( $a, b, c$ , entiers réels;  $b^2 - ac > 0$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers et à demi-sphères représentatives toujours sécantes). Ce sont les formes de la première catégorie. A la deuxième catégorie appartiennent les formes biquadratiques à coefficients entiers qui se décomposent en produit de : 1° deux formes d'Hermite définies; 2° une forme définie, et une indéfinie; 3° deux formes indéfinies à demi-sphères représentatives non sécantes. On les ramène toutes d'une infinité de façons au type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$ ,  $a, b, c$  étant du même type que pour la première catégorie,  $\varphi$  et  $\psi$  étant deux formes d'Hermite à coefficients entiers qui ne peuvent jamais être indéfinies et à demi-sphères représentatives sécantes.

La méthode du premier et du deuxième Chapitre donne pour toute forme de la deuxième catégorie une réduite unique, et pour toute forme de la première un

nombre fini de réduites se reproduisant périodiquement. On a vu aussi que toute forme de la première catégorie se conservait par un groupe de substitutions modulaires hyperboliques. Une forme de la deuxième n'admet pas en général de substitution qui la conserve, sauf certaines formes équivalentes à des formes canoniques qu'on donne et qui se conservent par un groupe fini. On voit ainsi que les formes biquadratiques de la première catégorie généralisent les formes quadratiques binaires indéfinies à coefficients entiers réels, et celles de la deuxième généralisent les formes définies.

On passe ensuite au cas où  $f$  est un produit de deux formes conjuguées l'une de l'autre, chacune étant à indéterminées conjuguées, mais non d'Hermite, c'est-à-dire ne prenant pas des valeurs réelles pour toutes valeurs des variables. On ramène  $f$  au type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$ ,  $a, b, c$  entiers réels, mais  $ac - b^2 > 0$ .

$\varphi$  et  $\psi$  sont encore deux formes d'Hermite à coefficients entiers qui sont *toujours* indéfinies et à demi-sphères représentatives sécantes pour les formes  $f$  de la première catégorie, et qui ne sont *jamais* indéfinies et à demi-sphères sécantes pour les  $f$  de la deuxième catégorie. Les deux catégories se distinguent par la réalité des points doubles de la cyclique  $f(z, 1) = 0$ . On étend à ces formes la théorie de la réduction en s'aidant de la représentation usuelle projective des formes (la sphère unité servant de quadrique fondamentale) et des résultats trouvés aux Chapitres I et II avec cette représentation. Sur la sphère, on considère la cyclique correspondant à  $f(z, 1) = 0$  qui ici se décompose en deux cercles imaginaires conjugués. Les sommets des cônes du deuxième degré passant par ces deux cercles jouent le rôle principal dans la réduction de ces formes. Il y a *une réduite* pour toute forme de la deuxième catégorie et une *infinité de réduites* pour toute forme de la première, qui se réduisent à un nombre limité d'entre elles, se reproduisant périodiquement si la forme a ses coefficients entiers. On s'élève ensuite au cas où la cyclique ne se décompose plus pour donner une méthode théorique de réduction basée toujours sur la considération des cônes du deuxième degré contenant la cyclique.

Le Chapitre V traite du cas général où  $f$  est produit de  $n$  formes d'Hermite non toutes définies ( $n > 2$ ) et montre, par des exemples, la nature des domaines  $D$  associés aux formes de ce type. On y retrouve, pour limiter ces domaines, des portions de sphères et de cyclides de Dupin. La réduction est basée sur la considération d'une fonction  $\theta$  des paramètres figurant dans la forme d'Hermite associée à  $f$ , et sur la recherche des valeurs de ces paramètres qui rendent  $\theta$  minimum.

Les deuxième et troisième Parties de ce Mémoire ont mis en évidence le rôle de certains *covariants à indéterminées conjuguées* d'une forme binaire ordinaire ou à indéterminées conjuguées. Je ne crois pas qu'on ait beaucoup insisté jusqu'ici sur les covariants de cette espèce; on a surtout envisagé les covariants qui sont des formes *ordinaires*, non à indéterminées conjuguées.

Enfin, le dernier Chapitre de la troisième Partie traite d'une question que soulèvent naturellement les recherches précédentes : *Déterminer toutes les formes binaires à indéterminées conjuguées qui restent invariantes par un groupe de substitutions linéaires* (1); et l'on trouve que, hors les formes décomposables du type

$$a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n \quad (\text{les } a_i \text{ réels, } \varphi \text{ et } \psi \text{ formes d'Hermite})$$

qui se conservent par toute substitution conservant à la fois  $\varphi$  et  $\psi$ , *toute forme cherchée non décomposable ne peut rester invariante que par un groupe fini*. On donne les types canoniques des formes jouissant de la propriété, en ramenant les groupes à être ceux des polyèdres réguliers.

(1) Dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique de France*, M. Picard avait signalé l'existence, pour tout groupe fini de substitutions linéaires, d'un invariant qui est une forme quadratique d'Hermite. Ici ce serait la forme  $xx' + yy'$ , qui est représentée par le *centre de la sphère fondamentale* : ce centre reste évidemment invariable par toute substitution d'un groupe de rotation autour du centre comme l'est tout groupe fini.

---

# PREMIÈRE PARTIE.

## LES FORMES BINAIRES A COEFFICIENTS ET INDÉTERMINÉES RÉELS.

---

### PRÉLIMINAIRES.

Nous rappellerons quelques principes essentiels de la théorie des formes quadratiques binaires dont nous aurons à faire un constant usage dans la suite.

Soit la forme quadratique binaire

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

On donne à  $x$  et  $y$  des valeurs entières réelles;  $a, b, c$  sont supposés réels quelconques. Dans la théorie arithmétique de ces formes on envisage avec grand intérêt les formes où  $a, b, c$  sont entiers.

Si  $b^2 - ac < 0$ , la forme a le même signe quelles que soient les valeurs de  $x$  et  $y$ . Elle est dite *définie*. Ce n'est pas restreindre la généralité que de supposer  $a > 0$ , la forme est dite *positive*.

Si  $b^2 - ac > 0$ , la forme n'a pas toujours le même signe. Elle est dite *indéfinie*.

Si  $b^2 - ac = 0$ , la forme est carré parfait d'une forme linéaire en  $x$  et  $y$ . Ce cas est le moins intéressant dans l'étude arithmétique. Nous le passerons sous silence dans la suite.

*Représentation géométrique.* — Considérons l'équation

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

ou, en posant  $z = \frac{x}{y}$ ,

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Deux cas sont possibles :

1° Si la forme est définie, ses racines sont imaginaires conjuguées :  $\zeta$  et  $\zeta_0$ . On représentera la forme (et toutes celles qui s'en déduisent en la multipliant par un facteur constant) par le point du demi-plan supérieur de la variable

complexe  $z = \xi + i\eta$  dont l'affixe est  $\zeta$  (nous dirons pour abréger le point  $\zeta$ ) et nous pourrions toujours nous borner à la considération du demi-plan supérieur de la variable complexe ( $\eta \geq 0$ ).

$\zeta_0$  est symétrique de  $\zeta$  par rapport à  $O\xi$ .

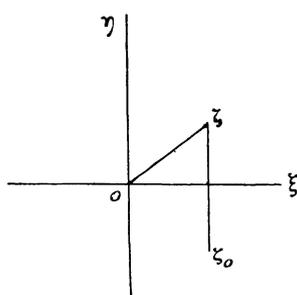
L'abscisse de  $\zeta$  est égale à  $-\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta_0)$ .

Le carré de sa distance à l'origine est  $\frac{c}{a} = \zeta\zeta_0 = \text{Norme } \zeta$ .

Il est facile, connaissant les trois nombres  $a, b, c$ , de construire  $\zeta$ .

On peut remarquer que l'ordonnée de  $\zeta$  est égale à  $\frac{+\sqrt{ac-b^2}}{a}$ .

Fig. 1



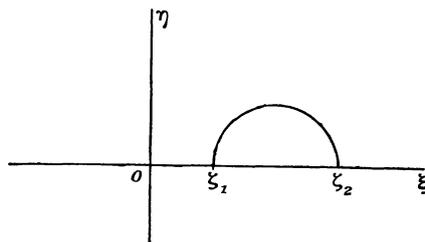
2° Si la forme est indéfinie, ses racines sont  $\zeta_1, \zeta_2$ , réelles. On définit une première et une deuxième racine dans certaines recherches, on prend

$$\zeta_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

$$\zeta_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et l'on représente la forme  $f(x, y)$  par le demi-cercle tracé sur  $\zeta_1\zeta_2$  comme diamètre, affecté d'une flèche allant de la première à la deuxième racine. Cette

Fig. 2.



flèche permet de distinguer la forme  $f(x, y)$  de la forme  $-f(x, y)$  à laquelle correspondrait la même demi-circonférence mais affectée de la flèche opposée.

La raison de cette représentation géométrique ressort de la théorie de la réduction des formes quadratiques, puis de la réduction continue telle qu'Hermité l'a imaginée. C'est à Stephen Smith qu'on doit cette interprétation de la méthode d'Hermité. Nous rencontrerons plus loin l'interprétation géométrique complète de la méthode de réduction exposée par Hermité dans son Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (HERMITE, *Œuvres*, t. I, p. 164).

ÉQUIVALENCE. — Deux formes

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{et} \quad F(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

quadratiques binaires sont dites *équivalentes* proprement si  $F(X, Y)$  s'obtient en remplaçant dans  $f(x, y)$ ,  $x$  et  $y$  par

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant quatre entiers réels tels que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  :

$$F(X, Y) = f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y).$$

La substitution S est dite une *substitution modulaire*.

Elle fait correspondre à tout couple d'entiers  $(x, y)$  un couple d'entiers  $(X, Y)$  et réciproquement. On a

$$B' - AC = b' - ac.$$

Donc, si  $f(x, y)$  est définie,  $F(X, Y)$  sera aussi définie ; si  $f$  est indéfinie,  $F$  l'est aussi.

Soit  $z$  le point représentatif de la forme  $f(x, y)$  supposée définie ; c'est la racine située dans le demi-plan supérieur de l'équation

$$f(z, 1) = 0.$$

Soit  $Z$  le point représentatif de la forme  $F(x, y)$  ; c'est la racine de l'équation

$$F(Z, 1) = 0,$$

qui n'est autre que

$$f\left(\frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}, 1\right) = 0.$$

On a donc entre  $z$  et  $Z$  soit la relation

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

soit la relation

$$z_0 = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

$z_0$  étant conjugué de  $z$ . Mais on voit immédiatement que  $\frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$  comme  $Z$  est situé dans le demi-plan supérieur de la variable complexe (c'est un calcul facile qui résulte de  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ), on a donc bien

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}.$$

Si donc  $F(X, Y)$  se tire de  $f(x, y)$  par la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

son point représentatif  $Z$  se tire de celui de  $f(x, y)$  par la substitution

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

qui est une substitution fuchsienne. Nous désignerons également par la lettre  $S$  cette dernière substitution.

Pour abrégé nous écrirons quelquefois symboliquement

$$\begin{cases} F(X, Y) = f.S, \\ Z = z.S; \end{cases}$$

c'est une notation coutumière dans la théorie des groupes. Il ne faut pas y voir autre chose qu'une notation.

Si  $f(x, y)$  est indéfinie, il lui correspond un demi cycle (demi-cercle affecté d'un sens), à  $F(X, Y) = f.S$  correspond aussi un demi-cycle. C'est une chose facile de vérifier que si le point  $z$  décrit le demi-cycle correspondant à  $f(x, y)$  dans le sens de sa flèche, le point  $Z$  lié à  $z$  par

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

écrit en même temps le demi-cycle correspondant à  $F(X, Y)$  dans le sens de sa flèche.

*Réduction des formes définies.* — Reprenons la forme définie

$$(1) \quad f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (ac - b^2 > 0);$$

on sait qu'il existe une substitution modulaire  $S$  telle que la forme

$$(2) \quad f.S = F(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

ait des coefficients vérifiant les inégalités suivantes :

$$(3) \quad 2|B| \leq A, \quad A \leq C$$

et, naturellement,

$$AC - B^2 > 0.$$

Cette forme  $F$  est dite une *réduite équivalente* à  $f$ .

En général une forme définie n'a *qu'une seule réduite* : ceci arrive toutes les fois que les conditions (3) se trouvent être de vraies inégalités. Si certaines des inégalités (3) se trouvaient être des égalités, il y aurait *deux réduites* différant seulement par le signe du coefficient moyen  $B$ .

Considérons le point représentatif  $Z$  d'une réduite; son abscisse [partie réelle de  $Z$  que nous désignons par  $\Re(Z)$ ] est  $-\frac{B}{A}$ , elle est comprise entre  $-\frac{1}{2}$  et  $+\frac{1}{2}$ .

Le carré de sa distance à l'origine est  $\geq 1$  : Norme  $Z = \frac{C}{A}$ .

Le point  $Z$  est donc à l'intérieur ou sur le contour du triangle curviligne  $\omega_0$  dont les côtés sont les droites

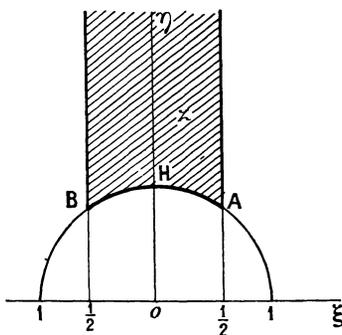
$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \xi = -\frac{1}{2},$$

et le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

$\omega_0$  s'appelle le *domaine de réduction*. Toute forme définie dont le point représentatif est intérieur à  $\omega_0$  ou sur son contour est dite *réduite*.

Fig. 3.



Le développement de la théorie de la réduction montre que :

1° Deux formes réduites dont l'une au moins a son point représentatif intérieur à  $\omega_0$  ne sont équivalentes que si elles sont *identiques*.

2° De toutes les formes équivalentes à une forme donnée positive (formes d'une même classe) il y en a en général une seule dont le point représentatif

tienne à  $\mathfrak{D}_0$  : c'est ce qui a lieu si ce point représentatif tombe à l'intérieur de  $\mathfrak{D}_0$ ; il y en a deux dans certains cas exceptionnels, et ils sont alors symétriques par rapport à  $O\gamma$  et tous les deux *sur le contour de*  $\mathfrak{D}_0$ .

*Le groupe modulaire.* — C'est le groupe des substitutions modulaires

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers réels; } \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ou

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta};$$

les deux points  $z$  et  $Z$  sont dits quelquefois *congruents* dans le groupe modulaire.

On démontre aisément que le triangle  $\mathfrak{D}_0$  est un domaine fondamental du groupe modulaire, c'est-à-dire que :

1° Si l'on forme tous les congruents d'un point  $z$  par les substitutions du groupe modulaire, il en tombe toujours un à l'intérieur de  $\mathfrak{D}_0$  ou sur son contour.

2° Deux points dont l'un est intérieur à  $\mathfrak{D}_0$  et l'autre est dans  $\mathfrak{D}_0$  ou sur son contour ne peuvent être congruents que s'ils sont confondus.

3° Dans  $\mathfrak{D}_0$  ne peuvent tomber plus de deux congruents d'un point  $z$ .

Il n'en tombe qu'un en général, et il est intérieur à  $\mathfrak{D}_0$ . S'il en tombe deux, ils sont nécessairement sur le contour de  $\mathfrak{D}_0$  et symétriques par rapport à  $O\eta$ .

On démontre aussi que les deux substitutions fondamentales du groupe modulaire sont

$$\begin{aligned} z &= Z - 1, \\ z &= -\frac{1}{Z}. \end{aligned}$$

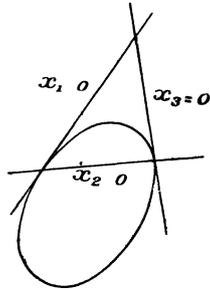
*La division modulaire du plan.* — Lorsque  $Z$  décrit le triangle  $\mathfrak{D}_0$ , le point  $z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$  décrit un triangle curviligne  $\mathfrak{D}$  dont les côtés sont des arcs de cercle normaux à l'axe réel (les droites normales à cet axe sont à comprendre parmi ces arcs de cercle). Si l'on imagine que la substitution  $S \left( z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} \right)$  change,  $\mathfrak{D}$  changera. Par toutes les substitutions du groupe modulaire,  $\mathfrak{D}_0$  se transforme en une infinité de triangles qui, suivant un processus connu, recouvrent tout le demi-plan supérieur. L'opération de la réduction d'une forme définie se présente donc ainsi :

Le point représentatif  $z$  de la forme  $f(x, y)$  tombant dans un des triangles  $\mathfrak{D}$  de la division modulaire, si  $S$  est la substitution  $z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$  qui transforme le

triangle  $\mathcal{O}$  dans le triangle  $\mathcal{O}_0$ , la réduite équivalente à  $f(x, y)$  sera  $F(X, Y) = f.S$ .

*Représentation projective.* — Il nous arrivera quelquefois de nous servir d'une deuxième représentation des formes quadratiques binaires.

Fig. 4.



Nous choisissons dans un plan des coordonnées trilineaires telles que la conique  $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$  soit une ellipse. Nous l'appelons la *conique fondamentale* ou *absolue*, avec Cayley. Tout point tel que  $x_1 x_3 - x_2^2 > 0$  est intérieur à la conique; si  $x_1 x_3 - x_2^2 < 0$  il est extérieur. Cela fait nous représentons la forme quadratique

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

par le point de coordonnées homogènes

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c.$$

Une forme définie a son point représentatif à l'intérieur de la conique fondamentale; une forme indéfinie a son point représentatif à l'extérieur de la conique fondamentale; on la représente aussi par le segment qui joint les points de contact des tangentes à la conique issues du point représentatif, afin de n'envisager jamais que ce qui se passe à l'intérieur de la conique fondamentale.

Une forme dont le discriminant est nul a son point représentatif sur la conique fondamentale.

Les deux modes de représentation donnés sont d'ailleurs étroitement liés l'un à l'autre.

Représentons paramétriquement la conique fondamentale à l'aide des relations

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-\zeta} = \frac{x_3}{\zeta^2},$$

$\zeta$  étant le paramètre.

On voit que les valeurs du paramètre correspondant aux points de contact

des tangentes issues du point  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = c$ , sont

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0;$$

ce sont les racines de la forme.

On fait alors correspondre l'intérieur de la conique et le demi-plan analytique en associant à tout point  $a, b, c$ , intérieur, la racine dont la partie imaginaire est positive de l'équation

$$a\zeta^2 + 2b\zeta + c = 0,$$

c'est-à-dire le point représentatif selon le premier mode de la forme définie

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

A un point  $\zeta$  de la conique correspond le point de l'axe réel qui a pour abscisse la valeur correspondante du paramètre  $\zeta$ .

Si un point décrit un segment  $\zeta_1, \zeta_2$  joignant deux points  $\zeta_1, \zeta_2$  de la conique, son correspondant, dans le demi-plan analytique décrit la demi-circonférence orthogonale à  $O\xi$  qui va du point d'abscisse  $\zeta_1$  au point d'abscisse  $\zeta_2$  de l'axe réel. On voit ainsi la liaison entre les deux modes de représentation des formes indéfinies.

Il faut aussi rappeler que les notions de distance et d'angle par rapport à la conique fondamentale deviennent, par la transformation précédente, les notions de distance et d'angle dont Poincaré s'est beaucoup servi dans son Mémoire sur les groupes fuchsien.

Enfin aux substitutions modulaires, effectuées sur le paramètre  $\zeta$ , correspondent des transformations homographiques qui conservent l'intérieur de la conique fondamentale, formant un groupe de mouvements non euclidiens. Le domaine fondamental de ce groupe est un triangle ayant un sommet sur la conique et deux sommets intérieurs; c'est le transformé du domaine  $(\mathfrak{D})_0$  par la correspondance indiquée plus haut.

---

## CHAPITRE I.

### THÉORIE DES FORMES BINAIRES A COEFFICIENTS ET INDÉTERMINÉES RÉELS RÉDUCTION CONTINUELLE.

---

Avec Hermite nous considérons une forme

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \quad (1).$$

et, conjointement, l'équation

$$f(z, 1) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

dont les racines seront appelées *racines* ou *zéros* de la forme  $f$ .

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  les racines réelles de  $f$ ;  $\beta_1, \beta'_1; \beta_2, \beta'_2; \dots; \beta_\nu, \beta'_\nu$ ; ses couples de racines imaginaires conjuguées;

$$\mu + 2\nu = n.$$

On aura

$$f(x, y) = a_0 (x - \alpha_1 y) \dots (x - \alpha_\mu y) (x - \beta_1 y) (x - \beta'_1 y) \dots \\ (x - \beta_\nu y) (x - \beta'_\nu y).$$

Concevons qu'avec les quantités réelles  $t_1, \dots, t_\mu; u_1, u_2, \dots, u_\nu$ , on construise la forme quadratique définie positive

$$\varphi(x, y) = t_1^2 (x - \alpha_1 y)^2 + \dots + t_\mu^2 (x - \alpha_\mu y)^2 + 2 u_1^2 (x - \beta_1 y) (x - \beta'_1 y) + \dots \\ + 2 u_\nu^2 (x - \beta_\nu y) (x - \beta'_\nu y).$$

On imagine maintenant que les  $t$  et les  $u$  reçoivent un système de valeurs déterminées et pour ce système de valeurs on réduit la forme  $\varphi$ . Il faut pour la réduire faire sur  $x$  et  $y$  la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

---

(1) Nous supposons dans la suite  $a_0 \neq 0$ . On pourra toujours se placer dans ce cas en remplaçant au besoin  $f$  par une forme équivalente modulairement et dont le premier coefficient ne soit pas nul, ce qui est toujours possible. D'ailleurs, comme on le verra par la suite, cette supposition n'est pas indispensable; elle allège simplement l'exposition.

On fera alors sur  $f$  la même substitution que sur  $\varphi$ , on obtient une forme  $fS$  équivalente à  $f$ ,

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y) &= \varphi S = \varphi(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y), \\ F(X, Y) &= fS = f(\sigma X + \beta Y, \gamma X + \delta Y).\end{aligned}$$

Concevons alors que les  $t$  et les  $u$  reçoivent toutes les valeurs possibles, que pour chacun de ces systèmes de valeurs on réduise la forme  $\varphi$ , et qu'on fasse dans  $f$  la même substitution que celle qui réduit  $\varphi$ . On obtiendra ainsi un ensemble de formes équivalentes à  $f$  que nous désignerons par  $(f)$  et dont nous allons étudier les propriétés.

Tout revient à étudier l'ensemble des substitutions  $S$  qu'il faut faire pour réduire  $\varphi$  lorsque les  $t$  et les  $u$  prennent toutes les valeurs possibles. Ceci va nous être facilité par la représentation géométrique des formes définies quadratiques et l'interprétation de la réduction de ces formes rappelée dans les préliminaires.

Tout d'abord cherchons le domaine décrit par le point représentatif de la forme  $\varphi$  lorsque les  $t$  et les  $u$  varient.

Développons l'expression de la forme  $\varphi$ ; nous pouvons l'écrire

$$\varphi = px^2 - 2qxy + ry^2,$$

en posant

$$\begin{aligned}p &= t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2, \\ q &= t_1^2 \alpha_1 + \dots + t_\mu^2 \alpha_\mu + u_1^2 (\beta_1 + \beta'_1) + \dots + u_\nu^2 (\beta_\nu + \beta'_\nu), \\ r &= t_1^2 \sigma_1^2 + \dots + t_\mu^2 \sigma_\mu^2 + 2u_1^2 \beta_1 \beta'_1 + \dots + 2u_\nu^2 \beta_\nu \beta'_\nu.\end{aligned}$$

Prenons par exemple la représentation projective. Soient :

$A_1$  le point de la conique qui représente  $(x - \alpha_1 y)^2$ ; ses coordonnées sont  $1, -\alpha_1, \alpha_1^2$ ;  
 $A_2$  » »  $(x - \alpha_2 y)^2$ ; »  $1, -\alpha_2, \alpha_2^2$ ;  
 $\dots$  » » .....; » .....;  
 $A_\mu$  » »  $(x - \alpha_\mu y)^2$ ; »  $1, -\alpha_\mu, \alpha_\mu^2$ ;

$B_1$  le point intérieur à la conique qui représente

$$(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y); \quad \text{ses coordonnées sont} \quad 1, \frac{-(\beta_1 + \beta'_1)}{2}, \beta_1 \beta'_1;$$

.....;

$B_\nu$  le point intérieur à la conique qui représente

$$(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y); \quad \text{ses coordonnées sont} \quad 1, \frac{-(\beta_\nu + \beta'_\nu)}{2}, \beta_\nu \beta'_\nu.$$

Le point représentatif de  $\varphi$  peut alors se désigner symboliquement par

$$t_1^2 A_1 + \dots + t_\mu^2 A_\mu + 2u_1^2 B_1 + \dots + 2u_\nu^2 B_\nu,$$

ce qui veut dire que chacune de ses coordonnées homogènes s'obtient en remplaçant dans l'expression précédente les lettres  $A_i$  et  $B_i$  par la coordonnée

homogène en question relative au point  $A_i$  ou  $B_i$  correspondant; en d'autres termes, la première coordonnée  $p$  s'obtiendra en remplaçant respectivement  $A_1 \dots B_\nu$  par leurs premières coordonnées, la deuxième coordonnée  $-q$  par leurs deuxième coordonnées, la troisième coordonnée  $r$  par leurs troisième coordonnées.

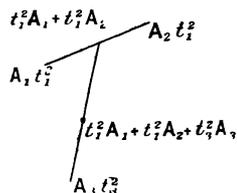
Une telle expression symbolique du point représentatif de  $\varphi$  fait apparaître la ressemblance avec les formules connues du barycentre des points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$ , affectés de masses respectives proportionnelles à  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, u_1^2, \dots, u_\nu^2$ . Plus précisément, si l'on a choisi pour système de coordonnées trilineaires le système des coordonnées homogènes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  jouant le rôle de la coordonnée d'homogénéité, en sorte que les coordonnées cartésiennes soient  $\frac{x_2}{x_1}$  et  $\frac{x_3}{x_1}$  (la conique fondamentale serait une parabole, cas limite d'une ellipse), on voit que le point représentatif de  $\varphi$  est *exactement* le barycentre des points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$  affectés des masses  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$ .

Rien n'est alors plus aisé que de construire le domaine dans lequel se meut le point

$$t_1^2 A_1 + \dots + t_\mu^2 A_\mu + 2u_1^2 \beta_1 + \dots + 2u_\nu^2 \beta_\nu,$$

connaissant les points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$ , lorsque  $t_1, \dots, t_\mu, u_1, \dots, u_\nu$ , prennent toutes les valeurs possibles.

Fig. 5



En effet  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2$  va décrire le segment  $A_1 A_2$ ; il sera en  $A_1$  pour  $t_2 = 0$ , en  $A_2$  pour  $t_1 = 0$ . Le point  $(t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2) + t_3^2 A_3$ , lorsque  $t_3$  variera,  $t_1$  et  $t_2$  restant fixes, décrira le segment qui joint  $A_3$  au point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2$ . Et lorsque  $t_1, t_2, t_3$  varieront arbitrairement, ce même point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3$  va décrire le triangle  $A_1 A_2 A_3$  <sup>(1)</sup>. Si  $t_1, t_2, t_3 \neq 0$  il est à l'intérieur; si l'une des trois quantités  $t_1, t_2, t_3$  est nulle, il est sur un côté; si deux sont nulles, il est en un sommet.

[On peut remarquer, en passant, que si trois points quelconques  $M_1, M_2, M_3$  sont donnés dans ou sur la conique fondamentale, à tout point  $M$  intérieur au triangle ou situé sur son périmètre correspond (à un même facteur près) un seul système de nombres  $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2$  tels que le point  $M$  s'écrive symboli-

(1)  $A_1, A_2, A_3$  étant sur la conique, ce triangle ne se réduit pas à un segment de droite.

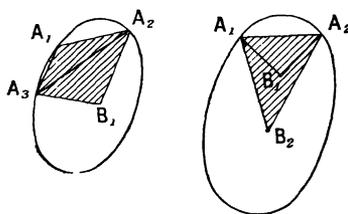
quement

$$M = \mu_1^2 M_1 + \mu_2^2 M_2 + \mu_3^2 M_3.]$$

En continuant de proche en proche, sans qu'il soit utile d'insister davantage, il est clair que le point représentatif de la forme  $\varphi$  va décrire l'intérieur et le périmètre du plus petit polygone convexe qui contienne à son intérieur ou sur son périmètre, l'ensemble des points  $A_1, A_2, \dots, A_\mu; B_1, \dots, B_\nu$ . Ce qu'il faut entendre par là n'est pas douteux, et le polygone en question peut être construit par le procédé indiqué :

On joindra d'abord les points  $A_1, A_2$ ; le premier point de la suite  $A_3, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$ , qui n'est pas sur  $A_1 A_2$  détermine avec  $A_1, A_2$  un triangle (si  $A_3$  existe, c'est lui qu'il faudra prendre). Puis le premier point autre que les trois sommets

Fig. 6.



du triangle qui ne tombe pas dans ce triangle ou sur son périmètre déterminera avec les trois sommets du triangle un quadrilatère convexe, ou avec deux d'entre eux un triangle qui contient le troisième (voir les deux cas de figure). On continuera de proche en proche en choisissant le premier des points de la suite  $A_1, \dots, B_\nu$ , qui ne tombe ni à l'intérieur ni sur le périmètre du quadrilatère ou du triangle qu'on vient de déterminer, et à l'aide de ce point on détermine un polygone de 5, 4 ou 3 côtés qui contient à son intérieur ou sur son périmètre tous les points de la suite  $A_1, \dots, B_\nu$  qui précèdent le point choisi en dernier lieu. Après un nombre limité d'opérations, le polygone en question sera construit.

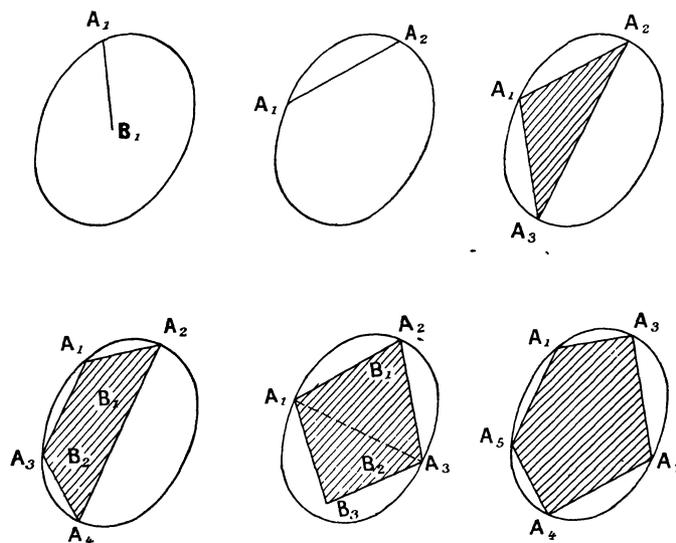
S'il n'y a que deux points dans la suite  $A_1, \dots, B_\nu$ , le polygone se réduira au segment qui les joint; de même si tous les points de la suite en nombre supérieur à deux étaient en ligne droite, le polygone se réduirait au plus petit segment de la droite contenant tous les points.

Si tous les points  $A_1, \dots, B_\nu$  ne sont pas en ligne droite, on a un vrai polygone convexe. D'un mot voici comment on peut le concevoir. On imagine qu'en  $A_1, \dots, B_\nu$  sont plantées des épingles et qu'on jette sur le plan une boucle simple de fil flexible embrassant toutes ces épingles, puis on tend le fil de la boucle de façon qu'elle emprisonne toujours toutes les épingles, la boucle dessinera alors le polygone cherché.

Voici des exemples de figure.

On peut remarquer que si  $f$  n'a que des racines réelles le polygone aura pour sommets consécutifs les  $\mu$  points  $A_1, \dots, A_\mu$ , dans l'ordre où ils se suivront sur la conique fondamentale; à coup sûr aussi les points  $A_1, \dots, A_\mu$  qui figurent

Fig. 7.



dans la suite  $A_1, A_2, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$ , lorsque  $f$  a des racines imaginaires, seront des sommets du polygone. Ceci résulte de la propriété de l'ellipse d'être une courbe convexe (c'est encore vrai du cas limite envisagé plus haut : la parabole).

Si nous passons à la représentation de la forme  $\varphi$  par l'affixe de sa racine  $\zeta$  située dans le demi-plan supérieur, on a

$$\frac{\zeta + \zeta_0}{2} = \frac{q}{p} = \frac{t_1^2 \alpha_1 + \dots + t_\mu^2 \alpha_\mu + u_1^2 (\beta_1 + \beta'_1) + \dots + u_\nu^2 (\beta_\nu + \beta'_\nu)}{t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2},$$

$$\zeta \zeta_0 = \frac{r}{p}.$$

Les points  $A_1, A_2, \dots, A_\mu$  représentatifs des formes  $(x - \alpha_1 y)^2, \dots, (x - \alpha_\mu y)^2$  sont des points de l'axe réel d'abscisse  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ .

Les points  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ , représentatifs de

$$(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y), \quad (x - \beta_2 y)(x - \beta'_2 y), \quad \dots, \quad (x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y)$$

sont des points du demi-plan supérieur ayant respectivement pour affixes  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ .

Si l'on affecte ces points respectivement des masses  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$ , on voit que la projection sur l'axe réel du point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  est la pro-

jection sur cet axe du barycentre euclidien des points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$ , affectés des masses précédentes.

On voit aussi que les mêmes principes qui ont permis de trouver le domaine dans lequel évoluait le point représentatif de  $\varphi$  dans la première représentation sont valables ici.

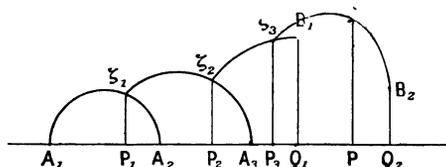
Pour passer de la première représentation à la deuxième, il faudra remplacer le segment de droite joignant deux points intérieurs à la conique ou situés sur elle par l'arc du cercle orthogonal à l'axe réel qui joint les correspondants de ces deux points dans le demi-plan analytique.

Ceci résulte de la propriété rappelée dans les préliminaires en vertu de laquelle par la transformation qui fait passer de l'intérieur de la conique au demi-plan analytique une droite du plan de la conique devient un cercle orthogonal à l'axe réel.

Pour abrégé, il nous arrivera d'appeler les cercles orthogonaux à l'axe réel des *droites non euclidiennes*; ceci est conforme à la représentation donnée par Poincaré de la géométrie non euclidienne de Lobatchefsky dans l'introduction de sa théorie des groupes fuchsien.

Des deux remarques précédentes on conclut une construction bien simple du point  $\zeta$  connaissant  $A_1, A_2, \dots, A_\mu; B_1, \dots, B_\nu$  et leurs masses respectives  $t_1^2, \dots, t_\mu^2; 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$ .

Fig. 8.



Sur la droite non euclidienne  $A_1 A_2$  on prendra le point  $\zeta_1$  qui se projette en  $P_1$  sur l'axe réel et tel que

$$\frac{\overline{P_1 A_1}}{\overline{P_1 A_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2},$$

et l'on affectera  $\zeta_1$  de la masse  $t_1^2 + t_2^2$ .

Sur la droite non euclidienne  $\zeta_1 A_3$  on prendra  $\zeta_2$  qui se projette en  $P_2$  tel que

$$\frac{\overline{P_2 P_1}}{\overline{P_2 A_3}} = -\frac{t_3^2}{t_1^2 + t_2^2},$$

et  $\zeta_2$  recevra la masse  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ .

On continuera ainsi de proche en proche. Pour fixer les idées, supposons qu'il y ait trois racines réelles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , et deux couples de racines imaginaires conjuguées  $\beta_1, \beta_1'; \beta_2, \beta_2'$ .

Sur la droite non euclidienne qui joint  $\zeta_2$  à  $B_1$  on prendra  $\zeta_3$  projeté en  $P_3$  et tel que

$$\frac{\overline{P_3P_1}}{\overline{P_3Q_1}} = - \frac{2u_1^2}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2},$$

$\zeta_3$  recevra la masse  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2u_1^2$ .

Enfin sur la droite non euclidienne qui joint  $\zeta_3$  à  $B_2$  on prendra  $\zeta$  projeté en  $P$  tel que

$$\frac{\overline{PP_3}}{\overline{PQ_3}} = - \frac{2u_1^2}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2u_1^2}.$$

$\zeta$  recevra la masse  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2u_1^2 + 2u_2^2$ , et ce sera le point représentatif de la forme  $\varphi$ .

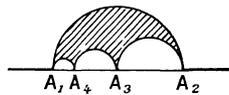
Convenons d'appeler *barycentre non euclidien* des points  $A_1, A_2, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$  respectivement affectés des masses  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_\nu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$  le point  $\zeta$  construit précédemment, alors le point représentatif de  $\varphi$  sera d'un mot le barycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_\mu, B_1, B_2, \dots, B_\nu$ .

Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que ce barycentre ne dépend nullement de l'ordre dans lequel on prend les points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$  pour faire la construction. On voit aussi immédiatement que l'on peut, pour la recherche du barycentre de l'ensemble  $A_1, \dots, B_\nu$ , remplacer tel groupe de points de cet ensemble que l'on voudra par le barycentre des points de ce groupe, à condition de l'affecter d'une masse égale à la somme des masses des points du groupe. Tout se passe pour la recherche des barycentres comme en Géométrie euclidienne ordinaire.

Revenant au domaine que décrit le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque les paramètres  $t, u$  prennent toutes les valeurs possibles, on voit ce qu'il faudra faire pour le trouver connaissant les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu; \beta_1, \beta'_1; \dots; \beta_\nu, \beta'_\nu$  de la forme représentées par les points  $A_1, \dots, A_\mu; B_1, \dots, B_\nu$  du demi-plan supérieur.

On joindra  $A_1, A_2$  par une droite non euclidienne. S'il y a un point  $A_3$  on le joindra à  $A_1$  et  $A_2$ , et cela déterminera un triangle non euclidien.

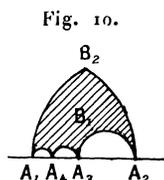
Fig. 9.



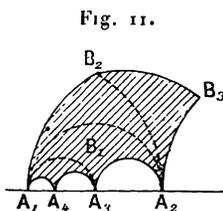
$A_1, A_2, A_3$  divisent l'axe réel en trois segments (nous regardons comme formant un même segment les deux demi-droites reliant au point à l'infini de l'axe réel les deux points extrêmes du groupe  $A_1, A_2, A_3$ , ce segment contient le point à l'infini de l'axe réel). S'il y a un point  $A_4$ , on le joindra par des droites non

euclidiennes aux extrémités de celui des trois segments précédents qui le contient et l'on aura un quadrilatère non euclidien.

On épuisera ainsi tous les points  $A_\mu$  en joignant chacun d'eux  $A_i$  aux deux sommets consécutifs du polygone non euclidien déterminé par les points  $A_1, \dots, A_{i-1}$  qui limitent celui des  $i - 1$  segments contenant  $A_i$  en lesquels les points  $A_1, \dots, A_{i-1}$  partagent l'axe réel. On obtiendra ainsi un polygone non euclidien  $\pi$  à  $\mu$  côtés <sup>(1)</sup> (*fig. 10*). On prendra le premier des points  $B_1, \dots, B_\nu$  qui ne



tombe ni à l'intérieur de ce polygone ni sur son périmètre et on le joindra toujours, par des droites non euclidiennes, aux deux sommets du polygone qui sont tels que les deux droites qu'on sera amené à tracer ainsi ne pénètrent pas dans le polygone  $\pi$  précédent. On obtient ainsi un polygone  $\pi_1$  contenant  $\pi$  à son intérieur, et dont le contour est formé des deux droites précédentes et d'une partie du contour de  $\pi$  <sup>(2)</sup>. On prendra ensuite le premier des points  $B_i$  qui ne



tombera ni dans le dernier polygone  $\pi_1$  obtenu ni sur son périmètre, et on le joindra comme précédemment aux deux sommets de ce polygone  $\pi_1$  qui sont tels que les deux droites non euclidiennes qu'on sera amené à tracer ainsi ne pénètrent pas dans le polygone, on obtiendra ainsi un polygone  $\pi_2$  <sup>(3)</sup>. En continuant de proche en proche jusqu'à épuisement de tous les points  $B_1, \dots, B_\nu$  on arrivera à construire *le plus petit polygone convexe* <sup>(4)</sup> *non euclidien qui contienne à son intérieur ou sur son périmètre les points  $A_1, A_2, \dots, A_\mu; B_1, \dots, B_\nu$ .*

<sup>(1)</sup> Si l'on suppose quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , la figure 9 représente le polygone  $\pi$ .

<sup>(2)</sup> Dans la même hypothèse que pour la note <sup>(1)</sup>,  $B_1$  tombant dans  $\pi$ ,  $B_2$  hors de  $\pi$ , la figure 10 représente le polygone  $\pi_1$ .

<sup>(3)</sup> Dans les hypothèses des notes <sup>(1)</sup> et <sup>(2)</sup>,  $B_3$  tombant hors de  $\pi_1$ , on a construit le polygone  $\pi_2$ .

<sup>(4)</sup> Convexe, c'est-à-dire tel que le polygone n'est traversé par aucun de ses côtés prolongé au besoin.

Et c'est l'intérieur et le périmètre de ce polygone non euclidien que décrira le point  $\zeta$  représentatif de la forme quadratique  $\varphi$  associée à  $f$  lorsque les paramètres  $t, u$  qui entrent dans  $\varphi$  prendront toutes les valeurs possibles. Ce polygone  $D$ , que nous appellerons *le polygone associé à la forme  $f$* , est parfaitement déterminé par la connaissance des racines de cette forme.

Maintenant que nous connaissons le domaine  $D$  que décrit le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$ , quand les  $t$  et les  $u$  varient, l'ensemble des substitutions (S) qu'il faut faire pour réduire  $\varphi$  peut être facilement caractérisé à l'aide de l'interprétation géométrique que nous avons donnée de la réduction des formes quadratiques définies.

Envisageons la division modulaire du demi-plan, telle que nous l'avons rappelé dans des préliminaires.

Lorsque le point représentatif  $\zeta$  de  $\varphi$  tombe dans un des triangles  $\omega$  de cette division, la substitution

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} \\ \text{ou} \\ x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{array} \right. \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

qui réduit  $\varphi$  est celle qui, au triangle  $\omega$  que décrirait  $\zeta$ , fait correspondre le triangle  $\omega_0$  que décrirait  $Z$ . L'ensemble des substitutions (S) à faire pour réduire  $\varphi$  lorsque  $t$  et  $u$  varient s'obtient ainsi :

Considérons *tous les domaines modulaires  $\omega$  avec lesquels  $D$  a au moins un point commun* (intérieur ou sur la frontière), *l'ensemble des substitutions (S) est l'ensemble des substitutions qui transforment chacun de ces domaines  $\omega$  en  $\omega_0$ , domaine fondamental du groupe modulaire.*

On a ainsi comme une image tangible de cet ensemble de substitutions, et par suite du groupe des formes ( $f$ ) que la réduction continue précédente associe à la forme initiale  $f$ .

*Remarque I.* — Si la forme  $f$  n'a pas de racines réelles ou si ces racines réelles sont toutes rationnelles, il est évident géométriquement que le domaine  $D$  n'a de points communs qu'avec un nombre fini de domaines modulaires  $\omega$ . L'ensemble ( $f$ ) comprendra donc dans ces cas seulement un nombre fini de formes. Si l'on excepte en outre les formes quadratiques indéfinies à coefficients entiers, on voit aussi sans grande difficulté que les deux cas précédents sont les seuls où l'ensemble ( $f$ ) n'admet qu'un nombre fini de formes (<sup>1</sup>).

---

(<sup>1</sup>) On voit en particulier que les formes n'ayant que des racines imaginaires (formes ayant toujours le même signe), ne donnent naissance qu'à un nombre fini de formes ( $f$ ). Et cela pourrait suffire à la rigueur pour bâtir la théorie de la réduction relativement à ces formes, en appelant *réduites* toutes les formes de ( $f$ ) qui sont en nombre fini.

*Remarque II.* — Le domaine  $D$  se réduit en particulier au demi-cercle joignant  $\alpha_1, \alpha_2$  lorsque  $f$  est une forme quadratique indéfinie

$$f = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y).$$

Dans ce cas l'interprétation de la réduction continue a été donnée par St. Smith, et elle explique pourquoi on a représenté dans les préliminaires une forme indéfinie par la demi-circonférence décrite sur le segment joignant les deux racines comme diamètre.

A ma connaissance l'interprétation générale n'a pas encore été donnée jusqu'ici; nulle part il ne me semble avoir été question du polygone  $D$  associé à une forme binaire.

Dans deux autres cas intéressants et simples, sur lesquels nous reviendrons plus tard pour les traiter complètement,  $D$  se réduit à un arc de cercle; ce sont :

1<sup>o</sup> Le cas des formes cubiques ayant une racine réelle

$$f = (x - \alpha_1 y)(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y);$$

2<sup>o</sup> Le cas des formes biquadratiques à racines imaginaires

$$f = (x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y)(x - \beta_2 y)(x - \beta'_2 y).$$

Dans le premier cas  $D$  se réduit à l'arc du cercle orthogonal à l'axe réel qui joint  $\alpha_1$  à  $\beta_1$ .

Dans le deuxième cas  $D$  se réduit à l'arc du cercle orthogonal à l'axe réel qui joint  $\beta_1$  à  $\beta_2$ .

*Polygones associés à deux formes équivalentes.* — Soit deux formes équivalentes  $f(x, y)$  et  $f_1(x_1, y_1)$ , et supposons qu'on passe de la première à la deuxième par la substitution

$$\begin{aligned} x &= m x_1 + m_0 y_1, & y &= n x_1 + n_0 y_1 & (m n_0 - m_0 n = 1), \\ f_1(x_1, y_1) &= f(m x_1 + m_0 y_1, n x_1 + n_0 y_1). \end{aligned}$$

Les racines  $z$  de la forme  $f$ , et celles  $z_1$  de la forme  $f_1$  se correspondent biunivoquement par la transformation

$$z = \frac{m z_1 + m_0}{n z_1 + n_0}.$$

Aidons-nous des remarques suivantes : par une transformation

$$z = \frac{m z_1 + m_0}{n z_1 + n_0} \quad (m n_0 - m_0 n = 1),$$

à un contour fermé  $c$  décrit par  $z$  dans le demi-plan analytique correspond

un contour fermé  $c$ , décrit par  $z$ , dans ce demi-plan. (Bien entendu, si  $c$  passe par le point d'affixe  $\frac{m}{n}$ ,  $c$ , passera par le point à l'infini du demi-plan qui est à considérer comme un point ordinaire du demi-plan; ceci ne nous empêche nullement de considérer  $c$ , comme un contour fermé passant par l'infini. Et de fait, si l'on passe du plan analytique à la sphère dont il est la projection stéréographique et dont tant de fois on a fait usage, la terminologie employée s'explique d'elle-même.)

Si  $c$  est un contour simple sans point double délimitant une aire  $\mathcal{A}$  d'un seul tenant simplement connexe,  $c_1$  sera un contour de même sorte qui délimitera une aire  $\mathcal{A}_1$ , dont tous les points correspondront biunivoquement par la transformation considérée aux points de l'aire limitée par  $c$ . Il y a *conservation des sens de parcours*: c'est à-dire que si  $z$  décrit  $c$  dans le sens direct, c'est-à-dire tel que l'aire  $\mathcal{A}$  délimitée par  $c$  soit à la gauche de l'observateur debout sur le plan des  $z$  et regardant dans le sens de la demi-tangente positive,  $z_1$  décrira aussi  $c_1$  dans le sens direct tel que l'aire  $\mathcal{A}_1$ , correspondant à  $\mathcal{A}$  soit à la gauche de l'observateur qui regarderait dans la direction du mouvement de  $z_1$ .

Alors, par la transformation

$$z = \frac{mz_1 + m_0}{nz_1 + n_0},$$

le contour  $C$  du polygone convexe non euclidien  $D$  associé à  $f$  se transforme en un contour polygonal  $C_1$ , dont les sommets sont les racines de  $f_1$  qui sont les transformées de racines de  $f$  sommets de  $D$  <sup>(1)</sup>.  $C$  contenant à son intérieur sur son périmètre toutes les racines de  $f$ ,  $C_1$  contiendra à son intérieur ou sur son périmètre toutes celles de  $f_1$ . Et il n'y a pas de contour polygonal convexe intérieur à  $C_1$  contenant toutes ces dernières racines, car par la transformation il correspondrait à un contour polygonal convexe intérieur à  $C$  et contenant toutes les racines de  $f$ . *Donc  $C_1$  est le contour du polygone  $D_1$  associé à  $f_1$ .*

*Les domaines associés à deux formes équivalentes  $f, f_1$  se transforment donc l'un dans l'autre par la substitution modulaire qui fait passer de  $f$  à  $f_1$ .*

Voici quelques figures qui montrent la transformation des domaines l'un

<sup>(1)</sup> Nous répétons encore que si  $\frac{m}{n}$  est un sommet de  $D$ ,  $c_1$  aura un de ses sommets à l'infini : les côtés issus de ce sommet seront deux droites orthogonales à l'axe réel, mais ceci n'est pas une exception, ni une difficulté. Il n'y a pas non plus dans ce cas de doute possible sur ce qu'il faut entendre par l'aire que limite  $c_1$ . Nous ne reviendrons plus à l'avenir sur ce cas particulier qu'on a toujours l'habitude de faire rentrer dans le cas général comme nous le faisons en considérant, si cela paraît plus commode, la sphère comme support de la variable complexe au lieu du plan.

dans l'autre (on a donné en particulier le cas où l'un des sommets du polygone est à l'infini).

$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$  et  $\beta_1$  sont les racines de  $f_1$  qui correspondent aux racines  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\beta$  de  $f$ .

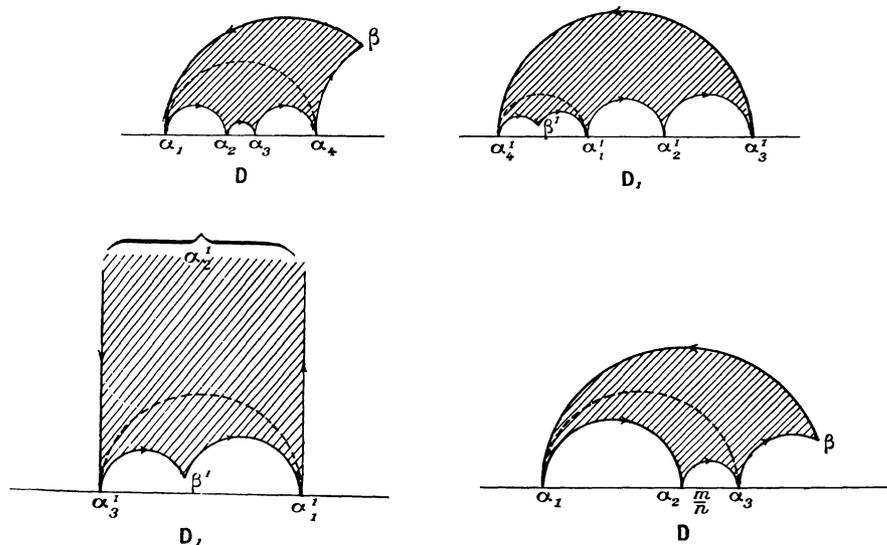


Fig. 12 et Fig. 13.

Il est facile maintenant de montrer que deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$  donnent naissance au même groupe de formes ( $f$ ) par la réduction continue. Autrement dit ( $f$ ) et ( $f_1$ ) sont identiques.

En effet, soit  $\Sigma$  la substitution

$$\begin{aligned} x &= m x_1 + m_0 y_1, \\ y &= n x_1 + n_0 y_1, \end{aligned}$$

qui fait passer de  $f$  à  $f_1$

$$\begin{aligned} f_1 &= f \cdot \Sigma, \\ D_1 &= D \cdot \Sigma; \end{aligned}$$

soient  $\omega_1$  un des domaines modulaires avec lesquels  $D_1$  associé de  $f_1$  a des points communs,  $S_1$  la substitution qui amène  $\omega_1$  sur  $\omega_0$  [ $\omega_0 = \omega_1 S_1$ ]; il est clair que le triangle modulaire  $\omega$  tel que  $\omega_1 = \omega \cdot \Sigma$  mord sur  $D$ , et la substitution qui le transforme en  $\omega_0$  est exactement  $\Sigma \cdot S_1$  [ $\omega_0 = \omega_1 S_1 = \omega \cdot \Sigma S_1$ ].

Au groupe ( $f$ ) appartient donc la forme  $f \Sigma S_1 = f_1 S_1$  puisque  $f_1 = f \Sigma$  et  $f_1 S_1$  appartient à ( $f_1$ ).

Toute forme de ( $f$ ) est dans ( $f_1$ ) et inversement. Donc ( $f$ ) et ( $f_1$ ) sont composés des mêmes formes.

*En résumé* : Que l'on parte de  $f$  ou d'une forme équivalente  $f_1$  quelconque,

l'ensemble des formes ( $f$ ) que la réduction continue conduit à former est toujours le même (1).

On peut d'un mot caractériser celles des formes équivalentes à  $f$  qui constituent le groupe ( $f$ ). Effectivement une forme de ( $f$ ) s'obtient en faisant dans  $f$  la substitution qui amène sur  $\mathfrak{D}_0$  un des domaines modulaires  $\mathfrak{D}$  sur lesquels mord le polygone  $D$  associé à  $f$ ; par conséquent, *le polygone associé à cette forme ( $f$ ) mordra sur  $\mathfrak{D}_0$ . L'ensemble des ( $f$ ) est formé de toutes les formes équivalentes à  $f$  dont le polygone associé a avec  $\mathfrak{D}_0$  au moins un point commun.*

Avec cet énoncé on voit bien que l'ensemble ( $f$ ) est le même quel que soit la forme équivalente à  $f$  dont on parle.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que si  $f$  et  $f_1$  sont deux formes équivalentes

$$f_1(x_1, y_1) = f(mx_1 + m_0y_1, nx_1 + n_0y_1),$$

$\varphi$  et  $\varphi_1$  leurs formes associées

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & t_1^2(x - \alpha_1y)^2 + \dots + t_\mu^2(x - \alpha_\mu y)^2 + 2u_1^2(x - \beta_1y)(x - \beta'_1y) + \dots \\ & + 2u_\nu^2(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1) = & \tau_1^2(x_1 - \alpha_1^1y_1) + \dots + \tau_\mu^2(x_1 - \alpha_\mu^1y_1)^2 + 2v_1^2(x_1 - \beta_1^1y_1)(x_1 - \beta_1^{\prime 1}y_1) + \dots \\ & + 2v_\nu^2(x_1 - \beta_\nu^1y_1)(x_1 - \beta_\nu^{\prime 1}y_1), \end{aligned}$$

$\varphi(x, y)$  se transforme en  $\varphi_1(x_1, y_1)$  par la substitution

$$\begin{aligned} x &= mx_1 + m_0y_1, \\ y &= nx_1 + n_0y_1, \end{aligned}$$

si l'on suppose

$$\begin{aligned} \tau_i^2 &= t_i^2(m - \alpha_i n)^2, \\ v_i^2 &= u_i^2(m - \beta_i n)(m - \beta_i' n). \end{aligned}$$

Donc  $\zeta$  point représentatif de  $\varphi$  pour les valeurs  $t, u$  des paramètres et  $\zeta_1$  point représentatif de  $\varphi_1$  pour les valeurs  $\tau, v$  des paramètres liées aux précédentes par les relations ci-dessus se transforment l'un dans l'autre par la substitution

$$\zeta = \frac{m\zeta_1 + m_0}{n\zeta_1 + n_0},$$

*la même que celle qui fait passer de  $f$  à  $f_1$ .*

(1) Notons en passant que ceci montre bien que l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placés au début  $\alpha_0 \neq 0$  ne restreint pas la généralité : elle n'est nullement indispensable comme nous le disions au début. Et si l'on avait pour la forme proposée  $\alpha_0 = 0$ , en passant à une forme équivalente on ramènerait toujours au cas où  $\alpha_0 \neq 0$  sans rien changer au système des formes ( $f$ ) que la réduction continue doit fournir.

*Définition de la réduite équivalente à  $f$ .* — Selon la méthode indiquée par Hermite c'est parmi l'ensemble ( $f$ ) que nous allons choisir une réduite pour représenter toute la classe des formes équivalentes à  $f$ .

Nous abandonnons ici l'exposition qu'Hermite fait aux pages 173—178 de son *Mémoire Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (*Œuvres*, t. I), parce que les limitations de coefficients établies par lui et qui sont fondamentales pour cette réduction nous paraissent insuffisantes, et laissent prise à des difficultés relatives, en particulier aux cas où certains des coefficients de la réduite définie par Hermite seraient nuls, auxquels cas les limitations données par Hermite ne permettent pas de tirer toutes les conclusions qu'il en tire.

Mais tous les éléments nécessaires à l'exposition plus satisfaisante que nous avons en vue se trouvent dans son *Mémoire Sur la réduction des fonctions homogènes*, pages 84 et suivantes du Tome I de ses *Œuvres*.

Soit donc

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_\mu y)(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) \dots (x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y),$$

la forme proposée de degré

$$\mu + 2\nu = n,$$

on peut toujours supposer  $a_0 \neq 0$  à une équivalence près. Soit

$$\varphi = t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - \alpha_2 y)^2 + \dots + t_\mu^2(x - \alpha_\mu y)^2 + 2u_1(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + \dots + 2u_\nu(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y),$$

la forme associée à  $f$ , et soit

$$(S) \quad \begin{cases} x = MX + M_0 Y \\ y = NX + N_0 Y \end{cases} \quad (MN_0 - M_0 N = 1)$$

la substitution qui la réduit pour certaines valeurs  $t, u$  des paramètres.

Deux cas peuvent se présenter :

*Premier cas.* — Aucune des racines réelles  $a_i$  de  $f$  n'est égale à  $\frac{M}{N}$ , alors la transformée  $F = fS$  n'aura pas de racines infinies; ses racines seront les  $A_i$  et les  $B_i, B'_i$  liées à  $\alpha_i, \beta_i, \beta'_i$  par les formules

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{MA_i + M_0}{NA_i + N_0}, & A_i &= \frac{M_0 - N_0 \alpha_i}{N \alpha_i - M}, \\ \beta_i &= \frac{MB_i + M_0}{NB_i + N_0}, & B_i &= \frac{M_0 - N_0 \beta_i}{N \beta_i - M}. \end{aligned}$$

Par la substitution (S),  $f$  devient

$$F(X, Y) = A_0(X - A_1 Y) \dots (X - A_\mu Y)(X - B_1 Y)(X - B'_1 Y) \dots (X - B_\nu Y)(X - B'_\nu Y)$$

avec

$$A_0 = a_0(M - \alpha_1 N) \dots (M - \alpha_\mu N) (M - \beta_1 N) (M - \beta'_1 N) \dots (M - \beta_\nu N) (M - \beta'_\nu N)$$

$$(A_0 \neq 0),$$

et  $\varphi$  devient  $\Phi = \varphi S$ :

$$\Phi(X, Y) = T_1'(X - A_1 Y)^2 + \dots + T_\mu'(X - A_\mu Y)^2 + 2 U_1'(X - B_1 Y)(X - \beta'_1 Y) + \dots$$

$$+ 2 U_\nu'(X - B_\nu Y)(X - \beta'_\nu Y)$$

avec

$$T_i' = t_i^2 (M - \alpha_i N)^2,$$

$$U_i' = u_i^2 (M - \beta_i N) (M - \beta'_i N).$$

*Deuxième cas.* — Les  $p$  premières racines réelles,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  de  $f$  sont égales à  $\frac{M}{N}$ .

Alors par la substitution (S),  $(x - \alpha_i y)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, p)$  devient

$$x - \alpha_i y = (M_0 - N_0 \alpha_i) Y = \left( M_0 - \frac{N_0 M}{N} \right) Y = - \frac{Y}{N}.$$

Pour les  $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_\mu$ , et les  $\beta_1, \beta'_1, \dots, \beta'_\nu$  tout se passe comme précédemment et  $F = fS$  s'écrit

$$F = A_0 Y^p (X - A_{p+1} Y) \dots (X - A_\mu Y) (X - B_1 Y) (X - B'_1 Y) \dots (X - B_\nu Y) (X - B'_\nu Y)$$

avec

$$A_i = \frac{M_0 - N_0 \alpha_i}{N \alpha_i - M} \quad (\text{pour } i = p+1, \dots, \mu),$$

$$B_i = \frac{M_0 - N_0 \beta_i}{N \beta_i - M}$$

et

$$A_0 = (-1)^p a_0 \frac{(M - \alpha_{p+1} N) \dots (M - \alpha_\mu N) (M - \beta_1 N) (M - \beta'_1 N) \dots (M - \beta_\nu N) (M - \beta'_\nu N)}{N^p}.$$

Quant à  $\varphi$  elle devient  $\Phi = fS$ :

$$\Phi(X, Y) = T_1^2 Y^2 + \dots + T_p^2 Y^2 + T_{p+1}^2 (X - A_{p+1} Y)^2 + \dots$$

$$+ T_\mu^2 (X - A_\mu Y)^2 + 2 U_1'(X - B_1 Y)(X - \beta'_1 Y) + \dots + 2 U_\nu^2 (X - B_\nu Y)(X - \beta'_\nu Y)$$

avec

$$T_i = \frac{t_i^2}{N^2} \quad (\text{pour } i = 1, 2, \dots, p),$$

$$T_i' = t_i^2 (M - \alpha_i N)^2 \quad (\text{pour } i = p+1, \dots, \mu) \quad (1),$$

$$U_i' = u_i^2 (M - \beta_i N) (M - \beta'_i N) \quad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

---

(1) Il n'est pas sans intérêt de remarquer la relation

$$\frac{A_0^2}{T_1^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_\nu^2} = \frac{\alpha_0^2}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2}$$

valable dans les deux cas.

Si l'on suppose  $p = 0$  les formules de ce deuxième cas redonnent celles du premier.

Nous allons donc dans la suite raisonner sur ce deuxième cas, et dans les résultats obtenus il suffira de faire  $p = 0$  pour obtenir les résultats relatifs au premier cas.

La forme

$$\Phi(X, Y) = PX^2 - 2QXY + RY^2$$

étant réduite, si  $\Delta$  désigne son déterminant

$$\Delta = PR - Q^2,$$

qui est d'ailleurs égal au déterminant  $\delta$  de  $\varphi$ , on a, comme on sait,

$$P \leq \sqrt{\frac{4}{3}\Delta} \quad \text{et} \quad R \leq \frac{4}{3} \frac{\Delta}{P}.$$

Ceci va nous servir à limiter supérieurement  $|A_0|$  et les valeurs absolues de  $A_i$  et de  $B_i$  en fonction de  $\Delta$ .

En effet

$$\begin{aligned} P &= T_{\rho+1}^2 + \dots + T_{\mu}^2 + 2U_1^2 + \dots + 2U_{\nu}^2, \\ R &= T_1^2 + \dots + T_{\rho}^2 + T_{\rho+1}^2 A_{\rho+1}^2 + \dots + T_{\mu}^2 A_{\mu}^2 + 2U_1^2 B_1 B_1' + \dots + 2U_{\nu}^2 B_{\nu} B_{\nu}'. \end{aligned}$$

$P$  est la somme des  $2\nu + \mu - p$  termes suivants

$$T_{\rho+1}^2, \dots, T_{\mu}^2, U_1^2, U_1^2, \dots, U_{\nu}^2, U_{\nu}^2,$$

dont le produit est inférieur ou égal à la puissance  $2\nu + \mu - p = n - p$  de leur moyenne arithmétique  $\frac{P}{n-p}$ .

$$T_{\rho+1}^2 \dots T_{\mu}^2 U_1^2 \dots U_{\nu}^2 \leq \left( \frac{P}{n-p} \right)^{n-p}.$$

Ceci donne, en revenant à  $\varphi$  équivalente à  $\Phi$ ,

$$\begin{aligned} & (M - \alpha_{\rho+1} N)^2 \dots (M - \alpha_{\mu} N)^2 (M - \beta_1 N)^2 (M - \beta_1' N)^2 \dots (M - \beta_{\nu} N)^2 (M - \beta_{\nu}' N)^2 \\ & \leq \frac{1}{t_{\rho+1}' \dots t_{\mu}' u_1^2 \dots u_{\nu}^2} \left( \frac{P}{n-p} \right)^{n-p}. \end{aligned}$$

De plus on a

$$T_1^2 + \dots + T_{\rho}^2 \leq R.$$

Donc

$$T_1^2 \dots T_{\rho}^2 \leq \left( \frac{R}{\rho} \right)^{\rho},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{N^{2\rho}} \leq \left( \frac{R}{\rho} \right)^{\rho} \frac{1}{t_1' \dots t_{\rho}'^2}.$$

Multipliant membre à membre et par  $\alpha_0^2$  les deux inégalités obtenues, il vient

$$A_0^2 = \frac{\alpha_0^2 (M - \alpha_{p+1}N)^2 \dots (M - \alpha_\mu N)^\circ (M - \beta_1 N)^\circ (M - \beta'_1 N)^\circ \dots (M - \beta_\nu N)^\circ (M - \beta'_\nu N)^2}{N^{2\nu}}$$

$$\leq \frac{\alpha_0^2}{(tu)^\nu} \frac{1}{(n-p)^{n-p}} \frac{1}{p^\nu} P^{n-p} R^\nu.$$

Si  $p$  était nul il est clair que l'on remplacerait  $\frac{1}{p^\nu}$  et  $R^\nu$  par un.

La notation  $(tu)^2$  représente, comme dans le Mémoire d'Hermite, la quantité

$$t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2,$$

qui reviendra fréquemment dans la suite.

En se servant de

$$P \leq \left(\frac{4}{3} \delta\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad R \leq \frac{4}{3} \frac{\delta}{p},$$

$\delta$  étant le déterminant de  $\varphi$ , il vient

$$A_0^2 \leq \frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^\nu} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{p^\nu (n-p)^{n-p}}$$

quelque soit  $p$ , on a *a fortiori*

$$A_0^2 \leq \frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^\nu} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Passons aux limitations supérieures des  $|A_i|$  et des  $|B_i|$ .

Si parmi les  $2\nu + \mu - p$  termes dont la somme fait  $P$  on supprime  $T_i^2$ , la somme des  $n - p - 1$  restants est  $\leq P$  et leur produit est  $\leq \left(\frac{P}{n-p-1}\right)^{n-p-1}$ ; or ce produit, c'est

$$\frac{T_{p+1}^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_\nu^2}{T_i^2};$$

donc

$$\frac{T_{p+1}^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_\nu^2}{T_i^2} \leq \left(\frac{P}{n-p-1}\right)^{n-p-1} \quad (i = p+1, \dots, \mu).$$

En considérant  $R$  on voit que

$$T_i^2 A_i^2 \leq R,$$

et la comparaison de ces deux inégalités donne

$$A_i^2 \leq \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} P^{n-p-1} R \frac{1}{T_{p+1}^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_\nu^2},$$

et, à cause de  $T_1^2 \dots T_p^2 \leq \left(\frac{R}{p}\right)^p$ ,

$$A_i^2 \leq \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{p^p} P^{n-p-1} R^{p+1} \frac{1}{(TU)^2};$$

mais

$$\frac{A_0^2}{(TU)^2} = \frac{a_0^2}{(tu)^2}.$$

Donc

$$A_i^2 \leq \frac{a_0^2}{(tu)^2} P^{n-p-1} R^{p+1} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{p^p} \frac{1}{A_0^2},$$

et, avec les limitations de P et R,

$$\boxed{A_i^2 \leq \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{p^p} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{A_0^2}} \quad (i = p+1, \dots, \mu),$$

et *a fortiori*

$$\boxed{A_i^2 \leq \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{A_0^2}}.$$

Passons aux  $B_i$  pour chercher une limite supérieure de  $B_i B'_i =$  Norme  $B_i$ .

Envisageons P comme la somme des  $n - p - 1$  termes,

$$T_{p+1}^2, \dots, T_\mu^2, U_1^2, U_1^2, \dots, U_{i-1}^2, U_{i-1}^2, 2U_i^2, U_{i+1}^2, U_{i+1}^2, \dots, U_\nu^2, U_\nu^2;$$

il vient alors par leur produit

$$2 \frac{T_{p+1}^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_i^2 \dots U_\nu^2}{U_i^2} = \left(\frac{P}{n-p-1}\right)^{n-p-1},$$

et, en considérant R,

$$2 U_i^2 B_i B'_i \leq R.$$

La comparaison donne

$$B_i B'_i \leq \frac{1}{4} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} P^{n-p-1} R \frac{1}{T_{p+1}^2 \dots T_\mu^2 U_1^2 \dots U_\nu^2}.$$

Le second membre est le quart de ce qu'est le second membre de l'inégalité qui a servi ci-dessus à limiter  $A_i^2$ ; on en conclut la limitation

$$\boxed{B_i B'_i \leq \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{p^p} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{A_0^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

et *a fortiori*

$$\boxed{B_i B'_i \leq \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{4} \frac{1}{A_0^2}}.$$

*Les limitations relatives au premier cas s'obtiennent en remplaçant dans les seconds membres des inégalités précédentes  $p$  par ZERO et  $p^p$  par UN.*

*Conclusion fondamentale.* — Si, pour certaines valeurs des paramètres  $t, u$ , on réduit la forme  $\varphi$ , dont  $\delta$  est le déterminant; et si l'on fait la même substitution dans  $f$ , on obtient une forme  $F$  dont *tous les coefficients* sont limités supérieurement en valeur absolue en fonction de la quantité  $\frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2}$  qui ne dépend que de la forme  $\varphi$ .

En effet, puisque  $F$  est égale à

$$A_0 Y^p (X - A_{p+1} Y) \dots (X - A_\mu Y) (X - B_1 Y) (X - B'_1 Y) \dots (X - B_\nu Y) (X - B'_\nu Y),$$

tous ses coefficients seront des polynomes en  $A_{p+1}, \dots, A_\mu, B_1, B'_1, \dots, B_\nu, B'_\nu$ .

Par la méthode connue des majorantes, on pourra calculer pour chacun de ces coefficients une limite supérieure qui sera une fonction de la quantité  $\frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2}$ , et même pour préciser qui sera une certaine puissance de cette quantité, dont l'exposant sera fixé par le rang du coefficient en question

dans  $F$ , multipliée par un facteur indépendant de la quantité  $\frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}$ , facteur dépendant du degré de la forme et renfermant en général  $|A_0|$  au dénominateur à une certaine puissance. *Si la forme proposée est à coefficients entiers*,  $A_0$  sera un entier *certainement non nul* <sup>(1)</sup>. On aura donc  $A_0^2 \geq 1$  et l'on pourra remplacer dans le facteur précédent la lettre  $A_0$  du dénominateur par l'unité; on ne fera ainsi qu'accroître le second membre de la limitation trouvée. *On aura ainsi limité supérieurement tous les coefficients de  $F$ , sans exception, en fonction de la seule quantité*  $\frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}$ .

Étudions cette quantité  $\frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}$  qui sert à limiter les coefficients de  $F$  et qu'avec Hermite nous appellerons  $\theta$

$$\theta = \frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}.$$

Tout d'abord, si l'on passe de la forme proposée à une forme équivalente  $f_1$  par la substitution

$$\begin{aligned} x &= m x_1 + m_0 y_1, \\ y &= n x_1 + n_0 y_1, \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> En effet,  $A_0$  est le premier coefficient non nul de la forme  $F(X, Y)$  ordonnée par rapport aux puissances croissantes de  $Y$ , et  $F(X, Y)$  n'est pas identiquement nulle.

on a vu que la forme  $\varphi$  associée à  $f$  pour les valeurs  $t, u$  des paramètres se transforme en la forme  $\varphi_1$  associée à  $f_1$  pour des valeurs  $\tau, \nu$  des paramètres liés à  $t, u$  par les relations

$$\begin{aligned}\tau_i^2 &= t_i^2 (m - \alpha_i n)^2, \\ \nu_i^2 &= u_i^2 (m - \beta_i n) (m - \beta'_i n).\end{aligned}$$

[ Dans le cas particulier où  $m - \alpha_i n$  serait nul, il faudrait prendre  $\tau_i^2 = \frac{t_i^2}{n^2}$  comme on l'a vu précédemment, la conclusion que nous tirons est encore valable. ] Le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$  est égal à celui  $\delta_1$  de  $\varphi_1$ .

Ainsi qu'on l'a fait remarquer en passant dans les pages précédentes, on a entre le premier coefficient  $a_0$  de  $f$  et le premier coefficient  $a_0^1$  de  $f_1$  la relation

$$\frac{a_0^2}{(tu)^2} = \frac{(a_0^1)^2}{(\tau\nu)^2},$$

les  $\tau, \nu$  étant, bien entendu, liés aux  $t, u$  par les formules précédentes. Donc

$$\theta = \theta_1.$$

*Conclusion.* — Pour deux formes équivalentes, et POUR DES VALEURS CORRESPONDANTES DES PARAMÈTRES  $t, u$ , la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs.

Nous pouvons donc, avec Hermite, tirer les deux conséquences suivantes :

« 1° Les fonctions  $\theta$  et  $\theta_1$ , relatives à deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$ , prennent les mêmes valeurs lorsque les variables  $(t, u)$  passent par tous les états de grandeur et ont même minimum. *Ce minimum sera pour nous la définition du déterminant de la forme binaire de degré quelconque.* »

« 2° Les formes quadratiques  $\varphi$  et  $\varphi_1$ , déduites des deux formes différentes  $f$  et  $f_1$ , avec les valeurs de  $t$  et  $u$  d'une part,  $\tau$  et  $\nu$  de l'autre, qui donnent le minimum des fonctions  $\theta$  et  $\theta_1$ , deviendront équivalentes en même temps que  $f$  et  $f_1$ . Ainsi  $\varphi_1$  se déduira de  $\varphi$  par la même substitution que  $f_1$  de  $f$ . Pour rappeler cette propriété, nous appellerons, dorénavant, la forme quadratique  $\varphi$  la correspondante de  $f$ . »

Nous reviendrons plus loin sur la question de l'existence de ce minimum, sur laquelle Hermite n'a pas insisté, et en supposant que ce minimum existe, nous pouvons définir la réduction.

Nous appellerons *formes binaires de même déterminant*, l'ensemble des formes d'un même degré, pour lesquelles le minimum absolu de la fonction  $\theta$  aura une même valeur. Nous appellerons *réduites d'une forme  $f$* , la forme unique, ou les formes de l'ensemble  $(f)$  qui correspondent à ce minimum de  $\theta$ .

De là on conclut facilement :

1° *Deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$  ont les mêmes réduites.* Car si  $\theta$  est minimum pour les valeurs  $t, u$  des paramètres,  $\theta_1$  le sera pour les valeurs  $\tau, \nu$  liées à  $t$  et  $u$  par

$$\begin{aligned} \tau_i^2 &= t_i^2 (m - \alpha_i n)^2 \quad \text{si } m - \alpha_i n \neq 0 \quad \text{et} \quad \tau_i^2 = \frac{t_i^2}{n^2} \quad \text{si } m - \alpha_i n = 0; \\ \nu_i^2 &= u_i^2 (m - \beta_i n)(m - \beta'_i n), \end{aligned}$$

la substitution

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x = m x_1 + m_0 y_1, \\ y = n x_1 + n_0 y_1 \end{cases}$$

faisant passer de  $f$  à  $f_1$  et de  $\varphi$  à  $\varphi_1$ ,

$$f_1 = f \Sigma, \quad \varphi_1 = \varphi \Sigma.$$

Si  $S_1$  réduit  $\varphi_1$ , associée à  $f_1$  pour les valeurs de  $\tau, \nu$  précédentes,  $f_1 S_1$  sera une réduite de  $f$ ,  $f_1 S_1 = f \Sigma S_1$ . Or  $\Sigma S_1$  est, à cause de  $\varphi_1 = \varphi \Sigma$ , la substitution qui réduit  $\varphi$  associée à  $f$  pour les valeurs  $t, u$  des paramètres. Donc  $f \Sigma S_1$  est une réduite de  $f$ , et l'on vient de voir qu'elle est identique à une réduite de  $f_1$ ,

$$f_1 S_1 = f \Sigma S_1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette proposition fait dépendre l'équivalence de deux formes de l'égalité absolue entre leurs réduites ou leurs groupes de réduites.

2° *Les formes à coefficients entiers, de même déterminant  $\theta$ , se distribuent en un nombre fini de classes.*

En effet, ainsi qu'on l'a fait remarquer précédemment, si  $f$  est à coefficients entiers, une réduite  $F$  équivalente l'est aussi. Dans la limitation des coefficients de  $F$  obtenue antérieurement on a vu que, dans ce cas, on avait pour limites supérieures des quantités ne dépendant que de  $\frac{\alpha_0^2 \theta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}$ , c'est-à-dire des *quantités fixées par la connaissance de  $\theta$*  et par le degré de la forme; ces limites supérieures *ne renfermaient plus en dénominateur le premier coefficient non nul de  $F$* . Il suit de là qu'il ne peut y avoir pour un déterminant donné  $\theta$  qu'un nombre fini de réduites.

En effet, on cherchera d'abord celles qui sont de la forme

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \dots + A_n Y^n \quad (A_0 \neq 0) \quad \text{correspondant à } p = 0 \text{ de notre théorie;}$$

puis celles

$$A_0 X^{n-1} Y + \dots \quad (A_0 \neq 0) \quad \text{»} \quad p = 1 \quad \text{»}$$

puis celles

$$A_0 X^{n-2} Y^2 + \dots \quad (A_0 \neq 0) \text{ correspondant à } p = 2 \text{ de notre théorie.}$$

et pour chacune de ces formes on n'aura qu'un nombre limité de possibilités qu'on trouvera en se servant des limitations fonctions de  $p$  que nous avons données plus haut pour  $A_0$  et pour les modules des racines d'une réduite.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de réduites possibles, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de classes pour un déterminant donné  $\theta$ .

*Nota.* — L'exposition d'Hermité consiste essentiellement à montrer que pour une réduite

$$F = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \dots + A_n Y^n,$$

le produit  $A_i A_{n-i}$  est limité quel que soit  $i$  en fonction de  $\theta$ . Et il conclut que si  $\theta$  est donné, il n'y a qu'un nombre limité de classes de formes à coefficients entiers.

Mais on aperçoit une objection immédiate à son raisonnement; car, du fait que les produits  $A_i A_{n-i}$  sont limités, il ne s'ensuit pas que les coefficients  $A_i$ , eux-mêmes le soient. On pourrait donner à  $A_i$  la valeur zéro et à  $A_{n-i}$  successivement toutes les valeurs entières, le produit  $A_i A_{n-i}$  serait évidemment limité, puisqu'il serait toujours nul, et cependant  $A_i$  ne le serait pas, et la limitation individuelle des coefficients est la condition indispensable pour qu'on puisse affirmer qu'à un déterminant donné ne correspondent qu'un nombre fini de classes à coefficients entiers.

Dans sa première exposition de la réduction des fonctions homogènes (*Œuvres*, t. I, p. 84), Hermite avait vu cette difficulté et donné une exposition plus satisfaisante. C'est en nous inspirant à la fois de ce premier Mémoire et du Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*, à l'aide des représentations géométriques données au début de cette étude, et en éclaircissant la possibilité pour une réduite d'admettre des racines infinies [ce qui correspond à des réduites de la forme  $A_0 Y^p (X - A_{p+1} Y) \dots (X - B_i Y)$ ], possibilité qu'Hermité avait négligé d'examiner, que nous avons constitué l'exposition précédente qui nous paraît satisfaisante pour la réduction des formes binaires d'un degré quelconque.

*L'existence du minimum de la fonction  $\theta$ .* — Nous nous bornerons au cas général où la forme  $f$  proposée a toutes ses racines distinctes et finies. A cette catégorie appartiennent (à une équivalence près qui rend toutes les racines finies) les formes de degré  $n$  qui, au point de vue arithmétique, sont de beaucoup les plus intéressantes, à savoir les formes irréductibles dans le domaine des nombres rationnels, c'est-à-dire indécomposables en produit de deux

formes à coefficients rationnels. On sait en effet, depuis Lagrange, que tout polynôme à coefficients rationnels ayant des racines multiples peut se décomposer par des calculs rationnels en un produit de polynômes à coefficients rationnels n'ayant chacun que des racines simples; une forme irréductible ne pourra avoir de racine multiple en vertu de la proposition précédente, toutes ses racines sont donc distinctes et on peut les supposer finies sans restreindre la généralité.

Dans nos hypothèses nous allons démontrer que  $\theta$  a un minimum positif non nul; si

$$\varphi = t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + \dots + t_\mu^2(x - \alpha_\mu y)^2 \\ + 2u_1^2(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + \dots + 2u_\nu^2(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y) = px^2 - 2qxy + ry^2$$

est l'associée de

$$f = a_0(x - \alpha_1 y) \dots (x - \alpha_\mu y)(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) \dots (x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y) \\ (n = \mu + 2\nu),$$

il faut considérer,  $\delta$  étant le déterminant de  $\varphi$ ,  $\delta = pr - q^2$ ,

$$\theta = \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2}.$$

Une remarque utile est la suivante : si  $\zeta = \xi + i\eta$  représente la forme  $\varphi$ , on a

$$\eta = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{p}.$$

Donc

$$\theta = \frac{a_0 p^n \eta^n}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2} \quad (p = t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2).$$

Si tous les  $t$  et les  $u$  sont multipliés par un même nombre  $\lambda$  positif,  $\eta$  ne change pas, et par suite  $\theta$  non plus. On peut donc toujours supposer que les  $t$  varient en laissant  $p$  constant. Dans ces conditions,  $\eta$  n'est nul et le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  ne vient sur l'axe réel que si tous les  $u$  sont nuls et tous les  $t$ , sauf un également : alors  $\zeta$  vient coïncider avec le point  $\alpha_i$  dont le coefficient  $t_i$  n'est pas nul.

Cette simple remarque suffit lorsque la forme n'a pas de racines réelles. En effet, le domaine  $D$  est tout entier, dans ce cas, au-dessus de l'axe réel. Donc toujours  $\eta \geq \eta_0 > 0$ , et

$$t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2 \leq \left(\frac{p}{n}\right)^n.$$

Donc

$$\theta \geq a_0 n^n \eta^n > a_0 n^n \eta_0^n.$$

$\theta$  reste toujours supérieure à un nombre fixe positif, elle est continue pour toutes valeurs des  $t$ ,  $u$  différentes de zéro, et si l'un des  $t$  ou plusieurs, ou même tous, sauf un, deviennent nuls,  $\theta$  devient infinie. Il est donc bien certain que pour des valeurs de  $t$  et  $u$ , toutes différentes de zéro et bien déterminées,  $\theta$  passe par un minimum.

Elle ne suffit plus si la forme a des racines réelles, car  $\eta$  peut devenir nul. Développons alors  $\delta$ , il vient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j=1}^{\mu} t_i^2 t_j^2 (\alpha_i - \alpha_j)^2 + \sum_{k=1}^{\nu} u_k^4 \mathfrak{R}(\beta_k - \beta_k) \\ &+ 2 \sum_{k,l=1}^{\nu} u_k u_l [\mathfrak{R}(\beta_k - \beta_l) + \mathfrak{R}(\beta_k - \beta_l)] + 2 \sum_{i=1, k=1}^{\mu, \nu} t_i^2 u_k^2 \mathfrak{R}(\alpha_i - \beta_k). \end{aligned}$$

Bien entendu, quand la sommation porte sur des produits de même sorte tels que

$$\sum_{i,j=1}^{\mu} t_i^2 t_j^2 (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k,l=1}^{\nu} u_k^2 u_l^2 [\mathfrak{R}(\beta_k - \beta_l) + \mathfrak{R}(\beta_k - \beta_l)],$$

il ne faut prendre qu'un terme pour chaque *combinaison* d'indices et non pas compter  $u_k^2 u_l^2$  et  $u_l^2 u_k^2$  pour deux termes différents.

Toutes les racines étant distinctes et finies, on a,  $z_i, z_j$  étant deux racines quelconques de la forme correspondant à deux indices différents

$$a' \leq \mathfrak{R}(z_i - z_j) = A^2,$$

$\alpha$  et  $A$  étant deux nombres positifs finis non nuls.

Il vient alors

$$\alpha^2 [\sum t_i^2 t_j^2 + \sum u_k^4 + 4 \sum u_k^2 u_l^2 + 2 \sum t_i^2 u_k^2] \leq \delta \leq A^2 [\sum t_i^2 t_j^2 + \sum u_k^4 + 4 \sum u_k^2 u_l^2 + 2 \sum t_i^2 u_k^2],$$

et tout revient à étudier la fonction beaucoup plus simple que  $\theta$

$$\theta' = \frac{[\sum t_i^2 t_j^2 + \sum u_k^4 + 4 \sum u_k^2 u_l^2 + 2 \sum t_i^2 u_k^2]^{\frac{n}{2}}}{t_1 \dots t_{\mu} u_1^2 \dots u_{\nu}^2} \quad (\alpha_0 \alpha^n \theta' \leq \theta \leq \alpha_0 A^n \theta').$$

Considérons les  $n$  quantités

$$t_1^2, \dots, t_{\mu}^2, u_1^2, u_1^2, u_2^2, u_2^2, \dots, u_{\nu}^2, u_{\nu}^2,$$

et appelons-les un instant

$$T_1, \dots, T_{\mu}, T_{\mu+1}, T_{\mu+2}, \dots, T_{n-1}, T_n,$$

alors il est visible que

$$\theta' = \frac{[\sum T_i T_j]^{\frac{n}{2}}}{T_1 \dots T_n},$$

la sommation étant étendue à toutes les *combinaisons formées avec deux indices différents*  $i, j$  pris dans la suite  $1, 2, \dots, n$ .

La somme  $\Sigma T_i T_j$  est formée de  $\frac{n(n-1)}{2}$  termes dont le produit est

$$(T_1 T_2 \dots T_n)^{n-1}.$$

On a donc

$$\left[ \frac{\Sigma T_i T_j}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{\frac{n(n-1)}{2}} \geq (T_1 T_2 \dots T_n)^{n-1},$$

d'après une relation connue.

De là se tire

$$[\Sigma T_i T_j]^{\frac{n}{2}} \geq \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^{\frac{n}{2}} T_1 \dots T_n$$

et

$$\theta' \geq \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

D'ailleurs  $\theta'$  atteint la valeur  $\left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^{\frac{n}{2}}$  pour  $T = T_2 = \dots = T_n$ , c'est-à-dire pour

$$t_1^2 = t_2^2 = \dots = t_p^2 = u_1^2 = \dots = u_p^2 = \frac{p}{n},$$

$p$  étant la somme

$$t_1^2 + \dots + t_p^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_p^2 = T_1 + \dots + T_n$$

qu'on peut sans restreindre la généralité supposer constante, puisque  $\theta'$  comme  $\theta$  ne changent pas de valeur si l'on multiplie tous les  $t$  par un même facteur constant  $\lambda$ .

On voit donc que  $\theta$  reste supérieur au nombre positif

$$a_0 a^n \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Si l'on remarque maintenant que  $\theta$  est continue pour tout système de valeurs des  $(t, u)$  dont aucune n'est nulle  $(tu) \neq 0$ , si de plus on remarque que  $\theta'$ , et par suite  $\theta$ , deviennent infinies lorsque quelques-unes de ces valeurs sont nulles, il est établi que  $\theta$  atteint son minimum absolu pour des valeurs des paramètres  $(t, u)$  dont aucune n'est nulle,  $(tu) \neq 0$ .

Il nous reste donc à montrer que  $\theta$  est infinie lorsque certains des  $t, u$  sont nuls. C'est une chose évidente d'après

$$\theta = \frac{a_0 p^n t_1^n}{t_1^2 \dots t_p^2 u_1^2 \dots u_p^2},$$

toutes les fois que  $\eta$  sera pour le système envisagé  $\neq 0$ .

J.

Le seul cas qui échappe est donc celui où un seul des  $t_i$  est  $\neq 0$ , tous les autres et les  $u$  étant nuls. On peut supposer alors que  $t_1^2$  tend vers  $p$  et que  $t_2^2, \dots, u_i^2$  tendent vers zéro.

Nous considérerons

$$\theta' = \frac{[\sum T_i T_j]^{\frac{n}{2}}}{T_1 \dots T_n},$$

où  $T_1$  tend vers  $p$  et  $T_2, T_3, \dots, T_n$  vers zéro.

On peut poser

$$T_i = \lambda_i T_1 \quad (i = 2, \dots, n),$$

$\lambda_i$  tendra vers zéro, par valeurs positives, et  $\theta'$  devient

$$\theta' = \frac{[\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \sum \lambda_i \lambda_j]^{\frac{n}{2}}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} > \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{\frac{n}{2}}}{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

Mais

$$\left[ \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n-1} \right]^{n-1} \geq \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Donc

$$\theta' > \frac{(n-1)^{\frac{n}{2}} (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{n}{2(n-1)}}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} = (n-1)^{\frac{n}{2}} (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{2-n}{2}}.$$

Dans le cas qui nous occupe  $n > 2$  et l'on voit que, si  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  tendent vers zéro,  $\theta'$  devient infinie. Donc  $\theta$  devient aussi infinie et l'existence d'un système au moins de valeurs des paramètres  $t, u$ , valeurs toutes différentes de zéro, qui font acquérir à  $\theta$  le minimum absolu de sa valeur, est établie.

---

---

## CHAPITRE II.

### APPLICATION AUX FORMES CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES.

---

La théorie de la réduction d'une forme binaire repose, comme nous l'avons vu dans les Chapitres précédents, sur deux notions essentielles :

- 1° L'étude du domaine D associé à la forme  $f$ ;
- 2° L'étude du minimum de la fonction  $\theta$ , que nous avons appris à former avec  $f$ .

Nous avons fait remarquer (p. 26) que le domaine D était particulièrement simple dans deux cas : les formes cubiques ayant une racine réelle, les formes biquadratiques n'ayant pas de racines réelles; dans ces deux cas, il se réduit à un arc de cercle. Dans ces deux cas, la forme quadratique  $\varphi$  associée à  $f$  ne renferme que deux paramètres homogènes, en sorte que la fonction  $\theta$  ne dépend en somme que d'un paramètre, et par suite particulièrement facile à étudier. On arrive d'ailleurs dans ces deux cas à des résultats complets et simples, susceptibles de représentation géométrique intéressante. C'est par eux que nous commencerons.

*Formes cubiques n'ayant qu'une racine réelle.* — Soient  $\alpha$  la racine réelle,  $\beta$ ,  $\beta'$  les deux racines imaginaires conjuguées

$$f = a(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \beta' y).$$

La forme associée est

$$\varphi = t^2(x - \alpha y)^2 + 2u^2(x - \beta y)(x - \beta' y).$$

Son point représentatif  $\zeta$  décrit l'arc du cercle circonscrit au triangle  $\alpha\beta\beta'$  depuis  $\alpha$  jusqu'à  $\beta$  ( $\alpha$  correspond à  $u = 0$ ,  $\beta$  à  $t = 0$ ).

Pour des valeurs  $t$  et  $u$  des paramètres,  $\zeta$  est déterminé par sa projection P sur l'axe réel telle que

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -\frac{t^2}{2u^2}.$$

On a

$$\theta = \frac{a_0^2}{t^2 u^2} \delta^2 \quad (\delta, \text{détérminant de } \varphi),$$



Il n'est pas sans intérêt de voir comment se construit le point M représentatif de la correspondante de  $f$ , connaissant  $\alpha, \beta, \beta'$ , racines de  $f$  représentées par les points A, B, B'. Il est sur l'arc AB et l'on a

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -\frac{t^2}{2u^2} = -\frac{\Re(\beta - \beta')}{2\Re(\alpha - \beta)}.$$

Mais

$$\Re(\beta - \beta') = 4\overline{BC}^2 \quad \text{et} \quad \Re(\alpha - \beta) = \overline{AB}^2.$$

Donc,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -2\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = -2\frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} = -2\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}},$$

D désignant le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABB' (1).

(1) La relation

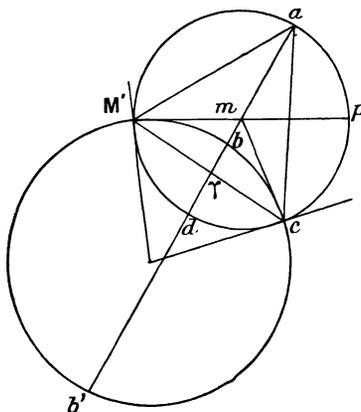
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -2\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}$$

suffit à définir M. On peut indiquer une conséquence géométrique intéressante qui nous sera utile plus tard. La relation précédente s'écrit

$$(CA PD) = 2.$$

Faisons une inversion ayant pour pôle M' symétrique de M par rapport à l'axe réel, et nommons les points inverses des points de la figure par des petites lettres correspondant aux grandes de la figure. L'axe réel devient un cercle passant par M' sur lequel sont les inverses  $a, p, c, d$  de

Fig. 15



A, P, C, D, et dont le centre est  $m$  inverse de M. Le cercle ABB' devient un diamètre du cercle sur lequel sont  $a, b, d, b'$  inverses de A, B, D, B'. Le rapport anharmonique se conservant, on a

$$(capd) = 2.$$

Si donc  $\gamma$  est le point où M'c rencontre ad (le cercle M'bc'b' inverse de BCB' est orthogonal

La construction suivante de P est immédiate : les tangentes en A et B au cercle ABB' se coupent en K, KB' coupe Oξ en P projection de M cherché.

Retenons ce résultat : que le point M représentatif de la forme quadratique correspondant à  $f$  se projette sur l'axe réel en P défini par la relation segmentaire

$$\boxed{\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -2 \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}}$$

et nous verrons par la suite que de ce simple résultat on peut déduire celui que fournirait un calcul tout différent en apparence, celui qui a trait à la réduction de la forme cubique à trois racines réelles, dont la théorie apparaît au premier abord comme profondément distincte de la théorie précédente.

Remarquons enfin que si l'on voulait calculer les coefficients de  $\varphi$  correspondants de  $f$  en fonction de ceux de  $f$ , il serait impossible de le faire sans calculer  $\alpha$ , c'est-à-dire sans résoudre l'équation  $f(z, 1) = 0$ .

Effectivement,

$$\begin{aligned} \varphi &= -(\beta - \beta')(x - \alpha y)^2 + 2(\alpha - \beta)(\alpha - \beta')(x - \beta y)(x - \beta' y) \\ &= px^2 - 2qxy + ry^2. \end{aligned}$$

Si l'on calcule  $p, q, r$  en fonction de  $\alpha, \beta, \beta'$ , on voit facilement qu'ils s'expriment en fonction rationnelle de  $\alpha$  et des fonctions symétriques de  $\alpha, \beta, \beta'$ . Montrons-le pour  $p$  par exemple,

$$\begin{aligned} p &= -(\beta - \beta')^2 + 2(\alpha - \beta)(\alpha - \beta') = -\beta^2 + 2\beta\beta' - \beta'^2 + 2[\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta' + \beta\beta'] \\ &= -(\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \beta'^2}_{s_2}) - 2(\alpha\beta + \alpha\beta' + \beta\beta') + 6\beta\beta' + 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Et si

$$f = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 xy^2 + a_3 y^3,$$

on a

$$\beta\beta' = -\frac{a_3}{a_0\alpha}.$$

Donc  $p$  est rationnel en  $\alpha$ , avec des coefficients rationnels par rapport à ceux de  $f$  puisque les parenthèses sont des fonctions symétriques entières de  $\alpha, \beta, \beta'$ .

On voit ainsi apparaître une espèce de dissymétrie entre les rôles des trois racines de  $f$ , dissymétrie qui se trouve dans la question dès le début, et qui est

au cercle M'ac), on a

$$(\gamma amd) = 2$$

par la considération du faisceau M'(capd), et comme  $\overline{da} = 2\overline{dm}$  on conclut que  $\gamma$  est milieu de md. C'est ce résultat que nous utiliserons dans la suite.

inséparable de la façon dont on a constitué avec Hermite la forme  $\varphi$  associée à  $f$ , l'expression de  $\varphi$  en fonction des racines de  $f$  étant différente selon que  $f$  a ou n'a pas des racines imaginaires. Cette dissymétrie n'a pas manqué de frapper Hermite dès ses premières recherches (*OEuvres*, t. I, fin de la page 92 et début de la page 93) et il a cherché à la réduire et à l'expliquer. Nous donnerons la raison de ce fait plus tard quand nous étudierons les formes binaires à coefficients et indéterminées complexes.

*Les formes biquadratiques sans racines réelles.* — On considère maintenant

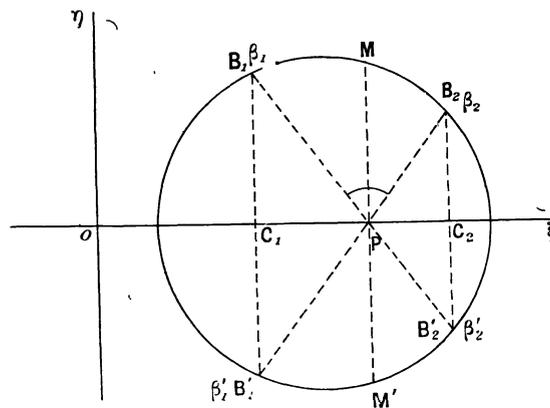
$$f = a_0(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y)(x - \beta_2 y)(x - \beta'_2 y)$$

et son associée

$$\varphi = 2u_1^2(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + 2u_2^2(x - \beta_2 y)(x - \beta'_2 y)$$

dont le point représentatif  $M$  d'affixe  $\zeta$  décrit l'arc de cercle orthogonal à  $O\xi$

Fig. 16.



passant par  $B_1 B_2$ , qui va de  $B_1$  à  $B_2$ .  $M$  est en  $B_1$  pour  $u_2 = 0$  et en  $B_2$  pour  $u_1 = 0$ . Pour  $u_1, u_2 \neq 0$   $M$  est entre  $B_1$  et  $B_2$  et se projette en  $P$  tel que

$$\frac{\overline{PC_1}}{PC_2} = -\frac{u_2^2}{u_1^2},$$

$$\theta = \frac{\alpha_0^2 \delta^2}{u_1^4 u_2^4}$$

avec

$$\delta = pr - q^2 = u_1^4 \Re(\beta_1 - \beta'_1) + 2u_1^2 u_2^2 [\Re(\beta_1 - \beta_2) + \Re(\beta_1 - \beta'_2)] + u_2^4 \Re(\beta_2 - \beta'_2).$$

Le minimum de  $\theta$  s'obtient pour les mêmes valeurs de  $u_1, u_2$  que celui de

$$\theta' = \frac{\delta}{u_1^2 u_2^2}.$$

On peut supposer  $u_1, u_2 = \text{const.}$  et le minimum de  $\theta'$  en même temps que celui de  $\delta$  et de

$$u_1^i \mathfrak{R}(\beta_1 - \beta'_1) + u_2^i \mathfrak{R}(\beta, -\beta'_2)$$

s'obtient de suite pour

$$\begin{aligned} u_1^i &= \mathfrak{R}(\beta_2 - \beta'_2) = -(\beta_2 - \beta'_2)^i, & u_1^o &= \frac{\beta_2 - \beta'_2}{i}, \\ u_2^i &= \mathfrak{R}(\beta_1 - \beta'_1) = -(\beta_1 - \beta'_1)^i, & u_2^o &= \frac{\beta_1 - \beta'_1}{i}. \end{aligned}$$

La forme correspondant à  $f$  est

$$\varphi = \frac{2}{i} [(\beta, -\beta'_2)(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + (\beta_1 - \beta'_1)(x - \beta_2 y)(x - \beta'_2 y)]$$

Le minimum de  $\theta$  a pour valeur

$$\begin{aligned} 4\alpha_0^o [(\beta_1 - \beta'_1)(\beta_2 - \beta'_2) + (\beta_1 - \beta_2)(\beta'_1 - \beta'_2) + (\beta_1 - \beta'_2)(\beta'_1 - \beta_2)]^2 \\ = \boxed{16\alpha_0^i (\beta_1 - \beta_2)^i (\beta'_1 - \beta'_2)^i} \end{aligned}$$

C'est cette quantité qui sert à limiter supérieurement les coefficients de la réduite équivalente à  $f$ .

Le point représentatif  $M$  de la correspondante de  $f$  est lié très simplement aux points représentatifs des racines.

Effectivement

$$\begin{aligned} u_1^i &= \mathfrak{R}(\beta, -\beta'_2) = \overline{B, B'_2}^2, \\ u_2^i &= \mathfrak{R}(\beta_1 - \beta'_1) = \overline{B_1 B'_1}^2. \end{aligned}$$

Donc, pour la correspondante,  $M$ , projeté en  $P$ , est tel que

$$\frac{\overline{PC_1}}{\overline{PC_2}} = -\frac{u_2^i}{u_1^i} = -\frac{\overline{B_1 B'_1}}{\overline{B, B'_2}}.$$

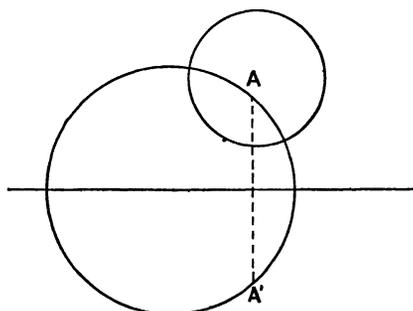
Cette relation prouve que  $P$  n'est autre chose que le point de concours des diagonales  $B_1 B'_2$  et  $B_2 B'_1$  du quadrilatère  $B_1 B_2 B'_2 B'_1$ .

En géométrie non euclidienne ce résultat s'exprime plus simplement.

En effet, rappelons que si l'on considère toutes les droites non euclidiennes passant par un point  $A$  (cercles passant par  $A$  et  $A'$  symétriques relativement à  $O\xi$ ), leurs trajectoires orthogonales (cercles non euclidiens) sont les cercles ordinaires ayant  $AA'$  pour points limites en géométrie ordinaire. D'ailleurs on voit facilement qu'un tel cercle par rapport auquel  $A$  et  $A'$  sont inverses est lieu des points situés à une distance non euclidienne donnée de  $A$ . Considérons alors un cercle non euclidien de centre  $A$  (non euclidien). Par une inversion ordinaire de pôle  $A'$  il devient un cercle ordinaire dont le centre est  $a$ ,

l'inverse de A, et réciproquement tout cercle de centre  $a$  est l'inverse d'un cercle non euclidien de centre A (non euclidien). En résumé tous les cercles

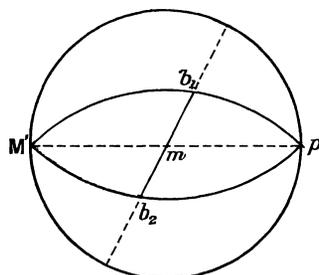
Fig. 17



de centre A en géométrie non euclidienne sont les cercles ordinaires ayant A et A' pour points limites.

Faisons alors, en revenant à la forme biquadratique de racines  $\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2$ , une inversion de pôle M'. Oξ devient une circonférence de centre  $m$  inverse

Fig. 18.



de M, passant par M', et  $p$  est diamétralement opposé à M'; le cercle  $B_1 B_2 B'_2 B'_1$  devient un diamètre  $b_1 m b_2$ . A cause de la position de P trouvée plus haut, on a

$$\widehat{MPB_1} = \widehat{MPB_2};$$

les inverses des droites  $PB_1, PB_2$  symétriques par rapport à  $MM'$ , sont des cercles  $pb_1 M', pb_2 M'$ , symétriques par rapport à  $pm M'$ .

Ceci montre que  $m$  est milieu de  $b_1 b_2$ ; c'est le centre d'un cercle ordinaire passant par  $b_1$  et  $b_2$ . Donc M est centre d'un cercle (en géométrie non euclidienne) qui passe par  $B_1$  et  $B_2$ . C'est dire que M est le milieu non euclidien du segment non euclidien  $B_1 B_2$ . C'est là, on le voit, un résultat particulièrement simple.

J.

*Remarque.* — Ainsi caractérisé, le point  $M$  apparaît comme un *covariant* des deux points  $B_1, B_2$  par toute transformation fuchsienne

$$(S) \quad \begin{cases} x = mx_1 + m_0y_1 \\ y = nx_1 + n_0y_1 \end{cases} \quad (m, m_0, n, n_0 \text{ réels; } mn_0 - m_0n = 1)$$

ou

$$(1) \quad z = \frac{mz_1 + m_0}{nz_1 + n_0}.$$

Voici ce qu'il faut entendre par là :

Si, sur la forme  $f$ , on fait la substitution  $S$ , elle devient  $f_1(x_1, y_1) = fS$  ayant aussi des racines imaginaires qui sont transformées des racines de  $f$  à l'aide de la relation (1). La forme  $\varphi_1$  correspondante de  $f_1$  a pour point représentatif  $M_1$ , le milieu non euclidien des deux points qui représentent les racines de  $f_1$  dans le demi-plan supérieur. Comme on sait d'ailleurs que toute transformation fuchsienne (1) conserve les distances et les angles non euclidiens, on voit que  $M_1$  est la transformée de  $M$  par la substitution (1). Et ceci suffit à montrer que *la forme  $\varphi$  correspondante de  $f$  est un covariant de  $f$  par les transformations (S) envisagées.*

*Formes cubiques ayant toutes leurs racines réelles.* — Il faut considérer

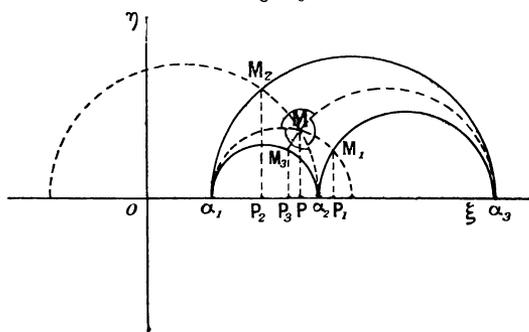
$$f = a_0(x - \alpha_1y)(x - \alpha_2y)(x - \alpha_3y)$$

et l'associée

$$\varphi = t_1'(x - \sigma_1y)' + t_2^2(x - \alpha_2y)^2 + t_3^2(x - \alpha_3y)^2$$

dont le point représentatif  $M$  décrit l'intérieur du triangle curviligne dont les trois côtés sont les demi-cercles de diamètres  $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1$ . Et l'on sait que

Fig. 19.



le demi-cercle orthogonal à  $O\xi$  passant par  $\alpha_1, M$  coupe le demi-cercle  $\alpha_2\alpha_3$  en  $M_1$ , projeté en  $P_1$  sur  $O\xi$  tel que

$$\frac{\overline{P_1\alpha_2}}{\overline{P_1\alpha_3}} = -\frac{t_3^2}{t_2^2}, \quad \text{on a aussi} \quad \frac{\overline{PP_1}}{\overline{P\alpha_1}} = -\frac{t_1^2}{t_2^2 + t_3^2}.$$

Et l'on a les relations analogues

$$\frac{\overline{P_2 \alpha_3}}{\overline{P_1 \alpha_1}} = -\frac{t_1^2}{t_3^2} \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{PP_2}}{\overline{P \alpha_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2 + t_3^2},$$

$$\frac{\overline{P_3 \alpha_1}}{\overline{P_3 \alpha_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2} \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{PP_3}}{\overline{P \alpha_3}} = -\frac{t_3^2}{t_1^2 + t_2^2}.$$

La fonction  $\theta$  est ici

$$\theta = \frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{3}{2}}}{t_1^2 t_2^2 t_3^2} \quad \text{avec} \quad \delta = pr - q^2 = t_1^2 t_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + t_2^2 t_3^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + t_3^2 t_1^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2.$$

On peut supposer  $t_1^2 t_2^2 t_3^2$  constant. Alors le minimum de  $\theta$  a lieu en même temps que celui de  $\delta$  qui est une somme de trois termes à produit constant, dont le minimum est atteint par suite lorsque

$$t_1^2 t_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = t_2^2 t_3^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = t_3^2 t_1^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

c'est-à-dire pour

$$t_1^2 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2,$$

$$t_2^2 = (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

$$t_3^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

La forme correspondante de  $f$  est donc

$$\varphi = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (x - \alpha_1 y)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2 y)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3 y)^2$$

Le minimum de  $\theta$  a d'ailleurs pour valeur

$$\sqrt{27 \alpha_0^3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2}.$$

On remarquera la parenté de l'expression trouvée avec l'expression analogue trouvée dans le cas de formes cubiques n'ayant qu'une racine réelle. Dans le cas présent, comme dans le cas traité antérieurement, le minimum de  $\theta$  est toujours

$$\sqrt{27 \alpha_0^3 \mathfrak{D}(\alpha_1 - \alpha_2) \mathfrak{D}(\alpha_2 - \alpha_3) \mathfrak{D}(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

si  $z_1, z_2, z_3$  sont les racines de la forme.

Le point représentatif M de la correspondante de  $f$  est lié très simplement aux points représentatifs des racines de  $f$ .

On a, en effet, pour ce point

$$\frac{\overline{P_1 \sigma_2}}{\overline{P_1 \alpha_3}} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 - \alpha_3)^2} = -\frac{\sigma_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3}.$$

Or

$$\frac{\overline{P_1 \alpha_2}}{\overline{P_1 \alpha_3}} = - \frac{\overline{M_1 \alpha_2}^2}{\overline{M_1 \alpha_3}^2},$$

$M_1$  étant sur le cercle de diamètre  $\alpha_1 \alpha_3$ .

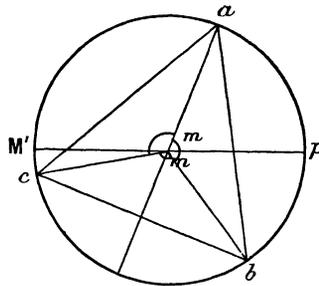
Donc

$$\frac{\overline{\alpha_1 \alpha_2}^2}{\overline{\alpha_1 \alpha_3}^2} = \frac{\overline{M_1 \alpha_2}^2}{\overline{M_1 \alpha_3}^2}$$

et le cercle orthogonal à  $O\xi$  passant par  $\alpha_1, MM_1$ , est orthogonal au cercle de diamètre  $\alpha_2 \alpha_3$ . Le point  $M$  apparaît donc comme *l'orthocentre non euclidien du triangle non euclidien  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$* , puisque la droite non euclidienne  $\alpha_1, MM_1$ , est orthogonale à la droite non euclidienne  $\alpha_2, M_1 \alpha_3$ .

$M$  a d'autres propriétés géométriques. Il est clair que les points  $\alpha_2, \alpha_3$  sont deux points inverses par rapport au cercle  $\alpha_1, MM_1$ , donc les deux côtés  $\alpha_1 \alpha_2$  et  $\alpha_1 \alpha_3$  du triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  non euclidien sont *symétriques par rapport à la hauteur  $\alpha_1, MM_1$* . Le triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  apparaît comme un triangle particulier d'angles nuls (ce qui n'a rien d'étonnant, car ses trois sommets sont sur l'axe réel) dont *l'orthocentre est point de concours des axes de symétrie des trois angles du triangle*. Ceci apparaît plus clairement encore par une inversion de pôle  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à l'axe réel.

Fig. 20.



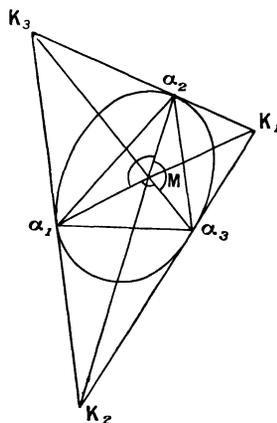
L'axe réel devient une circonférence de centre  $m$  inverse de  $M$ , passant par  $M'$  les trois cercles  $\alpha_1, MM_1, \alpha_2, MM_2, \alpha_3, MM_3$  deviennent trois diamètres  $am, bm, cm$  ( $a, b, c$ , inverses de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) et, à cause des relations d'orthogonalité,  $m$  est orthocentre du triangle rectiligne  $abc$  comme il l'est du triangle curviligne de sommets  $abc$  ayant pour côtés des arcs de cercles orthogonaux à la circonférence  $abc$ .

Ceci exige que  $abc$  soit *équilatéral*. On en déduit, en revenant à la figure primitive, que les trois droites non euclidiennes  $M\alpha_1, M\alpha_2, M\alpha_3$  font entre elles *des angles de  $\frac{2\pi}{3}$* . On peut donc envisager  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  comme une espèce de triangle

équilatéral dont  $M$  serait le centre. Par une rotation non euclidienne de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de  $M$ , le triangle  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$  revient sur lui-même.

Si l'on passait d'ailleurs à la représentation projective des formes, ces résultats sont des résultats simples de la théorie des coniques. Envisageons, en effet, la rotation non euclidienne de l'intérieur de la conique fondamentale qui amène  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  respectivement sur  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ . Elle existe et est unique; son centre est facile à déterminer. Effectivement cette rotation est une homographie qui amène les tangentes en  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  à la conique respectivement sur les

Fig. 21.



tangentes en  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ . Elle amène donc  $K_1, K_2, K_3$ , respectivement sur  $K_2, K_3, K_1$ . Elle amène donc les droites  $\alpha_1K_1, \alpha_2K_2, \alpha_3K_3$ , respectivement sur  $\alpha_2K_2, \alpha_3K_3, \alpha_1K_1$ . Or les trois droites  $\alpha_1K_1, \alpha_2K_2, \alpha_3K_3$  concourent en  $M$  d'après le théorème de Brianchon. Donc  $M$  est le point double, intérieur à la conique, de l'homographie en question. C'est le centre cherché. D'ailleurs, visiblement,  $\alpha_1MK_1$  est orthogonal (au sens non euclidien) à  $\alpha_2\alpha_3$ . Donc  $M$  est orthocentre de  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ . De plus, les angles  $\alpha_1M\alpha_2, \alpha_2M\alpha_3, \alpha_3M\alpha_1$  sont égaux, car ils se déduisent l'un de l'autre par la rotation considérée.

De ces propriétés géométriques il ressort, sans qu'il soit besoin d'insister, que le point  $M$  est un covariant des trois points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  par toute substitution fuchsienne

$$(S) \quad \begin{cases} x = m.x_1 + m_0.y_1 \\ y = n.x_1 + n_0.y_1 \end{cases} \quad (m, n, m_0, n_0 \text{ réels})$$

ou

$$z = \frac{m.z_1 + m_0}{n.z_1 + n_0}$$

ou que la correspondante de  $f$  est un covariant quadratique de la forme  $f$ .

C'est là une remarque qui a été faite par Hermite (*Œuvres*, t. I, p. 191).

En effet, la forme  $\varphi$  a des coefficients qui s'expriment rationnellement en fonction de  $f$  et si l'on écrit

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

la correspondante est, à un facteur près,

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2;$$

c'est la forme d'Eisenstein.

C'est un simple calcul de fonctions symétriques à faire à partir de

$$\varphi = (\alpha_2 - \alpha_3)^2(x - \alpha_1 y)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2(x - \alpha_2 y)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2(x - \alpha_3 y)^2.$$

On peut faire plus élégamment le calcul comme suit.

L'équation du cercle  $\alpha_1 M_1$  est de la forme

$$zz' - \frac{\alpha_1 + \xi_1}{2}(z + z') + \alpha_1 \xi_1 = 0,$$

$z$  étant l'affixe d'un point du cercle,  $z'$  son conjugué,  $\xi_1$  l'affixe du point diamétralement opposé à  $\alpha_1$  sur ce cercle.

Mais ce cercle étant orthogonal au cercle de diamètre  $\alpha_2 \alpha_3$ , on a

$$2\alpha_1 \xi_1 + 2\alpha_2 \alpha_3 = (\alpha_1 + \xi_1)(\alpha_2 + \alpha_3),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha_1 + \xi_1}{2} = -\frac{b\alpha_1 + c}{a\alpha_1 + b},$$

$$\alpha_1 \xi_1 = \frac{c\alpha_1 + d}{a\alpha_1 + b}.$$

Le cercle en question a donc pour équation

$$(a\alpha_1 + b)zz' + (b\alpha_1 + c)(z + z') + c\alpha_1 + d = 0;$$

on a, pour  $\alpha_2 M_1$ ,

$$(a\alpha_2 + b)zz' + (b\alpha_2 + c)(z + z') + c\alpha_2 + d = 0,$$

et, pour  $\alpha_3 M_1$ ,

$$(a\alpha_3 + b)zz' + (b\alpha_3 + c)(z + z') + c\alpha_3 + d = 0.$$

Le déterminant de ces trois équations aux inconnues  $zz'$  et  $(z + z')$  est nul, ce qui indique que les trois cercles concourent. En les résolvant, on a de suite

$$\frac{zz'}{(c^2 - bd)(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{z + z'}{(ad - bc)(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{1}{(b^2 - ac)(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

ce qui montre que le point M a un affixe  $\zeta$  déterminé par

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta \zeta' = \frac{c^2 - bd}{b^2 - ac}, \\ \zeta + \zeta' = \frac{ad - bc}{b' - ac}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire qu'il représente la forme définie

$$(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2;$$

on reconnaît, au signe près, l'expression donnée plus haut pour la forme d'Eisenstein.

Ajoutons que le covariant quadratique ainsi trouvé pour  $f$  n'est autre, à un facteur numérique près, que le hessien de la forme  $f$ . Et il est digne d'intérêt que *la méthode de réduction continue conduise justement à ce covariant et en fournisse d'elle-même l'interprétation géométrique que nous avons donnée plus haut* (1).

*Les formes biquadratiques ayant deux racines réelles.* — Le type à considérer est

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \beta y)(x - \beta' y),$$

et la forme associée

$$\varphi = t_1'(x - \alpha_1 y)^2 + t_2'(x - \alpha_2 y)^2 + 2u^2(x - \beta y)(x - \beta' y).$$

Son point représentatif se construira comme suit :

On prendra  $M_1$  sur le demi-cercle de diamètre  $A_1 A_2$  ( $A_1$ , affixe  $\alpha_1$ ;  $A_2$ , affixe  $\alpha_2$ ) déterminé par

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2},$$

puis sur l'arc du cercle orthogonal à  $O\xi$  qui joint  $M_1$  à B ( $B$ , d'affixe  $\beta$ ;  $B'$ , d'affixe  $\beta'$ ), on prendra M déterminé par

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PC}} = -\frac{2u^2}{t_1' + t_2'},$$

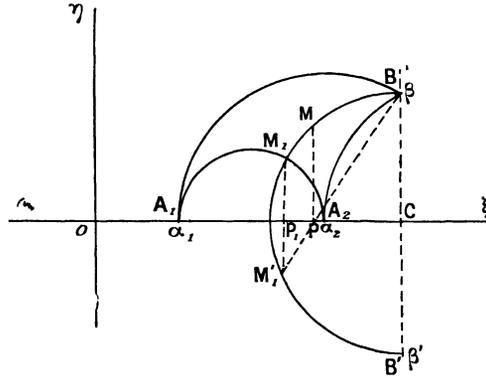
C étant la projection de B et  $B'$  sur  $O\xi$ . M représentera  $\varphi$ .

Lorsque  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $u$  varieront, M décrira l'intérieur du triangle non euclidien

(1) On verra au Tome IX des *Mathematische Annalen* comment, en interprétant géométriquement la théorie algébrique des covariants des formes du troisième et du quatrième degré, M. Klein est arrivé à une interprétation du hessien de la forme cubique tout à fait analogue à celle à laquelle nous a conduit la méthode de réduction continue (*Math. Ann.*, t. IX, p. 191-192).

de sommets  $A_1, A_2, B$  dont les côtés sont les trois arcs de cercle orthogonaux à  $O\xi$  joignant les points deux à deux. (Comme cas limite  $B$  pourrait venir sur le demi-cercle  $A_1A_2$  et le triangle se réduirait à ce demi-cercle; ce cas, on le

Fig. 22.



verra par la suite, ne constitue rien de particulier, tout ce que nous dirons dans la suite s'y applique.)

Il faut considérer ici

$$\theta = \frac{\alpha_0^2 \delta^2}{t_1^2 t_2^2 u^4} \quad (\delta \text{ étant le déterminant de } \varphi),$$

$$\delta = t_1^2 t_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 2 t_1^2 u^2 \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) + 2 t_2^2 u^2 \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) + u^4 \mathfrak{C}(\beta - \beta').$$

Il revient au même de chercher le minimum de  $\theta'$

$$\theta' = \frac{\delta}{t_1 t_2 u^2} \quad (t_1, t_2 \text{ supposés positifs}),$$

$$\theta' = \frac{t_1 t_2}{u^2} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 2 \frac{t_1}{t_2} \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) + 2 \frac{t_2}{t_1} \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) + \frac{u^2}{t_1 t_2} \mathfrak{C}(\beta - \beta').$$

Posant  $\frac{t_1}{u} = \lambda_1, \frac{t_2}{u} = \lambda_2,$

$$\theta' = \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) + 2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) + \frac{\mathfrak{C}(\beta - \beta')}{\lambda_1 \lambda_2},$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \lambda_1} = \lambda_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \frac{2}{\lambda_2} \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) - \frac{2 \lambda_2}{\lambda_1^2} \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) - \frac{\mathfrak{C}(\beta - \beta')}{\lambda_1^2 \lambda_2},$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \lambda_2} = \lambda_1 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \frac{2 \lambda_1}{\lambda_2^2} \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) + \frac{2}{\lambda_1} \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) - \frac{\mathfrak{C}(\beta - \beta')}{\lambda_1 \lambda_2^2}.$$

En les égalant à zéro on a les deux équations

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \mathfrak{C}(\beta - \beta') = 0,$$

$$\lambda_1^2 \mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta) - \lambda_2^2 \mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta) = 0.$$

D'où l'on tire

$$\frac{\lambda_1^2}{\mathfrak{C}(\alpha_2 - \beta)} = \frac{\lambda_2^2}{\mathfrak{C}(\alpha_1 - \beta)} = \Lambda;$$

$\Lambda$  est déterminé par

$$\Lambda^2 = \frac{\mathfrak{N}(\beta - \beta')}{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \sigma) \mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta) \mathfrak{N}(\alpha, -\beta)}.$$

On conclut de là les valeurs suivantes de  $t_1^2$ ,  $t_2^2$ ,  $u^2$  :

$$t_1^2 = \frac{\mathfrak{N}(\alpha_2 - \beta) \sqrt{\mathfrak{N}(\beta - \beta')}}{i} = \frac{\beta - \beta'}{i} (\alpha_2 - \beta) (\alpha_2 - \beta'),$$

$$t_2^2 = \frac{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta) \sqrt{\mathfrak{N}(\beta - \beta')}}{i} = \frac{\beta - \beta'}{i} (\alpha_1 - \beta) (\alpha_1 - \beta'),$$

$$u^2 = \sqrt{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \sigma) \mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta) \mathfrak{N}(\alpha, -\beta)} = (\sigma_1 - \sigma) \sqrt{(\sigma_1 - \beta) (\alpha_1 - \beta') (\alpha_2 - \beta) (\alpha_2 - \beta')},$$

et l'on est sûr, d'après la théorie générale du Chapitre précédent, que ces valeurs constituent un minimum effectif pour  $\theta$ , puisque d'une part ce sont les seules valeurs pouvant donner un minimum et d'autre part on est sûr que ce minimum existe.

Ici encore le point représentatif de la correspondante de  $f$  est lié simplement aux points représentatifs des racines de  $f$ .

En effet,

$$\frac{\overline{P_1 A_1}}{\overline{P_1 A_2}} = - \frac{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta)}{\mathfrak{N}(\alpha, -\beta)} = - \frac{\overline{A_1 B}^2}{\overline{A_2 B}^2}.$$

Si de plus on remarque

$$\frac{\overline{P_1 A_1}}{\overline{P_1 A_2}} = - \frac{\overline{M_1 A_1}^2}{\overline{M_1 A_2}^2},$$

on conclut

$$\frac{\overline{M_1 A_1}}{\overline{M_1 A_2}} = \frac{\overline{B A_1}}{\overline{B A_2}}.$$

1° Le cercle  $BMM_1$  est donc orthogonal au cercle de diamètre  $A_1 A_2$ .

On a ensuite

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PC}} = - \frac{2u^2}{t_1^2 + t_2^2}.$$

Or

$$u^2 = \sqrt{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \sigma) \mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta) \mathfrak{N}(\alpha, -\beta)} = \overline{A_1 A} \times \overline{A_1 B} \times \overline{A, B},$$

$$t_1^2 = \frac{\mathfrak{N}(\sigma, -\beta) \sqrt{\mathfrak{N}(\beta - \beta')}}{i} = \overline{BB'} \times \overline{A, B}^2,$$

$$t_2^2 = \frac{\mathfrak{N}(\alpha_1 - \beta) \sqrt{\mathfrak{N}(\beta - \beta')}}{i} = \overline{BB'} \times \overline{A_1 B}^2.$$

Donc

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PC}} = - \frac{2 \overline{A_1 A} \times \overline{A_1 B} \times \overline{A, B}}{\overline{BB'} (\overline{A_1 B}^2 + \overline{A_2 B}^2)} = - \frac{1}{\overline{BC}} \frac{\overline{A_1 A} \times \overline{A_1 B} \times \overline{A, B}}{\overline{A_1 B}^2 + \overline{A_2 B}^2}.$$

Mais on a d'autre part

$$\overline{M_1 P_1}^2 = - \overline{P_1 A_1} \times \overline{P_1 A_2}$$

J.

3

et

$$\frac{\overline{P_1 A_1}}{t_2'} = \frac{-\overline{P_1 A_2}}{+t_1'} = \frac{\overline{A_2 A_1}}{t_1'^2 + t_2'^2}.$$

Donc

$$\overline{P_1 A_1} = \overline{A_2 A_1} \frac{t_2'^2}{t_1'^2 + t_2'^2},$$

$$\overline{P_1 A_2} = -\overline{A_2 A_1} \frac{t_1'^2}{t_1'^2 + t_2'^2}$$

et

$$\overline{M_1 P_1}^2 = \overline{A_1 A_2}^2 \frac{t_1'^2 t_2'^2}{(t_1'^2 + t_2'^2)^2}.$$

Donc

$$\overline{M_1 P_1} = \overline{A_1 A_2} \frac{t_1' t_2'}{t_1'^2 + t_2'^2} = \overline{A_1 A_2} \frac{\overline{A_1 B} \times \overline{A_2 B}}{\overline{A_1 B}^2 + \overline{A_2 B}^2}.$$

La conclusion est que

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{M_1 P_1}}{\overline{BC}}.$$

2° Donc M se projette en P au point de concours des diagonales du quadrilatère  $M_1 M' B' B$ . C'est le milieu non euclidien du segment non euclidien  $M, B$ .

Les propriétés 1° et 2° caractérisent complètement le point M représentatif de la correspondante de  $f$ . Ces propriétés ressortiront d'ailleurs directement de considérations géométriques que nous exposerons dans la suite. Mentionnons encore la propriété suivante qui est d'ailleurs immédiate.  $A_1, A_2$  étant des points inverses par rapport au cercle  $BMM_1$ , les deux côtés  $A_1 B$  et  $A_2 B$  du triangle curviligne  $A_1 A_2 B$  sont symétriques par rapport au cercle  $BMM_1$ , ce qui s'exprime encore en disant que  $BMM_1$  est la bissectrice non euclidienne de l'angle non euclidien  $\widehat{A_1 B A_2}$ .

Il resterait maintenant à calculer :

1° Les coefficients de la correspondante de  $f$  en fonction des coefficients de  $f$ ;

2° La valeur du minimum de la fonction  $\theta$  pour les valeurs trouvées de  $t_1, t_2, u$  (1).

Sans nous arrêter à ces deux calculs dont le premier exigerait d'ailleurs probablement la résolution numérique de l'équation  $f(z, 1) = 0$ , ou tout au moins le calcul de ses racines réelles, ainsi que nous l'avons déjà remarqué pour les

(1) Un calcul bien élémentaire fournit pour ce minimum l'expression

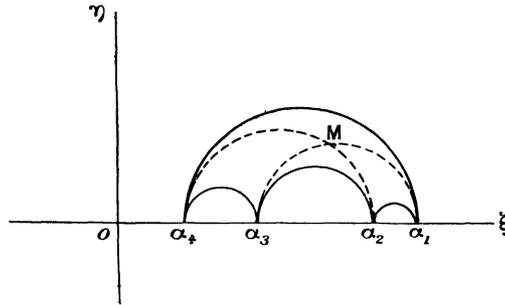
$$4a_0^2 \left[ \sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_1 - z_2)} \mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_3 - z_4) + \sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_1 - z_3)} \mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_2 - z_4) + \sqrt{\mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_1 - z_4)} \mathfrak{D}\mathfrak{C}(z_2 - z_3) \right]^2,$$

$z_1, z_2, z_3, z_4$  étant les racines de  $f$ .

formes cubiques n'ayant qu'une racine réelle, nous passerons tout de suite au cas des formes biquadratiques ayant quatre racines réelles.

*Formes biquadratiques ayant quatre racines réelles.* — L'étude a été faite très complètement par Hermite (*Œuvres*, t. I, p. 361 à 371); nous insisterons très peu.

Fig. 23.



Nous remarquerons simplement que si

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y)(x - \alpha_4 y)$$

et

$$\varphi = t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - \alpha_2 y)^2 + t_3^2(x - \alpha_3 y)^2 + t_4^2(x - \alpha_4 y)^2,$$

le point représentatif de  $\varphi$  décrit l'intérieur du quadrilatère non euclidien dont les sommets sont les points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , qui représentent les racines. On peut toujours avec Hermite supposer  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ . Dans ces conditions le calcul donne pour le minimum de la fonction  $\theta$ , en posant

$$\chi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4),$$

$$t_1^2 = \frac{1}{\chi'(\alpha_1)}, \quad t_2^2 = \frac{1}{\chi'(\alpha_2)}, \quad t_3^2 = \frac{1}{\chi'(\alpha_3)}, \quad t_4^2 = \frac{1}{\chi'(\alpha_4)}.$$

Le minimum de  $\theta$  calculé par Hermite est

$$T = 16 a_0^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2,$$

expression tout à fait analogue à celle donnée pour le minimum de  $\theta$  dans le cas des formes biquadratiques sans racines réelles.

Si l'on remarque avec Hermite que la correspondante s'écrit

$$\varphi = \frac{(x - \alpha_1 y)^2}{\chi'(\alpha_1)} - \frac{(x - \alpha_2 y)^2}{\chi'(\alpha_2)} + \frac{(x - \alpha_3 y)^2}{\chi'(\alpha_3)} - \frac{(x - \alpha_4 y)^2}{\chi'(\alpha_4)},$$

et que, d'autre part, on a l'identité

$$\sum \frac{(x - \alpha_i y)^2}{\chi'(\alpha_i)} = 0,$$

on trouve que  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi = {}_2 \left[ \frac{(x - \alpha_1 y)^2}{\chi'(\alpha_1)} + \frac{(x - \alpha_3 y)^2}{\chi'(\alpha_3)} \right] = - {}_2 \left[ \frac{(x - \alpha_2 y)^2}{\chi'(\alpha_2)} + \frac{(x - \alpha_4 y)^2}{\chi'(\alpha_4)} \right],$$

et ceci prouve que le point représentatif  $M$  de la correspondante de  $f$  n'est que le point de rencontre des cercles de diamètre  $\alpha_1 \alpha_3$  et  $\alpha_2 \alpha_4$ , c'est-à-dire le point de concours des diagonales du quadrilatère non euclidien  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ .

Sous cette forme on voit bien que cette correspondante est un covariant quadratique de  $f$ , puisque par toute transformation fuchsienne,

$$(S) \quad \begin{cases} x = m x_1 + m_0 y_1, \\ y = n x_1 + n_0 y_1 \end{cases}$$

ou

$$z = \frac{m z_1 + m_0}{n z_1 + n_0};$$

le point de concours des diagonales du quadrilatère  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$  est un covariant des quatre points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , c'est-à-dire qu'il devient le point de concours des diagonales du quadrilatère transformé du premier. Les vérifications ont été faites par Hermite qui a montré comment la théorie arithmétique de la réduction continue de ces formes biquadratiques conduisait naturellement au système complet des éléments analytiques de la théorie des formes biquadratiques.

On comprendra que nous ne nous étendions pas autant sur ce cas que sur les cas des formes biquadratiques *sans racines réelles* ou à *deux racines réelles* seulement, qui, ni l'un ni l'autre, n'ont été traités par Hermite, et nous ont conduit, comme on l'a vu, à des résultats simples et susceptibles de figurations géométriques très simples. Nous reviendrons seulement au Chapitre suivant sur tous ces cas pour exposer des considérations géométriques qui sont de nature à aider à la recherche du minimum de la fonction  $\theta$ , qui constitue la première des questions à résoudre dans la théorie de la réduction; ces considérations jetteront aussi quelque lumière sur les propriétés géométriques des correspondantes des formes cubiques et biquadratiques auxquelles les calculs faits dans le Chapitre actuel nous ont fait parvenir.

---

## CHAPITRE III.

### QUELQUES REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DU MINIMUM DE LA FONCTION $\theta$ .

---

La question centrale qu'il faut résoudre pour réduire une forme  $f$  est la détermination du minimum absolu de la fonction  $\theta$  que nous avons appris à attacher à  $f$ ,

$$\theta = \frac{\alpha_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{(tu)^n}.$$

A ce sujet on peut faire quelques remarques d'ordre géométrique dont l'utilité manifeste nous apparaîtra au cours des applications que nous en ferons.

$\delta$  étant le déterminant de la forme  $\varphi$  associée à  $f$  dont le point représentatif est  $\zeta = \xi + i\eta$ , on a fait remarquer que l'on a

$$\eta = \frac{\sqrt{\delta}}{p},$$

en supposant que l'on écrive

$$\varphi = px^2 - 2qxy + ry^2, \quad \delta = pr - q^2.$$

Donc

$$\delta^{\frac{n}{2}} = (p\eta)^n.$$

Or on a vu que

$$p = t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2;$$

tout revient donc à la détermination du minimum de

$$\frac{[\eta(t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2)]^n}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2},$$

$\eta$  étant l'ordonnée du barycentre non euclidien des points  $A_1, \dots, A_\mu, B_1, \dots, B_\nu$  d'affixes  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \dots, \beta_\nu$  racines de  $f$ , quand on affecte ces points des masses  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$ , minimum qu'il s'agit de déterminer lorsque  $t_1, \dots, u_\nu$  prennent toutes les valeurs possibles.

Nous avons remarqué que ce minimum est atteint pour des valeurs de  $t, u$ , dont aucune n'est nulle; nous pouvons donc (puisque  $\theta$  ne change pas lorsque tous les  $t, u$  sont multipliés par un même facteur constant  $\lambda$ ) dans la recherche du minimum de  $\theta$  assujettir les  $t, u$  à vérifier constamment la relation

$$(1) \quad t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2 = \text{const.} = \varrho$$

et dans ces conditions le problème se ramène à la détermination du minimum de

$$\eta[\iota_1^2 + \dots + \iota_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2].$$

En voici une conséquence. Soient  $T_1^2, \dots, T_\nu^2, 2U_1^2, \dots, 2U_\nu^2$  les valeurs minimantes cherchées. Donnons à deux des points  $\alpha_i$ , par exemple à  $\alpha_1, \alpha_2$  les masses  $\lambda^2 T_1^2, \lambda^2 T_2^2$ ,  $\lambda$  étant un paramètre variable; soit  $\zeta_1$  le barycentre non euclidien de ces deux points affectés de ces masses;  $\zeta_1$  reste fixe quand  $\lambda$  varie, et c'est un point au-dessus de  $O\xi$ , de masse  $\lambda^2(T_1^2 + T_2^2) = 2m_1^2$ .

Donnons aux points restants

$$\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \dots, \beta_\nu$$

les masses variables

$$\iota_3^2, \iota_4^2, \dots, \iota_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$$

qu'on astreindra ainsi que  $\lambda^2$  toutefois à vérifier la relation

$$(2) \quad \lambda^2 T_1^2 T_2^2 \iota_3^2 \iota_4^2 \dots \iota_\mu^2 u_1^2 u_2^2 \dots u_\nu^2 = \mathcal{C}.$$

Dans ces conditions le minimum de

$$\eta[\lambda^2 T_1^2 + \lambda^2 T_2^2 + \iota_3^2 + \dots + \iota_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2],$$

lorsque  $\lambda, \iota_3, \dots, \iota_\mu, u_1, \dots, u_\nu$  varient en satisfaisant à (2), est atteint pour les valeurs

$$\lambda^2, T_3^2, T_4^2, \dots, T_\mu^2, 2U_1^2, \dots, 2U_\nu^2$$

des paramètres

$$\lambda^2, \iota_3^2, \iota_4^2, \dots, \iota_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$$

Or considérons maintenant la forme  $f_1$  dont les racines seraient  $\zeta_1$  et son conjugué  $\zeta'_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta'_1, \dots, \beta_\nu, \beta'_\nu$  et cherchons sa correspondante. Pour cela affectons les points  $\zeta_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$  respectivement des masses variables

$$2m_1^2 = \lambda^2(T_1^2 + T_2^2), \iota_3^2, \dots, \iota_\mu^2, 2u_1^2, 2u_2^2, \dots, 2u_\nu^2.$$

Le barycentre de ces points affectés de ces masses est  $\zeta$ , *barycentre des masses*

$$\lambda^2 T_1^2, \lambda^2 T_2^2, \iota_3^2, \dots, \iota_\mu^2, 2u_1^2, 2u_2^2, \dots, 2u_\nu^2,$$

affectés à

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \dots, \beta_\nu.$$

Donc ce point  $\zeta$  qui représente l'associée de  $f$  pour les valeurs ci-dessus des paramètres  $\iota, u$  représente aussi l'associée de  $f_1$  pour les valeurs attribuées plus haut aux masses des racines de  $f_1$ .

La fonction à considérer pour  $f_1$  serait donc

$$(3) \quad \eta[2m_1^2 + \iota_3^2 + \dots + \iota_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2],$$

$\eta$  étant l'ordonnée de  $\zeta$ . Il faut chercher son minimum quand  $m_1^2, t_2^3, \dots, t_\mu^2, \dots, u_1^2, \dots, u_\nu^2$  sont assujetties à vérifier une relation

$$(3') \quad m_1^2 t_2^3 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2 = \text{const.}$$

ou, puisque  $2m_1^2 = \lambda^2 (T_1^2 + T_2^2)$ ,

$$(4) \quad \lambda^4 t_2^3 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2 = \text{const.}$$

Mais (3) n'étant autre que

$$\eta[\lambda^2 T_1^2 + \lambda^2 T_2^2 + t_2^3 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2],$$

et puisque dans l'hypothèse (4) on a aussi

$$\lambda^4 T_1^2 T_2^2 t_2^3 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2 = \text{const.},$$

constante qui peut être supposée égale à  $\circ$  par un choix convenable de la constante arbitraire qui entre dans (4) et celle de (3'), on voit que le minimum de (3) sera atteint pour les valeurs

$$T_1^2 + T_2^2, \quad T_2^3, \quad \dots, \quad T_\mu^2, \quad 2U_1^2, \quad \dots, \quad 2U_\nu^2$$

des masses attribuées à

$$\zeta_1, \quad \alpha_3, \quad \dots, \quad \alpha_\mu, \quad \beta_1, \quad \dots, \quad \beta_\nu,$$

et ceci montre que la correspondante de  $f_1$  est à un facteur constant près la même que la correspondante de  $f$ , puisque toutes deux ont pour point représentatif  $\zeta$  le barycentre non euclidien des points

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_\mu, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots, \quad \beta_\nu$$

affectés respectivement des masses

$$T_1^2, \quad T_2^2, \quad \dots, \quad T_\mu^2, \quad 2U_1^2, \quad \dots, \quad 2U_\nu^2.$$

Voici donc un principe qui pourra être utile dans la recherche de la correspondante :

*Soit  $f$  dont les racines sont*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_\mu, \quad \beta_1, \quad \beta'_1, \quad \dots, \quad \beta_\nu, \quad \beta'_\nu,$$

*si sa correspondante correspond aux valeurs*

$$T_1^2, \quad T_2^2, \quad \dots, \quad T_\mu^2, \quad U_1^2, \quad \dots, \quad U_\nu^2$$

*des paramètres; si, d'autre part,  $\zeta_{ij}$  désigne le barycentre non euclidien des points  $\alpha_i, \alpha_j$  affectés des masses  $T_i^2, T_j^2$ , la forme  $f_1$  du même degré que  $f$*

dont les racines sont celles de  $f$ , sauf  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  qui sont remplacées par  $\zeta_i$  et sa conjuguée  $\zeta'_i$ , a même correspondante que  $f$  (à un facteur constant près sans aucune importance).

On pourra faire des applications successives de ce principe et ramener la forme  $f$  à une forme  $f_h$  du même degré que  $f$ , ayant même correspondante, et n'ayant qu'une racine réelle si  $f$  est de degré impair, n'ayant pas de racine réelle si  $f$  est de degré pair.

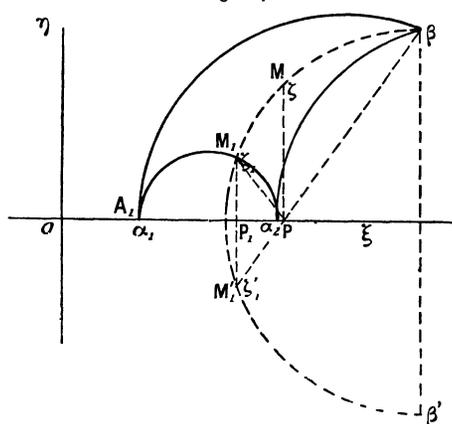
Il est bien sûr que  $f_i$  n'est connue que si l'on connaît déjà  $T_1^2$  et  $T_2^2$ , c'est-à-dire le rapport des masses  $t_1^2, t_2^2$  pour les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum. Toutefois le principe précédent pourra éviter des calculs pour la recherche de ces valeurs minimantes quand on l'emploiera judicieusement, et c'est ce que nous allons montrer par des applications aux formes cubiques et biquadratiques.

*Première application.* — Prenons la forme

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \beta y)(x - \beta' y)$$

biquadratique avec deux racines réelles. Soit  $M$  le point représentatif de sa correspondante;  $M$  est le barycentre de  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ , affectés des masses minimantes  $T_1^2, T_2^2, 2U^2$ .

Fig. 24.



Soit  $M_1$  le barycentre de  $\alpha_1, \alpha_2$ , affectés des masses  $T_1^2, T_2^2$ . C'est un point du cercle de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2$  projeté en  $P_1$  tel que

$$\frac{P_1 \alpha_1}{P_1 \alpha_2} = -\frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Considérons maintenant la forme biquadratique  $f_i$  dont les racines sont  $\zeta_1, \beta$  et leurs conjuguées  $\zeta'_1, \beta'$ ; en vertu du résultat précédent, sa correspondante

sera représentée par le même point  $M$  que celle de  $f$ . Or on a vu dans la théorie des formes biquadratiques sans racines réelles que le point représentatif de la correspondante d'une telle forme  $f$ , est *le milieu non euclidien du segment non euclidien joignant ses deux racines* (situées au-dessus de l'axe réel). On conclut donc que  $M$  représentant la correspondante de  $f$  est *le milieu non euclidien du segment non euclidien*  $M_1\beta$ . On retrouve sans aucun calcul la deuxième des propriétés géométriques de  $M$  auxquelles nous avait conduit le calcul dans le Chapitre précédent.

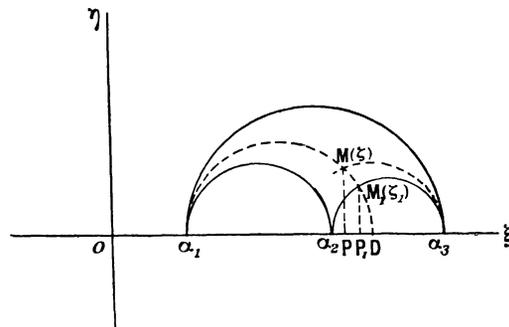
*Deuxième application.* — Une des applications les plus élégantes qu'on puisse faire du principe exposé au début de ce Chapitre consiste dans la détermination de la correspondante d'une forme cubique à trois racines réelles connaissant seulement la correspondante d'une forme à une racine réelle, sans faire aucun calcul.

Soit la forme cubique

$$f = a_0(x - \alpha_1 y) (x - \alpha_2 y) (x - \alpha_3 y)$$

aux racines réelles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Sa correspondante  $\varphi$  s'obtient pour les masses  $T_1^2, T_2^2, T_3^2$  attribuées aux points racines, soit  $M$  son point représentatif.

Fig. 25.



Soit  $M_1$ , d'affixe  $\zeta_1$ , le barycentre non euclidien de  $\alpha_2, \alpha_3$ . On a

$$\frac{\overline{P_1\alpha_2}}{\overline{P_1\alpha_3}} = -\frac{T_3^2}{T_2^2}.$$

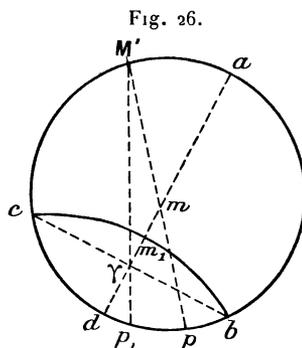
Le principe dit que  $M$  représente la correspondante de la forme cubique  $f$ , dont les racines sont  $\alpha_1, \zeta_1, \zeta_1$  conjugué de  $\zeta_1$ . Donc on doit avoir

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{P\alpha_1}} = -2 \frac{\overline{DP_1}}{\overline{D\alpha_1}},$$

$D$  étant le point diamétralement opposé à  $\alpha_1$  sur le cercle  $\alpha_1 MM_1$ .

J.

Transformons la figure par une inversion de pôle  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à l'axe réel. On a déjà vu l'effet de cette inversion dans une remarque faite à propos des formes cubiques ayant une racine réelle; l'axe réel devient un cercle passant par  $M'$ , de centre  $m$  inverse de  $M$ ; l'arc  $\alpha_1 MM_1 D$  devient le diamètre  $amm_1 d$  ( $a$  inverse de  $\alpha_1$ ,  $d$  de  $D$ );  $P$  devient  $p$  diamétralement opposé



à  $M'$  et  $P$ , devient  $p_1$  tel que  $M'p_1$  passe par le milieu  $\gamma$  du segment  $md$ . Les trois arcs  $\alpha_1\alpha_2$ ,  $\alpha_2\alpha_3$ ,  $\alpha_3\alpha_1$  deviennent trois arcs  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  orthogonaux au cercle  $(m)$ ; la droite  $M_1P_1$  devient un cercle passant par  $M'm_1p_1$ , orthogonal au cercle  $(m)$ . Les deux cercles  $M'm_1p_1$ , et  $bm_1c$ , étant orthogonaux au cercle  $(m)$ , leur axe radical est  $mm_1$ ; ils ont avec  $(m)$  respectivement  $M'p_1$  et  $bc$  pour axe radical, donc  $M'p_1$  et  $bc$  se coupent sur  $mm_1$ . Donc  $bc$  passe par  $\gamma$  milieu de  $md$ . Le triangle  $abc$  est donc tel que  $m$  est son point de concours des médianes, puisque  $m\gamma = \frac{1}{2}ma$  et de même pour les deux droites  $mb$  et  $mc$ . On en conclut immédiatement que  $bc$  est perpendiculaire au milieu de  $md$  et que  $abc$  est équilatéral; l'arc  $bm_1c$  est orthogonal à  $dma$ , on retombe, en revenant à la figure primitive, sur la définition de  $M$  comme *orthocentre non euclidien* du triangle  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$  et l'on retrouve immédiatement toutes les propriétés de la figure que nous avons tirées au Chapitre précédent de l'inversion de pôle  $M'$ . Comme d'ailleurs à ce moment-là nous avons calculé l'affixe de  $M$  en fonction de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ou des coefficients de  $f$  à l'aide de la définition géométrique de  $M$  sur laquelle nous venons de tomber, on voit que l'on peut trouver la correspondante de  $f$  ayant trois racines réelles à partir simplement de la connaissance de cette correspondante pour une forme cubique n'ayant qu'une racine réelle sans faire de nouveau calcul de minimum. On voit aussi se dessiner un lien entre les deux catégories distinctes de formes cubiques qui présente un certain intérêt : les deux formes cubiques

$$f = (x - \alpha_1 y) (x - \alpha_2 y) (x - \alpha_3 y)$$

de racines réelles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , et

$$f' = (x - \alpha_1 y) (x - \zeta_1 y) (x - \zeta'_1 y),$$

où  $\zeta_1$  est l'affixe de  $M_1$  envisagé précédemment et  $\zeta'_1$  son conjugué, ont même correspondante quadratique  $\varphi$  dont le point représentatif est  $M$ .

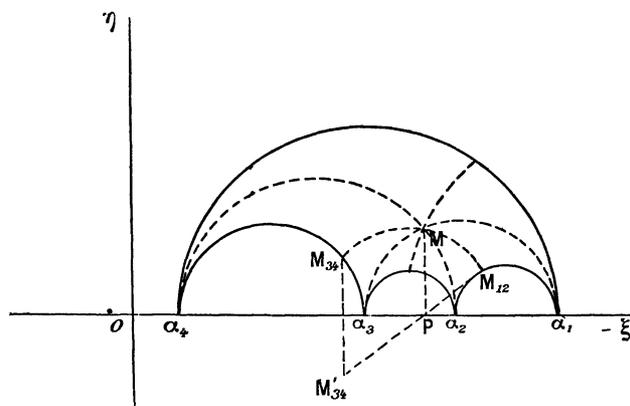
*Troisième application.* — Nous allons en partant des résultats obtenus pour les formes biquadratiques à deux racines réelles obtenir, sans aucun calcul, par l'application du principe précédent, les résultats qui concernent les formes biquadratiques ayant quatre racines réelles, qu'Hermité a étudiées par le calcul.

Soient

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y)(x - \alpha_4 y)$$

la forme envisagée et  $T_1^1, T_2^2, T_3^3, T_4^4$  les masses qu'il faut donner à  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , pour rendre  $\theta$  minimum.

Fig. 27.

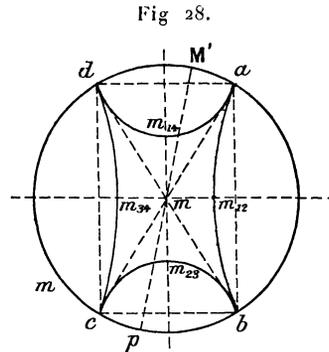


Composant les masses  $T_1^1$  et  $T_2^2$  dont le barycentre non euclidien est  $M_{1,2}$  d'affixe  $\zeta_{1,2}$  sur le demi-cercle  $\alpha_1 \alpha_2$ , on voit que la forme proposée aura même correspondante que la forme biquadratique de racines  $\alpha_3, \alpha_4, \zeta_{1,2}, \zeta'_{1,2}$  conjugué de  $\zeta_{1,2}$ . Donc, si  $M$  représente la correspondante de  $f$ , on conclut, d'après ce qu'on sait des formes biquadratiques ayant deux racines réelles, que l'arc  $M_{1,2}M$  du cercle orthogonal à  $O\xi$  est orthogonal au cercle de diamètre  $\alpha_3 \alpha_1$  et que, de plus,  $M$  est milieu non euclidien du segment non euclidien qui joint les deux points  $M_{1,2}$  et  $M_{3,1}$  ( $M_{3,1}$ , barycentre de  $\alpha_3$  et  $\alpha_1$  affectés des masses  $T_3^3$  et  $T_4^4$ ). La conclusion qui se dégage de ceci est donc que  $M$  est l'intersection :

- 1° Du centre orthogonal à  $O\xi$  et orthogonal aux deux cercles de diamètre  $\alpha_1 \alpha_2$  et  $\alpha_3 \alpha_1$ ;
- 2° Du cercle orthogonal à  $O\xi$  et orthogonal aux deux cercles de diamètre  $\alpha_1 \alpha_4$  et  $\alpha_2 \alpha_3$ .

Si l'on fait une inversion de pôle  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $O\xi$ , le

quadrilatère  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  devient un quadrilatère curviligne de sommets  $a, b, c, d$  inverses de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  dont les côtés sont des arcs de cercles normaux au cercle (de centre  $m$  inverse de  $M$ ) qui est l'inverse de l'axe réel. Les cercles 1° et 2° deviennent des diamètres du cercle ( $m$ ) orthogonaux aux côtés opposés du quadrilatère, d'où il suit que les segments  $ab, cd$  sont parallèles, ainsi



que  $ad$  et  $bc$ ;  $abcd$  est donc un rectangle; donc  $m$  est l'intersection des diamètres  $ac$  et  $bd$ . Donc, en revenant à la figure primitive,  $M$  est l'intersection des diagonales non euclidiennes  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4$  du quadrilatère non euclidien  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ; c'est le résultat auquel nous avons été conduit par l'interprétation du calcul d'Hermite (<sup>1</sup>).

On peut remarquer encore que  $M_{1,3}$  et  $M_{2,4}$  sont confondus avec  $M$ , car  $M$  doit être le milieu non euclidien du segment non euclidien qui les joint et toutes ces propriétés géométriques, auxquelles nous sommes parvenus sans calcul, suffiraient à calculer  $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$  en fonction de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et par suite à déterminer la correspondante de  $f$  en fonction des coefficients de  $f$ .

*Quatrième application.* — Nous allons montrer comment, par une double application de la remarque faite au début, on peut déduire tous les résultats qui concernent les formes biquadratiques ayant quatre racines réelles des résultats particulièrement simples que nous avons trouvés pour les formes biquadratiques n'ayant pas de racines réelles.

En effet, soient  $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$  les valeurs cherchées qui rendent  $\theta$  minimum et qui, affectées comme masses à  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , donnent le barycentre  $M$  non euclidien qui représente la correspondante de  $f$ .

$M_{1,2}$  étant le barycentre de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ,  $\zeta_{1,2}$  son affixe, on a vu que la forme dont les

(<sup>1</sup>) On peut remarquer enfin que les deux diamètres  $m_{14}m_{23}$  et  $m_{34}m_{12}$  bissectent l'angle des diamètres  $ac, bd$ , ce qui fournit une nouvelle propriété de la figure primitive. Enfin on voit bien que  $m$  est milieu ordinaire de  $m_{12}m_{34}$ , et de  $m_{14}m_{23}$ , comme cela devait être.

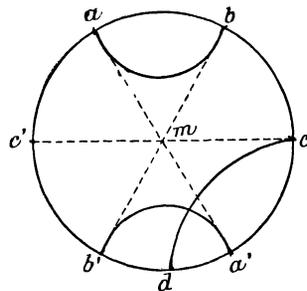
racines sont  $\alpha_3, \alpha_4$  et  $\zeta_{12}, \zeta'_{12}$  a même correspondante que  $f$ . En appliquant une deuxième fois le principe, on voit que si  $M_{34}$  est le barycentre de  $\alpha_3, \alpha_4$  avec les masses  $T_3^2, T_4^2, \zeta_3$ , étant son affixe, la forme dont les racines sont  $\zeta_{12}, \zeta'_{12}; \zeta_{31}, \zeta'_{34}$  a aussi même correspondante que  $f$ . Donc  $M$ , d'après le résultat obtenu pour les formes biquadratiques sans racines réelles (et la dernière forme considérée est de ce type), sera milieu non euclidien du segment  $M_{12}M_{34}$ , non euclidien,  $M$  sera de même milieu non euclidien du segment non euclidien  $M_{11}, M_{23}$ .

Je dis que ceci suffit à trouver  $M$  puisqu'on est sûr de son existence et des propriétés précédentes.

Effectivement si l'on fait une inversion de pôle  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à l'axe réel, le quadrilatère non euclidien  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$  devient un quadrilatère curviligne  $abcd$  dont les quatre côtés sont orthogonaux à la circonférence ( $m$ ) (de centre  $m$  inverse de  $M$ ) inverse de l'axe réel;  $m$  devra être milieu ordinaire du segment ordinaire  $m_{12}m_{34}$  qui joint les inverses de  $M_{12}, M_{34}$ ; il devra être milieu ordinaire du segment ordinaire  $m_{14}m_{23}$  qui joint les inverses de  $M_{11}, M_{23}$ . D'ailleurs on sait par la théorie générale que ni  $T_1$ , ni  $T_2$ , ni  $T_3$ , ni  $T_4$  ne sont nuls; par conséquent aucun des points  $M_{12}M_{14}M_{23}M_{34}$  n'est en un sommet du quadrilatère  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ; donc, aucun des points  $m_{12}m_{14}m_{23}m_{34}$  n'est en un sommet du quadrilatère  $abcd$ .

Figurons alors l'arc  $ab$  orthogonal au cercle  $m$ ;  $m$  partageant en deux parties égales le segment  $m_{12}m_{34}$  qui joint  $m_{12}$  de l'arc  $ab$  entre  $a$  et  $b$  à  $m_{34}$  de l'arc  $cd$  entre  $c$  et  $d$ , il faudra que l'arc  $cd$  coupe à l'intérieur du cercle ( $m$ ) et non sur ce cercle l'arc  $a'b'$  symétrique de  $ab$  par rapport à  $m$ . Ceci exige qu'un des points  $c$  ou  $d$  soit entre  $a'$  et  $b'$  sur l'arc  $a'b'$  du cercle ( $m$ ) qui ne contient pas  $ab$  et l'autre sur l'arc  $a'b'$  de ce cercle qui contient  $ab$ .

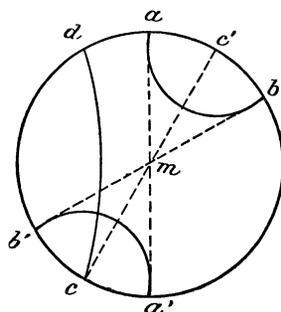
Fig. 29.



Comme d'ailleurs les points  $abcd$  doivent se suivre dans cet ordre sur le cercle ( $m$ ), on a deux figures possibles, qui sont toutes les deux ci-contre. Dans ces deux cas de figure on voit que les deux arcs  $ad$  et  $b'c'$  orthogonaux à ( $m$ ) ne peuvent avoir de point commun intérieur à ( $m$ ), c'est-à-dire que le segment  $m_{11}m_{23}$  dont  $m$  est milieu n'est pas réel. On ne peut donc échapper à la

contradiction qu'en supposant que  $cd$  coïncide avec  $a'b'$ , et alors tout segment passant par  $m$  rencontre les côtés opposés du quadrilatère curviligne  $abcd$  formé des arcs  $ab, bc, cd, da$  orthogonaux à  $(m)$  en deux points dont  $m$  est milieu.  $m_{1,2}m_{3,1}$  est indéterminé, ainsi que  $m_{1,1}m_{3,2}$ ; mais on est sûr que par

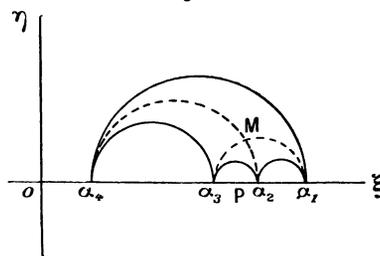
Fig. 30.



l'inversion de pôle  $M'$  les points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  sont devenus les sommets  $a, b, c, d$  d'un rectangle de centre  $m$  inverse de  $M$ , et  $m$  étant l'intersection des diagonales  $ac$  et  $bd$  de ce rectangle, le point  $M$  cherché, qui représente la correspondante de  $f$ , est le point de concours des diagonales non euclidiennes du quadrilatère non euclidien  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ . C'est le résultat essentiel auquel nous avait conduit l'interprétation du calcul d'Hermite.

A titre d'exercice montrons comment on peut aller jusqu'au bout par cette méthode et déterminer les valeurs  $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$  elles-mêmes qui donnent le minimum de  $\theta$ .

Fig. 31.



Si l'on compose  $T_1^2, T_3^2$  en  $M_{1,3}$  de masse  $T_1^2 + T_3^2$  et  $T_2^2, T_4^2$  en  $M_{2,4}$  de masse  $T_2^2 + T_4^2$ ,  $M$  doit être barycentre non euclidien de  $M_{1,3}, M_{2,4}$ ; donc, comme  $M_{1,3}$  est sur le cercle  $\alpha_1\alpha_3$  et  $M_{2,4}$  sur le cercle  $\alpha_2\alpha_4$  qui se coupent en  $M$ , il faut nécessairement que  $M_{1,3}$  et  $M_{2,4}$  soient en  $M$ .

Posons alors

$$\begin{aligned} P\alpha_1 &= p_1 \\ P\alpha_2 &= p_2 \\ P\alpha_3 &= p_3 \\ P\alpha_4 &= p_4 \end{aligned} \quad (p_i > 0),$$

on a

$$p_1 p_3 = p_2 p_4 = \overline{PM}^2 = \eta^2;$$

M étant barycentre de  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  affectés des masses  $T_1^0$ ,  $T_3^0$ , on aura nécessairement

$$T_1^0 = \lambda p_3 \quad \text{et} \quad T_3^0 = \lambda p_1,$$

$\lambda$  étant un facteur de proportionnalité positif.

De même

$$T_2^0 = \mu p_4 \quad \text{et} \quad T_4^0 = \mu p_2.$$

On peut donner à  $T_1^0 T_2^0 T_3^0 T_4^0$  telle valeur qu'on veut. Donnons-lui la valeur  $\eta^2$ ; alors il faudra supposer  $\lambda \mu = 1$ .

Donc

$$\begin{aligned} T_1^2 &= \lambda p_3, & T_3^2 &= \lambda p_1, \\ T_2^2 &= \frac{1}{\lambda} p_4, & T_4^2 &= \frac{1}{\lambda} p_2. \end{aligned}$$

Les valeurs cherchées  $T_1^2, \dots, T_4^2$  sont celles qui rendent  $\eta(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)$  minimum dans les hypothèses où nous nous sommes placés. Elles rendent donc, puisque  $\eta$  est fixe et égal à l'ordonnée de M, la somme

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = \lambda(p_1 + p_3) + \frac{1}{\lambda}(p_2 + p_4) \text{ minimum.}$$

$\lambda$  devra donc être choisi tel que cette somme soit un minimum. Et ceci exige évidemment

$$\lambda(p_1 + p_3) = \frac{1}{\lambda}(p_2 + p_4),$$

ce qui détermine  $\lambda$ , et par suite  $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$ .

On trouve ainsi immédiatement les valeurs qu'Hermite a déduites d'un calcul laborieux, et en particulier on a de suite cette relation

$$T_1^2 + T_3^2 = T_2^2 + T_4^2$$

qui n'est autre que la relation précédente.

Si l'on se rappelle qu'Hermite avait trouvé

$$T_1^2 = \frac{1}{X'(\alpha_1)}, \quad T_2^2 = -\frac{1}{X'(\alpha_2)}, \quad T_3^2 = -\frac{1}{X'(\alpha_3)}, \quad T_4^2 = -\frac{1}{X'(\alpha_4)}$$

avec

$$X(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4),$$

l'identité bien connue

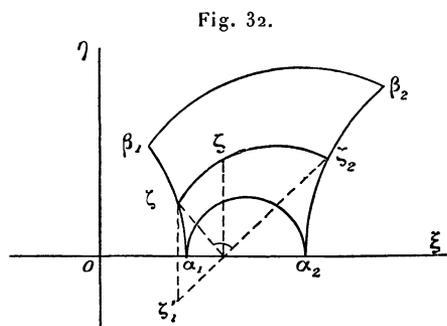
$$\frac{1}{X'(\alpha_1)} + \frac{1}{X'(\alpha_2)} + \frac{1}{X'(\alpha_3)} + \frac{1}{X'(\alpha_4)} = 0$$

n'est autre que la relation trouvée ci-dessus

$$T_1^2 + T_3^2 = T_2^2 + T_4^2.$$

Nous allons montrer, en terminant, comment on peut modifier la remarque utilisée dans les applications 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> pour la faire servir à d'autres applications.

Envisageons le cas des formes  $f$  du sixième degré ayant deux racines réelles  $\alpha_1, \alpha_2$ , et deux couples de racines imaginaires  $\beta_1, \beta_1'$  et  $\beta_2, \beta_2'$ .



Soient  $T_1^2, T_2^2, 2U_1^2, 2U_2^2$  les masses qu'il faut attribuer à  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  pour obtenir la correspondante de  $f$  dont  $M(\zeta)$  est le point représentatif.

Cela veut dire que le minimum de  $\eta[t_1^2 + t_2^2 + 2u_1^2 + 2u_2^2]$  lorsque

$$(1) \quad t_1^2 t_2^2 u_1^2 u_2^2 = T_1^2 T_2^2 U_1^2 U_2^2 = \text{const.}$$

est atteint pour les valeurs  $T_1^2, T_2^2, U_1^2, U_2^2$ .

Donnons à  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  les masses

$$\lambda^2 T_1^2, \quad \mu^2 T_2^2, \quad 2\lambda^2 U_1^2, \quad 2\mu^2 U_2^2.$$

Le barycentre de  $\alpha_1, \beta_1$  est fixe  $\zeta_1$  et sa masse est  $\lambda^2(T_1^2 + 2U_1^2)$ ;

Le barycentre de  $\alpha_2, \beta_2$  est fixe  $\zeta_2$  et sa masse est  $\mu^2(T_2^2 + 2U_2^2)$ .

$\zeta$  barycentre de  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  est le barycentre de  $\zeta_1, \zeta_2$  avec les masses précédentes.

Le minimum de

$$(2) \quad \eta[\lambda^2 T_1^2 + \mu^2 T_2^2 + 2\lambda^2 U_1^2 + 2\mu^2 U_2^2]$$

lorsque  $\lambda, \mu$  sont tels que

$$(3) \quad \lambda^2 T_1^2 \times \mu^2 T_2^2 \times \lambda^4 U_1^4 \times \mu^4 U_2^4 = T_1^2 T_2^2 U_1^4 U_2^4$$

est atteint par  $\lambda^2 = \mu^2 = 1$ .

Or si l'on envisage la forme *biquadratique*  $f_1$  dont les racines sont  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1', \zeta_2'$

avec les masses

$$\lambda^2(T_1^2 + 2U_1^2), \quad \mu^2(T_2^2 + 2U_2^2),$$

son associée est représentée aussi par  $\zeta$ .

Pour trouver la correspondante de  $f_1$  il faut considérer le minimum de

$$(4) \quad \eta[\lambda^2(T_1^2 + 2U_1^2) + \mu^2(T_2^2 + 2U_2^2)]$$

lorsque

$$(5) \quad \lambda^4(T_1^2 + 2U_1^2)^2 \times \mu^4(T_2^2 + 2U_2^2)^2 = \text{const.}$$

Or si (3) est satisfaite par  $\lambda$  et  $\mu$  en variant, (5) le sera aussi, car (3) exprime que  $\lambda\mu$  reste constant et (4) est identique à (2). Donc le minimum de (4) a lieu pour  $\lambda = \mu$ , c'est-à-dire que  $f$  proposée a même correspondante que  $f_1$ . D'après ce qu'on sait sur les formes biquadratiques sans racines réelles, il résulte donc que  $\zeta$  représentant la correspondante de  $f$  est milieu non euclidien du segment  $\zeta_1\zeta_2$  non euclidien qui joint les points  $\zeta_1, \zeta_2$  qu'on a définis plus haut :

$\zeta_1$ , barycentre de  $\alpha_1, \beta_1$  et  $\zeta_2$ , barycentre de  $\alpha_2, \beta_2$  affectés des masses minimantes correspondantes.

On aurait pu composer les masses minimantes affectées à  $\alpha_1$  et  $\beta_2$  en leur barycentre  $\zeta_3$ , et de même celles affectées à  $\alpha_2$  et  $\beta_1$  en leur barycentre  $\zeta_4$ ,  $\zeta$  sera aussi le milieu non euclidien des deux points  $\zeta_3, \zeta_4$ .

Nous n'insisterons pas davantage sur ces remarques qu'on peut varier selon les cas qui sont à traiter, l'idée essentielle étant toujours de fixer les rapports entre certaines des masses variables convenablement choisies parmi celles qui sont affectées aux racines de  $f$ , en donnant à ces rapports les valeurs qu'ils ont pour le minimum cherché, en composant ces masses dont le barycentre est dès lors fixe, et reçoit une masse égale à la somme des masses précédentes, en considérant ensuite la nouvelle forme  $f_1$  dont les racines sont les racines de la forme initiale  $f$  qui ont conservé des masses variables arbitrairement, auxquelles on a joint le barycentre trouvé en dernier lieu (et, bien entendu, son symétrique par rapport à l'axe réel), tout ceci étant fait de telle façon que la condition qui exprime que le produit des masses <sup>(1)</sup> affectées aux racines de  $f$  est constant entraîne que le produit des masses affectées aux racines de  $f_1$  soit constant. Dans ces conditions  $f$  et  $f_1$  auront même correspondante et  $f_1$  étant souvent plus simple que  $f$ , les propriétés qu'on pourra connaître de  $\zeta$ , point représentatif de la correspondante de  $f_1$ , seront des propriétés de la correspondante de  $f$ .

---

(1) Par produit des masses  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, 2u_1^2, \dots, 2u_\nu^2$  on entend ici l'expression  $(tu)^2$ , c'est-à-dire  $t_1^2 t_2^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 \dots u_\nu^2$ .

---

## CHAPITRE IV.

SUR UNE NOUVELLE FAÇON D'ENVISAGER LA MÉTHODE DE RÉDUCTION CONTINUELLE.

---

Reprenons la forme

$$f = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \dots (x - \alpha_\mu y)(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) \dots (x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y)$$

et la forme quadratique associée

$$\begin{aligned} \varphi = & t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - \alpha_2 y)^2 + \dots \\ & + t_\mu^2(x - \alpha_\mu y)^2 + 2u_1^2(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + \dots + 2u_\nu^2(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y). \end{aligned}$$

Considérons la somme

$$t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - \alpha_2 y)^2;$$

c'est une forme quadratique dont le point représentatif est sur le demi-cercle de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2$ , son déterminant est, comme on le voit aisément, égal à

$$t_1^2 t_2^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

On peut donc écrire

$$t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - \alpha_2 y)^2 = t_1 t_2 \varphi_1,$$

$\varphi_1$  désignant une *forme quadratique positive de déterminant fixe*  $(\alpha_1 - \alpha_2)^2$  dont le point représentatif est quelconque sur le cercle de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Le déterminant de  $\varphi_1$  est égal au discriminant de la forme indéfinie  $(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)$ , qui est représentée par le demi-cercle de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Pour simplifier l'exposition, supposons maintenant que  $f$  soit de degré pair avec  $\mu'$  couples <sup>(1)</sup> de racines réelles  $\mu = 2\mu', (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_3, \alpha_4), \dots, (\alpha_{2\mu'-1}, \alpha_{2\mu'})$ , et  $\nu$  couples de racines imaginaires conjuguées  $(\beta_1, \beta'_1), (\beta_2, \beta'_2), \dots, (\beta_\nu, \beta'_\nu)$ . Alors  $f$  pourra s'écrire

$$f = a_0 f_1 f_2 \dots f_\mu f_{\mu+1} \dots f_{\mu'+\nu}$$

en posant

$$f_i = (x - \alpha_{i-1} y)(x - \alpha_i y) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, \mu'$$

et

$$f_{\mu'+k} = (x - \beta_k y)(x - \beta'_k y) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \nu;$$

$f$  se présente aussi sous la forme d'un produit de formes quadratiques binaires

---

<sup>(1)</sup> On peut d'ailleurs accoupler les racines réelles deux à deux comme on voudra.

dont certaines sont définies (les  $f_{\mu'+i}$ ) et certaines sont indéfinies (les  $f_1, f_2, \dots, f_{\mu'}$ ).

Désignons par  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\mu'}$  les discriminants des formes  $f_1, f_2, \dots, f_{\mu'}$ .

On aura

$$\delta_i = (\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i})^2.$$

A chaque forme  $f_i$  nous associons une forme définie  $\varphi_i$  de *déterminant fixe*  $\delta_i$  dont le point représentatif soit quelconque sur la demi-circonférence  $C_i(\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i})$  qui représente  $f_i$ .  $\varphi_i$  dépendra d'un paramètre variable, à savoir celui qui fixe la position de son point représentatif sur  $C_i$ .

Dans ces conditions la forme quadratique qu'Hermité associe à la forme proposée  $f$  s'écrira

$$\varphi = \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2 + \dots + \lambda_{\mu'}^2 \varphi_{\mu'} + 2u_1^2 f_{\mu'+1} + \dots + 2u_{\nu}^2 f_{\mu'+\nu}.$$

Elle dépend des paramètres  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{\mu'}^2, u_1^2, \dots, u_{\nu}^2$ , et aussi des paramètres qui entrent dans  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu'}$ .

(On peut remarquer si l'on veut que  $\lambda_i^2 = t_{2i-1} t_{2i}$ .)

Nous ne revenons pas sur la façon de trouver le domaine que décrit le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque les paramètres qui entrent dans  $\varphi$  prennent toutes les valeurs possibles.

Il faut encore chercher pour quelles valeurs de ces paramètres, la fonction

$$\theta = \frac{(\delta)^{\frac{2\mu'+2\nu}{n}}}{\lambda_1^4 \lambda_2^4 \dots \lambda_{\mu'}^4 u_1^4 \dots u_{\nu}^4} \quad (\delta \text{ déterminant de } \varphi)$$

est minimum (puisque  $\theta = \frac{(\delta)^{\frac{n}{2}}}{(tu)^2}$  devient ici à cause de  $n = 2\mu' + 2\nu$  et de  $\lambda_i^2 = t_{2i-1} t_{2i}$  l'expression précédente).

En définitive, toute forme binaire de degré pair  $2n = 2\mu' + 2\nu$  avec  $\mu'$  couples de racines réelles et  $\nu$  couples de racines imaginaires conjuguées s'écrira

$$f = \alpha_0 f_1 f_2 \dots f_n,$$

les formes  $f_1, f_2, \dots, f_{\mu'}$  étant indéfinies, les formes  $f_{\mu'+1}, \dots, f_n$  étant définies.

On lui associera la forme quadratique

$$\varphi = \lambda_1^2 \varphi_1 + \dots + \lambda_{\mu'}^2 \varphi_{\mu'} + \lambda_{\mu'+1}^2 f_{\mu'+1} + \dots + \lambda_n^2 f_n,$$

$\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  étant des paramètres variables;  $\varphi_1, \dots, \varphi_{\mu'}$  étant les formes quadratiques positives de déterminant fixe  $\delta_1, \dots, \delta_{\mu'}$  qu'on a appris à associer respectivement à  $f_1, f_2, \dots, f_{\mu'}$ .

Enfin on cherchera pour quelles valeurs des paramètres qui entrent dans  $\varphi$  la fonction

$$\theta = \frac{\partial^n}{\lambda_1^4 \lambda_2^4 \dots \lambda_n^4}$$

est minimum absolu

On donnera dans  $\varphi$  à ces paramètres les valeurs minimantes trouvées; on fera alors dans  $f$  la même substitution

$$\begin{cases} x = mX + m_0Y, \\ y = nX + n_0Y \end{cases}$$

que celle qui sert à réduire  $\varphi$  dans ces conditions et la forme

$$F(X, Y) = f(mX + m_0Y, nX + n_0Y)$$

sera la *forme réduite* qui servira à représenter toute la classe équivalente à  $f$ .

Cette interprétation de la méthode d'Hermite pourra ici paraître un peu artificielle; nous la donnons cependant parce qu'elle prépare d'une façon très simple la méthode de réduction que nous donnerons plus loin pour certaines *formes binaires de degré supérieur à indéterminées conjuguées*. De plus nous allons voir que cette façon d'envisager les choses jette un jour nouveau sur les résultats simples que nous avons trouvés pour la réduction des formes binaires cubiques et biquadratiques. Nous nous limiterons ici, pour ne pas allonger et compliquer l'exposition, au cas des formes biquadratiques.

Trois cas sont possibles :

1° Les deux formes  $f_1, f_2$  en lesquelles  $f$  peut être décomposée sont définies,  $f$  a ses racines imaginaires

$$f = a_0 f_1 f_2;$$

2°  $f$  a deux racines réelles, alors  $f_1$  est indéfinie et  $f_2$  définie;

3°  $f$  a quatre racines réelles,  $f_1$  et  $f_2$  sont indéfinies.

PREMIER CAS. — *f n'a pas de racines réelles.* — Nous poserons

$$f_i = x^2 - 2p_i xy + q_i y^2 = (x - \beta_i y)(x - \beta'_i y),$$

$$\delta_i = q_i - p_i^2 = -\frac{1}{4}(\beta_i - \beta'_i)^2.$$

Alors  $f_1$  et  $f_2$  sont définies.

On considère

$$\varphi = \lambda_1^2 f_1 + \lambda_2^2 f_2.$$

Lorsque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  varient, le point représentatif de  $\varphi$  décrit le segment non euclidien qui joint les points représentatifs  $\zeta_1$  de  $f_1$  à  $\zeta_2$  de  $f_2$  ( $\zeta_1$  coïncide avec la racine  $\beta_1$ ,  $\zeta_2$  avec  $\beta_2$ ).

Le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$  est facile à calculer, car

$$\begin{aligned} \varphi &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)x^2 - 2[p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2]xy + (q_1\lambda_1^2 + q_2\lambda_2^2)y^2, \\ \delta &= \lambda_1^4(q_1 - p_1^2) + \lambda_1^2\lambda_2^2(q_1 + q_2 - 2p_1p_2) + \lambda_2^4(q_2 - p_2^2). \end{aligned}$$

Et il faut envisager  $\frac{\partial^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$  ou, ce qui revient au même,  $\frac{\delta}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$  et en chercher le minimum

$$\frac{\delta}{\lambda_1^2\lambda_2^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\delta_2 + q_1 + q_2 - 2p_1p_2$$

dont le minimum est atteint en même temps que celui de

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\delta_2$$

puisque  $q_1 + q_2 - 2p_1p_2$  est constant.

Le minimum de cette expression, somme de deux termes à produit constant, est atteint pour

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\delta_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\delta_2,$$

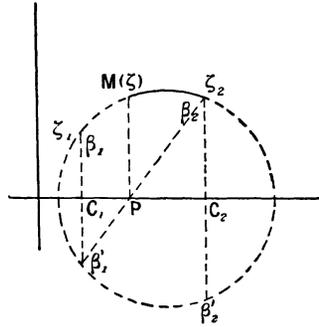
c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\delta_1}}.$$

La correspondante de  $f$  est donc

$$\varphi = f_1\sqrt{\delta_2} + f_2\sqrt{\delta_1}.$$

Fig. 33.



Si l'on remarque que  $\sqrt{\delta_1}$  représente l'ordonnée  $\eta_1$  de  $\zeta_1$  et  $\sqrt{\delta_2}$  l'ordonnée  $\eta_2$  de  $\zeta_2$ , on a

$$\frac{\lambda_1^2}{\eta_2} = \frac{\lambda_2^2}{\eta_1}.$$

Comme d'ailleurs  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  se projette en P sur l'axe réel tel que

$$\frac{\overline{PC_1}}{\overline{PC_2}} = -\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = -\frac{\eta_1}{\eta_2},$$

on conclut que P est l'intersection des diagonales du quadrilatère  $\beta_1 \beta'_1 \beta_2 \beta'_2$ ; donc M( $\zeta$ ) est le milieu non euclidien de  $\zeta_1 \zeta_2$ . C'est le résultat trouvé dans les Chapitres précédents et le calcul fait est, au fond, le même que celui qui a été fait dans les Chapitres précédents.

DEUXIÈME CAS. — *La forme a ses quatre racines réelles.* —  $f = f_1 f_2$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant deux formes indéfinies. Cette décomposition de  $f$  en  $f_1 f_2$  peut être faite de trois manières, selon qu'on prend

$$f_1 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)$$

ou

$$f_1 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_3 y)$$

ou

$$f_1 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_4 y),$$

et pour  $f_2$  les racines restantes.

Dans le premier et le troisième cas (si l'on suppose  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ ), les circonférences respectives de  $f_1$  et  $f_2$  ne se coupent pas; dans le deuxième cas, elles se coupent.

Il faut considérer ici

$$\varphi = \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2,$$

$\varphi_1$  ayant pour déterminant fixe  $\delta_1$  le discriminant de  $f_1$ , et son point représentatif décrivant la circonférence représentative de  $f_1$ ;

$\varphi_2$  ayant pour déterminant fixe  $\delta_2$  le discriminant de  $f_2$ , et son point représentatif décrivant la circonférence représentative de  $f_2$ .

Enfin il faut étudier le lieu du point représentatif de  $\varphi$  (ce qui donne de suite le quadrilatère non euclidien  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ), et le minimum de  $\frac{\delta^2}{\lambda_1^4 \lambda_2^4}$  ou de  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$ .

Mais si l'on pose

$$\varphi_1 = a_1 x^2 - 2 b_1 xy + c_1 y^2, \quad \delta_1 = a_1 c_1 - b_1^2 = \text{const.},$$

$$\varphi_2 = a_2 x^2 - 2 b_2 xy + c_2 y^2, \quad \delta_2 = a_2 c_2 - b_2^2 = \text{const.},$$

on aura

$$\begin{aligned} \delta &= (a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_2^2)(c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2) - (b_1 \lambda_1^2 + b_2 \lambda_2^2)^2 \\ &= \lambda_1^4 (a_1 c_1 - b_1^2) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2) + \lambda_2^4 (a_2 c_2 - b_2^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2 + a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2$$

Dans  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$  les paramètres sont  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  et ceux qui entrent dans  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et qui ne figurent ici que dans l'expression  $a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2$ . Le minimum de  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$  s'obtient donc :

1° En rendant  $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2$  minimum, ce qui donne  $\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\delta_1}}$  comme au calcul précédent, et cela montre d'abord que le point représentatif de la *correspondante de f* sera milieu non euclidien des points représentatifs  $\zeta_1, \zeta_2$  des deux formes  $\varphi_1, \varphi_2$  lorsque les paramètres de ces formes recevront les valeurs qui rendent  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$  minimum. (C'est un résultat que nous avons déjà trouvé dans les Chapitres précédents.)

2° En donnant au paramètre de  $\varphi_1$  et à celui de  $\varphi_2$  les valeurs qui rendent

$$d = a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2 \text{ minimum.}$$

Il faut donc étudier cette expression et voir pour quelle position des points représentatifs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sur leurs lieux respectifs elle est minimum.

Si l'on passe pour un instant à la représentation projective des formes, on voit que  $\varphi_1$  est représentée par le point  $M_1$  de coordonnées  $a_1, b_1, c_1$ ;  $\varphi_2$  par le point  $M_2$  de coordonnées  $a_2, b_2, c_2$ .

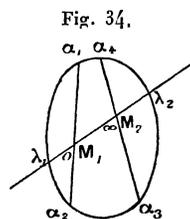
Et, par exemple,  $M_1$  décrit le segment  $\alpha_1 \alpha_2$  joignant les points  $\alpha_1, \alpha_2$  de la conique fondamentale;  $M_2$  décrit le segment  $\alpha_3 \alpha_4$  joignant les points  $\alpha_3, \alpha_4$  de la conique fondamentale.

Un point de la droite  $M_1 M_2$  a des coordonnées homogènes

$$\begin{aligned} a_1 + \lambda a_2, \\ b_1 + \lambda b_2, \\ c_1 + \lambda c_2; \end{aligned}$$

il vient sur la conique lorsque  $\lambda$  a l'une des deux valeurs  $\lambda_1, \lambda_2$  racines de

$$(a_1 + \lambda a_2)(c_1 + \lambda c_2) - (b_1 + \lambda b_2)^2 = 0$$



ou

$$\lambda^2 \delta_2 + \lambda [a_1 c_1 + a_2 c_2 - 2 b_1 b_2] + \delta_1 = 0.$$

Cette équation a deux racines *réelles et distinctes* puisque  $M_1$  et  $M_2$  sont intérieurs; donc  $d^2 - 4 \delta_1 \delta_2 > 0$ .

Le rapport anharmonique des points  $M_1, M_2$  et des points où leur droite coupe la conique est  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4 \delta_1 \delta_2}}{d - \sqrt{d^2 - 4 \delta_1 \delta_2}} = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4 \delta_1 \delta_2})^2}{4 \delta_1 \delta_2}.$$

On voit donc que la *distance non euclidienne* de  $M_1 M_2$ , qui n'est autre que  $\left| \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|$ , aura son minimum,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  étant constants ( $M_1$  et  $M_2$  décrivant leurs lieux) lorsque  $d + \sqrt{d^2 - 4\delta_1\delta_2}$  sera minimum, et réciproquement. Or il suffit d'écrire

$$\frac{d}{a_1 a_2} = \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2b_1 b_2}{a_1 a_2} = \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} + \left( \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right)^2$$

pour voir ( $a_1$  et  $a_2$  pouvant être supposés positifs) que

$$d > 0;$$

d'ailleurs on sait que  $d^2 - 4\delta_1\delta_2 > 0$ .

Donc

$$d > 2\sqrt{\delta_1\delta_2}.$$

Or dans ces conditions, lorsque  $d > 2\sqrt{\delta_1\delta_2}$ , on voit que  $d + \sqrt{d^2 - 4\delta_1\delta_2}$  est une fonction croissante de  $d$ ; son minimum a donc lieu en même temps que celui de  $d$  et réciproquement.

CONCLUSION. —  $d = a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2b_1 b_2$  sera minimum dans les hypothèses envisagées, lorsque la distance non euclidienne des deux points  $M_1 M_2$  qui représentent  $\varphi_1, \varphi_2$  sera minimum.

$M_1$  et  $M_2$  décrivant deux droites non euclidiennes  $D_1, D_2$ , deux cas sont possibles :

1° Les droites sont sécantes, le minimum sera atteint lorsque  $M_1, M_2$  sont tous deux au point d'intersection des deux droites;

2° Les droites sont non sécantes, alors on démontre bien aisément que la distance est minimum lorsque  $M_1$  et  $M_2$  sont aux pieds de la perpendiculaire commune non euclidienne aux deux droites  $D_1$  et  $D_2$ .

D'ailleurs le 1° nous suffit. Adoptons la deuxième des trois décompositions de  $f$  possibles

$$f_1 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_3 y), \quad f_2 = (x - \alpha_2 y)(x - \alpha_4 y).$$

Alors  $D_1$  sera la droite  $\alpha_1 \alpha_3$ , et  $D_2$  la droite  $\alpha_2 \alpha_4$  qui se coupent en un point intérieur à la conique.

Revenons à la première représentation des formes, on voit que le minimum à réaliser sera atteint lorsque les points représentatifs de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$  ainsi que celui de  $\varphi$  correspondante de  $f$  seront confondus au point de concours  $M$  des diagonales non euclidiennes du quadrilatère non euclidien  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ .

Ces résultats suffisent pour déterminer complètement la correspondante de  $f$ .

En effet  $\varphi_1$  est déterminée par la connaissance de son point représentatif  $M$  et de son déterminant  $\delta_1 = (\alpha_1 - \alpha_3)^2$ ,  $\varphi_2$  est de même déterminée.

On a ensuite

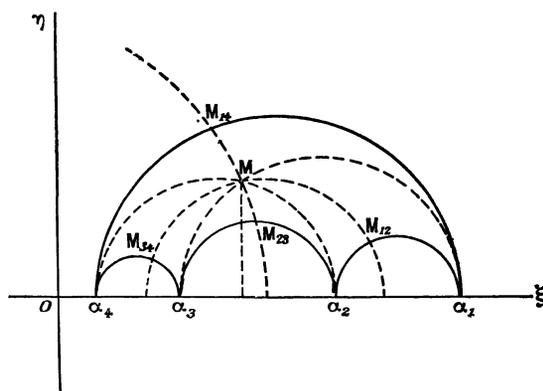
$$\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\delta_1}}.$$

Donc la correspondante de  $f$  est parfaitement déterminée.

*Remarque.* — Si l'on avait adopté la première ou la troisième des trois décompositions, par exemple la première, on aurait trouvé, en appliquant la deuxième des conclusions trouvées ci-dessus, que  $M_1$  représentatif de  $\varphi_1$  et  $M_2$  de  $\varphi_2$  auraient dû être pour le minimum situés aux points  $M_{1,2}$  et  $M_{3,4}$ , où le demi-cercle orthogonal à  $O\xi$  (droite non euclidienne) et aux deux demi-cercles de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  coupe ces deux derniers cercles.  $M$ , représentant la correspondante, aurait d'ailleurs été le milieu non euclidien de  $M_{1,2} M_{3,4}$ .

C'est là le résultat trouvé dans les Chapitres précédents.

Fig. 35.



L'avantage de cette nouvelle méthode est de jeter un jour nouveau sur les propriétés du point représentatif de la correspondante, en liant très simplement le minimum de la fonction  $\theta$  à étudier au minimum de la distance de deux points en géométrie non euclidienne.

TROISIÈME CAS. —  $f$  a deux racines réelles. — Alors  $f = a_0 f_1 f_2$  avec

$$f_1 = (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y),$$

$$f_2 = (x - \beta y)(x - \beta' y).$$

On considère

$$\varphi = \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2;$$

$\varphi_1$ , de déterminant  $\delta_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2$  fixe, a son point représentatif sur le demi-cercle de diamètre  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Ensuite on considère  $\frac{\delta^2}{\lambda_1^4 \lambda_2^4}$  ou  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$ ,

$$\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2 + a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2,$$

car le calcul du deuxième cas est encore valable en posant

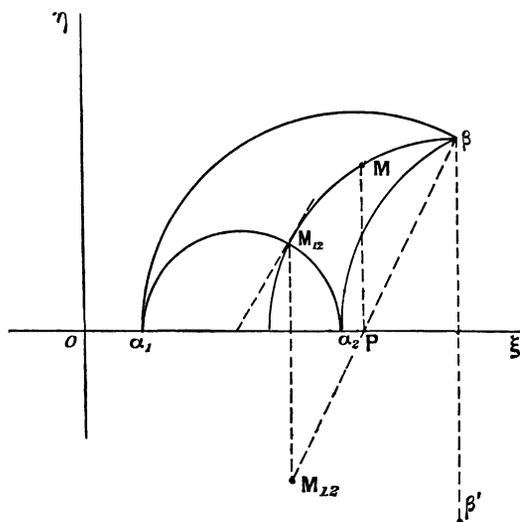
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 x^2 - 2 b_1 x y + c_1 y^2 & (a_1 c_1 - b_1^2 = \delta_1 \text{ fixe}), \\ f_2 &= a_2 x^2 - 2 b_2 x y - c_2 y^2 & (\text{ici } a_2, b_2, c_2 \text{ sont fixes}). \end{aligned}$$

Le minimum s'obtiendra lorsque les deux conditions suivantes seront réalisées à la fois :

1° Pour  $\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\delta_1}}$  et les conclusions du deuxième cas sont vraies : si  $M_{1,2}$  représente  $\varphi_1$ , pour la valeur du paramètre de  $\varphi_1$ , qui correspond au minimum cherché,  $M$ , représentant la correspondante de  $f$ , sera milieu non euclidien des deux points  $M_{1,2}$  et  $\beta$ .

2° Pour le minimum de  $a_1 c_2 + a_2 c_1 - 2 b_1 b_2$ ; en raisonnant comme pour le deuxième cas, on remarquera que le minimum s'obtient en même temps que celui de la distance non euclidienne du point fixe  $\beta$  au point  $M_{1,2}$  représentatif

Fig. 36.



de  $\varphi_1$ , sur la droite non euclidienne  $\alpha_1 \alpha_2$ . Et il est très facile de voir que cette dernière distance est minimum lorsque  $M_{1,2}$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur la droite  $\alpha_1 \alpha_2$  en géométrie non euclidienne, c'est-à-dire lorsque le cercle orthogonal à  $O\xi$  passant par  $\beta$  et  $M_{1,2}$  est orthogonal au cercle de diamètre  $\alpha_1 \alpha_2$ .

Nous retrouvons donc très rapidement tous les résultats trouvés aux Chapitres précédents et nous en saisissons mieux la raison à l'aide de l'introduction des distances non euclidiennes qu'il s'agit de rendre minima.

*Remarque.* — Rien ne serait plus aisé que de trouver aussi les propriétés de la correspondante d'une forme cubique à l'aide de la méthode précédente, convenablement modifiée, nous n'insisterons pas pour ne pas trop allonger l'exposition des résultats qui concernent les formes binaires à coefficients et indéterminées réelles.





---

## DEUXIÈME PARTIE.

LES FORMES BINAIRES A COEFFICIENTS ET INDÉTERMINÉES COMPLEXES.

---

### CHAPITRE I.

---

#### PRÉLIMINAIRES.

Hermite est le premier qui ait considéré les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées du type

$$f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0 \quad (\text{voir } \textit{Œuvres}, \text{ t, I, p. 234 et suiv.}),$$

$a$  et  $c$  sont des constantes réelles,  $b$  et  $b_0$  des constantes imaginaires conjuguées; ces constantes ne sont nullement supposées entières.  $x$  et  $y$  reçoivent des valeurs entières complexes (du type  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux entiers réels),  $x_0$  et  $y_0$  reçoivent les valeurs complexes conjuguées.

L'invariant  $\delta = ac - bb_0$  réel joue un rôle important :

Si  $ac - bb_0 > 0$ , la forme est dite *définie*; comme on peut supposer  $a$  et  $c$  positifs, elle ne prend que des valeurs positives, pour toutes valeurs de  $x$  et de  $y$ .

Si  $ac - bb_0 < 0$ , la forme est dite *indéfinie*; on peut par des valeurs convenables de  $x$  et de  $y$  lui faire acquérir tel signe qu'on voudra.

Si  $ac - bb_0 = 0$ , la forme se décompose en un produit de deux formes linéaires conjuguées du type

$$(\lambda x + \mu y)(\lambda_0 x_0 + \mu_0 y_0)$$

et de telles formes n'ayant pas le caractère proprement quadratique seront passées sous silence dans la suite.

*Représentation géométrique.* — Si l'on égale à zéro la forme quadratique définie

$$f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0 = 0,$$

en envisageant l'équation

$$azz_0 - bz - b_0z_0 + c = 0,$$

qui s'obtient en considérant  $\frac{f(x, y)}{yy_0}$  et posant

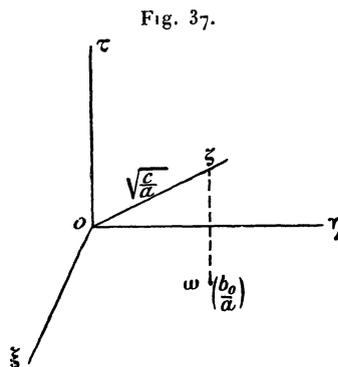
$$z = \frac{x}{y}, \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0},$$

on peut encore l'écrire, puisque nécessairement  $a \neq 0$ ,

$$a \left[ z - \frac{b_0}{a} \right] \left[ z_0 - \frac{b_0}{a} \right] + \frac{\delta}{a} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Re \left( z - \frac{b_0}{a} \right) + \frac{\delta}{a^2} = 0.$$

Le lieu des points  $z$  du plan de la variable complexe définis par cette équation est une circonférence imaginaire dont le centre réel  $\omega$  a pour affixe  $\frac{b_0}{a}$  et dont le rayon est  $\frac{i\sqrt{\delta}}{a}$ .

Si alors on élève au-dessus du plan de la variable complexe par le point  $\frac{b_0}{a}$  une perpendiculaire sur laquelle on porte un segment  $\overline{\omega\zeta}$  égal à  $\frac{\sqrt{\delta}}{a}$ , le point  $\zeta$  obtenu est centre d'une sphère de rayon nul dont l'intersection avec le plan  $\xi O \eta$  est le cercle précédent.



On convient de représenter par ce point  $\zeta$  la forme définie proposée. Ainsi à tout point  $\zeta$  du demi-espace ( $\tau > 0$ ) situé au-dessus du plan  $\xi O \eta$  de la variable complexe correspond une forme quadratique définie à indéterminées conjuguées, et inversement.

Ce point  $\zeta$  est défini :

1° Par sa projection sur le plan  $O \xi \eta$  dont l'affixe est  $\frac{b_0}{a}$ ;

2° Par sa cote  $\frac{\sqrt{\delta}}{a}$ .

On peut remarquer que le segment  $O\zeta$  est égal à  $\sqrt{\frac{c}{a}}$  comme le montre un calcul immédiat et remplacer la propriété 2° par la propriété :

3° La distance  $O\zeta$  est égale à  $\sqrt{\frac{c}{a}}$ .

1° et 3° définissent le point connaissant la forme et définissent, à un facteur près, la forme connaissant le point (si de plus on connaît la valeur du déterminant, le facteur lui-même se trouve déterminé).

Si la forme  $f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0y_0$  est indéfinie, l'équation

$$az_0 - bz - b_0z_0 + c = 0$$

définit un cercle réel de centre  $\frac{b_0}{a}$  de rayon  $\sqrt{\frac{-\delta}{a}}$  si  $a \neq 0$ , car l'équation s'écrit encore

$$\Re\left(z - \frac{b_0}{a}\right) = \frac{\sqrt{-\delta}}{a}.$$

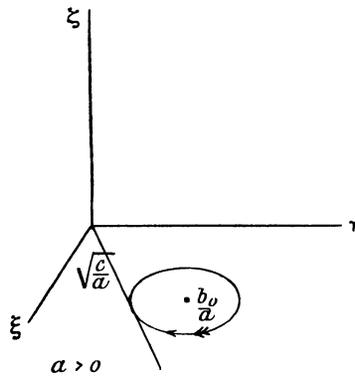
Si  $a = 0$  l'équation  $bz + b_0z_0 - c = 0$  représente une droite dont l'équation cartésienne serait

$$(b + b_0)\xi + i(b - b_0)\eta - c = 0,$$

en posant  $z = \xi + i\eta$ .

On peut encore la considérer comme un cercle de rayon infini pour faire rentrer ce cas dans le précédent.

Fig. 38.



On convient alors de représenter la forme indéfinie par la demi-sphère située au-dessus du plan  $O\xi\eta$  ( $\tau > 0$ ), qui a pour grand cercle le cercle précédent. Si  $a = 0$  la demi-sphère devient un demi-plan orthogonal au plan  $O\xi\eta$ .

A toute forme indéfinie correspond ainsi une demi-sphère dont le centre est  $\frac{b_0}{a}$  dont le rayon est  $\frac{\sqrt{-\delta}}{a}$ , par rapport à laquelle l'origine a une puissance égale à  $\frac{c}{a}$ . Le centre  $\frac{b_0}{a}$  et la puissance de l'origine  $\frac{c}{a}$  définissent complètement cette demi-sphère. Inversement à toute demi-sphère du type précédent correspond, à un facteur près, une forme indéfinie que les deux propriétés précédentes définissent complètement (la connaissance de  $\delta$  fixe d'ailleurs ce facteur).

Dans certaines recherches on a besoin de distinguer une forme indéfinie

$$\begin{aligned} & axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0y_0 \\ \text{de la forme} & \\ & - axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y - cy_0y_0. \end{aligned}$$

On le fait en fixant un sens de parcours sur la circonférence que définit la forme dans le plan des  $O\xi\eta$ . Voici comment : si  $z$  est intérieur à cette circonférence, l'expression

$$azz_0 - bz - b_0z_0 + c$$

a un signe déterminé, et le signe opposé si  $z$  est hors de la circonférence; la circonférence divise donc le plan en une région positive (où ce signe est  $+$ ) et une région négative; on fixera alors sur la circonférence par une flèche un sens de parcours tel que *la région positive soit à gauche de l'observateur debout sur le plan et regardant dans le sens de la flèche*. Dans ces conditions, à deux formes opposées correspondent deux flèches opposées sur la même circonférence.

C'est en interprétant la méthode de réduction des formes indéfinies donnée par M. Picard en 1884 (*Annales de l'École Normale*) que M. Bianchi a été conduit à la représentation géométrique précédente des formes indéfinies.

*Équivalence.* — Deux formes

$$\begin{aligned} & f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0y_0 \\ \text{et} & \\ & F(X, Y) = AXX_0 - BXY_0 - B_0X_0Y + CYY_0 \end{aligned}$$

sont dites *proprement équivalentes* si  $F(x, y)$  s'obtient en remplaçant dans  $f(x, y)$ ,  $x, y, x_0, y_0$  par les expressions

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, & x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0, \\ y = \gamma X + \delta Y, & y_0 = \gamma_0 X_0 + \delta_0 Y_0, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant quatre entiers complexes tels que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ;  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  sont les entiers conjugués; nous écrivons pour abrégier

$$F(X, Y) = f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y).$$

(S) est dite une substitution modulaire complexe. Elle fait correspondre à tout couple d'entiers  $X, Y$  un couple d'entiers  $x, y$  et réciproquement. Un calcul aisé montre que

$$AC - BB_0 = ac - bb_0.$$

d'où le nom d'*invariant* donné à la quantité  $\delta = ac - bb_0$ . Si  $f$  est définie,  $F$  le sera aussi; si  $f$  est indéfinie,  $F$  le sera aussi.

Si l'on pose  $z = \frac{x}{y}$ ,  $Z = \frac{X}{Y}$ , la substitution (S) relie  $z$  à  $Z$  par la relation

$$(T) \quad z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

c'est une transformation (T) qui échange entre eux les points du plan  $\xi O \eta$ . Elle transforme, comme il est aisé de le voir, le cercle représentatif d'une forme indéfinie  $f$ , dans le cercle représentatif de la forme équivalente  $F$ , avec conservation des sens.

Il est aisé d'étendre cette transformation (T) à tout le demi-espace situé au-dessus du plan  $O\xi\eta$  ( $\tau > 0$ ) en convenant qu'elle fera correspondre point par point ce demi-espace à lui-même de façon qu'à toute demi-sphère orthogonale au plan  $O\xi\eta$  corresponde une demi-sphère orthogonale à ce plan. Dès lors les demi-sphères représentatives de  $f$  et  $F$  se correspondront par T avec conservation des sens.

De plus considérons les points représentatifs  $\zeta$  et  $Z$  de deux formes définies  $f$  et  $F$  équivalentes, ils seront transformés l'un dans l'autre par la transformation T. On s'en rendra compte immédiatement à l'aide des deux remarques suivantes :

1° Le cercle imaginaire du plan  $O\xi\eta$  dont l'équation est

$$f(z, 1) = azz_0 - bz - b_0z_0 + c = 0$$

se transforme dans le cercle imaginaire

$$F(Z, 1) = AZZ_0 - BZ - B_0Z_0 + C = 0$$

par T.

2° Toute demi sphère orthogonale au plan  $O\xi\eta$  passant par  $\zeta$  coupe le plan  $O\xi\eta$  suivant un cercle orthogonal au cercle

$$azz_0 - bz - b_0z_0 + c = 0;$$

la transformation  $z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$  étant conforme, ce cercle  $\gamma$  par la transformation devient un cercle  $\Gamma$  orthogonal au cercle

$$AZZ_0 - BZ - B_0Z_0 + C = 0,$$

c'est-à-dire que la demi-sphère  $\sigma$  devient une demi-sphère  $\Sigma$  passant par  $Z$ .

La transformation (T) transforme donc l'être géométrique (point ou sphère) qui représente une forme  $f$ , en l'être géométrique de même nature qui représente la forme équivalente  $F$ .

Pour abréger nous écrirons

$$F = fS,$$

$$Z = \zeta T,$$

ou

$$\Sigma = \sigma T,$$

J.

**T** étant la transformation du demi-espace définie à partir de

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

qui est associée à la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y. \end{cases}$$

*Réduction des formes définies.* — Reprenons la forme définie

$$(1) \quad f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cy_0 \quad (ac - bb_0 > 0).$$

On sait depuis Hermite qu'il existe une substitution modulaire **S** telle que

$$(2) \quad F(X, Y) = fS = AXX_0 - BXY_0 - B_0X_0Y + CYY_0$$

ait des coefficients vérifiant les inégalités

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{A}{2} \leq \text{partie réelle de } B_0 \leq \frac{A}{2}, \\ 0 \leq \text{partie imaginaire de } B_0 \leq \frac{A}{2}, \\ A \leq C. \end{cases}$$

Si l'on pose  $B_0 = m + ni$ , cela veut dire

$$\begin{aligned} |m| &\leq \frac{A}{2}, \\ 0 &\leq n \leq \frac{A}{2}, \\ A &\leq C. \end{aligned}$$

*F est dite une réduite équivalente à f.*

Toutes les fois que les inégalités (3) sont de vraies inégalités, *il n'y a qu'une seule réduite*, si certaines des inégalités (3) deviennent des égalités il y a *deux réduites* et l'on passe de l'une à l'autre en changeant  $B$  en  $-B_0$ ; ce qu'on exprime brièvement en disant que les deux réduites ne diffèrent que par le signe du coefficient moyen.

Considérons le point représentatif **Z** d'une réduite, il est défini par sa projection  $\omega$  sur le plan  $\xi\eta$  dont l'affixe est

$$\frac{B_0}{A} = \frac{m + ni}{A}$$

et par sa distance à l'origine

$$OZ = \sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Envisageons le pentaèdre  $\Pi_0$  limité par :

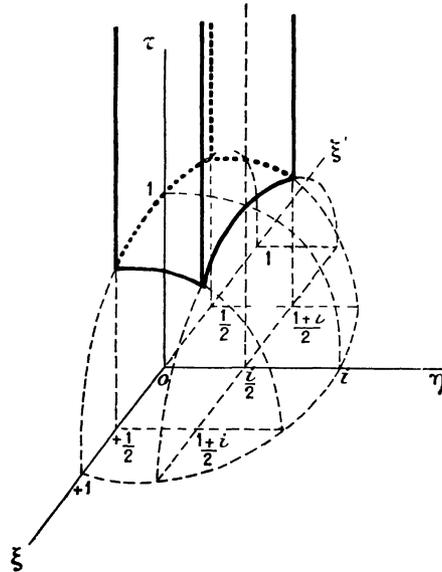
- 1° Les deux plans  $\xi = -\frac{1}{2}$ ,  $\xi = +\frac{1}{2}$ ;
- 2° Les deux plans  $\eta = 0$ ,  $\eta = \frac{1}{2}$ ;
- 3° La sphère  $\xi^2 + \eta^2 + \tau^2 = 1$ ,

autrement dit l'ensemble des points tels que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &\leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq \eta \leq \frac{1}{2}, \\ \xi^2 + \eta^2 + \tau^2 &\geq 1; \end{aligned}$$

il est clair que le point Z sera à l'intérieur ou sur la surface du pentaèdre  $\Pi_0$ .

Fig. 39.



$\Pi_0$  s'appelle le *domaine de réduction*. Toute forme définie dont le point représentatif est à l'intérieur ou sur la surface de  $\Pi_0$  est dite *réduite*.

On démontre dans la théorie de la réduction que :

- 1° Deux réduites dont l'une au moins a son point représentatif intérieur à  $\Pi_0$  ne sont équivalentes entre elles que si elles sont *identiques*;
- 2° De toutes les formes équivalentes à une forme donnée définie (formes d'une même classe) il y en a en général une seule dont le point représentatif appartient à  $\Pi_0$  : c'est ce qui arrive si ce point représentatif tombe à l'inté-

rieur de  $\Pi_0$ ; il y en a deux dans certains cas exceptionnels, et ils sont alors situés sur la surface de  $\Pi_0$  et symétriques par rapport au plan  $O\eta\tau$ .

C'est à M. Picard que l'on doit l'interprétation géométrique précédente de la réduction des formes positives et l'introduction du domaine  $\Pi_0$  de réduction (voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII, 1884 : *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan*).

*Le groupe de Picard.* — C'est le groupe des substitutions modulaires complexes

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, & x_0 = \alpha_0 X_0 + \beta_0 Y_0 \\ y = \gamma X + \delta Y, & y_0 = \gamma_0 X_0 + \delta_0 Y_0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers complexes, } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \\ \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \text{ entiers conjugués} \end{array} \right)$$

ou

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta};$$

deux points du demi-espace  $\zeta$  et  $Z$  qui se correspondent par une transformation (T) associée à une substitution S

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

sont dit *congruents* ou *équivalents* dans le groupe de Picard.

On démontre aisément que  $\Pi_0$  est un *domaine fondamental pour le groupe de Picard*, c'est-à-dire que :

1° Si l'on forme tous les congruents d'un point  $\zeta$  par les transformations T du groupe de Picard, *il en tombe toujours un à l'intérieur de  $\Pi_0$  ou sur sa surface*;

2° Deux points dont l'un est *intérieur* à  $\Pi_0$  et l'autre *intérieur* à  $\Pi_0$  ou *sur sa surface* ne peuvent être congruents que s'ils sont confondus;

3° Dans  $\Pi_0$  ou sur sa surface ne peuvent tomber plus de deux congruents d'un point  $\zeta$ ; il n'en tombe qu'un en général, et il est intérieur à  $\Pi_0$ . S'il en tombe deux, ils sont nécessairement tous deux sur la surface de  $\Pi_0$  et symétriques par rapport au plan  $O\eta\tau$ .

On démontre aussi que les substitutions fondamentales du groupe de Picard sont :

$$\begin{aligned} z = Z - 1, & \quad z = \frac{iZ}{-i} \text{ qui vient de } \begin{cases} x = iX, \\ y = -iY, \end{cases} \\ z = -\frac{1}{Z}, & \quad z = Z - i. \end{aligned}$$

*La division de Picard dans le demi-espace.* — Lorsque le point  $Z$  décrit le pentaèdre  $\Pi_0$ , son congruent  $\zeta$  par une transformation (T) du groupe de Picard correspondant à la substitution (S)  $\left(z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}\right)$  décrit un pentaèdre  $\Pi$  dont les faces sont des portions des sphères orthogonales au plan  $O\xi\eta$  (les plans normaux à  $O\xi\eta$  sont à comprendre parmi ces sphères) Si la transformation (T) change,  $\Pi$  change, et par toutes les transformations (T) du groupe de Picard,  $\Pi_0$  se change en une infinité de pentaèdres qui, suivant le processus indiqué par Poincaré dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, occupent tout le demi-espace  $\tau > 0$ .

L'opération de la réduction d'une forme définie  $f$  se présente donc ainsi :

Le point représentatif  $\zeta$  de la forme  $f$  tombant dans un des pentaèdres  $\Pi$  de la division de Picard, si S est la substitution

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

telle que la transformation (T) qui lui est associée à l'aide de  $z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$  transforme le pentaèdre  $\Pi$  dans le pentaèdre  $\Pi_0$  [ $\Pi_0 = \Pi T$ ], la réduite équivalente à  $f$  sera  $F = f.S$ .

*Représentation projective.* — Faisons une projection stéréographique du plan  $O\xi\eta$  sur la sphère ( $\Sigma$ ),

$$\xi' + \eta' + \tau' = 1$$

à partir du point  $\xi = 0, \eta = 0, \tau = 1$  pour point de vue.

C'est un résultat bien connu d'ailleurs que, par les formules

$$\xi = \frac{X}{1-Z}, \quad \eta = \frac{Y}{1-Z}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \tau^2 = \frac{1+Z}{1-Z} \quad (\tau > 0),$$

un point  $X, Y, Z$  intérieur à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

devient un point  $\xi, \eta, \tau$  du demi-espace  $\tau > 0$  situé au-dessus du plan  $O\xi\eta$ , et qu'un point de cette sphère correspond par projection stéréographique à un point  $\xi\eta$  de ce plan, du point  $(0, 0, 1)$  comme point de vue.

Si le point  $X, Y, Z$  décrit un plan,  $\xi, \eta, \tau$  décrit une demi-sphère orthogonale à  $\tau = 0$  et réciproquement <sup>(1)</sup>. Si  $X, Y, Z$  décrit une droite,  $\xi, \eta, \tau$  décrit une demi-circonférence <sup>(2)</sup> orthogonale à  $\tau = 0$ . Enfin la transformation précédente

<sup>(1)</sup> Qui peut être un plan orthogonal au plan  $O\xi\eta$ .

<sup>(2)</sup> Qui peut être une demi-droite perpendiculaire au plan  $O\xi\eta$ .

change les angles définis en géométrie non euclidienne par rapport à  $\Sigma$  comme quadrique fondamentale en les angles vrais du demi-espace  $\tau > 0$ . Ce sont là des résultats connus qu'il suffit de rappeler.

Ceci posé, considérons une forme d'Hermite définie

$$f(x, y) = axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cyy_0.$$

L'équation

$$f(z, 1) = azz_0 - bz - b_0z_0 + c = 0$$

défini dans le plan  $O\xi\eta$  un cercle  $\gamma$  imaginaire à centre réel, à rayon purement imaginaire. Par la projection stéréographique, ce cercle devient sur  $\Sigma$  un cercle imaginaire  $\Gamma$  intersection de  $\Sigma$  avec un plan réel qui ne coupe pas  $\Sigma$ . Que devient par la transformation du demi-espace  $\tau > 0$  en l'intérieur de  $\Sigma$  le point  $\zeta$  représentatif de  $f$ ? Il suffit de remarquer que toute sphère passant par  $\zeta$  et orthogonale au plan  $O\xi\eta$  coupe ce plan suivant un cercle orthogonal au cercle  $\gamma$ . Donc, dans l'espace de la sphère  $\Sigma$ , à  $\zeta$  correspondra un point  $M$  et tous les plans passant par  $M$  couperont la sphère  $\Sigma$  suivant des cercles orthogonaux à  $\Gamma$ . D'où il suit que  $M$  est le pôle du plan réel qui contient  $\Gamma$ .

A une forme définie correspond donc un point intérieur à la sphère  $\Sigma$ , et réciproquement à un point  $M$  intérieur à  $\Sigma$  correspondra un point  $\zeta$  du demi-espace, et par suite une forme définie (à un facteur constant près que détermine d'ailleurs la connaissance du déterminant de la forme). Les formules qui relient les coordonnées de  $M$  à la forme sont

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X + iY}{1 - Z} = \frac{b_0}{a} \\ \frac{1 + Z}{1 - Z} = \frac{c}{a} \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{1 - Z} = \frac{\Re(b_0)}{a} = \frac{b_1}{a}, \quad \frac{Y}{1 - Z} = \frac{\Im(b_0)}{a} = -\frac{b_2}{a}, \\ \frac{1 + Z}{1 - Z} = \frac{c}{a}, \end{array} \right.$$

en posant

$$b = b_1 + ib_2.$$

En adoptant le système de coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$  définies par

$$\frac{x_1}{1 - Z} = \frac{x_2}{X - iY} = \frac{x_3}{X + iY} = \frac{x_4}{1 + Z},$$

on voit que la sphère  $\Sigma$  aurait pour équation

$$x_1x_4 - x_2x_3 = 0$$

(l'intérieur de  $\Sigma$  correspond d'ailleurs à  $x_1x_4 - x_2x_3 > 0$ ) et que le point représentatif de la forme définie

$$axx_0 - bxy_0 - b_0x_0y + cyy_0$$

aurait pour coordonnées  $a, b, b_0, c$ . Sous cette forme on voit bien qu'à une forme définie  $ac - bb_0 > 0$  correspond un point intérieur à la sphère  $\Sigma$ .

Si la forme est indéfinie, le point  $a, b, b_0, c$  est extérieur à la sphère, mais son plan polaire coupe la sphère  $\Sigma$  et, sans qu'il soit nécessaire d'insister beaucoup, on voit que l'équation de ce plan polaire étant

$$cx_1 - b_0x_2 - bx_3 + ax_4 = 0,$$

le cercle de section de ce plan avec la sphère sera déterminé en coordonnées cartésiennes par

$$c - b_0 \frac{X - iY}{1 - Z} - b \frac{X + iY}{1 - Z} + a \frac{1 + Z}{1 - Z} = 0$$

et sera la projection stéréographique du cercle

$$azz_0 - bz - b_0z_0 + c = 0$$

du plan  $O\xi\eta$ , qui représente dans ce plan la forme indéfinie.

Donc à une forme indéfinie correspondra un plan sécant à la sphère  $\Sigma$  et réciproquement. On n'envisagera d'ailleurs que les points de ce plan intérieurs à  $\Sigma$ . Par la transformation de l'intérieur de  $\Sigma$  dans le demi-espace  $\tau > 0$ , ce plan devient la demi-sphère orthogonale au plan  $\tau = 0$  que nous avons déjà appris à associer à la forme indéfinie dans le premier mode de représentation des formes.

Notons en passant qu'aux points de  $\Sigma$ , comme aux points du plan  $O\xi\eta$ , correspondent des formes décomposables du type  $(\lambda x + \mu y)(\lambda_0 x_0 + \mu_0 y_0)$ , d'invariant nul.

Rappelons enfin que les distances par rapport à la quadrique fondamentale  $\Sigma$  deviennent, par la transformation envisagée plus haut, les distances en géométrie non euclidienne du demi-espace  $\tau > 0$ , dont Poincaré s'est servi dans son Mémoire sur les groupes kleinéens.

Aux substitutions (S) du groupe de Picard et aux transformations T du demi-espace  $\tau > 0$  qu'on leur a fait correspondre, correspondent les collinéations d'un groupe qui transforme l'intérieur de  $\Sigma$  en lui-même, et conserve  $\Sigma$  <sup>(1)</sup>. Le domaine fondamental de ce groupe de collinéations est un pentaèdre ayant un sommet sur la sphère  $\Sigma$  et quatre sommets intérieurs : ce pentaèdre est d'ailleurs le transformé de  $\Pi_0$  par la transformation qui fait passer du demi-espace  $\tau > 0$  à l'intérieur de la sphère  $\Sigma$ . Dans ce qui suivra il nous arrivera, ce qui ne peut présenter d'ambiguïté, d'appeler indifféremment *groupe de Picard* le groupe des substitutions modulaires complexes (S), le groupe des transformations T du demi-espace  $\tau > 0$  en lui-même qu'on a appris à associer aux S, le groupe des collinéations conservant l'intérieur de  $\Sigma$  qui correspond à ce groupe de transformations T par la transformation du demi-espace  $\tau > 0$  en l'intérieur de  $\Sigma$ .

---

(1) C'est un groupe de *mouvements non euclidiens* dans l'espace défini par la sphère fondamentale  $\Sigma$ .

---

## CHAPITRE II.

### THÉORIE DES FORMES BINAIRES A COEFFICIENTS ET INDÉTERMINÉES COMPLEXES. RÉDUCTION CONTINUELLE.

---

Nous considérons la forme

$$(1) \quad f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$  étant des nombres complexes arbitraires, et aussi l'équation

$$f(z, 1) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

dont les racines sont appelées *racines* ou *zéros* de la forme  $f$ .

Il pourra arriver que la forme  $f$  ait  $p$  racines infinies, ce qui arrivera si les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  sont tous nuls, et  $a_p \neq 0$ . Mais en passant, au besoin, de  $f$  à une forme équivalente, on pourra toujours supposer que  $a_0 \neq 0$ , ce qui n'est d'ailleurs nullement indispensable et ne servira qu'à alléger l'exposition.

On peut écrire, dans l'hypothèse  $a_0 \neq 0$ ,

$$f(x, y) = a_0 (x - z_1 y) (x - z_2 y) \dots (x - z_n y)$$

en désignant par  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les racines de  $f$ , et si  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  sont nuls avec  $a_p \neq 0$ ,

$$f(x, y) = a_p y^p (x - z_{p+1} y) \dots (x - z_n y),$$

$z_{p+1}, \dots, z_n$  étant les racines finies de  $f$ .

Concevons maintenant qu'avec les quantités réelles  $l_1^2, l_2^2, \dots, l_n^2$  on construise la forme quadratique définie positive à indéterminées conjuguées suivante :

$$\varphi(x, y) = l_1^2 \Re(x - z_1 y) + l_2^2 \Re(x - z_2 y) + \dots + l_n^2 \Re(x - z_n y)$$

ou bien, si  $a_0, a_1, \dots, a_p$  sont nuls et  $a_p \neq 0$ ,

$$\varphi(x, y) = (l_1^2 + \dots + l_p^2) \Re y + l_{p+1}^2 \Re(x - z_{p+1} y) + \dots + l_n^2 \Re(x - z_n y)$$

où bien entendu

$$\Re(x - z_i y) = \text{norme}(x - z_i y) = (x - z_i y)(x' - z_i' y'),$$

à condition de désigner par deux lettres, telles que  $\lambda$  et  $\lambda'$ , deux imaginaires conjuguées.

Imaginons maintenant que les  $t$  reçoivent un système de valeurs déterminées et pour ce système de valeurs réduisons la forme  $\varphi$ . Il faut pour cela faire sur  $x$  et  $y$  la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \quad \left[ \text{avec, bien entendu, } \begin{cases} x' = \alpha' X' + \beta' Y' \\ y' = \gamma' X' + \delta' Y' \end{cases} \right].$$

On fera sur  $f$  la même substitution que sur  $\varphi$ , on obtient la forme  $fS$  équivalente à  $f$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \Phi S = \varphi(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y), \\ F(X, Y) &= f S = f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y). \end{aligned}$$

Concevons alors que les  $t$  reçoivent toutes les valeurs possibles, que pour chacun de ces systèmes de valeurs on réduise la forme  $\varphi$  et qu'on fasse dans  $f$  la même substitution que celle qui réduit  $\varphi$ . On obtiendra ainsi un ensemble de formes équivalentes à  $f$  que nous désignerons par  $(f)$  et dont nous allons étudier les propriétés.

Tout revient à étudier l'ensemble des substitutions (S) qu'il faut faire pour réduire  $\varphi$  lorsque les  $t$  prennent toutes les valeurs possibles. Ceci est facilité par la représentation des formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées et l'interprétation géométrique de ces formes, qui ont été rappelées dans les préliminaires.

Il faut tout d'abord chercher quel domaine décrit le point représentatif de  $\varphi$  lorsque les  $t$  varient. Nous ne développerons l'exposition que pour  $a_0 \neq 0$ , nous montrerons ensuite brièvement que ce que nous avons dit est encore vrai du cas où  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  ( $a_p \neq 0$ ).

Développons

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{N}(x - z_1 y) + \dots + t_n^2 \mathfrak{N}(x - z_n y);$$

on peut écrire

$$\varphi = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y',$$

en posant

$$\begin{aligned} p &= t_1^2 + \dots + t_n^2, \\ q &= t_1^2 z_1' + \dots + t_n^2 z_n', \\ q' &= t_1^2 z_1 + \dots + t_n^2 z_n, \\ r &= t_1^2 z_1 z_1' + \dots + t_n^2 z_n z_n' = t_1^2 \mathfrak{N} z_1 + \dots + t_n^2 \mathfrak{N} z_n. \end{aligned}$$

Prenons, par exemple, la représentation projective.

Soit  $A_i$  le point de la sphère  $\Sigma$  qui représente la forme

$$\mathfrak{N}(x - z_i y) = x x' - z_i' x y' - z_i x' y + z_i z_i' y y';$$

ses coordonnées homogènes sont  $1, z_i', z_i, z_i z_i'$ .

Il est alors manifeste que le point représentatif de  $\varphi$  peut se désigner symbo-

liquement par

$$t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + \dots + t_n^2 A_n,$$

ce qui veut dire que chacune de ses coordonnées homogènes s'obtient en remplaçant dans l'expression précédente les lettres  $A_i$  par la coordonnée homogène en question relative au point  $A_i$  correspondant; en d'autres termes, la première coordonnée  $p$ , par exemple, s'obtiendra en remplaçant respectivement  $A_1, A_2, \dots, A_n$  par leurs premières coordonnées, et ainsi des deuxième, troisième, quatrième coordonnées. Cette expression symbolique du point représentatif de  $\varphi$  évoque une ressemblance avec les expressions symboliques connues du barycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  affectés des masses  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  (d'une façon plus précise, si les coordonnées choisies étaient des coordonnées homogènes,  $x_i$  jouant le rôle de la coordonnée d'homogénéité, en sorte que la quadrique fondamentale soit un paraboloidé de révolution au lieu d'être une sphère, on voit que le point représentatif de  $\varphi$  serait exactement le barycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , affectés des masses  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ ).

Considérons donc le point

$$t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + \dots + t_n^2 A_n.$$

Et tout d'abord, lorsque  $t_1$  et  $t_2$  varient, le point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2$  décrit le segment  $A_1, A_2, \dots$ ; il est en  $A_1$  pour  $t_2 = 0$  et en  $A_2$  pour  $t_1 = 0$ .

Le point  $(t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2) + t_3^2 A_3$  lorsque  $t_3$  variera,  $t_1$  et  $t_2$  restant fixes, décrira le segment qui joint  $A_3$  au point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2$ . Et lorsque  $t_1, t_2, t_3$  varieront arbitrairement, ce point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3$  va décrire l'intérieur du triangle  $A_1, A_2, A_3$  ( $A_1, A_2, A_3$  étant distincts sur la quadrique, ce triangle ne se réduit pas à un segment de droite); si  $t_1, t_2, t_3 \neq 0$ , il est à l'intérieur; si une des trois quantités  $t_1, t_2, t_3$  est nulle, il est sur un côté; si deux sont nulles, il est en un sommet. [On peut remarquer, en passant, que si trois points quelconques  $A_1, A_2, A_3$  sont donnés sur la quadrique fondamentale, à tout point  $M$  intérieur au triangle ou situé sur son périmètre correspond (à un facteur près) un seul système de nombres  $t_1^2, t_2^2, t_3^2$ , tels que le point  $M$  s'écrive symboliquement

$$M = t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3.$$

En continuant de proche en proche, on voit que le point

$$t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3 + t_4^2 A_4$$

décrira l'intérieur et la surface du tétraèdre dont les sommets sont  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (1), et ainsi de suite. *Le point  $t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + \dots + t_n^2 A_n$  décrira l'inté-*

(1) Si  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont dans un même plan, ce tétraèdre se réduira à un quadrilatère convexe des sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

rieur et la surface du polyèdre <sup>(1)</sup> convexe ayant pour sommets l'ensemble des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Ce qu'il faut entendre par là n'est pas douteux et le polyèdre en question peut être construit par le procédé indiqué en construisant de proche en proche les domaines décrits par les points

$$t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2, \quad t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3, \quad t_1^2 A_1 + t_2^2 A_2 + t_3^2 A_3 + t_4^2 A_4, \quad \dots, \quad t_1^2 A_1 + \dots + t_n^2 A_n.$$

D'ailleurs, on peut avoir de suite les faces du polyèdre en question par cette simple remarque, qu'une face laissera tous les  $A_i$  non situés sur elle d'un même côté, d'où se conclut cette deuxième remarque :  $A_i A_j$  sera une arête du polyèdre si l'on peut déterminer un plan passant par  $A_i A_j$  qui laisse tous les  $A$ , sauf  $A_i$  et  $A_j$ , d'un même côté; on peut alors déterminer un autre point  $A_k$  (en faisant tourner le plan autour de  $A_i A_j$ ) tel que le plan  $A_i A_j A_k$  laisse tous les  $A$ , sauf  $A_i, A_j, A_k$  d'un même côté (exception faite de certains  $A$  qui pourraient tomber dans ce plan), et si tous les  $A$  ne sont pas dans un même plan, on peut trouver un deuxième point  $A_{k'}$  tel que le plan  $A_i A_j A_{k'}$  satisfasse aux mêmes conditions : alors les deux plans  $A_i A_j A_k$  et  $A_i A_j A_{k'}$  contiendront les deux faces du polyèdre passant par l'arête  $A_i A_j$ . (On peut encore remarquer que l'on peut obtenir les arêtes du polyèdre issues d'un sommet  $A_i$  par le procédé suivant : si l'on fait tourner un plan autour d'une tangente à la sphère fondamentale en  $A_i$ , à partir du plan tangent qui laisse tous les  $A$ , sauf  $A_i$ , d'un même côté, le premier point  $A_j$  de l'ensemble  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$  que le plan tournant rencontrera donnera avec  $A_i$  une arête du polyèdre; si on le fait tourner en sens inverse, toujours à partir du plan tangent, il donnera une autre arête, mais il est inutile d'insister davantage sur ces remarques bien élémentaires.)

Passons maintenant à la représentation de la forme  $\varphi$  par un point  $\zeta$  du demi-espace  $\tau > 0$ . Ce point  $\zeta$  se projettera sur le plan  $O\xi\eta$  en un point  $P$  d'affixe

$$\frac{q'}{p} = \frac{t_1^2 z_1 + t_2^2 z_2 + \dots + t_n^2 z_n}{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}$$

et le carré de sa distance à l'origine sera

$$\overline{O\xi'} = \frac{r}{p} = \frac{t_1^2 \mathfrak{R} z_1 + \dots + t_n^2 \mathfrak{R} z_n}{t_1^2 + \dots + t_n^2}.$$

Les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , représentatifs des formes  $\mathfrak{R}(x - z_1 y), \dots, \mathfrak{R}(x - z_n y)$  sont des points du plan  $O\xi\eta$  d'affixes  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Affectons ces points des masses respectives  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ . Le point  $P$  sera alors bien évi-

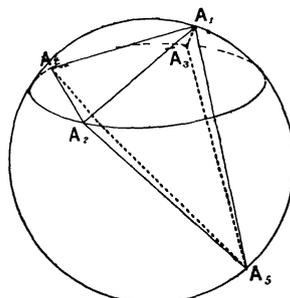
---

(1) Ce polyèdre se réduit à un polygone convexe si tous les  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dans un même plan.

demment le barycentre euclidien des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  affectés de ces masses.

Les mêmes principes, qui ont permis de trouver le domaine décrit par le point représentatif de  $\varphi$  dans le mode projectif de représentation des formes, sont valables ici. On passera de la première représentation à la seconde par la

Fig. 40.

Forme du 5<sup>e</sup> degré.

L'hexaèdre convexe  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  est formé des deux tétraèdres  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ,  $A_3 A_4 A_5 A_1$ , accolés par la base.

transformation qui change l'intérieur de la sphère  $\Sigma$  en le demi-espace  $\tau > 0$ ; dans cette transformation, le segment qui joint deux points intérieurs à  $\Sigma$  ou sur  $\Sigma$  devient l'arc du cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  qui joint les correspondants de ces deux points dans le demi-espace. [Pour abrégier, nous pourrions appeler *droites non euclidiennes* les demi-cercles <sup>(1)</sup> orthogonaux au plan  $O\xi\eta$ , et *plans non euclidiens* les demi-sphères <sup>(2)</sup> orthogonales à ce plan; c'est conforme à l'interprétation de la géométrie de Lobatchefsky donnée par Poincaré à propos des groupes kleinéens.]

Les remarques précédentes permettent de donner la construction suivante bien simple du point  $\zeta$ , connaissant  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et leurs masses respectives  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ :

Sur la droite non euclidienne  $A_1 A_2$  prenons  $\zeta_1$  qui se projette en  $P_1$  sur le plan  $O\xi\eta$  et tel que

$$\frac{\overline{P_1 A_1}}{\overline{P_1 A_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2}$$

et affectons  $\zeta_1$  de la masse  $t_1^2 + t_2^2$ ; sur la droite non euclidienne  $\zeta_1 A_3$ , prenons  $\zeta_2$  qui se projette en  $P_2$  sur le plan  $O\xi\eta$  et tel que

$$\frac{\overline{P_2 P_1}}{\overline{P_2 A_3}} = -\frac{t_3^2}{t_1^2 + t_2^2};$$

$\zeta_2$  recevra la masse  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ .

(1) Les demi-droites orthogonales au plan  $O\xi\eta$  en font partie.

(2) Les demi-plans orthogonaux au plan  $O\xi\eta$  en font partie.

Continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra une suite de points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-2}$ , qui seront respectivement les points représentatifs des formes

$$\begin{aligned} & t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{U}(x - z_2 y), \\ & t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{U}(x - z_2 y) + t_3^2 \mathfrak{U}(x - z_3 y), \quad \dots, \\ & t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + \dots + t_{n-1}^2 \mathfrak{U}(x - z_{n-1} y). \end{aligned}$$

Ces points recevront au fur et à mesure les masses

$$t_1^2 + t_2^2, \quad t_1^2 + t_2^2 + t_3^2, \quad \dots, \quad t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_{n-1}^2;$$

ils seront tels que  $\zeta_{i-1}$  sera sur la droite non euclidienne  $A_i \zeta_{i-2}$  et se projettera en  $P_i$  sur le plan  $O\xi\eta$  tel que

$$\frac{\overline{P_{i-1}P_{i-2}}}{\overline{P_{i-1}A_i}} = - \frac{t_i^2}{t_1^2 + \dots + t_{i-1}^2},$$

$\zeta$  représentatif de  $\varphi$  s'obtiendra enfin en joignant  $\zeta_{n-2} A_n$  par une droite non euclidienne et se projettera en  $P$  tel que

$$\frac{\overline{PP_{n-2}}}{\overline{PA_n}} = - \frac{t_n^2}{t_1^2 + \dots + t_{n-1}^2}.$$

Convenons d'appeler *barycentre non euclidien des points*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  respectivement affectés des masses  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  le point  $\zeta$  construit précédemment; alors le point représentatif de  $\varphi$  sera, d'un mot, le barycentre non euclidien des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit que ce barycentre ne dépend nullement de l'ordre dans lequel sont pris les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . On voit aussi que l'on peut, pour la recherche de ce barycentre, remplacer tel groupe de points de l'ensemble  $A_1, A_2, \dots, A_n$  que l'on voudra par le barycentre des points du groupe, à condition de l'affecter d'une masse égale à la somme des masses des points du groupe. Tout se passe comme pour la recherche des barycentres en géométrie euclidienne ordinaire.

Revenant au domaine que décrit  $\zeta$  lorsque les paramètres  $t$  prennent toutes les valeurs possibles, on voit que ce sera l'intérieur et la surface *du polyèdre convexe* <sup>(1)</sup> *non euclidien ayant pour sommets*  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

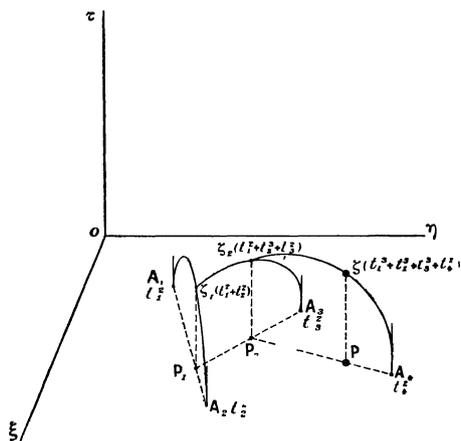
Nous pouvons d'ailleurs déterminer ce polyèdre de proche en proche en déterminant successivement les lieux de  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-2}, \zeta$ . En langage de géométrie ordinaire, les faces seront des portions de sphère orthogonales au

(1) *Convexe* signifie que chaque face du polyèdre laisse tous les sommets du polyèdre d'un même côté.



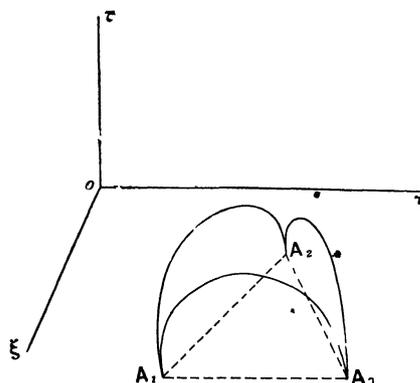
plan  $O\xi\eta$  limitées par des demi-cercles orthogonaux au même plan (généralement ces portions de sphère seront des triangles). On a fait des figures relatives : 1° au cas des formes cubiques, auquel cas  $\zeta$  décrit sur la sphère orthogonale au plan  $O\xi\eta$ , qui passe par  $A_1, A_2, A_3$ , un triangle limité par les trois

Fig. 41.



On a fait la figure pour le cas d'une forme biquadratique.

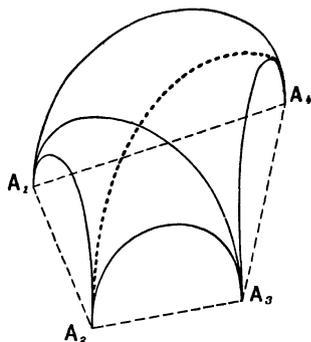
Fig. 42.



$A_1 A_2 A_3$ , triangle non euclidien correspondant à la forme cubique

$$f = a_0(x - z_1, \gamma)(x - z_2, \gamma)(x - z_3, \gamma).$$

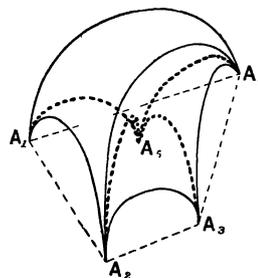
Fig. 43.



$A_1 A_2 A_3 A_4$ , tétraèdre non euclidien correspondant à la forme biquadratique

$$f = a_0(x - z_1, \gamma)(x - z_2, \gamma)(x - z_3, \gamma)(x - z_4, \gamma).$$

Fig. 44.



Hexaèdre  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  (formé des deux tétraèdres non euclidiens  $A_1 A_2 A_3 A_4$  et  $A_2 A_3 A_4 A_5$  accolés par la base) correspondant à la forme du 5° degré

$$f = a_0(x - z_1, \gamma)(x - z_2, \gamma)(x - z_3, \gamma)(x - z_4, \gamma)(x - z_5, \gamma).$$

demi-cercles orthogonaux à  $O\xi\eta$  décrits sur  $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$  pour diamètres; 2° au cas des formes biquadratiques; le domaine  $\zeta$  est alors un tétraèdre non euclidien ayant pour sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , qui peut se réduire à un quadrilatère lorsque  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont dans le plan  $O\xi\eta$  quatre points d'un même cercle; 3° au cas des formes du cinquième degré; avec la disposition des

points de la figure, on a trouvé un hexaèdre non euclidien à faces triangulaires formé de deux tétraèdres non euclidiens accolés par la base. C'est le cas général. Si les points  $A_2, A_3, A_4, A_5$  avaient été sur un même cercle dans le plan  $O\xi\eta$ , on aurait trouvé une pyramide non euclidienne de sommet  $A_1$  ayant pour base le quadrilatère non euclidien  $A_2A_3A_4A_5$ .

Ce polyèdre, ainsi déterminé par la connaissance des racines de la forme, sera dit *polyèdre associé à la forme  $f$* .

Nous avons supposé dans ce qui précède  $a_0 \neq 0$ , c'est-à-dire que la forme n'avait pas de racines infinies. Il n'est pas difficile de voir ce qui arrive si la forme a  $p$  racines infinies  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  ( $a_p \neq 0$ ). Dans ce cas, le polyèdre en question a  $p$  de ses sommets confondus avec le point à l'infini du plan des  $z$ . Les faces issues de ces sommets seront *dans des plans orthogonaux à ce plan  $O\xi\eta$* , les arêtes issues de ce sommet seront des demi-droites orthogonales à ce même plan. On se rendra compte de tout cela en remarquant que le point représentatif de

$$\varphi = (t_1^2 + \dots + t_p^2) \Re y + t_{p+1}^2 \Re(x - z_{p+1}y) + \dots + t_n^2 \Re(x - z_n y)$$

se projette sur  $O\xi\eta$  en P d'affixe

$$\frac{q'}{p} = \frac{t_{p+1}^2 z_{p+1} + \dots + t_n^2 z_n}{t_{p+1}^2 + \dots + t_n^2}$$

et que sa distance à l'origine est

$$\overline{O\zeta}^2 = \frac{r}{p} = \frac{t_1^2 + \dots + t_p^2 + t_{p+1}^2 \Re z_{p+1} + \dots + t_n^2 \Re z_n}{t_{p+1}^2 + \dots + t_n^2}.$$

Alors si  $t_{p+1}, \dots, t_n$  restent fixes,  $t_1, \dots, t_p$  variant, ce qui d'ailleurs n'intéresse que la somme  $t_1^2 + \dots + t_p^2$  (qu'on pourrait, si l'on voulait, considérer *comme une seule variable*),  $\zeta$  décrit une demi-droite orthogonale à  $O\xi\eta$  allant du point  $\zeta_1$  *barycentre non euclidien des points  $z_{p+1}, \dots, z_n$  affectés des masses  $t_{p+1}^2, \dots, t_n^2$*  ( $\zeta$  est en  $\zeta_1$  pour  $t_1 = t_2 = \dots = t_p = 0$ ) au point à l'infini dans la direction  $O\tau$  qui n'est autre que le point à l'infini du plan de la variable complexe.

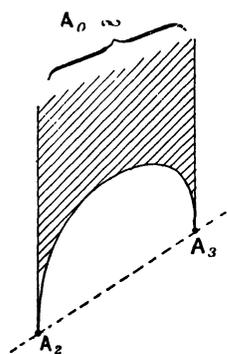
Cette remarque explique les conclusions indiquées précédemment.

On a fait des figures relatives au cas des formes cubiques, biquadratiques, du cinquième degré, du sixième degré, admettant une racine infinie ( $z_1 = \infty$ ).

En définitive, nous savons trouver dans tous les cas le domaine D décrit par le point  $\zeta$  représentatif de la forme  $\varphi$  associée à  $f$  lorsque les paramètres  $t$  prennent toutes les valeurs possibles. Dans ces conditions, l'ensemble des substitutions (S) qu'il faut faire pour réduire  $\varphi$  peut être facilement caractérisé à l'aide de l'interprétation géométrique que nous avons donnée de la réduction des formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées.

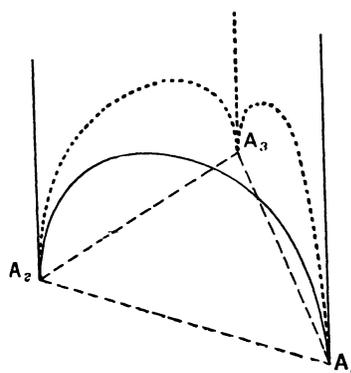
Envisageons la division pentaédrique de l'espace (division de Picard), rappelée dans les préliminaires. Lorsque  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  tombe dans un

Fig. 45.



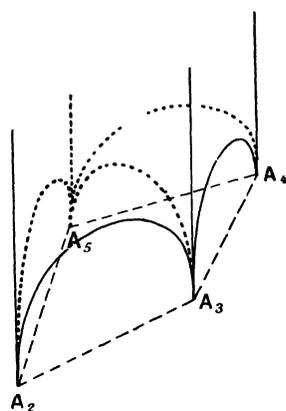
Forme cubique  
 $f = y(x - z_1 y)(x - z_3 y)$ .

Fig. 46.



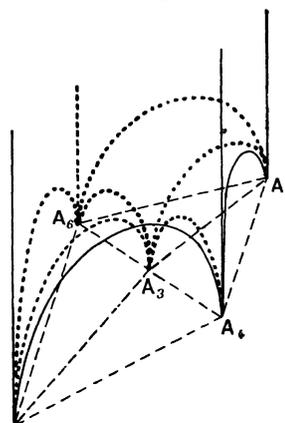
Forme biquadratique  
 $f = y(x - z_2 y)(x - z_3 y)(x - z_1 y)$ .

Fig. 47.



Forme du 5<sup>e</sup> degré  
 $f = y(x - z_1 y)(x - z_3 y)(x - z_4 y)(x - z_5 y)$ .

Fig. 48.



Forme du 6<sup>e</sup> degré  
 $f = y(x - z_1 y)(x - z_3 y)(x - z_4 y)(x - z_5 y)(x - z_6 y)$

Le domaine est un octaèdre non euclidien de sommets  $A_1 = x, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ , ses faces sont des triangles non euclidiens; quatre de ces faces :  $A_1 A_2 A_3, A_1 A_4 A_5, A_1 A_5 A_6, A_1 A_3 A_6$ , sont dans des plans perpendiculaires au plan  $Oz_1^2 r_1$

pentaèdre  $\Pi$  de cette division, la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

qu'il faut faire pour réduire  $\varphi$  est celle qui correspond à la transformation (T)

du demi-espace définie par  $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ , par laquelle le domaine  $\Pi$  où est  $\zeta$  se transforme dans le domaine  $\Pi_0$  [ $\Pi_0 = \Pi T$ ].

Ceci étant rappelé : *considérons tous les pentaèdres  $\Pi$  de la division de Picard avec lesquels  $D$  a au moins un point commun (intérieur ou sur la frontière); l'ensemble des substitutions (S) est l'ensemble des substitutions correspondantes aux (T) qui transforment chacun de ces domaines  $\Pi$  en  $\Pi_0$  domaine fondamental du groupe de Picard.*

On a ainsi comme une image tangible de cet ensemble (S) des substitutions, et l'on voit mieux quel ensemble de formes ( $f$ ) la réduction continue précédente associe à la forme initiale  $f$ .

*Remarques.* — I.  $D$  se réduit au demi-cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  joignant  $z_1, z_2$ , lorsque  $f$  est une forme quadratique de Dirichlet

$$f = a_0(x - z_1 y)(x - z_2 y).$$

Dans ce cas, M. Bianchi a donné l'interprétation de la méthode de réduction continue.

II. Le domaine  $D$  ayant tous ses sommets dans le plan  $O\xi\eta$  et les domaines  $\Pi$  se pressant infiniment aux abords de ce plan, on voit qu'en général (S) comprendra une infinité de substitutions et ( $f$ ) une infinité de formes. Le seul cas d'exception est celui où toutes les racines  $z_i$  de la forme seraient des nombres complexes rationnels. Un peu de réflexion convaincra que, dans ce cas seulement, les sommets de  $D$  étant tous des sommets de domaine  $\Pi$ ,  $D$  n'aura de points communs qu'avec un nombre fixe de pentaèdres  $\Pi$ , et par suite (S) et ( $f$ ) ne compteront qu'un nombre fini d'éléments. Ce cas est d'ailleurs banal, car, dans le cas le plus intéressant pour l'Arithmétique, qui est celui des formes dont les coefficients sont des entiers complexes, on ne s'occupe que des formes indécomposables dans le domaine des entiers complexes, et de telles formes n'ont aucune racine rationnelle.

*Polyèdres associés à deux formes équivalentes.* -- Soient deux formes équivalentes  $f(x, y)$  et  $f_1(x_1, y_1)$ , en supposant qu'on passe de la première à la deuxième par la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = mx_1 + m_0 y_1 & (m, m_0, n, n_0 \text{ sont quatre entiers complexes vérifiant} \\ y = nx_1 + n_0 y_1 & mn_0 - m_0 n = +1), \end{cases}$$

$$f_1(x_1, y_1) = f(mx_1 + m_0 y_1, nx_1 + n_0 y_1);$$

les racines  $z$  de  $f$  et celles  $z_1$  de  $f_1$  se correspondent biunivoquement par la

relation

$$z = \frac{m z_1 + m_0}{n z_1 + n_0}.$$

Par une telle transformation et par la transformation T de l'espace qu'elle définit (*mouvement non euclidien*), on voit facilement que l'intérieur du polyèdre non euclidien D associé à  $f$ , polyèdre convexe ayant pour sommets les racines de  $f$ , devient l'intérieur d'un polyèdre convexe non euclidien ayant pour sommets les racines de  $f_1$ , c'est-à-dire devient  $D_1$  associé à  $f_1$ , la surface de D devient d'ailleurs la surface de  $D_1$ .

Les domaines associés à deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$  se transforment donc l'un dans l'autre par la transformation T qui correspond à la substitution S par laquelle on passe de  $f$  à  $f_1$ . Si

$$\begin{aligned} f_1 &= fS, \\ D_1 &= DT. \end{aligned}$$

On tire de là que deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$  donnent naissance au même groupe de formes ( $f$ ) par la réduction continue. Autrement dit, ( $f$ ) et ( $f_1$ ) sont identiques. En effet, soit  $\Sigma$  la substitution qui fait passer de  $f$  à  $f_1$  [ $f_1 = f\Sigma$ ] et soit  $\Theta$  la transformation correspondante du demi-espace [ $D_1 = D\Theta$ ]. Soit  $\pi_1$  un des pentaèdres de la division de Picard avec lequel  $D_1$  associé de  $f_1$  a des points communs. Soient  $T_1$  la transformation qui amène  $\pi_1$  sur  $\pi_0$  et  $S_1$  la substitution correspondante [ $\pi_0 = \pi_1 T_1$ ]; il est clair que le pentaèdre  $\pi$  tel que  $\pi_1 = \pi\Theta$  mord sur D et la transformation qui l'amène sur  $\pi_0$  est exactement

$$\Theta T_1 [\pi_0 = \pi_1 T_1 = \pi \Theta T_1].$$

Au groupe ( $f$ ) appartient donc la forme

$$f\Sigma S_1 = (f\Sigma)S_1 = f_1 S_1$$

qui est une forme de ( $f_1$ ).

Toute forme de ( $f$ ) est dans ( $f_1$ ) et inversement. Donc ( $f$ ) et ( $f_1$ ) sont composés des mêmes formes.

En résumé : *Que l'on parte de  $f$  ou d'une forme équivalente quelconque, l'ensemble des formes ( $f$ ) que la réduction continue conduit à former est toujours le même* <sup>(1)</sup>.

On peut, d'un mot, caractériser celles des formes équivalentes à  $f$  qui constituent le groupe ( $f$ ). Effectivement, une forme de ( $f$ ) s'obtient en faisant

(1) Ceci permet de supposer, en passant au besoin de  $f$  à une forme équivalente, que  $f$  n'a pas de racines infinies ( $a_0 \neq 0$ ). On ne restreint pas la généralité avec cette hypothèse, l'exposition s'en trouve allégée et l'ensemble ( $f$ ) qu'on doit former est toujours le même.

dans  $f$  la substitution  $S$  correspondant à la transformation  $T$  qui amène sur  $\pi_0$  un des pentaèdres  $\pi$  de la division de Picard sur lesquels mord le domaine  $D$  associé à  $f$ : par conséquent, le domaine associé à la forme de ( $f$ ) considérée mordra sur  $\pi_0$ . L'ensemble des ( $f$ ) est donc formé de toutes les formes équivalentes à  $f$  dont le polyèdre associé a avec  $\pi_0$  au moins un point commun.

Avec cet énoncé, on voit bien clairement que l'ensemble ( $f$ ) est le même, quelle que soit la forme équivalente à  $f$  dont on parle.

Remarquons que, si  $f$  et  $f_1$  sont équivalentes,

$$f_1(x_1, y_1) = f(mx_1 + m_0y_1, nx_1 + n_0y_1)$$

et  $\varphi$  et  $\varphi_1$  leurs formes associées

$$\begin{aligned}\varphi &= t_1^2 \mathfrak{R}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{R}(x - z_2 y) + \dots + t_n^2 \mathfrak{R}(x - z_n y); \\ \varphi_1 &= \theta_1^2 \mathfrak{R}(x_1 - z_1' y_1) + \theta_2^2 \mathfrak{R}(x_1 - z_2' y_1) + \dots + \theta_n^2 \mathfrak{R}(x_1 - z_n' y_1);\end{aligned}$$

$\varphi(x, y)$  se transformera en  $\varphi_1(x_1, y_1)$  par la substitution

$$\begin{aligned}x &= mx_1 + m_0y_1, \\ y &= nx_1 + n_0y_1,\end{aligned}$$

si l'on suppose

$$\theta_i^2 = t_i^2 \mathfrak{R}(m - z_i n)$$

pour toutes les valeurs de  $i$  qui rendent

$$\mathfrak{R}(m - z_i n) \neq 0.$$

Si une racine  $z_i$  de  $f$  est rationnelle et précisément égale à  $\frac{m}{n}$ , alors le terme  $t_i^2 \mathfrak{R}(x - z_i y)$  devient par la substitution

$$t_i^2 \mathfrak{R}(n_0 z_i - m_0) y_1 = \frac{t_i^2}{\mathfrak{R} n} \mathfrak{R} y_1.$$

Mais, dans ce cas, à la racine  $z_i$  de  $f$  correspond une racine infinie de  $f_1$  et le terme correspondant dans  $\varphi_1$  est  $\theta_i^2 \mathfrak{R} y_1$ .

Les formules qui font correspondre les paramètres de  $\varphi$  et  $\varphi_1$  sont donc

$$\theta_i^2 = t_i^2 \mathfrak{R}(m - z_i n) = t_i^2 (m - z_i n) (m' - z_i' n')$$

pour toutes les racines  $z_i$  différentes de  $\frac{m}{n}$ , et, pour une racine  $z_i = \frac{m}{n}$ , la correspondance des paramètres se fait par

$$\theta_i^2 = \frac{t_i^2}{\mathfrak{R} n} = \frac{t_i^2}{nn'}.$$

Avec ces formules on voit que  $\zeta$ , point représentatif de  $\varphi$  pour les valeurs  $t$  des paramètres, et  $\zeta_1$  représentatif de  $\varphi_1$  pour les valeurs  $\theta$  des paramètres

liées comme ci-dessus aux  $t$ , se transforment l'un dans l'autre par la transformation  $T$  qui correspond à la substitution  $S$  qui fait passer de  $f$  à  $f_1$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= fS, \\ \zeta_1 &= \zeta T. \end{aligned}$$

*Définition de la réduite équivalente à  $f$ .* — C'est parmi le groupe de formes ( $f$ ) que nous allons choisir une forme pour représenter toute la classe équivalente à  $f$ .

Soit donc, en supposant, ce qui est permis,  $a_0 \neq 0$ ,

$$f = a_0(x - z_1 y)(x - z_2 y) \dots (x - z_n y)$$

la forme proposée de degré  $n$ ; soit

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{R}(x - z_1 y) + \dots + t_n^2 \mathfrak{R}(x - z_n y)$$

la forme associée à indéterminées conjuguées, et soit

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

la substitution qui la réduit pour certaines valeurs des paramètres  $t$ .

Deux cas peuvent se présenter :

*Premier cas.* — Aucune des racines de  $f$  n'est égale à  $\frac{\alpha}{\gamma}$ ; alors la transformée  $F = fS$  n'aura pas de racines infinies : ses racines seront les  $Z_i$  liés aux  $z_i$  par les formules

$$z_i = \frac{\alpha Z_i + \beta}{\gamma Z_i + \delta}, \quad Z_i = \frac{\beta - \delta z_i}{\gamma z_i - \alpha}.$$

Par la substitution  $S$ ,  $f$  devient

$$F(x, y) = A_0(X - Z_1 Y) \dots (X - Z_n Y)$$

avec

$$A_0 = a_0(\alpha - \gamma z_1)(\alpha - \gamma z_2) \dots (\alpha - \gamma z_n) \quad (A_0 \neq 0)$$

et  $\varphi$  devient  $\Phi = \varphi S$

$$\Phi = T_1^2 \mathfrak{R}(X - Z_1 Y) + \dots + T_n^2 \mathfrak{R}(X - Z_n Y)$$

avec

$$T_i^2 = t_i^2 \mathfrak{R}(\alpha - \gamma z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

*Deuxième cas.* — Les  $p$  premières racines réelles  $z_1, z_2, \dots, z_p$  de  $f$  sont égales à  $\frac{\alpha}{\gamma}$ . Par la substitution  $S$ ,  $x - z_i y$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) devient

$$x - z_i y = (\beta - \delta z_i) Y = \left( \beta - \frac{\delta \alpha}{\gamma} \right) Y = -\frac{Y}{\gamma}.$$

Pour  $z_{p+1}, \dots, z_n$  tout se passe comme précédemment et  $F = fS$  s'écrit

$$F = A_0 Y^p (\lambda - Z_{p+1} Y) \dots (X - Z_n Y),$$

avec

$$Z_i = \frac{\beta - \delta z_i}{\gamma z_i - \alpha} \quad \text{pour } i = p+1, \dots, n$$

et

$$A_0 = (-1)^p \alpha_0 \frac{(\alpha - \gamma z_{p+1}) \dots (\alpha - \gamma z_n)}{\gamma^p}.$$

Quant à  $\varphi$  elle devient  $\Phi = \varphi S$

$$\Phi(X, Y) = T_1^2 Y^2 + \dots + T_p^2 Y + T_{p+1}^2 \mathfrak{U}(X - Z_{p+1} Y) + \dots + T_n^2 \mathfrak{U}(X - Z_n Y)$$

avec

$$T_i^2 = \frac{t_i^2}{\gamma \gamma'} = \frac{t_i^2}{\mathfrak{U} \gamma}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p$$

et

$$T_k^2 = t_k^2 \mathfrak{U}(\alpha - \gamma z_k) \quad \text{pour } k = p+1, \dots, n.$$

Si l'on suppose  $p = 0$ , les formules de ce deuxième cas donnent celles du premier.

Nous allons donc dans la suite raisonner sur ce deuxième cas, et dans les résultats obtenus il suffira de faire  $p = 0$  pour obtenir les résultats relatifs au premier cas.

Remarquons dès maintenant la relation

$$\frac{A_0 A'_0}{T_1^2 T_2^2 \dots T_n^2} = \frac{\alpha_0 \alpha'_0}{t_1^2 \dots t_n^2}$$

qui prouve que  $\frac{\mathfrak{U}(\alpha_0)}{t_1^2 \dots t_n^2}$  est une espèce d'invariant par la substitution  $S$ .

La forme positive

$$\Phi(X, Y) = PXX' - QXY' - Q'X'Y + RYY'$$

étant réduite, si  $\Delta$  désigne son déterminant

$$\Delta = PR - QQ'$$

qui est d'ailleurs égal au déterminant  $\delta$  de  $\varphi$ , on a comme on sait

$$P \leq R,$$

$$|\text{partie réelle de } Q| \leq \frac{P}{2},$$

$$|\text{partie imaginaire de } Q| \leq \frac{P}{2},$$

d'où l'on tire

$$P \leq \sqrt{2\Delta}, \quad R \leq \frac{2\Delta}{P}.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} P &= T_{p+1}^2 + \dots + T_n^2, \\ R &= T_1^2 + \dots + T_p^2 + T_{p+1}^2 \mathfrak{G} Z_{p+1} + \dots + T_n^2 \mathfrak{G} Z_n. \end{aligned}$$

$P$  est la somme de  $n - p$  termes positifs  $T_{p+1}^2, \dots, T_n^2$ , dont le produit sera supérieur ou égal à la puissance  $(n - p)^{\text{ième}}$  de leur moyenne arithmétique  $\frac{P}{n - p}$

$$T_{p+1}^2 \dots T_n^2 \leq \left( \frac{P}{n - p} \right)^{n-p}.$$

En revenant à  $\varphi$ , ceci donne

$$\mathfrak{G}(\alpha - \gamma z_{p+1}) \mathfrak{G}(\alpha - \gamma z_{p+2}) \dots \mathfrak{G}(\alpha - \gamma z_n) \leq \frac{P}{t_{p+1}^2 \dots t_n^2} \left( \frac{P}{n - p} \right)^{n-p}.$$

De plus, on a

$$T_1^2 + \dots + T_p^2 \leq R.$$

Donc

$$T_1^2 \dots T_p^2 \leq \left( \frac{R}{p} \right)^p,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(\mathfrak{G} \gamma)^p} \leq \left( \frac{R}{p} \right)^p \frac{1}{t_1^2 \dots t_p^2}.$$

Multipliant membre à membre et par  $\mathfrak{G}(\alpha_0)$  les deux inégalités obtenues, il vient

$$\mathfrak{G} A_0 = \mathfrak{G} \alpha_1 \frac{\mathfrak{G}(\alpha - \gamma z_{p+1}) \dots \mathfrak{G}(\alpha - \gamma z_n)}{(\mathfrak{G} \gamma)^p} \leq \frac{\mathfrak{G} \alpha_0}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{1}{(n - p)^{n-p}} \frac{1}{p^p} P^{n-p} R^p.$$

Si  $p$  était nul, il est clair que l'on remplacerait  $\frac{1}{p^p}$  et  $R^p$  par  $un$ .

En se servant de

$$P \leq \sqrt{2\delta} \quad \text{et} \quad R \leq \frac{2\delta}{p},$$

$\delta$  étant le déterminant de  $\varphi$ , il vient

$$\boxed{\mathfrak{G}(A_0) \leq \frac{\mathfrak{G}(\alpha_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} (n - p)^{n-p} p^p}.$$

Quel que soit  $p$  on a, *a fortiori*,

$$\boxed{\mathfrak{G}(A_0) \leq \frac{\mathfrak{G}(\alpha_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} 2^{\frac{n}{2}}.$$

Passons aux limitations supérieures des  $\mathfrak{G}(Z_i)$  ( $i = p + 1, \dots, n$ ).

Si parmi les  $n - p$  termes dont la somme fait  $P$  on supprime  $T_i^2$ , la somme

des  $n - p - 1$  restants est  $\leq P$  et leur produit sera  $\leq \left(\frac{P}{n-p-1}\right)^{n-p-1}$ . Or ce produit c'est  $\frac{T_{p+1}^2 \dots T_n^2}{T_i^2}$ .

Donc

$$\frac{T_{p+1}^2 \dots T_n^2}{T_i^2} \leq \left(\frac{P}{n-p-1}\right)^{n-p-1} \quad (i = p+1, \dots, n).$$

En considérant  $R$  on voit que

$$T_i^2 \mathfrak{X} Z_i \leq R;$$

d'où se tire

$$\mathfrak{X} Z_i \leq \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} P^{n-p-1} R \frac{1}{T_{p+1}^2 \dots T_n^2}$$

et, à cause de

$$T_1^2 \dots T_p^2 \leq \left(\frac{R}{P}\right)^p,$$

$$\mathfrak{X} Z_i \leq \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{P^p} P^{n-p-1} R^{p+1} \frac{1}{T_1^2 \dots T_n^2}.$$

Mais

$$\frac{\mathfrak{X} A_0}{T_1^2 \dots T_n^2} = \frac{\mathfrak{X} a_0}{t_1^2 \dots t_n^2}.$$

Donc

$$\mathfrak{X} Z_i \leq \frac{\mathfrak{X} a_0}{t_1^2 \dots t_n^2} P^{n-p-1} R^{p+1} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{P^p} \frac{1}{\mathfrak{X} A_0},$$

et avec les limitations de  $P$  et  $R$ ,

$$\boxed{\mathfrak{X}(Z_i) \leq \frac{\mathfrak{X}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(n-p-1)^{n-p-1}} \frac{1}{P^p} \frac{1}{\mathfrak{X}(A_0)}} \quad (i = p+1, \dots, n)$$

et *a fortiori*, quel que soit  $p$ ,

$$\boxed{\mathfrak{X}(Z_i) \leq \frac{\mathfrak{X}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathfrak{X}(A_0)}}.$$

Les limitations relatives au premier cas ( $p = 0$ ) s'obtiendraient en remplaçant, dans les seconds membres des inégalités précédentes,  $p$  par *zéro* et  $P^p$  par *un*.

*Conclusion fondamentale.* — Si pour certaines valeurs des paramètres  $t$  on réduit la forme  $\varphi$  dont  $\delta$  est le déterminant, et si l'on fait la même substitution dans  $f$ , on obtient une forme  $F$  dont tous les coefficients sont limités supérieurement en valeur absolue en fonction de la quantité  $\frac{\mathfrak{X}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ , qui ne dépend que de la forme  $\varphi$ .

En effet, F étant égale à

$$A_0 Y^p (X - Z_{p+1} Y) \dots (X - Z_n Y),$$

tous ses coefficients seront des polynomes en  $Z_{p+1}, \dots, Z_n$ . Par la méthode connue des majorantes, on calculera pour chacun de ces coefficients une limite supérieure qui sera une fonction de la quantité  $\frac{\mathfrak{N}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ ; pour préciser, ce sera une puissance de cette quantité dont l'exposant sera fixé par le rang du coefficient calculé dans F, multipliée par un facteur indépendant de la quantité  $\frac{\mathfrak{N}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ , facteur qui dépendra du degré de la forme et renfermera en général  $|A_0|$  au dénominateur à une certaine puissance. *Si la forme proposée est à coefficients entiers,  $A_0$  sera un entier certainement non nul* (1); on aura donc  $|A_0| \geq 1$  et l'on pourra remplacer dans le facteur en question la lettre  $A_0$  du dénominateur par l'unité; on ne fera ainsi qu'accroître le second membre de la limitation trouvée. *Tous les coefficients de F sans exception seront ainsi limités supérieurement en valeur absolue en fonction de la seule quantité  $\frac{\mathfrak{N}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ .*

Cette quantité  $\theta = \frac{\mathfrak{N}(a_0) \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$  joue donc un rôle essentiel dans la question. Étudions ses propriétés.

On remarque tout d'abord que, si l'on passe de  $f$  à une forme équivalente  $f_1$  par la substitution

$$\begin{aligned} x &= m x_1 + m_0 y_1, \\ y &= n x_1 + n_0 y_1, \end{aligned}$$

la forme  $\varphi$  associée à  $f$  pour les valeurs  $t$  des paramètres se transforme en la forme  $\varphi_1$  associée à  $f_1$  pour des valeurs  $\tau$  des paramètres que nous savons liées aux  $t$  par des relations connues

$$\tau_i^2 = t_i^2 \mathfrak{N}(m - z_i n) \quad \text{si} \quad m - z_i n \neq 0$$

et

$$\tau_i^2 = \frac{t_i^2}{\mathfrak{N}(n)} \quad \text{si} \quad m - z_i n = 0.$$

Le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$  est égal à celui  $\delta_1$  de  $\varphi_1$  dans ces conditions, et l'on sait d'autre part que l'on a, entre les premiers coefficients non nuls  $a_0$  de  $f$  et  $a_0^1$  de  $f_1$  la relation,

$$\frac{\mathfrak{N}(a_0)}{t_1^2 \dots t_n^2} = \frac{\mathfrak{N}(a_0^1)}{\tau_1^2 \dots \tau_n^2}.$$

---

(1) En effet,  $A_0$  est le premier coefficient non nul de  $F(X, Y)$  ordonnée par rapport aux puissances croissantes de  $Y$ , et  $F(X, Y)$  n'est pas identiquement nulle.

Donc  $\theta = \theta_1$ .

D'où la conclusion : *Pour deux formes équivalentes, et pour des valeurs correspondantes des paramètres, la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs.*

Les deux conséquences suivantes, fondamentales pour la théorie de la réduction, se tirent de là :

1° Les fonctions  $\theta$  et  $\theta_1$ , relatives à deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$ , prennent les mêmes valeurs lorsque les variables  $t$  prennent toutes les valeurs possibles; elles ont donc *même minimum*; par définition, *ce minimum sera le déterminant de la forme binaire de degré  $n$  (1)*, il est le même pour toute la classe équivalente à  $f$ .

2° Les formes quadratiques  $\varphi$  et  $\varphi_1$ , à indéterminées conjuguées associées à deux formes  $f$  et  $f_1$ , avec les valeurs  $t$  d'une part,  $\tau$  de l'autre, qui donnent le minimum des fonctions  $\theta$  et  $\theta_1$ , deviendront équivalentes en même temps que  $f$  et  $f_1$ . Ainsi  $\varphi_1$  se déduira de  $\varphi$  par la même substitution que  $f_1$  de  $f$ . Il est donc naturel d'appeler *correspondante de  $f$*  la forme quadratique à indéterminées conjuguées  $\varphi$  pour les valeurs de  $t$  qui rendent  $\theta$  minimum.

Nous appellerons *réduites d'une forme  $f$*  la forme unique, ou les formes de l'ensemble ( $f$ ) qui correspondent à ce minimum de  $\theta$ . On peut les caractériser d'un mot : *c'est celle ou celles des formes de ( $f$ ) dont la ou les correspondantes sont des formes quadratiques réduites*. Voici comment on trouvera la réduite de  $f$ . On déterminera d'abord les valeurs de  $t$  qui rendent  $\theta$  minimum, ce qui donnera la forme  $\varphi$  correspondante quadratique de  $f$ , puis  $S$  étant la substitution qui réduit la correspondante,  $fS$  sera la réduite de  $f$ .

De là se conclut facilement :

1° *Deux formes équivalentes  $f$  et  $f_1$  ont les mêmes réduites*. Cela résulte de ce que les correspondantes  $\varphi$  et  $\varphi_1$  de deux formes équivalentes se déduisent l'une de l'autre par la même substitution  $\Sigma$  que celle qui fait passer de  $f$  à  $f_1$ ,

$$\begin{aligned} f_1 &= f\Sigma, \\ \varphi_1 &= \varphi\Sigma. \end{aligned}$$

Alors si  $S_1$  réduit  $\varphi_1$ ,  $f_1 S_1$  sera une réduite de  $f_1$ . Mais  $f_1 S_1 \equiv f \cdot \Sigma S_1$ . Or  $\Sigma S_1$  est, à cause de  $\varphi_1 = \varphi\Sigma$ , la substitution qui réduit  $\varphi$ , car

$$\varphi_1 S_1 = (\varphi\Sigma)S_1 = \varphi(\Sigma S_1)$$

est une forme réduite. Donc  $f \cdot \Sigma S_1$  est une réduite de  $f$ , et l'on vient de voir

(1) Nous appellerons *formes binaires de même déterminant* l'ensemble des formes d'un même degré, pour lesquelles le minimum absolu de la fonction  $\theta$  aura une même valeur.

qu'elle est identique à une réduite de  $f_1$ ,

$$f \cdot \Sigma S_1 = (f \Sigma) S_1 = f_1 S_1.$$

Cette proposition ramène l'équivalence de deux formes à l'égalité absolue entre leurs réduites ou leurs groupes de réduites.

2° *Les formes à coefficients entiers, de même déterminant  $\theta$ , se distribuent en un nombre fini de classes.*

Effectivement, si  $f$  a ses coefficients entiers, une réduite équivalente  $F$  les a aussi. On a vu qu'alors les valeurs absolues des coefficients de  $F$  étaient limitées supérieurement en fonction de la seule quantité  $\theta$ , *limites supérieures qui sont donc fixées par la connaissance de  $\theta$  et par le degré de la forme* (ces limites ne renfermant plus au dénominateur le premier coefficient non nul de  $F$ ). On cherchera alors toutes les formes réduites de type

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \dots + A_n Y^n \quad (A_0 \neq 0) \quad \text{correspondant à } p = 0,$$

puis celles

$$A_0 X^{n-1} Y + \dots \quad (A_0 \neq 0) \quad \text{»} \quad p = 1,$$

puis celles

$$A_0 X^{n-2} Y^2 + \dots \quad (A_0 \neq 0) \quad \text{»} \quad p = 2, \dots$$

ayant le déterminant  $\theta$ .

*Pour chacun de ces types, les coefficients entiers étant limités supérieurement en valeur absolue, on n'aura qu'un nombre limité de possibilités, qu'on trouvera en se servant des limitations (dépendant de  $p$ ) que nous avons données plus haut pour  $\mathfrak{A}(A_0)$  et pour les normes des racines d'une réduite. Comme on ne peut trouver ainsi qu'un nombre fini de réduites, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de classes pour un déterminant donné  $\theta$ .*

*L'existence du minimum de la fonction  $\theta$ .* — Nous nous bornerons au cas général où  $f$  a toutes ses racines distinctes et finies. A cette catégorie appartiennent les formes et les plus intéressantes au point de vue arithmétique, à savoir *les formes irréductibles dans le domaine des nombres rationnels complexes*, c'est-à-dire indécomposables en produit de deux formes à coefficients rationnels. C'est ce qui résulte de la théorie de Lagrange pour la recherche des racines multiples d'une équation. Une forme irréductible a *toutes ses racines distinctes, finies et irrationnelles* (par conséquent la réduite d'une telle forme étant aussi irréductible, il faudra supposer le nombre  $p$  de notre théorie égal à zéro).

$\varphi$  étant l'associée de  $f = a_0(x - z_1 y) \dots (x - z_n y)$ , on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^n t_i^2 \mathfrak{U}(x - z_i y) = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

avec

$$p = \sum_{i=1}^n t_i^2,$$

$$q = \sum_{i=1}^n t_i^2 z_i',$$

$$q' = \sum_{i=1}^n t_i^2 z_i,$$

$$r = \sum_{i=1}^n t_i^2 \mathfrak{U}(z_i),$$

$$\delta = pr - qq' = \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \mathfrak{U}(z_i) \right) - \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 z_i' \right) \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 z_i \right)$$

peut s'écrire par un calcul bien simple

$$\delta = \sum_{i,j=1}^n t_i^2 t_j^2 \mathfrak{U}(z_i - z_j),$$

la sommation étant étendue à toutes les *combinaisons* de deux entiers  $i, j$  différents pris dans la suite  $1, 2, \dots, n$ .

Dans ces conditions, la fonction  $\theta$  est

$$\theta = \frac{\mathfrak{U}(a_0) [\sum t_i^2 t_j^2 \mathfrak{U}(z_i - z_j)]^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$$

et en posant  $t_i^2 = \lambda_i$ , et en remarquant que, les racines étant toutes distinctes, on a, quel que soit  $i, j$ ,

$$a \leq \mathfrak{U}(z_i - z_j) \leq A$$

( $a$  et  $A$  étant deux nombres positifs convenables)

$$\frac{\mathfrak{U}(a_0) a^{\frac{n}{2}} [\sum \lambda_i \lambda_j]^{\frac{n}{2}}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} \leq \theta \leq \frac{\mathfrak{U}(a_0) A^{\frac{n}{2}} [\sum \lambda_i \lambda_j]^{\frac{n}{2}}}{\lambda_1 \dots \lambda_n}.$$

Sous cette forme, le même raisonnement que celui déjà fait dans la première Partie prouve que  $\theta$  atteint son minimum absolu pour un système au moins de valeurs  $T_1^2, \dots, T_n^2$  des paramètres qui sont toutes différentes de zéro.

Nous allons maintenant appliquer la théorie aux formes cubiques et biqua-

dratiques, puis nous examinerons ce qu'elle nous donne si la forme proposée a ses coefficients tous réels, nous verrons que nous retomberons sur la méthode donnée dans la première Partie sur l'inspiration d'Hermite; mais nous verrons aussi l'unité et la lumière que jette la nouvelle méthode dans la théorie des formes à coefficients réels, en donnant *une seule définition de la réduction*, que la forme ait ses racines toutes réelles, ou bien ait des racines réelles et des racines imaginaires; nous verrons enfin pourquoi l'équation qui relie le déterminant d'une forme binaire à coefficients réels aux coefficients de cette forme est indépendante des hypothèses qu'on peut faire quant à la réalité des racines : c'est là une question qui préoccupait Hermite, ainsi que l'attestent les quelques lignes suivantes extraites de ses *Œuvres* (pages 92 et 93 du Tome I) : « *On observe alors cette circonstance remarquable que, pour chaque degré, c'est toujours la même équation en  $D$  <sup>(1)</sup> qui vient s'offrir, bien que les calculs par lesquels on y arrive diffèrent beaucoup <sup>(2)</sup>, suivant le nombre des racines réelles et imaginaires, mais je n'ai pu jusqu'à présent découvrir la raison générale de ce fait important* » <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> Hermite considère  $D = \sqrt{\delta}$ .

<sup>(2)</sup> Comme nous l'avons vu dans la première Partie.

<sup>(3)</sup> Il ne semble pas qu'Hermite soit jamais revenu là-dessus dans la suite.

## CHAPITRE III.

APPLICATION AUX FORMES QUADRATIQUES, CUBIQUES, BIQUADRATIQUES

*La forme quadratique de Dirichlet.* — Soit

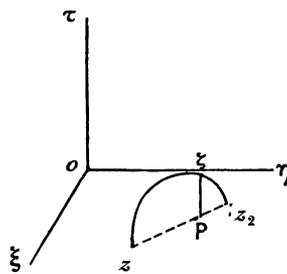
$$f = a_0(a - z_1 y)(x - z_2 y)$$

une forme quadratique à coefficients quelconques. Son associée est

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{R}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{R}(x - z_2 y);$$

son point représentatif  $\zeta$  décrit la droite non euclidienne  $z_1 z_2$ . Il se projette

Fig. 49.



en  $P$  sur  $z_1 z_2$  et

$$\frac{\overline{Pz_1}}{\overline{Pz_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Le déterminant de  $\varphi$  est

$$\begin{aligned} \delta &= (t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 z_1 z_1' + t_2^2 z_2 z_2') - (t_1^2 z_1 + t_2^2 z_2)(t_1^2 z_1' + t_2^2 z_2') \\ &= t_1^2 t_2^2 \mathfrak{R}(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\mathfrak{R}(a_0) \delta}{t_1^2 t_2^2} = \mathfrak{R}(z_1 - z_2) \mathfrak{R}(a_0),$$

$\theta$  est constant quels que soient  $t_1$  et  $t_2$ . Toutes les formes  $\varphi$  sont donc correspondantes de  $f$ , et toutes les formes ( $f$ ) associées à  $f$  par la réduction continue sont des réduites de  $f$ . Toutes ces formes réduites ( $f$ ) sont les formes équivalentes à  $f$  dans le groupe de Picard, dont le demi-cercle représentatif ( $z_1 z_2$ ) a avec  $\Pi_0$  au moins un point commun.

On retrouve bien la conception de la réduction présentée par M. Bianchi.

*La forme cubique.* — Soit

$$f = a(x - z_1 y)(x - z_2 y)(x - z_3 y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + d$$

la forme proposée.

Son associée sera

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{U}(x - z_2 y) + t_3^2 \mathfrak{U}(x - z_3 y).$$

Son point représentatif  $\zeta$  est un point de la sphère qui a pour grand cercle le cercle circonscrit au triangle  $z_1 z_2 z_3$ , projeté sur le plan  $O\xi\eta$  en P barycentre euclidien des points  $z_1, z_2, z_3$  affectés des masses  $t_1^2, t_2^2, t_3^2$ .  $\delta$  désignant le déterminant de  $\varphi$ ,

$$\delta = t_1^2 t_2^2 \mathfrak{U}(z_1 - z_2) + t_2^2 t_3^2 \mathfrak{U}(z_2 - z_3) + t_3^2 t_1^2 \mathfrak{U}(z_3 - z_1),$$

il faut considérer la fonction

$$\theta = \frac{\mathfrak{U}(a) \delta^{\frac{3}{2}}}{t_1^2 t_2^2 t_3^2}$$

et chercher son minimum.

Il revient au même de chercher le minimum de  $\delta$  lorsque  $t_1^2, t_2^2, t_3^2$  varient en laissant le produit  $t_1^2 t_2^2 t_3^2$  constant puisqu'on sait : 1° que ce minimum de  $\theta$  est atteint pour des valeurs des  $t$  toutes différentes de zéro, et 2° que  $\theta$  ne change pas si tous les  $t$  sont multipliés par une même constante.

Or si  $t_1^2 t_2^2 t_3^2$  reste constant,  $\delta$  est une somme de trois termes à produit constant qui sera minimum lorsque ces termes seront égaux

$$t_1^2 t_2^2 \mathfrak{U}(z_1 - z_2) = t_2^2 t_3^2 \mathfrak{U}(z_2 - z_3) = t_3^2 t_1^2 \mathfrak{U}(z_3 - z_1),$$

d'où l'on tire, à un facteur près sans importance, les valeurs minimantes des  $t$

$$T_1^2 = \mathfrak{U}(z_2 - z_3),$$

$$T_2^2 = \mathfrak{U}(z_3 - z_1),$$

$$T_3^2 = \mathfrak{U}(z_1 - z_2).$$

La forme correspondante de  $f$  est dès lors

$$\varphi = \mathfrak{U}(z_2 - z_3)(x - z_1 y) + \mathfrak{U}(z_3 - z_1)(x - z_2 y) + \mathfrak{U}(z_1 - z_2)(x - z_3 y).$$

quant au minimum de  $\theta$  ce sera

$$\theta = \sqrt{27 \mathfrak{U}(a) \mathfrak{U}(z_1 - z_2) \mathfrak{U}(z_2 - z_3) \mathfrak{U}(z_3 - z_1)} \quad (1).$$

---

(1) On ne pourra s'empêcher de remarquer l'analogie des expressions précédentes avec celles trouvées dans la première Partie pour les formes cubiques ayant trois racines réelles.

Pour avoir la réduite de  $f$ , on réduira  $\varphi$  et l'on fera la même substitution dans  $f$ .

Le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  est lié simplement aux trois points  $A_1, A_2, A_3$  d'affixes  $z_1, z_2, z_3$  dans le plan  $O\xi\eta$ .

Soit  $\zeta_1$  barycentre non euclidien de  $A_2$  et  $A_3$  affectés de masses  $T_2^2, T_3^2$ .  
 $\zeta_2$  » »  $A_3$  et  $A_1$  «  $T_3^2, T_1^2$ ,  
 $\zeta_3$  » »  $A_1$  et  $A_2$  »  $T_1^2, T_2^2$ .

Évidemment  $\zeta$  sera à l'intersection des trois droites non euclidiennes  $A_1\zeta_1, A_2\zeta_2, A_3\zeta_3$ ;  $\zeta_1$  se projette en  $P_1$  et

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} = -\frac{T_3^2}{T_2^2} = -\frac{\Re(z_1 - z_2)}{\Re(z_3 - z_1)} = -\frac{\overline{A_1A_2}^2}{\overline{A_1A_3}^2}.$$

Or

$$\frac{\overline{P_1A_2}}{\overline{P_1A_3}} = -\frac{\overline{\zeta_1A_2}^2}{\overline{\zeta_1A_3}^2}$$

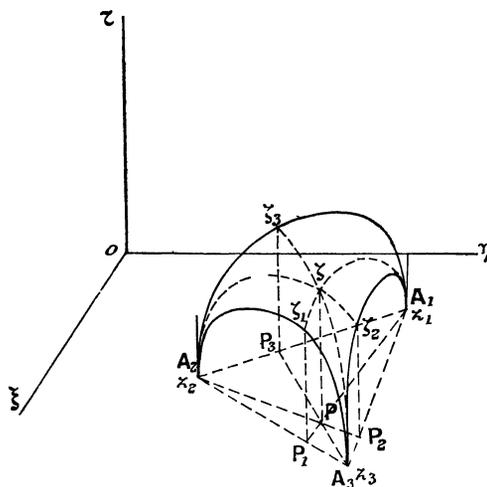
à cause du triangle rectangle  $\zeta_1A_2A_3$ ; donc

$$\frac{\overline{\zeta_1A_2}}{\overline{\zeta_1A_3}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}},$$

d'où suit que, si l'on considère la sphère passant par  $A_1$  du faisceau ayant  $A_2A_3$  pour points limites, cette sphère passe par  $\zeta_1$ .

Par rapport à cette sphère,  $A_2$  et  $A_3$  sont deux points inverses. Donc le

Fig. 50.



cercle  $A_2\zeta_1A_3$  est orthogonal à cette sphère, il est donc orthogonal à la droite non euclidienne  $\zeta_1A_1$  (cercle passant par  $\zeta_1A_1$ , orthogonal au

plan  $\xi O\eta$ . D'où l'on conclut que  $\zeta$  *cherché est l'intersection des hauteurs non euclidiennes du triangle non euclidien*  $A_1 A_2 A_3$ . Si l'on envisage la sphère menée par  $A_1$  du faisceau  $(A_2 A_3)$  et les deux autres sphères analogues : celle par  $A_2$  du faisceau  $(A_3 A_1)$ , celle par  $A_3$  du faisceau  $(A_1 A_2)$ , ces trois sphères se coupent suivant un même cercle réel, orthogonal au plan  $O\xi\eta$ , orthogonal à la sphère passant par  $A_1 A_2 A_3$  et orthogonal au plan  $O\xi\eta$ , cercle coupant cette dernière sphère au point  $\zeta$  cherché.

Faisons une inversion par rapport au pôle  $\zeta'$  symétrique de  $\zeta$  par rapport au plan  $O\xi\eta$ , le plan  $O\xi\eta$  devient une sphère  $S$ , et la sphère  $A_1 A_2 A_3 \zeta$  devient un plan passant par le centre  $s$  de  $S$  qui est l'inverse de  $\zeta$ . Dans ce plan diamétral  $a_1 a_2 a_3$  sont trois points du grand cercle de section, ce sont les inverses de  $A_1 A_2 A_3$  et  $s$  doit être l'orthocentre euclidien du triangle  $a_1 a_2 a_3$  puisque les trois droites non euclidiennes  $A_1 \zeta_1, A_2 \zeta_2, A_3 \zeta_3$  deviennent par l'inversion trois droites ordinaires  $sa_1, sa_2, sa_3$  orthogonales aux cercles menés respectivement par  $a_2$  et  $a_3, a_3$  et  $a_1, a_1$  et  $a_2$  orthogonalement à  $S$ , ce qui exige que  $sa_1, sa_2, sa_3$  soient perpendiculaires respectivement à  $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$ . De là se conclut aisément que  $a_1 a_2 a_3$  *doit être équilatéral*.

Les trois sphères 1° celle passant par  $A_1$  du faisceau  $(A_2 A_3)$   
 2° »  $A_2$  »  $(A_3 A_1)$   
 3° »  $A_3$  »  $(A_1 A_2)$

deviennent les trois plans menés par  $sa_1, sa_2, sa_3$  orthogonalement au plan  $a_1 a_2 a_3$ . Ces trois plans se coupent suivant l'axe du grand cercle  $a_1 a_2 a_3$ , qui est l'inverse du cercle commun aux trois sphères précédentes.

Nous arrivons ainsi, tout naturellement, par la méthode de réduction continue à la représentation géométrique du covariant quadratique hessien de la forme cubique donnée par M. Klein au Tome IX des *Mathematische Annalen*;  $a_1, a_2, a_3$  représentent les trois racines aux trois sommets d'un triangle équilatéral, inscrit dans un grand cercle, le covariant quadratique a pour racines les deux pôles de ce grand cercle. L'axe de ce grand cercle est d'ailleurs un axe de rotation d'ordre trois du triangle  $a_1 a_2 a_3$ . Revenant à la figure primitive *le cercle  $\Gamma$  mené par  $\zeta$  orthogonalement à la sphère de grand cercle  $A_1 A_2 A_3$  sera l'axe d'une rotation non euclidienne d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  qui ramène le triangle non euclidien  $A_1 A_2 A_3$  sur lui-même*. D'où l'on conclut enfin que les trois droites non euclidiennes  $\zeta A_1, \zeta A_2, \zeta A_3$  font entre elles des angles de  $\frac{2\pi}{3}$  (1).

(1) Sans insister sur ce fait, on reconnaîtra aisément que les droites non euclidiennes  $\zeta A_1, \zeta A_2, \zeta A_3$  percent à nouveau le plan  $O\xi\eta$  en trois points  $A'_1, A'_2, A'_3$  qui représentent les racines du *covariant cubique* de la forme proposée.  $\zeta$  est aussi l'orthocentre non euclidien du triangle  $A'_1 A'_2 A'_3$  et l'on voit apparaître ce théorème d'Hermite (*Œuvres*, t. I, p. 434-436) :

*Une forme cubique et son covariant cubique ont même correspondante, et par conséquent sont simultanément des formes réduites ou non réduites.*

Rien de plus facile d'ailleurs que de vérifier par le calcul ce résultat évident par les relations géométriques précédentes : que le cercle  $\Gamma$  (ou la forme quadratique de Dirichlet qu'il représente) est covariant de la forme  $f$ . Ceci est évident géométriquement, car par toute substitution  $S$  qui transforme  $f$  en une forme équivalente  $f_1$ , et par la transformation  $T$  du demi espace qu'elle définit, le représentatif  $\zeta$  de  $f$  devient le représentatif  $\zeta_1$  de  $f_1$ , et, comme les  $T$  sont des mouvements non euclidiens conservant les angles, le cercle  $\Gamma$  défini pour  $f$  devient le cercle  $\Gamma_1$  défini pour  $f_1$ .

Si l'on veut calculer explicitement la forme de Dirichlet représentée par  $\Gamma$ , il suffit de remarquer que la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  autour de l'axe non euclidien  $\Gamma$  est une relation homographique qui s'écrit

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (z', z_2, z_3, z_1).$$

Ses points doubles, qui sont les points où  $\Gamma$  perce le plan  $O\xi\eta$ , sont donnés par l'équation

$$(z, z_1, z_2, z_3) - (z, z_2, z_3, z_1) = 0$$

ou en développant

$$(z - z_2)(z - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)^2(z_1 - z_2)^2 = 0$$

ou bien

$$A z^2 + B z + C = 0$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_1)(z_3 - z_2), \\ B &= -2z_3(z_1 - z_2) - (z_1 + z_2)(z_3 - z_2)(z_3 - z_1), \\ C &= z_3^2(z_1 - z_2) + z_1 z_2 (z_3 - z_2)(z_3 - z_1); \end{aligned}$$

$z_1, z_2, z_3$  étant racines de

$$f(z, 1) = a z^3 + 3 b z^2 + 3 c z + d = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} A &= \frac{9(b^2 - ac)}{a^2}, \\ B &= \frac{9(bc - ad)}{a^2}, \\ C &= \frac{9(c^2 - bd)}{a^2}. \end{aligned}$$

La forme quadratique de Dirichlet représentée par  $\Gamma$  étant

$$A x^2 + B xy + C y^2$$

pourra se réduire à

$$(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2$$

et l'on reconnaît là le hessien de la forme  $f$ , à un facteur numérique près, et

aussi la forme d'Eisenstein changée de signe à laquelle nous avait déjà conduit dans la première Partie la réduction de la forme cubique à trois racines réelles (1).

Mais remarquons que la méthode de réduction continue nous conduit non seulement au covariant quadratique ordinaire de  $f$ , mais encore à un covariant nouveau qui est la forme  $\varphi$  correspondante de  $f$  et qui est une *forme à indéterminées conjuguées*. Par toute transformation

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, & x' = \alpha' X' + \beta' Y' \\ y = \gamma X + \delta Y, & y' = \gamma' X' + \delta' Y' \end{cases} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

qui transforme une forme  $f$  en une forme  $f_1$  équivalente, la forme  $\varphi$  correspondante de  $f$  se transforme (à un facteur constant près) en la forme  $\varphi_1$  correspondante de  $f_1$ , et c'est là la caractéristique des covariants. Je ne pense pas qu'on ait déjà songé à ces covariants d'une nature particulière que peuvent constituer des formes à indéterminées conjuguées.

*Remarque.* — Si la forme  $f$  a ses coefficients réels, notre méthode, pour être bonne, doit conduire aux mêmes résultats que dans la première Partie. Dans ce cas :

1° Les trois racines sont réelles, alors  $z_1, z_2, z_3$  sont sur l'axe  $O\xi$ , le triangle non euclidien  $z_1 z_2 z_3$  est dans le plan  $\xi O\tau$ , et c'est le demi-plan  $\eta = 0, \tau > 0$  qui joue le rôle de demi-plan analytique dans la première Partie. Le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  (2) est bien celui auquel nous avait conduit la méthode d'Hermite. La substitution à faire (3) pour amener  $\zeta$  dans  $\Pi_0$  est une *substitution réelle* puisque, le demi-plan  $\xi O\tau (\tau > 0)$  découpant dans la division de Picard la division modulaire de ce demi-plan, amener  $\zeta$  dans  $\Pi_0$  c'est faire une substitution du groupe de Picard qui conserve le demi-plan  $\xi O\tau$  et dans ce demi-plan amène  $\zeta$  dans  $\omega_0$ , domaine fondamental de la division modulaire de ce demi-plan. La substitution réductrice  $S$  à laquelle on se trouve conduit est

(1) On peut remarquer que, si  $f$  est réduite,  $\zeta$  est dans  $\Pi_0$ , donc  $\Gamma$  coupe  $\Pi_0$ , et la forme d'Eisenstein est une forme quadratique de Dirichlet réduite. Une condition nécessaire pour que  $f$  soit réduite est donc que la forme d'Eisenstein associée soit aussi réduite. Mais la condition n'est pas suffisante.

(2) Dans ce cas la forme d'Eisenstein est une forme quadratique définie à coefficients réels. Considérée comme forme de Dirichlet elle est représentée par un cercle d'axe  $O\xi$  mené par  $\zeta$  orthocentre non euclidien du triangle non euclidien  $z_1 z_2 z_3$ . L'affixe de  $\zeta$  par rapport aux axes  $O\xi$  et  $O\tau$  est égal à l'affixe de la racine de cette forme d'Eisenstein située dans le demi-plan analytique  $\eta > 0$ .

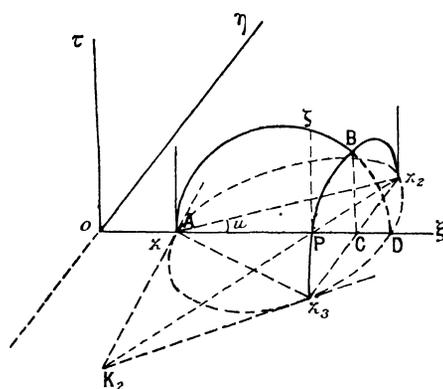
(3) Voir sur ce sujet la Note *Sur les substitutions réelles modulaires envisagées dans le groupe de Picard* que nous donnons au Chapitre suivant.

la même que celle à laquelle aurait conduit la méthode d'Hermite exposée dans la première Partie (1).

2° Il n'y a qu'une racine réelle. Alors le triangle non euclidien  $z_1 z_2 z_3$  est symétrique par rapport au plan  $\xi O \tau$ . Le point  $\zeta$  est encore dans ce plan  $O \xi \tau$ .

Pour l'avoir il faut considérer le cercle de diamètre  $z_2 z_3$ , orthogonal au plan  $O \xi \eta$ ; ce plan coupe  $\xi O \tau$  en B dont l'affixe par rapport aux axes  $O \xi$ ,  $O \tau$  de ce plan est égal à  $z_2$  (d'ailleurs  $z_3 = z_2'$ ).  $\zeta$  sera sur le cercle orthogonal à  $O \xi$  passant par AB, c'est un résultat déjà trouvé dans la première Partie. Ce cercle

Fig. 51.



n'est autre que le cercle  $z_1 z_2 z_3$  qu'on a fait tourner de  $90^\circ$  autour de  $O \xi$  de façon à amener  $z_2$  en B.  $\zeta$  se projettera en P, au point de rencontre de  $O \xi$  avec la droite joignant  $z_2$  au point de concours  $K_2$  des tangentes en  $z_1 z_3$  au cercle  $z_1 z_2 z_3$ . (En effet on peut remarquer, dans le cas général de la réduction de la forme cubique, que la projection de  $\zeta$  sur  $O \xi \eta$  est l'intersection des trois

(1) Il y a toutefois une remarque à faire :  $\zeta$  étant dans le demi-plan  $O \xi \tau$  appartient à la fois à deux pentaèdres  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , symétriques par rapport à ce plan. La substitution qui amène sur  $\Pi_0$  celui des deux pentaèdres  $\Pi_1$  qui est du même côté que  $\Pi_0$  par rapport au plan  $O \xi \tau$  est une substitution réelle S, elle conserve le demi plan analytique  $O \xi \eta$  ( $\eta > 0$ ) et le demi-plan  $O \xi \tau$ . C'est celle là qui est la substitution à laquelle on est conduit dans la première Partie pour réduire  $f$ . Pour amener  $\Pi_2$  sur  $\Pi_0$  il faut l'amener d'abord sur  $\Pi_0'$  symétrique de  $\Pi_0$  par rapport au plan  $O \xi \tau$  et ceci se fait par S, puis amener  $\Pi_0'$  sur  $\Pi_0$ . ce qui se fait par la substitution

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x = iX, \\ y = -iY, \end{cases}$$

en sorte que la substitution  $S\Sigma$  qui amène  $\Pi_2$  sur  $\Pi_0$  n'est pas à coefficients réels. d'ailleurs elle conserve le demi-plan  $O \xi \tau$  mais échange le demi-plan  $\eta > 0$  en  $\eta < 0$  dans  $O \xi \eta$ ; en sorte que  $S\Sigma$ , proprement modulaire dans le groupe de Picard, est improprement modulaire dans le groupe de substitutions réelles si on la considère après division des seconds membres par  $i$   $\left[ \begin{matrix} x = X \\ y = -Y \end{matrix} \right]$  a en effet le déterminant  $(-1)$ . On n'envisagera donc que la forme  $fS$  pour avoir les mêmes résultats que dans la première Partie.

droites  $z_1 K_1, z_2 K_2, z_3 K_3, K_1$  étant l'intersection des tangentes en  $z_2$  et  $z_3$  au cercle  $z_1 z_2 z_3, \dots$ )

Mais il est clair qu'alors, si D désigne le point où le cercle  $z_1 z_2 z_3$  coupe  $O\xi$ , on aura

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -2 \frac{\overline{DC}}{\overline{DA}}.$$

En effet, un calcul élémentaire montre que

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{Cz_2}}{\overline{K_2 A}} = -2 \sin^2 u$$

en posant  $u = \widehat{DA z_2}$  et l'on trouve immédiatement

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} = \sin^2 u,$$

d'où la relation en question qui est bien celle que nous avons trouvée dans la première Partie (1).

Les résultats trouvés dans les deux cas différents de la première Partie, sous lesquels se présentait la forme cubique, sont, avec notre méthode, les deux aspects sous lesquels se présente un seul et même résultat général obtenu précédemment sur la forme cubique générale.

*La forme biquadratique.* — Prenons la forme

$$f = a(x - z_1 y)(x - z_2 y)(x - z_3 y)(x - z_4 y)$$

et son associée

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + \dots + t_4^2 \mathfrak{U}(x - z_4 y).$$

Les propriétés connues du barycentre non euclidien prouvent que  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  sera le barycentre non euclidien des deux points  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$ , ainsi définis :

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta_{1,2}, & \text{de masse} & t_1^2 + t_2^2, & \text{est barycentre non euclidien de} & z_1 & \text{et} & z_2, \\ \zeta_{3,4}, & & t_3^2 + t_4^2, & & z_3 & \text{et} & z_4 \end{array}$$

$\zeta_{1,2}$  représente la forme

$$t_1^2 \mathfrak{U}(x - z_1 y) + t_2^2 \mathfrak{U}(x - z_2 y);$$

(1) D'ailleurs on voit que dans ce cas la forme d'Eisenstein, qui, on le sait, est représentée par le demi-cercle issu de  $\zeta$  orthogonal à la sphère  $\zeta z_1 z_2 z_3$ , a son cercle représentatif dans le plan  $O\xi\tau$  (puisque la sphère de grand cercle  $z_1 z_2 z_3$  est orthogonale à ce plan). Cette forme d'Eisenstein a donc ses deux racines réelles.

C'est donc une forme quadratique à coefficients réels indéfinie. D'où un moyen bien simple de distinguer les deux cas que peuvent présenter les formes cubiques à coefficients réels, selon que la forme quadratique d'Eisenstein correspondante est définie ou indéfinie.

il décrit le demi-cercle de diamètre  $z_1 z_2$  orthogonal au plan  $O\xi\eta$ . Si l'on remarque que le déterminant de  $t_1^2 \Re(x - z_1, y) + t_2^2 \Re(x - z_2, y)$  n'est pas autre chose que  $t_1^2 t_2^2 \Re(z_1 - z_2)$ , on voit qu'on peut écrire

$$t_1^2 \Re(x - z_1, y) + t_2^2 \Re(x - z_2, y) = t_1 t_2 \varphi_1,$$

$\varphi_1$  étant une forme quadratique positive à indéterminées conjuguées de déterminant fixe  $\Re(z_1 - z_2) = \delta_1$  dont le point représentatif  $\zeta_{1,2}$  est un point quelconque de la droite non euclidienne  $z_1 z_2$ .

En définitive on peut écrire

$$\varphi = \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2, \quad \text{en posant} \quad \lambda_1^2 = t_1 t_2, \quad \lambda_2^2 = t_3 t_4,$$

$\varphi_1$  étant une forme d'Hermite définie de déterminant fixe  $\delta_1 = \Re(z_1 - z_2)$  dont le point représentatif est quelconque sur la droite non euclidienne  $z_1 z_2$ ;  $\varphi_2$  une forme d'Hermite définie de déterminant  $\delta_2 = \Re(z_3 - z_4)$  dont le point représentatif est quelconque sur la droite non euclidienne  $z_3 z_4$ .  $\varphi$  dépend bien de quatre paramètres  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , ou bien  $\lambda_1, \lambda_2$ , le paramètre dont dépend  $\varphi_1$  et le paramètre dont dépend  $\varphi_2$ .

La décomposition précédente de  $\varphi$  peut d'ailleurs se faire de trois manières correspondant aux trois façons d'accoupler les racines deux à deux :

$$(z_1 z_2) \text{ et } (z_3 z_4); \quad (z_1 z_3) \text{ et } (z_2 z_4); \quad (z_1 z_4) \text{ et } (z_2 z_3).$$

Ceci étant rappelé qui rapproche ce que nous disons du dernier Chapitre de la première Partie où l'on a exposé une nouvelle façon d'envisager la méthode de réduction continue d'Hermite, il faut considérer

$$\theta = \frac{\Re(\alpha) \delta^2}{t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2}$$

et chercher son minimum.

Il revient au même de chercher le minimum de

$$\frac{\delta}{t_1 t_2 t_3 t_4} = \frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

en vertu des relations qui rattachent les  $t$  aux  $\lambda$ .

Or si

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_1 x x' - q_1 x y' - q_1' x' y + r_1 y y' & \text{on a} \quad p_1 r_1 - q_1 q_1' &= \delta_1 \text{ fixe} = \Re(z_1 - z_2); \\ \varphi_2 &= p_2 x x' - q_2 x y' - q_2' x' y + r_2 y y' & \text{on a} \quad p_2 r_2 - q_2 q_2' &= \delta_2 \text{ fixe} = \Re(z_3 - z_4). \end{aligned}$$

$\lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2$  a pour déterminant

$$\delta = \lambda_1^2 \delta_1 + \lambda_2^2 \delta_2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 (p_1 r_2 + p_2 r_1 - q_1 q_2' - q_2 q_1').$$

Et il faut chercher pour quelles valeurs de  $\lambda_1, \lambda_2$  et pour quelles positions des

points représentatifs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sur leurs lieux  $\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$  est minimum. La recherche est toute pareille à celle du dernier Chapitre de la première Partie,

$$\frac{\delta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2 \right) + (p_1 r_2 + p_2 r_1 - q_1 q'_2 - q_2 q'_1).$$

$\delta$  est la somme de deux parenthèses dont la première ne dépend que de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , dont la seconde ne dépend que des formes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Le minimum s'obtiendra en prenant à la fois le minimum de chacune des parenthèses.

1°  $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2$  est une somme de deux termes dont le produit est constant.

Elle sera minimum lorsque

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \delta_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \delta_2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\delta_1}}.$$

Il est facile de voir que le barycentre  $\zeta$  des deux points  $\zeta_{12}$  et  $\zeta_{34}$  représentatifs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  affectés des masses ci-contre est le milieu non euclidien des deux points  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{34}$ .

En effet, l'affixe de la projection P de  $\zeta$  est  $\frac{\lambda_1^2 q'_1 + \lambda_2^2 q'_2}{\lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2}$ .

L'affixe de la projection  $P_{12}$  de  $\zeta_{12}$  est  $\frac{q'_1}{p_1}$ .

L'affixe de la projection  $P_{34}$  de  $\zeta_{34}$  est  $\frac{q'_2}{p_2}$ .

L'affixe de P s'écrit

$$\frac{\lambda_1^2 p_1}{\lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2} \frac{q'_1}{p_1} + \frac{\lambda_2^2 p_2}{\lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2} \frac{q'_2}{p_2}$$

et l'on voit ainsi que P est sur  $P_{12} P_{34}$  avec

$$\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{PP_{34}}} = - \frac{\lambda_2^2 p_2}{\lambda_1^2 p_1} = - \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2}} \frac{p_2}{p_1}$$

La cote  $\overline{P_{12}\zeta_{12}}$  de  $\zeta_{12}$  est comme on sait  $\frac{\sqrt{\delta_1}}{p_1}$ .

La cote  $\overline{P_{34}\zeta_{34}}$  de  $\zeta_{34}$  est comme on sait  $\frac{\sqrt{\delta_2}}{p_2}$ .

Donc

$$\frac{\overline{P_{12}\zeta_{12}}}{\overline{P_{34}\zeta_{34}}} = \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2}} \frac{p_2}{p_1}.$$

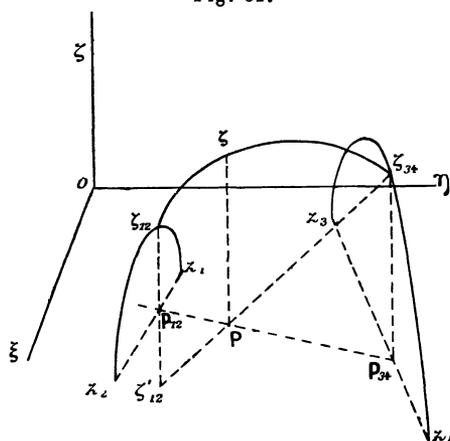
Donc

$$\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{PP_{34}}} = - \frac{\overline{P_{12}\zeta_{12}}}{\overline{P_{34}\zeta_{34}}}.$$

Donc P est l'intersection de  $P_{12}P_{34}$  avec la droite joignant  $\zeta_{31}$  à  $\zeta'_{12}$  symétrique de  $\zeta_{12}$  par rapport au plan  $O\xi\eta$ .

Donc enfin  $\zeta$  est milieu non euclidien de  $\zeta_{12}$  et  $\zeta_{34}$ .

Fig. 52.



2° Il faut enfin chercher les positions de  $\zeta_{12}$  et  $\zeta_{34}$  sur leurs lieux qui rendent

$$p_1 r_2 + p_2 r_1 - q_1 q'_2 - q_2 q'_1 \text{ minimum.}$$

Or si l'on passe pour un instant à la représentation projective des formes, il est facile d'interpréter cette quantité.

Avec cette représentation  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sont quatre points de la sphère  $\Sigma$  qui représentent les quatre formes  $\mathfrak{K}(x - z_1 y), \dots, \mathfrak{K}(x - z_4 y)$ .  $\zeta_{12}$  est un point variable du segment  $z_1 z_2$  qui représente la forme

$$\varphi_1 = p_1 x x' - q_1 x y' - q'_1 x' y + r_1 y y'$$

de déterminant fixe  $\delta_1 = \mathfrak{K}(z_1 - z_2)$ ; ses coordonnées homogènes sont  $p_1, q_1, q'_1, r_1$ .  $\zeta_{34}$  est un point variable du segment  $z_3 z_4$  qui représente la forme

$$\varphi_2 = p_2 x x' - q_2 x y' - q'_2 x' y + r_2 y y'$$

de déterminant fixe  $\delta_2 = \mathfrak{K}(z_3 - z_4)$ ; ses coordonnées homogènes sont  $p_2, q_2, q'_2, r_2$ .

Cherchons quelles positions de  $\zeta_{12}$  et  $\zeta_{34}$  sur leurs lieux respectifs rendent

$$d = p_1 r_2 + p_2 r_1 - q_1 q'_1 - q_2 q'_2 \text{ minimum.}$$

$d$  s'introduit si l'on cherche les points où la droite  $\zeta_{12}\zeta_{34}$  coupe  $\Sigma$ ; leurs coordonnées sont de la forme

$$p_1 + p_2 \lambda, \quad q_1 + q_2 \lambda, \quad q'_1 + q'_2 \lambda, \quad r_1 + r_2 \lambda,$$

où  $\lambda$  vérifie l'équation

$$(p_1 + p_2\lambda)(r_1 + r_2\lambda) - (q_1 + q_2\lambda)(q'_1 + q'_2\lambda) = 0, \\ \lambda^2\delta_2 + \lambda d + \delta_1 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles, car  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$  étant intérieurs à  $\Sigma$ , la droite qui les joint coupe la sphère en deux points réels.

D'ailleurs  $d^2 - 4\delta_1\delta_2 > 0$  en vertu de la relation

$$\frac{d}{p_1 p_2} = \frac{\delta_1}{p_1^2} + \frac{\delta_2}{p_2^2} + \mathfrak{K} \left( \frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2} \right)$$

qui montre que  $d > 0$ , car on peut supposer  $p_1$  et  $p_2$  positifs, d'où se tire

$$\frac{d^2}{p_1^2 p_2^2} = \frac{\delta_1^2}{p_1^4} + \frac{\delta_2^2}{p_2^4} + \frac{2\delta_1\delta_2}{p_1^2 p_2^2} + \text{des termes positifs comme } \delta_1 \text{ et } \delta_2,$$

et ceci donne

$$\frac{d^2}{p_1^2 p_2^2} > \frac{4\delta_1\delta_2}{p_1^2 p_2^2}, \quad \text{d'où} \quad d^2 > 4\delta_1\delta_2.$$

Donc

$$d > 2\sqrt{\delta_1\delta_2}.$$

Mais alors, en imitant le calcul fait pour le cas de deux dimensions, la distance des deux points  $\zeta_{1,2}$ ,  $\zeta_{3,4}$ , en prenant  $\Sigma$  pour quadrique fondamentale de la géométrie non euclidienne, sera  $\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  à un facteur numérique près positif.

Or

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4\delta_1\delta_2})^2}{4\delta_1\delta_2}.$$

$d$  sera minimum en même temps que  $d + \sqrt{d^2 - 4\delta_1\delta_2}$  si l'on suppose, comme on l'a vérifié,  $d > 2\sqrt{\delta_1\delta_2}$ , en même temps que  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  et que  $\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . Le minimum de  $d$  a lieu en même temps que celui de la distance non euclidienne des deux points  $\zeta_{1,2}$ ,  $\zeta_{3,4}$ . Sans qu'il soit nécessaire d'insister <sup>(1)</sup> on voit que ceci arrivera lorsque  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$  seront les pieds de la perpendiculaire commune non euclidienne aux deux droites  $\varepsilon_1\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3\varepsilon_4$ . Nous nous supposons placés bien entendu dans le cas général où les quatre points  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  ne sont pas dans un même plan non euclidien, c'est-à-dire ne sont pas dans le plan  $O\xi\eta$  sur un même cercle.

---

(1) On voit d'ailleurs, en laissant  $\zeta_1$  fixe et faisant varier  $\zeta_{3,4}$ , le minimum de la distance d'un point d'une droite étant comme en géométrie euclidienne donné par la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, que  $\zeta_1, \zeta_{3,4}$  doit être perpendiculaire à  $\varepsilon_3\varepsilon_4$ . Pour la même raison il doit l'être à  $\varepsilon_1\varepsilon_2$ , et il est évident que la perpendiculaire commune réalise le minimum, car on est sûr par avance de l'existence de ce minimum, et l'on vient de voir qu'il ne peut être donné que par la perpendiculaire commune.

Si les quatre points étaient sur un même cercle le tétraèdre non euclidien  $z_1 z_2 z_3 z_4$ , se réduirait à un quadrilatère convexe; dans ces conditions si  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$ , ne se coupent pas à l'intérieur de  $\Sigma$  le raisonnement précédent vaut encore; si  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$ , se rencontrent dans  $\Sigma$ , alors  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$  devront ainsi que leur milieu  $\zeta$  être confondus avec ce point de rencontre, mais ce cas rentre bien dans le cas général.

En résumé, la correspondante  $\varphi$  de  $f$  a un point représentatif  $\zeta$  doué des propriétés suivantes :

*$\zeta$  est le milieu non euclidien des deux points où la perpendiculaire commune non euclidienne à deux arêtes opposées quelconques du tétraèdre non euclidien  $z_1 z_2 z_3 z_4$ , rencontre ces deux arêtes.* En effet, les deux droites non euclidiennes  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$ , sont deux arêtes opposées quelconques du tétraèdre non euclidien  $z_1 z_2 z_3 z_4$ .

Ces propriétés déterminent complètement la correspondante, elles déterminent d'ailleurs *un seul* système de valeurs de  $t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2$  rendant  $\theta$  minimum. En effet la perpendiculaire commune non euclidienne à  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$  par exemple détermine  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , c'est-à-dire détermine les rapports  $\frac{t_1^2}{t_2^2}$  et  $\frac{t_3^2}{t_4^2}$  (puisque ce sont ces rapports qui fixent la position de  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$ ) de façon unique. Ensuite  $t_1^2$  et  $t_2^2$  eux-mêmes sont déterminés par la connaissance de  $\lambda_1^2 = t_1 t_2$ , de même que  $t_3^2, t_4^2$  sont déterminés par  $\lambda_2^2 = t_3 t_4$ ;  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  n'étant connus qu'à un facteur près,  $t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2$  ne le seront aussi qu'à un même facteur près, ce qui n'a aucune importance.

Comme il y a trois façons d'accoupler les racines deux à deux, c'est-à-dire trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre non euclidien, il y a trois perpendiculaires communes à deux arêtes opposées. Comme il n'y a d'autre part, ainsi que nous venons de le voir, *qu'une seule correspondante de  $f$* , il faudra bien que ces trois perpendiculaires communes concourent au point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  et que ce point  $\zeta$  soit milieu non euclidien de chacune d'elles.

La méthode de réduction continue pour une forme quadratique nous conduit donc à ce résultat intéressant :

*Dans un tétraèdre non euclidien ayant ses sommets sur la quadrique fondamentale  $\Sigma$ , les trois perpendiculaires communes (non euclidiennes) aux arêtes opposées du tétraèdre concourent en un point  $\zeta$  qui est milieu non euclidien de chacune des plus courtes distances envisagées. (La plus courte distance est le segment de la perpendiculaire commune qui joint les pieds de cette perpendiculaire sur les deux droites qui la définissent.)*

C'est là un résultat auquel est partiellement parvenu M. Wedekind (t. IX des *Mathematische Annalen*) par de tout autres considérations en partant comme M. Klein de la théorie algébrique des covariants. A vrai dire, dans le Mémoire de M. Wedekind comme dans celui de M. Klein (même volume), le

résultat n'est pas explicite mais peut se déduire facilement des considérations exposées. Il était cependant intéressant d'arriver tout naturellement et logiquement par la méthode de réduction continue à ces résultats simples.

Nous allons y arriver par la voie directe et purement géométrique suivante :

1° *Construction de la perpendiculaire commune non euclidienne à deux droites non euclidiennes*  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$ . — Prenons les deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de diamètre  $z_1 z_2$ , et  $z_3 z_4$ , orthogonaux aux plans  $O\xi\eta$  (droites non euclidiennes) et cherchons un cercle également orthogonal à  $O\xi\eta$  qui rencontre les deux précédents à angle droit.

Envisageons les deux sphères orthogonales à  $O\xi\eta$  qui passent la première par  $z_3$ , la deuxième par  $z_4$ , et qui ont pour points limites  $z_1$  et  $z_2$ . Elles sont orthogonales à  $\Gamma_1$ . Il existe une sphère  $\Sigma$  réelle, orthogonale à  $\Gamma_1$ , par rapport à laquelle les deux sphères précédentes sont symétriques l'une de l'autre. (D'une façon précise, si  $\frac{z_3 z_1}{z_3 z_2} = k_1$  et  $\frac{z_4 z_1}{z_4 z_2} = k_2$ , la sphère  $\Sigma$  sera le lieu des points  $\sigma$  tels que  $\frac{\sigma z_1}{\sigma z_2} = \sqrt{k_1 k_2}$ .)  $\Sigma$  rencontre  $\Gamma_1$  orthogonalement en un point réel  $\omega_1$ ;  $\omega_1$  n'est autre que le pied  $\zeta_{12}$  de la perpendiculaire commune non euclidienne cherchée.

Faisons en effet une inversion par rapport au pôle  $\omega'_1$  symétrique de  $\omega_1$  par rapport au plan  $O\xi\eta$ . Le plan  $O\xi\eta$  devient une sphère  $S$  de centre  $\Omega_1$  inverse de  $\omega_1$ ;  $z_1$  et  $z_2$  deviennent deux points  $Z_1$  et  $Z_2$  diamétralement opposés sur  $S$ .  $\Sigma$  devient le plan équatorial  $\pi$  orthogonal à  $Z_1 Z_2$ . Les sphères envisagées précédemment qui passaient par  $z_3$  et  $z_4$  deviendront deux sphères symétriques par rapport à  $\pi$  ayant leurs centres sur  $Z_1 Z_2$  et orthogonales à  $S$ . D'où l'on conclut que  $Z_3$  et  $Z_4$ , inverses de  $z_3$  et  $z_4$ , seront à *égale distance de  $\pi$  et de part et d'autre*. Ceci montre que le milieu ordinaire du segment  $Z_3 Z_4$  est dans  $\pi$  le pied de la perpendiculaire ordinaire  $\Delta$  abaissée de  $\Omega_1$  sur  $Z_3 Z_4$ . De là suit aussi que cette dernière droite  $\Delta$  rencontrera à *angle droit* le cercle mené par  $Z_3$  et  $Z_4$  orthogonalement à la sphère  $S$  qui est l'inverse de la droite non euclidienne  $z_3 z_4$ . Revenant à la figure primitive,  $\Delta$  va se transformer en un cercle passant par  $\omega_1$ , orthogonal au plan  $O\xi\eta$ , et rencontrant à angle droit les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Ceci montre bien que  $\omega_1$  est le pied sur  $\Gamma_1$  de la perpendiculaire commune non euclidienne à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

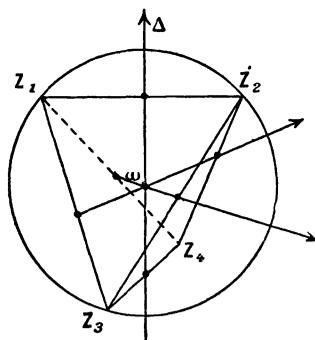
Avec la représentation projective de la Géométrie non euclidienne avec  $\Sigma$  pour quadrique fondamentale, la perpendiculaire commune à  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$  est une droite qui rencontre  $z_1 z_2$ ,  $z_3 z_4$ , et leurs conjuguées par rapport à la sphère. Or il existe deux droites rencontrant  $z_1 z_2$ ,  $z_3 z_4$ , et leurs conjuguées par rapport à la sphère. Ce qu'on a vu précédemment montre que l'une d'elles est réelle et coupe la sphère; alors l'autre sera complètement extérieure à la sphère et ne

nous intéressera plus en Géométrie non euclidienne. Il y a donc une et une seule perpendiculaire commune non euclidienne à deux droites non euclidiennes et nous avons appris à la construire (1).

2° *Les trois perpendiculaires communes forment un trièdre non euclidien trirectangle.* — Envisageons alors la perpendiculaire commune aux arêtes opposées  $s_1, s_2$  et  $s_3, s_4$ . Elle rencontre  $s_1, s_2$  et  $s_3, s_4$  en  $\zeta_{1,2}$  et  $\zeta_{3,4}$ , et nous savons que  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  est milieu non euclidien de  $\zeta_{1,2}, \zeta_{3,4}$ .

Faisons une inversion de pôle  $\zeta'$  symétrique de  $\zeta$  par rapport au plan  $O\xi\eta$ . Le plan  $O\xi\eta$  devient une sphère  $S$  de centre  $\omega$  inverse de  $\zeta$ . La droite non euclidienne  $\zeta_{1,2}, \zeta_{3,4}$  devient un diamètre  $\Delta$  de cette sphère et les deux droites non euclidiennes  $s_1, s_2$  et  $s_3, s_4$  deviennent deux arcs de cercle  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3, Z_4$ , orthogonaux à  $\Delta$  et à la sphère  $S$ . De plus  $\omega$  doit être milieu ordinaire de deux points où ces deux arcs  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3, Z_4$  rencontrent  $\Delta$ . Ceci prouve que les deux segments de droite ordinaire  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3, Z_4$  sont orthogonaux à  $\Delta$ , de plus ils sont à égale distance du centre.

Fig. 53.



Mais alors les deux segments  $Z_1, Z_3$  et  $Z_2, Z_4$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à  $\Delta$ , la perpendiculaire commune ordinaire à  $Z_1, Z_3$  et  $Z_2, Z_4$  passe par le centre  $\omega$  de  $S$  et elle joint les milieux de  $Z_1, Z_3$ , et  $Z_2, Z_4$ ; cette perpendiculaire commune rencontre  $\Delta$  à angle droit, elle rencontre aussi à angle droit les deux cercles passant respectivement par  $Z_1$  et  $Z_3$ ,  $Z_2$  et  $Z_4$  et orthogonaux à  $S$ .

Si l'on revient à la figure primitive, cette dernière droite envisagée devient un cercle passant par  $\xi$ , orthogonal au plan  $O\xi\eta$  et rencontrant à angle droit les deux cercles de diamètre  $s_1, s_3$  et  $s_2, s_4$ , orthogonaux au plan  $O\xi\eta$ . Ceci prouve que la perpendiculaire commune non euclidienne aux deux droites non euclidiennes  $s_1, s_3$  et  $s_2, s_4$ , passe aussi par  $\zeta$ , et comme dans la figure inverse considérée

(1) On rapprochera notre construction de celle donnée par M. Wedekind (t. IX des *Mathematische Annalen*).

plus haut  $\omega$  est à égale distance des deux cordes  $Z_1Z_3$  et  $Z_2Z_4$ ,  $\zeta$  est milieu non euclidien de la plus courte distance des deux droites non euclidiennes  $z_1z_3$  et  $z_2z_4$ .

On a donc prouvé que *les trois perpendiculaires communes aux arêtes opposées d'un tétraèdre non euclidien ayant ses sommets sur la quadrique fondamentale concourent en un point  $\zeta$  qui était le milieu non euclidien de chacune d'elles*. Il résulte encore du fait que dans la figure inverse la droite  $\Delta$  est orthogonale en  $\omega$  à la perpendiculaire commune ordinaire à  $Z_1Z_3$  et  $Z_2Z_4$ , que *les trois perpendiculaires communes non euclidiennes précédentes forment un trièdre non euclidien qui est trirectangle*.

La méthode de réduction continue nous conduit ainsi très simplement au point  $\zeta$  qui est lié d'une façon covariante aux points  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

Car par toute substitution  $S$  du groupe de Picard et par la transformation  $T$  du demi-espace qu'elle définit, la forme  $f$  se transforme en  $f_1$  équivalente dont les racines  $z'_1, z'_2, z'_3, z'_4$  dérivent de  $z_1, z_2, z_3, z_4$  par la transformation  $T$  et comme cette  $T$  est un mouvement non euclidien qui conserve les distances et les angles,  $\zeta$  associé comme nous l'avons vu à  $z_1, z_2, z_3, z_4$  se transformera en  $\zeta_1$  associé de la même façon à  $z'_1, z'_2, z'_3, z'_4$ . C'est en cela que consiste le fait pour  $\zeta$  d'être un covariant des points  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , et *pour la forme  $\varphi$  correspondante de  $f$  représentée par  $\zeta$  d'être un covariant quadratique à indéterminées conjuguées de la forme  $f$* .

Il y a plus : par l'inversion relative à  $\zeta'$  qui n'est en somme qu'une projection stéréographique,  $z_1, z_2, z_3, z_4$  deviennent quatre points  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  d'une sphère  $S$  qui sont tels, d'après tout ce que nous avons vu précédemment, que  *$Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  sont les symétriques de  $Z_1$ , par rapport aux trois axes d'un trièdre trirectangle ayant son sommet au centre de la sphère*. Les trois axes de ce trièdre sont chacun un axe de rotation binaire qui ramène le tétraèdre  $Z_1Z_2Z_3Z_4$  sur lui-même. Donc dans la figure primitive le tétraèdre non euclidien  $z_1, z_2, z_3, z_4$  admet trois rotations non euclidiennes binaires dont les axes sont les trois perpendiculaires communes non euclidiennes aux trois couples d'arêtes opposées. Ces trois axes non euclidiens forment un trièdre trirectangle.

Il est bien évident que si l'on considère la forme binaire  $T$  du sixième degré dont les racines sont les points où les trois axes précédents (cercles orthogonaux au plan  $O\xi\eta$ ) percent le plan  $O\xi\eta$ , *cette forme est un covariant de la forme  $f$* , car les relations d'orthogonalité qui sont les seules au fond par lesquelles est définie la forme  $T$  se conservent par toute transformation du demi-espace associée à une substitution du groupe de Picard. Le covariant du sixième degré  $T$  ainsi associé à une forme biquadratique  $f$  est bien connu dans la théorie algébrique de ces formes. C'est en partant des propriétés de ce covariant déduites de la théorie algébrique que M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. IX) a donné de la forme biquadratique  $f$  et de son covariant du sixième degré

précisément, la représentation à laquelle nous a conduit tout naturellement la réduction continue, après inversion relative au pôle  $\zeta'$ , à savoir :  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  racines de la forme  $f$  se déduisent de  $Z_1$  par symétrie relativement aux trois axes d'un trièdre trirectangle ayant son sommet au centre de la sphère qui porte les racines; la forme covariante  $T$  du sixième degré a ses racines représentées par les points où les trois axes du trièdre trirectangle percent la sphère. Il est remarquable qu'on puisse arriver à ces représentations géométriques très simples en partant de la théorie arithmétique de la réduction.

Si l'on voulait calculer explicitement  $T$  voici comment on pourrait faire. La rotation non euclidienne qui permute  $(z_1$  et  $z_2)$ ,  $(z_3$  et  $z_4)$  se traduit par la relation

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (z', z_2, z_1, z_4).$$

Ses points doubles qui sont deux des racines de  $T$  sont données par

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (z, z_2, z_1, z_4),$$

qui s'écrit

$$(z_1 - z_3)(z - z_2)(z - z_4) + (z_2 - z_4)(z - z_3)(z - z_1) = 0.$$

Les deux autres couples de racines de la forme  $T$  seront déterminées de même par

$$(z_1 - z_2)(z - z_3)(z - z_4) + (z_3 - z_4)(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

et

$$(z_1 - z_4)(z - z_2)(z - z_3) + (z_2 - z_3)(z - z_4)(z - z_1) = 0.$$

Le produit membre à membre de ces trois équations fournit une équation du sixième degré qui a pour racines les racines de  $T$  et dont le premier membre n'est autre que  $T(z, 1)$ . Nous pouvons nous servir d'ailleurs de ces trois équations pour écrire des conditions de réduction de la forme  $f$ .

En effet, les trois formes quadratiques de Dirichlet dont les racines sont données par ces trois équations, à savoir :

$$f_1 = (z_1 - z_3)(x - z_2 y)(x - z_4 y) + (z_2 - z_4)(x - z_3 y)(x - z_1 y),$$

$$f_2 = (z_1 - z_2)(x - z_3 y)(x - z_4 y) + (z_3 - z_4)(x - z_1 y)(x - z_2 y),$$

$$f_3 = (z_1 - z_4)(x - z_2 y)(x - z_3 y) + (z_2 - z_3)(x - z_4 y)(x - z_1 y),$$

seront représentées par les trois perpendiculaires communes non euclidiennes aux arêtes opposées du tétraèdre non euclidien  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Lorsque le point  $\zeta$  étant l'intersection de ces trois droites non euclidiennes sera dans  $\pi_0$ , domaine fondamental du groupe de Picard, les trois droites non euclidiennes couperont  $\pi_0$ , elles représenteront donc des *formes quadratiques réduites*. Donc pour que  $f$  soit réduite il faut que les trois formes de Dirichlet  $f_1, f_2, f_3$  soient réduites, mais ceci n'est pas suffisant. Les conditions qui expriment que  $f_1, f_2,$

$f_3$  sont réduites sont nécessaires pour que  $f$  soit réduite, mais non suffisantes.

Nous terminerons le cas des formes biquadratiques en montrant comment le calcul de la correspondante de  $f$  peut se conduire jusqu'au bout par la méthode directe. Le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$  est

$$\delta = \sum_{i,j=1}^4 t_i^2 t_j^2 \mathfrak{U}(z_i - z_j) = \sum \lambda_i \lambda_j \mathfrak{U}(z_i - z_j) \quad \text{en posant} \quad \lambda_i = t_i^2.$$

Il faut chercher son minimum lorsque  $(t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2)$  est supposé constant. Ceci donne les équations

$$\lambda_1 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} = \lambda_2 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} = \lambda_3 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_3} = \lambda_4 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_4} = \frac{1}{2} \delta.$$

Considérons

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} - \delta = 0, & & 2\lambda_3 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_3} - \delta = 0, \\ 2\lambda_2 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} - \delta = 0, & \text{et puis} & 2\lambda_4 \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_4} - \delta = 0. \end{aligned}$$

Ajoutons les deux premières et retranchons-en les deux dernières, il vient

$$\lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{U}(z_1 - z_2) = \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{U}(z_3 - z_4),$$

et, par d'autres combinaisons analogues, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_3 \mathfrak{U}(z_1 - z_3) &= \lambda_2 \lambda_4 \mathfrak{U}(z_2 - z_4), \\ \lambda_1 \lambda_4 \mathfrak{U}(z_1 - z_4) &= \lambda_2 \lambda_3 \mathfrak{U}(z_2 - z_3). \end{aligned}$$

De là se tire bien simplement

$$\lambda_1^3 = \lambda, \lambda_3 \lambda_4 \frac{\mathfrak{U}_{34} \mathfrak{U}_{24} \mathfrak{U}_{23}}{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{14}} \quad \text{en posant} \quad \mathfrak{U}_{ij} = \mathfrak{U}(z_i - z_j),$$

ce qui donne pour  $\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \lambda_4^4$  des valeurs proportionnelles à

$$\frac{\mathfrak{U}_{34} \mathfrak{U}_{24} \mathfrak{U}_{23}}{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{14}}, \quad \frac{\mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{34} \mathfrak{U}_{41}}{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{23} \mathfrak{U}_{24}}, \quad \dots$$

La correspondante de  $f$  s'obtient donc pour les valeurs suivantes des paramètres

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^2 &= \left( \frac{\mathfrak{U}_{23} \mathfrak{U}_{34} \mathfrak{U}_{41}}{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{14}} \right)^{\frac{1}{4}}, & \mathbf{T}_3^2 &= \left( \frac{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{24} \mathfrak{U}_{41}}{\mathfrak{U}_{31} \mathfrak{U}_{32} \mathfrak{U}_{34}} \right)^{\frac{1}{4}}, \\ \mathbf{T}_2^2 &= \left( \frac{\mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{34} \mathfrak{U}_{41}}{\mathfrak{U}_{21} \mathfrak{U}_{23} \mathfrak{U}_{24}} \right)^{\frac{1}{4}}, & \mathbf{T}_4^2 &= \left( \frac{\mathfrak{U}_{12} \mathfrak{U}_{13} \mathfrak{U}_{23}}{\mathfrak{U}_{41} \mathfrak{U}_{42} \mathfrak{U}_{43}} \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Ce calcul effectif de  $\varphi$  correspondante de  $f$  exige la connaissance des racines de  $f$ , il ne semble pas qu'on puisse tirer directement les coefficients

de  $\varphi$  de ceux de  $f$  sans passer par les racines de  $f$ . D'ailleurs, en pratique, on pourra faire des calculs approchés pour trouver ces racines, *ce qui donnera  $\varphi$  avec une certaine approximation connue*. Cette approximation, qui est d'autant plus serrée que celle des valeurs approchées des racines l'est, pourra être rendue assez petite pour qu'il n'y ait pas d'hésitation sur la connaissance du pentaèdre  $\pi$  dans lequel tombera le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$ , ce qui équivaut à dire en somme que, si l'on réduit la forme approchée  $\varphi$  trouvée, *elle restera réduite tant que les coefficients resteront dans les limites trouvées pour l'approximation, si cette approximation est assez serrée, et c'est toujours la même substitution qui la réduira*, sauf dans le cas où le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  serait lui-même sur une des faces de la division pentaédrique de l'espace, *auquel cas il y aurait deux réduites pour  $f$* , et on les trouverait en faisant varier les coefficients de la forme approchée trouvée pour  $\varphi$  dans les limites de l'approximation; il y aurait deux formes réduites à considérer pour cette forme approchée et suivant les valeurs des coefficients dans les limites d'approximation c'est l'une ou l'autre de ces deux formes qui serait réduite; *par les deux substitutions réductrices ainsi trouvées se déduiraient de  $f$  les deux formes réduites équivalentes*.

---

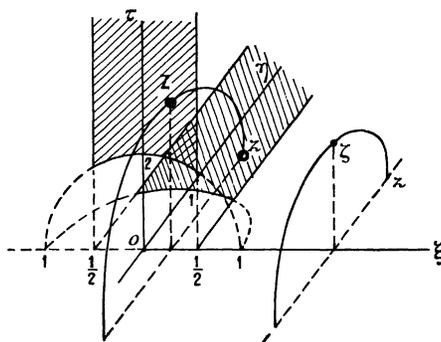
## CHAPITRE IV.

### APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX FORMES A COEFFICIENTS RÉELS.

On a vu, dans une remarque faite à propos de l'application de la méthode générale aux formes cubiques  $f$  à coefficients réels, que le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  était dans ce cas un point du plan  $O\xi\tau$ , plan par rapport auquel le domaine  $D$  associé à  $f$  était symétrique. La substitution  $S$  (1) dont l'effet était d'amener sur  $\pi_0$  le pentaèdre  $\pi_1$ , auquel appartient  $\zeta$  (situé du même côté que  $\pi_0$  par rapport au plan  $O\xi\tau$ ) était une substitution modulaire à coefficients réels. Ceci est évident si l'on remarque que cette substitution doit conserver le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) et le demi-plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ). Si l'on remarque de plus qu'une telle substitution (et la transformation  $T$  associée), transforme un cercle d'axe  $O\xi$  en un cercle d'axe  $O\xi$ , on voit de suite que la

(1) Note *Sur les substitutions modulaires réelles envisagées dans le groupe de Picard* :  
 1° Toute substitution  $S$  du groupe de Picard qui conserve le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) et le demi-

Fig. 54.



plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ) est une substitution modulaire réelle, car elle conserve l'axe réel  $O\xi$  et le demi-plan analytique  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ).

2° Par une telle substitution  $S$  et par la transformation  $T$  associée, un cercle d'axe  $O\xi$  (droite non euclidienne normale au plan  $O\xi\tau$ ) devient un cercle d'axe  $O\xi$ .

Conclusion : soient  $\zeta$  le point où un tel cercle perce le demi plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) et  $z$  le point où un tel cercle perce le demi-plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ) (1).

Amener  $\zeta$  dans  $\pi_0$  par une substitution  $S$  qui transforme en eux-mêmes chacun des deux

(1)  $\zeta$  et  $z$  ont même affixe, l'un par rapport à  $O\xi\tau$ , l'autre par rapport à  $O\xi\eta$ .

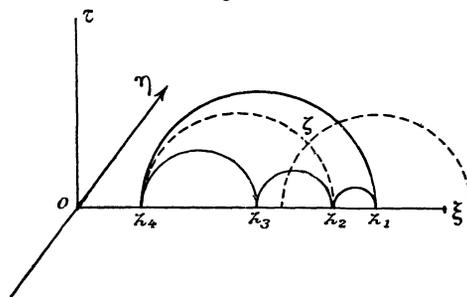
substitution  $S$  à faire est la substitution réelle modulaire qui amène  $\zeta$  dans  $\omega_0$  domaine fondamental de la division modulaire du demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ), ce  $\omega_0$  n'étant autre que la face de  $\pi_0$  située dans le plan  $O\xi\tau$ , et sous cette forme on voit que le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) jouant ici le rôle du demi-plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ) dans la première Partie,  $S$  est bien la substitution réductrice de  $f$  à laquelle aurait conduit la première Partie.

La remarque n'est pas particulière aux formes cubiques. Elle se présente aussi, et l'on devait s'y attendre, pour les formes biquadratiques à coefficients réels.

Trois cas sont possibles :

1. *La forme a toutes ses racines réelles.* — Le domaine  $D$  auquel conduit notre méthode est le quadrilatère non euclidien  $z_1 z_2 z_3 z_4$  du demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ). C'est exactement le domaine que nous avons associé à  $f$  dans la première Partie et dans le demi-plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ). Le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante s'obtient immédiatement par ce fait que deux arêtes opposées du tétraèdre de la théorie générale sont ici sécantes, ce sont les diagonales  $z_1 z_3$  et  $z_2 z_4$  du quadrilatère. Leur perpendiculaire commune non euclidienne est donc la perpendiculaire non euclidienne au plan non euclidien de ces deux diagonales, élevée en leur point de concours.  $\zeta$  ne peut donc être que ce point de

Fig. 55.



concours, puisque c'est le milieu non euclidien de la plus courte distance qui est nulle.

D'ailleurs ici les perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées sont :

1° La droite non euclidienne par  $\zeta$  normale au plan  $O\xi\tau$  (c'est le cercle d'axe  $O\xi$  passant par  $\zeta$ );

---

*dièdres d'arête  $O\xi$  ( $\eta > 0, \tau > 0$ ) et ( $\eta < 0, \tau > 0$ ) revient donc à amener  $z$  en  $Z$  dans le domaine fondamental  $\omega_0$  du groupe modulaire dans le demi-plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ) et inversement, puisque la division découpée dans le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) par la division pentaédrique du demi-espace n'est autre que la division modulaire de ce demi-plan (résultat connu).*

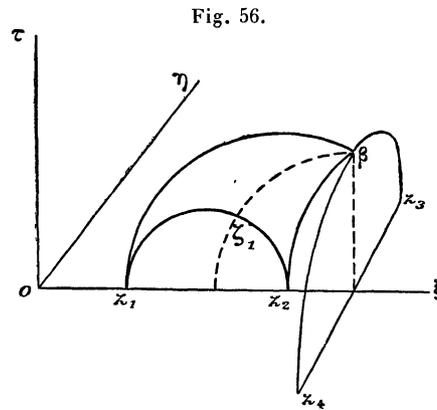
2° La droite non euclidienne orthogonale à  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$  (cercle orthogonal aux cercles de diamètre  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$  dans le plan  $O\xi\tau$ );

3° La droite non euclidienne orthogonale à  $z_1 z_3$  et  $z_2 z_4$  (cercle orthogonal aux cercles de diamètre  $z_1 z_3$  et  $z_2 z_4$  dans le plan  $O\xi\tau$ ).

Ces trois droites non euclidiennes concourent bien en  $\zeta$  et y forment bien un trièdre non euclidien trirectangle (on a en effet vérifié dans la première Partie que les cercles envisagés au 2° et 3° étaient orthogonaux en  $\zeta$  point de concours des cercles de diamètre  $z_1 z_3$  et  $z_2 z_4$ ).

Le résultat trouvé concorde avec celui trouvé dans la première Partie.

2. *La forme a deux racines réelles.* — Notre tétraèdre  $D$  associé à  $f$  a deux sommets  $z_1, z_2$  sur  $O\xi$  et  $z_3, z_4$  symétriques par rapport à  $O\xi$ . Il est symétrique par rapport à  $O\xi\tau$  et découpe dans ce plan un triangle non euclidien de



sommets  $z_1, z_2$  et  $\beta$  intersection avec  $O\xi\tau$  du cercle de diamètre  $z_3 z_4$ .  $\beta$  a pour affixe dans le plan  $O\xi\tau$  exactement l'affixe de  $z_3$ . Donc le triangle  $\beta z_2 z_1$  est exactement celui auquel conduisait la réduction continue de la forme  $f$  (dans le plan  $O\xi\eta$ ) dans la première Partie.

Pour avoir  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f_1$  considérons la perpendiculaire commune non euclidienne aux arêtes opposées  $z_1 z_2$  et  $z_3 z_4$  du tétraèdre non euclidien  $D$ . Ce n'est pas autre chose que le cercle orthogonal à  $O\xi$  du plan  $O\xi\tau$  mené par  $\beta$  orthogonalement au cercle de ce plan ayant pour diamètre  $z_1 z_2$ . Ce cercle rencontre en  $\zeta_1$  le cercle de diamètre  $z_1 z_2$  et  $\zeta_1$  sera milieu non euclidien de  $\beta\zeta_1$ . Nous retrouvons exactement le point  $\zeta$  trouvé dans la première Partie.

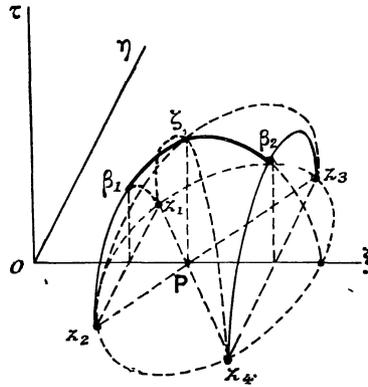
3. *La forme a ses racines imaginaires.* — Alors  $z_1$  et  $z_2$  ainsi que  $z_3$  et  $z_4$  sont symétriques par rapport au plan  $O\xi\tau$ . Le tétraèdre  $z_1 z_2 z_3 z_4$  se réduit encore au quadrilatère non euclidien  $z_1 z_2 z_3 z_4$  symétrique par rapport au

plan  $O\xi\tau$ . Comme les droites non euclidiennes  $z_1z_2$  et  $z_3z_4$  sont des cercles ordinaires d'axe  $O\xi$  elles coupent  $O\xi\tau$  en  $\beta_1$  et  $\beta_2$  qui ont pour affixes dans ce plan les mêmes affixes que  $z_1$  et  $z_2$  dans le plan  $O\xi\eta$ .

La section du domaine  $D$  par le plan  $O\xi\tau$  est le segment non euclidien  $\beta_1\beta_2$  auquel nous avons conduit la première Partie.

D'autre part la plus courte distance non euclidienne à  $z_1z_2$  et  $z_3z_4$  est le

Fig. 57.



segment non euclidien  $\beta_1\beta_2$  (c'est là une chose immédiate) *et son milieu qui est le point  $\zeta$  cherché* est exactement le point auquel nous avons conduit la première Partie. D'ailleurs il est aisé (et nous n'insistons pas là-dessus) de voir que les droites non euclidiennes  $z_1z_2$  et  $z_3z_4$  passent par  $\zeta$ , leur perpendiculaire commune est la droite non euclidienne élevée par  $\zeta$  normalement au plan non euclidien  $z_1z_2z_3z_4$ ; enfin il est aussi aisé de voir sur la figure que la perpendiculaire commune aux arêtes  $z_1z_2$  et  $z_3z_4$  n'est autre chose que le cercle  $\gamma$  d'axe  $O\xi$  passant par  $\zeta$  (c'est une pure propriété de pôles et polaires dans le cercle  $z_1z_2z_3z_4$  qui montre l'orthogonalité de ce cercle  $\gamma$  aux cercles de diamètre  $z_1z_2$  et  $z_3z_4$  situés sur la sphère  $z_1z_2z_3z_4$ ). De là se conclut que ces trois perpendiculaires communes forment un trièdre trirectangle non euclidien.

Il ressort bien des remarques précédentes que, dans le cas des formes biquadratiques encore, notre méthode de réduction générale conduit au même résultat que la méthode d'Hermite exposée dans la première Partie. Il y a là un fait général auquel nous arrivons maintenant et qu'il s'agit d'expliquer.

Considérons une forme  $f$  à coefficients réels ayant les racines réelles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  et les couples de racines imaginaires conjuguées  $(\beta_1, \beta'_1), \dots, (\beta_\nu, \beta'_\nu)$

$$f = a_0(x - \alpha_1 y) \dots (x - \alpha_\mu y) (x - \beta_1 y) (x - \beta'_1 y) \dots (x - \beta_\nu y) (x - \beta'_\nu y)$$

$$(\mu + 2\nu = n).$$

Avec notre méthode générale nous lui associons la forme quadratique définie à indéterminées conjuguées suivante :

$$\varphi = t_1^2 \Re(x - \alpha_1 y) + \dots + t_\mu^2 \Re(x - \alpha_\mu y) + u_1^2 \Re(x - \beta_1 y) + u_1'^2 \Re(x - \beta_1' y) + \dots \\ + u_\nu^2 \Re(x - \beta_\nu y) + u_\nu'^2 \Re(x - \beta_\nu' y),$$

dépendant de  $n$  paramètres  $t_1^2, \dots, t_\mu^2, u_1^2, u_1'^2, \dots, u_\nu^2, u_\nu'^2$ . (Bien entendu  $u_i^2$  et  $u_i'^2$  expriment ici deux nombres positifs indépendants et non deux nombres complexes conjugués). Son point représentatif  $\zeta$  décrit l'intérieur et la surface du polyèdre non euclidien convexe  $D$  <sup>(1)</sup> ayant pour sommets les points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_1', \dots, \beta_\nu, \beta_\nu'$  du plan  $O\xi\eta$ .

Il est immédiat que ce polyèdre *est symétrique par rapport au plan*  $O\xi\tau$  <sup>(2)</sup>. Cherchons sa section par ce plan. *C'est un polygone non euclidien convexe puisque le polyèdre  $D$  est convexe.*

Remarquons maintenant que les droites non euclidiennes  $\beta_1\beta_1', \beta_2\beta_2', \dots, \beta_\nu\beta_\nu'$  rencontrent le plan  $O\xi\tau$  en des points  $B_1, B_2, \dots, B_\nu$  ayant dans ce plan pour affixes  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ . Comme ces droites sont intérieures à  $D$  ou sont des arêtes de  $D$ , il suit que  $B_1, B_2, \dots, B_\nu$  seront intérieurs au polygone de section ou en seront des sommets.

D'ailleurs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  sont aussi des sommets de ce polygone, *et les sommets du polygone sont tous les  $\alpha_i$ , et ceux des  $B_i$  qui sont fournis par des droites  $\beta_i\beta_i'$  arêtes de  $D$ .*

Un peu de réflexion suffit avec ces remarques pour se rendre compte que *ce polygone de section est le polygone trouvé dans la première Partie* : c'est le plus petit polygone convexe non euclidien qui contienne à son intérieur ou sur son contour tous les points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, B_1, B_2, \dots, B_\nu$ .

Voici un premier résultat : *La section du polyèdre  $D$  par le plan  $O\xi\tau$  est le polygone associé à la forme  $f$  par la méthode de la première Partie inspirée d'Heimite quand on représente les racines de la forme  $f$  dans ce plan.*

Il faut maintenant, pour trouver la correspondante de  $f$  par notre méthode générale, considérer

$$\theta = \frac{\Re(a_0)\delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 u_1'^2 \dots u_\nu^2 u_\nu'^2},$$

$\delta$  étant le déterminant de  $\varphi$ .

Or  $\Re(a_0) = a_0^2$ . Montrons maintenant, *et c'est là le point essentiel*, que dans tout système de valeurs des paramètres qui fait prendre à  $\theta$  sa valeur minimum *les paramètres  $u_i^2, u_i'^2$  sont deux à deux égaux* ( $u_i^2 = u_i'^2$  quel que soit  $i$ ).

(1) Dans tout ceci, *convexe* s'entend au sens où on l'a déjà défini : chaque face du polyèdre laisse tous les sommets du même côté.

(2) On se convainc ensuite sans peine que toute face de  $D$  qui coupe le plan  $O\xi\tau$  est orthogonale à ce plan.

Remarquons pour cela que  $\varphi$  associée de  $f$  s'écrit

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{T}(x - \alpha_1 y) + \dots + t_\mu^2 \mathfrak{T}(x - \alpha_\mu y) + [u_1^2 \mathfrak{T}(x - \beta_1 y) + u_1'^2 \mathfrak{T}(x - \beta_1' y)] + \dots \\ + [u_\nu^2 \mathfrak{T}(x - \beta_\nu y) + u_\nu'^2 \mathfrak{T}(x - \beta_\nu' y)].$$

Or

$$u_i^2 \mathfrak{T}(x - \beta_i y) + u_i'^2 \mathfrak{T}(x - \beta_i' y) = u_i u_i' \varphi_i,$$

$\varphi_i$  étant une forme définie d'Hermite dont le point représentatif  $\zeta_i$  est sur la droite non euclidienne  $\beta_i \beta_i'$ , dont le déterminant  $\delta_i$  est constant et égal à  $\mathfrak{T}(\beta_i - \beta_i')$ .

Supposons maintenant que pour faire la recherche du minimum de  $\theta$  on assujettisse d'abord  $t_1^2, \dots, t_\mu^2$  à rester fixes, ainsi que les produits  $u_1 u_1', u_2 u_2', u_3 u_3', \dots, u_\nu u_\nu'$ . Alors

$$t_1^2 \mathfrak{T}(x - \alpha_1 y) + \dots + t_\mu^2 \mathfrak{T}(x - \alpha_\mu y)$$

est une forme définie fixe  $\Phi_0$ .

En posant

$$\Phi_i = u_i u_i' \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

$\varphi_i$  est une forme dont le point représentatif est quelconque sur la droite non euclidienne  $\beta_i \beta_i'$ , mais qui a un déterminant fixe

$$\Delta_i = u_i^2 u_i'^2 \delta_i = u_i^2 u_i'^2 \mathfrak{T}(\beta_i - \beta_i').$$

Nous pouvons écrire

$$\varphi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_\nu$$

chacune des formes définies du deuxième membre ayant un déterminant  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\nu$  qui est fixe.

La recherche du minimum de  $\theta$ , le dénominateur  $t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 u_1'^2 \dots u_\nu^2 u_\nu'^2$  étant constant, *dans nos hypothèses*, revient à celle du minimum de  $\delta$  déterminant de  $\varphi$ .

Si l'on pose

$$\Phi_0 = P_0 x x' - Q_0 x y' - Q_0' x' y + R_0 y y'$$

et

$$\Phi_i = P_i x x' - Q_i x y' - Q_i' x' y + R_i y y',$$

un calcul simple prouve que l'on a

$$\text{déterminant de } \varphi = \delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_\nu + \Sigma \Delta_{ij},$$

$\Sigma \Delta_{ij}$  étant étendu à toutes les *combinaisons* de deux indices différents de la suite 0, 1, ...,  $\nu$  en posant

$$\Delta_{ij} = P_i R_j + P_j R_i - Q_i Q_j' - Q_j Q_i'.$$

Dans nos hypothèses  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\nu$  sont constants. On a vu dans une recherche

précédente que  $\Delta_{i,j}$  est minimum lorsque la distance non euclidienne des points  $\zeta_i, \zeta_j$  qui représentent les formes  $\Phi_i$  et  $\Phi_j$  est minimum. Or  $\zeta_0$  est fixe,  $\zeta_i$  décrit la droite non euclidienne  $\beta_i\beta'_i$  (pour  $i = 1, 2, \dots, \nu$ ). Il est clair alors que *chacun des  $\Delta_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, \nu$ ) sera minimum lorsque les deux points  $\zeta_i, \zeta_j$  seront dans le plan  $O\xi\tau$  orthogonal à chacune des droites  $\beta_i\beta'_i, \beta_j\beta'_j, \zeta_i\zeta_j$ , étant alors la perpendiculaire commune non euclidienne à ces deux droites  $\beta_i\beta'_i$  et  $\beta_j\beta'_j$ , non euclidiennes. C'est encore vrai pour  $\Delta_{0k}$  quel que soit  $k$  car  $\zeta_0$  est fixe et si  $\zeta_k$  est dans le plan  $O\xi\tau$ ,  $\zeta_0\zeta_k$  sera la perpendiculaire non euclidienne abaissée de  $\zeta_0$  sur la droite non euclidienne  $\beta_k\beta'_k$  (1).*

Dans nos hypothèses, à savoir pour  $t_1^2, \dots, t_\mu^2$  fixes,  $u_1u'_1, \dots, u_\nu u'_\nu$  constants, le minimum de  $\theta$  est donc atteint lorsque  $u_1 = u'_1, u_2 = u'_2, \dots, u_\nu = u'_\nu$  (puisque c'est à ces conditions seulement que  $\zeta_1, \dots, \zeta_\nu$  seront situés dans le plan  $O\xi\tau$ ). C'est un premier résultat obtenu. Restera ensuite à savoir pour quelles valeurs de  $t_1^2, \dots, t_\nu^2$ , de  $u_1^2 = u'_1{}^2, u_2^2 = u'_2{}^2, \dots, u_\nu^2 = u'_\nu{}^2$ ,  $\theta$  atteint son minimum absolu, mais nous sommes sûrs par ce qui précède que pour ces valeurs on aura  $u_i^2 = u'_i{}^2$  quel que soit  $i$  et c'est ce que nous voulions établir.

Alors on voit que l'associée de  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{R}(x - \alpha_{1,y}) + \dots + t_\mu^2 \mathfrak{R}(x - \alpha_{\mu,y}) + u_1^2 [\mathfrak{R}(x - \beta_{1,y}) + \mathfrak{R}(x - \beta'_1 y)] + \dots + u_\nu^2 [\mathfrak{R}(x - \beta_{\nu,y}) + \mathfrak{R}(x - \beta'_\nu y)].$$

Son point représentatif  $\zeta$ , barycentre non euclidien des points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  affectés des masses  $t_1^2, \dots, t_\mu^2$ , et des points  $\beta_i, \beta'_i$  ayant tous deux la masse  $u_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ), est situé dans le plan  $O\xi\tau$ . Ceci est d'ailleurs évident si l'on développe  $\varphi$  car  $\varphi$  s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi &= pxx' - qxy' - qx'y + ryy' \quad (p, q, r \text{ étant réels}); \\ \begin{cases} p = t_1^2 + \dots + t_\mu^2 + 2u_1^2 + \dots + 2u_\nu^2, \\ q = t_1^2 \alpha_1 + \dots + t_\mu^2 \alpha_\mu + u_1^2 (\beta_1 + \beta'_1) + \dots + u_\nu^2 (\beta_\nu + \beta'_\nu), \\ r = t_1^2 \alpha_1^2 + \dots + t_\mu^2 \alpha_\mu^2 + 2u_1^2 \beta_1 \beta'_1 + \dots + 2u_\nu^2 \beta_\nu \beta'_\nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Par rapport aux axes  $O\xi$  et  $O\tau$ ,  $\zeta$  a pour affixe la racine de la forme quadratique définie

$$\varphi_1 = px^2 - 2qxy + ry^2$$

obtenue en supposant  $x$  et  $y$  réels dans la forme à indéterminées conjuguées précédentes. C'est facile à voir puisque  $\overline{OP} = \frac{q}{p}$ ,  $P$  étant la projection de  $\zeta$  sur  $O\xi$  et  $\overline{O\zeta}^2 = \frac{r}{p}$ .

---

(1) On réalise donc le minimum de  $\theta$  en réalisant à la fois le minimum de tous les  $\Delta_{i,j}$ , ce qui se fait en supposant tous les  $\zeta_i$  dans le plan  $O\xi\tau$ .

Ce qui se passe dans le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) est donc *identique à ce qui se passait dans le demi plan  $O\xi\eta$  ( $\eta > 0$ ) avec la méthode d'Hermite exposée dans la première Partie.*

La forme quadratique réelle  $\varphi_1$  à laquelle en somme se réduit  $\varphi$  est exactement la forme associée à  $f$  dans la première Partie puisque, en supposant  $x$  et  $y$  réels (ce qui est le cas dans la première Partie),  $\varphi$  devient

$$\varphi_1 = t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + \dots + t_\mu^2(x - \alpha_\mu y)^2 + 2u_1^2(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + \dots \\ + 2u_\nu^2(x - \beta_\nu y)(x - \beta'_\nu y),$$

et sous cette forme on reconnaît bien la forme quadratique associée à  $f$  dans la première Partie.

Donc le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$ ,  $\delta = pr - qq'$ , se réduit ici, puisque  $q$  est réel, à

$$\delta = pr - q^2, \quad \text{déterminant de } \varphi_1.$$

La fonction  $\theta$  de la théorie générale doit être prise égale à

$$\frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^2 u_1'^2 u_2^2 u_2'^2 \dots u_\nu^2 u_\nu'^2}$$

et comme il faut prendre  $u_i^2 = u_i'^2$  quel que soit  $i$ , elle s'écrit

$$\theta = \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_\mu^2 u_1^4 u_2^4 \dots u_\nu^4}$$

$\delta$  étant le déterminant de  $\varphi_1$ .

*C'est exactement la fonction  $\theta$  qu'on avait à étudier dans la première Partie, pour en chercher le minimum.*

Si l'on joint à cela que la substitution S du groupe de Picard à faire pour amener sur  $\pi_0$  le pentaèdre  $\pi_1$  de la division de Picard auquel appartient  $\zeta$ , point représentatif de la correspondante, et qui est du même côté que  $\pi_0$  par rapport à  $O\xi\tau$ , est exactement la substitution du *groupe modulaire réel* qui amène un point ayant l'*abscisse* de  $\zeta$  par rapport aux axes  $O\xi\tau$  dans  $(\mathbb{D}_0)$ , domaine fondamental du groupe modulaire réel dans le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ) ( $\mathbb{D}_0$  n'étant autre que la face de  $\pi_0$  située dans le plan  $O\xi\tau$ ), il est alors bien clair que *la méthode générale exposée dans cette deuxième Partie, appliquée à des formes à coefficients réels, donnera les mêmes résultats que la méthode d'Hermite exposée dans la première Partie*, et il fallait bien s'en assurer pour ne pas donner une généralisation qui fût sans intérêt.

*Application.* — Il est donc établi que *la fonction  $\theta$  associée dans la première Partie à une forme  $f$  à coefficients réels a même minimum que la*

fonction  $\theta$  associée à cette même forme dans la seconde Partie. Rappelons que cette dernière fonction est

$$(1) \quad \theta = \frac{a_0^n \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 t_2^2 \dots t_n^2},$$

en posant  $\delta$  égal au déterminant de la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^n t_i^2 \mathcal{R}(x - z_i, y),$$

$z_1, z_2, \dots, z_n$  étant les racines de la forme  $f$

$$f = a_0(x - z_1 y) \dots (x - z_n y).$$

Les expressions différentes de  $\theta$ , selon que le nombre des racines réelles de  $f$  varie, données dans la première Partie, sont ici ramenées à la seule expression (1). C'est là un *résultat fondamental*.

L'explication cherchée par Hermite de ce fait que l'équation reliant le déterminant d'une forme  $f$  à coefficients réels (minimum de la fonction  $\theta$  associée) aux coefficients de cette équation était la même quelle que fût l'hypothèse faite sur le nombre des racines réelles de  $f$ , (hypothèse suivant laquelle la fonction  $\theta$  de la première Partie et les calculs faits pour trouver son minimum différent beaucoup), nous apparaît maintenant comme toute naturelle.

Quelle que soit en effet l'hypothèse faite sur le nombre des racines réelles, la fonction  $\theta$  que par la relation (1) nous associons à  $f$  a la même expression (1) en fonction des racines. Son minimum, qui est le déterminant de  $f$ , sera donc une fonction de ces racines dont le calcul peut être fait indépendamment de toute hypothèse particulière sur la réalité des racines, ainsi qu'il a été vu dans les exemples traités des formes cubiques et biquadratiques. Les calculs à faire pour l'obtenir étant identiquement les mêmes avec notre méthode quelle que soit l'hypothèse faite sur la réalité des racines, il n'est donc pas étonnant que l'équation reliant ce déterminant aux coefficients de la forme  $f$ , équation qu'Hermite s'attachait à déterminer dans son Mémoire sur la réduction des fonctions homogènes (*Œuvres*, t. I, p. 84 à 93), soit toujours la même quel que soit le nombre des racines réelles de la forme. Voilà, semble-t-il, ce qui explique l'unité du résultat auquel parvenait Hermite malgré la diversité de ses calculs selon les hypothèses faites, et qui répond aux quelques lignes (extraites du Mémoire cité plus haut) que nous avons transcrites à la page 116 du présent Mémoire.

Les avantages de la méthode de réduction exposée dans cette deuxième Partie sont multiples : la méthode, d'abord, s'applique à toute forme binaire à coefficients complexes; ensuite, appliquée aux formes binaires à coefficients

réels, elle se confond exactement avec la méthode d'Hermite, mais offre plus d'unité que cette dernière méthode et, par conséquent, éclaire d'un jour nouveau plusieurs points obscurs de cette méthode; elle fait voir en particulier que *toutes les racines d'une forme à coefficients réels jouent le même rôle dans la réduction*, bien qu'il semble à première vue dans la méthode d'Hermite que les racines réelles jouent un rôle différent des racines imaginaires. La généralisation qui constitue la deuxième Partie du présent Mémoire s'imposait donc, comme s'est imposée l'introduction des nombres complexes pour l'étude de toutes les racines d'une équation à coefficients réels. *Les substitutions réelles modulaires suffisent pour l'étude d'une forme ayant toutes ses racines réelles comme suffit l'étude des formes quadratiques ordinaires à coefficients réels*, puisque, comme on l'a vu, le domaine D associé à cette forme est alors un polygone non euclidien situé dans le plan  $O\xi\tau$ , et, par suite, la méthode de réduction continue ne n'utilise que des substitutions réelles. Mais si la forme a des racines imaginaires, le domaine D a des points hors du plan  $O\xi\tau$ , les substitutions réelles modulaires ne suffisent plus et, puisqu'il y a des racines  $z = \frac{x}{y}$ , imaginaires, il est naturel d'envisager les substitutions modulaires où  $x$  et  $y$  ne sont plus simplement réels, mais complexes; autrement dit, il est plus rationnel, plus conforme à la nature de la question de s'adresser aux formes d'Hermite à indéterminées conjuguées et au groupe de Picard, qu'aux formes quadratiques à coefficients réels et au groupe modulaire réel. Et c'est à ces deux modifications essentielles que peut se ramener la généralisation exposée dans cette deuxième Partie du Mémoire actuel.

---

#### REMARQUES ADDITIONNELLES.

On a observé que,  $f$  étant une forme binaire à coefficients quelconques complexes, la *forme correspondante*  $\varphi$  quadratique à indéterminées conjuguées qu'il faut réduire pour avoir la réduite de  $f$  ( $\varphi$  et  $f$  étant réduites par la même substitution) est un covariant de  $f$  d'une espèce particulière, puisque à  $f$  et  $f_1$  équivalentes dans le groupe de Picard correspondent des formes d'Hermite  $\varphi$  et  $\varphi_1$  équivalentes par la même substitution. Le point représentatif  $\zeta$  de la forme  $\varphi$  est lié aux points  $z_i$ , racines de  $f$  par des relations de géométrie non euclidienne qui sont conservées par toute transformation T du groupe de Picard; c'est ce que nous avons vérifié *a posteriori* pour les formes cubiques et biquadratiques, auxquels cas nous avons appris à construire  $\zeta$  connaissant les  $z_i$ , à l'aide de ces relations géométriques que nous avons

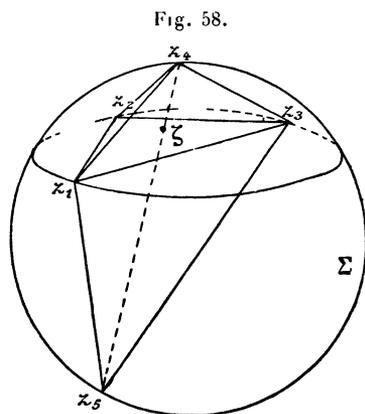
pu éclaircir complètement. Le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  apparaît donc comme un covariant des points racines de  $f$  (covariant en géométrie non euclidienne) par toute transformation  $T$  (qui est un mouvement non euclidien).

On pourrait tirer de là une conception purement géométrique de la réduction des formes binaires. Supposons que, par un moyen quelconque, on sache associer aux points racines  $z_i$  de la forme un point  $\zeta$  du demi-espace ( $\tau > 0$ ) et cela de telle façon que les relations géométriques qui relient les  $z_i$  à  $\zeta$  soient invariantes par toute transformation  $T$  du groupe de Picard (comme sont invariantes les distances non euclidiennes et les angles par une telle transformation), alors  $\zeta$  pourra servir à représenter une forme d'Hermite positive  $\varphi$ , qu'on pourra appeler une correspondante de  $f$ , dont la réduction se fera par la même substitution modulaire que celle de  $f$ . Cette méthode serait satisfaisante si elle permettait, *comme il est essentiel dans toutes les théories arithmétiques de réduction, d'obtenir des limitations des coefficients de la forme réduite de  $f$* . L'équivalence de deux formes  $f$  et  $f_1$  serait ramenée à l'identité des réduites comme dans les théories arithmétiques de réduction.

Cette conception géométrique pourra rendre des services pour des formes  $f$  douées de propriétés spéciales facilitant la découverte de points  $\zeta$  doués des propriétés de covariance signalées plus haut par rapport au groupe de Picard.

*Exemple.* — Prenons une forme générale du cinquième degré, et représentons ses racines  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  sur la sphère  $\Sigma$ , en géométrie non euclidienne par rapport à  $\Sigma$  comme quadrique fondamentale.

Envisageons l'hexaèdre convexe de sommets  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  auquel conduit la réduction continue exposée dans la deuxième Partie de ce Mémoire. Il est



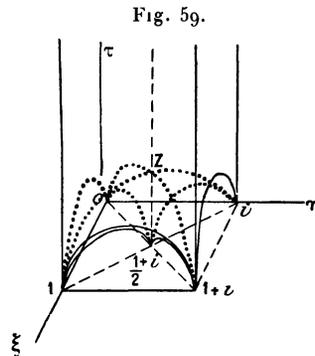
formé de deux tétraèdres accolés par la base. Ici ce seront  $z_1, z_2, z_3, z_4$  et  $z_5, z_1, z_2, z_3$ .

Un peu de réflexion suffit à se rendre compte que :

$z_4 z_5$  est le seul segment joignant deux des racines de la forme qui rencontre le triangle formé par les trois autres racines prises pour sommets en un point intérieur à ce triangle.

Le point  $\zeta$  est dès lors un point covariant des cinq points  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  par toute transformation T du groupe de Picard, puisqu'une T étant un mouvement non euclidien transforme l'hexaèdre précédent en un hexaèdre analogue ayant pour sommets  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$  transformés de  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ ;  $z_4 z_5$  étant intérieur à l'hexaèdre primitif, son transformé  $Z_4 Z_5$  sera intérieur à l'hexaèdre transformé.  $\zeta$  intersection de  $z_4 z_5$  et du plan  $z_1 z_2 z_3$  se transformera en Z intersection des transformés ( $Z_4 Z_5$  et le plan  $Z_1 Z_2 Z_3$ ) de  $z_4 z_5$  et du plan  $z_1 z_2 z_3$ . Remarquons que, puisque c'est un point intérieur, on pourra l'obtenir comme barycentre non euclidien de  $z_1, z_2, \dots, z_5$  pour des valeurs de  $t_1^2, t_2^2, t_3^2, t_4^2, t_5^2$  convenables des masses attribuées à ces points racines.

*Deuxième exemple.* – Envisageons la forme F du sixième degré ayant pour racines  $0, 1, i, 1+i, \frac{1+i}{2}, \infty$ . Le domaine D associé est un octaèdre non euclidien bien connu, car il reste invariant par un sous-groupe fini du groupe de



Picard. Les trois diagonales non euclidiennes se coupent à angle droit en un point Z de coordonnées  $\xi = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2}, \tau = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (qui est un des sommets de  $\pi_0$ ). Z est un covariant des six racines par toute transformation T du demi-espace qui est un mouvement non euclidien.

Si l'on transporte maintenant cet octaèdre dans une position quelconque, à l'aide d'une transformation

$$(S) \quad \begin{cases} X = \alpha x + \beta y, \\ Y = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant d'ailleurs *quelconques*), ou bien

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

et la transformation  $T$  qui lui correspond, on obtient une forme du sixième degré  $f$ , dont les racines, tout en n'étant plus rationnelles, ont entre elles les *mêmes relations géométriques* (invariantes par tout mouvement non euclidien) que les racines de la forme primitive. Pour cette forme l'octaèdre associé aura encore trois diagonales formant un trièdre trirectangle non euclidien dont le sommet  $\zeta$  sera un covariant des racines et pourra servir à la réduction de la forme  $f$ .



---

## TROISIÈME PARTIE.

### SUR CERTAINES FORMES BINAIRES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES.

---

*Preliminaires.* — L'introduction en théorie des nombres des formes à indéterminées conjuguées est due à Hermite [Mémoire « sur la théorie des formes quadratiques » (*Œuvres*, t. I, p. 234 et suiv.)]. Après lui on s'est occupé d'étudier les formes quadratiques à indéterminées conjuguées d'un nombre quelconque de variables, mais il ne semble pas exister dans la littérature mathématique jusqu'à ce jour la moindre étude sur les formes à indéterminées conjuguées de degré supérieur au second. L'étude qui va faire l'objet de la troisième Partie de ce Mémoire, encore qu'elle ne porte que sur une catégorie particulière de telles formes, va nous conduire à des résultats qui ne sont pas sans intérêt et qui montreront que les formes à indéterminées conjuguées de degré supérieur au second méritent autant d'attention que les formes quadratiques. On reprochera peut-être à l'étude présente de ne considérer que des formes d'une nature bien particulière. Il me suffirait cependant de constater que dans une étude toute nouvelle, comme l'est, semble-t-il, celle qui est entreprise ici, il est bon de commencer par les cas les plus simples. Se borner à l'étude de formes binaires à indéterminées conjuguées décomposables en produits de formes quadratiques d'Hermite, c'est un peu faire ce que faisait Hermite quand il posait, comme premier problème de la théorie des formes de degré  $n$  à  $n$  variables, l'étude de celles de ces formes qui se décomposent en  $n$  facteurs linéaires [Mémoire « sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés » (*Œuvres*, t. I, p. 415 à 428)].

L'étude présente n'est en somme qu'un premier pas dans la théorie des formes à indéterminées conjuguées de degré supérieur. Les résultats obtenus et les méthodes simples employées pour les obtenir montreront, je l'espère, qu'elle présente un certain intérêt. On s'est borné aux formes binaires, car c'est le cas où l'on peut se servir de représentations géométriques simples et extrêmement utiles. On constatera également qu'après l'étude qui fait l'objet de la deuxième Partie de ce Mémoire, il était naturel d'aborder l'étude des formes à indéter-

minées conjuguées décomposables en produit de formes d'Hermite, qui en constitue une extension toute naturelle, avec similitude des résultats obtenus et des moyens employés à les obtenir. Ces raisons m'ont paru suffisantes pour entreprendre l'étude qui fait l'objet de cette troisième Partie.

*Définition.* — Les formes binaires à indéterminées conjuguées que nous considérerons dans la suite sont des polynômes entiers par rapport aux variables  $x, y$  et aux variables conjuguées  $x', y'$ . Par rapport à l'ensemble des variables  $(x, y)$  un tel polynôme est de degré  $n$  et homogène; il est également homogène et de degré  $n$  par rapport à l'ensemble des variables  $(x', y')$ . C'est donc une somme de monomes du type

$$A x^k y^l x'^k y'^l \quad \text{avec} \quad k + l = n, \quad k' + l' = n.$$

De plus, les formes envisagées devront prendre *des valeurs réelles* quelles que soient les valeurs complexes attribuées à  $x, y$  ( $x'$  et  $y'$  recevant les valeurs conjuguées). Et pour cela à tout monome  $A x^k y^l x'^k y'^l$  de la forme en question devra correspondre, dans la même forme, le monome conjugué

$$A' x'^k y'^l x^k y^l \quad (A' \text{ étant conjugué de } A).$$

En particulier, le coefficient  $A$  d'un monome tel que  $A x^k y^l x'^k y'^l$  sera supposé *réel* (correspond au cas où  $k = k', l = l'$ , auquel cas  $x^k y^l x'^k y'^l$  et  $x'^k y'^l x^k y^l$  se confondent et sont réels). Une telle forme se désignera par  $f(x, y, x', y')$  ou, pour abrégé, par  $f(x, y)$ . Par rapport à l'ensemble  $(x, y, x', y')$  c'est un polynôme homogène de degré pair  $2n$ .

*Exemples.* — 1° Forme quadratique d'Hermite ( $n = 1$ ):

$$a x x' + b x y' + b' x' y + c y y' \quad (a, c \text{ réels});$$

2° Forme biquadratique ( $n = 2$ ):

$$a x^2 x'^2 + b x^2 x' y' + b' x'^2 x y + c x^2 y'^2 + c' x'^2 y^2 + d x y x' y' + e x y y'^2 + e' x' y' y^2 + f y^2 y'^2 \\ (a, d, f \text{ réels}).$$

Si l'on divise une forme  $f(x, y)$  du degré  $2n$  par  $y^n y'^n$ , on obtient, en posant

$$z = \frac{x}{y}, \quad z' = \frac{x'}{y'},$$

un polynôme du degré  $2n$  en  $(z, z')$  qui, par rapport à chaque variable, est du degré  $n$ . Nous le désignerons souvent par  $f(z, z')$ .

---

## CHAPITRE I.

### LES FORMES BINAIRES DÉCOMPOSABLES EN UN PRODUIT DE FORMES D'HERMITE DÉFINIES.

---

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait réussi à écrire la forme donnée

$$f(x, y) = \alpha_0 f_1 f_2 \dots f_n \quad (1),$$

$f_1, f_2, \dots, f_n$  étant des formes d'Hermite *définies*, dont on peut évidemment supposer le premier coefficient égal à un (puisque le coefficient de  $xx'$  dans une forme d'Hermite définie est toujours  $\neq 0$ )

$$f_1 = xx' - b_1 xy' - b'_1 x'y + c_1 yy' \quad (c_1 - b_1 b'_1 > 0),$$

$$f_2 = xx' - b_2 xy' - b'_2 x'y + c_2 yy' \quad (c_2 - b_2 b'_2 > 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_n = xx' - b_n xy' - b'_n x'y + c_n yy' \quad (c_n - b_n b'_n > 0),$$

$c_i$  étant réel quel que soit  $i$ ,  $b_i$  et  $b'_i$  étant toujours deux nombres imaginaires conjugués;  $\alpha_0$  est réel  $\neq 0$  et peut être supposé positif. On peut remarquer d'abord que  $f_1, f_2, \dots, f_n$  étant positives quelles que soient les valeurs entières attribuées à  $x, y$  ( $x'$  et  $y'$  recevant les valeurs conjuguées),  $f(x, y)$  sera aussi positive quels que soient  $x$  et  $y$ . Les formes dont on s'occupe dans ce Chapitre sont des formes positives. C'est pourquoi elles seront simples à étudier, tout comme étaient particulièrement simples à étudier dans la première Partie les formes binaires positives à coefficients réels, puisque, ainsi qu'on l'a fait remarquer, leur réduction continue sur les principes d'Hermite ne conduisait qu'à un nombre fini de formes ( $f$ ) équivalentes. L'équation  $f(z, 1) = 0$ , obtenue en posant  $z = \frac{x}{y}$ ,  $z' = \frac{x'}{y'}$  dans la forme  $f(x, y)$  égalée à zéro et divisée par  $y^n y'^n$ , représente dans le plan  $O\xi\eta$  de la variable complexe  $z$  un ensemble de  $n$  cercles imaginaires, ayant chacun un centre réel et un rayon purement imaginaire : à savoir les  $n$  cercles qui représentent les formes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dans le plan  $O\xi\eta$ .

---

(1) On a écrit  $f(x, y)$  au lieu de  $f(x, y, x', y')$  par simple abréviation, la confusion étant impossible. C'est là d'ailleurs une habitude adoptée dans la théorie des formes d'Hermite. En deuxième lieu, il est clair que la décomposition précédente n'est possible que d'une seule manière.

A la forme  $f$  nous associons la forme d'Hermite définie suivante :

$$\varphi = t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2 + \dots + t_n^2 f_n,$$

qui dépend des  $n$  paramètres  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ .

Imaginons que,  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  recevant des valeurs bien définies, nous réduisons la forme  $\varphi$  par une substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers complexes; } \alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

et que nous fassions dans  $f$  la même substitution

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \varphi S = \varphi(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y), \\ F(X, Y) &= f S = f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y). \end{aligned}$$

Puis imaginons que  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  varient; alors  $S$  varie avec  $\varphi$ , et l'on obtient ainsi un ensemble de substitutions (S) lorsque les  $t$  prennent toutes les valeurs possibles. Si l'on fait sur  $f$  toutes les substitutions (S) on obtient un ensemble de formes équivalentes à  $f$  que nous désignerons par ( $f$ ) et dont nous commencerons par étudier la nature.

Ceci est rendu facile par l'étude de l'ensemble (S) qui résulte de l'étude du domaine décrit par le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque  $t_1^2, \dots, t_n^2$  prennent toutes les valeurs possibles.

A cet effet nous désignons par  $\zeta_i$  le point représentatif de la forme  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\zeta_i$  se projette sur le plan  $O\xi\eta$  en  $P_i$ . L'affixe de  $P_i$  est  $b'_i$ . De plus

$$\overline{O\zeta_i} = c_i.$$

Si, comme on le suppose, aucune des formes  $f_i$  n'est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires conjugués, tous les  $\zeta_i$  sont *au-dessus* du plan  $O\xi\eta$  et aucun n'est situé dans ce plan (<sup>1</sup>).

Développons  $\varphi$ , on a

$$\varphi = pxx' - qxy' - q'x'y + ryy'$$

avec

$$\begin{aligned} p &= t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2, \\ q &= t_1^2 b_1 + t_2^2 b_2 + \dots + t_n^2 b_n, \\ q' &= t_1^2 b'_1 + t_2^2 b'_2 + \dots + t_n^2 b'_n, \\ r &= t_1^2 c_1 + t_2^2 c_2 + \dots + t_n^2 c_n. \end{aligned}$$

Soit  $\zeta$  le point représentatif de  $\varphi$ .

(<sup>1</sup>) Nous verrons brièvement, dans une Note placée à la fin du Chapitre, ce qui arrive si une ou plusieurs des formes  $f_i$ , ayant le déterminant nul, sont décomposables en un produit de deux formes linéaires conjuguées.

Avec la représentation projective,  $\Sigma$  étant la sphère fondamentale d'équation

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,$$

$\zeta_i$  représentatif de  $f_i$  a des coordonnées tétraédriques

$$1, b_i, b'_i, c_i;$$

c'est un point intérieur à la sphère. Les coordonnées de  $\zeta$  étant  $p, q, q', r$ , on voit qu'on peut écrire symboliquement

$$\zeta = t_1^2 \zeta_1 + t_2^2 \zeta_2 + \dots + t_n^2 \zeta_n.$$

Nous sommes familiarisés avec les écritures symboliques par les questions analogues traitées dans les première et deuxième Parties. Aussi allons-nous simplement indiquer le résultat auquel on parvient : Lorsque  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  varient, le point  $t_1^2 \zeta_1 + t_2^2 \zeta_2$  décrit le segment  $\zeta_1 \zeta_2$ ;  $t_1^2 \zeta_1 + t_2^2 \zeta_2 + t_3^2 \zeta_3$  décrit le triangle  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ ;  $t_1^2 \zeta_1 + t_2^2 \zeta_2 + t_3^2 \zeta_3 + t_4^2 \zeta_4$  décrit l'intérieur et la surface du tétraèdre de sommets  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \dots$ ; le point  $t_1^2 \zeta_1 + t_2^2 \zeta_2 + \dots + t_n^2 \zeta_n$  décrit l'intérieur et la surface du plus petit polyèdre convexe D contenant à son intérieur ou sur sa surface tous les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ . Ce polyèdre D est convexe, ses sommets appartiennent tous à l'ensemble des points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ; enfin tous les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  sont à l'intérieur ou sur la surface du polyèdre D. Ces trois propriétés suffisent à déterminer complètement le polyèdre D;  $\zeta_i \zeta_j$  sera une arête de ce polyèdre s'il existe un plan passant par elle qui laisse tous les  $\zeta_i$  d'un même côté. On montre alors qu'il y a deux plans passant par  $\zeta_i \zeta_j$  déterminant un dièdre d'arête  $\zeta_i \zeta_j$  à l'intérieur ou sur les faces duquel sont tous les  $\zeta_i$ . Ces deux plans contiennent les deux faces du polyèdre D passant par  $\zeta_i \zeta_j$ . Le plan  $\zeta_i \zeta_j \zeta_k$  sera le plan d'une face de D si ce plan laisse tous les  $\zeta_i$  du même côté; dans ce plan la face elle-même sera le plus petit polygone convexe contenant à son intérieur ou sur son contour tous les  $\zeta_i$  situés dans ce plan. Ces deux remarques servent à déterminer, si l'on veut, le polyèdre D.

Passant maintenant à la représentation de  $\varphi$  par un point  $\zeta$  du demi-espace  $\tau > 0$ ,  $\zeta$  sera défini par sa projection P sur le plan  $O\xi\eta$  dont l'affixe est

$$\frac{q'}{p} = \frac{t_1^2 b'_1 + t_2^2 b'_2 + \dots + t_n^2 b'_n}{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}$$

et par la relation

$$\overline{O\zeta} = \frac{r}{p} = \frac{t_1^2 c_1 + t_2^2 c_2 + \dots + t_n^2 c_n}{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}.$$

P est évidemment le barycentre euclidien des points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (projections des points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  qui représentent  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ) affectés des masses respectives  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$  puisque  $P_i$  a pour affixe  $b'_i$ . En remarquant que le point

J.

représentatif de  $t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2$  est un point  $\zeta_{1,2}$  de la droite non euclidienne  $\zeta_1 \zeta_2$  (cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  passant par  $\zeta_1, \zeta_2$ ) qui se projette en  $P_{1,2}$  sur  $P_1 P_2$  tel que

$$\frac{P_{1,2} P_1}{P_{1,2} P_2} = -\frac{t_2^2}{t_1^2},$$

qu'on peut appeler *barycentre non euclidien* des masses  $t_1^2, t_2^2$  placées en  $\zeta_1, \zeta_2$  ( $\zeta_{1,2}$  étant affecté de la masse  $t_1^2 + t_2^2$ ); ensuite que le point représentatif  $\zeta_{1,2,3}$  de  $(t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2) + t_3^2 f_3$  est un point de la droite non euclidienne  $\zeta_{1,2} \zeta_3$  projeté en  $P_{1,2,3}$  sur  $P_{1,2} P_3$  tel que

$$\frac{P_{1,2,3} P_{1,2}}{P_{1,2,3} P_3} = -\frac{t_3^2}{t_1^2 + t_2^2}$$

( $\zeta_{1,2,3}$  étant affecté de la masse  $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ ), etc.

$\zeta_{1,2,\dots,i}$  représentatif de  $t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2 + \dots + t_i^2 f_i$  est un point de la droite non euclidienne  $\zeta_{1,2,\dots,(i-1)} \zeta_i$  projeté en  $P_{1,2,\dots,i}$  sur  $P_{1,2,\dots,(i-1)} P_i$  tel que

$$\frac{P_{1,2,\dots,i} P_{1,2,\dots,(i-1)}}{P_{1,2,\dots,i} P_i} = -\frac{t_i^2}{t_1^2 + \dots + t_{i-1}^2}, \quad \dots \quad (\text{jusqu'à } i=n).$$

$\zeta$  représentatif de  $\varphi$  sera le barycentre non euclidien des points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ , affectés des masses respectives  $t_1^2, t_2^2, \dots, t_n^2$ . Ce point ne dépend nullement de l'ordre dans lequel sont rangés les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ . On peut aussi, pour la recherche de ce barycentre, remplacer tel groupe de points de l'ensemble  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  que l'on voudra par le barycentre des points du groupe à condition de l'affecter d'une masse égale à la somme des masses des points du groupe.

Revenant au domaine que décrit  $\zeta$  lorsque les  $t$  prennent toutes les valeurs possibles, on voit que ce sera *l'intérieur de la surface du plus petit polyèdre convexe non euclidien contenant à son intérieur ou sur sa surface tous les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$* .

Ce polyèdre sera dit *le polyèdre associé à la forme  $f$* ; il est complètement déterminé par la connaissance des points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  représentatifs des formes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dont le produit constitue la forme  $f$ .

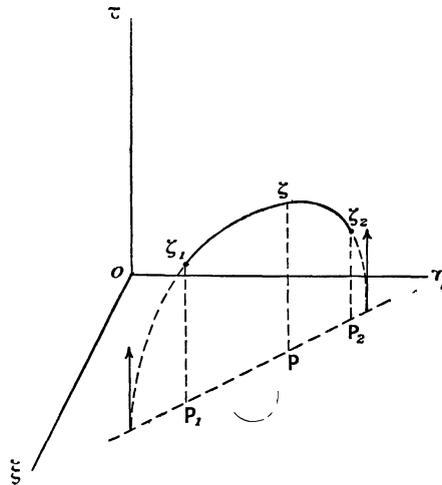
Dans le cas où la forme  $f$  est biquadratique et se décompose en un produit de deux formes d'Hermite définies, D se réduit au segment non euclidien joignant les points  $\zeta_1, \zeta_2$  représentatifs de  $f_1$  et  $f_2$ . Si  $f$  est du sixième degré, D devient le triangle non euclidien ayant pour sommets  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ; si  $f$  est du huitième degré, D est un tétraèdre non euclidien ayant pour sommets  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ , etc. On a fait les figures relatives à ces trois cas.

Connaissant le domaine D que décrit  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque  $t_1^2, \dots, t_n^2$  prennent toutes les valeurs possibles, l'ensemble des substitutions (S) est facilement caractérisé.

Considérons *tous les pentaèdres  $\pi$  de la division de Picard du demi-espace*

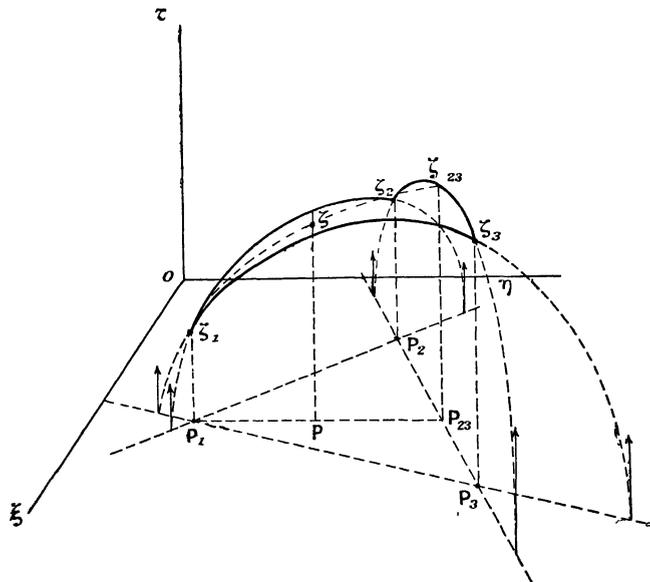
avec lesquels  $D$  a au moins un point commun (intérieur ou sur la frontière); l'ensemble  $(S)$  est l'ensemble des substitutions modulaires correspondant aux

Fig. 60.



transformations  $T$  du demi-espace qui transforment chacun de ces pentagones  $\pi$  en  $\pi_0$  domaine fondamental du groupe de Picard [ $\pi_0 = \pi T$ ,  $(f) = fS$ ].

Fig 61.

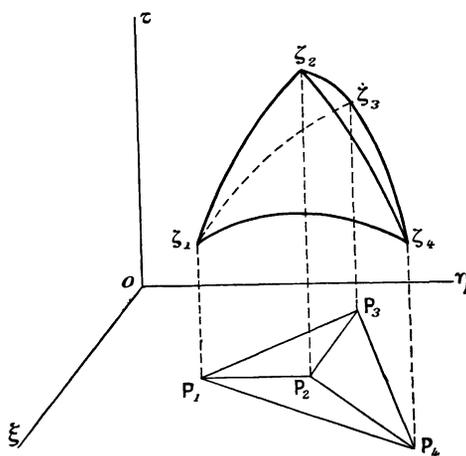


L'ensemble  $(S)$  est facilement caractérisé, ainsi que l'ensemble  $(f)$  déduit de  $f$  par la méthode de réduction continue.

Mais une remarque essentielle est la suivante : Tous les sommets de  $D$  appar-

tenant à l'ensemble  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ,  $D$  est tout entier au-dessus du plan  $O\xi\eta$  et n'a avec  $O\eta\xi$  aucun point commun; il s'ensuit de là immédiatement que  $D$  n'a de points communs qu'avec un nombre fini de pentaèdres  $\pi$ . L'ensemble  $(S)$  et par suite l'ensemble  $(f)$  ne comprennent qu'un nombre fini d'éléments.

Fig. 62.



Ainsi pour toute forme positive  $f$  décomposable en un produit de formes d'Hermite positives, la méthode de réduction continue ne conduit qu'à un nombre fini de formes  $(f)$ .

On pourrait s'arrêter là et appeler *réduites* toutes les formes  $(f)$  équivalentes à  $f$  ainsi obtenues, on n'aurait qu'un nombre fini de réduites pour chaque forme de l'espèce envisagée, quel que soit son degré. Mais on peut aller plus loin et choisir parmi  $(f)$  d'une façon plus précise une ou plusieurs réduites destinées à représenter toute la classe de formes équivalentes à  $f$ .

*Polyèdres associés à deux formes équivalentes.* — Si deux formes  $f$  et  $F$  sont équivalentes,  $F = fS$ ,  $S$  étant la substitution du groupe de Picard

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y \\ y &= \gamma X + \delta Y \end{aligned} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1; \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers complexes}),$$

et si  $f$  est le produit des formes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  formes d'Hermite positives,  $F$  sera le produit des transformées  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  par  $S$  [ $F_i = f_i S$ ]. Par une telle substitution  $S$  et par la transformation  $T$  du demi-espace qui lui correspond, les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  représentatifs de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  se transforment en  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  représentatifs de  $F_1, F_2, \dots, F_n$  [ $Z_i = \zeta_i T$ ].  $T$  étant un mouvement non euclidien, le polyèdre  $D$  associé à  $f$  se transformera bien évidemment dans le polyèdre  $\omega$  associé à  $F$ ; il est à peine besoin d'insister là-dessus. *Les domaines  $D$  et  $\omega$  associés à deux formes équivalentes*

$f$  et  $F$  se transforment donc l'un dans l'autre par la transformation  $T$  du demi-espace qui est définie par  $S$ , substitution qui transforme l'une dans l'autre les deux formes équivalentes  $[F = fS, \omega = DT]$ .

On tire de là [par un raisonnement analogue à celui fait dans la deuxième Partie (p. 93) à propos d'une question pareille], que deux formes équivalentes  $f$  et  $F$  donnent naissance au même groupe de formes  $(f)$  par la réduction continue. Autrement dit  $(f)$  et  $(F)$  sont identiques <sup>(1)</sup>. Que l'on parte de  $f$  ou d'une forme équivalente quelconque, l'ensemble des formes  $(f)$  que la réduction continue conduit à former est toujours le même.

On conclut aussi que les formes de l'ensemble  $(f)$  sont celles des formes équivalentes à  $f$  dont le polyèdre associé a avec  $\pi_0$  au moins un point commun.

Enfin reprenons deux formes

$$f = a_0 f_1 f_2 \dots f_n$$

et

$$F = A_0 F_1 F_2 \dots F_n,$$

équivalentes par la substitution (S)

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y. \end{cases}$$

Soient

$$\begin{cases} F_i = XX' - B_i XY' - B_i X' Y + C_i YY' \\ f_i = xx' - b_i xy' - b_i x' y + c_i y\gamma' \end{cases} \quad \left( i = 1, 2, \dots, n; F_i(X, Y) = \frac{f_i(x, y)}{f_i(\alpha, \gamma)} \right).$$

on aura

$$A_0 = a_0 f_1(\alpha, \gamma) f_2(\alpha, \gamma) \dots f_n(\alpha, \gamma) = f(\alpha, \gamma) \neq 0 \quad (A_0 > 0);$$

soient  $\varphi$  et  $\Phi$  les deux formes associées à  $f$  et  $F$ ,

$$\begin{aligned} \varphi &= t_1^2 f_1 + \dots + t_n^2 f_n, \\ \Phi &= T_1^2 F_1 + \dots + T_n^2 F_n, \end{aligned}$$

$\varphi(x, y)$  se transformera en  $\Phi(X, Y)$  par la substitution  $S$  si l'on suppose

$$T_i^2 = t_i^2 f_i(\alpha, \gamma) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Avec cette correspondance des paramètres, on voit que  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  pour les valeurs des paramètres  $t$  se transformera en  $Z$  représentatif de  $\Phi$  pour les valeurs  $T$  des paramètres par la transformation  $T$  définie à l'aide de la

---

(1) Inversement d'ailleurs, si les deux ensembles  $(f)$  et  $(F)$  ont en commun une forme, on en conclut que  $f$  et  $F$  sont équivalentes, et que  $(f)$  et  $(F)$  sont identiques.

substitution  $S$  qui fait passer de  $f$  à  $F$

$$\begin{aligned} F &= fS, \\ Z &= \zeta T. \end{aligned}$$

*Définition de la réduite équivalente à  $f$ .* — Parmi l'ensemble ( $f$ ) nous allons choisir une forme pour représenter toute la classe des formes équivalentes à  $f$ .

Soit donc

$$\varphi = t_1^2 f_1 + \dots + t_n^2 f_n$$

la forme associée à

$$\begin{aligned} f &= a_0 f_1 \dots f_n, \\ f_i &= xx' - b_i xy' - b'_i x'y + c' \gamma \gamma' \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

et soit

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad \text{avec bien entendu} \quad \begin{cases} x' = \alpha' X' + \beta' Y' \\ y' = \gamma' X' + \delta' Y' \end{cases} \quad (1)$$

la substitution qui réduit  $\varphi$  pour certaines valeurs des paramètres  $t$ .

Soit

$$f_i(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) = f_i(\alpha, \gamma) F_i(X, Y),$$

en posant

$$F_i(X, Y) = XX' - B_i XY' - B'_i X'Y + C_i YY' \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Alors

$$f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) = F(X, Y) = A_0 F_1 F_2 \dots F_n \quad \text{avec} \quad A_0 = f(\alpha, \gamma) \neq 0, \quad A_0 > 0.$$

Par  $S$ ,  $\varphi$  devient

$$\Phi = T_1^2 F_1 + \dots + T_n^2 F_n,$$

en posant

$$T_i^2 = t_i^2 f_i(\alpha, \gamma) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Une première remarque immédiate se tire de

$$A_0 = a f_1(\alpha, \gamma) f_2(\alpha, \gamma) \dots f_n(\alpha, \gamma)$$

comparé à

$$T_i^2 = t_i^2 f_i(\alpha, \gamma);$$

c'est

$$\frac{A_0}{T_1^2 T_2^2 \dots T_n^2} = \frac{a_0}{t_1^2 t_2^2 \dots t_n^2}$$

qui prouve que  $\frac{a_0}{t_1^2 \dots t_n^2}$  est une sorte d'invariant par la substitution  $S$ .

(1) Nous omettrons souvent de parler de  $x'$ ,  $y'$ ,  $X'$ ,  $Y'$  et nous écrirons (S) tout simplement  $\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases}$ ; mais il ne peut y avoir d'équivoque possible. Il est toujours sous-entendu que les lettres  $x'$ ,  $y'$ ,  $X'$ ,  $Y'$  conjuguées de  $x$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $Y$  subissent une substitution conjuguée de celle faite sur  $x$ ,  $y$ ,  $X$ ,  $Y$

La forme positive

$$\Phi = PXX' - QXY' - Q'X'Y + RYY'$$

étant réduite et  $\Delta$  désignant son déterminant  $\Delta = PR - QQ'$ , qui est d'ailleurs égal au déterminant  $\delta$  de  $\varphi$ , on a

$$P \leq \sqrt{2\Delta},$$

$$R \leq \frac{2\Delta}{P}$$

et

$$\left| \text{partie réelle de } Q' = \frac{Q + Q'}{2} \right| \leq \frac{P}{2},$$

$$0 \leq \text{partie imaginaire de } Q' = \frac{Q' - Q}{2i} \leq \frac{P}{2}.$$

De plus

$$\begin{cases} P = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2, \\ Q = T_1^2 B_1 + \dots + T_n^2 B_n, & Q' = T_1^2 B'_1 + \dots + T_n^2 B'_n, \\ R = T_1^2 C_1 + T_2^2 C_2 + \dots + T_n^2 C_n. \end{cases}$$

De la première équation par un raisonnement plusieurs fois employé déjà, on tire

$$T_1^2 T_2^2 \dots T_n^2 \leq \left(\frac{P}{n}\right)^n$$

et, par suite,

$$A_0 = \frac{a_0}{t_1^2 t_2^2 \dots t_n^2} T_1^2 T_2^2 \dots T_n^2 \leq \frac{a_0}{t_1^2 \dots t_n^2} \left(\frac{P}{n}\right)^n \leq \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^n},$$

à cause de

$$P \leq \sqrt{2\Delta} \quad \text{ou} \quad P \leq \sqrt{2\delta},$$

car  $\Delta$  de  $\Phi$  égale  $\delta$  de  $\varphi$

$$\Lambda_0 \leq \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^n}$$

Limitons maintenant les  $C_i$ . On a

$$T_i^2 C_i \leq R$$

et

$$T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_{i-1}^2 + T_{i+1}^2 + \dots + T_n^2 \leq P$$

qui fournit

$$T_1^2 T_2^2 \dots T_{i-1}^2 T_{i+1}^2 \dots T_n^2 \leq \left(\frac{P}{n-1}\right)^{n-1},$$

qui donne, par multiplication avec

$$T_i^2 C_i \leq R,$$

$$T_1^2 \dots T_n^2 C_i \leq R \left(\frac{P}{n-1}\right)^{n-1},$$

$$\frac{A_0}{a_0} t_1^2 \dots t_n^2 C_i \leq R \left(\frac{P}{n-1}\right)^{n-1}.$$

D'où enfin

$$C_i \leq \frac{a_0}{t_1^2 \dots t_n^2} R \left( \frac{P}{n-1} \right)^{n-1} \frac{1}{A_0}.$$

En se servant de

$$R \leq \frac{2\delta}{P} \quad \text{et} \quad P \leq \sqrt{2\delta},$$

on a

$$R \left( \frac{P}{n-1} \right)^{n-1} \leq \frac{2^{\frac{n}{2}} \delta^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}$$

et

$$C_i \leq \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}} \frac{1}{A_0}$$

La limitation des  $B_i$  est immédiate puisque,  $F_i$  étant une forme définie, on a

$$C_i - B_i B'_i > 0.$$

Donc

$$\text{Norme } B_i \leq C_i \leq \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}} \frac{1}{A_0}$$

**CONCLUSION FONDAMENTALE.** — *Si pour certaines valeurs des paramètres  $t$  on réduit la forme  $\varphi$  dont  $\delta$  est le déterminant, et si l'on fait la même substitution dans  $f$  on obtient une forme  $F$ , équivalente à  $f$ , dont tous les coefficients sont limités supérieurement en valeur absolue en fonction de la seule quantité  $\frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$  qui ne dépend que de la forme  $\varphi$ .*

En effet, puisque

$$F = A_0 F_1 F_2 \dots F_n$$

avec

$$F_i = XX' - B_i XY' - B'_i X'Y + C_i YY' \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les coefficients de  $F$  sont des polynomes en  $A_0, B_i, B'_i, C_i$ . Par la méthode des majorantes, on calculera pour la valeur absolue de chacun de ces coefficients une limite supérieure qui sera une fonction de la quantité  $\frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ , à savoir une puissance de cette quantité dont l'exposant sera fixé par le rang du coefficient calculé dans  $F$ , multipliée par un facteur indépendant de la quantité  $\frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ , mais qui dépendra du degré de la forme et renfermera en général  $A_0$  au dénominateur à une certaine puissance. *Si la forme proposée  $f$  a tous ses coeffi-*

*cients entiers* (certains seront réels, les autres seront des entiers deux à deux conjugués),  $A_0$  sera un entier certainement non nul, puisque c'est le premier coefficient de la forme et qu'il est toujours  $\neq 0$ . On aura donc  $A_0 \geq 1$ ; dans le facteur en question on pourra remplacer  $A_0$  au dénominateur par l'unité; on ne fera ainsi qu'accroître le second membre de la limitation trouvée. *Tous les coefficients de F sans exception seront ainsi limités supérieurement en valeur absolue, en fonction de la seule quantité*  $\frac{\alpha_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$ .

Cette quantité  $\theta = \frac{\alpha_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2}$  joue donc un rôle essentiel dans la question. Sans insister sur un raisonnement fait dans les première et deuxième Parties de ce Mémoire, on voit que, si  $f$  et  $\mathfrak{F}$  sont deux formes équivalentes, la forme  $\varphi$  associée à  $f$  pour les valeurs  $t$  des paramètres, se transformant dans la forme  $\Phi$  associée à  $\mathfrak{F}$  pour les valeurs  $\bar{t}$  des paramètres qui correspondent aux  $t$  par des relations connues, on a  $\theta = \Theta$ ,  $\theta$  et  $\Theta$  étant les valeurs des deux fonctions relatives à  $f$  et  $\mathfrak{F}$  et aux valeurs  $t$  et  $\bar{t}$  correspondantes des paramètres.

D'où la conclusion : *Pour deux formes équivalentes et pour des valeurs correspondantes des paramètres, la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs.*

On tire de là les deux conséquences suivantes :

1° Les fonctions  $\theta$  et  $\Theta$  relatives à deux formes équivalentes  $f$  et  $F$  prennent les mêmes valeurs lorsque les variables  $t$  prennent toutes les valeurs possibles; *elles ont donc même minimum*; par définition, nous pourrions dire que ce minimum sera le déterminant de la forme  $f$  de degré  $2n$  envisagée; il sera le même pour toute la classe équivalente à  $f$  (1).

2° Les formes quadratiques  $\varphi$  et  $\Phi$  à indéterminées conjuguées associées à deux formes  $f$  et  $F$  avec les valeurs  $t$  d'une part,  $T$  de l'autre, qui donnent le minimum des fonctions  $\theta$  et  $\Theta$ , deviendront équivalentes en même temps que  $f$  et  $F$ . Ainsi  $\Phi$  se déduira de  $\varphi$  par la même substitution que  $F$  de  $f$ . Il est donc naturel d'appeler *correspondante de  $f$*  la forme quadratique à indéterminées conjuguées  $\varphi$  pour les valeurs de  $t$  qui rendent  $\theta$  minimum.

Nous appellerons *réduites d'une forme  $f$*  la forme unique, ou les formes de l'ensemble ( $f$ ) qui correspondent à ce minimum de  $\theta$ . On peut les caractériser d'un mot : *c'est celle ou celles des formes de ( $f$ ) dont la ou les correspondantes sont des formes quadratiques réduites*. Voici comment on trouvera la réduite de  $f$  : on déterminera d'abord les valeurs de  $t$  qui rendent  $\theta$  minimum, ce qui donnera la forme  $\varphi$  correspondante quadratique de  $f$ ;  $S$  étant la substi-

---

(1) Nous appellerons *formes binaires à indéterminées conjuguées de même déterminant* l'ensemble des formes d'un même degré décomposables en produit de formes d'Hermite positives pour lesquelles le minimum absolu de la fonction  $\theta$  aura une même valeur.

tution du groupe de Picard qui réduit la correspondante,  $fS$  sera la réduite de  $f$ .

De là on conclut facilement :

1° *Deux formes équivalentes  $f$  et  $F$  ont les mêmes réduites*, car leurs correspondantes  $\varphi$  et  $\Phi$  se déduisent l'une de l'autre par la substitution  $\Sigma$  qui fait passer de  $f$  à  $F$

$$\begin{cases} F = f\Sigma, \\ \Phi = \varphi\Sigma. \end{cases}$$

Le raisonnement bien simple (que nous omettons ici) est identique à celui qui a été déjà fait (p. 113) pour la question analogue de la deuxième Partie.

Cette proposition ramène l'équivalence de deux formes à l'égalité absolue entre leurs réduites ou leurs groupes de réduites.

2° *Les formes binaires à indéterminées conjuguées du type envisagé (décomposables en produit de formes positives d'Hermité) d'un même degré  $2n$ , à coefficients entiers, et de même déterminant  $\theta$ , se distribuent en un nombre fini de classes.*

Car si  $f$  a ses coefficients entiers, une réduite équivalente  $F$  les a aussi. Mais on a vu que les valeurs absolues des coefficients de  $F$  étaient limitées supérieurement en fonction de la seule quantité  $\theta$ , *limites supérieures qui sont donc fixées par la connaissance de  $\theta$  et par le degré de la forme* (ces limites ne renfermant plus au dénominateur le premier coefficient  $A_0$  de  $F$ ). On cherchera alors toutes les formes réduites du type  $F = A_0 F_1 F_2 \dots F_n$ . *Pour une telle forme  $F$ , les coefficients étant limités supérieurement en valeur absolue, on n'aura qu'un nombre limité de possibilités.* (Il restera encore à chercher celles des formes dont les coefficients satisfont aux inégalités de limitation précédentes, qui sont bien décomposables, et qui ont le déterminant  $\theta$ .) Par conséquent, comme il n'y a qu'un nombre fini de réduites possibles, il ne peut y avoir pour un déterminant  $\theta$  donné qu'un nombre fini de classes du type envisagé.

*Existence du minimum de  $\theta$ .* — Reprenons la forme

$$f = a_0 f_1 f_2 \dots f_n,$$

et soient  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  les déterminants respectifs des formes  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Tous les  $\delta_i$  sont positifs et non nuls.

Soit

$$\varphi = t_1^2 f_1 + \dots + t_n^2 f_n = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

la forme associée à  $f$ , avec

$$\begin{aligned} p &= t_1^2 + \dots + t_n^2, \\ q &= t_1^2 b_1 + \dots + t_n^2 b_n, & q' &= t_1^2 b'_1 + \dots + t_n^2 b'_n, \\ t &= t_1^2 c_1 + \dots + t_n^2 c_n, \end{aligned}$$

$\delta$ , déterminant de  $\varphi$ , se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \delta &= pr - qq' = (t_1^2 + \dots + t_n^2)(t_1^2 c_1 + \dots + t_n^2 c_n) - (t_1^2 b_1 + \dots + t_n^2 b_n)(t_1^2 b'_1 + \dots + t_n^2 b'_n) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i^4 \delta_i + \sum_{i,j=1}^n t_i^2 t_j^2 (c_i + c_j - b_i b'_j - b_j b'_i), \end{aligned}$$

le deuxième  $\Sigma$  étant étendu à toutes les *combinaisons* de deux indices différents  $i, j$  pris dans la suite 1, 2, ...,  $n$ . Comme on peut écrire

$$c_i + c_j - b_i b'_j - b_j b'_i = \delta_i + \delta_j + \varkappa(b_i - b_j),$$

on voit qu'en posant  $t_i^2 = T_i$ ,  $\delta$  devient une forme quadratique en  $T_1, T_2, \dots, T_n$  dont tous les coefficients sont positifs et dont aucun n'est nul. Tous les nombres  $\delta_i$  sont supérieurs à un nombre positif fixe

$$\delta_i \geq a > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en sorte que

$$\delta_{ij} = c_i + c_j - b_i b'_j - b_j b'_i = \delta_i + \delta_j + \varkappa(b_i - b_j) \geq 2a.$$

Donc

$$\delta \geq a \left( \sum_{i=1}^n T_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n T_i T_j \right) = a [T_1 + \dots + T_n]^2.$$

En sorte que

$$\theta \geq \frac{a_n a^2 (T_1 + \dots + T_n)^n}{T_1 T_2 \dots T_n} \geq a_0 a^2 n^n,$$

car

$$\frac{(T_1 + \dots + T_n)^n}{T_1 T_2 \dots T_n} \geq n^n.$$

On voit ainsi que  $\theta$  reste constamment supérieur à un nombre positif fixe.  $\theta$  devient d'ailleurs infini lorsque certains des  $T$  sont nuls. L'existence d'un système au moins de valeurs de  $t_i^2$ , toutes différentes de zéro, rendant  $\theta$  minimum, en résulte immédiatement.

#### CAS OU CERTAINES DES FORMES $f_i$ ONT LEUR DÉTERMINANT NUL <sup>(1)</sup>.

Une forme  $f_i$  d'invariant nul s'écrit  $(x - \zeta_i y)(x' - \zeta'_i y')$ ,  $\zeta_i$  étant l'affixe de son point représentatif dans le plan  $O\xi\eta$  (nous désignerons par la même lettre le point représentatif et son affixe  $\zeta_i = b'_i$ ). Rien n'est à changer dans ce que nous avons dit du polyèdre  $D$  associé à  $f$ , sinon qu'il admet alors pour sommets

<sup>(1)</sup> Ce cas ne peut se présenter que si  $f(z, 1)$ , tout en étant positive pour toute valeur de  $z$ , peut s'annuler pour des valeurs particulières de  $z$ ; ces valeurs seront d'ailleurs, précisément, les points représentatifs des  $f_i$  dont l'invariant est nul.

dans le plan horizontal tous les points  $\zeta_i$  représentatifs des  $f_i$  de la suite  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , qui ont leur déterminant nul. Il faudra toutefois prendre garde que si, parmi les  $f_i$ , se trouve la forme  $\gamma\gamma'$ , cette forme est représentée par le point à l'infini du plan  $O\xi\eta$ , en sorte que le polyèdre  $D$  aura un sommet à l'infini dans la direction  $O\tau$  et que les arêtes issues de ce sommet seront des demi-droites normales au plan  $O\xi\eta$ , les faces correspondantes situées dans les demi-plans normaux au plan  $O\xi\eta$ . D'ailleurs, dans la formation de  $\varphi$  associée à  $f$ , une forme  $f_i$  égale à  $\gamma\gamma'$  donnera le terme  $t_i^2 f_i = t_i^2 \gamma\gamma'$ , lequel, par une substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

donnera

$$t_i^2 (\gamma X + \delta Y)(\gamma' X' + \delta' Y') = t_i^2 \gamma\gamma' F_i(X, Y),$$

en posant

$$F_i(X, Y) = \frac{f_i(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)}{f_i(\alpha, \gamma)},$$

comme dans le cas général

$$F_i(X, Y) = XX' - B_i XY' - B_i' X' Y + C_i YY'.$$

On voit ainsi qu'on peut toujours, en transformant au besoin  $f$  par une substitution modulaire, supposer que la forme  $f$  dont on part *ne contient pas*  $\gamma\gamma'$  et que tous les  $f_i$  s'écrivent

$$xx' - b, xy' - b', x'y + c, yy'.$$

Tout se passe comme dans la première Partie ou la deuxième lorsque  $f$  admettait des racines infinies; on s'en débarrassait par une substitution du groupe de Picard préliminaire qui ramenait toute racine à distance finie. Mais même si l'on a pris cette précaution préalable, il n'en demeure pas moins que, si une forme  $f_i$  d'invariant nul a un point représentatif  $\zeta_i$  dans le plan  $O\xi\eta$  qui a un *affixe rationnel*, il y aura des formes ( $f$ ) contenant  $\gamma\gamma'$ .

En effet, le terme

$$t_i^2 f_i = t_i^2 (x - \zeta_i, y)(x' - \zeta_i', y')$$

de  $\varphi$  associée à  $f$  devient, par  $S$ ,

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases} \\ t_i^2 [(\alpha - \zeta_i, \gamma)X + (\beta - \zeta_i, \delta)Y][(\alpha' - \zeta_i', \gamma')X' + (\beta' - \zeta_i', \delta')Y'].$$

Le domaine  $D$  ayant pour sommet  $\zeta_i$ , il y a un pentaèdre  $\pi$  au moins de sommet  $\zeta_i$  ayant avec  $D$  des points communs. *La substitution  $S$  qui l'amène*

sur  $\pi_0$  est alors telle que  $\zeta_i = \frac{\alpha}{\gamma}$  et le terme précédent devient

$$\frac{t_i^2}{\gamma\gamma'} YY'.$$

La forme ( $f$ ) sera alors

$$F = A_0 F_1 \dots F_{i-1} YY' F_{i+1} \dots F_n.$$

Son associée ( $\varphi$ ) sera

$$\Phi = T_1^2 F_1 + \dots + T_{i-1}^2 F_{i-1} + T_i^2 YY' + \dots + T_n^2 F_n,$$

et  $\varphi$  associée à  $f$  se transforme en  $\Phi$  associée à  $F$  pour les valeurs

$$T_k^2 = t_k^2 f_k(\alpha, \gamma),$$

tant que  $f_k(\alpha, \gamma) \neq 0$ , c'est-à-dire pour  $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ , et

$$T_i^2 = \frac{t_i^2}{\gamma\gamma'}$$

pour  $f_i(\alpha, \gamma) = 0$ .

Tout se passe comme dans le cas analogue pour la deuxième Partie, c'est-à-dire pour le cas où  $f$  admettait des racines rationnelles.

Comme dans cette deuxième Partie, on modifiera bien facilement les limitations des  $B_k$  et  $C_k$  ainsi que de  $A_0$ , et il s'introduira dans cette limitation

toujours la même quantité  $\frac{a_0 \delta^2}{t_1 \dots t_n^2}$  dont il faudra chercher le minimum.

L'existence de ce minimum, en supposant, comme dans la première Partie, toujours les  $f_i$  distincts, n'offre pas de difficulté spéciale. C'est pourquoi nous nous contenterons ici d'indiquer brièvement les petites modifications qu'offrirait ce cas particulier <sup>(1)</sup>.

Si en particulier toutes les formes  $f_1, f_2, \dots, f_n$  avaient un invariant nul,

$$f_i = (x - \zeta_i y)(x' - \zeta'_i y') \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La forme associée serait

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{T}(x - \zeta_1 y) + \dots + t_n^2 \mathfrak{T}(x - \zeta_n y).$$

Elle serait identique à la forme que, dans la deuxième Partie, on a associée à la forme binaire ordinaire

$$\mathfrak{F} = \sqrt{a_0}(x - \zeta_1 y) \dots (x - \zeta_n y).$$

---

<sup>(1)</sup> Il pourra arriver d'ailleurs, comme le montrent des exemples simples [par exemple la forme biquadratique décomposable en  $f_1 f_2$  ( $f_1$  d'invariant nul)], que le minimum de  $\theta$  soit atteint lorsque  $\zeta$  représentatif est dans le plan  $O\xi\eta$  en un sommet de  $D$ . On ne peut plus alors parler de réduction.

La fonction  $\theta = \frac{a_0 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1' \dots t_n'}$  associée à  $f$  serait identique à la fonction  $\Theta$  associée à  $\mathfrak{F}$ , les domaines associés à  $f$  et  $\mathfrak{F}$  seraient identiques. *La réduction de  $f$  et celle de  $\mathfrak{F}$  seraient deux problèmes identiques.*

*Application à la forme biquadratique.* — Soit la forme biquadratique

$$f(x, y) = ax^2x'^2 + bx'x'y' + b'xyx'^2 + cx^2y'^2 + c'x'y'^2 + dxyx'y' + exyy'^2 + e'x'y'y'^2 + fy^2y'^2,$$

$a, d, f$  étant réels;  $b, b'; c, c'; e, e'$  étant imaginaires conjugués. On a

$$f(z, \tau) = az^2\tau'^2 + bz^2\tau' + b'\tau\tau'' + c\tau' + c'\tau'^2 + d\tau\tau' + e\tau + e'\tau' + f.$$

L'équation  $f(z, \tau) = 0$  représente dans le plan  $O\eta$  en coordonnées isotropes une quartique bicirculaire. *Et l'on a des moyens classiques pour reconnaître si cette quartique bicirculaire se décompose en deux cercles et pour trouver ces deux cercles.* Nous y reviendrons plus loin.

Supposons que l'on ait reconnu que cette quartique se décompose en deux cercles à centre réel, à rayon purement imaginaire de la forme

$$\begin{aligned} z\tau' - b_1\tau - b_1'\tau' + c_1 &= 0 & (\delta_1 = c_1 - b_1b_1' > 0), \\ z\tau' - b_2\tau - b_2'\tau' + c_2 &= 0 & (\delta_2 = c_2 - b_2b_2' > 0), \end{aligned}$$

en sorte que

$$f(z, \tau) = a(z\tau' - b_1\tau - b_1'\tau' + c_1)(z\tau' - b_2\tau - b_2'\tau' + c_2),$$

$b_1, b_1'$  étant imaginaires conjugués, ainsi que  $b_2$  et  $b_2'$ ,  $c_1$  et  $c_2$  étant réels. Alors  $f(x, y)$  sera le produit des deux formes d'Hermité *définies*

$$\begin{aligned} f &= af_1f_2, \\ f_1 &= xx' - b_1xy' - b_1'x'y + c_1yy', \\ f_2 &= xx' - b_2xy' - b_2'x'y + c_2yy' \end{aligned}$$

(d'invariants  $\delta_1$  et  $\delta_2 \neq 0$ ).

Soient  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  les points représentatifs de  $f_1$  et  $f_2$ . Ils se projettent en  $P_1$  et  $P_2$  sur  $O\xi\eta$ , tels que

$$\begin{aligned} \text{affixe de } P_1 &= b_1', & \text{affixe de } P_2 &= b_2', \\ \overline{O\zeta_1}^2 &= c_1, & \overline{O\zeta_2}^2 &= c_2. \end{aligned}$$

La forme associée à  $f$

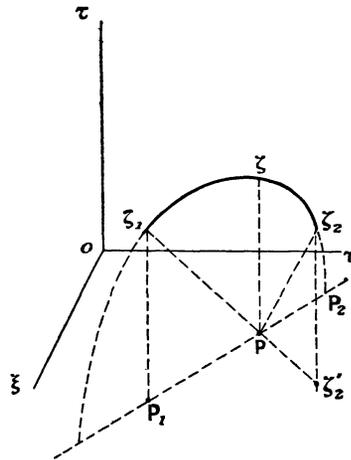
$$\varphi = t_1^2 f_1 + t_2^2 f_2$$

a son point représentatif  $\zeta$  sur le segment non euclidien  $\zeta_1 \zeta_2$  (arc du cercle

orthogonal au plan  $O\xi\eta$  mené par  $\zeta_1, \zeta_2$ .  $\zeta$  se projette en P sur  $P_1, P_2$  (1) et

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = -\frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Fig. 63.



La fonction  $\theta = \frac{\alpha_1 \delta}{t_1^2 t_2^2}$  devient ici, puisque

$$\begin{aligned} \text{d\u00e9terminant de } \varphi = \delta &= (t_1^2 + t_2^2) (t_1' c_1 + t_2' c_2) - \mathfrak{R}(t_1^2 b_1 + t_2^2 b_2), \\ &= t_1' \delta_1 + t_2' \delta_2 + t_1' t_2^2 [\delta_1 + \delta_2 + \mathfrak{R}(b_1 - b_2)], \\ \theta &= \alpha \left[ \frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \mathfrak{R}(b_1 - b_2) \right]. \end{aligned}$$

Le minimum de  $\theta$  a lieu en m\u00eame temps que celui de

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2$$

(somme de deux termes dont le produit est constant), c'est-\u00e0-dire pour

$$\begin{aligned} \frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 &= \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2, \\ \frac{t_1^2}{\sqrt{\delta_2}} &= \frac{t_2^2}{\sqrt{\delta_1}}. \end{aligned}$$

La correspondante  $\varphi$  de  $f$  est donc

$$\varphi = \sqrt{\delta_2} f_1 + \sqrt{\delta_1} f_2,$$

---

(1) On peut toujours supposer  $P_1$  et  $P_2$  distincts par une substitution modulaire pr\u00e9alable.

et la valeur minimum de  $\theta$  est

$$\theta = a[2\sqrt{\delta_1\delta_2} + \delta_1 + \delta_2 + \mathfrak{R}(b_1 - b_*)].$$

Elle est parfaitement déterminée par la connaissance de  $f_1$  et  $f_2$ .

Son point représentatif  $\zeta$  est lié simplement à  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . En effet, on a

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = -\frac{t_1'}{t_1} = -\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\delta_2}}.$$

Or

$$\overline{P_1\zeta_1} = \sqrt{\delta_1}, \quad \overline{P_2\zeta_2} = \sqrt{\delta_2}.$$

Donc

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = -\frac{\overline{P_1\zeta_1}}{\overline{P_2\zeta_2}}.$$

Ceci montre que  $P$  est l'intersection de  $P_1$ ,  $P_2$  avec  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2'$  ( $\zeta_2'$  symétrique de  $\zeta_2$  par rapport à  $O\xi\eta$ ), c'est-à-dire que  $\zeta$  est milieu non euclidien de  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ .

Nous obtenons le même résultat que pour les formes biquadratiques positives ordinaires.

---

---

## CHAPITRE II.

FORMES BINAIRES A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES DÉCOMPOSABLES EN PRODUIT DE FORMES D'HERMITE TANT DÉFINIES QU'INDÉFINIES. ÉTUDE PRELIMINAIRE DES FORMES BIQUADRATIQUES.

---

Pour faciliter l'exposition nous commençons ici par le cas des formes biquadratiques. Nous indiquerons ensuite comment ce que nous allons dire s'étend aux formes de degré pair quelconque.

Soit donnée une forme biquadratique  $f(x, y)$  à indéterminées conjuguées, et supposons que l'on ait reconnu par les moyens classiques que la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  se décomposait en deux cercles <sup>(1)</sup> dont l'un au moins soit réel. Alors la forme  $f$  se décompose en un produit de deux formes d'Hermité dont l'une au moins est indéfinie. Il peut se présenter deux cas : ou bien les deux formes sont indéfinies, ou bien l'une est définie et l'autre est indéfinie. (Nous laissons de côté le cas où l'une des formes ou bien les deux auraient leur invariant nul.)

*Premier cas.* —  $f$  se décompose en produit d'une forme définie  $f_1$  par une forme indéfinie  $f_2$

$$f = f_1 f_2.$$

La décomposition ne donne  $f_1$  et  $f_2$  qu'aux facteurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  près dont le produit est 1. On pourra profiter de cette indétermination pour supposer par exemple que  $f_1$  et  $f_2$  ont leurs déterminants égaux et de signes contraires.

Considérons la forme  $f_2$ . On sait qu'elle est représentée (dans le demi-espace  $\tau > 0$ ) par une demi-sphère <sup>(2)</sup> dont le grand cercle  $\gamma_2$  du plan  $O\xi\eta$  est le cercle  $f_2(z, 1) = 0$ . On sait aussi, à l'aide d'une méthode indiquée par M. Picard <sup>(3)</sup>, trouver l'expression générale d'une forme  $\varphi_2$  définie ayant son point représentatif sur la demi-sphère représentative de  $f_2$  et ayant pour déterminant celui de  $f$ , changé de signe.  $\varphi_2$  dépend du paramètre complexe qui fixe la projection de  $\zeta_2$  sur le plan  $O\xi\eta$ .

---

<sup>(1)</sup> Dont les équations cartésiennes en  $(\xi\eta)$  soient à coefficients réels.

<sup>(2)</sup> Qui peut être un demi-plan orthogonal à  $O\xi\eta$  si le coefficient de  $x\bar{x}'$  dans  $f_2$  est nul.

<sup>(3)</sup> *Annales de l'École Normale*, 1884.

Nous associerons à la forme  $f$  la forme suivante :

$$\varphi = t_1^2 f_1 + t_2^2 \varphi_2,$$

dépendant des paramètres  $t_1, t_2$  et du paramètre qui entre dans  $\varphi_2$ . C'est l'extension à l'espace  $O\xi\eta\tau$  de l'interprétation envisagée dans le plan  $O\xi\eta$  de la méthode de réduction continue, donnée page 74 et suivantes de ce Mémoire.

Faisant varier les paramètres qui entrent dans  $\varphi$  et réduisant  $\varphi$  pour chaque valeur de ces paramètres par une substitution  $S$  du groupe de Picard, on obtiendra, lorsque les paramètres prendront toutes les valeurs possibles, un ensemble (S) de substitutions. Si l'on fait toutes ces substitutions dans  $f$  on obtient un groupe de formes ( $f$ ) qui est dit associé à  $f$  par la méthode de réduction continue.

On connaîtra l'ensemble (S) et par suite le groupe ( $f$ ), si l'on connaît le domaine engendré par le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque les paramètres qui entrent dans  $\varphi$  prennent toutes les valeurs possibles.

Adoptons d'abord la représentation projective des formes. A  $f_1$  correspond un point  $\zeta_1$  intérieur à la sphère fondamentale  $\Sigma$ ; si

$$f_1 = a_1 x x' - b_1 x y' - b_1' x' y + c_1 y y',$$

$\zeta_1$  a pour coordonnées homogènes  $a_1, b_1, b_1', c_1$ , l'équation de la sphère étant  $x_1 x_1 - x_2 x_3 = 0$ ; à la forme  $f_2$  correspond un plan, le plan polaire par rapport à  $\Sigma$  du point de coordonnées homogènes  $a_2, b_2, b_2', c_2$ , si

$$f_2 = a_2 x x' - b_2 x y' - b_2' x' y + c_2 y y';$$

à la forme  $\varphi_2$  associée à  $f_2$  correspond un point  $\zeta_2$  intérieur à  $\Sigma$  et situé sur le plan précédent représentatif de  $f_2$ .

Lorsque  $\varphi_2$  reste fixe,  $t_1, t_2$  variant,  $\zeta$  représentatif de  $t_1^2 f_1 + t_2^2 \varphi_2$  décrit le segment  $\zeta_1 \zeta_2$ . Lorsque le paramètre qui entre dans  $\varphi$  variera à son tour,  $\zeta$  engendrera le volume D limité :

1° Par le plan représentatif de  $f_2$ ;

2° Par le cône du deuxième degré ayant pour sommet  $\zeta_1$  et pour base le cercle  $\Gamma_2$  de section de  $\Sigma$  par le plan précédent.

Le plan 1° et le cône 2° déterminent parfaitement le volume conique que décrit  $\zeta$  lorsque les paramètres qui entrent dans  $\varphi$  prennent toutes les valeurs possibles.

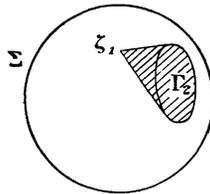
Revenons à l'espace  $O\xi\eta\tau$  par la transformation bien connue. Au plan représentatif de  $f_2$  correspond la demi-sphère  $\sigma_2$  représentative de  $f_2$ .  $\zeta_2$  représentatif de  $\varphi_2$  est sur cette demi-sphère. Lorsque  $t_1$  et  $t_2$  varient,  $\varphi_2$  restant fixe,  $\zeta$  décrit

le segment non euclidien  $\zeta_1, \zeta_2$  et l'on a

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = -\frac{t_2^2 \alpha_2}{t_1^2 \alpha_1},$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant les premiers coefficients de  $f_1$  et de  $\varphi_2$ .

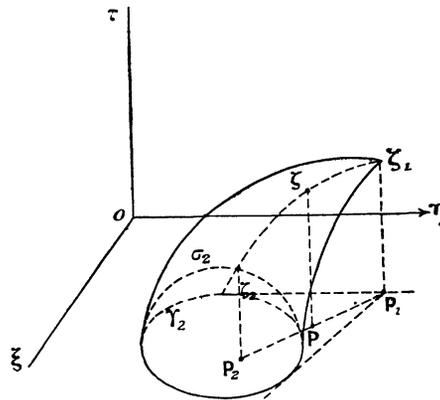
Fig. 64,



Lorsque le paramètre de  $\varphi_2$  varie,  $\zeta_2$  décrit la demi-sphère  $\sigma_2$  et  $\zeta$  décrit un volume D limité :

- 1° Par cette demi-sphère  $\sigma_2$ ;
- 2° Par une portion de la surface cyclide qui a pour points coniques réels  $\zeta_1$  et son symétrique  $\zeta'_1$  par rapport au plan  $O\xi\eta$ , et pour section par le

Fig. 65,



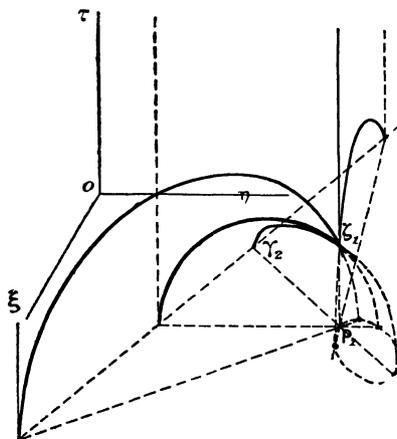
plan  $O\xi\eta$  : d'une part le cercle  $\gamma_2$ , d'autre part son inverse par rapport à  $P_1$  avec la puissance  $(-\overline{P_1\zeta_1^2})$ .

Cette portion de surface cyclide s'obtient en joignant à  $\zeta_1$  par une demi-droite non euclidienne (cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  limité à  $\zeta_1$ ) un point variable sur  $\gamma_2$  et en faisant décrire à ce point tout le cercle  $\gamma_2$ . Cette surface cyclide est la transformée du cône de sommet  $\zeta_1$  de base  $\Gamma_2$  dans la représentation projective.

Le volume D sera dit *associé* à la forme  $f$  proposée.

Il n'y a pas de difficulté à trouver  $D$  lorsque la demi-sphère représentative de  $f_2$  dégénère en un demi-plan orthogonal à  $O\xi\eta$ . Dans ce cas la cyclide engendrée par un cercle orthogonal à  $O\xi\eta$  passant par  $\zeta_1$  et rencontrant la droite  $\gamma_2$  (dégénérescence d'un cercle) coupe  $O\xi\eta$  suivant la droite  $\gamma_2$  et son inverse par rapport à  $P_1$ , avec la puissance  $(-P_1\zeta_1^2)$ , qui est un cercle passant par le pôle  $P_1$ .  $D$  est limité par le demi-plan orthogonal à  $O\xi\eta$  élevé par  $\gamma_2$  et par la portion de la

Fig. 66.



surface cyclide engendrée par les arcs qui vont de  $\zeta_1$  aux points de  $\gamma_2$ . Un de ces arcs est la demi-droite parallèle à  $O\tau$  partant de  $\zeta_1$  (voir la figure).

L'ensemble  $(S)$  est alors l'ensemble des substitutions du groupe de Picard dont les  $T$  correspondantes amènent sur  $\pi_0$  tous les pentaèdres  $\pi$  de la division de Picard (pour le demi-espace  $\tau > 0$ ) avec lesquels  $D$  a au moins un point commun [ $\pi_0 = \pi T$ ,  $(f) = fS$ ].

$D$  a une infinité de points sur  $O\xi\eta$ , ce sont tous les points du cercle  $\gamma_2$ .  $(S)$  comprendra donc une infinité d'éléments, et par suite aussi l'ensemble  $(f)$ .

*Domaines  $D$  associés à deux formes équivalentes.* — Si l'on passe de  $f$  à  $F$  par la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \lambda X + \mu Y \\ y = \nu X + \rho Y \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \nu, \rho \text{ entiers complexes; } \lambda\rho - \mu\nu = 1),$$

$F$  sera le produit des transformées  $F_1$  et  $F_2$  de  $f_1$  et  $f_2$  par la substitution  $S$ . Par la transformation  $T$  associée à  $S$ , le point  $\zeta_1$  représentatif de  $f_1$  devient  $Z_1$  représentatif de  $F_1$ , et  $\sigma_2$  demi-sphère représentative de  $f_2$  devient  $\Sigma_2$  demi-sphère représentative de  $F_2$ .  $\varphi_2$  devient une forme  $\Phi_2$  également définie dont le point représentatif  $Z_2$  est le transformé par  $T$  du point représentatif  $\zeta_2$  de  $\varphi_2$ .

Ajoutons que  $\Phi_2$  se relie à  $F_2$  comme  $\varphi_2$  à  $f_2$ ,  $Z_2$  est sur  $\Sigma_2$  comme  $\zeta_2$  est sur  $\sigma_2$ .  $\varphi_2$  et  $\Phi_2$  ont pour déterminant le déterminant commun de  $f_2$  et  $F_2$  changé de signe.

Sans qu'il soit besoin d'insister davantage, on voit que, T étant un mouvement non euclidien, le domaine D associé à  $f$  se transforme par T dans le domaine  $\mathfrak{D}$  associé à F ( $\mathfrak{D} = DT$ ). Les domaines D et  $\mathfrak{D}$  associés à deux formes équivalentes  $f$  et F se transforment donc l'un dans l'autre par la transformation T du demi-espace que définit la substitution S par laquelle on passe de  $f$  à F

$$\begin{pmatrix} F = fS \\ \mathfrak{D} = DT \end{pmatrix}.$$

On conclut de là sans difficulté :

Que l'on parte de  $f$  ou d'une forme équivalente quelconque, l'ensemble des formes ( $f$ ) que la réduction continue conduit à former est toujours le même.

On conclut aussi : Les formes de l'ensemble ( $f$ ) sont celles des formes équivalentes à  $f$  dont le volume associé D a avec  $\pi_0$  au moins un point commun.

*Définition de la réduite équivalente à  $f$ .* — Dans l'ensemble ( $f$ ) nous allons choisir une réduite pour représenter la classe des formes équivalentes à  $f$ .

Soit donc  $f = f_1 f_2$  la forme proposée :

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x x' - b_1 x y' - b_1' x' y + c_1 y y' & (a_1 c_1 - b_1 b_1' = \delta_1 > 0; a_1 > 0), \\ f_2 &= a_2 x x' - b_2 x y' - b_2' x' y + c_2 y y' & (b_2 b_2' - a_2 c_2 = \delta_2 > 0), \end{aligned}$$

et soit

$$\varphi_1 = \alpha_2 x x' - \beta_2 x y' - \beta_2' x' y + \gamma_2 y y' \quad (\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \beta_2' = \delta_2)$$

la forme d'Hermite définie dépendant du paramètre variable  $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$  que l'on associe à  $f_2$  par la méthode de M. Picard.

Soit

$$\varphi = t_1^2 f_1 + t_2^2 \varphi_2 = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

la forme associée à  $f$ .

$$p = t_1^2 a_1 + t_2^2 \alpha_2,$$

$$q = t_1^2 b_1 + t_2^2 \beta_2,$$

$$q' = t_1^2 b_1' + t_2^2 \beta_2',$$

$$r = t_1^2 c_1 + t_2^2 \gamma_2,$$

$$\delta = pr - qq' = t_1^2 \delta_1 + t_2^2 \delta_2 + t_1^2 t_2^2 \delta_1, \quad \text{avec} \quad \delta_{12} = a_1 \gamma_2 + c_1 \alpha_2 - b_1 \beta_2' - b_1' \beta_2.$$

Pour certaines valeurs des paramètres qui entrent dans  $\varphi$ , réduisons  $\varphi$  par la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \lambda X + \mu Y \\ y = \gamma X + \rho Y \end{cases} \quad (\lambda\rho - \mu\gamma = 1),$$

et soit

$$\Phi(X, Y) = PXX' - QXY' - Q'X'Y + RYY' = \varphi S$$

la forme réduite.

Si

$$F_1 = A_1 XX' - B_1 XY' - B'_1 X'Y + C_1 YY' = f_1 S,$$

$$F_2 = A_2 XX' - B_2 XY' - B'_2 X'Y + C_2 YY' = f_2 S,$$

$$\Phi = \alpha_1 XX' - \alpha_2 XY' - \alpha'_2 X'Y + \alpha_3 YY' = \varphi_2 S$$

sont les transformées de  $f_1, f_2, \varphi_2$  par  $S$ , on a

$$P = t_1^2 A_1 + t_2^2 \alpha_1,$$

$$Q = t_1^2 B_1 + t_2^2 \alpha_2, \quad Q' = t_1^2 B'_1 + t_2^2 \alpha'_2,$$

$$R = t_1^2 C_1 + t_2^2 \alpha_3,$$

et le déterminant  $\Delta$  de  $\Phi$  est égal à  $\delta$  de  $\varphi$ .

La forme  $\Phi$  étant réduite, on a

$$P \leq \sqrt{2\delta}, \quad R \leq \frac{2\delta}{P}$$

et

$$\left| \frac{Q + Q'}{2} \right| \leq \frac{P}{2}, \quad 0 = \frac{Q' - Q}{2i} \leq \frac{P}{2}.$$

D'où l'on tire aussi

$$\text{norme } Q \leq \frac{P^2}{2}.$$

De l'expression de  $P$  on tire d'abord

$$t_1^2 t_2^2 A_1 \alpha_1 \leq \left( \frac{P}{2} \right)^2 \leq \frac{\delta}{2}.$$

Donc

$$A_1 \alpha_1 \leq \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2},$$

De même on tire de  $R$

$$t_1^2 t_2^2 C_1 \leq \left( \frac{R}{2} \right)^2 \leq \frac{\delta^2}{P^2},$$

et comme  $P^2 \geq 4 t_1^2 t_2^2 A_1 \alpha_1$ , on aura

$$C_1 \leq \left( \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2} \right)^2 \frac{1}{A_1 \alpha_1}.$$

Avant d'aller plus loin, on remarquera que  $|A_2| \leq \alpha_2$  et  $|C_2| \leq \alpha_2$ , ainsi que le démontre aisément M. Picard dans le Mémoire cité.

D'autre part,

$$B_2 B'_2 - A_1 C_2 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}'_2 = \delta_2.$$

Donc

$$B_2 B'_2 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}'_2 + A_2 C_2.$$

Donc

$$B_2 B'_2 \leq 2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2.$$

De là se conclut

$$\left| \begin{array}{l} |A_1 A_2| \leq \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2}, \\ |C_1 C_2| \leq \left( \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2} \right)^2 \frac{1}{A_1 \mathfrak{a}_2} \leq \left( \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2} \right)^2 \frac{1}{|A_1 A_2|}. \end{array} \right.$$

$|A_1 A_2|$  et  $|C_1 C_2|$  sont les valeurs absolues de deux coefficients de  $F$ . Montrons comment on pourra limiter les valeurs absolues de tous les coefficients de  $F$  en fonction de  $\frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}$ .

En effet, on a

$$F = A_1 A_2 X^2 X'^2 - \left[ (A_1 B_2 + A_2 B_1) X^2 X' Y' + (B_1 B_2 X^2 Y'^2 - (A_1 B'_2 + A_2 B'_1) X'^2 X Y + (B'_1 B'_2 X'^2 Y^2 + (A_1 C_2 + A_2 C_1 + B_1 B'_2 + B_2 B'_1) X Y X' Y' - (B_1 C_2 + B_2 C_1) X Y Y'^2 + C_1 C_2 Y^2 Y'^2 \right. \\ \left. - (B'_1 C_2 + B'_2 C_1) X' Y' Y' \right].$$

En se servant de

$$|B_2| \leq \sqrt{2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2}, \quad |A_2| \leq \mathfrak{a}_2, \quad |C_2| \leq \mathfrak{c}_2,$$

on arrive à

$$\begin{cases} |A_1 B_2 + A_2 B_1| \leq A_1 \sqrt{2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2} + \mathfrak{a}_2 |B_1|, \\ |A_1 B'_2 + A_2 B'_1| \leq A_1 \sqrt{2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2} + \mathfrak{a}_2 |B_1|. \end{cases}$$

Mais

$$B_1 B'_1 = A_1 C_1 - \delta_1.$$

Donc

$$|B_1| \leq \sqrt{A_1 C_1} < \sqrt{2 A_1 C_1},$$

D'où l'on tire

$$|A_1 B_2 + A_2 B_1| < A_1 \sqrt{2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2} + \mathfrak{a}_2 \sqrt{2 A_1 C_1} = \sqrt{2 A_1 \mathfrak{a}_2} [\sqrt{A_1 \mathfrak{c}_2} + \sqrt{\mathfrak{a}_2 C_1}].$$

Maintenant on a

$$\begin{array}{l} t_1^2 A_1 \leq P, \\ t_2^2 \mathfrak{c}_2 \leq R, \end{array} \quad \text{d'où} \quad t_1^2 t_2^2 A_1 \mathfrak{c}_2 \leq PR \leq 2 \delta.$$

Donc

$$A_1 \mathfrak{c}_2 \leq \frac{2 \delta}{t_1^2 t_2^2},$$

et de même

$$\mathfrak{a}_2 C_1 \leq \frac{2 \delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

Donc

$$\frac{|A_1 B_2 + A_2 B_1|}{|A_1 B'_2 + A_2 B'_1|} < \sqrt{2 A_1 a_2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2\delta}{t_1^2 t_2^2}} < 2\sqrt{2} \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

De même

$$\frac{|B_1 B_2|}{|B'_1 B'_2|} = |B_1| \cdot |B_2| < \sqrt{2 A_1 C_1} \sqrt{2 a_2 e_2} = 2 \sqrt{A_1 a_2 C_1 e_2} \leq \frac{4\delta}{t_1^2 t_2^2},$$

ce qui donne

$$\frac{|B_1 B_2|}{|B'_1 B'_2|} < \frac{4\delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

D'autre part,

$$|A_1 C_2 + A_2 C_1 + B_1 B'_2 + B_2 B'_1| \leq A_1 e_2 + a_2 C_1 + 2 |B_1 B_2| \leq \frac{4\delta}{t_1^2 t_2^2} + \frac{8\delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

Donc

$$|A_1 C_2 + A_2 C_1 + B_1 B'_2 + B_2 B'_1| \leq \frac{12\delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \frac{|B_1 C_2 + B_2 C_1|}{|B'_1 C_2 + B'_2 C_1|} &\leq |B_1| e_2 + |B_2| C_1 < e_2 \sqrt{2 A_1 C_1} + C_1 \sqrt{2 a_2 e_2} \\ &< \sqrt{2 C_1 e_2} [\sqrt{A_1 e_2} + \sqrt{a_2 C_1}]. \end{aligned}$$

D'où se tire

$$\frac{|B_1 C_2 + B_2 C_1|}{|B'_1 C_2 + B'_2 C_1|} < \frac{2}{\sqrt{|A_1 A_2|}} \left( \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

On voit ainsi que tous les coefficients de  $F$  sans exception sont limités en fonction de la quantité  $\frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}$ . Remarquons de plus que dans les trois derniers coefficients seulement intervient au dénominateur du deuxième membre dans l'inégalité de limitation la quantité  $A_1 a_2$  ou la quantité plus petite  $|A_1 A_2|$ .

La quantité  $\theta = \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}$  joue donc un rôle essentiel dans la question. Et tout d'abord on voit bien facilement que si l'on passe de la forme  $f$  à une forme équivalente  $\mathfrak{f}$ , la forme  $\varphi$  associée à  $f$  se transforme par la même substitution en  $\Phi$  associée à  $\mathfrak{f}$  pour des valeurs correspondantes des paramètres, d'où il suit que les fonctions  $\theta$  et  $\Theta$  relatives à  $f$  et  $\mathfrak{f}$  sont égales.

*Pour deux formes équivalentes et pour des valeurs correspondantes des paramètres, la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs.*

Les deux conséquences habituelles se tirent de là :

1° Les formes  $\theta$  et  $\Theta$  relatives à deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathfrak{f}$  prennent les mêmes valeurs lorsque les paramètres qui figurent dans  $\varphi$  et  $\Phi$  prennent

toutes les valeurs possibles; *elles ont donc même minimum*; par définition, *ce minimum sera pour nous le déterminant de la forme  $f$  envisagée*; il sera le même pour toute la classe équivalente à  $f$ .

2° Les formes quadratiques  $\varphi$  et  $\Phi$  associées à deux formes  $f$  et  $\mathfrak{F}$ , avec les valeurs respectives des paramètres qui donnent le minimum des fonctions  $\theta$  et  $\Theta$ , deviendront équivalentes en même temps que  $f$  et  $\mathfrak{F}$ . Ainsi  $\Phi$  se déduira de  $\varphi$  par la même substitution que  $\mathfrak{F}$  de  $f$ . Il est donc naturel d'appeler *correspondante de  $f$*  la forme quadratique à indéterminées conjuguées  $\varphi$  pour les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum.

Les *réduites d'une forme  $f$*  seront les formes de ( $f$ ) qui correspondront à ce minimum de  $\theta$ . *Leurs correspondantes sont des formes quadratiques réduites*. Pour les déterminer on commencera par rechercher pour quelles valeurs des paramètres  $\theta$  devient minimum; ceci donnera la ou les correspondantes quadratiques  $\varphi$  de  $f$ .  $S$  étant la substitution du groupe de Picard qui réduit une correspondante,  $fS$  sera une réduite de  $f$ .

On conclut de là que *deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathfrak{F}$  ont les mêmes réduites*, et cette proposition ramène l'équivalence de deux formes à l'identité entre leurs réduites.

*Étude du minimum de  $\theta$* . — Nous avons vu que pour

$$\begin{aligned} f &= f_1 f, \\ f_1 &= a_1 x x' - b_1 x y' - b'_1 x' y + c_1 y y' & (a_1 c_1 - b_1 b'_1 = \delta_1 > 0, a_1 > 0), \\ f_3 &= a_2 x x' - b_2 x y' - b'_2 x' y + c_2 y y' & (b_2 b'_2 - a_2 c_2 = \delta_2 > 0) \end{aligned}$$

en prenant

$$\varphi = \alpha_2 x x' - \beta_2 x y' - \beta'_2 x' y + \gamma_2 y y' \quad (\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \beta'_2 = \delta_2 > 0),$$

on avait

$$\varphi = t_1^2 f_1 + t_2^2 \varphi_2 = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

avec

$$\delta = t_1^2 \delta_1 + t_2^2 \delta_2 + t_1^2 t_2^2 \delta_{12}, \quad \delta_{12} = a_1 \gamma_2 + c_1 \alpha_2 - b_1 \beta'_2 - b'_1 \beta_2;$$

donc

$$\theta = \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2 + a_1 \gamma_2 + c_1 \alpha_2 - b_1 \beta'_2 - b'_1 \beta_2$$

dont il faut trouver le minimum.  $\theta$  dépend de trois paramètres :

- 1° De  $t_1$  et  $t_2$  qui n'entrent que dans  $\frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2$ ;
- 2° Du paramètre  $\frac{\beta_2}{\sigma_2}$  qui entre dans  $\varphi_2$  et qui n'entre dans  $\theta$  que par l'expression  $\delta_{12}$ .

J.

Pour avoir le minimum de  $\theta$  il faut :

1° Avoir le minimum de  $\frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2$ , ce qui donne

$$\frac{t_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{t_2^2}{\sqrt{\delta_1}},$$

et ce qui montre, par un raisonnement bien connu, que  $\zeta$  représentatif de la correspondante est milieu non euclidien du segment  $\zeta_1 \zeta_2$ ,  $\zeta_2$  étant le point représentatif de  $\varphi_2$  pour la valeur du paramètre de  $\varphi_2$  qui correspond au minimum de  $\theta$ ;

2° Avoir le minimum de  $\delta_{1,2}$ . Un raisonnement maintes fois employé dans ce Mémoire prouve que :  $f_1$  étant une forme définie fixe, et  $\varphi_2$  une forme définie de déterminant constant  $\delta_2$  dont le point représentatif  $\zeta_2$  décrit le plan non euclidien qui représente la forme indéfinie  $f_2$  de déterminant  $-\delta_2$ , le minimum de  $\delta_{1,2}$  est atteint en même temps que celui de la distance non euclidienne  $\zeta_1 \zeta_2$ , c'est-à-dire quand  $\zeta_2$  sera le pied sur  $\sigma_2$  (représentative de  $f_2$ ) de la perpendiculaire non euclidienne abaissée de  $\zeta_1$  sur  $\sigma_2$ .

D'où la conclusion : La forme  $\varphi_2$  correspondant au minimum de  $\theta$  a son point représentatif  $\zeta_2$  à l'intersection de la demi-sphère  $\sigma_2$  qui représente  $f_2$  et du demi-cercle orthogonal au plan  $O\zeta_1\eta$  et à cette demi-sphère  $\sigma_2$  mené par  $\zeta_1$  représentatif de  $f_1$ .

$\zeta$ , représentatif de la correspondante, est milieu non euclidien de  $\zeta_1 \zeta_2$ .

Ce sont là, comme on devait bien s'y attendre, des relations géométriques invariantes par toute substitution

$$\begin{cases} x = \lambda X + \mu Y \\ y = \nu X + \rho Y \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \nu, \rho \text{ quelconques}),$$

et par la transformation T du demi-espace qui lui est associée. La correspondante est donc un covariant quadratique à indéterminées conjuguées de la forme  $f$ .

Il est inutile de faire remarquer l'analogie du résultat trouvé avec celui qu'on a trouvé pour les formes biquadratiques ordinaires à coefficients réels ayant deux racines réelles.

*Cas où la forme proposée a ses coefficients entiers.* — Alors toute forme équivalente et en particulier toute forme ( $f$ ) et toute réduite F équivalente à  $f$  a ses coefficients entiers. En écrivant

$$F = F_1 F_2$$

avec les notations déjà employées, on voit que  $A, A_2$  sera un entier complexe.

Il peut arriver que cet entier soit nul, non que  $A_1$  puisse jamais être nul, mais parce que  $A_2$  peut très bien devenir nul. Ceci se présente *lorsque la forme  $f_2$  indéfinie qui entre dans  $f$  peut représenter zéro*, c'est-à-dire lorsqu'il existe un couple d'entiers complexes  $x, y$  tels que  $f_2(x, y) = 0$ . Dans ce cas  $f(x, y) = 0$  et la forme biquadratique proposée peut, comme  $f_2$ , représenter zéro <sup>(1)</sup>. Si nous écartons ce cas, c'est-à-dire *si nous excluons les formes biquadratiques à coefficients entiers qui peuvent représenter zéro*, l'entier  $A_1 A_2$  n'est jamais nul. Donc  $|A_1 A_2| \geq 1$ .

Dans ces conditions on pourra, dans les seconds membres des inégalités qui servent à limiter les valeurs absolues des coefficients de  $F$ , remplacer au dénominateur  $|A_1 A_2|$  ou  $A_1 A_2$  par 1, en sorte que les limitations ne dépendront plus que du déterminant  $\theta = \frac{\delta}{t_1 t_2}$  et seront connues dès que le déterminant sera donné.

La conséquence immédiate qui s'en déduit sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage est que, pour un déterminant  $\theta$  donné, le nombre des réduites possibles (ne représentant pas zéro) sera essentiellement limité, par suite *les formes biquadratiques à coefficients entiers du type envisagé [ $f = f_1 f_2$ ;  $f_1$ , forme d'Hermite définie;  $f_2$ , forme d'Hermite indéfinie], sous la condition qu'elles ne puissent représenter zéro, se répartissent, si leur déterminant est donné, en un nombre fini de classes.*

*Deuxième cas. —  $f$  se décompose en produit de deux formes indéfinies  $f = f_1 f_2$ .*

On reconnaîtra ce cas à ce que la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  se décompose en deux cercles réels.

Soient

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x x' - b_1 x y' - b_1' x' y + c_1 y y' & (b_1 b_1' - a_1 c_1 = \delta_1 > 0), \\ f_2 &= a_2 x x' - b_2 x y' - b_2' x' y + c_2 y y' & (b_2 b_2' - a_2 c_2 = \delta_2 > 0). \end{aligned}$$

On pourra, si l'on veut, multiplier  $f_1$  par  $\lambda_1$  et  $f_2$  par  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ) tels que les deux déterminants deviennent égaux.

$f_1$  et  $f_2$  sont représentées dans le demi-espace  $\tau > 0$  par deux demi-sphères  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  dont les cercles d'équateur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans le plan  $O\xi\eta$  sont définis par

$$\begin{aligned} f_1(z, 1) &= a_1 z z' - b_1 z - b_1' z' + c_1 = 0, \\ f_2(z, 1) &= a_2 z z' - b_2 z - b_2' z' + c_2 = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> Géométriquement, ce cas peut se produire lorsque la circonférence du plan  $O\xi\eta$  dont l'équation est  $f_2(z, 1) = 0$  passe par un point du plan  $O\xi\eta$  dont l'affixe  $z$  est un nombre complexe rationnel, c'est-à-dire lorsque la quartique bicirculaire  $f_2(z, 1) = 0$  passe elle-même par un tel point.

On associera à  $f_1$  une forme quadratique définie  $\varphi_1$  dépendant d'un paramètre variable, ayant son point représentatif  $\zeta_1$  sur  $\sigma_1$ , et ayant pour déterminant  $\delta_1$ . On fera de même pour  $f_2$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_1 xx' - \beta_1 xy' - \beta'_1 x'y + \gamma_1 yy' & (\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1 \beta'_1 = \delta_1 > 0), \\ \varphi_2 &= \alpha_2 xx' - \beta_2 xy' - \beta'_2 x'y + \gamma_2 yy' & (\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \beta'_2 = \delta_2 > 0).\end{aligned}$$

Puis l'on considérera la forme

$$\varphi = t_1^2 \varphi_1 + t_2^2 \varphi_2$$

associée à  $f$  et dépendant : 1° des deux paramètres  $t_1, t_2$ ; 2° des deux paramètres qui définissent  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

On réduira  $\varphi$  qui est une forme quadratique d'Hermite définie, pour toutes les valeurs possibles des quatre paramètres qui y figurent. Ceci fournira un ensemble de substitutions modulaires complexes (S). En faisant toutes les substitutions de (S) dans  $f$  on obtiendra un ensemble de formes  $(f) = fS$  qui seront dites *associées* à  $f$  par la réduction continue.

Nous allons d'abord étudier (S) et  $(f)$ .

Pour cela il importe de voir dans quel domaine se déplace  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$ .

Prenons la représentation projective avec la sphère  $\Sigma$  pour quadrique fondamentale.

$f_1$  est représentée par le plan polaire du point  $a_1, b_1, b'_1, c_1$ ;  $\varphi_1$  a son point représentatif  $\zeta_1$  à l'intérieur de  $\Sigma$  dans ce plan. Ce plan coupe la sphère  $\Sigma$  suivant un cercle  $\Gamma_1$  qui correspond au cercle  $\gamma_1$  du plan  $O\xi\eta$ .

$f_2$  est représentée par le plan polaire du point  $a_2, b_2, b'_2, c_2$  qui coupe  $\Sigma$  suivant un cercle  $\Gamma_2$  correspondant au cercle  $\gamma_2$  du plan  $O\xi\eta$ .  $\varphi_2$  a son point représentatif  $\zeta_2$  à l'intérieur de  $\Sigma$  dans le plan précédent.

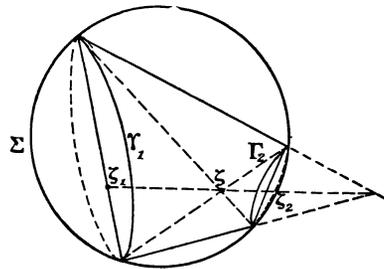
$\zeta$  représentatif de  $\varphi = t_1^2 \varphi_1 + t_2^2 \varphi_2$  décrit le segment  $\zeta_1 \zeta_2$  lorsque,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  restant fixes,  $t_1$  et  $t_2$  prennent toutes les valeurs possibles. *Le volume D engendré par ce segment  $\zeta_1 \zeta_2$ , lorsque  $\zeta_1$  décrit l'intérieur du cercle  $\Gamma_1$  et  $\zeta_2$  l'intérieur du cercle  $\Gamma_2$ , sera le domaine dans lequel se meut  $\zeta$  lorsque les quatre paramètres qui entrent dans  $\varphi$  prennent toutes les valeurs possibles.*

Selon la position des deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  il y a plusieurs cas possibles :

1° Les deux cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2$  n'ont pas de point commun réel : c'est le cas où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  n'ont pas de point commun réel [les deux points doubles à distance finie de la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  sont imaginaires conjugués]. Il existe alors un cône du deuxième degré ayant son sommet extérieur à  $\Sigma$  et contenant les deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , ce cône et les deux plans des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  déterminent un tronc de cône. Et il est clair que le segment  $\zeta_1 \zeta_2$  engendrera le volume D de ce tronc de cône lorsque  $\zeta_1$  décrira l'intérieur du cercle  $\Gamma_1$  et  $\zeta_2$

l'intérieur du cercle  $\Gamma_2$ . Dans la figure on a représenté les plans de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  perpendiculaires au plan du tableau pris comme méridien de  $\Sigma$  pour rendre plus facile la représentation du tronc de cône en question.

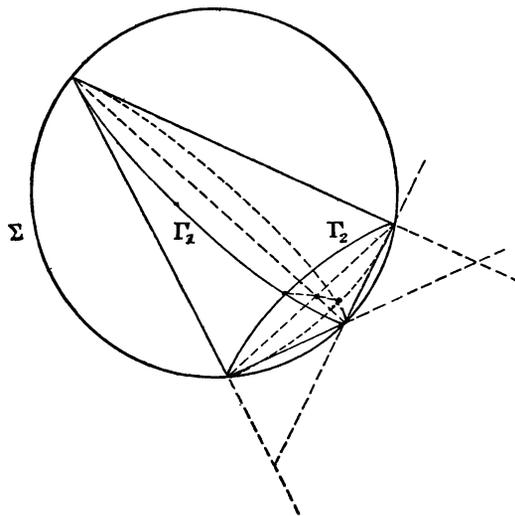
Fig. 67.



2° Les deux cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ont deux points communs réels [la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  a deux points doubles réels à distance finie].

Les deux cônes réels du deuxième degré passant par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont alors tous les deux leur sommet extérieur à  $\Sigma$ . Ces deux cônes délimitent un volume D

Fig. 68.

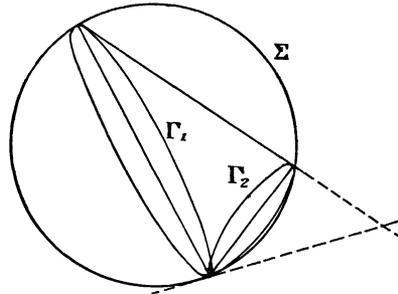


intérieur à la fois à ces cônes et qu'on appelle *leur solide commun* en Géométrie descriptive. Un peu de réflexion suffira pour s'assurer que ce solide commun est le volume engendré par le segment  $\zeta_1\zeta_2$  lorsque  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  décrivent respectivement l'intérieur des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

3° Les deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont tangents. C'est un cas limite du premier et du deuxième cas. [Alors les deux points doubles à distance finie de la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  sont confondus.] Le cône déterminé par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  a son

sommet extérieur à la sphère, il est tangent à cette sphère au point de contact de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Avec les plans de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  il délimite encore un tronç de cône qui est le volume D engendré par le segment  $\zeta_1, \zeta_2$  lorsque  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  décrivent respectivement l'intérieur des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Fig. 69.



Revenant à la représentation des formes dans le demi-espace  $\tau > 0$ , il n'est pas difficile d'apercevoir le domaine décrit par  $\zeta$ , point représentatif de  $\varphi$ .

$\zeta_1$ , représentatif de  $\varphi_1$ , décrit la demi-sphère  $\sigma_1$  représentative de  $f_1$ ,  
 $\zeta_2$ , » »  $\varphi_2$ , » »  $\sigma_2$  » »  $f_2$ .

$\zeta$ , représentatif de  $\varphi$ , est un point du segment non euclidien  $\zeta_1, \zeta_2$  projeté sur  $P_1, P_2$  ( $P_1$  et  $P_2$  projections de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sur  $O\xi\eta$ ), en P tel que

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = -\frac{t_1^2 \alpha_2}{t_2^2 \alpha_1},$$

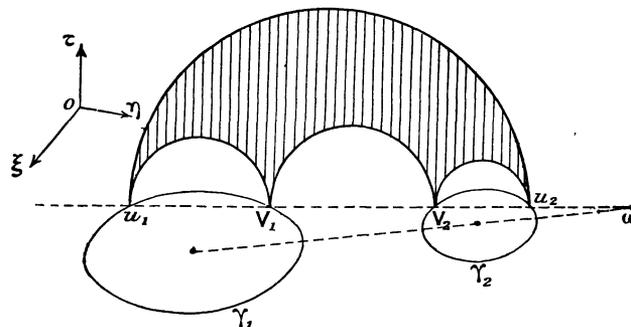
$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant les premiers coefficients de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ,

$$\text{affixe de P} = \frac{t_1^2 \beta_1 + t_2^2 \beta_2}{t_1^2 \alpha_1 + t_2^2 \alpha_2} \quad \text{et} \quad \overline{O\xi}^2 = \frac{t_1^2 \gamma_1 + t_2^2 \gamma_2}{t_1^2 \alpha_1 + t_2^2 \alpha_2}.$$

1° Les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  équateurs de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  n'ont pas de point commun réel. Supposons-les d'abord extérieurs. Le domaine D sera alors le transformé du tronç de cône trouvé dans la représentation projective. Aux deux plans de base du tronç de cône correspondent ici les deux demi-sphères  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Le cône lui-même était l'enveloppe d'un plan variable tangent à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui laissait  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du même côté. A ce plan variable correspondra ici une demi-sphère variable orthogonale au plan  $O\xi\eta$ , tangente à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  laissant  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  d'un même côté. C'est dire que son contact avec  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sera extérieur pour les deux cercles, ou intérieur pour les deux cercles. Cette demi-sphère va donc envelopper une *demi-cyclide de Dupin orthogonale au plan  $O\xi\eta$  et qu'on peut engendrer comme suit* : Par le centre de similitude externe  $\omega$  de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  on mènera un

plan variable normal au plan  $O\xi\eta$  <sup>(1)</sup>. Ce plan coupera  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en deux couples de points antihomologues. Dans ce plan, sur le segment joignant deux points

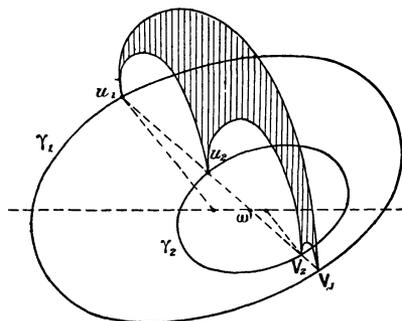
Fig. 70.



$u_1, u_2$  antihomologues pour diamètre, on décrira un demi-cercle. Puis on fera tourner le plan autour du centre de similitude externe  $\omega$  de façon que chacune des extrémités  $u_1, u_2$  du diamètre décrive le cercle sur lequel elle se trouve d'une manière continue ( $u_1$  et  $u_2$  restant toujours antihomologues). Le cercle de diamètre  $u_1, u_2$  engendrera dans ces conditions la *demi-cyclide de Dupin* qui, avec les deux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  délimite un volume  $D$  qui est exactement le transformé du volume du tronc de cône de la représentation projective.

On peut remarquer encore que ce volume  $D$  peut être engendré comme

Fig. 71.



suit : Par  $\omega$  on mènera un plan normal au plan  $O\xi\eta$  qui coupe  $\sigma_1$  en  $u_1, v_1$  et  $\sigma_2$  en  $u_2, v_2$  ( $u_1$  et  $u_2, v_1$  et  $v_2$  sont des couples de points antihomologues). Dans ce plan on construira le quadrilatère non euclidien dont  $u_1, u_2, v_1, v_2$  sont les

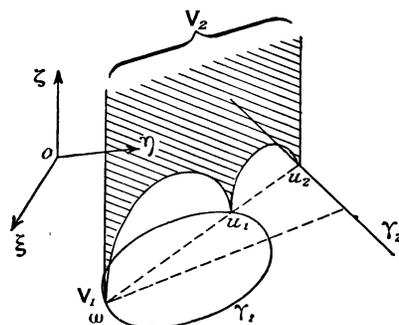
(1) Ce plan est le transformé d'un plan qui dans la représentation projective passerait : 1° par le sommet du cône (extérieur à  $\Sigma$ ) contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ; 2° par le point de vue de la projection stéréographique qui transforme le plan  $O\xi\eta$  en la sphère  $\Sigma$ .

sommets (c'est un quadrilatère dont les côtés sont les quatre demi-circonférences de diamètres  $u, u_2, v, v_2, u, v_1, u_2, v_2$ ). Lorsque le plan précédent tournera autour de  $\omega$ , le quadrilatère précédent engendrera le volume D.

Comme cas particulier, si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux circonférences égales (c'est le cas où  $\frac{\delta_1}{a_1} = \frac{\delta_2}{a_2}$ ), la cyclide de Dupin qui limite D devient un tore ayant pour méridienne l'ensemble des deux cercles  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

L'un des deux cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  peut dégénérer en une droite, par exemple  $\gamma_2$  (les deux ne le peuvent à la fois car  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  auraient alors deux points communs réels à distance finie ou infinie). Dans ce cas,  $\omega$  vient coïncider avec celle des deux extrémités du diamètre de  $\gamma_1$  perpendiculaire à la droite  $\gamma_2$  qui est la plus

Fig. 72.



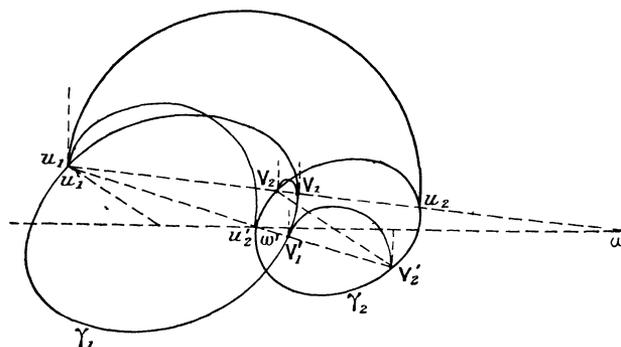
éloignée de cette droite  $\gamma_2$ . Le quadrilatère non euclidien précédent qui engendre D aura deux côtés rectilignes normaux au plan  $O\xi\eta$  : ce sont les normales menées par  $u_2$  et  $v_1$  (confondu avec  $\omega$ ) au plan  $O\xi\eta$ , les deux autres côtés sont les deux demi-cercles de diamètres  $u, v_1$  et  $u, u_2$  normaux à ce plan  $O\xi\eta$ .

Si les deux cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  étaient intérieurs l'un à l'autre, par exemple  $\gamma_2$  intérieur à  $\gamma_1$ , une sphère tangente à  $\gamma_1, \gamma_2$ , les laissant tous deux d'un même côté et orthogonale au plan  $O\xi\eta$ , doit être tangente intérieurement à  $\gamma_1$  et extérieurement à  $\gamma_2$ . Ici le centre de similitude à choisir est le centre de similitude interne  $\omega'$  (d'ailleurs, que  $\gamma_1, \gamma_2$  soient extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre, c'est toujours le pôle par rapport auquel  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont inverses l'un de l'autre avec une puissance positive qu'il faut choisir). Le plan variable sera mené par  $\omega'$  et le domaine D sera encore engendré par le quadrilatère non euclidien ayant pour sommets les quatre points où ce plan coupe  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (voir la figure). Il n'y a donc pas de différence essentielle entre le cas où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont extérieurs et celui où ils sont intérieurs l'un à l'autre.

2°  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont deux points communs réels. On peut supposer d'abord que ce sont deux vrais cercles non dégénérés en droites (puisque au besoin, par une

substitution préalable du groupe de Picard, on peut se ramener à ce cas-là). Il faut voir ce que devient, avec la représentation actuelle, le solide commun aux deux cônes qui contenaient les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de la sphère  $\Sigma$ . La surface qui limitait ce solide était l'enveloppe des plans tangents à  $\Gamma_1$  et à  $\Gamma_2$ , et laissant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  d'un même côté. A ces plans vont correspondre dans notre mode actuel de représentation des demi-sphères orthogonales au plan  $O\xi\eta$ , tangentes à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , laissant d'ailleurs ces deux cercles d'un même côté. De même que les plans tangents à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se répartissaient en deux séries dont chacune enveloppait un cône de second degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , de même ici nos demi-sphères se répartiront en deux séries *selon que leurs contacts avec  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  seront de même nature ou de nature différente.*

Fig 73.



La première série est formée des demi-sphères *tangentes à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  avec contact de même nature*, elle va envelopper une première demi-cyclide de Dupin ainsi définie : par le centre  $\omega$  de similitude *externe* de deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (qui est un pôle d'inversion positive pour ces deux cercles), on mènera un plan orthogonal au plan  $O\xi\eta$ . Ce plan coupera  $\gamma_1$  en  $u_1, v_1$ ,  $\gamma_2$  en  $u_2, v_2$ ;  $u_1$  et  $u_2$ , ainsi que  $v_1, v_2$  étant des couples antihomologues. Dans ce plan, sur  $u_1u_2$  et  $v_1v_2$  comme diamètres, on décrira deux demi-cercles qui engendreront la demi-cyclide cherchée lorsque le plan précédent prendra toutes les positions possibles autour de la normale menée par  $\omega$  au plan  $O\xi\eta$ .

La deuxième série est formée des demi-sphères *tangentes à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  avec contact de nature différente*. Elle enveloppe une deuxième cyclide de Dupin que l'on peut définir comme suit :

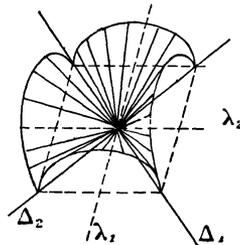
Par  $\omega'$ , centre de similitude *interne* de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (qui est encore un pôle d'inversion positive pour les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ), on mènera un plan normal au plan  $O\xi\eta$  qui coupera  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en  $u'_1, v'_1$ ;  $u'_2, v'_2$ ;  $u'_1, u'_2$  et  $v'_1, v'_2$  étant des couples antihomologues. Sur  $u'_1u'_2$  et  $v'_1v'_2$  comme diamètres, dans le plan précédent, on décrira deux demi-cercles qui engendreront la deuxième demi-cyclide de Dupin cherchée, lorsque le plan précédent accomplira une révolution complète autour de la normale en  $\omega'$  au plan  $O\xi\eta$ .

Les deux demi-cyclides ainsi trouvées enferment un volume  $D$  qui contient les deux demi-sphères  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et qui n'est autre que le volume engendré par  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  lorsque les paramètres de la réduction continue varient de toutes les façons possibles <sup>(1)</sup>.

Nos deux demi-cyclides admettent pour points coniques les deux points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  étaient égaux, la première demi-cyclide deviendrait un demi-tore ayant pour méridienne l'ensemble des cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On peut d'ailleurs remarquer que les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  étant symétriques l'un de l'autre par rapport aux deux cercles orthogonaux du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$  qui bissectent l'angle des cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  <sup>(2)</sup>, la première ou la deuxième des deux cyclides précédentes deviendra un tore à point conique par une inversion ayant son pôle sur le premier ou le deuxième des deux cercles bissecteurs précédents.

Si l'on fait une inversion par rapport à l'un des deux points d'intersection de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deviennent deux droites  $\Delta_1, \Delta_2$  sécantes, les deux cercles bissecteurs précédents deviennent les deux bissectrices  $\lambda_1, \lambda_2$  de leur angle, et les sphères ayant pour grand cercle ces cercles bissecteurs deviennent les plans normaux au plan  $O\xi\eta$  menés par les bissectrices  $\lambda_1, \lambda_2$ , de l'angle  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Fig. 74.



Chacune des deux demi-cyclides limitant  $D$  est engendrée, comme on l'a vu, par deux demi-cercles orthogonaux soit à la première, soit à la deuxième des demi-sphères ayant pour grand cercle un cercle bissecteur de l'angle des deux cercles  $\gamma_1, \gamma_2$ . Elle se transformera donc en une surface engendrée par un

---

(1) La remarque suivante facilitera le passage de l'une à l'autre des deux représentations employées. Les plans normaux à  $O\xi\eta$  passant par un centre de similitude correspondent, dans la représentation projective, aux plans passant : 1° par le sommet d'un des cônes du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ; 2° par le point de vue de la projection stéréographique qui transforme  $O\xi\eta$  en la sphère  $\Sigma$ . Dès lors, la première série de sphères correspond à celui des deux cônes qui laisse à son extérieur ce point de vue, et la deuxième série à celui des deux cônes qui contient le point de vue. Les plans normaux à  $O\xi\eta$  passant par  $\omega$  et coupant  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont deux plans limites tangents à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , ils correspondent bien à la première série de sphères. Ceux passant par  $\omega'$  peuvent prendre toutes les positions possibles autour de  $\omega'$ , ils correspondent bien à la deuxième série de sphères.

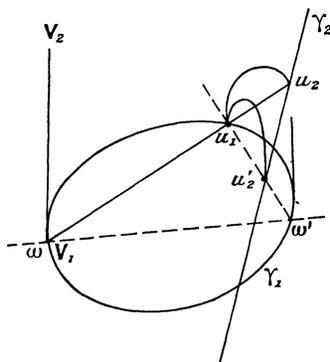
(2) Cercles qui ont pour centres respectivement  $\omega$  et  $\omega'$ .

demi-cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  et au plan bissecteur transformé de la demi-sphère précédente, c'est-à-dire qu'elle devient un demi-cône de révolution ayant pour méridienne l'ensemble des deux droites  $\Delta_1, \Delta_2$ . Il y a deux tels demi-cônes ayant pour axes les deux bissectrices de l'angle  $(\Delta_1, \Delta_2)$ . Ces deux demi-cônes situés au-dessus du plan  $O\xi\eta$  se raccordent le long des droites  $\Delta_1, \Delta_2$ . L'espace  $D$  se transforme dans l'inversion précédente en l'espace situé au-dessus de ces deux demi-cônes.

Si l'un des deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , par exemple  $\gamma_2$ , dégénère en une droite,  $\omega$  et  $\omega'$  viennent coïncider avec les extrémités du diamètre de  $\gamma_1$  perpendiculaire à la droite  $\gamma_2$ .

Par  $\omega$  on mènera un plan normal à  $O\xi\eta$  qui coupe  $\gamma_1$  en  $u_1$  et  $\gamma_2$  en  $u_2$ . La première demi-cyclide sera engendrée par le demi-cercle orthogonal à  $O\xi\eta$  de diamètre  $u_1, u_2$  lorsque le plan  $\omega u_1, u_2$  tourne autour de  $\omega$ .

Fig. 75.



La deuxième cyclide s'obtiendra en substituant  $\omega'$  à  $\omega$  et faisant la même construction. Les deux demi-cyclides se raccordent le long de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  normalement au plan  $O\xi\eta$ .

Elles délimitent une portion d'espace  $D$  contenant à son intérieur la demi-sphère de grand cercle  $\gamma_1$  et le demi-plan mené par  $\gamma_2$  orthogonalement à  $O\xi\eta$ . C'est cette portion d'espace  $D$  que décrit le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$ , associée de  $f$ .

Si enfin les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dégèrent en deux droites qui sont alors sûrement sécantes, on tombe sur la figure qui se déduirait du cas où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  étaient deux cercles sécants par inversion relativement à un de leurs points communs,  $D$  est l'espace situé au-dessus des deux demi-cônes de révolution (situés au-dessus de  $O\xi\eta$ ) ayant pour méridienne dans le plan  $O\xi\eta$  l'ensemble des deux droites  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Dans tous les cas le demi-cercle orthogonal à  $O\xi\eta$  ayant pour diamètre la corde commune aux deux cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  est intérieur au domaine  $D$ ; c'est l'inter-

section des deux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  représentatives de  $f_1, f_2$  qui, on l'a vu, sont toutes deux intérieures à l'espace  $D$ . Cette remarque nous sera utile dans la suite.

3° Les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tangents. On peut l'envisager comme une dégénérescence du premier cas. Par le pôle d'inversion positive des deux cercles (centre de similitude externe pour deux cercles tangents extérieurement, de similitude interne pour deux cercles tangents intérieurement), on mènera comme dans le premier cas un plan normal au plan  $O\xi\eta$  qui coupera  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  aux couples de points antihomologues  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$ . L'aire intérieure au quadrilatère non euclidien de sommets  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , c'est-à-dire ayant pour côtés les cercles orthogonaux au plan  $O\xi\eta$  de diamètre  $u_1v_1, u_2v_2, u_1u_2, v_1v_2$ , engendrera le volume  $D$  cherché. Ce volume est limité d'une

Fig. 76.

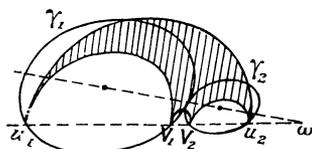
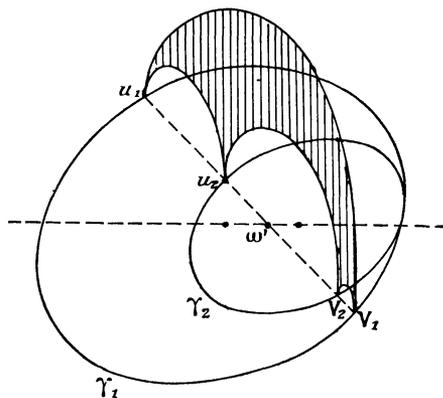


Fig. 77.



part par les deux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$ ; d'autre part par une demi-cyclide de Dupin définie comme enveloppe des demi-sphères orthogonales au plan  $O\xi\eta$  tangentes à  $\sigma_1, \sigma_2$  avec contact de même nature si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont tangentes extérieurement, avec contact de nature différente, si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont tangents intérieurement.

Ce cas est d'ailleurs moins intéressant que les deux premiers, comme on le verra par la suite; il présente quelque analogie avec celui des formes quadratiques binaires de déterminant nul.

Nous savons maintenant dans tous les cas trouver le volume  $D$  décrit par  $\zeta$  point représentatif de l'associée  $\varphi$  de  $f$  lorsque les paramètres de la réduction continue prennent toutes les valeurs possibles, et nous avons réussi à prouver qu'il est limité par des surfaces bien connues : sphères, cyclides de Dupin à génération très simple.

Pour avoir l'ensemble des substitutions  $(S)$  que détermine la réduction continue de  $\varphi$ , il faudra envisager l'ensemble des pentaèdres  $\pi$  de la division

bien connue du demi-espace  $\tau > 0$  avec lesquels D a au moins un point commun et l'ensemble des transformations (T) du demi-espace qui amènent  $\pi$  sur  $\pi_0$ , l'ensemble (S) est l'ensemble des substitutions du groupe de Picard qui définissent les (T). On en déduit l'ensemble (f) des formes équivalentes à f que la réduction continue associe à f [(f) = fS,  $\pi_0 = \pi T$ ] (<sup>1</sup>).

*Domaines associés à deux formes équivalentes.* — Soient f et F deux formes équivalentes par

$$(S) \quad \begin{cases} x = \lambda X + \rho Y \\ y = \nu X + \rho Y \end{cases} \quad (\lambda\rho - \mu\nu = 1; \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ entiers}).$$

$F = fS$ . Envisageons les transformées  $F_1 = f_1 S$  et  $F_2 = f_2 S$  de  $f_1$  et  $f_2$  par S. Comme  $f = f_1 f_2$ , on a

$$F = F_1 F_2.$$

Considérons aussi,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant les formes définies associées à  $f_1$  et  $f_2$ ,

$$\Phi_1 = \varphi_1 S \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \varphi_2 S.$$

$\Phi_1$  et  $\Phi_2$  seront les formes définies associées à  $F_1$  et  $F_2$  pour des valeurs convenables des paramètres. Leurs points représentatifs  $Z_1$  et  $Z_2$  sont les transformés des points  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  représentatifs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  par la transformation T qui est définie par S [ $Z_1 = \zeta_1 T$ ,  $Z_2 = \zeta_2 T$ ].

La demi-sphère  $\Sigma_2$  représentative de  $F_2$  n'est autre que  $\Sigma_2 = \sigma_2 T$  et la demi-sphère  $\Sigma_1$  représentative de  $F_1$  n'est autre que  $\Sigma_1 = \sigma_1 T$ . Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit clairement que le domaine  $\omega$  associé à F par la réduction continue n'est autre chose que le transformé par T du domaine D associé à f [ $F = fS$ ,  $\omega = DT$ ].

*Les domaines D et  $\omega$  associés à deux formes équivalentes f et F se transforment l'un dans l'autre par la transformation T du demi-espace que définit la substitution S par laquelle on passe de f à F.*

D'où la conclusion habituelle :

*Que l'on parte de f ou d'une forme équivalente quelconque, l'ensemble des formes (f) que la réduction continue associe à f est toujours le même.*

---

(<sup>1</sup>) Le volume D aboutit au plan  $O\xi_1$  par les deux cercles  $\gamma_1, \gamma_2$ ; on en conclut immédiatement que (S) et par suite (f) comptent une infinité d'éléments puisque les pentaèdres  $\pi$  se pressent infiniment aux abords du plan  $\pi$ , et puisque aussi sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  se trouvent une infinité de points d'affixe irrationnel.

Et de même :

*Les formes ( $f$ ) sont celles des formes équivalentes à  $f$  dont le domaine associé  $D$  a avec  $\pi_0$  au moins un point commun.*

*Réduite équivalente à  $f$ .* — L'ensemble ( $f$ ) comptant toujours une infinité de formes, il est indispensable de faire choix dans ( $f$ ) d'une ou de plusieurs formes réduites pour représenter toute la classe équivalente à  $f$ .

Soit donc  $f = f_1, f_2$  la forme proposée

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x x' - b_1 x y' - b_1' x' y + c_1 y y' & (a_1 c_1 - b_1 b_1' = -\delta_1 < 0), \\ f_2 &= a_2 x x' - b_2 x y' - b_2' x' y + c_2 y y' & (a_2 c_2 - b_2 b_2' = -\delta_2 < 0). \end{aligned}$$

Soient

$$\varphi_1 = \alpha_1 x x' - \beta_1 x y' - \beta_1' x' y + \gamma_1 y y' \quad (\alpha_1 \gamma_1 - \beta_1 \beta_1' = \delta_1, \alpha_1 > 0)$$

et

$$\varphi_2 = \alpha_2 x x' - \beta_2 x y' - \beta_2' x' y + \gamma_2 y y' \quad (\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \beta_2' = \delta_2, \alpha_2 > 0),$$

les formes d'Hermite positives dépendant chacune d'un paramètre variable que l'on associe à  $f_1$  et  $f_2$  par la méthode de M. Picard.  $\zeta_1$  représentatif de  $\varphi_1$  est sur la demi-sphère  $\sigma_1$  représentative de  $f_1$  et  $\zeta_2$  représentatif de  $\varphi_2$  est sur la demi-sphère  $\sigma_2$  représentative de  $f_2$ .

Soit enfin

$$\varphi = t_1^2 \varphi_1 + t_2^2 \varphi_2,$$

la forme associée à  $f$

$$\varphi = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

avec

$$\begin{cases} p = t_1^2 \alpha_1 + t_2^2 \alpha_2, \\ q = t_1^2 \beta_1 + t_2^2 \beta_2, \\ q' = t_1^2 \beta_1' + t_2^2 \beta_2', \\ r = t_1^2 \gamma_1 + t_2^2 \gamma_2. \end{cases}$$

Le déterminant de  $\varphi$  est

$$\delta = pr - qq' = t_1^2 \delta_1 + t_2^2 \delta_2 + t_1^2 t_2^2 \delta_{12}$$

avec

$$\delta_{12} = \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 - \beta_1 \beta_2' - \beta_2 \beta_1'.$$

Pour certaines valeurs des quatre paramètres dont dépend  $\varphi$ , réduisons cette forme par la substitution

$$(S) \quad \begin{cases} x = \lambda X + \mu Y \\ y = \nu X + \rho Y \end{cases} \quad (\lambda\rho - \mu\nu = 1)$$

et soient

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 S = A_1 \lambda X X' - B_1 \lambda X Y' - B_1' X' Y + C_1 \lambda Y Y', \\ F_2 &= f_2 S = A_2 \lambda X X' - B_2 \lambda X Y' - B_2' X' Y + C_2 \lambda Y Y', \\ \Phi_1 &= \varphi_1 S = a_1 \lambda X X' - b_1 \lambda X Y' - b_1' X' Y + c_1 \lambda Y Y', \\ \Phi_2 &= \varphi_2 S = a_2 \lambda X X' - b_2 \lambda X Y' - b_2' X' Y + c_2 \lambda Y Y', \end{aligned}$$

les transformées de  $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$  par S.

Soit

$$\Phi = \varphi S = PXX' - QXY' - Q'X'Y + RYY'$$

la réduite de  $\varphi$ .

On aura

$$P = t_1^2 a_{11} + t_2^2 a_{22},$$

$$Q = t_1^2 ab_1 + t_2^2 ab_2,$$

$$Q' = t_1^2 ab'_1 + t_2^2 ab'_2,$$

$$R = t_1^2 c_1 + t_2^2 c_2,$$

et le déterminant  $\Delta$  de  $\Phi$  sera égal à celui  $\delta$  de  $\varphi$ .

Les conditions de réduction satisfaites par  $\Phi$  donnent

$$P \leq \sqrt{2\delta}, \quad R \leq \frac{2\delta}{P}, \quad \left| \frac{Q+Q'}{2} \right| \leq \frac{P}{2}, \quad 0 \leq \frac{Q'-Q}{2t} \leq \frac{P}{2}.$$

La limitation des coefficients de F va se faire tout à fait de la même façon que dans le premier cas (produit d'une forme définie par une forme indéfinie).

On usera de

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq a_{11}, & |A_2| &\leq a_{22}, \\ |C_1| &\leq c_1, & |C_2| &\leq c_2, \\ B_1 B'_1 &\leq 2 a_{11} c_1, & B_2 B'_2 &\leq 2 a_{22} c_2. \end{aligned}$$

Des expressions de P, Q, R on tire :

1° Que

$$t_1^2 t_2^2 a_{11} a_{22} \leq \left( \frac{P}{2} \right)^2,$$

d'où

$$|A_1 A_2| \leq a_{11} a_{22} \leq \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2};$$

2° Que

$$t_1^2 t_2^2 c_1 c_2 \leq \left( \frac{R}{2} \right)^2 \leq \frac{\delta^2}{4 t_1^2 t_2^2 a_{11} a_{22}},$$

d'où

$$|C_1 C_2| \leq \left( \frac{\delta}{2 t_1^2 t_2^2} \right)^2 \frac{1}{|A_1 A_2|};$$

3° Que

$$t_1^2 t_2^2 a_{11} c_1 \leq PR \leq 2\delta.$$

Donc

$$a_{11} c_1 \leq \frac{2\delta}{t_1^2 t_2^2}$$

et de même

$$a_{22} c_2 \leq \frac{2\delta}{t_1^2 t_2^2}.$$

On obtiendra donc les mêmes limitations qu'au premier cas pour les coefficients

de F

$$F = A_1 A_2 X^2 X'^2 - \left| \begin{array}{l} (A_1 B_2 + A_2 B_1) X^2 X' Y' + B_1 B_2 X^2 Y'^2 \\ - (A_1 B'_2 + A_2 B'_1) X'^2 X Y + B'_1 B'_2 X'^2 Y^2 \end{array} \right| \\ + (A_1 C_2 + A_2 C_1 + B_1 B'_2 + B_2 B'_1) X Y X' Y' - \left| \begin{array}{l} (B_1 C_2 + B_2 C_1) X Y Y'^2 + C_1 C_2 Y^2 Y'^2, \\ (B'_1 C_2 + B'_2 C_1) X' Y' Y^2 \end{array} \right|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |A_1 B_2 + A_2 B_1| \leq 2\sqrt{2} \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2} \\ |B_1 B_2| \leq \frac{4\delta}{t_1^2 t_2^2} \\ |A_1 C_2 + A_2 C_1 + B_1 B'_2 + B_2 B'_1| \leq \frac{12\delta}{t_1^2 t_2^2} \\ |B_1 C_2 + B_2 C_1| \leq \frac{2}{\sqrt{|A_1 A_2|}} \left( \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2} \right)^{\frac{3}{2}} \end{array}}$$

Tous les coefficients sont donc limités supérieurement en valeur absolue à l'aide de la quantité  $\theta = \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}$  qui joue un rôle essentiel dans la question, dans les limitations des trois derniers coefficients de F entre au dénominateur du second membre la valeur absolue du premier coefficient de F,  $(A_1 A_2)$ , en sorte que la limitation est illusoire si ce premier coefficient est nul, ce qui peut se produire si la forme proposée  $f$  peut s'annuler pour des valeurs entières des variables  $x, y$  (ce qu'on énonce quelquefois en disant que cette forme  $f$  peut représenter zéro).

C'est toujours la quantité  $\theta = \frac{\delta}{t_1^2 t_2^2}$  dépendant de la forme  $\varphi$  seulement, qui jouera le rôle essentiel dans la question ; on voit tout de suite que :

*Pour deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathfrak{f}$  et pour des valeurs correspondantes des paramètres qui entrent dans leurs associées  $\varphi$  et  $\Phi$ , la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs.*

D'où l'on conclut que les fonctions  $\theta$  et  $\Theta$  relatives à ces deux formes prennent le même ensemble de valeurs lorsque les paramètres de la réduction continue varie de toutes les façons possibles. *Elles ont donc le même minimum qui par définition sera le déterminant de la forme proposée  $f$ . Ce déterminant est le même pour toute la classe équivalente à  $f$ .*

On appellera *correspondante  $\varphi$  de  $f$* , la (ou les) *forme d'Hermite associée à  $f$  pour les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum*. Il résulte de ce qui précède que les correspondantes  $\varphi$  et  $\Phi$  de deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathfrak{f}$  sont équivalentes par la même substitution que  $f$  et  $\mathfrak{f}$ .

Ceci posé : soient déterminées les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum ou, autrement dit : soit connue la (ou les) correspondante  $\varphi$  de  $f$ .

Réduisons cette correspondante  $\varphi$  par une substitution convenable  $S$  du groupe de Picard et faisons dans  $f$  la même substitution; on obtiendra une forme  $F = fS$  de l'ensemble  $(f)$  que nous appellerons *réduite équivalente à  $f$* . On peut dire aussi que *la ou les réduites équivalentes à  $f$  sont celles des formes  $(f)$  dont la ou les correspondantes sont des formes d'Hermite réduites*.

On conclut de là que *deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathfrak{F}$  ont les mêmes réduites et ceci ramène l'équivalence de deux formes à l'identité entre leurs réduites ou leurs groupes de réduites*.

*Étude du minimum de  $\theta$ .* — On a vu que

$$\begin{aligned}\partial &= t_1^2 \delta_1 + t_2^2 \delta_2 + t_1^2 t_2^2 \delta_{12}, \\ \delta_{12} &= \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_1'\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \alpha_1 \gamma_1 - \beta_1 \beta_1' = \text{const.}, \\ \delta_2 &= \alpha_2 \gamma_2 - \beta_2 \beta_2' = \text{const.}\end{aligned}$$

Le minimum de

$$\theta = \frac{\partial}{t_1^2 t_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2 + \delta_{12},$$

s'obtient :

1° Par le minimum de  $\frac{t_1^2}{t_2^2} \delta_1 + \frac{t_2^2}{t_1^2} \delta_2$ , ce qui donne, comme au premier cas,

$$\frac{t_1^2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{t_2^2}{\sqrt{\delta_1}};$$

si  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  sont les représentatifs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  pour les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum, on conclut de là que  $\zeta$ , *point représentatif de la correspondante  $\varphi$ , est milieu non euclidien des deux points  $\zeta_1, \zeta_2$* .

2° Par le minimum de  $\delta_{12} = \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_1'$ . Le point  $\zeta$ , représentatif de la forme

$$\varphi_1 = \alpha_1 x x' - \beta_1 x y' - \beta_1' x' y + \gamma_1 y y'$$

à déterminant constant  $\delta_1$ , décrit le plan non euclidien  $\sigma_1$  (<sup>1</sup>) (demi-sphère  $\sigma_1$  orthogonale au plan  $O\xi\eta$ ) représentant  $f_1$ .

$\zeta_2$  représentatif de

$$\varphi_2 = \alpha_2 x x' - \beta_2 x y' - \beta_2' x' y + \gamma_2 y y'$$

de déterminant constant  $\delta_2$  décrit le plan non euclidien  $\sigma_2$  représentant  $f_2$ .

(<sup>1</sup>) Dans tout ce qui suit il est bon de se servir à la fois des deux représentations des formes d'Hermite que nous connaissons : représentation projective et représentation dans le demi-espace  $\tau > 0$ .

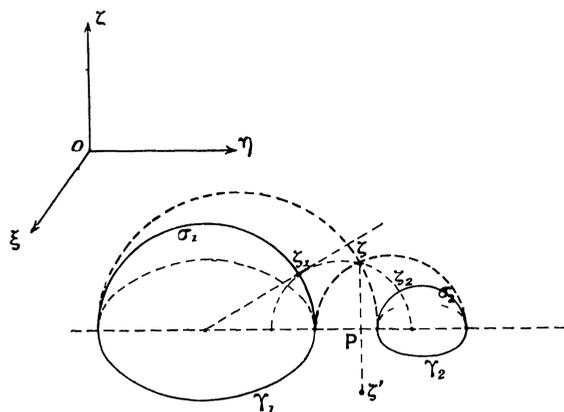
Dans ces conditions *le minimum de  $\delta_{1,2}$  est réalisé*, ainsi qu'on l'a vu bien des fois dans les Chapitres précédents, *en même temps que celui de la distance non euclidienne  $\zeta_1, \zeta_2$ .*

Ici trois cas sont à distinguer :

1° Les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , du plan  $O\xi\eta$  n'ont aucun point commun, les demi-sphères  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  non plus. Alors la distance non euclidienne  $\zeta_1, \zeta_2$  des deux points  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , qui les décrivent sera minimum quand la droite non euclidienne  $\zeta_1, \zeta_2$  sera la perpendiculaire commune non euclidienne aux deux plans non euclidiens  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (1). Cette perpendiculaire est parfaitement définie. Dans la représentation projective c'est la droite qui joint les deux points  $(a_1, b_1, b'_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, b'_2, c_2)$  qui représentent  $f_1$  et  $f_2$  et qui sont les pôles, par rapport à la sphère  $\Sigma$ , des plans  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui représentent aussi ces deux formes.

Dans la représentation à l'aide du demi-espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau > 0$ ),  $\zeta_1, \zeta_2$  cherchés sont les points d'intersection, avec les demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  qui représentent  $f_1, f_2$ , du demi-cercle bien défini orthogonal à ces deux demi-sphères ainsi qu'au plan  $O\xi\eta$ . Le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante  $\varphi$  de  $f$  est alors parfaitement déterminé par sa propriété trouvée d'abord d'être le milieu non euclidien de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ .

Fig. 78.

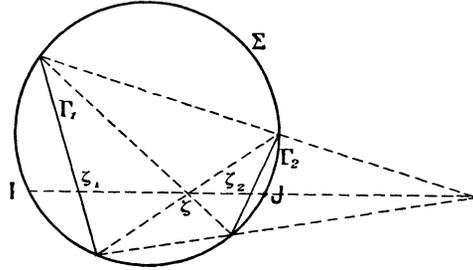


Dans ce cas la forme  $f$  n'a qu'une correspondante  $\varphi$  parfaitement déterminée, elle n'a donc qu'une réduite, en général et en tout cas un nombre fini, si le point représentatif de la correspondante tombe sur une face d'un pentaèdre  $\pi$  de la division pentaédrique de l'espace.

(1) En effet on voit de suite que  $\zeta_1, \zeta_2$ , pour le minimum, doit nécessairement être orthogonal au plan non euclidien  $\sigma_2$ , et de même au plan  $\sigma_1$ . C'est donc la perpendiculaire commune à ces deux plans.

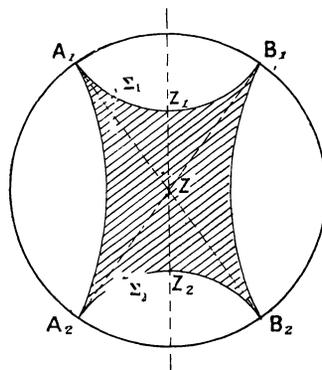
Le point représentatif de la correspondante jouit d'autres propriétés géométriques très simples :

Fig. 79.



En effet soient  $\zeta$  ce point,  $\zeta'$  son symétrique par rapport au plan  $O\xi\eta$ . Faisons une inversion de pôle  $\zeta'$ . Le plan  $O\xi\eta$  devient une sphère de centre  $Z$  inverse de  $\zeta$ . Le cercle  $\zeta_1\zeta_2$  devient un diamètre  $Z_1ZZ_2$  de cette sphère, et  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deviennent deux calottes sphériques intérieures à la sphère  $Z$ , orthogonales à cette sphère et au diamètre  $Z_1ZZ_2$  de cette sphère. De plus  $Z$  sera le milieu ordinaire des deux points  $Z_1$  et  $Z_2$  inverses de  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . Les deux calottes sont donc égales, et leurs cercles de section  $\Gamma_1, \Gamma_2$  par la sphère  $Z$  qui sont les inverses de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux cercles symétriques par rapport à  $Z$  centre de la sphère. La demi-cyclide qui limite le volume  $D$  associé à la forme  $f$  devient dans l'inversion une portion de tore d'axe  $Z_1ZZ_2$  engendrée par l'arc de cercle orthogonal à la sphère aux points  $A_1, A_2$  où un plan méridien passant par  $Z_1ZZ_2$

Fig. 80.



rencontre les deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (arc de cercle intérieur à la sphère  $Z$ ). Le domaine  $D$  se transforme en un domaine engendré par la rotation autour de  $Z_1Z_2$  d'un quadrilatère curviligne  $A_1A_2B_2B_1$  dont les côtés  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  sont les sections par un méridien de deux calottes sphériques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  inverses de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , dont les côtés  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  sont également deux arcs de cercle orthogonaux à la sphère  $Z$ .  $A_1, A_2, B_1, B_2$  sont les quatre sommets d'un rectangle

et l'on voit que  $Z$  est le sommet d'un cône de révolution contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , orthogonal à la sphère  $Z$ . Revenant à la figure primitive on voit que  $\zeta$  est le point conique (situé au-dessus de  $O\xi\eta$ ) d'une demi-cyclide de Dupin contenant les cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  et orthogonale au plan  $O\xi\eta$  en tous les points de ces deux cercles. Passant à la représentation projective, avec la sphère  $\Sigma$  pour quadrique fondamentale, à cette demi-cyclique de Dupin qu'on vient de trouver, correspond un cône du deuxième degré contenant  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et ayant son sommet  $\zeta$  intérieur à  $\Sigma$  (correspondant du point conique de la cyclide). Ce cône est parfaitement déterminé et unique dans le cas où l'on se place :  $\Gamma_1, \Gamma_2$  n'ayant comme  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pas de point commun.

On vérifie de suite que son sommet  $\zeta$  est sur la droite joignant les pôles par rapport à  $\Sigma$  des plans des deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (perpendiculaire commune non euclidienne à ces deux plans). Si cette droite coupe en  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  les plans de ces deux cercles, c'est un exercice facile de montrer que  $\zeta_1, \zeta_2$  sont symétriques par rapport à  $\zeta$  en géométrie non euclidienne, ou mieux qu'ils sont symétriques par rapport au plan polaire (par rapport à  $\Sigma$ ) du sommet extérieur à  $\Sigma$  du cône du deuxième degré qui contient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Il suffit de remarquer pour cela que  $\zeta_1, \zeta_2$  et les points  $I, J$  où cette droite coupe  $\Sigma$  sont deux couples d'une involution dont les points doubles sont les sommets des deux cônes du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ( $\zeta$  est un de ces sommets). On a alors

$$(\zeta_1 \zeta_2 IJ) = (\zeta_2 \zeta_1 IJ)$$

et ceci exprime que  $\zeta_1, \zeta_2$  a pour milieu non euclidien  $\zeta$ .

En définitive, le point représentatif  $\zeta$  de la correspondante de  $f = f_1 f_2$  est, en représentation projective, le sommet (intérieur à la sphère  $\Sigma$ ) d'un cône du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  cercles représentatifs de  $f_1$  et  $f_2$ . Avec la représentation dans le demi-espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau > 0$ ), c'est le point conique d'une demi-cyclide de Dupin qui coupe le plan  $O\xi\eta$  orthogonalement suivant les deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

2° Les cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  ont deux points communs. Alors les deux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  représentatives de  $f_1$  et  $f_2$  ont en commun un demi-cercle orthogonal au plan  $O\xi\eta$  en ces deux points-là. La distance non-euclidienne  $\zeta_1 \zeta_2$  de deux points  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  qui décrivent respectivement les deux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  sera minimum et nulle lorsque  $\zeta_1, \zeta_2$  seront confondus sur le demi-cercle d'intersection de  $\sigma_1, \sigma_2$ .  $\zeta$  sera alors confondu avec  $\zeta_1, \zeta_2$  et la composante n'est pas complètement déterminée. Il se produit ici la même circonstance que celle qui se produit dans la réduction d'une forme quadratique indéfinie à coefficients réels ou dans la réduction selon la méthode de Dirichlet interprétée par M. Bianchi d'une forme quadratique binaire à coefficients complexes. Ici toute forme d'Hermite  $\varphi$  ayant son point représentatif  $\zeta$  sur le demi-cercle d'inter-

section de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sera une correspondante de  $f$  <sup>(1)</sup>. Il y a donc en général une infinité de réduites et l'on obtient toutes les substitutions réductrices (S) en cherchant tous les pentaèdres  $\pi$  de la division de Picard (et il y en a en général une infinité) que traverse la demi-circonférence, intersection de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et en déterminant l'ensemble des substitutions S telles que les T correspondantes amènent ces pentaèdres sur  $\pi_0$ . *Sera réduite alors toute forme F équivalente à f, telle que le demi-cercle d'intersection des deux demi-sphères  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  représentatives de  $F_1$  et  $F_2$  ( $F = F_1 F_2$ ) a avec  $\pi_0$  au moins un point commun.* En général il y a une infinité de réduites : nous verrons plus loin ce qui se passe lorsque la forme  $f$  a ses coefficients entiers, et *comment ces réduites alors sont en nombre fini*. Nous consacrerons une étude spéciale à ce cas-là qui conduit à des résultats particulièrement simples.

3° Les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tangents en un point A. On est alors conduit à prendre pour correspondante de  $f$  la forme de discriminant nul qui est représentée par ce point A. C'est évidemment là un cas où il n'est plus possible de parler de réduction pour cette forme correspondante. On a un cas limite des premier et second cas que nous écarterons dans la suite.

En ce qui concerne le calcul de la ou des correspondantes <sup>(2)</sup> quand la forme  $f$  est donnée, on pourra le faire facilement puisque :

1° On sait reconnaître par des moyens classiques si  $f$  se décompose en un produit de deux formes, on sait aussi trouver ces deux formes  $f_1$  et  $f_2$  ;

2° On pourra ainsi distinguer dans lequel des cas précédents on se trouve selon que les deux cercles  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  ou bien n'auront pas de point commun, ou bien auront deux points communs réels. On peut déterminer ceci directement d'après la réalité des points doubles de la quartique  $f(z, 1) = 0$ . Le premier cas correspond aux points doubles imaginaires. Le deuxième correspond à deux points doubles réels à distance finie (ce qui, soit dit en passant, donne immédiatement, en fonction des coefficients de la forme proposée, la forme de Dirichlet dont les racines sont représentées par ces deux points du plan  $O\xi\eta$ , *forme de Dirichlet qui est représentée par le demi-cercle commun à  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , demi-sphères représentatives de  $f_1$  et  $f_2$* ); et la réduction de cette forme de Dirichlet sera d'ailleurs un problème identique à celui de la réduction de la forme proposée  $f_1$ , les substitutions réductrices étant les mêmes pour les deux formes.

On pourra ainsi connaître individuellement si l'on veut chacune des deux formes  $f_1$  et  $f_2$ , et le calcul du point représentatif  $\zeta$  de la correspondante, bien défini par ses propriétés géométriques, n'offre plus aucune difficulté.

(1) On a fait remarquer en temps utile que ce demi-cercle était intérieur au domaine D associé à la forme  $f$ .

(2) On peut remarquer que, dans tous les cas, la ou les correspondantes sont des covariants quadratiques à indéterminées conjuguées de la forme proposée.

*Remarque pour le cas où la forme proposée  $f$  a ses coefficients entiers.* -- Dans ce cas, toute forme équivalente, et en particulier toute réduite a ses coefficients entiers. En reprenant les notations habituelles, si  $F$  est une réduite équivalente à  $f$ ,  $A_1, A_2$  qui est le premier coefficient de  $F$  est un entier. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le premier coefficient n'est pas nul, ou bien il est nul. *Le deuxième cas ne peut jamais se présenter si la forme  $f$  ne peut représenter zéro*, c'est-à-dire s'il n'existe aucun système de deux entiers  $x, y$  annulant la forme  $f$ . Bornons nous au premier cas, c'est-à-dire que nous excluons les formes biquadratiques du type étudié  $f = f_1 f_2$  ( $f_1$  et  $f_2$  formes d'Hermite indéfinies) qui pourraient représenter zéro. Alors le premier coefficient de  $F$  n'est sûrement pas nul. Dans les inégalités de limitation écrites pour tous les coefficients de  $F$ , on remplacera la quantité  $|A_1, A_2|$  qui entre dans certains dénominateurs par la quantité non supérieure 1; on obtiendra ainsi aux seconds membres de ces inégalités des quantités parfaitement déterminées par la connaissance du déterminant  $\theta$  de la forme  $f$ . Il suit de là que, si ce déterminant est donné, chacun des coefficients d'une réduite  $F$  ayant ce déterminant ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs. D'où il suit deux conséquences :

1° Les formes biquadratiques à coefficients entiers et indéterminées conjuguées du type  $f = f_1 f_2$  ( $f_1$  et  $f_2$  formes d'Hermite indéfinies), non susceptibles de représenter zéro et ayant un même déterminant donné, se répartissent en un nombre limité de classes (puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de réduites équivalentes à une  $f$  du type cherché).

2° Si une forme biquadratique à coefficients entiers  $f$  est du type  $f = f_1 f_2$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant deux formes d'Hermite indéfinies dont les demi-sphères représentatives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  se coupent suivant un demi-cercle réel, si en outre la forme  $f$  ne peut représenter zéro, il n'y a qu'un nombre fini de réduites équivalentes à la forme  $f$  (puisque toutes ces réduites ont pour déterminant le déterminant 0 de  $f$ ). Dans ce cas, comme dans le cas des formes quadratiques binaires à coefficients entiers complexes, on voit que les réduites équivalentes à la forme proposée, qui en général sont en nombre infini, n'existent plus qu'en nombre fini.

Nous nous occuperons plus loin de lever la restriction qu'apporte l'énoncé précédent : considération des seules formes biquadratiques non susceptibles de représenter zéro. La méthode employée sera différente et consistera essentiellement dans l'étude de la forme de Dirichlet représentée par le demi-cercle commun à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On montrera que cette forme, tout en ayant ses coefficients entiers, n'est pas la plus générale de ce genre, et c'est ce qui permet justement d'affirmer, dans tous les cas, que  $f$  puisse ou non représenter zéro, qu'il n'y a qu'un nombre fini de réduites équivalentes à la forme proposée.

---

## CHAPITRE III.

### ÉTUDE DE CERTAINS SOUS-GROUPES DU GROUPE DE PICARD.

Soit

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ entiers complexes et } \alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

une substitution  $S$  du groupe; on l'écrit aussi en posant  $z = \frac{x}{y}$  sous la forme

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}.$$

Elle lie  $z$  à  $Z$  par une relation homographique.

La transformation qui fait passer du point d'affixe  $z$  au point d'affixe  $Z$  a deux points doubles dont les affixes vérifient l'équation

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sigma z + \beta}{\gamma z + \delta}, \\ \gamma z' + (\delta - \sigma)z - \beta &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux points doubles peuvent être confondus et la substitution est dite *parabolique*. S'ils sont distincts et si  $z_1$  et  $z_2$  sont leurs affixes, on peut mettre la relation

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

sous la forme

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = K \frac{Z - z_1}{Z - z_2}.$$

L'équation qui détermine  $K$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  est facile à former : c'est

$$(K^2 + 1)(\alpha\delta - \beta\gamma) - K(\alpha^2 + \delta^2 + 2\beta\gamma) = 0$$

et avec l'hypothèse  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$K^2 - K[(\sigma + \delta)' - 2] + 1 = 0$$

$\alpha + \delta$  peut être un nombre entier complexe quelconque  $\lambda + i\mu$  ( $\lambda, \mu$  entiers réels), puisque la substitution

$$\begin{aligned} x &= \lambda X + (\lambda\mu + i)Y, \\ y &= iX + i\mu Y, \end{aligned}$$

où  $\alpha + \delta = \lambda + i\mu$ , est une substitution du groupe de Picard.

Dans ces conditions, trois cas sont possibles :

1°  $K$  est de la forme  $e^{h\theta}$ ,  $K'$  étant un nombre réel. C'est le cas où les deux racines de l'équation en  $K$  ont 1 pour module. La substitution  $S$  est dite *elliptique*.

2°  $K$  est réel. La substitution  $S$  est dite *hyperbolique*.

Ces deux cas se présentent *lorsque*  $(\alpha + \delta)^2 - 2$  est réel : le premier lorsque  $[(\alpha + \delta) - 2]^2 - 4 < 0$ , condition qui se réduit à  $(\alpha + \delta)^2 [(\alpha + \delta)^2 - 4] < 0$  (1); le deuxième lorsque  $[(\alpha + \delta)^2 - 4](\alpha + \delta)^2 \geq 0$ .

3° Enfin  $K$  peut être une imaginaire quelconque de la forme  $re^{i\theta}$  ( $r \neq 1$ ,  $\theta \neq \pi$ ) et la substitution est dite *loxodromique*.

Ce sont là des résultats connus que nous rappelons brièvement pour la suite.

Nous allons maintenant étudier les relations qui existent entre certains sous-groupes du groupe de Picard qui se présentent dans la réduction continue des formes quadratiques binaires de Dirichlet, ou des formes d'Hermité indéfinies, à coefficients entiers.

Si l'on envisage d'abord une forme de Dirichlet

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des entiers complexes, on sait depuis Dirichlet qu'elle est conservée par un groupe cyclique  $G$  de substitutions modulaires complexes, engendré par les puissances d'une certaine substitution  $S$  du groupe de Picard, qui peut être une substitution hyperbolique ou une substitution loxodromique.

Si, comme nous l'avons fait dans la deuxième Partie de ce Mémoire, on représente la forme de Dirichlet par la demi-circonférence  $\Gamma$  orthogonale au plan  $O\xi\eta$  aux deux points dont les affixes sont les racines de la forme

$$az^2 + 2bz + c = 0,$$

on voit qu'il existe un groupe cyclique  $\mathcal{G}$  de transformations  $T$  du demi-espace, sous-groupe du groupe de Picard, qui conserve la demi-circonférence  $\Gamma$ . Ce groupe cyclique  $\mathcal{G}$  est engendré par la  $T$  qui correspond à la substitution  $S$  génératrice du groupe  $G$  conservatif de la forme de Dirichlet. Si cette substitution  $S$  est hyperbolique, toute demi-sphère passant par  $\Gamma$  est conservée par une transformation  $T$  quelconque du groupe  $\mathcal{G}$ .

Si la substitution  $S$  est loxodromique ( $K = re^{i\theta}$ ), la  $T$  qui lui correspond

(1) On peut remarquer que cette condition fixe la valeur du nombre entier réel  $(\alpha + \delta)^2$  à 1, 2 ou 3, sur lesquelles 2 et 3 sont à rejeter. Par conséquent, pour toutes les substitutions elliptiques du groupe de Picard, le nombre  $k$  aura pour valeur une racine de l'équation

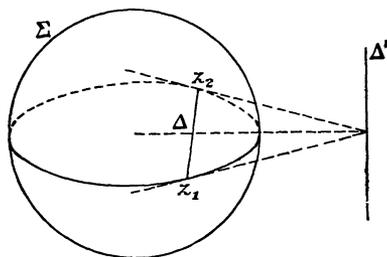
$$K^2 + K + 1 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad K = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}.$$

change une demi-sphère passant par  $\Gamma$  en une demi-sphère passant par  $\Gamma$  et faisant l'angle  $\theta$  avec la première; si  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$  ( $\theta = \frac{2\lambda\pi}{\mu}$ ), on voit que la transformation  $T^\mu$  conservera toute demi-sphère passant par  $\Gamma$  et il en sera de même de tout le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  formé des puissances de  $T^\mu$  ( $S^\mu$  sera hyperbolique). Si  $\theta$  est incommensurable à  $2\pi$ , aucune des transformations de  $\mathcal{G}$  ne laissera inaltérée une demi-sphère passant par  $\Gamma$ .

Il n'est pas inutile d'examiner ce que donne la représentation projective des formes.

Aux racines  $z_1$  et  $z_2$  de la forme de Dirichlet proposée correspondent deux points de la sphère  $\Sigma$ . La forme elle-même est représentée par le segment de la droite  $\Delta$  qui joint  $z_1, z_2$ .

Fig. 81.

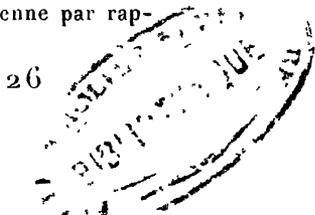


Si le groupe  $G$  qui conserve la forme est engendré par une substitution  $S$  hyperbolique, le groupe  $\mathcal{G}$  formé des  $T$  qui correspondent aux substitutions de  $G$  est un groupe de *rotations non euclidiennes autour de  $\Delta'$  conjuguée de  $\Delta$  par rapport à  $\Sigma$*  <sup>(1)</sup>. La  $T$  qui correspond à  $S$  et dont les puissances engendrent  $\mathcal{G}$  est en effet une collinéation qui conserve  $\Sigma$  et a tous les points de  $\Delta'$  pour points doubles. Une telle transformation conserve tout plan passant par  $\Delta$ .

Si la substitution  $S$  qui engendre  $G$  est loxodromique, la  $T$  qui lui correspond se décompose en deux rotations non euclidiennes autour des droites conjuguées  $\Delta, \Delta'$ . La rotation autour de  $\Delta$  est d'ailleurs d'angle non euclidien  $\theta$  (si  $K = re^\theta$  caractérise la substitution  $S$ ). On voit qu'un plan passant par  $\Delta$  se transforme par  $T$  en un plan passant par  $\Delta$  et faisant avec le précédent l'angle  $\theta$ .

Mentionnons enfin que, pour certaines formes de Dirichlet particulières à coefficients entiers : *celles dont les demi-circonférences  $\Gamma$  représentatives*

(1) Si  $k$  est réel et négatif,  $T$  peut être envisagé comme une suite de deux rotations non euclidiennes : la première correspondant au multiplicateur  $|K|$  autour de  $\Delta'$ , la seconde de  $180^\circ$  autour de  $\Delta$ . La seconde a pour période 2, c'est aussi une symétrie non euclidienne par rapport à  $\Delta$ .



sont des arêtes <sup>(1)</sup> de pentaèdres  $\pi$  de la division pentaédrique du demi-espace, il existe, outre le groupe cyclique infini trouvé précédemment, un groupe cyclique fini formé de substitutions elliptiques conservant ces formes. Si la demi-circonférence  $\Gamma$  est l'arête d'un dièdre droit (non euclidien) dans un pentaèdre  $\pi$ , le groupe est d'ordre 2 et comprend la substitution unité et une rotation non euclidienne de  $180^\circ$  autour de l'arête considérée. Si la demi-circonférence  $\Gamma$  est l'arête d'un dièdre de  $60^\circ$ , le groupe est d'ordre 3 et sa substitution génératrice est une rotation non euclidienne de  $120^\circ$  autour de l'arête considérée.

Considérons maintenant une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers

$$f(x, y) = axx' - byy' - b'x'y + cy'y' \quad (bb' - ac > 0)$$

( $a, c$  entiers réels;  $b$  et  $b'$  entiers complexes conjugués), et la demi-sphère représentative dont le grand cercle d'équateur dans le plan  $O\xi\eta$  a pour équation

$$f(z, 1) = azz' - bz - b'z' + c = 0.$$

M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1884) a démontré qu'il existe un groupe infini de substitutions modulaires complexes

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad \text{ou} \quad z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers; } \alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

laissant invariante la forme  $f$ . Écrites sous la forme  $z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$ , ces substitutions  $S$  forment un groupe fuchsien dont le cercle fondamental est le cercle du plan  $O\xi\eta$  dont l'équation est

$$azz' - bz - b'z' + c = 0.$$

M. Picard a enseigné le moyen de former le domaine fondamental de ce groupe fuchsien. Depuis que son Mémoire a été écrit, on a indiqué d'autres moyens pour le former (voir en particulier KLEIN et FRICKE, *Fonctions automorphes*, et une Note de M. HUMBERT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, mai 1916). Passant des  $S$  qui conservent  $f(x, y)$  aux transformations  $T$  du demi-espace qui leur correspondent, on voit que ces transformations conservent toutes la

(1) Il y a des arêtes de ces domaines  $\pi$  qui ne sont pas *apparentes*, parce que les deux faces qui y aboutissent forment un dièdre d'angle  $180^\circ$ ; tel est par exemple l'axe  $O\tau$  pour  $\pi_0$ , c'est l'axe d'une rotation non euclidienne de  $180^\circ$  définie par la substitution modulaire

$$(S) \quad \begin{cases} x = iX, \\ y = -iY. \end{cases}$$

demi-sphère  $\sigma$  représentative de  $f(x, y)$  <sup>(1)</sup>. Les substitutions  $S$  qui conservent  $f(x, y)$ , on le voit aisément, sont en général toutes hyperboliques ou paraboliques et leurs points doubles sont sur le cercle  $\gamma$  équateur de  $\sigma$ . Dans le cas seulement où  $\sigma$  est orthogonale à une arête <sup>(2)</sup> d'un pentagone  $\pi$  de la division du demi-espace, il y a, outre le groupe infini précédent, un groupe fini <sup>(3)</sup> de deux ou de trois substitutions elliptiques <sup>(4)</sup> (selon que le dièdre ayant pour arête l'arête orthogonale à  $\sigma$  est de  $90^\circ$  ou de  $60^\circ$ ), qui conserve  $f(x, y)$  (les  $T$  correspondantes sont des rotations non euclidiennes de  $180^\circ$  ou de  $120^\circ$  autour de l'arête considérée).

Nous nous proposons actuellement de chercher des relations entre les groupes conservatifs des formes de Dirichlet et des formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers. Nous allons à cet effet considérer une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers représentée par la demi-sphère  $\sigma$ , et chercher si le groupe qui la conserve a des substitutions communes avec le groupe qui conserve une forme de Dirichlet à coefficients entiers dont la demi-circonférence représentative  $\Gamma$  est sur  $\sigma$ . Nous dirons, pour abrégé, qu'une telle forme de Dirichlet est contenue dans la forme d'Hermite.

Une première question à résoudre est de déterminer celles de ces formes de Dirichlet à coefficients entiers qui peuvent être contenues dans des formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers.

Soit donc la forme

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

et soient  $z_1, z_2$  ses racines, qui vérifient l'équation

$$f(z, 1) = az^2 + 2bz + c = 0.$$

Marquons dans le plan  $O\xi\eta$  les deux points  $z_1, z_2$ ; la demi-circonférence  $\Gamma$  représentative de  $f(x, y)$  est orthogonale au plan  $O\xi\eta$  en  $z_1, z_2$ . S'il existe une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers contenant  $f$ ,

$$F(x, y) = Axx' - Bxy' - B'x'y + Cyy',$$

<sup>(1)</sup> Avec conservation du sens de rotation sur le cercle d'équateur de  $\sigma$  ainsi qu'on l'a vu dans les préliminaires de la deuxième Partie.

<sup>(2)</sup> Cette arête peut n'être pas apparente : telle est  $Oz$  dans  $\pi_0$ . En ce cas le groupe correspondant compte deux substitutions.

<sup>(3)</sup> Et tous les transformés de ce groupe fini par les transformations hyperboliques ou paraboliques précédentes qui conservent la demi-sphère.

<sup>(4)</sup> Si le groupe compte deux substitutions  $T$  et  $S$ ,  $S$  peut s'écrire

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = -\frac{Z - z_1}{Z - z_2} = e^{i\pi} \frac{Z - z_1}{Z - z_2}.$$

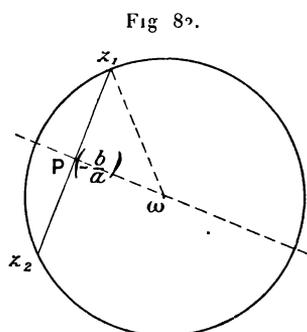
C'est une substitution elliptique de période 2 ou une substitution hyperbolique avec  $K = -1$ . L'une et l'autre dénomination sont valables sans équivoque.

le cercle du plan  $O\xi\eta$  d'équation

$$F(z, t) = Azz' - Bz - B'z' + C = 0$$

passera par  $z_1$  et  $z_2$ .

Son centre est le point  $\omega$  d'affixe  $\frac{B'}{A}$  rationnel. Le carré de son rayon est  $\frac{BB' - AC}{A^2}$ , c'est un nombre réel rationnel. Réciproquement, un cercle du plan  $O\xi\eta$ , dont le centre a pour affixe un nombre complexe rationnel et dont



le carré du rayon est un nombre réel rationnel, représente une forme d'Hermité indéfinie à coefficients entiers.

Si alors P représente le point d'affixe  $-\frac{b}{a}$ , milieu du segment  $z_1, z_2$  qui joint les racines de  $f$ , P étant d'affixe rationnel ainsi que  $\omega$ , on conclut que  $\overline{\omega P}^2$  est un nombre rationnel, et comme il en est de même de  $\overline{\omega z_1}^2$ , on conclut que  $\overline{P z_1}$  est rationnel.

Or la formule

$$z_1 = -\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

montre que

$$\overline{P z_1} = \text{Norme} \frac{z_1 - z_1}{2} = \frac{\sqrt{\text{Norme}(b^2 - ac)}}{\text{Norme } a}.$$

De là se tire que *Norme*  $(b^2 - ac)$  doit être un carré parfait. Cette conclusion vaut même si  $\omega$  se confond avec P. Si  $\omega$  est distinct de P, la droite P $\omega$  joignant deux points d'affixes rationnels  $a$ , par rapport aux axes  $O\xi, O\eta$ , un coefficient angulaire rationnel. Il en est de même de la droite  $z_1, z_2$  qui lui est normale. Or  $P z_1$  fait avec  $O\xi$  un angle égal à  $\arg. \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ . Il y a donc un nombre complexe rationnel ayant même argument que  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  (\*). Cette

(\*) Ou que  $\frac{z_1 - z_2}{2}$ .

dernière conclusion ne tient plus si P se confond avec  $\omega$ . Mais il est facile de voir que le résultat est général. Pour cela nous allons établir la réciproque de la proposition précédente.

Montrons que si Norme  $(b^2 - ac)$  est carré parfait (d'un entier réel nécessairement), il existe une infinité de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers contenant la forme de Dirichlet

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Par hypothèse,  $(b^2 - ac)$  est un entier complexe. A quelle condition la norme d'un tel entier est-elle carré parfait ?

Posant  $\lambda + \mu i = b^2 - ac$ , il faut que l'on puisse trouver un entier réel  $\nu$  tel que

$$\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2.$$

C'est là une équation diophantique dont la solution générale est bien connue. On prendra deux entiers réels arbitraires  $\alpha, \beta$  premiers entre eux et la solution générale est donnée par

$$\begin{cases} \lambda = A(\alpha^2 - \beta^2), \\ \mu = 2A\alpha\beta, \\ \nu = A(\alpha^2 + \beta^2), \end{cases}$$

A étant un entier réel quelconque, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de parités différentes, et la moitié d'un entier réel quelconque si  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous deux impairs.

Dans ces conditions

$$\lambda + \mu i = A[\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta i] = A(\alpha + \beta i)^2.$$

On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathfrak{N}(b^2 - ac)$  soit carré parfait est que le nombre  $b^2 - ac$  soit de la forme  $At'$ , A étant un entier réel ou une fraction réelle de dénominateur 2 et t un entier complexe, A et t pouvant d'ailleurs être quelconques de leur espèce (1). En remplaçant au besoin t par  $it'$ , t' étant aussi un entier, on peut supposer toujours  $A > 0$ .

Si en particulier  $t = 1$ , c'est-à-dire si  $b^2 - ac$  est un entier réel, la condition

(1) Bien entendu on ne prendra pour A une fraction réelle de dénominateur 2 ( $A = \frac{A'}{2}$ ) que si  $t = \alpha + \beta i$  est divisible par  $1 + i$ , ce qui arrive si  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous les deux impairs. (Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de parité différente, on prendra pour A un entier réel). Il est clair dans ce cas que

$$t = (1 + i)t'$$

définit t' entier et qu'alors  $At^2$  n'est autre que  $A'i t'^2$ . On peut donc dire que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathfrak{N}(b^2 - ac)$  soit carré parfait est que  $b^2 - ac$  soit de la forme  $At^2$  ou  $Ait^2$  (A entier réel, t entier complexe, quelconques).

est satisfaite. Si  $t = 1 + i$ ,  $t^2 = 2i$ , on prendra  $A = \frac{A'}{2}$ ,  $A'$  étant un entier réel quelconque, et l'on voit que si  $b^2 - ac = A'i$ , c'est-à-dire si  $b^2 - ac$  est un entier purement imaginaire d'ailleurs quelconque, la condition est encore satisfaite.

Dans tous les cas il suit de  $b^2 - ac = At^2$ ,  $A$  étant un nombre rationnel réel positif et  $t$  un entier complexe, que

$$\sqrt{b^2 - ac} = t\sqrt{A}.$$

Par suite

$$\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{t}{a}\sqrt{A};$$

$\sqrt{A}$  est un nombre réel,  $\frac{t}{a}$  un nombre complexe rationnel; on voit donc que la condition

$$\text{Norme}(b^2 - ac) = \text{carré parfait}$$

entraîne que  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  a même argument qu'un certain nombre rationnel. Ainsi se trouve établie dans tous les cas cette dernière conclusion. Ces deux conditions s'entraînent d'ailleurs l'une l'autre, car si  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  a même argument qu'un certain nombre rationnel  $R$ , on peut écrire

$$\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = mR \quad (m \text{ étant un nombre réel}).$$

Donc

$$b^2 - ac = a^2 m^2 R^2$$

et

$$\text{Norme}(b^2 - ac) = \text{Norme}(m^2) \times \text{Norme}(a^2 R^2).$$

$(b^2 - ac)$  et  $(a^2 R^2)$  étant des nombres rationnels, il en sera de même de  $m^2$ . Donc  $\text{Norme}(m^2)$  sera aussi carré parfait d'un nombre rationnel ainsi que  $\text{Norme}(a^2 R^2)$ . Donc  $\text{Norme}(b^2 - ac)$  sera aussi carré parfait d'un nombre rationnel qui ne peut différer d'un entier.

Les deux conditions

$$\text{Norme}(b^2 - ac) = \text{carré parfait}$$

et

$$\text{Arg.} \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \text{argument d'un nombre rationnel complexe}$$

sont donc complètement équivalentes.

Si elles sont remplies, il s'ensuit que la droite  $z_1, z_2$  joignant les racines de la forme  $f$  a par rapport aux axes  $O\xi, O\eta$  un coefficient angulaire rationnel; il en est de même de la perpendiculaire élevée à cette droite au milieu  $P$  des deux points  $z_1, z_2$  qui est un point d'affixe rationnel complexe  $-\frac{b}{a}$ . Il existe donc sur

cette dernière droite une infinité de points d'affixe rationnel complexe; il suffira pour en avoir un de prendre un point de cette droite dont l'abscisse  $\xi$  surpasse l'abscisse de P d'un nombre rationnel réel quelconque. Soit  $\omega$  un tel point.  $\overline{P\omega}$  sera un nombre rationnel réel. De même

$$\overline{Pz_1} = \frac{\sqrt{\text{Norme}(b^2 - ac)}}{\text{Norme } a},$$

sera rationnel.

Donc  $\overline{\omega z_1}$  sera rationnel. La forme d'Hermite indéfinie représentée dans le plan  $O\xi\eta$  par le cercle de centre  $\omega$  passant par  $z_1, z_2$  sera donc une forme à coefficients entiers.

Ainsi se trouve démontrée cette proposition réciproque de la première proposition établie : *Si Norme  $(b^2 - ac)$  est carré parfait, ou ce qui revient au même si  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  a même argument qu'un nombre complexe rationnel, la forme de Dirichlet*

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

*à coefficients entiers complexes est contenue dans une infinité dénombrable de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers.*

De la résolution de ce premier problème on conclut que les seules formes de Dirichlet à coefficients entiers contenus dans une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers dont  $\sigma$  est la demi-sphère représentative sont représentées par les demi-circonférences d'intersection de  $\sigma$  avec toutes les demi-sphères représentatives d'autres formes d'Hermite à coefficients entiers qui coupent  $\sigma$ .

On peut résumer les résultats précédents par la classification suivante :

Soit une forme de Dirichet

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

aux coefficients entiers  $a, b, c$ .

Trois cas sont possibles :

1° Ou bien l'entier réel Norme  $(b^2 - ac)$  n'est pas carré parfait, c'est le cas le plus général. Alors  $f$  n'est contenue dans aucune forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers.

2° Ou bien Norme  $(b^2 - ac)$  est carré parfait. Alors la forme  $f$  (dont les racines en ce cas ne sont pas en général rationnelles) est contenue dans une infinité dénombrable de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers.

3° Ou bien  $b^2 - ac$  est lui-même carré parfait d'un nombre rationnel complexe.

(C'est le cas où le nombre réel rationnel  $A$ , qu'on a trouvé en mettant  $b^2 - ac$  sous la forme  $At^2$  lorsque la deuxième condition est remplie, est lui-même carré parfait d'un nombre rationnel.)

Alors les deux racines  $z_1, z_2$  de la forme  $f$  sont elles-mêmes rationnelles. On exclut généralement ces formes  $f$  à racines rationnelles dans l'étude des formes de Dirichlet, car elles sont le produit de deux formes linéaires à coefficients rationnels.

Revenons maintenant à la forme d'Hermité indéfinie

$$F(x, y) \equiv Axx' - Bxy' - B'x'y + Cyy'$$

aux coefficients entiers  $A, B, B', C$ . Soit  $\sigma$  sa demi-sphère représentative.

Soit  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  une forme de Dirichlet aux coefficients entiers  $a, b, c$  contenue dans  $F$ . Sa demi-circonférence représentative  $\Gamma$  est sur  $\sigma$ .  $\Gamma$  est l'intersection de  $\sigma$  avec une infinité dénombrable de demi-sphères  $\sigma'$  représentant comme  $\sigma$  des formes d'Hermité indéfinies à coefficients entiers.

Imaginons que nous fassions la réduction continue de la forme  $f$ . Nous suivons la demi-circonférence  $\Gamma$  dans un sens bien déterminé et quand le point  $\zeta$  qui décrit  $\Gamma$  est dans un certain pentaèdre  $\pi$  de la division connue de l'espace, nous faisons, sur  $f$  pour la réduire, la substitution  $S$  du groupe de Picard telle que la  $T$  correspondante transforme  $\zeta$  en  $Z$  situé dans  $\pi_0$  ( $Z = \zeta T; \pi_0 = \pi T$ ). Lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$ , nous obtenons ainsi dans  $\pi_0$  un certain nombre d'arcs réduits congruents à des arcs de  $\Gamma$ , et comme le nombre de ces arcs est essentiellement fini puisque  $f$  a ses coefficients entiers, chacun de ces arcs s'obtiendra périodiquement une infinité de fois puisque  $\Gamma$  traverse (sauf le cas où les racines de  $f$  sont rationnelles) une infinité de pentaèdres  $\pi$ . Désignons par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  ces arcs réduits, dans l'ordre où ils se présentent.  $\zeta$  décrivant un arc de  $\Gamma$  équivalent à  $\Gamma_1$ , la substitution  $S_1$  telle que la  $T_1$  correspondante amène cet arc sur  $\Gamma_1$  dans  $\pi_0$ , va transformer la forme  $F(x, y)$  d'Hermité en une forme réduite puisque la  $T_1$  transformera  $\sigma$  en une demi-sphère contenant  $\Gamma_1$ , c'est-à-dire coupant  $\pi_0$ .  $\zeta$  décrivant  $\Gamma$ , après l'arc précédent équivalent à  $\Gamma_1$ , va se présenter un arc équivalent à  $\Gamma_2$ .

La substitution réductrice  $S_2$  déterminera une  $T_2$  qui amène l'arc considéré sur  $\Gamma_2$  et transforme  $\sigma$  en une demi-sphère contenant  $\Gamma_2$ ,  $S_2$  réduit  $F$ . En continuant ainsi,  $\zeta$  décrivant  $\Gamma$ , on va obtenir successivement des formes réduites équivalentes à  $F(x, y)$  dont les demi-sphères représentatives passeront respectivement par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ . Après cela, à cause de la périodicité,  $\zeta$  va décrire sur  $\Gamma$  un arc équivalent à  $\Gamma_1$  et la substitution qui transformera cet arc en  $\Gamma_1$  transformera  $\sigma$  en une demi-sphère contenant  $\Gamma_1$ . Nous avons déjà obtenu une première demi-sphère équivalente à  $\sigma$  et contenant  $\Gamma_1$ , rien ne nous assure que la demi-sphère passant par  $\Gamma_1$  que nous venons d'obtenir en dernier lieu est confondue avec la première.  $\zeta$  décrivant  $\Gamma$  on voit donc qu'il se présente une première série de formes réduites équivalentes à  $F(x, y)$ , dont les demi-sphères représentatives passent respectivement par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ; puis une deuxième série de formes jouissant des mêmes propriétés, leurs demi-sphères représentatives devant, en général,

être supposées distinctes des premières; puis une troisième série, etc. Mais on sait d'autre part que le nombre des formes réduites équivalentes à  $F(x, y)$  est fini puisque  $F$  a ses coefficients entiers. *On doit donc forcément arriver à une  $(m+1)^{i\text{ème}}$  série de formes dont la première a une demi-sphère représentative passant par  $\Gamma_1$ , et coïncidant avec une des demi-sphères équivalentes à  $\sigma$  et passant par  $\Gamma_1$ , déjà obtenues <sup>(1)</sup>.*

Analysons ce processus. On sait que  $f(x, y)$  est conservé par un groupe cyclique infini de substitutions comprenant toutes les puissances entières positives et négatives d'une certaine substitution  $S$  hyperbolique ou loxodromique.  $\zeta$  décrivant  $\Gamma$ , décrit d'abord une première série d'arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , équivalents respectivement à  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , puis une deuxième série d'arcs analogues qui ne sont autres que  $\gamma_1 T, \gamma_2 T, \dots, \gamma_n T$  ( $T$  étant la transformation du demi-espace que définit  $S$ ), puis une troisième série d'arcs  $\gamma_1 T^2, \gamma_2 T^2, \dots, \gamma_n T^2, \dots$ ; enfin une  $m^{\text{ième}}$  série  $\gamma_1 T^m, \gamma_2 T^m, \dots, \gamma_n T^m \dots$ .

Désignons par  $S_1, S_2, \dots, S_n$  les substitutions dont les  $T_1, T_2, \dots, T_n$  correspondantes amènent  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  sur  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ .

La première série de réduites équivalentes à  $F$  qu'on va rencontrer sera

$$FS_1, FS_2, \dots, FS_n.$$

Pour amener sur  $\Gamma_1$  l'arc  $\gamma_1 T$  que l'on rencontre sur  $\Gamma$  après  $\gamma_n$ , il faut faire la transformation  $T^{-1}$  qui l'amène sur  $\gamma_1$ , puis  $T_1$ ; c'est-à-dire en définitive la transformation  $T^{-1}T_1$ .

La deuxième série de réduites équivalentes à  $F$  qu'on va rencontrer sera

$$FS^{-1}S_1, FS^{-1}S_2, \dots, FS^{-1}S_n.$$

La troisième série sera de même

$$FS^{-2}S_1, FS^{-2}S_2, \dots, FS^{-2}S_n.$$

La  $m^{\text{ième}}$  série sera

$$FS^{-(m-1)}S_1, \dots, FS^{-(m-1)}S_n.$$

Par hypothèse,  $FS_1, FS^{-1}S_1, \dots, FS^{-(m-1)}S_1$  sont distinctes, comme leurs demi-sphères représentatives.

La  $(m+1)^{\text{ième}}$  série sera

$$FS^{-m}S_1, FS^{-m}S_2, \dots, FS^{-m}S_n,$$

et par hypothèse la demi-sphère représentative de  $FS^{-m}S_1$  est identique à la demi-sphère représentative d'une des formes  $FS_1, FS^{-1}S_1, FS^{-(m-1)}S_1$ ; c'est-à-dire que  $FS^{-m}S_1$  est identique à une des formes précédentes,

$$FS^{-m}S_1 = FS^{-m'}S_1 \quad (m' < m).$$

(1) Avec coïncidence des sens de rotation sur les équateurs des deux demi-sphères.

Mais alors

$$FS^{-m} = FS^{-m'},$$

$$FS^{-m+m'} = F;$$

ceci s'écrit

$$FS^{-(m-m')} = F.$$

De là on conclut  $m' = 0$ , car si  $m' \neq 0$ , on conclurait de

$$FS_1 = FS^{-(m-m')} S_1$$

que  $m$  n'est pas le premier indice de la suite indéfinie  $1, 2, \dots, m, \dots$ , pour lequel la suite

$$FS_1, FS^{-1}S_1, FS^{-2}S_1, \dots, FS^{-m}S_1, \dots$$

présente un terme identique à un terme déjà rencontré.

On a donc

$$FS^{-m}S_1 = FS_1.$$

Donc

$$FS^{-m} = F$$

et par suite

$$FS^{-m}S_i = FS_i,$$

c'est-à-dire que toutes les formes de la  $(m+1)^{\text{ième}}$  série coïncident respectivement avec celles de la première. A partir de la  $(m+1)^{\text{ième}}$  série, on retrouve les premières séries de formes, périodiquement, la  $(m+1)^{\text{ième}}$  étant identique à la première, d'une façon générale la série d'ordre  $\lambda m + p$  ( $p \leq m$ ) étant identique à la  $p^{\text{ième}}$ .

Mais il y a plus : l'égalité

$$FS^{-m} = F = FS^m$$

prouve que la substitution  $S^{-m}$ , qui conserve  $f$ , conserve aussi  $F$ ; c'est d'ailleurs une substitution hyperbolique puisque ses points doubles sont distincts (racines de  $f$ ) et puisqu'elle conserve  $F$ , et par suite sa circonférence représentative avec son sens; donc elle appartient au groupe fuchsien infini des substitutions modulaires qui conservent  $F$ .

D'où la conclusion fondamentale suivante : *Si la forme de Dirichlet  $f$  à coefficients entiers est contenue dans la forme d'Hermite  $F$  à coefficients entiers, il existe une substitution hyperbolique du groupe fuchsien des substitutions modulaires conservatives de  $F$ , qui conserve aussi  $f$ .* Cette substitution est une puissance entière de la substitution fondamentale  $S$  du groupe cyclique des substitutions modulaires conservatives de  $f$ . Par suite, cette substitution  $S^{(1)}$  n'est pas une substitution loxodromique quelconque, puisqu'une

---

(1) Qui, ainsi que nous l'avons rappelé précédemment, peut être *a priori* hyperbolique ou loxodromique.

certaine puissance entière  $m^{\text{ème}}$  (1) de  $S$  est hyperbolique; si  $K = re^{i\theta}$  caractérise la substitution  $S\left(\frac{z-z_1}{z-z_2} = K \frac{Z-z_1}{Z-z_2}\right)$ , on aura  $m\theta = 2p\pi$ ,  $p$  étant entier.

*Donc  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$ .*

Il résulte immédiatement des considérations précédentes qu'il y a tout un groupe cyclique infini (engendré par une substitution  $S$  modulaire hyperbolique) conservant à la fois la forme d'Hermite indéfinie  $F$  et la forme de Dirichlet  $f$  contenue dans  $F$ ; ou encore,  $f$  étant une forme de Dirichlet à coefficients entiers contenus dans la forme d'Hermite indéfinie  $F$  à coefficients entiers, le groupe fuchsien des substitutions modulaires complexes qui conservent  $F$  contient un sous-groupe cyclique (formé des puissances entières positive et négatives d'une substitution  $S$  hyperbolique) conservant  $f$ .

Si en particulier on envisage la forme

$$F(x, y) = xy_0 - yx_0$$

qui est représentée par le demi-plan  $O\xi\tau$  ( $\tau > 0$ ), elle est conservée par les substitutions modulaires réelles, le groupe fuchsien qui conserve  $F$  est le groupe modulaire réel. Une forme de Dirichlet contenue dans  $F$  est une forme quadratique binaire indéfinie quelconque à coefficients réels entiers. Le résultat précédemment trouvé donne donc en particulier le résultat suivant bien connu de la théorie des formes quadratiques binaires à coefficients réels : *Toute forme quadratique binaire indéfinie à coefficients entiers est conservée par un groupe cyclique (sous-groupe du groupe modulaire réel) formé des puissances entières positives ou négatives d'une substitution  $S$  modulaire hyperbolique.*

Revenant au cas général, il est clair que si l'on envisage deux formes d'Hermite  $F$  et  $F_1$  indéfinies à coefficients entiers dont les demi-sphères représentatives  $\sigma$  et  $\sigma_1$  sont sécantes, la demi-circonférence  $\Gamma$  intersection de  $\sigma$  et  $\sigma_1$  représente une forme de Dirichlet à coefficients entiers.

Si

$$\begin{cases} F = A xx' - B xy' - B' x'y + C yy', \\ F_1 = A_1 xx' - B_1 xy' - B'_1 x'y + C_1 yy', \end{cases}$$

$\sigma$  et  $\sigma_1$  ont pour équateur dans le plan  $O\xi\eta$  les cercles d'équation

$$\begin{aligned} (\sigma) \quad & A z z' - B z - B' z' + C = 0; \\ (\sigma_1) \quad & A_1 z z' - B_1 z - B'_1 z' + C_1 = 0. \end{aligned}$$

Les affixes des points d'intersection de ces deux cercles sont racines d'une équation

---

(1) Dans une Note placée à la fin du Mémoire, nous déterminerons quelle peut être la valeur de l'entier  $m$ . Il nous suffit ici de savoir que cet entier existe.

tion obtenue en éliminant  $z'$  entre ces deux équations, c'est

$$(AB_1 - BA_1)z' + (A_1C - AC_1 + BB'_1 - B'B_1)z + B'C_1 - B'_1C = 0.$$

La forme de Dirichlet dont  $\Gamma$  est la demi-circonférence représentative est donc (à un facteur près évidemment)

$$f(x, y) = (AB_1 - BA_1)x^2 + (A_1C - AC_1 + BB'_1 - B'B_1)xy + (B'C_1 - B'_1C)y^2.$$

Elle a bien ses coefficients entiers.

Il résulte immédiatement de ce que nous avons dit précédemment que la substitution  $S$  génératrice du groupe cyclique des substitutions modulaires complexes conservant la forme  $f(x, y)$  n'est pas quelconque, mais a pour puissance  $m^{\text{ième}}$  ( $m$  étant un entier convenable) une substitution hyperbolique. Autrement dit, *le groupe conservatif de  $f$  contient un sous-groupe cyclique engendré par une substitution hyperbolique*. Il est clair que toute substitution de ce sous-groupe étant hyperbolique et conservant  $f$ , la  $T$  correspondante conservera  $\Gamma$  et conservera aussi toute demi-sphère passant par  $\Gamma$ . C'est-à-dire que toute substitution du sous-groupe en question conservera non seulement  $f$ , mais encore  $F$  et  $F_1$ , et d'une façon générale toute forme d'Hermite indéfinie contenant la forme  $f$ .

Ceci peut s'énoncer : *Les groupes fuchsien formés des substitutions modulaires complexes qui conservent respectivement deux formes d'Hermite indéfinies  $F$  et  $F_1$ , à coefficients entiers, dont les demi-sphères représentatives se coupent, ont toujours en commun un sous-groupe cyclique engendré par les puissances entières d'une substitution modulaire hyperbolique; ce sous-groupe conserve la forme de Dirichlet  $f$  contenue dans les deux formes  $F$  et  $F_1$ . Il conserve toute forme d'Hermite indéfinie contenant  $f$ .* (L'expression générale d'une telle forme est  $\lambda F + \lambda_1 F_1$ ,  $\lambda$  et  $\lambda_1$  étant deux constantes réelles quelconques.)

En résumé : Si une forme de Dirichlet  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  aux coefficients entiers  $a, b, c$  vérifie la condition

$$\text{Norme } (b^2 - ac) = \text{carré parfait } (1),$$

1° elle est contenue dans une infinité dénombrable de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers; si  $F$  et  $F_1$  sont deux de ces formes distinctes,

$$F = Axx' - Bxy' - B'x'y + C,$$

$$F_1 = A_1xx' - B_1xy' - B'_1x'y + C_1,$$

(1) Ou la condition équivalente  $\frac{z_1 - z_2}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  à même argument qu'un nombre rationnel complexe.

(A, B, B', C) étant premiers entre eux dans leur ensemble, ainsi que (A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, B'<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>); l'expression générale de ces formes d'Hermite sera  $\lambda F + \lambda_1 F_1$ ,  $\lambda$  et  $\lambda_1$  étant deux entiers réels (positifs ou négatifs) premiers entre eux; 2° le groupe G des substitutions modulaires complexes qui conservent la forme  $f$ , contient une substitution  $\Sigma$  hyperbolique, et par suite tout un sous-groupe cyclique  $\mathcal{G}$  de substitutions hyperboliques formé des puissances de  $\Sigma$ . Ce sous-groupe  $\mathcal{G}$  conserve toute forme d'Hermite indéfinie contenant la forme  $f$  (une telle forme s'écrit  $\lambda F + \lambda_1 F_1$ , où  $\lambda$  et  $\lambda_1$  ont des valeurs quelconques). Il est contenu dans le groupe fuchsien formé des substitutions modulaires complexes qui conservent toute forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers contenant  $f$ .

Ceci s'énonce encore de la façon suivante : La substitution S génératrice du groupe G conservatif de la forme  $f$  jouit de la propriété qu'une de ses puissances entières  $S^m$  (1) est une substitution hyperbolique  $\Sigma$ . On a vu qu'en général S est hyperbolique ou loxodromique. Dans le cas présent, si S est loxodromique, elle n'est pas quelconque : K étant le multiplicateur de S  $\left(\frac{z - z_1}{z - z_2} = K \frac{Z - z_1}{Z - z_2}\right)$ , (K =  $re^{i\theta}$ ), l'argument  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$

$$(m\theta = 2p\pi; p \text{ entier}).$$

Ces propriétés vont trouver leur application dans l'étude particulière des formes biquadratiques à coefficients entiers du type envisagé dans ce Mémoire. Nous rejetons à la fin une Note qui éclaire complètement l'étude des substitutions loxodromiques du groupe de Picard, à l'aide des résultats du Chapitre actuel.

---

(1) Et par suite toutes les puissances d'exposant  $\lambda m$ ,  $\lambda$  étant un entier réel quelconque positif ou négatif.

## CHAPITRE IV.

### ÉTUDE PARTICULIÈRE DES FORMES BIQUADRATIQUES A COEFFICIENTS ENTIERS.

Le type des formes biquadratiques que nous étudions est

$$(1) \quad f(x, y) = ax^2x' + bx^2x'y' + b'xyx' + cx'y'^2 + c'x'^2y^2 + dxyx'y' + exyy' + e'x'y'y'^2 + f y^2 y'^2;$$

$a, d, f$  sont réels;  $b$  et  $b'$ ,  $c$  et  $c'$ ,  $e$  et  $e'$  sont complexes conjugués.

$f$  prend des valeurs réelles quelles que soient les valeurs complexes de  $x, y$  si  $x'$  et  $y'$  reçoivent les valeurs conjuguées. Les coefficients et les inconnues étant supposés entiers,  $f$  prend des valeurs entières réelles. Et tout d'abord le problème se pose de savoir reconnaître si la forme  $f$  peut s'écrire sous forme d'un produit de deux formes d'Hermite :

$$f(x, y) = (\alpha_1 xx' + \beta_1 x'y' + \beta'_1 x'y + \gamma_1 yy') (\alpha_2 xx' + \beta_2 xy' + \beta'_2 x'y + \gamma_2 yy').$$

A cet effet, considérons la quartique bicirculaire du plan des  $z = \xi + i\eta$  dont l'équation en coordonnées isotropes est

$$(2) \quad f(z, z') = \varphi(z, z') = az^2z'^2 + bz^2z' + b'zz'^2 + cz^2 + dzz' + c'z'^2 + ez + e'z' + f = 0.$$

Si  $z$  et son conjugué  $z'$  satisfont à cette relation, le point  $z$  est sur la courbe. Si l'on choisit  $z$  fixé non sur la courbe, cette équation en  $z'$  donne deux valeurs pour  $z' = \xi - i\eta$ ; alors chacun des deux points  $(\xi, \eta)$  ainsi obtenus est dit *image du point  $z$  primitif par rapport à la courbe proposée*.

Pour que la décomposition en question puisse avoir lieu, il faut et il suffit que la quartique bicirculaire (2) se décompose en deux cercles dont les équations en  $(\xi, \eta)$  aient leurs coefficients réels <sup>(1)</sup>.

Il faudra donc s'assurer : 1° que la quartique (2) admet deux points doubles à distance finie, alors elle se décompose en deux cercles et son équation se décompose; 2° que les deux facteurs de décomposition ne sont pas *imaginaires*

<sup>(1)</sup> On sait en effet que, si  $\psi(x, y)$  représente une forme d'Hermite, l'équation  $\psi(z, z') = 0$ , en posant  $z = \xi + i\eta$ , devient l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes  $\xi, \eta$ , et tous les coefficients de cette équation sont réels.

*conjugués l'un de l'autre*, mais bien que chacun d'eux a tous ses coefficients réels [tant que  $(\xi, \eta)$  sont pris pour coordonnées].

Reprenons l'équation de la quartique (2)

$$(2) \quad \varphi(z, z') = az^3 z'^2 + bz^2 z'^3 + b' z^2 z'^2 + c z^3 + d z z' + c' z'^2 + e z + e' z' + f = 0.$$

Si l'on pose  $z = \xi + i\eta$ ,  $z' = \xi - i\eta$ , on a son équation cartésienne

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\xi + i\eta, \xi - i\eta) = 0.$$

Ses points doubles, à distance finie, qui doivent être au nombre de deux, sont donnés par

$$F'_\xi = \varphi' + \varphi'_z = 0,$$

$$F'_\eta = i(\varphi'_z - \varphi'_z) = 0,$$

qui équivalent à

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi'_z = 0, \\ \varphi'_z = 0. \end{cases}$$

Si donc  $(\xi, \eta)$  est un point double réel de (2), les équations (2) et (3) sont satisfaites par  $z = \xi + i\eta$  et son conjugué  $z' = \xi - i\eta$ . Si  $(\xi, \eta)$  est un point double imaginaire, les équations (2) et (3) sont encore satisfaites par  $z = \xi + i\eta$ ,  $z' = \xi - i\eta$ , mais alors ces deux valeurs  $z$  et  $z'$  ne sont plus conjuguées, le point d'affixe  $z$  et celui dont l'affixe est conjugué de  $z'$  sont images l'un de l'autre par rapport à la quartique. Ainsi les équations (2) et (3) donneront des valeurs de  $z$  qui représenteront dans le plan  $O\xi\eta$  : 1° les points doubles réels de la quartique (2); 2° les couples de points réels associés, images l'un de l'autre par rapport à (2), tels que les deux points imaginaires communs aux deux cercles de rayon nul, ayant pour centres ces deux points associés, soient des points doubles imaginaires conjugués de (2).

Écrivons alors

$$\varphi(z, z') = p z'^2 + q z' + r = 0,$$

$p, q, r$  étant des trinomes du deuxième degré en  $z$ , et soit

$$\varphi'_z = \frac{dp}{dz} z'^2 + \frac{dq}{dz} z' + \frac{dr}{dz} = 0,$$

$$\varphi'_z = 2 p z' + q = 0.$$

Soit  $(z, z')$  un couple de solutions de ces trois équations. Il est clair, la première équation et la troisième étant vérifiées, que  $z$  vérifie

$$q^2 - 4pr = 0.$$

D'autre part,  $z$  vérifie aussi

$$\frac{dp}{dz} \frac{q^2}{4p} - \frac{dq}{dz} \frac{q}{2p} + \frac{dr}{dz} = 0$$

et ceci signifie que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{q^2}{4p} - r \right) = 0.$$

Donc  $z$  est racine double de  $q^2 - 4pr = 0$ .

Ceci signifie que  $q^2 - 4pr = 0$  doit avoir *deux racines doubles*. C'est donc que  $q^2 - 4pr$  est carré parfait d'un trinôme du deuxième degré en  $z$ .

Inversement, si  $q^2 - 4pr$  est carré parfait, on voit que l'équation en  $z, z'$

$$(2) \quad \varphi(z, z') = 0$$

se décompose en un produit de deux facteurs linéaires en  $z'$ . Pour la même raison, si l'on écrit

$$\varphi(z, z') = p'z^2 + q'z + r' = 0,$$

on voit que  $p', q', r'$  sont trois trinômes respectivement conjugués de  $p, q, r$  si  $z'$  est conjugué de  $z$ . Donc  $q'^2 - 4p'r'$  sera aussi carré parfait d'un trinôme du deuxième degré en  $z'$  qui sera conjugué du trinôme trouvé précédemment quand  $z'$  sera conjugué de  $z$ . Donc les deux facteurs de décomposition seront aussi linéaires en  $z$ . D'ailleurs, si  $z$  est donné, (2) définit deux valeurs de  $z'$  dont chacune est rationnelle en  $z$ , mais aussi si  $z'$  est donné (2) définit deux valeurs de  $z$  dont chacune est rationnelle en  $z'$ . Donc (2) définit deux valeurs de  $z'$  qui sont deux fonctions homographiques de  $z$ . C'est encore dire que  $\varphi(z, z')$  se décompose en deux facteurs bilinéaires de la forme  $\alpha zz' + \beta z + \gamma z' + \delta$ , et c'est ce qu'il fallait montrer.

La quartique (2) aura donc deux points doubles et elle se décomposera en deux cercles si et seulement si le polynôme

$$Q = q^2 - 4pr$$

qui se tire de l'équation

$$\varphi(z, z') = p z'^2 + q z' + r$$

est carré parfait.

$$Q = P^2$$

et dans ce cas l'équation

$$Q = 0 \quad \text{ou} \quad P = 0$$

fournit deux valeurs de  $z$  qui représentent : 1° ou bien les deux points doubles de (2) si ces points doubles sont réels; 2° ou bien deux points réels associés, centres de deux cercles de rayon nul, se coupant aux deux points doubles imaginaires conjugués de (2).

Tout ceci est conséquence immédiate de la théorie connue des images d'un point par rapport à une courbe.

Dans le cas présent, l'équation  $P = 0$  aura pour racines  $z_1$  et  $z_2$  qui seront :

1° *Les affixes des points communs aux deux cercles* en lesquels se décompose la quartique (2) si ces points communs sont réels;

2° *Les affixes des points limites du faisceau des deux cercles précédents si les deux cercles n'ont pas de point commun réel.*

Il est facile de distinguer ces deux cas. Si une racine  $z_1$  de  $P = 0$  et la valeur conjuguée  $z'_1$  vérifient (2), on est dans le premier cas,  $z_1$  et  $z_2$  sont les affixes de deux points réels de la courbe (2). Si une racine  $z_1$  de  $P = 0$  et la valeur complexe conjuguée  $z'_1$  ne satisfont pas à (2), le point  $z_1$  n'est pas sur la courbe (2), et l'on voit de suite que  $z_1$  et  $z_2$  sont les affixes de *deux points images* par rapport à (2).

Tout ceci n'a pas supposé les coefficients de la forme  $f(x, y)$  entiers. Supposons-les entiers. Ils devront être tels que le polynôme en  $z$

$$Q = q^2 - 4pr,$$

à coefficients entiers aussi, soit carré parfait.

Pour que l'on ait ainsi  $Q = P^2$ , il faut et il suffit que le p. g. c. d. entre  $Q$  et  $\frac{dQ}{dz}$  soit du deuxième degré (condition équivalente à celle-ci :  $Q$  admet deux racines doubles distinctes ou non) et ce p. g. c. d. sera précisément  $P$ . Or si  $Q$  est à coefficients entiers,  $\frac{dQ}{dz}$  l'est aussi, et leur p. g. c. d.  $P$  s'obtenant par des calculs rationnels, le polynôme  $P$  aura ses coefficients rationnels.

*L'équation  $P = 0$  qui détermine les valeurs  $z_1, z_2$ , affixes des points communs aux deux cercles de décomposition de (2) ou des points limites de ces deux cercles, est donc une équation à coefficients entiers. C'est là un résultat fondamental pour la suite.*

On sait donc reconnaître de façon précise les cas où la quartique  $\varphi(z, z') = 0$  se décompose. Cette décomposition peut se faire de deux façons. L'équation

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\xi + i\eta, \xi - i\eta) = 0$$

peut se décomposer en deux termes réels du deuxième degré ou en deux termes du deuxième degré imaginaires conjugués, c'est-à-dire que  $F$  est le produit de deux polynômes en  $(\xi, \eta)$ ,  $F_1(\xi, \eta)$ ,  $F_2(\xi, \eta)$  qui égaux à zéro représentent deux cercles et qui peuvent être tous les deux à coefficients réels, ou bien l'un à coefficients complexes et l'autre à coefficients complexes conjugués. Dans le premier cas les deux cercles de décomposition ont leur centre réel, dans le deuxième, les deux centres sont imaginaires conjugués.

Le premier cas seul correspond à une décomposition de la forme  $f(x, y)$  en un produit de deux formes quadratiques d'*Hermite*. Nous écartons donc pour l'instant le deuxième cas.

En résumé, si la forme biquadratique  $f(x, y)$  à coefficients entiers se décompose en un produit de deux formes d'*Hermite*  $f = f_1 f_2$  qui, dans le plan  $O\xi\eta$ , sont représentées par deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  réels ou imaginaires (mais toujours

à centre réel), les affixes  $z$  des points communs ou des points limites de ces deux cercles (selon que les premiers ou les deuxièmes sont réels) sont racines d'une équation  $P = 0$  à coefficients entiers.

On peut même aller plus loin.

Écrivons, cette condition étant satisfaite,

$$\frac{f(z, 1)}{a} = \frac{\varphi(z, z')}{a} = (zz' - \sigma_1 z - \alpha'_1 z' + \beta_1)(zz' - \alpha_2 z - \alpha'_2 z' + \beta_2) = 0,$$

en divisant  $f$  par son premier coefficient réel  $a$ , que (au besoin par une substitution modulaire préalable) l'on peut supposer  $\neq 0$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont réels,  $\alpha_1$  et  $\alpha'_1$  imaginaires conjugués, ainsi que  $\alpha_2$  et  $\alpha'_2$ .

Il est clair que  $-(\alpha'_1 + \alpha'_2)$ , coefficient de  $zz'^2$  dans  $\frac{\varphi(z, z')}{a}$ , est rationnel.

Or le point d'affixe  $\alpha'_1$  est le centre réel du cercle  $\gamma_1$  représenté par l'équation

$$(\gamma_1) \quad f_1(z, 1) = \varphi_1(z, z') = zz' - \alpha_1 z - \alpha'_1 z' + \beta_1 = 0;$$

le point d'affixe  $\alpha'_2$  est le centre du cercle  $\gamma_2$

$$(\gamma_2) \quad f_2(z, 1) = \varphi_2(z, z') = zz' - \alpha_2 z - \alpha'_2 z' + \beta_2 = 0.$$

Le point d'affixe  $\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2}{2}$  milieu de ces deux points est, d'après la remarque précédente, un point d'affixe rationnel.

D'autre part, les affixes  $z_1$  et  $z_2$  des points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ou des points limites du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$  sont racines d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers. Le milieu de ces deux points a pour affixe  $\frac{z_1 + z_2}{2}$  qui est un nombre rationnel.

Si donc  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  n'ont pas même rayon, la ligne de leurs centres passant par les deux points distincts  $\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2}{2}$  et  $\frac{z_1 + z_2}{2}$ , tous deux rationnels, a un coefficient angulaire rationnel par rapport aux axes  $O\xi$ ,  $O\eta$ . C'est dire que  $z_1 - z_2$  a même argument qu'un nombre rationnel complexe.

Or il est clair qu'en transformant au besoin la forme  $f$  initiale par une substitution modulaire complexe, on peut toujours supposer que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont des rayons inégaux (').

(<sup>1</sup>) En effet, si l'on pose  $\delta_1 = \beta_1 - \alpha_1 \alpha'_1$ , le rayon  $\rho_1$  de  $\gamma_1$  est donné par  $\rho_1^2 = -\delta_1$ ; si l'on pose  $\delta_2 = \beta_2 - \alpha_2 \alpha'_2$ , le rayon  $\rho_2$  de  $\gamma_2$  est donné par  $\rho_2^2 = -\delta_2$ .

En faisant, dans  $f$ , la substitution

$$\begin{aligned} x &= \lambda X + \mu Y \\ y &= \nu X + \rho Y \end{aligned} \quad (\lambda\rho - \mu\nu = 1)$$

On est donc certain que, si la forme biquadratique proposée se décompose en un produit de deux formes d'Hermite, la forme de Dirichlet à coefficients entiers associée dont les racines  $z_1$  et  $z_2$  sont les points communs aux deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (si ces points sont réels) ou les points limites du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$  dans le cas contraire, est une forme de Dirichlet particulière du type signalé jouissant de la propriété d'être conservée par une substitution modulaire hyperbolique : c'est-à-dire que, S étant la substitution modulaire génératrice du groupe cyclique de substitutions modulaires qui conserve cette forme, il existe une certaine puissance entière de S qui est hyperbolique. De là se tirent des conclusions multiples :

1° Envisageons le cas où les deux formes  $f_1$  et  $f_2$  d'Hermite en lesquelles se décompose  $f$  ( $f = f_1 f_2$ ) sont indéfinies, et ont des demi-sphères représentatives  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  d'équateurs  $\gamma_1, \gamma_2$ , sécantes suivant un demi-cercle  $\Gamma$  orthogonal au plan  $O\xi\eta$  aux points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$ . On a vu dans ce cas qu'il fallait appeler réduite équivalente à  $f$  toute forme  $F(x, y)$  équivalente à  $f$  pour laquelle le demi-cercle d'intersection des demi-sphères  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  transformées de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  avait avec le domaine fondamental  $\pi_0$  du groupe de Picard au moins un point commun. On les obtient toutes en faisant sur  $f$  toutes les substitutions qui transforment en  $\pi_0$  chacun des pentaèdres  $\pi$  de la division de Picard de l'espace que traverse le demi-cercle  $\Gamma$ . Or on sait que, si l'on décrit  $\Gamma$  dans un certain sens, les pentaèdres traversés se répartiront en périodes,

$$\begin{array}{l} \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n; \\ \text{puis} \\ \pi_1 T, \pi_2 T, \dots, \pi_n T; \\ \text{puis} \\ \pi_1 T^2, \pi_2 T^2, \dots, \pi_n T^2; \\ \dots, \dots, \dots, \dots; \\ \pi_1 T^p, \pi_2 T^p, \dots, \pi_n T^p; \\ \dots, \dots, \dots, \dots \end{array}$$

T étant la transformation du demi-espace qui correspond à la substitution modulaire S génératrice du groupe conservateur de la forme de Dirichlet représentée par  $\Gamma$ . Si  $F_1 = fS_1, F_2 = fS_2, \dots, F_n = fS_n$  sont les réduites de  $f$ , obtenues en faisant les substitutions  $S_1, S_2, \dots, S_n$  qui transforment  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$

les rayons des cercles transformés  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  seront

$$P_1^2 = \frac{\rho_1^2}{f_1(\lambda, \nu)}, \quad P_2^2 = \frac{\rho_2^2}{f_2(\lambda, \nu)},$$

et l'on peut toujours choisir les entiers  $\lambda, \nu$  tels que  $\frac{\delta_1}{f_1(\lambda, \nu)} \neq \frac{\delta_2}{f_2(\lambda, \nu)}$ , car le lieu du point  $\frac{\lambda}{\nu}$ ,

tel que  $\frac{\delta_1}{f_1(\lambda, \nu)} = \frac{\delta_2}{f_2(\lambda, \nu)}$ , est un cercle du faisceau  $\gamma_1, \gamma_2$ .

en  $\pi_0(\pi_0 = \pi_i T_i)$ , toutes les réduites dans un certain sens seront ensuite

$$\begin{array}{l}
 \text{puis} \\
 \text{puis}
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 fS^{-1}S_1, & fS^{-1}S_2, & \dots, & fS^{-1}S_n, \\
 \downarrow fS^{-2}S_1, & fS^{-2}S_2, & \dots, & fS^{-2}S_n, \\
 fS^{-3}S_1, & fS^{-3}S_2, & \dots, & fS^{-3}S_n, \\
 \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \\
 fS^{-p}S_1, & fS^{-p}S_2, & \dots, & fS^{-p}S_n, & (p = 1, 2, \dots, \infty). \\
 \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots,
 \end{array}$$

et en décrivant  $\Gamma$  dans l'autre sens, ce seront

$$\begin{array}{ccccccc}
 fS^{-1}S_n, & fS^{-1}S_{n-1}, & \dots, & fS^{-1}S_1, \\
 \downarrow fS^2S_n, & fS^2S_{n-1}, & \dots, & fS^2S_1, \\
 \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \\
 fS^pS_n, & fS^pS_{n-1}, & \dots, & fS^pS_1 & (p = 1, 2, \dots, \infty); \\
 \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

C'est ici le lieu d'appliquer une remarque sur les formes de Dirichlet du type particulier auquel appartient la forme représentée par  $\Gamma$  (formes où  $z_1 = z_2$  à l'argument d'un certain nombre rationnel). Pour une certaine valeur entière de  $p$ ,  $S^p$  est hyperbolique et par conséquent elle conserve non seulement la forme de Dirichlet représentée par  $\Gamma$ , mais toute forme d'Hermite indéfinie dont la demi-sphère représentative passe par  $\Gamma$ . Ici donc, pour une certaine valeur de  $p$  (1),  $S^p$  hyperbolique ( $S^p = \Sigma$ ) conserve  $f_1$  et  $f_2$ , donc elle conserve  $f$  [ $fS^p = f = f\Sigma$ ]. Et alors il est clair que la suite des réduites de  $f$  va présenter une périodicité; il y aura un nombre fini de réduites qui se reproduiront indéfiniment et périodiquement.

Ainsi se trouve établi sans aucune restriction ce fait que toute forme biquadratique  $f(x, y)$  à coefficients entiers, produit de deux formes d'Hermite indéfinies dont les demi-sphères représentatives se coupent, n'a qu'un nombre fini de réduites, résultat que nous n'avions établi que dans le cas où la forme  $f$  ne pouvait pas représenter zéro.

Il faut remarquer aussi que nous venons de démontrer l'existence d'une substitution modulaire hyperbolique  $\Sigma$  qui conserve une telle forme  $f$ , et par

---

(1) On sait d'ailleurs, et nous le démontrerons à la fin de ce Mémoire, que  $p$  est égal à 1 ou 3; la période des réduites de  $f$  a donc le même nombre de termes que la période des réduites de la forme de Dirichlet représentée par 1 ou un nombre triple selon que  $p$  est 1, ou bien 3 ( $p$  pourrait être égal à 2 dans le cas où  $S$  a un multiplicateur  $k$  réel négatif, et une telle substitution est quelquefois classée loxodromique  $k = |k|e^{i\pi}$ , on voit facilement qu'une telle  $S$  changerait  $f_1$  et  $f_2$  respectivement en  $-f_1$  et  $-f_2$ , et n'altère pas  $f$ ).

suite l'existence d'un *groupe cyclique d'une infinité de substitutions modulaires, toutes hyperboliques, conservant cette forme  $f$* . C'est là un résultat qui n'est pas sans analogie avec le résultat connu sur les formes quadratiques binaires indéfinies à coefficients entiers réels, qui elles aussi n'ont qu'un nombre fini de réduites et sont conservées par un groupe cyclique de substitutions modulaires réelles hyperboliques. Quand on passe au champ complexe et au groupe de Picard, on généralise ces formes de deux façons, soit par la considération des formes de Dirichlet, et l'on obtient encore un groupe cyclique conservatif de substitutions modulaires complexes (hyperboliques ou loxodromiques), soit, suivant les idées d'Hermite, par la considération des formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers, sur lesquelles M. Picard a démontré ce résultat fondamental qu'elles admettent un groupe conservatif de substitutions modulaires, et que ce groupe est fuchsien.

Le résultat auquel nous venons de parvenir, touchant les formes biquadratiques à indéterminées conjuguées du type précédent, complète donc, en un sens, les recherches de M. Picard, en restant dans l'ordre d'idées introduit par Hermite, des formes à indéterminées conjuguées.

2° Reprenons une forme biquadratique  $f = f_1 f_2$  du type précédent, à coefficients entiers,  $f_1$  et  $f_2$  étant indéfinies et ayant leurs demi-sphères représentatives sécantes suivant le demi-cercle  $\Gamma$ .

Par  $\Gamma$  passent, comme on sait, une infinité dénombrable de demi-sphères représentatives de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers. Choisissons deux de ces formes distinctes,  $\varphi$  et  $\psi$  (on supposera, bien entendu, les coefficients de  $\varphi$  premiers entre eux dans leur ensemble, et de même ceux de  $\psi$ ), et distinctes de  $f_1$  et  $f_2$ , ce qui est toujours possible. Alors il existe un nombre réel  $\lambda_1$ , et un seul tel que  $f_1$  et  $\varphi + \lambda_1 \psi$  ne diffèrent que par un facteur constant, comme ayant même demi-sphère représentative, et de même  $\lambda_2$  réel tel que  $f_2$  et  $\varphi + \lambda_2 \psi$  ne diffèrent que par un facteur constant. On aura donc

$$f = A(\varphi + \lambda_1 \psi)(\varphi + \lambda_2 \psi),$$

c'est-à-dire que  $f$  pourra toujours se mettre sous la forme

$$f = A\varphi^2 + 2B\varphi\psi + C\psi^2,$$

A, B, C étant trois nombres réels,  $\varphi$  et  $\psi$  représentant deux formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers du faisceau  $(f_1, f_2)$ , et  $B^2 - AC > 0$ . En écrivant que les deux membres sont identiques, on aura en A, B, C des équations linéaires (à coefficients entiers puisque ce seront les coefficients de  $f, \varphi^2, \varphi\psi, \psi^2$ ) au nombre de 9, et qu'on sait être compatibles.

Donc A, B, C fournis par des équations à coefficients entiers sont rationnels. A un facteur rationnel réel près, on a donc pour  $f$  l'expression

$$(3) \quad f = a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c$  étant trois entiers réels, et  $\varphi, \psi$  deux formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers, avec la condition  $b^2 - ac > 0$ .

$f$  étant mise sous cette forme, le groupe commun aux groupes de substitutions modulaires conservatifs de  $\varphi$  et de  $\psi$  apparaît comme un groupe conservatif de  $f$ . Et nous avons vu dans un Chapitre précédent que,  $\varphi$  et  $\psi$  ayant leurs demi-sphères représentatives sécantes, leurs groupes conservatifs ont en commun un groupe cyclique dont la substitution génératrice est hyperbolique. Ceci concorde bien avec le résultat établi au 1°.

$f$  est d'ailleurs susceptible d'une infinité de représentations telles que (3) à cause de l'arbitraire entrant dans le choix de  $\varphi$  et  $\psi$ ; si par exemple nous remplaçons  $\varphi$  et  $\psi$  par deux autres formes  $\Phi$  et  $\Psi$  de même nature (indéfinies à coefficients entiers, et dont les sphères représentatives passent par  $\Gamma$ ) en faisant dans  $f$  la substitution

$$\begin{cases} \varphi = \lambda \Phi + \mu \Psi, \\ \psi = \nu \Phi + \rho \Psi, \end{cases}$$

$\lambda, \mu, \nu, \rho$  étant quatre entiers réels tels que  $\lambda \rho - \mu \nu = 1$  ( $\Phi$  et  $\Psi$  seront bien alors de la même nature que  $\varphi$  et  $\psi$ ), on aura une nouvelle expression

$$f = A \Phi^2 + 2B \Phi \Psi + C \Psi^2,$$

analogue à la première.

On peut même choisir  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  tels que  $A = a, B = b, C = c$ , c'est-à-dire tels que

$$f = a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2 = a\Phi^2 + 2b\Phi\Psi + c\Psi^2,$$

puisque l'on sait que la forme quadratique binaire indéfinie [ $f(\varphi, \psi)$ ,  $b^2 - ac > 0$ ] aux coefficients entiers réels  $a, b, c$ , aux inconnues  $\varphi$  et  $\psi$ , admet une infinité de transformations modulaires en elle-même. On peut à ce sujet se poser un grand nombre de problèmes sur les diverses représentations possibles de  $f$  sous la forme (3), nous nous contenterons ici des indications données plus haut pour ne pas allonger indéfiniment ce Mémoire.

3° Supposons maintenant que les points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient imaginaires conjugués, c'est-à-dire que

$$f = f_1 f_2,$$

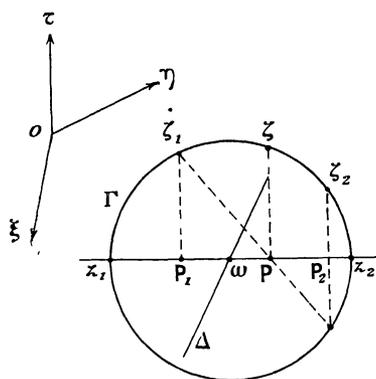
$f_1$  et  $f_2$  étant deux formes d'Hermite :

- (a) ou bien toutes deux définies,
- (b) ou bien l'une définie, l'autre indéfinie,
- (c) ou bien toutes deux indéfinies, mais leurs demi-sphères représentatives n'ayant aucun point commun; dans ce cas les points limites du faisceau ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) sont réels.

a. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont définies et représentées par les points  $\zeta_1, \zeta_2$  du demi-

espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau > 0$ ),  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les cercles d'intersection par le plan  $O\xi\eta$  des sphères de rayon nul de centres  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . Leurs points communs sont à l'intersection du cercle commun à ces deux sphères et du plan  $O\xi\eta$ . Envisageant donc le cercle  $\Gamma$  orthogonal au plan  $O\xi\eta$  mené par  $\zeta_1, \zeta_2$  (droite non euclidienne), on voit que les points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux points situés sur l'axe  $\omega\Delta$  du cercle  $\Gamma$  de part et d'autre de  $\omega$ , à une distance égale à  $i \cdot \overline{\omega\zeta_1}$ . Toute sphère de rayon nul ayant son centre sur  $\Gamma$  coupe  $O\xi\eta$  suivant un cercle

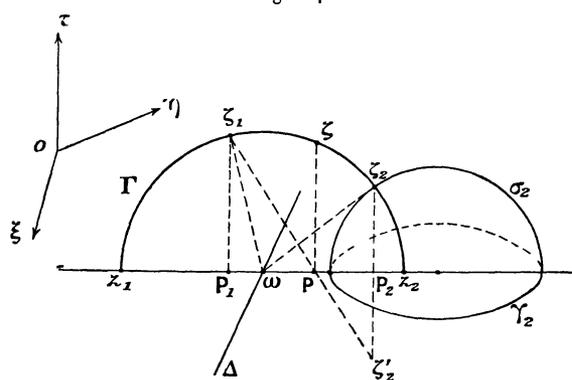
Fig. 83.



passant par ces deux points, c'est-à-dire du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Donc les points  $z_1$  et  $z_2$  où  $\Gamma$  perce  $O\xi\eta$  sont les points limites du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

b. Si  $f_1$  est définie et représentée par  $\zeta_1$ ,  $f_2$  indéfinie et représentée par la demi-sphère  $\sigma_2$  d'équateur  $\gamma_2$ , les points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont encore sur l'axe  $\omega\Delta$  du cercle  $\Gamma$  (orthogonal au plan  $O\xi\eta$  mené par  $\zeta_1$  et orthogonal à la

Fig. 84.

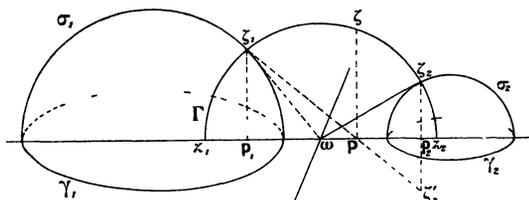


sphère  $\sigma_2$ ) de part et d'autre de  $\omega$  et à une distance  $i \cdot \overline{\omega\zeta_1}$  (c'est là une chose évidente, car  $\overline{\omega\zeta_1}^2$  est la puissance de  $\omega$  par rapport à  $\sigma_2$ ). Donc  $z_1$  et  $z_2$  points limites de  $(\gamma_1, \gamma_2)$  sont encore les points où  $\Gamma$  perce le plan  $O\xi\eta$ .

c. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont indéfinies et représentées par les demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  d'équateurs  $\gamma_1, \gamma_2$  sans point commun réel, on voit aussi sans peine que les points limites de  $(\gamma_1, \gamma_2)$  sont les points  $z_1, z_2$ , où le cercle  $\Gamma$  orthogonal à  $\sigma_1, \sigma_2$  et au plan  $O\xi\eta$  perce le plan  $O\xi\eta$ , car  $\omega$  centre de  $\Gamma$  a même puissance par rapport à  $\sigma_1, \sigma_2$  et cette puissance est  $\overline{\omega z_1} = \overline{\omega z_2} = \overline{\omega \zeta_1}$ .

Dans les trois cas  $a, b, c$ , la forme de Dirichlet représentée par  $\Gamma$  est du type que nous connaissons. [Elle a ses coefficients entiers et  $(z_1 - z_2)$  a l'argument d'un nombre rationnel complexe.]  $\omega$ , milieu de  $z_1, z_2$ , a un affixe rationnel; la droite  $z_1, z_2$  ayant par rapport aux axes  $\xi O \eta$  un coefficient angulaire rationnel, il y a sur elle une infinité de points d'affixe rationnel (puisqu'en est un);

Fig. 85.



soit  $P$  un tel point. Envisageons le cercle du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$  de centre  $P$ . Puisque les points limites du faisceau sont  $z_1$  et  $z_2$ , le carré du rayon de ce cercle va être  $\overline{\omega P}^2 - \overline{\omega z_1}^2$ . (Si  $P$  est entre  $z_1, z_2$ , c'est un cercle imaginaire à centre réel; si  $P$  est hors de  $z_1, z_2$ , c'est un cercle réel.) Or la forme représentée par  $\Gamma$  étant du type indiqué plus haut, on sait que le carré du rayon de  $\Gamma$  sera un nombre rationnel [puisque ce carré n'est autre que Norme  $\frac{z_1 - z_2}{2}$ ; et si la forme indiquée est  $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ ,

$$\text{Norme } \frac{z_1 - z_2}{2} = \frac{\sqrt{\text{Norme}(\beta^2 - \alpha\gamma)}}{\text{Norme } \alpha},$$

Norme  $(\beta^2 - \alpha\gamma)$  étant dans le cas présent carré parfait];  $\overline{\omega z_1}^2$  est donc un nombre rationnel réel;  $\omega$  et  $P$  ayant pour affixes deux nombres rationnels complexes,  $\overline{\omega P}^2$  est aussi un nombre rationnel réel. Donc, le carré du rayon du cercle de centre  $P$  du faisceau  $\gamma_1, \gamma_2$  est rationnel. Ce cercle a donc un centre d'affixe rationnel complexe, et le carré de son rayon est un nombre rationnel réel. Ce cercle représente donc une forme d'Hermite à coefficients entiers (si  $P$  est entre  $z_1, z_2$ , cette forme est définie et elle est représentée par le point  $\zeta$  du cercle  $\Gamma$  projeté en  $P$ ); si  $P$  est hors de  $z_1, z_2$ , la forme est indéfinie. Il existe donc, dans un quelconque des cas  $a, b, c$ , une infinité de formes d'Hermite à coefficients entiers dont les cercles représentatifs dans le plan  $O\xi\eta$  appartiennent au faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Elles sont de deux espèces: il y en a une

infinité de définies et leurs points représentatifs sont sur le cercle  $\Gamma$ , et une infinité d'indéfinies et leurs demi-sphères représentatives sont orthogonales au cercle  $\Gamma$ . Le même raisonnement que précédemment (2°) prouve qu'on peut choisir deux de ces formes  $\varphi$  et  $\psi$  et écrire, à un facteur constant rationnel réel près,

$$f = a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c$  étant trois nombres entiers réels tels que  $b^2 - ac > 0$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formes d'Hermite à coefficients entiers dont les cercles représentatifs dans le plan  $O\xi\eta$  n'ont pas de points communs réels, et l'on peut toujours les supposer toutes deux définies.

CONCLUSIONS. — Les formes biquadratiques à coefficients entiers décomposables en produit de deux formes d'Hermite nous apparaissent maintenant comme formant deux catégories distinctes irréductibles l'une à l'autre.

*Première catégorie.* — Elle comprend les formes qui se décomposent en deux formes d'Hermite indéfinies à demi sphères représentatives sécantes suivant un demi-cercle  $\Gamma$ .

Dans ce cas la forme  $f$  peut se ramener à l'expression

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$$

( $a, b, c$  entiers réels;  $b^2 - ac > 0$ ;  $\varphi$  et  $\psi$ , deux formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers à demi-sphères représentatives sécantes). Il y a une infinité d'expressions du type précédent susceptibles de représenter  $f$ ; dans toutes ces expressions les formes  $\varphi$  et  $\psi$  d'Hermite seront indéfinies et auront leurs demi-sphères représentatives sécantes, suivant le même demi-cercle  $\Gamma$  représentant une forme de Dirichlet (<sup>1</sup>), à coefficients entiers du type spécial que nous connaissons.

*Deuxième catégorie.* — Elle comprend toutes les formes biquadratiques décomposables qui n'entrent pas dans la première catégorie, c'est-à-dire :

- a. Les formes de décomposition sont définies toutes deux;
- b. Les formes de décomposition sont l'une définie, l'autre indéfinie;
- c. Les formes de décomposition sont toutes deux indéfinies, mais leurs demi-sphères représentatives ne se coupent pas.

Toute forme de la deuxième catégorie peut, d'une infinité de façons, se ramener à l'expression

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$$

---

(<sup>1</sup>) Cette forme de Dirichlet est un covariant de la forme  $f$  proposée.

( $a, b, c$  étant trois entiers réels;  $b^2 - ac > 0$ ;  $\varphi$  et  $\psi$ , deux formes d'Hermité à coefficients entiers qui ne seront *jamais* deux formes indéfinies à demi-sphères représentatives sécantes). On pourra toujours (et d'une infinité de manières) choisir pour  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes définies, mais on pourra aussi bien prendre  $\varphi$  définie,  $\psi$  indéfinie, ou bien  $\varphi$  et  $\psi$  indéfinies mais avec des demi-sphères représentatives non sécantes. Dans toutes ces représentations, si  $\varphi$  est définie, elle a son point représentatif  $\zeta$  sur un demi-cercle  $\Gamma$  fixé par la connaissance de  $f$ ; si  $\varphi$  est indéfinie, sa demi-sphère représentative est orthogonale à  $\Gamma$  <sup>(1)</sup>.

Les formes de la première catégorie généralisent les formes quadratiques binaires indéfinies à coefficients entiers réels. Comme elles, elles sont conservées par un groupe cyclique infini de substitutions modulaires, dont la substitution génératrice est hyperbolique. Comme elles, elles présentent cette particularité d'avoir une infinité de réduites composées d'un *nombre fini de formes se reproduisant périodiquement*.

Les formes de la deuxième catégorie généralisent les formes quadratiques binaires définies à coefficients réels. Comme elles, elles n'admettent pas en général de transformations modulaires en elles mêmes. Il n'y a que certaines classes de formes de cette catégorie qui admettent des groupes *finis* de substitutions modulaires *elliptiques*. Nous verrons plus loin comment il est facile de déterminer ces classes. Comme les formes quadratiques binaires définies réelles, on peut définir, pour toute forme de la deuxième catégorie, *une forme réduite unique* (c'est ce qui résulte d'une étude antérieure), jouissant de propriétés remarquables.

*Remarques.* — I. On a vu au début de ce Chapitre comment la forme de Dirichlet dont les racines sont  $z_1$  et  $z_2$ , forme représentée par  $\Gamma$ , se tire par des calculs rationnels de la forme  $f$  proposée. On reconnaît immédiatement si  $f$  est de première ou de deuxième catégorie *selon que les points d'affixes  $z_1, z_2$  sont sur la quartique  $f(z, 1) = 0$  ou n'y sont pas*. Cette forme étant connue, on saura déterminer immédiatement les formes d'Hermité à coefficients entiers  $\varphi$  et  $\psi$  par cette propriété que :

1° Si  $f$  est de la première catégorie, les demi-sphères représentatives de  $\varphi$  et  $\psi$  passent par  $\Gamma$ ;

2° Si  $f$  est de la deuxième catégorie, les demi-sphères représentatives de  $\varphi$  ou  $\psi$  sont orthogonales à  $\Gamma$  si  $\varphi$  ou  $\psi$  sont indéfinies; et si  $\varphi$  ou  $\psi$  est définie son point représentatif est sur  $\Gamma$ .

---

(1)  $\Gamma$  représente d'ailleurs encore une forme de Dirichlet à coefficients entiers du type spécial et c'est un covariant de la forme  $f$  proposée.

Ayant  $\varphi$  et  $\psi$  on a les coefficients  $a, b, c$ , par des équations linéaires.

Il n'y a donc pas de difficulté à ramener la forme  $f$  au type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$ .

Inversement, si *a priori* on se donne une forme du type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$  [ $a, b, c$  entiers réels ( $b^2 - ac > 0$ );  $\varphi$  et  $\psi$ , formes d'Hermite à coefficients entiers], on reconnaîtra qu'elle est de la première catégorie si  $\varphi, \psi$  sont indéfinies et à demi-sphères sécantes, et de la deuxième dans tout autre cas. On saura déterminer  $\Gamma$  par une simple élimination de  $z'$  entre les deux équations  $\varphi(z, 1) = 0, \psi(z, 1) = 0$  des deux cercles représentatifs de  $\varphi$  et  $\psi$  dans le plan  $O\xi\eta$ . L'équation en  $z$  obtenue aura pour racines  $z_1$  et  $z_2$  cherchés. On pourra alors faire sur  $\varphi$  et  $\psi$  tous les changements que l'on voudra en restant dans l'ordre indiqué précédemment et varier la représentation de  $f$  par un type  $a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$ , si quelque commodité en résulte pour le calcul.

II. Au sein de la deuxième catégorie, le cas où les formes  $f_1, f_2$  (en lesquelles  $f$  se décompose) sont de même nature se distingue un peu du cas où elles sont de nature différente.

Au point de vue de la réduction, par exemple, la correspondante de  $f$  se présente de la même façon si  $f_1$  et  $f_2$  sont toutes deux définies, ou si  $f_1$  et  $f_2$  sont toutes deux indéfinies.

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont définies et représentées par  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta$ , représentatif de la correspondante, est l'intersection de la droite non euclidienne  $\zeta_1\zeta_2$  avec le plan de symétrie (non euclidien) des points  $\zeta_1, \zeta_2$  (effectivement  $\zeta$  est milieu non euclidien de  $\zeta_1\zeta_2$ ).

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont indéfinies et représentées par les plans non euclidiens  $\sigma_1, \sigma_2$  (dans la représentation projective des formes), dont les pôles sont  $Z_1, Z_2$  (par rapport à la sphère  $\Sigma$ , bien connue qui sert à la représentation),  $\zeta$  est encore l'intersection de la droite non euclidienne  $Z_1Z_2$ , qui n'est autre que la perpendiculaire commune aux plans non euclidiens  $\sigma_1, \sigma_2$  (demi-cercle  $\Gamma$  orthogonal aux demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2$  dans la représentation  $O\xi\eta\tau, \tau > 0$ ), avec le plan de symétrie (non euclidien) des deux plans  $\sigma_1, \sigma_2$  ou des deux points  $Z_1, Z_2$ . Ceci résulte de ce que  $\zeta$  est (ainsi qu'il a été vu) milieu du segment non euclidien  $\zeta_1\zeta_2, \zeta_1$  et  $\zeta_2$  étant les points où  $Z_1Z_2$  coupe  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Si  $f_1$  est définie et représentée par  $\zeta_1, f_2$  indéfinie représentée par le plan  $\sigma_2$  de pôle  $Z_2$  (par rapport à  $\Sigma$ ),  $\zeta$  représentatif de la correspondante est encore sur  $\zeta_1Z_2$ , mais au milieu non euclidien du segment  $\zeta_1\zeta_2, \zeta_2$  étant le point où  $\zeta_1Z_2$  coupe  $\sigma_2$ . Cette différence se marque encore dans la recherche de celles des formes de la deuxième catégorie qui admettent des transformations modulaires en elles-mêmes.

Il est clair qu'une telle forme ayant une correspondante d'Hermite unique, qui est un covariant, cette correspondante devra admettre les mêmes transformations en elle-même. On voit donc que cette correspondante devra être

équivalente modulairement à une forme définie ayant son point représentatif sur une arête du polyèdre fondamental  $\pi_0$ .

Mais si  $f_1$  et  $f_2$  ( $f = f_1, f_2$ ) sont toutes deux définies ou toutes deux indéfinies,  $f$  pourra être conservée de deux façons : 1° si  $f_1$  et  $f_2$  sont conservées individuellement; 2° si  $f_1$  et  $f_2$  se permutent.

*La première façon seule est possible si  $f_1$  et  $f_2$  sont de nature différente et l'on voit ainsi apparaître, à ce second point de vue, la distinction que nous signalions plus haut au sein de la deuxième catégorie.*

*a.* Pour que  $f_1$  et  $f_2$  se conservent individuellement, il faut et il suffit, on le reconnaît de suite, que  $\Gamma$  soit l'axe d'une rotation non euclidienne du groupe de Picard, c'est-à-dire que la forme de Dirichlet représentée par  $\Gamma$  admette un groupe fini de *substitutions modulaires elliptiques* en elle-même. Donc  $\Gamma$  doit être arête d'un pentaèdre de la division pentaédrique de l'espace. (Doivent être considérées comme arêtes, des arêtes non apparentes telles que  $O\tau$  pour  $\pi_0$  ainsi qu'on le verra plus loin.)

*b.* Une transformation modulaire qui permute  $f_1$  et  $f_2$  est, nous le savons déjà, une substitution *elliptique* puisque de toute façon le point représentatif  $\zeta$  de la correspondante ne doit pas changer, c'est-à-dire que la transformation en question est une simple *rotation non euclidienne* autour d'un axe passant par ce  $\zeta$ ; et une telle rotation ne peut permuer  $f_1$  et  $f_2$  que si c'est une rotation de  $180^\circ$ , c'est-à-dire si elle correspond à une substitution elliptique de *période 2* ( $S^2 = 1$ ). Ceci exige que  $\Gamma$  soit orthogonal à une arête d'un pentaèdre  $\pi$  qui soit axe d'une rotation de période 2 du groupe de Picard,  $f_1$  et  $f_2$  se déduisant l'une de l'autre par cette rotation.

Il est facile de donner les formes canoniques de ces deux types de formes.

*a.*  $\Gamma$  doit être équivalent à une arête du polyèdre  $\pi_0$ , ou plus exactement à l'axe d'une rotation non euclidienne du groupe de Picard, axe situé sur la frontière de  $\pi_0$ .

Les axes des rotations de  $180^\circ$  situés sur  $\pi_0$  sont (*voir la figure*)

$$A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty, E_\infty, EII, AB, II_\infty,$$

à cause des équivalences on peut se borner à

$$A_\infty, D_\infty, E_\infty, EII, AB, II_\infty \quad (1).$$

Les axes des rotations de  $120^\circ$  sont AD, DC et CB. D'ailleurs on peut se borner à AD et CD.

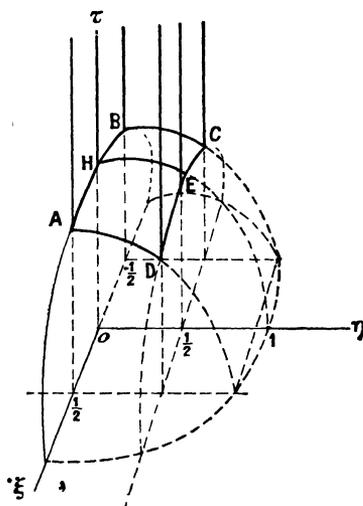
---

(1) Remarquons en passant que toute forme de la première catégorie, pour laquelle  $\Gamma$  équivaut modulairement à un de ces axes, admet en elle-même un groupe fini de deux substitutions modulaires elliptiques ( $1, S; S^2 = 1$ ), outre le groupe cyclique infini dont on a déjà parlé. C'est le seul cas où  $f$  admette en elle-même un groupe de substitutions modulaires elliptiques.

Donnons simplement des exemples :

1° Cas où  $\Gamma$  équivaut à  $A\infty$ , la forme de Dirichlet correspondante est  $2xy - y^2$  (racines  $z_1 = \frac{1}{2}$  et  $z_2 = \infty$ ).

Fig. 86.



On peut prendre  $\varphi$  proportionnel à  $(x - \frac{1}{2}y)(x' - \frac{1}{2}y')$  et  $\psi$  proportionnel à  $yy'$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi &= \Re(2x - y) && (z_1 = \frac{1}{2} \text{ point représentatif}), \\ \psi &= \Re y && (z_2 = \infty \text{ point représentatif}). \end{aligned}$$

La forme canonique cherchée est alors

$$f = a[\Re(2x - y)]^2 + 2b\Re(2x - y)\Re y + c(\Re y)^2$$

( $a, b, c$  étant trois entiers réels quelconques;  $b^2 - ac > 0$ ). Elle admet le groupe

$$1, S \left[ \begin{matrix} x = i(X - Y) \\ y = -iY \end{matrix} \right] \quad (S^2 = 1).$$

2° Prenons la forme de Dirichlet représentée par CD : on pourra prendre pour  $\varphi$  la forme représentée par D

$$\varphi = 2xx' - (1 - i)xy' - (1 + i)x'y + 2yy',$$

et pour  $\psi$  la forme représentée par C

$$\psi = 2xx' - (1 + i)xy' - (1 - i)x'y + 2yy';$$

et la forme canonique sera

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2$$

( $a, b, c$  sont trois entiers réels quelconques tels que  $b^2 - ac > 0$ ).

Elle admet le groupe d'ordre 3

$$1, S, S^2, \quad S = \begin{pmatrix} x = -X + iY \\ y = iX \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} x = -iY \\ y = -iX - Y \end{pmatrix} \quad (S^3 = 1).$$

$b. f_1$  et  $f_2$  devant se déduire l'une de l'autre par une rotation non euclidienne de  $180^\circ$ , on obtiendra les formes canoniques cherchées du deuxième type en prenant pour  $f_1$  une forme d'Hermite *quelconque*, lui faisant subir une des substitutions qui correspondent aux rotations de  $180^\circ$  canoniques dont les axes ont été énumérés plus haut, ce qui donnera  $f_2$ . Le produit obtenu  $f_1 f_2$  sera une forme canonique du deuxième type.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

*Extension des résultats précédents.* — Nous avons dans tout ce qui précède envisagé seulement le cas où la forme biquadratique à coefficients entiers se décompose en un produit de deux formes d'Hermite, et nous avons montré qu'en ce cas cette forme pouvait toujours s'écrire

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c$  étant trois entiers réels ( $b^2 - ac > 0$ ),  $\varphi$  et  $\psi$  étant deux formes d'Hermite convenables à coefficients entiers.

La question se pose alors de savoir à quoi correspondent les formes biquadratiques du type

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c, \varphi, \psi$  étant choisis comme précédemment, mais tels cependant que  $ac - b^2 > 0$ .

Il est visible alors que dans ce cas on aura

$$f = a[\varphi - \lambda_1 \psi][\varphi - \lambda_2 \psi],$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant deux nombres complexes conjugués et par suite la quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  se décomposera en

$$\varphi(z, 1) - \lambda_1 \psi(z, 1) = 0,$$

$$\varphi(z, 1) - \lambda_2 \psi(z, 1) = 0,$$

et ces deux équations représentent *deux cercles imaginaires conjugués dont les équations en  $\xi, \eta$  ( $z = \xi + i\eta$ ) n'ont pas leurs coefficients réels*. La forme proposée se décompose donc en un produit de deux formes quadratiques à

indéterminées conjuguées, *mais chacune d'elles n'est pas une forme d'Hermite*, elles prennent des valeurs complexes conjuguées l'une de l'autre quand les indéterminées reçoivent dans ces deux formes des valeurs données, les mêmes pour les deux formes, alors qu'une forme d'Hermite ne prend que des valeurs réelles.

Les équations des deux cercles pouvant se réduire à

$$zs' - \alpha z - \beta z' + \gamma = 0$$

et

$$zs' - \beta' z - \alpha' z' + \gamma' = 0,$$

$\alpha$  et  $\alpha'$  étant conjugués, ainsi que  $\beta$  et  $\beta'$ ,  $\gamma$  et  $\gamma'$ , puisque les deux cercles sont imaginaires conjugués, on aura

$$f = A [xx' - \alpha xy' - \beta x'y + \gamma yy'] [xx' - \beta' xy' - \alpha' x'y + \gamma' yy'],$$

car, par une substitution modulaire préalable, on peut supposer que le premier coefficient  $A$  de  $f$  est  $\neq 0$ .

On se trouve donc ici dans le cas écarté au cours de ce Chapitre : celui où la forme  $f(x, y)$  donne naissance à une quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  dont l'équation (en  $\xi, \eta$ ) a ses coefficients réels entiers, se décompose en deux cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  imaginaires conjugués [chacun d'eux ayant, en  $(\xi, \eta)$ , une équation à coefficients non tous réels]. Il importe de voir si, étant donnée *a priori* une telle forme à coefficients entiers, on peut toujours la ramener à la forme

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c$  étant trois entiers réels ( $ac - b^2 > 0$ );  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes d'Hermite à coefficients entiers.

Tout d'abord il n'y a rien à changer à ce qui a été dit précédemment sur l'équation  $P(z) = 0$  dont les racines sont les *points communs* à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  si ces points sont *réels*, ou bien les *points limites du faisceau*  $(\gamma_1, \gamma_2)$  qui sont réels si les deux premiers sont imaginaires conjugués (et l'on est bien toujours dans un de ces deux cas).

Cette équation  $P(z)$  a ses coefficients entiers. Donc, le milieu des deux points ayant pour affixes les racines est un point d'affixe rationnel. C'est un premier point de la ligne des centres de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui est réelle.

En second lieu, la quartique bicirculaire étant décomposée ainsi qu'on l'a dit, on a

$$f(z, 1) = A [zs' - \alpha z - \beta z' + \gamma] [zs' - \alpha' z' - \beta' z + \gamma'] = 0.$$

Le coefficient de  $z^2 z'$  dans  $f(z, 1)$  est  $-A(\beta' + \alpha)$ . Donc  $\alpha + \beta'$  est rationnel complexe. De même  $\alpha' + \beta$  est rationnel.

Or il est facile de voir que le centre du premier cercle a pour coordonnées

cartésiennes

$$\xi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta_1 = \frac{i(\alpha - \beta)}{2}$$

et le deuxième

$$\xi_2 = \frac{\alpha' + \beta'}{2}, \quad \eta_2 = \frac{i(\beta' - \alpha')}{2}.$$

Le milieu de ces deux points a pour coordonnées réelles

$$\xi = \frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}, \quad \eta = \frac{i(\alpha - \alpha' + \beta' - \beta)}{2}.$$

Or

$$\xi = \frac{\alpha + \beta'}{2} + \frac{\alpha' + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \eta = i \left[ \frac{\alpha + \beta'}{2} - \frac{\alpha' + \beta}{2} \right]$$

et l'on voit que  $\xi$  et  $\eta$  sont rationnels réels. Donc on a un deuxième point de la ligne des centres, dont l'affixe est rationnel complexe. Ce deuxième point peut toujours par une substitution modulaire préalable être supposé distinct du premier, il n'y a qu'à répéter un raisonnement déjà fait au cours du Chapitre précédent. Et l'on voit encore que l'équation  $P(z) = 0$  a des racines  $z_1, z_2$  telles que  $z_1 - z_2$  ait même argument qu'un nombre rationnel complexe. La demi-circonférence  $\Gamma$  orthogonale au plan  $O\xi\eta$  en  $z_1, z_2$  est donc du type spécial signalé. Il en résulte que :

1° Si les points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont réels, on pourra choisir d'une infinité de façons deux formes d'Hermite  $\varphi, \psi$ , à coefficients entiers indéfinies, dont les demi sphères représentatives passeront par  $\Gamma$ ; il existera alors deux nombres complexes conjugués  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$\varphi - \lambda_1 \psi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi - \lambda_2 \psi = 0$$

représentent exactement les cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Et par suite on aura

$$f(z, 1) = A[\varphi(z, 1) - \lambda_1 \psi(z, 1)][\varphi(z, 1) - \lambda_2 \psi(z, 1)],$$

c'est-à-dire

$$f(x, y) = A\varphi^2 + 2B\varphi\psi + C\psi^2,$$

$A, B, C$  étant trois nombres réels tels que  $AC - B^2 > 0$ . Et l'identification prouve que ces trois nombres sont rationnels.

2° Si les points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont imaginaires conjugués,  $z_1$  et  $z_2$  sont les affixes des points limites du faisceau  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . On choisira deux formes d'Hermite  $\varphi$  et  $\psi$  à coefficients entiers qui pourront être définies à condition d'avoir leur point représentatif sur  $\Gamma$ , ou indéfinies à condition d'avoir leur demi-sphère représentative orthogonale à  $\Gamma$ . Le faisceau des deux cercles  $\varphi(z, 1) = 0, \psi(z, 1) = 0$  aura alors  $z_1$  et  $z_2$  pour points limites;  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  com-

plexes conjugués existent tels que

$$\varphi(z, 1) - \lambda_1 \psi(z, 1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(z, 1) - \lambda_2 \psi(z, 1) = 0$$

représentent précisément  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Le raisonnement s'achève comme précédemment et l'on ramène toujours  $f$  à être, à un facteur rationnel réel près, du type

$$A\varphi^2 + 2B\varphi\psi + C\psi^2,$$

A, B, C entiers réels ( $AC - B^2 > 0$ );  $\varphi$  et  $\psi$  formes d'Hermite à coefficients entiers qui en aucun cas ne peuvent être deux formes indéfinies ayant leurs demi-sphères représentatives sécantes.

En résumé, toute forme biquadratique à coefficients entiers  $f(x, y)$  du type des formes que nous étudions (formes à indéterminées conjuguées, ne prenant que des valeurs réelles pour toutes valeurs des indéterminées), donnant naissance à une quartique bicirculaire  $f(z, 1) = 0$  qui se décompose en deux cercles, se ramène toujours, au besoin à un facteur réel rationnel près, au type

$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2,$$

$a, b, c$  étant trois entiers réels,  $\varphi, \psi$  étant deux formes d'Hermite à coefficients entiers, et cela d'une infinité de façons.

Si les deux points doubles à distance finie de la quartique sont réels,  $\varphi$  et  $\psi$  seront toujours deux formes indéfinies dont les demi-sphères représentatives passeront par ces points doubles, et par suite seront sécantes.  $f$  sera dite de la première catégorie.

Si les deux points doubles sont imaginaires conjugués,  $\varphi$  et  $\psi$  ne pourront *jamais* être deux formes d'Hermite indéfinies à demi-sphères représentatives sécantes.  $f$  est dite de la deuxième catégorie. On pourra choisir  $\varphi$  et  $\psi$  définies, alors leur point représentatif sera sur la demi-circonférence  $\Gamma$  orthogonale à  $O\xi\eta$  aux points  $z_1, z_2$  *associés des points doubles* selon la définition de Laguerre ( $z_1, z_2$  sont les deux points réels centres de deux cercles de rayon nul se coupant aux deux points doubles). Si  $\varphi$  ou  $\psi$  est indéfinie, sa demi-sphère représentative devra être orthogonale à  $\Gamma$ .

Tout ce qui a été dit dans le Chapitre actuel des formes

$$[a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2 \quad (b^2 - ac > 0),$$

quant aux groupes de substitutions modulaires qui les conservent, s'applique sans changer un mot à celles pour lesquelles  $ac - b^2 > 0$ . Les formes de la première catégorie ont un groupe conservatif cyclique infini formé de substitutions modulaires hyperboliques (*conservant à la fois  $\varphi$  et  $\psi$* ). Celles de la deuxième catégorie n'en ont pas en général, elles ne peuvent avoir que des

groupes finis de transformations modulaires en elles-mêmes (substitutions elliptiques de période 2 ou 3, conservant à la fois  $\varphi$  et  $\psi$ ) et il faut pour cela qu'elles équivalent aux formes canoniques qu'on a appris à former au cours de ce Chapitre.

*Extension de la théorie de la réduction.* — La réduction a été définie au cours des Chapitres précédents pour les formes

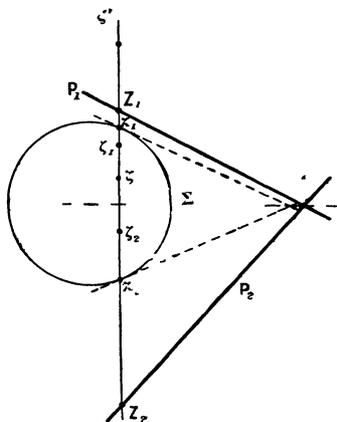
$$a\varphi^2 + 2b\varphi\psi + c\psi^2 \quad (ac - b^2 < 0),$$

$a, b, c$  entiers,  $\varphi$  et  $\psi$  formes d'Hermité à coefficients entiers. Ces formes se décomposent en deux formes d'Hermité. Servons-nous de la représentation projective des formes à l'aide de la sphère unité  $\Sigma$  comme quadrique fondamentale.

A. Si la forme  $f$  est de la deuxième catégorie on peut avoir :

*a.*  $f_1$  et  $f_2$  définies et représentées par les points  $\zeta_1, \zeta_2$ , intérieurs à  $\Sigma$ ; alors la correspondante est représentée par  $\zeta$  milieu euclidien de  $\zeta_1, \zeta_2$ . — Dans le plan  $O\xi\eta$ ,  $f_1$  est représentée par un cercle  $\gamma_1$  à centre réel à rayon purement imaginaire. Sur  $\Sigma$ ,  $f_1$  sera représentée par le cercle  $\Gamma_1$  imaginaire suivant lequel  $P_1$ , plan polaire de  $\zeta_1$ , coupe  $\Sigma$ ; de même  $f_2$  par le cercle  $\Gamma_2$  suivant lequel  $P_2$ , plan polaire de  $\zeta_2$ , coupe  $\Sigma$ .  $P_1$  et  $P_2$  sont extérieurs à  $\Sigma$ ;  $\zeta_1, \zeta_2$  est la droite conjuguée de leur intersection, elle coupe  $\Sigma$  en  $z_1$  et  $z_2$ . Il y a deux cônes

Fig. 87.



du deuxième degré passant par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et l'on sait que leurs sommets sont les points doubles de l'involution déterminée sur  $\zeta_1, \zeta_2$ , d'une part par le couple  $(z_1, z_2)$ , d'autre part par le couple  $(Z_1, Z_2)$  des points où la droite  $z_1, z_2$  rencontre  $p_1$  et  $p_2$ . Les sommets  $T$  et  $T'$  de ces deux cônes sont donc *réels* puisque  $z_1, z_2$

est intérieur à  $Z_1, Z_2$ , l'un  $T$  est intérieur, l'autre  $T'$  extérieur,  $T$  et  $T'$  divisent harmoniquement  $Z_1, Z_2$  et  $z_1, z_2$ . Il en résulte que  $T$  et  $T'$  divisent harmoniquement  $\zeta_1, \zeta_2$  et ceci prouve que  $T$  est confondu avec  $\zeta$ . Le point représentatif de la correspondante de  $f$  est le sommet réel intérieur à  $\Sigma$  d'un cône imaginaire du deuxième degré passant par la cyclique (décomposée en deux cercles) qui correspond sur la sphère  $\Sigma$  à la cyclique plane  $f(z, 1) = 0$ .

c. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux formes indéfinies dont les cercles représentatifs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  du plan  $O\xi\eta$ , ou  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de la sphère  $\Sigma$ , n'ont pas de points communs, on a déjà vu que le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante était encore le sommet intérieur à  $\Sigma$  d'un cône du deuxième degré passant par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , c'est-à-dire par la cyclique sphérique correspondant à  $f(z, 1) = 0$ .

b. Dans le cas où  $f_1$  est définie et  $f_2$  indéfinie, et sont représentées sur la sphère  $\Sigma$ , la première par le point  $\zeta_1$  intérieur à  $\Sigma$  ou par le cercle imaginaire  $\Gamma_1$  de section de  $\Sigma$  par  $P_1$  plan polaire de  $\zeta_1$ , le deuxième par le cercle réel  $\Gamma_2$  de section de  $\Sigma$  par un plan  $P_2$  sécant à  $\Sigma$ , les sommets des deux cônes du second degré passant par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont imaginaires conjugués puisqu'ils doivent partager harmoniquement les segments  $Z_1, Z_2$  et  $z_1, z_2$ , ces deux segments chevauchant l'un sur l'autre ( $\zeta_2$  étant le pôle de  $P_2$ ,  $\zeta_1, \zeta_2$  rencontre  $P_1$  en  $Z_1$ ,  $P_2$  en  $Z_2$  et la sphère  $\Sigma$  en  $z_1$  et  $z_2$ ). La correspondante est représentée par un point  $\zeta$  de  $z_1, z_2$ , qui est milieu non euclidien de  $\zeta_1, Z_2$ . On peut montrer que ce point  $\zeta$  ne dépend que des sommets imaginaires conjugués des deux cônes du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de la façon suivante :

Soit  $A$  le point réel d'où l'on voit les segments  $Z_1, Z_2$  et  $z_1, z_2$  sous un angle droit.

Les sommets des deux cônes en question sont évidemment les intersections  $I_1$  et  $I_2$  de  $z_1, z_2$  avec les droites isotropes issues de  $A$ . Soit  $I$  leur milieu non euclidien qui est réel et intérieur au segment  $z_1, z_2$ ; c'est le point  $I$  défini par

$$(z_1, z_2, I, I) = (z_1, z_2, I, I) = (z_1, z_1, I, I).$$

Le premier et le dernier rapport anharmonique étant égaux prouvent que l'involution définie par les deux couples  $(z_1, z_2)$  et  $(I_1, I_2)$  admet  $I$  pour point double ou en passant au faisceau de sommet  $A$ ,  $AI$  est un rayon double. Mais  $AI_1$  et  $AI_2$  étant isotropes, les rayons doubles  $AI$  et  $AJ$  sont rectangulaires et sont par suite les deux bissectrices de l'angle  $z_1, A, z_2$ , des deux rayons homologues  $Az_1$  et  $Az_2$ .  $I$  est donc le pied sur  $z_1, z_2$ , de la bissectrice intérieure de  $z_1, A, z_2$ . C'est bien un point réel intérieur à  $z_1, z_2$ . D'autre part,  $\zeta_1$  étant conjugué de  $Z_1$  par rapport à  $z_1, z_2$ , on voit sur la figure que

$$\widehat{\zeta_1 A z_1} = \widehat{z_1 A Z_1} = \widehat{z_2 A Z_2},$$

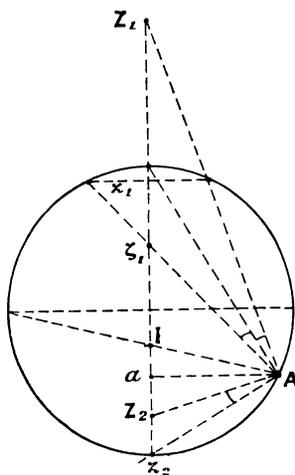
puisque  $\widehat{z_1 A z_2}$  et  $\widehat{Z_1 A Z_2}$  sont droits. Donc  $AI$  est bissectrice aussi de  $\widehat{\zeta_1 A Z_2}$ .

L'involution précédente compte donc  $A\zeta_1$  et  $AZ_2$  comme rayons homologues ;  
donc

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \zeta_1 1) = (\varepsilon_2 \varepsilon_1 Z_2 1) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 1 Z_2)$$

et ceci prouve que  $I$  est confondu avec  $\zeta$  puisque c'est le milieu non euclidien de  $\zeta_1 Z_2$ .

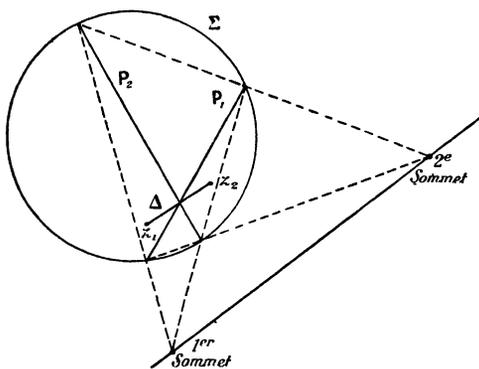
Fig. 88.



Le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  est donc le milieu non euclidien réel (intérieur à  $\Sigma$ ) des sommets imaginaires conjugués des deux cônes du deuxième degré qui passent par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Cette remarque nous sera utile tout à l'heure.

B. Si la forme  $f$  est de première catégorie,  $f_1$  et  $f_2$  sont représentées sur  $\Sigma$

Fig. 89.



par deux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  dont les plans se coupent suivant une droite  $\Delta$  qui perce la sphère en deux points réels  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Il y a deux cônes réels du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , leurs sommets sont tous deux extérieurs à la sphère

sur la droite conjuguée de  $\Delta$ .  $f$  a une infinité de correspondantes dont les points représentatifs, sont tous les points de  $z_1, z_2$  <sup>(1)</sup>. Il y a une infinité de substitutions réductrices qui ne donnent lieu ici (les coefficients de  $f$  étant entiers) qu'à un nombre fini de réduites de  $f$  se reproduisant périodiquement.

En résumé, dans tous ces cas :

1° S'il y a un cône du deuxième degré, de sommet réel intérieur à la sphère  $\Sigma$ , contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , son sommet représente toujours une correspondante de  $f$ . En la réduisant, on a une réduite de  $f$  par la même substitution modulaire.

Pour les formes de la deuxième catégorie qui sont dans ce cas (formes du type  $a$  ou  $c$ ), il n'y a qu'un tel cône ayant son sommet réel à l'intérieur de  $\Sigma$ ; il n'y a qu'une correspondante et une réduite unique pour  $f$ .

Pour les formes de la deuxième catégorie il y a une infinité de cônes du deuxième degré, à sommet réel intérieur à  $\Sigma$ , contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  : ils sont tous dégénérés en deux plans et leurs sommets sont tous les points de la droite  $z_1, z_2$  intersection des plans de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Tous ces points représentent des correspondantes de  $f$ . Mais  $f$  ayant ses coefficients entiers, cette infinité de correspondantes ne donne lieu qu'à un nombre fini de réduites équivalentes à  $f$ .

2° Le seul cas rencontré où il n'y ait pas de cône à sommet réel intérieur à  $\Sigma$  contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est le cas des formes  $b$  de la deuxième catégorie ( $f = f_1, f_2$ ;  $f_1$  définie,  $f_2$  indéfinie); et nous avons vu alors qu'il y avait sur la droite  $z_1, z_2$ , conjuguée de l'intersection des plans de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ( $z_1, z_2$  étant sécante à  $\Sigma$ ), deux points  $I_1$  et  $I_2$  imaginaires conjugués sommets de deux cônes imaginaires conjugués contenant  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et en ce cas le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante de  $f$  était le milieu non euclidien (réel et intérieur à  $\Sigma$ ) des deux points imaginaires conjugués  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Il y a encore dans ce 2° une réduite unique équivalente à  $f$ .

Les deux généralisations suivantes successives paraîtront alors toutes naturelles :

I. Si  $f$  est telle que la quartique  $f(z, 1) = 0$  se décompose en deux cercles imaginaires conjugués  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dont les correspondants  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sur  $\Sigma$  sont les sections de  $\Sigma$  par deux plans  $p_1$  et  $p_2$  imaginaires conjugués :

1° Si la droite réelle  $\Delta$  d'intersection de ces deux plans est extérieure à  $\Sigma$ , sa droite conjuguée  $\Delta'$  perce  $\Sigma$  en deux points réels  $z_1, z_2$  et  $p_1$  et  $p_2$  en  $Z_1$  et  $Z_2$  qui sont imaginaires conjugués. Il y a deux points réels,  $\zeta$  intérieur,  $\zeta'$  extérieur à  $\Sigma$  partageant harmoniquement  $z_1, z_2$  et  $Z_1, Z_2$ . Ce sont les sommets réels

---

<sup>(1)</sup> Tous ces points sont les sommets intérieurs à  $\Sigma$  de cônes dégénérés (ensemble des plans  $P_1$  et  $P_2$ ) contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

des deux cônes imaginaires du deuxième degré contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Par définition,  $\zeta$  représentera la correspondante de  $f$ .  $f$  a dans ce cas une réduite et une seule. Elle est de la deuxième catégorie;

2° Si  $\Delta$  perce  $\Sigma$  en deux points réels  $z_1$  et  $z_2$  ( $f$  est de la première catégorie) tous les points de  $z_1 z_2$  intérieurs à  $\Sigma$  sont sommets réels de cônes du deuxième degré dégénérés (formés des deux plans  $p_1$  et  $p_2$ ) contenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Par définition tous ces points représenteront des correspondantes de  $f$ . Il y a donc une infinité de correspondantes représentées par tous les points du segment  $z_1, z_2$ . Mais,  $f$  ayant ses coefficients entiers, nous savons que ceci ne donne qu'un nombre limité de réduites équivalentes à  $f$ .

II. Si maintenant on ne suppose plus que la forme  $f(x, y)$  ou la quartique  $f(z, 1) = 0$  se décompose, on a la forme générale biquadratique à indéterminées conjuguées et à coefficients quelconques (il n'est pas nécessaire de les supposer entiers).

Dans le plan  $O\xi\eta$ ,  $f(z, 1) = 0$  représente une cyclique plane, et il lui correspond sur  $\Sigma$  une cyclique sphérique (1). Par cette cyclique passent d'ailleurs une infinité de quadriques réelles appartenant à un même faisceau.

En effet l'équation de la cyclique plane  $f(z, 1) = 0$ , en coordonnées  $\xi, \eta$  a ses coefficients réels et s'écrit

$$A(\xi^2 + \eta^2)^2 + (B\xi + C\eta)(\xi^2 + \eta^2) + \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

$\varphi(\xi, \eta)$  étant un polynôme en  $\xi, \eta$  du deuxième degré.

Si l'on remarque que les formules

$$\xi = \frac{X}{1-Z}, \quad \eta = \frac{Y}{1-Z} \left[ \xi^2 + \eta^2 = \frac{1+Z}{1-Z} \right]$$

font correspondre, au point  $\xi, \eta$ , un point  $X, Y, Z$  de la sphère  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , on voit de suite que la cyclique sphérique dont nous parlons est l'intersection avec la sphère  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  de la quadrique

$$A \left( \frac{1+Z}{1-Z} \right)^2 + \frac{BX + CY}{1-Z} \frac{1+Z}{1-Z} + \varphi \left( \frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right) = 0$$

ou

$$A(1+Z)^2 + (BX + CY)(1+Z) + \psi[X, Y, (1-Z)] = 0,$$

$\psi$  n'est autre que  $\varphi$  rendue homogène; c'est une forme quadratique (à coefficients réels) par rapport aux variables  $X, Y, 1-Z$ .

La sphère  $\Sigma$  et la quadrique précédente (dont l'équation a tous ses coeffi-

(1) Dans tout ce qui va suivre, nous nous plaçons au point de vue de la représentation projective des formes à l'aide de la sphère unité  $\Sigma$ . Le lecteur familier avec les deux représentations passera sans peine de cette représentation à la représentation dans le demi-espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau < 0$ ).

cients réels) déterminent un faisceau contenant une infinité de quadriques réelles passant par la cyclique étudiée. Dans le cas général, il passe quatre cônes du second degré par cette cyclique et les recherches de Cremona [Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre (*J. de Crelle*, t. 68)] et de Painvin, rappelées par M. Darboux dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (p. 27 et suiv.), établissent que l'on ne peut faire sur ces quatre cônes que les hypothèses suivantes :

- 1° Les quatre cônes sont réels, la courbe est alors réelle et composée de deux branches coupées chacune par un plan en un nombre pair de points;
- 2° Les sommets des quatre cônes sont réels et deux seulement de ces cônes sont réels, la courbe est imaginaire;
- 3° Deux des sommets sont réels et deux imaginaires conjugués. La courbe se compose d'une seule branche. Dans ce cas, les deux sommets réels sont extérieurs à la sphère.

Envisageons les sommets de ces cônes, on n'a que deux hypothèses possibles :

- 1° Les quatre sont réels; alors *il en est un et un seul*  $\zeta$  *intérieur à la sphère*  $\Sigma$  (ceci a lieu en particulier si la forme biquadratique proposée est *positive*, auquel cas la cyclique est imaginaire).

Nous conviendrons alors d'associer à notre forme biquadratique  $f$  la forme quadratique définie d'Hermité  $\varphi$ , dont  $\zeta$  est le point représentatif; ce sera la correspondante de  $f$ . La réduite de  $f$  s'obtiendra en faisant sur  $f$  la même substitution modulaire complexe que pour avoir la réduite  $\Phi$  de  $\varphi$

$$\begin{bmatrix} \Phi = \varphi S \\ F = f S \end{bmatrix}.$$

- 2° Deux seulement sont réels, ils sont extérieurs à  $\Sigma$  ainsi que toute la droite  $\Delta$  qui les joint; les deux autres  $I_1$  et  $I_2$  sont imaginaires conjugués sur la droite réelle  $\Delta'$  conjuguée de  $\Delta$  par rapport à  $\Sigma$ ,  $\Delta'$  coupant  $\Sigma$ . On voit alors immédiatement qu'il est possible de déterminer deux points  $\zeta, Z$ , réels sur  $\Delta'$  qui partagent harmoniquement  $I_1, I_2$ , ainsi que le segment déterminé sur  $\Delta'$  par  $\Sigma$ .  $\zeta$  est intérieur à  $\Sigma$ ,  $Z$  extérieur,  $\zeta$  est milieu non euclidien de  $I_1, I_2$ . Il suffit de répéter les raisonnements faits (p. 235) pour les formes du type  $b$  de la deuxième catégorie pour s'assurer de l'exactitude des assertions précédentes. Le point  $\zeta$ , bien déterminé et unique que nous venons de signaler, sera par définition le représentatif de *la correspondante*  $\varphi$  *de*  $f$ . On aura encore dans ce cas une réduite  $F$  unique équivalente à  $f$  qu'on obtiendra en faisant sur  $f$  la substitution  $S$  modulaire complexe qui réduit  $\varphi$

$$\begin{bmatrix} \Phi = \varphi S \\ F = f S \end{bmatrix}.$$

Dans le premier comme dans le deuxième cas, il y a toujours *une droite réelle  $\Delta$  sécante à  $\Sigma$  renfermant deux des sommets (réels ou imaginaires conjugués) des cônes* qui passent par la cyclique sphérique envisagée. Elle perce  $I$  en deux points qui correspondent à deux points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  du plan  $O\xi\eta$ , et le segment  $z_1 z_2$  de la droite  $\Delta'$  représente une *forme de Dirichlet*. Il est visible immédiatement que par toute collinéation réelle qui respecte la sphère  $\Sigma$  et transforme entre eux les points de l'intérieur, la cyclique primitive devient une cyclique du même type (1° ou 2°) et la droite qu'on vient d'associer à la cyclique primitive devient la droite associée par le même mode à la cyclique transformée : c'est dire que *la forme de Dirichlet représentée par  $z_1, z_2$  est un covariant de la forme biquadratique à indéterminées conjuguées* représentée par la cyclique, pour toute transformation linéaire

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \alpha' X' + \beta' Y' \\ y' = \gamma' X' + \delta' Y' \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et leurs conjugués  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  étant quelconques.

En résumé, il résulte des considérations précédentes que quelle que soit la forme biquadratique envisagée  $f$  :

1° S'il y a un cône du deuxième degré à sommet réel intérieur à  $\Sigma$  contenant la cyclique qui la représente, ce sommet sera par définition le *représentatif d'une correspondante de  $f$* . Il n'y en a en général qu'un, et le seul cas où il y en ait une infinité, est celui où la cyclique se décompose en deux cercles dont les plans se coupent suivant une droite réelle sécante à  $\Sigma$ . Ce cas a été étudié en détail ;

2° S'il n'y a pas de sommet réel intérieur à  $\Sigma$ , il y a deux tels sommets imaginaires conjugués sur une droite  $\Delta'$  réelle sécante à  $\Sigma$ , *et le représentatif  $\zeta$  de la correspondante de  $f$  sera leur milieu non euclidien* (point réel intérieur à  $\Sigma$ ).

On peut donc, dans tous les cas, *définir d'une façon précise la réduction d'une forme biquadratique à indéterminées conjuguées*.

Cette méthode de réduction a, il est vrai, un caractère *théorique*. Les *calculs effectifs* de la ou des correspondantes de  $f$  ne pourront être en général faits qu'*avec une approximation* (d'ailleurs aussi serrée qu'on voudra), puisque la recherche des quatre cônes contenant la cyclique dépend d'une équation du quatrième degré et puisqu'on s'occupe plus spécialement ici *d'une racine* (qui fournit le sommet intérieur) ou des groupes de deux racines (donnant les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ ).

Nous nous bornerons dans ce Mémoire aux indications précédentes.

## CHAPITRE V.

LES FORMES DÉCOMPOSABLES EN PRODUIT DE  $n$  FORMES D'HERMITE  
TANT DÉFINIES QU'INDÉFINIES ( $n > 2$ ).

Envisageons une forme du type

$$f = f_1 f_2 \dots f_n,$$

$f_1, f_2, \dots, f_\mu$  étant des formes d'Hermite indéfinies;  $f_{\mu+1}, \dots, f_n$  étant des formes définies. On suppose essentiellement ici  $\mu \neq 0$ . D'ailleurs  $\mu$  peut être égal à  $n$ . Les déterminants de ces formes seront désignés par  $-\delta_1, -\delta_2, \dots, -\delta_\mu$  pour les formes indéfinies, par  $\delta_{\mu+1}, \delta_{\mu+2}, \dots, \delta_n$  pour les définies. *Tous les  $\delta_i$  sont ainsi des nombres positifs.* La décomposition de  $f$  en produit  $f_1 f_2 \dots f_n$  ne détermine chacune de ces formes  $f_i$  qu'à un facteur  $\lambda_i$  près. On peut profiter de cette indétermination pour rendre si l'on veut tous les  $\delta_i$  égaux entre eux (à condition qu'aucun d'entre eux ne soit nul), mais ceci n'est nullement essentiel pour la suite. A chacune des formes indéfinies  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) nous associons une forme définie d'Hermite  $\varphi_i$  par le mode connu.  $\varphi_i$  a son point représentatif  $\zeta_i$  sur la demi-sphère  $\sigma_i$  qui représente  $f_i$  (dans l'espace  $O\xi\eta\tau$ ,  $\tau > 0$ ), et son déterminant est  $\delta_i$  opposé de celui de  $f_i$ .  $\varphi_i$  dépend du paramètre complexe, affixe de la projection  $P_i$  de  $\zeta_i$  sur le plan  $O\xi\eta\tau$ . Puis à la forme proposée  $f$  on associe la forme quadratique définie d'Hermite

$$\varphi = t_1^2 \varphi_1 + t_2^2 \varphi_2 + \dots + t_\mu^2 \varphi_\mu + t_{\mu+1}^2 f_{\mu+1} + \dots + t_n^2 f_n.$$

$\varphi$  dépend des paramètres réels  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , et des  $\mu$  paramètres complexes qui entrent respectivement dans  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ .

On fera varier de toutes les façons possibles ces paramètres et pour chaque système de valeurs qu'ils recevront on réduira  $\varphi$  par une certaine substitution  $S$ . On fera sur  $f$  la même substitution  $\left[ \begin{array}{l} \Phi = \varphi S \\ \Gamma = f S \end{array} \right]$ . Lorsque les paramètres varieront on obtiendra un ensemble (S) formé des substitutions précédentes. Faisant toutes ces substitutions dans  $f$ , on obtiendra un ensemble ( $f$ ) de formes équivalentes à  $f$  qui sera dit *associé* à  $f$  par la méthode de réduction continue.

On aura (S) en cherchant le domaine D que décrit le point  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$ , lorsque les paramètres entrant dans  $\varphi$  varient de toutes les façons

possibles. Si d'abord on suppose que les  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) varient seuls, les  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ) restant fixes,  $\zeta$  va décrire l'intérieur et la surface du plus petit polyèdre convexe non euclidien contenant à son intérieur ou sur sa surface les points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\mu$  représentatifs de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ ,  $\zeta_{\mu+1}, \dots, \zeta_n$  représentatifs de  $f_{\mu+1}, \dots, f_n$ . C'est là un résultat qui a été établi à propos de la réduction continue des formes décomposables en produit de  $n$  formes d'Hermité définies. Si l'on suppose maintenant que les  $\mu$  paramètres complexes entrant dans  $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$  varient,  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\mu$  vont décrire respectivement les demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu$  représentatives de  $f_1, f_2, \dots, f_\mu$  et le polyèdre précédent va se déformer. Le domaine D sera le volume balayé par ce polyèdre dans sa déformation, en y comprenant la surface qui limite ce volume. Dans la représentation adoptée (celle de l'espace  $O\xi\eta\tau$ ,  $\tau > 0$ ), cette surface limite pourra comprendre, en particulier, certaines des demi-sphères représentatives des formes  $f_1, f_2, \dots, f_\mu$ ; elle pourra admettre pour points coniques certains des points représentatifs de  $f_{\mu+1}, \dots, f_n$ . Il est difficile d'ailleurs de dire d'une façon précise ce que sera ce domaine, tant sa forme peut varier selon les nombres  $\mu, n$ , et les dispositions relatives des points  $\zeta_{\mu+1}, \dots, \zeta_n$  et des demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\mu$ . Nous allons seulement par quelques exemples montrer quelques-unes des circonstances qui pourront se présenter.

Il est clair, d'ailleurs, qu'on s'aidera utilement de l'une et de l'autre représentation des formes dont nous avons jusqu'ici toujours fait usage, représentation dans le demi-espace ( $\tau > 0$ ,  $O\xi\eta\tau$ ) et représentation projective à l'intérieur de la sphère unité  $\Sigma$ .

*Premier exemple* ( $\mu = 3 = n$ ). — On a trois demi-sphères représentatives  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  pour  $f_1, f_2, f_3$ ; leurs équateurs sont les cercles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . La forme du domaine D dépend des positions mutuelles de ces trois cercles.

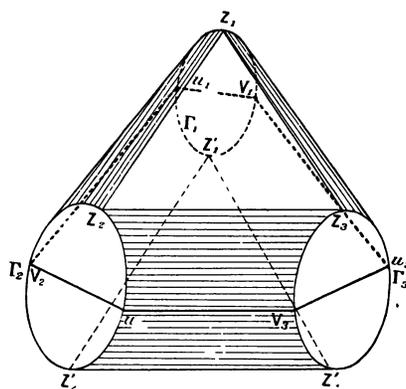
Pour simplifier, supposons ces trois cercles extérieurs deux à deux. Sur la sphère  $\Sigma$  il leur correspond trois cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  non sécants deux à deux et tels que le plan de chacun d'eux laisse d'un même côté les deux autres cercles.  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  ont leurs points représentatifs  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  sur  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ou, avec la représentation projective, à l'intérieur de  $\Sigma$  respectivement dans les plans de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ . Si  $t_1^2, t_2^2, t_3^2$  varient,  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  décrit l'intérieur et le périmètre du triangle  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ . Si maintenant  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  varient dans leurs plans non euclidiens respectifs, on aperçoit le domaine D que va balayer le triangle  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ . Il est limité :

- 1° Par les plans des cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ;
- 2° Par les deux plans tangents à la fois à  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  qui comprennent dans leur angle ces trois cercles;

3° Par des portions de la surface des trois cônes du second degré à sommet extérieur à  $\Sigma$  qui passent respectivement par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , par  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , par  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_1$ . Ces trois cônes sont tangents aux deux plans précédents. Les portions de surface conique à choisir sont comprises entre les deux plans précédents et sont telles que la surface obtenue comme limite de  $D$ , à l'aide de 1°, 2° et 3°, soit partout convexe.

Nous représentons par un schéma le solide  $D$  obtenu dans ce cas. On n'oubliera pas, pour le bien voir dans l'espace, que les sommets des trois cônes  $(\Gamma_1\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_2\Gamma_3)$ ,  $(\Gamma_3\Gamma_1)$  sont sur une même droite  $\Delta$  située dans le plan polaire par rapport à  $\Sigma$  du point de rencontre des trois plans de  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  (<sup>1</sup>). Nous

Fig. 90.



figurons aussi sur ce schéma la section du solide par un plan quelconque passant par la droite  $\Delta$ . C'est un hexagone  $u_1v_1, u_3v_3, u_2v_2$ , convexe, dont trois côtés non consécutifs  $u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3$  sont les trois cordes découpées dans  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  par ce plan.

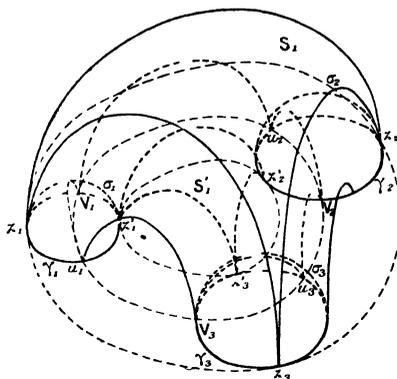
Le solide  $D$  est engendré par la surface intérieure à cet hexagone lorsque le plan précédent tourne autour de  $\Delta$  entre les deux positions limites qui sont les deux plans tangents à  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , et laissant les trois cercles d'un même côté. On a figuré en  $Z_1Z_2Z_3$  et  $Z'_1Z'_2Z'_3$  les deux triangles de contacts de ces deux plans.

Les aires de ces deux triangles font partie de la surface limite de  $D$ ; suivant leur périmètre, le plan de ces triangles se raccorde aux trois fragments de surface conique limitant  $D$  qu'engendrent  $v_1u_3, v_3u_2$  et  $v_2u_1$ ; enfin il y a les aires planes intérieures aux trois cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  qui achèvent de limiter  $D$ .

(<sup>1</sup>) Cela résulte immédiatement du théorème de Pascal sur l'hexagone (inscrit au cercle de section de  $\Sigma$  sur ce plan polaire) dont les sommets sont les intersections de ce plan polaire avec  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ .

Si l'on passe maintenant à la représentation dans le demi-espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau > 0$ ) aux trois plans de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  correspondent les trois demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Aux deux plans  $Z_1Z_2Z_3$  et  $Z'_1Z'_2Z'_3$  qui touchent les trois cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  correspondent les deux sphères  $S_1$  et  $S'_1$  orthogonales au plan  $O\xi\eta$  touchant  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  avec contacts de même nature (l'une extérieurement, l'autre intérieurement en  $z'_1, z'_2, z'_3$ ). Aux portions de surfaces coniques passant

Fig. 91.



par  $(\Gamma_1\Gamma_2), (\Gamma_2\Gamma_3), (\Gamma_3\Gamma_1)$  correspondront ici trois portions de surfaces cyclides orthogonales au plan  $O\xi\eta$  passant par  $(\gamma_1\gamma_2), (\gamma_2\gamma_3)$  et  $(\gamma_3\gamma_1)$ , ces portions de surfaces cyclides se raccordant :

1° A l'aire limitée sur la sphère  $S_1$  par le triangle curviligne dont les côtés sont les cercles orthogonaux au plan  $O\xi\eta$  décrits sur  $z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1$  comme diamètres ;

2° A l'aire limitée sur la sphère  $S'_1$  par le triangle curviligne  $z'_1z'_2z'_3$  analogue au précédent.

Le volume  $D$  repose donc en quelque sorte sur le plan  $O\xi\eta$  par trois pieds évidés par les sphères  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  dont les bords seraient les cercles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

Si à  $D$  on adjoint le volume symétrique par rapport au plan  $O\xi\eta$ , on a, en faisant abstraction de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , un volume limité par une *surface à trois trous* composée de trois portions de cyclides et de deux portions de sphères tangentes aux trois cyclides précédentes. Le schéma adjoint à cet exemple figure : 1° la portion de sphère  $S_1$ , limitée par les demi-cercles de diamètre  $z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1$ ; 2° trois portions de surface cyclide raccordées à cette portion de sphère  $S_1$  le long de ces frontières : la première de ces cyclides allant de l'arc  $z_1u_1z'_1$  de  $\gamma_1$  à l'arc  $z_3u_3z'_3$  de  $\gamma_3$ ; la deuxième allant de l'arc  $z_3u_3z'_3$  de  $\gamma_3$  à l'arc  $z_2u_2z'_2$  de  $\gamma_2$ ; la troisième allant de l'arc  $z_2u_2z'_2$  de  $\gamma_2$  à l'arc  $z_1u_1z'_1$  de  $\gamma_1$ ; 3° la portion de sphère  $S'_1$  limitée par les demi-cercles de diamètre  $z'_1z'_2, z'_2z'_3, z'_3z'_1$  et raccordée

le long de ses côtés aux trois portions de cyclides précédentes. On a figuré la section du volume D par une demi-sphère S du faisceau  $(S, S')$  qui coupe  $\sigma_1$  suivant le demi-cercle  $u_1 v_1$ ,  $\sigma_2$  suivant  $u_2 v_2$ , et  $\sigma_3$  suivant  $u_3 v_3$ . Ces trois demi-cercles sont, sur la demi-sphère S, trois côtés non consécutifs d'un hexagone curviligne de sommets  $u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3$  (hexagone non euclidien convexe) dont les trois autres côtés sont les demi-cercles de diamètre  $v_1 u_2, v_2 u_3, v_3 u_1$  suivant lesquels S coupe les trois portions de cyclide qui limitent D; cet hexagone limite sur S une aire qui est la section du volume D par S. La représentation se simplifie un peu si l'on suppose que  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sont trois cercles égaux dont les centres forment un triangle équilatéral. Alors les portions de cyclide deviennent des *demi-torcs* égaux (en entendant par là la surface engendrée par un demi-cercle tournant autour d'une droite de son plan, qui est quelconque par rapport au diamètre du demi-cercle; ici elle serait inclinée à  $60^\circ$  sur ce diamètre).

*Deuxième exemple* ( $\mu = 1, n = 3$ ). — Deux cas sont possibles.

Prenant la représentation projective, ou bien le plan du cercle  $\Gamma_1$  représentatif de  $f_1$  sur  $\Sigma$ , laisse d'un même côté  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  points représentatifs de  $f_2$  et  $f_3$  intérieurs à  $\Sigma$ , ou bien il les laisse de part et d'autre.

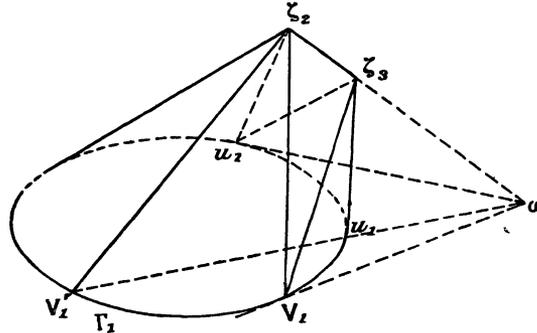
Dans le premier cas,  $\zeta_2 \zeta_3$  perce le plan de  $\Gamma_1$  en  $\omega$ , intérieur ou extérieur à  $\Gamma_1$ ;

Dans le deuxième cas,  $\zeta_2 \zeta_3$  perce le plan de  $\Gamma_1$  en  $\omega$  intérieur à  $\Gamma_1$ .

$\varphi_1$  associée à  $f_1$  a un point représentatif  $\zeta_1$  à l'intérieur du cercle  $\Gamma_1$  dans le plan de  $\Gamma_1$ . Lorsque  $t_1^i, t_2^i, t_3^i$  varient,  $\zeta$  représentatif de  $\varphi$  associée à  $f$  décrit l'intérieur et le périmètre du triangle  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ . Lorsque  $\zeta_1$  décrit maintenant tout l'intérieur de  $\Gamma_1$ , le volume D balayé par ce triangle est limité :

Dans le premier cas : 1° par la surface du cercle  $\Gamma_1$ ; 2° par les aires des deux triangles  $\zeta_2 \zeta_3 u_1$  et  $\zeta_2 \zeta_3 v_1$ , dont les plans sont les plans tangents à  $\Gamma_1$  menés

Fig. 92.

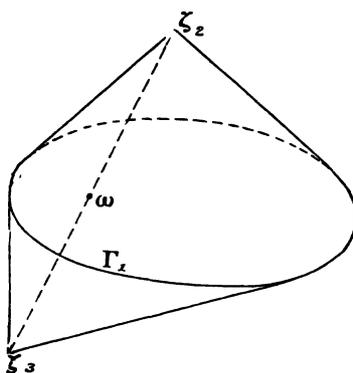


par  $\zeta_2 \zeta_3$ ; 3° par deux portions de surface conique ayant pour sommets respectivement  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ , et pour directrices chacun des deux arcs en lesquels  $u_1$  et  $v_1$  partagent  $\Gamma_1$ . Ces deux portions de surface se raccordent d'ailleurs suivant les

droites  $\zeta_2 u_1, \zeta_2 v_1, \zeta_3 u_1, \zeta_3 v_1$ , aux deux triangles du 2°. On a figuré la section du volume D par un plan  $\zeta_2 \zeta_3 \omega u'_1 v'_1$  passant par  $\zeta_2 \zeta_3$ . C'est l'aire intérieure au quadrilatère  $\zeta_2 \zeta_3 u'_1 v'_1$  (1).

Dans le deuxième cas, par les deux portions de surface conique ayant respec-

Fig. 93.



tivement pour sommets  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  et pour directrice  $\Gamma_1$ , ces deux portions étant limitées à leur sommet d'une part et à leur directrice de l'autre. D est dans ce cas une espèce de double cône.

Comme on sait facilement passer de la représentation projective à la représentation dans le demi-espace  $O\xi\eta\tau$  ( $\tau > 0$ ), nous n'insisterons pas sur cette deuxième représentation du volume D, qui est immédiate.

Le premier cas correspondra au cas où  $\sigma_1$  laisse  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  d'un même côté; le deuxième cas correspondra au cas où  $\sigma_1$  laisse  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  de part et d'autre.

Dans le premier cas (et en envisageant seulement l'hypothèse qui correspond, dans la représentation projective, à  $\omega$  intérieur à  $\Gamma_1$ ), D sera limité : 1° par  $\sigma_1$ ; 2° par deux portions de surface sphérique passant par  $\zeta_2 \zeta_3$  (orthogonales au plan  $O\xi\eta$ ) et tangentes à  $\sigma_1$  en  $u_1$  et  $v_1$ , correspondant aux triangles  $\zeta_2 \zeta_3 u_1$  et  $\zeta_2 \zeta_3 v_1$ , de la première représentation; 3° par deux portions de surfaces cyclides (orthogonales à  $O\xi\eta$ ) ayant pour point conique respectivement  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ , et passant respectivement par chacun des deux arcs en lesquels  $u_1, v_1$  découpent  $\gamma_1$ .

Dans le deuxième cas, D sera limité par les deux portions de cyclides ayant  $\gamma_1$  pour directrice et respectivement  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  pour points coniques; le volume D contiendra dans ce cas à son intérieur la demi-sphère  $\sigma_1$ .

Ces deux exemples suffisent à rendre compte de la multiplicité des formes

(1) Ceci dans l'hypothèse où  $\omega$  est extérieur à  $\Gamma_1$ ; si  $\omega$  est intérieur à  $\Gamma_1$ , D est limité simplement : 1° par la surface de  $\Gamma_1$ ; 2° par la surface conique, de directrice  $\Gamma_1$ , dont le sommet est celui des deux points  $\zeta_2$  ou  $\zeta_3$  qui est le plus éloigné de  $\omega$ .

que peut affecter le domaine D. Sa surface limite pourra admettre certains des  $\zeta_k$  ( $k = \mu + 1, \dots, n$ ) pour points coniques; elle pourra comprendre certaines des demi-sphères  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) par lesquelles elle abordera normalement le plan  $O\xi\eta$ , elle pourra aussi être limitée par des fragments de surfaces cyclides (normales à  $O\xi\eta$ ) passant par tout ou partie des cercles  $\gamma_i$ , équateurs des demi-sphères  $\sigma_i$  précédentes, etc.

Dans chaque cas, l'étude du domaine D résultera de la disposition des éléments représentatifs des formes  $f_i$  constitutives de  $f$ . Un peu de réflexion suffira toutefois pour se rendre compte que *tous les cercles*  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) appartiennent à la surface limite de D.

Dès lors, pour avoir l'ensemble des substitutions (S) auxquelles conduit la réduction continue, il suffira de considérer tous les pentaèdres  $\pi$  de la division classique de l'espace avec lesquels D a au moins un point commun; ils forment un ensemble ( $\pi$ ) et (S) comprend toutes les substitutions modulaires qui transforment en  $\pi_0$  chacun des pentaèdres de l'ensemble ( $\pi$ ).

Le domaine D abordant le plan  $O\xi\eta$  par tous les cercles  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ), on voit que ( $\pi$ ) compte une infinité de pentaèdres, donc (S) une infinité de substitutions. L'ensemble des formes ( $f$ ) associé à  $f$  compte donc une infinité de formes.

Si l'on passe de la forme proposée  $f$  à une forme équivalente F,

$$F = F_1 F_2 \dots F_n \quad \text{avec} \quad F_i = f_i S \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on verra de suite que les domaines D et  $\omega$  associés à  $f$  et F se transforment l'un dans l'autre par la transformation T du demi-espace que définit la substitution S par laquelle on passe de  $f$  à F ( $F = fS$ ,  $\omega = DT$ ). D'où il suit que l'ensemble ( $f$ ) que la réduction continue associe à  $f$  est le même, quelle que soit la forme équivalente à  $f$  dont on parte. Ces formes de ( $f$ ) sont les formes équivalentes à  $f$  pour lesquelles le domaine D associé a au moins un point commun avec  $\pi_0$ .

Passant maintenant à la recherche d'une réduite dans l'ensemble ( $f$ ) qui servira à représenter la classe entière des formes équivalentes à  $f$ , on aura des conclusions en tout pareilles à celles qui ont été exposées en détail à propos de la réduction des formes biquadratiques; il n'y a simplement, comme on le verra de suite, qu'une plus grande longueur dans les écritures. On reconnaîtra ainsi qu'il est possible de limiter les valeurs absolues des coefficients de toute forme F

de l'ensemble ( $f$ ) à l'aide de la seule expression  $\theta = \frac{\delta^n}{t_1' t_2' \dots t_n'}$  (1); les seconds membres des inégalités de limitation étant des puissances de  $\theta$  d'exposants bien

---

(1)  $\delta$  est, comme toujours, le déterminant de la forme  $\varphi$ .

déterminés ne dépendant que du rang du coefficient limité dans la forme  $F$  envisagée. Dans certaines de ces inégalités, le coefficient de la puissance de  $\theta$  contiendra en *dénominateur* la valeur absolue du premier coefficient de  $F$  (coefficient de  $X^n Y^m$ ) à une certaine puissance tout comme on l'a vu pour les formes biquadratiques, en sorte que la limitation est illusoire si le premier coefficient de  $F$  est nul, ce qui peut arriver si la forme proposée  $f$  peut s'annuler pour des valeurs entières de  $x, y$ , c'est-à-dire si elle peut représenter zéro.

On remarquera que cette quantité  $\theta = \frac{\delta''}{t_1'' \dots t_n''}$  joue un rôle essentiel dans la réduction. Si l'on considère deux formes  $f$  et  $\mathcal{F}$  équivalentes, et, pour des valeurs correspondantes des paramètres,  $\varphi$  et  $\Phi$  qui leur sont associées (c'est-à-dire telles que  $\Phi = \varphi S$  si  $\mathcal{F} = fS$ ), la fonction  $\theta$  prend les mêmes valeurs. D'où se conclut que les fonctions  $\theta$  et  $\Theta$  relatives à ces deux formes prennent le même ensemble de valeurs lorsque les paramètres de la réduction continue varient de toutes les façons possibles.

Elles ont donc le même *minimum* que, par définition, on appellera le *déterminant de  $f$* . Toutes les formes équivalentes à  $f$  ont même déterminant.

La (ou les) *correspondante de  $f$*  sera la (ou les) forme définie  $\varphi$  d'Hermite associée à  $f$  pour les valeurs des paramètres qui rendent  $\theta$  minimum. Les correspondantes  $\varphi$  et  $\Phi$  de deux formes équivalentes  $f$  et  $\mathcal{F}$  s'équivalent par la même substitution que  $f$  et  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F} = fS, \Phi = \varphi S$ ).

La (ou les) *réduite équivalente à  $f$*  sera la (ou les) forme de l'ensemble ( $f$ ) dont la (ou les) correspondante est une forme d'Hermite définie réduite.

Deux formes équivalentes ont mêmes réduites et ceci ramène l'équivalence de deux formes à l'identité entre leurs réduites ou leurs groupes de réduites.

Sans insister sur la question de l'existence du minimum de  $\theta$ , on reconnaîtra que les conclusions affirmées relativement à celles des formes biquadratiques dont les coefficients sont entiers, sont valables ici encore, toujours sous la restriction qu'on écarte les formes susceptibles de représenter zéro. En effet, alors toute réduite  $F$  équivalente à  $f$  a ses coefficients entiers et son premier coefficient est sûrement  $\neq 0$  si la forme ne peut représenter zéro.

Dans les inégalités qui limitent les valeurs absolues des coefficients de  $F$ , on remplacera au second membre, lorsqu'il y figurera dans le dénominateur, le premier coefficient de  $F$  par  $un$ , qui ne lui est pas supérieur en valeur absolue; ces seconds membres seront alors des quantités parfaitement déterminées par la connaissance de  $\theta$ , déterminant de la forme  $f$ . Si ce déterminant est donné, chacun des coefficients d'une réduite  $F$  (à coefficients entiers) ayant ce déterminant ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs, d'où les deux conséquences :

1° Une forme à coefficients entiers du type  $f = f_1 f_2 \dots f_n$  (où les  $\mu$  premières formes sont formes d'Hermite indéfinies  $\mu \neq 0$ ) et non susceptibles de

représenter zéro (ce qui arrivera si aucune des formes  $f_i$  ne peut représenter zéro) n'a jamais qu'un nombre limité de réduites équivalentes (puisque toutes ces réduites ont même déterminant que  $f$ ).

2° Les formes à coefficients entiers du type  $f = f_1 f_2 \dots f_n$  décomposables en produit de  $n$  formes d'Hermite dont certaines sont indéfinies ( $n$  étant donné), non susceptibles de représenter zéro et ayant un même déterminant donné  $\theta$ , se répartissent en un nombre limité de classes (puisque à un  $\theta$  donné ne correspondent qu'un nombre fini de réduites possibles, donc de classes).

Revenant maintenant à l'existence du minimum de  $\theta$ , il est facile de voir que ce minimum existe en supposant, comme nous le faisons, que tous les  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont  $\neq 0$ .

En effet, si

$$f = f_1 \dots f_\mu f_{\mu+1} \dots f_n,$$

avec

$$f_i = a_i x x' - b_i x y' - b'_i x' y + c_i y y' \quad \left( \begin{array}{l} a_i c_i - b_i b'_i = -\delta_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, \mu \\ a_k c_k - b_k b'_k = \delta_k \text{ pour } k = \mu + 1, \dots, n \end{array} \right);$$

et si l'on pose

$$\varphi_i = \sigma_i x x' - \beta_i x y' - \beta'_i x' y + \gamma_i y y' \quad [\alpha_i \gamma_i - \beta_i \beta'_i = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)],$$

$\varphi_i$  étant, lorsque  $f_i$  est indéfinie ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) une forme d'Hermite définie associée à  $f_i$  par le procédé que nous connaissons, et étant *identique* à  $f_i$  lorsque  $f_i$  est définie ( $i = \mu + 1, \dots, n$ ): la forme  $\varphi$  associée à  $f$  est

$$\varphi = t_1^2 \varphi_1 + \dots + t_n^2 \varphi_n = p x x' - q x y' - q' x' y + r y y'$$

avec

$$\begin{aligned} p &= \sum_1^n t_i^2 \sigma_i, \\ q &= \sum_1^n t_i^2 \beta_i, \\ q' &= \sum_1^n t_i^2 \beta'_i, \\ r &= \sum_1^n t_i^2 \gamma_i. \end{aligned}$$

Le déterminant  $\delta$  de  $\varphi$  est

$$\delta = pr - qq' = \sum_1^n t_i^2 \delta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i^2 t_j^2 \delta_{i,j} \quad (i \neq j)$$

avec

$$\delta_{i,j} = \alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i - \beta_i \beta'_j - \beta'_j \beta_i \quad (i \neq j).$$

Cette expression de  $\delta_{i,j}$  a été souvent rencontrée dans le Mémoire actuel; on

sait qu'elle est toujours positive et qu'on a  $\delta_{ij} \geq 2\sqrt{\delta_i \delta_j}$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $\zeta_i$  et  $\zeta_j$ , représentatifs de  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$ , sont confondus. D'ailleurs, la façon dont on a rattaché  $\delta_{ij}$  à la distance non euclidienne de  $\zeta_i$  à  $\zeta_j$  prouve que  $\delta_{ij}$  devient infinie lorsqu'un des points  $\zeta_i$  ou  $\zeta_j$  tend vers le plan  $O\xi\eta$  (ou les deux à la fois sans être confondus).

Envisageant alors

$$\theta = \frac{\delta^{\frac{n}{2}}}{t_1 \dots t_n} = \frac{(\sum T_i \delta_i + \sum T_i T_j \delta_{ij})^{\frac{n}{2}}}{T_1 \dots T_n} \quad (\text{avec } T_i = t_i^2),$$

on voit facilement que  $\delta_{ij} \geq 2\sqrt{\delta_i \delta_j}$  entraîne

$$\sum T_i \delta_i + \sum T_i T_j \delta_{ij} \geq \sum T_i \delta_i + 2 \sum T_i T_k \sqrt{\delta_i \delta_j} = [\sum T_i \sqrt{\delta_i}]^2.$$

Donc

$$\theta \geq \frac{(\sum T_i \sqrt{\delta_i})^n}{T_1 \dots T_n};$$

les  $\delta_i$  sont des nombres positifs fixes tous supérieurs à un nombre positif  $\lambda^2 \neq 0$ .

Donc

$$\theta \geq \frac{\lambda^n (\sum T_i)^n}{T_1 \dots T_n} \quad \text{et} \quad \frac{(\sum T_i)^n}{T_1 \dots T_n} \geq n^n.$$

Donc

$$\theta \geq \lambda^n n^n \neq 0.$$

D'ailleurs, l'expression de  $\theta$  et les inégalités précédentes prouvent que  $\theta$  devient infinie si certains des nombres  $t_i$  s'annulent (on ne doit pas les supposer tous nuls à cause de l'homogénéité de  $\theta$ ;  $\theta$  devient de même infinie si, les  $t_i$  restant fixes, un des  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) (ou plusieurs) tendent vers le plan  $O\xi\eta$  sur la sphère  $\sigma_i$ . De là se conclut aisément l'existence d'un système au moins de valeurs des  $t_i$ , toutes  $\neq 0$ , et d'un système au moins de positions des  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) hors du plan  $O\xi\eta$ , pour lesquelles  $\theta$  atteint son minimum. Et c'est là le résultat qu'il fallait obtenir.

*Remarques.* — Il y a des cas où la position des  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ) correspondant au minimum de  $\theta$  s'aperçoit immédiatement. S'il est possible, en effet, de rendre *simultanément* tous les  $\delta_{ij}$  égaux à leur minimum, il est clair que les positions correspondantes des  $\zeta_i$  sont les positions cherchées. Par exemple, soit  $\mu = n = 3$ , et, de plus, supposons que les trois demi-sphères  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  représentatives de  $f_1, f_2, f_3$  aient un point commun  $\zeta$  hors du plan  $O\xi\eta$ . Si  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  représentatifs de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  associées à  $f_1, f_2, f_3$  sont confondus avec  $\zeta$ , il est clair que  $\delta_{12}, \delta_{23}$  et  $\delta_{31}$  sont égaux à leurs minimums respectifs  $2\sqrt{\delta_1 \delta_2}, 2\sqrt{\delta_2 \delta_3}, 2\sqrt{\delta_3 \delta_1}$ . Il en est de même dans le cas plus général  $\mu = n$  ( $n$  quelconque), si  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  passent par un même point  $\zeta$  hors du plan  $O\xi\eta$ .

Ce point  $\zeta$  sera aussi le point représentatif de la correspondante de  $f$ . Ayant  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , et par suite  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , rien n'est plus facile que de déterminer ensuite les valeurs des  $t_i$  correspondant au minimum puisqu'alors

$$\theta = \frac{(\sum t_i \delta_i + 2 \sum t_i^2 \sqrt{\delta_i \delta_j})^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2} = \frac{(\sum t_i \sqrt{\delta_i})^2}{t_1^2 \dots t_n^2}$$

et le minimum de  $\theta$  correspond alors visiblement aux valeurs des  $t_i$  telles que

$$t_1 \sqrt{\delta_1} = t_2 \sqrt{\delta_2} = \dots = t_n \sqrt{\delta_n}.$$

Pour prendre un autre exemple, supposons que tous les  $\zeta_k$  ( $k = \mu + 1, \dots, n$ ) soient dans un même plan normal au plan  $O\xi\eta$ , qui soit aussi *plan diamétral* de toutes les demi-sphères  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ). Il est clair encore, par un peu de réflexion, que les points  $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$  correspondant au minimum de  $\theta$  *seront situés dans ce plan diamétral, ainsi d'ailleurs que le point  $\zeta$  représentatif de la correspondante* : cela résulte immédiatement de la relation qui lie  $\delta_{ij}$  à la distance non euclidienne de  $\zeta_i$  à  $\zeta_j$ , ces deux quantités variant toujours dans le même sens. Nous avons insisté là-dessus dans la deuxième Partie, à propos de l'application de la méthode générale aux formes binaires ordinaires à *coefficients réels* pour lesquelles le système des points racines admet un plan de symétrie normal au plan  $O\xi\eta$ , qui est le plan  $O\xi\tau$  lui-même. Nous nous bornons maintenant aux indications précédentes.

---

---

## CHAPITRE VI.

LES FORMES BINAIRES A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR  
QUI RESTENT INVARIANTES PAR UN GROUPE DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

---

I. L'étude des groupes de substitutions linéaires susceptibles de conserver une forme binaire à indéterminées conjuguées s'ouvre par le Mémoire de 1884 où M. Picard établit l'existence d'un groupe fuchsien de substitutions modulaires conservant toute forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers.

Au cours de l'étude des formes biquadratiques à coefficients entiers décomposables en produit de formes d'Hermite, nous avons conclu à l'existence d'un groupe cyclique infini de substitutions hyperboliques modulaires, conservant une telle forme lorsque les deux formes de décomposition sont indéfinies et ont leurs demi-sphères représentatives sécantes. Nous avons rattaché ce groupe au groupe commun aux groupes conservatifs de deux formes d'Hermite à coefficients entiers  $\varphi$  et  $\psi$  indéfinies et à demi-sphères représentatives sécantes, au moyen desquelles la forme proposée s'exprimait (à un facteur rationnel réel près) par la formule

$$f = a\varphi^2 + 2b\varphi + c\psi^2 \quad (a, b, c \text{ entiers réels; } b^2 - ac > 0).$$

Mais la généralisation suivante vient aussitôt à l'esprit.  $\varphi$  et  $\psi$  étant toujours deux formes d'Hermite à coefficients entiers, indéfinies, et à demi-sphères représentatives sécantes, envisageons la forme

$$f = a_0\varphi^n + a_1\varphi^{n-1}\psi + a_2\varphi^{n-2}\psi^2 + \dots + a_n\psi^n$$

qui est un polynôme homogène et de degré  $n$  en  $\varphi$  et  $\psi$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  étant des nombres réels quelconques. C'est en  $x, y, x', y'$ , une forme à indéterminées conjuguées de degré  $2n$ . *Il existe un groupe cyclique infini de substitutions modulaires hyperboliques conservant à la fois  $\varphi$  et  $\psi$ , et par suite conservant  $f$ .*

Voici donc un fait nouveau : *Il existe des formes à indéterminées conjuguées de degré aussi élevé qu'on voudra qui admettent un groupe infini de transformations linéaires en elles-mêmes.*

Et ce fait semble créer une distinction profonde entre les formes binaires ordinaires et les formes binaires à indéterminées conjuguées, puisqu'il est bien

connu qu'une forme binaire ordinaire de degré  $> 2$  ne peut admettre qu'un *groupe fini* de transformations linéaires en elle-même (1). Nous allons cependant établir le fait suivant : *Une forme binaire à indéterminées conjuguées indécomposable (2) ne peut admettre qu'un groupe fini de transformations linéaires en elle-même.*

L'exception signalée plus haut, l'existence de formes admettant un groupe conservatif infini est *unique*. Le type

$$f = a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n$$

est en effet un type de forme décomposable

$$f = a_0 [\varphi - \lambda_1 \psi] [\varphi - \lambda_2 \psi] \dots [\varphi - \lambda_n \psi],$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  étant réels ou imaginaires conjugués deux à deux. *Toute forme admettant un groupe conservatif infini se ramène à ce type.*

Nous considérerons la courbe du plan  $O\xi\eta$  dont l'équation est

$$f(z, \iota) = 0 \quad [f(x, y) \text{ étant la forme donnée}],$$

ou mieux la projection stéréographique de cette courbe sur la sphère unité  $\Sigma$ , comme on a l'habitude de le faire. C'est une courbe algébrique  $\Gamma$ , du degré  $2n$ , si  $2n$  est le degré de la forme  $f$  proposée. Supposons que la forme admette un groupe  $G$  de transformations linéaires en elle-même, cela veut dire qu'il existe un groupe  $G$  de collinéations respectant l'intérieur de la sphère  $\Sigma$ , la surface de  $\Sigma$  et la courbe  $\Gamma$  elle-même.

Une substitution  $S$  du groupe peut être elliptique, hyperbolique, loxodromique, ou parabolique. Je dis qu'elle est sûrement elliptique si  $f$  ou  $\Gamma$  est indécomposable.

En effet, si  $S$  laisse  $f$  inaltérée, la collinéation  $T$  qui lui correspond laisse  $\Gamma$  inaltérée, et il en est de même de tous les  $T^k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) qui forment un groupe infini, si  $S$  est hyperbolique, parabolique, ou loxodromique.

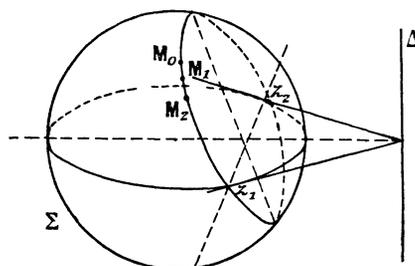
Si  $S$  est hyperbolique,  $T$  est une rotation non euclidienne autour d'une droite  $\Delta$  extérieure à  $\Sigma$ , les points doubles  $z_1, z_2$  sont les points de contact des plans tangents menés par  $\Delta$ . D'un point  $M_0$  de la courbe  $\Gamma$  on déduit, par la transformation  $T$ , un point  $M_1$  qui est aussi sur la courbe  $\Gamma$ , et par tous les  $T^k$  une infinité de points  $M_k$  tous situés sur  $\Gamma$ . Or ces  $M_k$  ( $k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ ) sont sur un cercle de  $\Sigma$  passant par  $z_1$  et  $z_2$ . Ce cercle ne peut avoir ainsi une infinité de points communs avec  $\Gamma$  que *s'il fait partie de  $\Gamma$* , et ceci n'est pas

(1) Voir KLEIN, *Math. Annalen*, t. IX.

(2) Nous dirons que la forme  $f(x, y)$  est indécomposable si la courbe  $f(z, \iota) = 0$  du plan  $O\xi\eta$  est indécomposable. C'est là une dénomination bien naturelle.

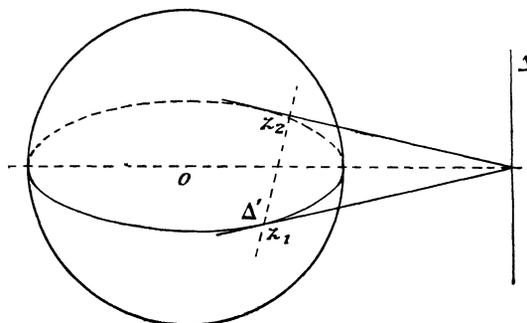
possible si  $\Gamma$  est indécomposable. Si l'on suppose que  $\Delta$  devient tangente,  $z_1, z_2$  devenant la tangente perpendiculaire, on voit que le même raisonnement prouve que si  $\Gamma$  est indécomposable,  $S$  ne peut être parabolique.

Fig. 94.



Si  $S$  est loxodromique  $z_1$  et  $z_2$  étant ses points doubles,  $T$  est une suite de

Fig. 95.



deux rotations non euclidiennes autour de  $\Delta$  et  $\Delta'$ ,  $\Delta'$  étant la droite  $z_1, z_2$  et  $\Delta$  sa conjuguée par rapport à  $\Sigma$ .

Si l'on écrit  $S$  sous la forme

$$\left( \frac{z - z_1}{z - z_2} = r e^{i\theta} \frac{Z - \bar{z}_1}{Z - \bar{z}_2} \right) \quad (r \text{ réel } > 0, -\pi < \theta < +\pi),$$

la rotation autour de  $\Delta'$  est d'angle non euclidien  $\theta$ . D'un point  $M_0$  de la courbe  $\Gamma$ , en lui appliquant toutes les transformations

$$T^k \quad (k = -\infty, \dots, 1, 0, 1, \dots, +\infty),$$

on déduit une infinité de points de la courbe  $\Gamma$ ,  $M_1, M_2, \dots$ , et  $M_{-1}, M_{-2}, \dots$

Si  $\theta$  est incommensurable à  $2\pi$ , cette double série de points admet les points  $z_1$  et  $z_2$  pour points asymptotes, c'est-à-dire que dans toute sphère de centre  $z_1$  ou  $z_2$ , si petite soit-elle, il y a une infinité de ces points  $M_k$ , tels que les

plans  $z_1, z_2, M_k$  forment autour de  $z_1, z_2$  un ensemble partout dense, et ceci est impossible puisque  $\Gamma$  est algébrique <sup>(1)</sup>.

Si  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$ ,  $\theta = \frac{2p\pi}{m}$  ( $p$  et  $m$  entiers premiers entre eux) les points  $M_k$  se répartissent sur  $m$  cercles fixes de  $\Sigma$  passant par  $z_1$  et  $z_2$ , faisant entre eux l'angle  $\frac{2\pi}{m}$ . Sur chacun de ces angles il y a une infinité de points  $M_k$ , ayant  $z_1$  et  $z_2$  pour points limites. C'est là encore une conclusion contradictoire puisque  $\Gamma$  est algébrique et indécomposable.

Donc une substitution  $S$  conservant  $f$  ne peut être qu'elliptique. Elle a deux points doubles  $z_1, z_2$  sur  $\Sigma$  et la  $T$  correspondante est une rotation non euclidienne d'angle  $\theta$  autour de  $z_1, z_2$ , si  $S$  s'écrit

$$\left( \frac{z - z_1}{z - z_2} = e^{i\theta} \frac{Z - z_1}{Z - z_2} \right).$$

Si l'on considère un plan passant par  $\Delta$  conjuguée de la droite  $z_1, z_2$  relativement à  $\Sigma$ , il est conservé par toutes les  $T^k$ . D'un point  $M_0$  où ce plan coupe la courbe  $\Gamma$  on déduit une série de points  $M_k$  de la courbe  $\Gamma$  en appliquant à ce  $M_0$  toutes les  $T^k$ . Tous ces points sont sur le cercle d'intersection de  $\Sigma$  et du plan considéré.

Si  $\theta$  est incommensurable à  $2\pi$ , ces points sont tous distincts et sont en infinité dénombrable, ce qui est contradictoire avec le fait que  $\Gamma$  étant algébrique de degré  $2n$  et indécomposable, ne peut être coupée par le plan précédent qu'en  $2n$  points.

Donc  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$ ,  $\theta = \frac{2p\pi}{m}$  ( $p$  et  $m$  premiers entre eux) et sûrement  $m \leq 2n$ .

On peut, comme on sait, choisir dans ce cas parmi les  $S^h$  une substitution  $S'$  pour laquelle le  $\theta$  soit  $\frac{2\pi}{m}$  et telle que le groupe des  $S'^k$  soit identique à celui des  $S^h$ .

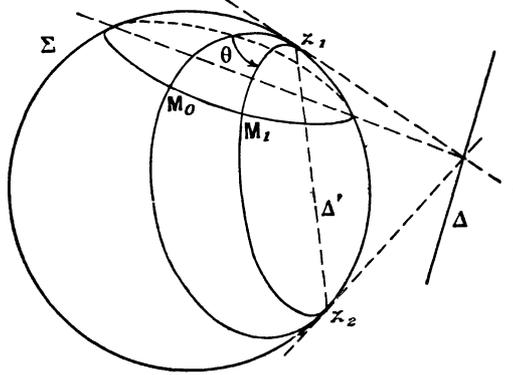
On est donc forcé de conclure que, si  $f$  de degré  $2n$  est indécomposable, le groupe qui la conserve ne peut être formé que de substitutions elliptiques, d'argument  $\theta = \frac{2k\pi}{m}$  ( $m \leq 2n$ ). C'est donc un groupe de substitutions elliptiques sans substitution infinitésimale. On conclut de suite, d'après une recherche connue, que c'est un groupe fini. Par une substitution linéaire préalable, la

<sup>(1)</sup> Ceci est vrai, que  $M_0$  soit réel ou imaginaire. Car si  $M_0$  est imaginaire, mais dans un plan  $z_1, z_2, M_0$  réel (qu'on peut choisir *a priori* tel), en considérant son conjugué  $M'_0$ , la droite réelle  $M_0 M'_0$  rencontre  $z_1, z_2$  et, en appliquant à cette droite toutes les  $T^k$ , les droites  $M_k M'_k$  tendent vers  $z_1$  et  $z_2$  respectivement pour  $k = \pm \infty$  et la conclusion précédente relative aux plans  $z_1, z_2, M_k$  est toujours vraie.

forme  $f$  se ramène à une forme pour laquelle le groupe conservatif des  $S$  correspond au groupe des rotations  $T$  qui conservent un des polyèdres réguliers convexes inscrits dans la sphère  $\Sigma$  (mentionnons aussi le *groupe du dièdre* qui n'entre pas dans la catégorie précédente).

Il nous reste maintenant à voir quelles sont *toutes* les formes à indéterminées

Fig. 96.



conjuguées qui admettent un *groupe infini* de transformations linéaires en elles-mêmes.

Un tel groupe n'étant pas fini, on n'a que les deux hypothèses suivantes :

1° Ou bien il contient une substitution hyperbolique, parabolique, ou loxodromique;

2° Ou bien il ne contient que des substitutions elliptiques, mais alors il contient *une substitution infinitésimale*.

Dans le premier cas, si  $z_1, z_2$  sont les points doubles de la substitution hyperbolique, le raisonnement fait précédemment prouvera que  $\Gamma$  (degré  $2n$ ) se compose de  $n$  cercles passant par  $z_1$  et  $z_2$ , ces cercles sont réels ou deux par deux imaginaires conjugués. Choissant arbitrairement deux cercles réels distincts des cercles de  $\Gamma$  et distincts l'un de l'autre, passant par  $z_1$  et  $z_2$ , représentant deux formes d'Hermité  $\varphi$  et  $\psi$  indéfinies, tout cercle faisant partie de  $\Gamma$  aura pour équation

$$\varphi(z, 1) + \lambda \psi(z, 1) = 0,$$

$\lambda$  étant réel si ce cercle est réel; à un groupe de deux cercles imaginaires conjugués correspondra l'ensemble des deux équations

$$\begin{aligned} \varphi + \lambda \psi &= 0, \\ \varphi + \lambda' \psi &= 0, \end{aligned}$$

$\lambda$  et  $\lambda'$  étant deux nombres complexes conjugués.

L'équation de  $\Gamma$  s'écrira ainsi

$$\prod_1^n (\varphi + \lambda_i \psi) = 0,$$

les  $\lambda_i$  étant réels ou deux par deux imaginaires conjugués; ou bien

$$a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n = 0,$$

les  $a_i$  étant réels.

Ceci signifie que la forme  $f$  proposée se laisse toujours ramener à la forme

$$f = a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n,$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant *deux formes d'Hermite indéfinies dont les demi-sphères représentatives* (de l'espace  $O\xi\eta\tau$ ) <sup>(1)</sup> *se coupent*.

Si le groupe conservatif de  $f$  comprend une substitution parabolique, on arrive à cette même conclusion, mais il faut supposer que les formes indéfinies  $\varphi$  et  $\psi$  ont leurs demi-sphères représentatives (de l'espace  $O\xi\eta\tau$ ) *tangentes*.

Si le groupe contient une substitution loxodromique

$$\left( \frac{z - z_1}{z - z_2} = r e^{i\theta} \frac{Z - z_1}{Z - z_2} \right),$$

on a vu qu'il fallait que  $\theta$  fût commensurable à  $2\pi$  pour ne pas aboutir à une conclusion contradictoire avec le fait que  $\Gamma$  est algébrique ( $\theta = \frac{2p\pi}{m}$ ,  $p$  et  $m$  premiers entre eux).  $z_1$  et  $z_2$  étant les points doubles de la substitution, on a vu que si  $M_0$  était un point de  $\Gamma$  le cercle  $z_1 z_2 M_0$  fait en ce cas partie de  $\Gamma$ , et il en est de même des  $m$  cercles qui s'en déduisent par des rotations non euclidiennes successives d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{m}$  autour de  $z_1 z_2$  ( $m \leq n$  si  $2n$  est le degré de  $\Gamma$ ).

Ceci prouve que  $m$  divise  $n$  et que la courbe  $\Gamma$  se décompose en  $n$  cercles passant par  $z_1 z_2$  [ $n = km$ ] formant  $k$  séries dont chacune comprend  $m$  cercles se déduisant de l'un d'entre eux par des rotations successives non euclidiennes d'angle  $\frac{2\pi}{m}$  autour de  $z_1 z_2$ .

La forme  $f$  se laisse encore ici ramener au type

$$f = a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n.$$

Les  $a_0, a_1, \dots, a_n$  réels ne sont plus arbitraires comme dans le cas où  $f$  admettait

(1) Alors toute substitution hyperbolique de points doubles  $z_1 z_2$  (intersections de  $\varphi$  et  $\psi$ ) et de déterminant 1 conservera  $f$ .

une substitution hyperbolique conservatrice;  $\varphi$  et  $\psi$  sont toujours deux formes indéfinies à demi-sphères représentatives sécantes. On peut d'ailleurs en ce cas donner une forme canonique simple de  $f$ . Par une transformation linéaire préalable, on peut supposer que  $z_1$  et  $z_2$  ont les valeurs  $(0, \infty)$ .

Les équations des  $m$  cercles de chaque série de  $\Gamma$  sont de la forme

$$\frac{z}{z'} - k = 0, \quad \frac{z}{z'} - k\omega = 0, \quad \dots, \quad \frac{z}{z'} - k\omega^{2(m-1)} = 0,$$

en posant  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ . Si  $k$  a son module égal à 1, ces cercles sont tous réels; si  $k$  a son module  $\neq 1$ , ces cercles sont tous imaginaires.

L'équation de chaque série est donc

$$\left(\frac{z}{z'} - k\right) \left(\frac{z}{z'} - k\omega\right) \dots \left(\frac{z}{z'} - k\omega^{2(m-1)}\right) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{z}{kz'} - 1\right) \left(\frac{z}{kz'} - \omega\right) \dots \left(\frac{z}{kz'} - \omega^{2(m-1)}\right) = 0,$$

$1, \omega, \dots, \omega^{m-1}$  sont les racines de  $\omega^m - 1 = 0$ .

Si  $m$  est impair  $1, \omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2(m-1)}$  représentent les nombres  $1, \omega, \dots, \omega^{m-1}$  rangés dans un certain ordre.

Si  $m$  est pair, les nombres  $1, \omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2(m-1)}$  sont deux à deux égaux et les  $\frac{m}{2}$  d'entre eux qui sont distincts sont les racines de

$$\omega^m - 1 = 0.$$

Donc si  $m$  impair

$$\left(\frac{z}{kz'} - 1\right) \left(\frac{z}{kz'} - \omega\right) \dots \left(\frac{z}{kz'} - \omega^{2(m-1)}\right)$$

est identique à

$$\left(\frac{z}{kz'}\right)^m - 1$$

et si  $m$  est pair, il est identique à

$$\left[\left(\frac{z}{kz'}\right)^{\frac{m}{2}} - 1\right]^2.$$

Donc si  $m$  est impair l'équation de l'ensemble des  $m$  cercles d'une série de  $\Gamma$  est

$$z^m - \lambda z'^m = 0,$$

$\lambda$  étant un nombre complexe quelconque; si  $m$  est pair c'est

$$\left[z^{\frac{m}{2}} - \lambda z'^{\frac{m}{2}}\right]^2 = 0,$$

ce qui s'explique par ce fait que les cercles *de la série envisagée sont alors deux à deux confondus*. Si l'on ne considère chacun qu'une fois, ainsi qu'il est naturel, on a toujours pour une série l'équation

$$z^m - \lambda z'^m = 0$$

et l'on peut supposer  $m$  impair <sup>(1)</sup>.

L'équation de chacune des  $k$  séries sera donc

$$z^m - \lambda_i z'^m = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

et l'équation de la courbe  $\Gamma$  sera obtenue en égalant à zéro un polynôme  $P(z^m, z'^m)$  homogène en  $z^m$  et  $z'^m$  et par rapport à l'ensemble de ces deux variables de degré  $K$ .

Il en résulte que la forme canonique de  $f$  sera, dans ces conditions, une forme à indéterminées conjuguées par rapport aux variables  $x^m, y^m$  et aux variables conjuguées  $x'^m, y'^m$  donnant naissance en la divisant par  $y^{km} y'^{km}$  à un polynôme homogène en  $z^m$  et  $z'^m$ ,  $P(z^m, z'^m)$  de degré  $k$  <sup>(2)</sup> par rapport aux variables  $z^m$  et  $z'^m$ .

Le polynôme homogène en  $z^m$  et  $z'^m$ ,  $P(z^m, z'^m)$  qui naît de la forme  $f(x, y)$  dans ce cas n'est pas quelconque. En effet, posant  $Z = z^m, Z' = z'^m$ , soit  $P(Z, Z')$  ce polynôme et  $\lambda_i = \frac{Z}{Z'}$  une de ses racines; si  $\lambda_i$  est une racine de module 1, la série correspondante de  $m$  cercles est réelle.

D'ailleurs son équation est

$$z^m - \lambda_i z'^m = 0$$

et la série conjuguée étant

$$z'^m - \lambda'_i z^m = 0$$

coïncide avec la précédente, puisque alors  $\lambda'_i = \frac{1}{\lambda_i}$ .

Mais si  $|\lambda_i| \neq 1$  la série est imaginaire.

La série conjuguée est alors

$$z^m - \frac{1}{\lambda'_i} z'^m = 0,$$

et elle fait aussi partie de  $\Gamma$ . Donc le polynôme en question n'admet que des

(1) Sinon,  $f$  se ramènerait au carré d'une forme de même nature où  $m$  serait impair.

(2) En posant

$$\begin{aligned} X &= x^m, Y = y^m, \\ X' &= x'^m, Y' = y'^m, \end{aligned}$$

on a

$$f = a_0 X^k Y'^k + a_1 X^{k-1} Y X' Y'^{k-1} + \dots + a_k X'^k Y^k.$$

Chaque monome de cette somme a le même exposant pour  $X$  et  $Y'$ , pour  $X'$  et  $Y$ , et la somme de ces deux exposants vaut  $k$ .

racines de module 1 ou des couples de racines tels que  $\lambda_i$  et  $\frac{1}{\lambda_i}$ , autrement dites racines sur le cercle trigonométrique ou symétriques par rapport à ce cercle (1). Il ne serait pas difficile de transformer ce cercle en l'axe réel et de ramener ce polynôme à un polynôme à coefficients réels; mais nous n'insisterons pas davantage sur ces calculs de détail.

2° Si le groupe infini conservatif de  $f$  ne contient que des substitutions elliptiques, il contient sûrement une substitution infinitésimale. Soient  $z_1$  et  $z_2$  ses points doubles. La  $T$  qui lui correspond est une rotation non euclidienne d'angle infiniment petit autour de  $z_1, z_2$ . D'un point  $M_0$  de  $\Gamma$  se déduisent par  $T$  et toutes ses puissances une infinité de points de  $\Gamma$  tous situés dans le plan déterminé par  $M_0$  et par  $\Delta$  droite conjuguée de  $z_1, z_2$  par rapport à  $\Delta$ . Ceci signifie que le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère  $\Sigma$  fait partie de  $\Gamma$ .  $\Gamma$  (de degré  $2n$ ) se compose ainsi de  $n$  cercles réels ou imaginaires conjugués deux à deux dont les plans passent tous par  $\Delta$ .  $\varphi$  et  $\psi$  étant deux formes d'Hermite distinctes, définies ou indéfinies, mais dont les cercles représentatifs sur  $\Sigma$  sont dans des plans réels passant par  $\Delta$ , les équations des cercles dont  $\Gamma$  est composée sont de la forme

$$\varphi(z, 1) + \lambda_i \psi(z, 1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$\lambda_i$  étant réel pour un cercle réel, et à deux cercles imaginaires conjugués correspondant deux valeurs conjuguées de  $\lambda_i$ . L'équation de  $\Gamma$  est donc encore de la forme

$$a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n = 0.$$

(1) Ceci est très facile à vérifier; la forme canonique de  $f$ , en posant

$$X = x^m, \quad Y = y^m, \quad X' = x'^m, \quad Y' = y'^m,$$

étant

$$f = a_0 X^k Y'^k + a_1 X^{k-1} Y Y'^{k-1} + \dots + a_k X'^k Y^k,$$

on voit de suite que  $a_0$  et  $a_k$  et d'une façon générale  $a_i$  et  $a_{k-i}$  sont imaginaires conjugués puisque  $f$  est toujours réelle. Le polynôme

$$\varphi(\zeta) = P\left(\frac{Z}{Z'}, 1\right) \left[\zeta = \frac{Z}{Z'}\right],$$

obtenu comme on sait par  $\zeta = z^m, z'^m = 1$ , est alors

$$\varphi(\zeta) = a_0 \zeta^k + \dots + a_k.$$

Les  $\zeta'$  conjugués des racines  $\zeta$  de  $\varphi(\zeta)$  sont racines de

$$\varphi'(\zeta) = a'_0 \zeta^k + \dots + a'_k$$

qui n'est autre que  $a_k \zeta^k + \dots + a_0$  puisque  $a_i$  et  $a_{k-i}$  sont imaginaires conjugués. Les  $\frac{1}{\zeta'}$  sont racines de

$$a_k + a_{k-1} \zeta + \dots + a_0 \zeta^k$$

qui est identique à  $\varphi(\zeta)$ . Donc  $\varphi(\zeta)$  jouit bien de la propriété énoncée.

Les  $a_i$  étant tous réels,  $\varphi$  et  $\psi$  étant deux formes d'Hermite dont les cercles représentatifs sur  $\Sigma$  (ou dans le plan  $O\xi\eta$ ) n'ont pas de point commun réel.

$f$  se laisse donc encore ramener au type

$$a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n$$

et elle se conserve par toute substitution elliptique ayant pour points doubles les deux points limites réels du faisceau déterminé par les deux cercles représentatifs de  $\varphi$  et  $\psi$ , cercles qui n'ont pas de point commun réel.

Ainsi se trouve démontrée la seconde assertion du début de ce Chapitre : que les seules formes à indéterminées conjuguées admettant un groupe infini de transformations linéaires en elles-mêmes sont du type

$$a_0 \varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} \psi + \dots + a_n \psi^n,$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant deux formes d'Hermite distinctes, les  $a_i$  étant des nombres réels d'ailleurs quelconques.

II. Nous allons maintenant indiquer comment on peut former les types canoniques de formes à indéterminées conjuguées qui admettent en elles-mêmes un des groupes finis connus de transformations linéaires.

Par une substitution linéaire préalable on peut supposer que ce groupe est l'un des groupes de rotations qui ramènent un polyèdre régulier sur lui-même (en y ajoutant la pyramide régulière ou la double pyramide qui correspondent au groupe du dièdre).

La forme  $f$  cherchée, de degré  $2n$ , divisée par  $y^n y'^n$  et égalée à zéro définit en posant  $z = \frac{x}{y}$ ,  $z' = \frac{x'}{y'}$  une courbe du plan  $\xi O \eta$  ( $z = \xi + i\eta$ ) d'équation  $f(z, 1) = 0$ , dont la projection sur la sphère unité  $\Sigma$  est une courbe  $\Gamma$  de degré  $2n$  qui correspond d'une manière bien déterminée et biunivoque à la forme  $f$ . Les deux problèmes : déterminer  $f$  ou déterminer  $\Gamma$  sont les mêmes. Et ici il s'agit de trouver une courbe  $\Gamma$  sphérique qui revienne sur elle-même par toutes les rotations qui ramènent sur lui-même un polyèdre régulier. Le cône de sommet  $O$ , de directrice  $\Gamma$ , est alors une des surfaces étudiées par M. Goursat dans une Note de son Mémoire : *Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier* (*Annales de l'École Normale*, 1887), car ce cône revient sur lui-même en même temps que  $\Gamma$ . On peut donc définir  $\Gamma$  comme l'intersection de  $\Sigma$  et d'une surface revenant sur elle-même par toutes les rotations du groupe d'un polyèdre. Et ces surfaces sont bien connues, et l'on donne le type de leur équation dans la Note du Mémoire cité plus haut.

Il y a ici des circonstances particulières,  $\Gamma$  est une courbe algébrique de

de degré  $2n$ ; comme elle dérive d'une courbe du plan  $\xi O \eta$  dont l'équation en  $\xi, \eta$  a ses coefficients réels, le cône de sommet  $O$ , de directrice  $\Gamma$ , est un cône algébrique dont l'équation est à coefficients réels, et il faut en tenir compte quand on écrira le type d'équation auquel il appartient. Enfin, il faudra tenir compte aussi que non seulement l'équation du cône ne doit pas changer, mais encore *la forme qui a donné naissance à  $\Gamma$  et à ce cône, ne doit pas changer* <sup>(1)</sup>.

Prenons par exemple le groupe du tétraèdre, désignons par  $X, Y, Z$ , les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point d'un cône qui se conserve par toute rotation de ce groupe et soit  $\varphi(X, Y, Z) = 0$  l'équation du cône. On voit immédiatement que le polynôme  $\varphi(X, Y, Z)$  doit être tel que par toute rotation du groupe, se traduisant par une substitution linéaire orthogonale sur  $X, Y, Z$ , il se reproduit à un facteur près.  $\varphi$  ayant tous ses coefficients réels, et la substitution précédente étant à coefficients réels, il est clair que le facteur sera *réel*, et il suit d'une discussion faite par M. Goursat, que ce ne peut être que  $+1$ .  $\varphi$  est donc un polynôme qui ne change pas par toute rotation du groupe envisagé, et l'on conclut, comme le fait M. Goursat, que c'est un *polynôme par rapport aux quatre fonctions particulières*

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}, \quad \frac{X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2}{2}, \quad \frac{XYZ}{2}, \quad \frac{(X^2 - Y^2)(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2)}{2};$$

$$\varphi(X, Y, Z)$$

$$= F\left[\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}, \frac{X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2}{2}, \frac{XYZ}{2}, \frac{(X^2 - Y^2)(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2)}{2}\right] = 0.$$

Il faut passer de là à la forme  $f$  en passant par l'intermédiaire de  $\Gamma$  et de sa projection stéréographique sur le plan  $\xi O \eta$ . A un point  $\xi, \eta$  de cette projection-là correspond un point  $X, Y, Z$  de la sphère donné par

$$X = \frac{2\xi}{r^2 + 1}, \quad Y = \frac{2\eta}{r^2 + 1}, \quad Z = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \quad (r^2 = \xi^2 + \eta^2)$$

(et l'on voit que  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ).

Avec  $z = \xi + i\eta$  et  $z' = \xi - i\eta$ , ceci s'écrit

$$X = \frac{z + z'}{z\bar{z}' + 1}, \quad Y = -i \frac{z - z'}{z\bar{z}' + 1}, \quad Z = \frac{z\bar{z}' - 1}{z\bar{z}' + 1}.$$

L'équation de la projection stéréographique en question s'obtient donc en remplaçant dans l'équation du cône  $\Gamma$

$$F\left[\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}, \frac{X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2}{2}, \frac{XYZ}{2}, \frac{(X^2 - Y^2)(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2)}{2}\right] = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> Ces remarques suppriment dans le cas qui nous occupe les multiplicateurs  $M$  introduits par M. Goursat dans l'équation des surfaces qu'il recherche, pages 338 et 339 du Mémoire cité.

X, Y, Z par les expressions précédentes,  $X^2 + Y^2 + Z^2$  par 1, et chassant les dénominateurs.

Or, on a

$$X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 = \frac{4z z' (z z' - 1)^2 - (z^2 - z'^2)^2}{(1 + z z')^4} = \frac{4z z' (z^2 z'^2 - z z' + 1) - (z^2 + z'^2)^2}{(1 + z z')^4},$$

$$XYZ = \frac{-i(z^2 - z'^2)(z z' - 1)}{(1 + z z')^3},$$

$$(X^2 - Y^2)(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2) = \frac{2(z^2 + z'^2)[(z^2 + z'^2)^2 - (z^2 z'^2 - 4z z' + 1)]}{(1 + z z')^6}.$$

Posons

$$P = [4z z' (z^2 z'^2 - z z' + 1) - (z^2 + z'^2)^2] [1 + z z']^2,$$

$$Q = -i(z^2 - z'^2)(z z' - 1)(1 + z z')^3,$$

$$R = 2(z^2 + z'^2)[(z^2 + z'^2)^2 - (z^2 z'^2 - 4z z' + 1)],$$

$$S = (1 + z z')^6,$$

en sorte que

$$X^2 Y^2 + Y^2 Z^2 + Z^2 X^2 = \frac{P}{S},$$

$$XYZ = \frac{Q}{S},$$

$$(X^2 - Y^2)(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2) = \frac{R}{S}.$$

Il est clair alors qu'en chassant les dénominateurs dans

$$F\left(1, \frac{P}{S}, \frac{Q}{S}, \frac{R}{S}\right) = 0$$

qui est l'équation de la projection stéréographique de  $\Gamma$ , on va obtenir un *polynôme homogène* en P, Q, R, S, au premier membre.

Donc, la forme  $f(x, y)$  cherchée, invariante par le groupe du tétraèdre, donne naissance à la courbe  $f(z, 1) = 0$  et l'on est sûr que nécessairement  $f(z, 1)$  est un polynôme homogène par rapport aux quatre fonctions fondamentales P, Q, R, S.

Passant alors des polynomes

$$P(z, 1), \quad Q(z, 1), \quad R(z, 1), \quad S(z, 1)$$

précédemment écrits aux formes

$$P(x, y), \quad Q(x, y), \quad R(x, y), \quad S(x, y)$$

qui leur donnent naissance et qui sont

$$P(x, y) = [4x x' y y' (x^2 x'^2 - x y x' y' + y^2 y'^2) - (x^2 y'^2 + y^2 x'^2)^2] [x x' + y y']^2,$$

$$Q(x, y) = -i(x^2 y'^2 - x'^2 y^2)(x x' - y y')(x x' + y y')^3,$$

$$R(x, y) = 2(x^2 y'^2 + x'^2 y^2)[(x^2 y'^2 + y^2 x'^2)^2 - (x^2 x'^2 - 4x x' y y' + y^2 y'^2) y^2 y'^2],$$

$$S(x, y) = (x x' + y y')^6,$$

on voit que toute forme  $f(x, y)$  invariable par le groupe du tétraèdre est un polynôme homogène par rapport aux quatre formes fondamentales P, Q, R, S précédentes (1). P, Q, R, S sont toutes du 12<sup>e</sup> degré.  $f$  est donc au moins du degré 12.

Les substitutions fondamentales du groupe du tétraèdre sont, avec les axes choisis comme dans la Note de M. Goursat,

$$[X, Y, Z; -X, -Y, Z]$$

et

$$[X, Y, Z; Y, Z, X].$$

Sur  $z$  les substitutions correspondantes sont

$$z_1 = -z \quad \text{et} \quad z_1 = i \frac{z+1}{z-1}.$$

En passant à  $(x, y)$  dont le rapport est  $z$ , et donnant à la substitution le déterminant  $+1$ , on voit que ces deux substitutions fondamentales correspondent aux deux substitutions linéaires suivantes sur  $x, y$  :

$$\begin{cases} x_1 = ix, \\ y_1 = -iy, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-1+i}{2}(x+y) \\ y_1 = \frac{1+i}{2}(x-y) \end{cases} \quad (\text{de déterminant } 1)$$

et l'on vérifie immédiatement que chacune de ces substitutions, et par suite toute substitution du groupe qu'elles engendrent, laisse invariante chacune des formes P, Q, R, S, comme cela devait bien se produire.

On procédera tout pareillement pour les autres groupes finis et l'on aura toujours ce résultat bien simple qu'il existe quatre formes fondamentales P, Q, R, S d'un même degré pour chaque groupe, telles que toute forme invariable par le groupe considéré s'exprime par un polynôme homogène en P, Q, R, S.

Pour le groupe de l'octaèdre, par exemple, on s'adressera aux fonctions

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \quad X^2Y + Y^2Z + Z^2X^2, \quad X^2YZ, \quad XYZ(Y^2 - Z^2)(Z^2 - X^2)(X^2 - Y^2)$$

(voir le Mémoire déjà cité de M. Goursat); on aura

$$X^2Y + Y^2Z + Z^2X^2 = \frac{P(z, 1)}{S(z, 1)} = \frac{4z z' (z^2 z'^2 - z z' + 1) - (z^2 + z')^2}{(1 + z z')^2},$$

---

(1) Ces formes canoniques de P, Q, R, S sont à coefficients entiers. Si le polynôme en P, Q, R, S qui exprime  $f$  a ses coefficients entiers,  $f$  sera à coefficients entiers. On construit ainsi une infinité de formes  $f$  à coefficients entiers invariables par le groupe du tétraèdre.

et

$$X^2 Y^2 Z' = \frac{Q(z, 1)}{S(z, 1)} = - \frac{(z^2 - z'^2)(zz' - 1)^2}{(1 + zz')^9},$$

$$\begin{aligned} & XYZ(Y^2 - Z^2)(Z' - X^2)(X^2 - Y^2) \\ &= \frac{R(z, 1)}{S(z, 1)} = \frac{-2i(z^4 - z'^4)(zz' - 1)[(z^2 + z'^2)^2 - (z^2 z'^2 - 4zz' + 1)]}{(1 + zz')^9}, \end{aligned}$$

d'où

$$P(z, 1) = (1 + zz')^4 [4zz'(z^2 z'^2 - zz' + 1) - (z^2 + z'^2)^2],$$

$$Q(z, 1) = -(1 + zz')^3 (z^2 - z'^2)^2 (zz' - 1)^2,$$

$$R(z, 1) = -2i(z^4 - z'^4)(zz' - 1)[(z^2 + z'^2)^2 - (z^2 z'^2 - 4zz' + 1)],$$

$$S(z, 1) = (1 + zz')^9.$$

De là on passe aux quatre formes fondamentales, en changeant, ce qui n'a d'autre effet que de simplifier les notations, les signes de Q et R :

$$\left\{ \begin{aligned} P(x, y) &= (xx' + yy')^4 [4xx'yy'(x^2 x'^2 - xyx'y' + y^2 y'^2) - (x^2 y'^2 + y^2 x'^2)^2], \\ Q(x, y) &= + (xx' + yy')^3 (x^2 y'^2 - x'^2 y^2)^2 (xx' - yy')^2, \\ R(x, y) &= 2i(x^4 y'^4 - x'^4 y^4)(xx' - yy') \\ &\quad \times [(x^2 y'^2 + x'^2 y^2)^2 - (x^2 x'^2 - 4xx'yy' + y^2 y'^2)y^2 y'^2], \\ S(x, y) &= (xx' + yy')^9. \end{aligned} \right.$$

Ces quatre formes sont du degré 18.

Les deux exemples précédents, groupes du tétraèdre et de l'octaèdre, montrent suffisamment comment on obtiendra pour chaque groupe les quatre formes fondamentales. Le reste n'est plus qu'affaire de calcul. Voici d'ailleurs l'indication de ces calculs :

Pour le groupe de la pyramide régulière ( $m$  faces) (groupe cyclique d'ordre  $m$ ), l'équation du cône  $\Gamma$  s'obtient en égalant à zéro un polynome par rapport à

$$ss', \quad s^m, \quad s'^m, \quad Z$$

en se souvenant que  $s = X + iY$  et  $s' = X - iY$ .

Un tel polynome est aussi un polynome en

$$ss' + Z^2, \quad s^m + s'^m, \quad s^m - s'^m, \quad Z$$

et réciproquement.

Il faudra donc ici s'adresser aux quatre fonctions

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \quad s^m + s'^m, \quad s^m - s'^m,$$

pour obtenir P, Q, R, S.

On s'aidera de

$$\begin{aligned} s &= X + iY = \frac{2z}{1 + zz'}, \\ s' &= \frac{2z'}{1 + zz'}. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} P(z, 1) &= z^m(z^m + z'^m), & P(x, y) &= x^m y'^m + x'^m y^m, \\ Q(z, 1) &= z^m(z^m - z'^m), & Q(x, y) &= i x^m y'^m - i x'^m y^m, \\ R(z, 1) &= (z z' - 1)(1 + z z')^{m-1}, & R(x, y) &= (x x' - y y')(x x' + y y')^{m-1}, \\ S(z, 1) &= (1 + z z')^m, & S(x, y) &= (x x' + y y')^m, \end{aligned}$$

car on peut modifier  $P(z, 1), \dots, S(z, 1)$  par multiplication de coefficients constants convenables. Pour la double pyramide régulière (groupe cyclique d'ordre  $m$  composé avec une transposition d'axe convenable normal à celui du groupe cyclique), on s'adressera à

$$s s' + Z^2, \quad s^m + s'^m, \quad s^m - s'^m, \quad Z^2$$

et l'on sera conduit à

$$\begin{cases} P = x^m y'^m + x'^m y^m, \\ Q = i x^m y'^m - i x'^m y^m, \\ R = (x x' - y y')(x x' + y y')^{m-2}, \\ S = (x x' + y y')^m. \end{cases}$$

Pour l'icosaèdre enfin, il faudra s'adresser aux quatre fonctions :

$$\begin{aligned} (1) \quad & X^2 + Y^2 + Z^2 = s s' + Z^2; \\ (2) \quad & Z^6 - 5 s s' Z^4 + 5 (s s')^2 Z^2 - (s^5 + s'^5) Z; \\ (3) \quad & (Z^{10} - 35 s s' Z^8 + 260 s^2 s'^2 Z^6 + 25 s^4 s'^4 Z^2 - 175 s^2 s'^2 Z^4) \\ & + (s^5 + s'^5)(123 Z^7 - 90 s s' Z^5 + 15 s^2 s'^2 Z) + (s^5 + s'^5)^2; \\ (4) \quad & (s^5 - s'^5)(-4^2 \cdot Z^{10} + 5 \cdot 4^3 \cdot 12 s s' Z^8 - 3840 s^2 s'^2 Z^6 + 1200 s^3 s'^3 Z^4 - 100 s^4 s'^4 Z^2) \\ & + (s^{10} - s'^{10})(-352 Z^7 - 160 s s' Z^5 - 10 Z s^2 s'^2) + (s^5 - s'^5)(s^5 + s'^5)^2, \end{aligned}$$

qui, en y substituant à  $s, s', Z$ , les quantités connues

$$\frac{2z}{1 + z z'}, \quad \frac{2z'}{1 + z z'}, \quad \frac{z z' - 1}{z z' + 1},$$

donneront naissance à quatre fonctions  $P(z, 1), Q(z, 1), R(z, 1), S(z, 1)$  données par

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{S}{S}, \\ (2) &= \frac{P}{S}, \\ (3) &= \frac{Q}{S}, \\ (4) &= \frac{R}{S}, \end{aligned}$$

avec, en particulier,  $S = (1 + z z')^5$ .

Nous n'indiquerons pas ce calcul qui serait long mais sans difficulté et nous

remarquerons simplement que les formes fondamentales  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y)$ ,  $S(x, y)$  auxquelles il conduira seront du 3<sup>o</sup> degré.

NOTE SUR LA CLASSIFICATION DES SUBSTITUTIONS  
DU GROUPE DE PICARD.

On a vu, dans une étude précédente, que si la forme de Dirichlet

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

aux coefficients  $a, b, c$  entiers complexes est telle que *Norme* ( $b^2 - ac$ ) soit un carré parfait, ou, ce qui revient au même, que  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  ait même argument qu'un certain nombre rationnel, il existe une substitution hyperbolique du groupe de Picard,  $\Sigma$  (et par suite tout un groupe cyclique infini formé des puissances entières de  $\Sigma$ ), conservant la forme  $f$ . Nous avons alors remarqué que la substitution  $S$  génératrice du groupe des substitutions modulaires complexes qui conservent  $f$  ne pouvait être une substitution loxodromique quelconque, puisqu'une certaine puissance entière  $S^m$  de  $S$  se trouvait être hyperbolique.

Établissons maintenant la réciproque de la proposition précédente. *A quelles conditions une forme de Dirichlet à coefficients entiers pourra-t-elle être conservée par une substitution modulaire hyperbolique?* Autrement dit, cherchons toutes les formes de Dirichlet à coefficients entiers possédant un groupe conservatif engendré par une substitution modulaire  $S$ , dont une certaine puissance entière soit hyperbolique.

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les racines d'une telle forme  $f$ . Une substitution modulaire hyperbolique

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers complexes; } \alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ou

$$(1) \quad z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

conservant la forme  $f$  aura pour points doubles  $z_1$  et  $z_2$  et pourra s'écrire

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda \frac{Z - z_1}{Z - z_2} \quad (\lambda \text{ étant un nombre réel}).$$

Cette dernière expression donne

$$(2) \quad z = \frac{(z_1 - \lambda z_2)Z - (1 - \lambda)z_1 z_2}{(1 - \lambda)Z + \lambda z_1 - z_2}.$$

(1) et (2) devant représenter des substitutions identiques, on aura nécessairement

$$(3) \quad \frac{z_1 - \lambda z_2}{\alpha} = \frac{(\lambda - 1) z_1 z_2}{\beta} = \frac{1 - \lambda}{\gamma} = \frac{\lambda z_1 - z_2}{\delta}.$$

La forme de Dirichlet proposée aura donc la propriété d'être conservée par une substitution modulaire hyperbolique si (et seulement si) ses racines  $z_1$  et  $z_2$  sont telles qu'on puisse trouver quatre entiers complexes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , et un nombre réel  $\lambda$  satisfaisant aux relations (3).

Une conséquence immédiate de (3) est que chacun des rapports (3) est égal au rapport

$$\frac{(\lambda - 1)(z_1 z_2 - 1)}{\beta + \gamma}$$

obtenu à l'aide du deuxième et du troisième rapport (3), égal aussi à

$$\frac{(\lambda + 1)(z_1 - z_2)}{\alpha + \delta}$$

obtenu à l'aide du premier et du quatrième rapport (3).

On a donc

$$\frac{(\lambda - 1)(z_1 z_2 - 1)}{\beta + \gamma} = \frac{(\lambda + 1)(z_1 - z_2)}{\alpha + \delta},$$

d'où l'on tire

$$z_1 - z_2 = \frac{\alpha + \delta}{\beta + \gamma} (z_1 z_2 - 1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

$z_1$  et  $z_2$  étant les racines d'une forme de Dirichlet aux coefficients entiers

$$a z^2 + 2 b z + c = 0;$$

le produit  $z_1 z_2$  est un nombre *complexe rationnel*, ainsi que  $(z_1 z_2 - 1)$ . Le nombre  $\frac{\alpha + \delta}{\beta + \gamma}$  étant un nombre complexe rationnel, il s'ensuit que  $(z_1 - z_2)$  est le produit d'un nombre complexe rationnel  $\left[ \frac{\alpha + \delta}{\beta + \gamma} (z_1 z_2 - 1) \right]$  par un nombre réel  $\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ .

C'est dire que  $(z_1 - z_2)$  a même argument qu'un nombre rationnel.

Or

$$z_1 - z_2 = 2 \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Donc la forme de Dirichlet proposée satisfait à la condition précédemment énoncée, à savoir:  $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$  a même argument qu'un nombre rationnel, qui équivaut, on le sait, à celle-ci: Norme  $(b^2 - ac)$  est carré parfait. Il existe donc une

infinité de formes d'Hermite indéfinies à coefficients entiers contenant la forme de Dirichlet proposée.

Voici donc un résultat essentiel. La réduction continue nous a montré que toute forme de Dirichlet à coefficients entiers contenue dans une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers était conservée par une substitution *hyperbolique* convenable du groupe de Picard. Nous venons maintenant de voir que les seules formes de Dirichlet à coefficients entiers qui puissent être conservées par une substitution hyperbolique convenable du groupe de Picard sont précisément les précédentes, c'est-à-dire celles qui peuvent être contenues dans une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers (et, comme on l'a vu, dans une infinité dénombrable de telles formes).

Ce résultat va nous servir à approfondir l'étude des substitutions du groupe de Picard, en particulier des substitutions loxodromiques.

Une substitution modulaire complexe  $S\left(z = \frac{aZ+b}{cZ+d}\right)$ , où  $a, b, c, d$  sont des entiers complexes tels que  $ad - bc = 1$ , peut être, on l'a vu :

1° Elliptique. Alors elle s'écrit  $\frac{z-z_1}{z-z_2} = K \frac{Z-z_1}{Z-z_2}$ ,  $K$  étant un nombre complexe de module 1,  $K = e^{i\theta}$ ,  $\theta$  nombre réel.  $\theta$  est d'ailleurs *congru* à  $\pi$  (1) ou à  $\frac{2\pi}{3}$  ou à  $\frac{4\pi}{3}$  (mod  $2\pi$ ).

2° Hyperbolique. Alors elle s'écrit  $\frac{z-z_1}{z-z_2} = K \frac{Z-z_1}{Z-z_2}$ ,  $K$  étant un nombre réel.

3° Loxodromique. Alors elle s'écrit  $\frac{z-z_1}{z-z_2} = K \frac{Z-z_1}{Z-z_2}$ ,  $K$  étant un nombre complexe de module différent de 1,  $K = re^{i\theta}$  [ $r \neq 1$ ,  $\theta \neq 0$  et  $\neq \pi$ ].

4° Parabolique, si ses deux points doubles  $z_1, z_2$  sont confondus en un point du plan des  $z$  d'afixe rationnel.

On voit que les substitutions elliptiques, hyperboliques et paraboliques sont bien connues et qu'il reste à éclaircir la question suivante :

Pour une substitution loxodromique,  $K$  est une imaginaire d'argument  $\theta$ . Nous savons, par la recherche qui précède, dans quel cas l'argument  $\theta$  est commensurable à  $2\pi$ .

Il faut pour cela et il suffit que la forme de Dirichlet  $f$  ayant pour racines les points doubles de la substitution  $S$

$$[f(x, y) = c x^2 + (d - a)xy - by^2]$$

soit contenue dans une forme d'Hermite indéfinie à coefficients entiers.

Dans tout autre cas,  $\theta$  est incommensurable à  $2\pi$ .

(1) Ce cas  $\theta \equiv \pi$  peut d'ailleurs rentrer dans le cas suivant (2°), car alors  $K$  est réel et  $= -1$ ; on a une symétrie non euclidienne, dont le carré est la substitution unité.

Mais il reste encore à déterminer quelles sont les valeurs commensurables à  $2\pi$  que peut prendre l'argument  $\theta$  pour une substitution modulaire complexe.

C'est à cette recherche que nous passons maintenant :

Considérons donc une substitution modulaire complexe

$$(S) \quad z = \frac{aZ + b}{cZ + d} \quad (a, b, c, d \text{ entiers complexes; } ad - bc = 1)$$

dont les points doubles  $z_1, z_2$  sont fournis par l'équation

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Ils sont distincts si l'on suppose

$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4 \neq 0;$$

et alors la substitution (S) s'écrit

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = K \frac{Z - z_1}{Z - z_2},$$

et c'est un résultat fort connu que  $K$  est racine de l'équation

$$(K^2 + 1)(ad - bc) - K(a^2 + d^2 + 2bc) = 0,$$

laquelle, à cause de  $ad - bc = 1$ , se réduit ici à

$$(E) \quad \boxed{K^2 - K[(a + d)^2 - 2] + 1 = 0.}$$

Dans les hypothèses de la recherche actuelle, la forme de Dirichlet aux coefficients entiers

$$cx' + (d - a)xy - by^2$$

doit pouvoir être contenue dans une forme d'Hermite aux coefficients entiers, c'est-à-dire que l'on doit supposer que

$$\text{Norme} [(d - a)^2 + 4bc] = \text{Norme} [(a + d)^2 - 4]$$

est carré parfait.

Ces conditions étant supposées réalisées, il s'agit de voir quelles valeurs peut prendre l'argument du nombre complexe  $K$  défini par l'équation (E).

Le problème se ramène à l'étude des valeurs que peut prendre le nombre entier complexe  $(a + d)$  pour que Norme  $[(a + d)^2 - 4]$  soit un carré parfait, puisque (E) et  $K$  ne dépendent que de ce nombre  $(a + d)$ .

C'est une recherche qui a été commencée dans un Chapitre précédent. On a

vu que tous les nombres entiers complexes dont la norme était carré parfait étaient de la forme  $At^2$  ou  $Ait^2$ ,  $A$  étant un entier réel et  $t$  un entier complexe, d'ailleurs quelconques. Il faudra donc, et il suffit, qu'on puisse trouver deux tels nombres  $A$  et  $t$  satisfaisant soit à la relation

$$(a + d)' - 4 = At',$$

soit à

$$(a + d)^2 - 4 = Ait'.$$

Pour plus de simplicité, posons  $a + d = u$ ;  $u$  est alors un entier complexe quelconque *a priori*. Les nombres entiers  $u$  auxquels nous devons nous limiter sont ceux pour lesquels existent  $A$  et  $t$  entiers (le premier réel, le deuxième complexe) et tels que

$$u^2 - At^2 = 4 \quad \text{ou bien} \quad u^2 - Ait^2 = 4.$$

$u$  étant un tel entier, la valeur de  $K$  correspondante sera donnée par

$$K^2 - (u^2 - 2)K + 1 = 0$$

et l'on peut toujours prendre

$$K = \frac{u^2 - 2 + \sqrt{u^2(u^2 - 4)}}{2}.$$

Tout revient donc à l'étude des deux équations diophantiques

$$(1) \quad u^2 - At^2 = 4,$$

$$(2) \quad u^2 - Ait^2 = 4,$$

avec les inconnues entières complexes  $u$ ,  $t$  et l'inconnue entière réelle  $A$ .

En remplaçant au besoin  $t$  par  $it'$  ( $t'$  étant encore un entier), on peut toujours supposer l'inconnue  $A$  positive.

Pour étudier chacune de ces deux équations, on peut imaginer qu'on se donne l'entier positif  $A$ . On a alors à étudier une *équation de Pell* dans le domaine complexe. C'est là une chose aisée depuis le Mémoire de Dirichlet *Sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* (*Œuvres*, t. I, p. 535). Il suffit ensuite de donner à  $A$  toutes les valeurs entières positives et d'examiner ce que deviennent les solutions.

### 1° ÉTUDE DE L'ÉQUATION (1) : $u^2 - At^2 = 4$ .

On peut supposer *a priori* : 1° que  $A$  n'a pas de diviseur carré, car un tel diviseur pourrait être supposé incorporé dans  $t^2$ ; 2° que  $A$  ne contient pas le facteur 2, car, à cause de  $2i = (1 + i)^2$ , on pourrait se débarrasser de ce fac-

teur 2 en retombant sur une équation du type (1) ou du type (2). Supposons donc  $A$  donné tel.

Nous écrivons l'équation

$$\frac{u^2 - At^2}{4} = 1$$

et aussi

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u - t\sqrt{A}}{2} = 1$$

en désignant par  $\sqrt{A}$  la racine carrée positive de  $A$ .

*Remarques.* — 1° L'équation (1) a toujours une infinité de solutions (1). Il suffit pour s'en assurer de montrer qu'elle a, par exemple, une infinité de solutions paires. Effectivement, une telle solution

$$u = 2u_1,$$

$$t = 2t_1,$$

$u_1$  et  $t_1$ , étant entiers, sera fournie par

$$u_1^2 - At_1^2 = 1.$$

Et l'on sait que cette dernière équation a toujours une infinité de solutions (Mémoire de Dirichlet cité plus haut) lorsque  $A$  n'est pas un carré parfait, ce qui est le cas ici (bien entendu, on suppose  $A \neq 1$ ).

2° Soient  $(u, t)$ ,  $(u', t')$  deux solutions *distinctes* de (1), c'est-à-dire que l'on n'a pas à la fois

$$u = u', \quad t = t'.$$

Considérons les deux expressions

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u' + t'\sqrt{A}}{2}.$$

Il est clair d'abord que  $\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right) \left(\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2}\right)$  peut s'écrire

$$\frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2},$$

$u''$  et  $t''$  étant deux entiers complexes.

En effet,

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} = \frac{(uu' + Att') + (ut' + tu')\sqrt{A}}{4}$$

(1) Le cas  $A = 1$  se traite immédiatement, les seules solutions étant alors

$$(\pm 2, 0) \quad \text{et} \quad (0, \pm 2i).$$

et il suffit de montrer que  $\frac{uu' + Att'}{2}$  est un entier  $u''$  et  $\frac{ut' + tu'}{2}$  est un entier  $t''$ .

Remarquons pour cela que l'entier  $u$  est, relativement au module 2, congru à l'un des quatre nombres

$$0, \quad 1, \quad i, \quad 1+i.$$

Posons

$$u = 2m + \varepsilon,$$

$$t = 2n + \eta,$$

$\varepsilon$  et  $\eta$  ayant une des quatre valeurs précédentes.

Si  $(u, t)$  est une solution,

$$u^2 - At^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Donc

$$\varepsilon^2 - A\eta^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

$\varepsilon$  et  $\eta$  ne peuvent donc être choisis arbitrairement parmi les quatre valeurs précédentes, il y a nécessairement une correspondance entre eux donnée par la congruence précédente. Cette correspondance est résumée dans les deux Tableaux suivants :

$$A \text{ étant supposé impair, } \left. \begin{array}{l} \text{comme on l'a vu plus haut,} \\ \text{si } A \equiv 1 \pmod{4} \\ \text{si } A \equiv -1 \pmod{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \varepsilon \dots \eta \\ 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 \\ i \dots i \\ 1+i \dots 1+i \end{array} \right\} (\varepsilon = \eta) \\ \left. \begin{array}{l} \varepsilon \dots \eta \\ 0 \dots 0 \\ 1 \dots i \\ i \dots 1 \\ 1+i \dots 1+i \end{array} \right\} \end{array}$$

*Pour une solution  $(u, t)$ ,  $\varepsilon$  et  $\eta$  ont nécessairement deux valeurs situées sur la même ligne.*

La discussion qui fournit les deux Tableaux précédents est immédiate. On voit alors que,  $uu' + Att'$  et  $ut' + tu'$  étant respectivement congrus à  $\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta'$  et  $\varepsilon\eta' + \eta\varepsilon' \pmod{2}$ , il suffit de montrer que  $\frac{\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta'}{2}$  et  $\frac{\varepsilon\eta' + \eta\varepsilon'}{2}$  sont entiers.

Or si  $A \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\varepsilon\varepsilon' = \eta\eta'$ ,  $\varepsilon\eta' = \eta\varepsilon'$  et le résultat précédent est immédiat; si  $A \equiv -1 \pmod{4}$ , ou bien  $\varepsilon\varepsilon' = \eta\eta'$ , ou bien  $\varepsilon\varepsilon' = 1+i$  avec  $\eta\eta' = i(1+i)$ , ou bien  $\varepsilon\varepsilon' = i(1+i)$  avec  $\eta\eta' = 1+i$ .

Dans le premier cas,  $\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta'$  est évidemment divisible par 2; dans le deuxième et dans le troisième, on a

$$\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta' = (1+i)[1+iA] \quad \text{ou bien} \quad \varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta' = (1+i)(i+A).$$

Dans ces deux cas,  $1+iA$  et  $i+A$  sont divisibles par  $1+i$  et par suite  $\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta'$

l'est par  $(1+i)^2 = 2i$ ; donc  $\frac{\varepsilon\varepsilon' + A\eta\eta'}{2}$  est certainement entier. Même raisonnement pour  $\frac{\varepsilon\eta' + \eta\varepsilon'}{2}$ . On a donc bien

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} = \frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2},$$

$u''$  et  $t''$  étant deux entiers complexes. Il est clair d'ailleurs que

$$\frac{u - t\sqrt{A}}{2} \frac{u' - t'\sqrt{A}}{2} = \frac{u'' - t''\sqrt{A}}{2}.$$

Et en multipliant membre à membre, à cause de  $u^2 - At^2 = 4$  et  $u'^2 - At'^2 = 4$ , on a aussi

$$u''^2 - At''^2 = 4;$$

c'est dire que  $(u'', t'')$  est solution de (1). De même on aurait

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u' - t'\sqrt{A}}{2} = \frac{u''' + t'''\sqrt{A}}{2},$$

$u'''$  et  $t'''$  étant entiers, puisque si  $(u', t')$  est solution entière de (1),  $(u', -t')$  l'est aussi, et  $(u''', t''')$  serait solution de (1).

A cause de  $\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} \frac{u' - t'\sqrt{A}}{2} = 1$ , ce qui précède s'écrit

$$\frac{u''' + t'''\sqrt{A}}{2} = \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u' + t'\sqrt{A}}{2}.$$

3<sup>o</sup> Envisageant une solution entière  $(u, t)$  de (1), nous allons considérer la valeur que prend Norme  $\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  pour cette solution.

Évidemment, les deux nombres  $\frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  et  $\frac{-u - t\sqrt{A}}{2}$  provenant des deux solutions  $(u, t)$ ,  $(-u, -t)$  de (1) ont même norme.

Cherchons s'il y a d'autres solutions entières  $(u', t')$  de (1) qui font acquérir à Norme  $\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  la même valeur que la solution  $(u, t)$ .

A cause de

$$\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} = \frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2},$$

$u''$ ,  $t''$  étant solution entière de (1), on voit que si  $\frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  et  $\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2}$  ont même

norme,  $\frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2}$  aura pour norme l'unité. Toutes les solutions  $(u', t')$  qui donnent à  $\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  la même valeur que la solution  $(u, t)$  s'obtiennent donc par la relation

$$\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} = \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2},$$

où  $(u'', t'')$  est toute solution entière de (1) qui donne à  $\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  la valeur 1. Nous sommes donc ramenés à la recherche des solutions de (1) qui donnent à  $\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  la valeur 1.

Pour une telle solution

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u - t\sqrt{A}}{2} = 1,$$

$$\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right) \mathfrak{N}\left(\frac{u - t\sqrt{A}}{2}\right) = 1.$$

Donc

$$\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right) = \mathfrak{N}\left(\frac{u - t\sqrt{A}}{2}\right) = 1$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right) + \mathfrak{N}\left(\frac{u - t\sqrt{A}}{2}\right) = 2.$$

Remarquons que

$$\mathfrak{N}(r + s) + \mathfrak{N}(r - s) = 2\mathfrak{N}(r) + 2\mathfrak{N}(s),$$

$r$  et  $s$  étant deux nombres complexes quelconques, et il vient immédiatement

$$\mathfrak{N}(u) + \mathfrak{N}(t\sqrt{A}) = 4$$

et, comme  $\mathfrak{N}(t\sqrt{A}) = A\mathfrak{N}t$ ,

$$\mathfrak{N}(u) + A\mathfrak{N}t = 4,$$

$u$  et  $t$  devant être deux entiers, on voit que si  $A > 4$ , il faut nécessairement supposer  $\mathfrak{N}(t) = 0$ ,  $t = 0$  et  $\mathfrak{N}(u) = 4$  et, à cause de  $u^2 - At^2 = 4$ ,  $u = \pm 2$ .

Si donc  $A > 4$ , les seules solutions  $(u, t)$  donnant à  $\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{A}}{2}\right)$  la valeur 1 sont  $(\pm 2, 0)$ ;  $A = 4$  est à rejeter, car on a vu qu'on peut toujours se borner à  $A$  impair et non carré.

Restent les hypothèses  $A = 1, 3$ .

Avec  $A = 1$ ,  $\mathfrak{N}(u) + \mathfrak{N}(t) = 4$ ; l'hypothèse  $\mathfrak{N}(u) = 4$ ,  $\mathfrak{N}(t) = 0$  donne les solutions  $(\pm 2, 0)$ ; l'hypothèse  $\mathfrak{N}(u) = 0$ ,  $\mathfrak{N}(t) = 4$  donne les solutions  $(0, \pm 2i)$ .

Ce sont d'ailleurs là les seules solutions entières de  $u^2 - t^2 = 4$ , comme on le voit immédiatement en écrivant

$$(u + t)(u - t) = (1 + i)^2(1 - i)^2$$

et remarquant que le deuxième membre est la décomposition en facteurs premiers complexes du premier; les diverses hypothèses qu'on pourra faire sur  $u + t$  et  $u - t$  de façon que leur produit fasse  $(1 + i)^2(1 - i)^2$  donneront les seules solutions précédentes.

Nous pouvons donc écarter ce cas  $A = 1$ .

Avec  $A = 3$ ,  $\varkappa(u) = 4$ ,  $\varkappa(t) = 0$  donnent les solutions  $(\pm 2, 0)$ ;  $\varkappa(u) = 1$ ,  $\varkappa(t) = 1$  donnent les solutions  $(\pm 1, \pm i)$ .

Et l'on voit que si  $A = 3$ , il y a six solutions entières  $(u, t)$  pour lesquelles  $\varkappa \frac{u + t\sqrt{3}}{2} = 1$  et l'on voit immédiatement que ces six solutions sont données par

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega = e^{\frac{2k\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\omega^6 = 1.$$

En résumé, l'équation (1)  $u^2 - At^2 = 4$ ,  $A$  étant un nombre impair réel quelconque sans diviseur carré, n'a en général que deux solutions  $(u, t)$  rendant  $\varkappa \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right) = 1$ , et ce sont les solutions opposées  $u = \pm 2$ ,  $t = 0$ .

Il y a exception pour :

1°  $A = 1$ . Il y a alors quatre telles solutions

$$(u = \pm 2, t = 0) \quad \text{et} \quad (u = 0, t = \pm 2i).$$

Ce cas peut être mis de côté, car les quatre solutions précédentes sont les seules solutions de (1).

2°  $A = 3$ . Il y a six solutions du type cherché, à savoir :

$$(u = \pm 2, t = 0) \quad \text{et} \quad (u = \pm 1, t = \pm i).$$

On les a toutes dans la formule

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega = e^{\frac{2k\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

$\omega$  étant une racine quelconque de l'unité.

*Conclusion.* — En laissant toujours de côté le cas  $A = 1$  qui est déjà traité, on voit que :

1° Si  $A \neq 3$ , il n'y a que deux solutions  $(u, t)$  faisant acquérir à  $\varkappa \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$

la même valeur qu'une solution donnée  $(u, t)$ , et c'est  $(u' = +u, t' = +t)$ ,  $(u' = -u, t' = -t)$ .

2° Si  $A = 3$ , il y a six solutions  $(u', t')$  faisant acquérir à  $\mathfrak{X}\left(\frac{u+t\sqrt{A}}{2}\right)$  la même valeur qu'une solution donnée  $(u, t)$ . Ces six couples sont donnés par

$$\frac{u' + t'\sqrt{3}}{2} = \frac{u + t\sqrt{3}}{2} \omega,$$

$\omega$  étant une quelconque des six racines sixièmes de l'unité

$$\omega = \pm 1, \quad \omega = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

A  $\omega = \pm 1 = \varepsilon$  correspondent deux solutions

$$\begin{cases} u' = \varepsilon u, \\ t' = \varepsilon t. \end{cases}$$

A  $\omega = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{\varepsilon + i\vare'\sqrt{3}}{2}$  avec  $\varepsilon = \pm 1, \varepsilon' = \pm 1$  correspondent quatre autres solutions

$$\begin{cases} u' = \frac{u\varepsilon + 3ti\varepsilon'}{2}, \\ t' = \frac{ti\varepsilon' + t\varepsilon}{2}; \end{cases}$$

remarquons que les six substitutions ci-dessus qui font passer de  $(u, t)$  à  $(u', t')$  sont six substitutions elliptiques formant un groupe cyclique d'ordre 6. Ce sont les puissances de

$$\begin{cases} u' = \frac{u + 3ti}{2}, \\ t' = \frac{ti + t}{2}. \end{cases}$$

Ce groupe cyclique conserve la forme  $u^2 - 3t^2$ .

*Résolution de l'équation (1)  $u^2 - At^2 = 4$ .* — Les remarques qui précèdent rendent facile la résolution de cette équation. Nous supposons bien entendu  $A > 1$ , et toujours sans diviseur carré. Nous savons alors que l'équation (1) a en particulier une infinité de solutions entières  $(u, t)$  formées de nombres *pairs*, et que pour ces solutions  $\mathfrak{X}\left(\frac{u+t\sqrt{A}}{2}\right)$  devient aussi grand que l'on veut. D'autre part, il n'y a qu'un nombre limité de solutions de (1) faisant acquérir à  $\mathfrak{X}\left(\frac{u+t\sqrt{A}}{2}\right)$  une valeur  $> 1$  et  $< L$ ,  $L$  étant un nombre positif donné d'avance.

En effet, si

$$1 < \mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right) < L,$$

à cause de

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} \frac{u - t\sqrt{A}}{2} = 1,$$

on aura

$$\frac{1}{L} < \mathfrak{X} \left( \frac{u - t\sqrt{A}}{2} \right) < 1$$

pour toutes ces solutions et, par suite,

$$1 + \frac{1}{L} < \mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right) + \mathfrak{X} \left( \frac{u - t\sqrt{A}}{2} \right) < 1 + L,$$

ce qui donne

$$2 \left( 1 + \frac{1}{L} \right) < \mathfrak{X}(u) + A \mathfrak{X}(t) < 2(1 + L),$$

et ceci limite évidemment

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(u) &\text{ et } \mathfrak{X}(t), \\ \mathfrak{X}(u) &< 2(1 + L), \\ \mathfrak{X}(t) &< \frac{2(1 + L)}{A} \end{aligned}$$

et ne peut donc donner qu'un nombre limité de possibilités pour  $(u, t)$ .

Il existe donc une solution  $(u, t)$  de (1) qui fait acquérir à  $\mathfrak{X} \frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  une valeur supérieure à 1 qui soit la plus petite des valeurs  $> 1$  que peut prendre  $\mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$  pour les solutions  $(u, t)$  de (1). [On est même sûr qu'il y en a plusieurs puisque, si  $A \neq 3$ , il y a deux solutions opposées faisant acquérir une même valeur à  $\mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$  et, si  $A = 3$ , il y a six solutions faisant acquérir une même valeur à  $\mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$ .]

Nous appellerons  $(U, T)$  cette solution et nous dirons que c'est la plus petite solution de (1). Évidemment, on a une infinité de solutions de (1) par

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} = \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right)^n$$

( $n$  entier réel quelconque positif ou négatif). Un raisonnement classique montre alors que toute solution  $(u, t)$  de (1) est telle que

$$\mathfrak{X} \frac{u + t\sqrt{A}}{2} = \left[ \mathfrak{X} \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right) \right]^n$$

( $n$  étant un entier réel positif ou négatif).

Car de l'hypothèse contraire, c'est-à-dire de l'existence de  $n$  entier tel que

$$\left[ \mathfrak{X} \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right) \right]^n < \mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right) < \left[ \mathfrak{X} \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right) \right]^{n+1},$$

on conclurait l'existence d'une solution  $(u'', t'')$  donnée par

$$\frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2} = \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right)^{-n}$$

pour laquelle

$$1 < \mathfrak{X} \left( \frac{u'' + t''\sqrt{A}}{2} \right) < \mathfrak{X} \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right),$$

et ceci est absurde.

En définitive :

1° Si  $A \begin{cases} \neq 3 \\ \neq 1 \end{cases}$  toutes les solutions entières de l'équation (1) sont données par

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} = \pm \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right)^n \quad (n = -\infty, \dots, 2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty),$$

puisqu'il n'y a que deux solutions

$$\begin{cases} u' = \varepsilon u \\ t' = \varepsilon t \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

faisant acquérir à  $\mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$  une même valeur donnée.

2° Si  $A = 3$ , toutes les solutions entières de (1) sont données par

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} = \omega \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty),$$

$$\omega = e^{\frac{2k\pi i}{6}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

puisque les six solutions de (1) faisant acquérir à  $\mathfrak{X} \frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  une même valeur se tirent de l'une d'elles  $(u, t)$  par

$$\frac{u' + t'\sqrt{A}}{2} = \omega \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right),$$

où  $\omega$  doit être remplacé par chacune des racines sixièmes de l'unité.

Dans ces deux cas,  $(U, T)$  représente la plus petite solution de (1), c'est-à-dire une quelconque des solutions en nombre fini qui font acquérir à  $\mathfrak{X} \frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  sa plus petite valeur  $> 1$ .

3° Si  $A = 1$ , il n'y a que quatre solutions

$$(u = \pm 2, t = 0), \quad (u = 0, t = \pm 2i).$$

*Conséquence.* — Plaçons-nous dans le cas général  $A > 1$ ,  $A \neq 3$ .

Si  $\begin{pmatrix} u = \alpha + \beta i \\ t = \gamma + \delta i \end{pmatrix}$  est solution entière de (1),  $\begin{pmatrix} u = \alpha - \beta i \\ t = \gamma - \delta i \end{pmatrix}$  sera aussi solution entière de (1), puisque  $A$  est réel. Ces deux solutions donnent à  $\frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  deux valeurs imaginaires conjuguées dont la norme est la même. Et comme, dans ce cas, deux solutions donnant à  $\frac{u + t\sqrt{A}}{2}$  la même norme sont identiques ou opposées, on aura ou bien

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i &= \alpha - \beta i, \\ \gamma + \delta i &= \gamma - \delta i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $u$  et  $t$  réels, ou bien

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i &= -(\alpha - \beta i), \\ \gamma + \delta i &= -(\gamma - \delta i). \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $u$  et  $t$  purement imaginaires.

Si donc la plus petite solution  $U, T$  est formée de nombres réels, il est clair que toute solution étant donnée par

$$\frac{u + t\sqrt{A}}{2} = \pm \left( \frac{U + T\sqrt{A}}{2} \right)^n$$

sera composée de nombres entiers réels.

Si la plus petite solution  $U, T$  est formée de nombres purement imaginaires, il est clair que les solutions  $(u, t)$  correspondant à  $n$  pair seront formées de nombres réels; les solutions correspondant à  $n$  impair seront formées de nombres purement imaginaires.

*Étude du cas  $A = 3$ .* — Équation  $u^2 - 3t^2 = 4$ .

Nous savons que toutes les solutions entières sont données par la formule

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega \left( \frac{U + T\sqrt{3}}{2} \right)^n \quad (\omega^6 = 1).$$

Tout revient à trouver la plus petite solution  $U, T$ . C'est celle qui donne à  $\varkappa \left( \frac{u + t\sqrt{3}}{2} \right)$  sa plus petite valeur supérieure à 1.

L'équation admet la solution  $u = 4, t = 2$ , pour laquelle

$$\varkappa \left( \frac{u + t\sqrt{3}}{2} \right) = \varkappa(2 + \sqrt{3}) > 1.$$

Cherchons toutes les solutions  $(u, t)$  en nombre fini pour lesquelles

$$1 < \mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{3}}{2}\right) < \mathfrak{N}(2 + \sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3}.$$

On aura

$$\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} < \mathfrak{N}\left(\frac{u - t\sqrt{3}}{2}\right) < 1.$$

Donc

$$\mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{3}}{2}\right) + \mathfrak{N}\left(\frac{u - t\sqrt{3}}{2}\right) < 8 + 4\sqrt{3},$$

$$2\mathfrak{N}\frac{u}{2} + 2\mathfrak{N}\frac{t\sqrt{3}}{2} < 8 + 4\sqrt{3},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{N}(u) + 3\mathfrak{N}(t) < 16 + 8\sqrt{3}.$$

L'hypothèse  $\mathfrak{N}(u) = 0$  est impossible.

L'hypothèse  $\mathfrak{N}(u) = 1$  fournit les solutions  $u = \pm 1$ ,  $t = \pm i$  pour lesquelles  $\mathfrak{N}\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = 1$ , que nous connaissons déjà.

Il faut donc supposer  $\mathfrak{N}(u) \geq 2$ , c'est-à-dire

$$3\mathfrak{N}(t) < 16 + 8\sqrt{3} \quad (\text{mais } 8\sqrt{3} < 14).$$

Donc, *a fortiori*,

$$\mathfrak{N}(t) < 10.$$

D'autre part,

$$\begin{array}{l} \mathfrak{N}t = 0 \text{ donne la solution connue } u = \pm 2, t = 0 \text{ par laquelle } \mathfrak{N}\left(\frac{u + t\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \\ \mathfrak{N}(t) = 1 \qquad \qquad \qquad \text{»} \qquad \qquad \qquad u = \pm 1, t = \pm i \qquad \qquad \qquad \text{»} \end{array}$$

Donc  $\mathfrak{N}t \geq 2$ .

$\mathfrak{N}(t) = 2$  donne  $t = \pm 1 \pm i$ ,  $t^2 = \pm 2i$ ;  $u^2 = 4 + 3t^2 = 4 \pm 6i$  est impossible, car  $\mathfrak{N}(4 \pm 6i) = 16 + 36 = 52$  n'étant pas carré parfait,  $4 \pm 6i$  ne peut être carré parfait d'un entier complexe. Cette hypothèse est à rejeter.

$\mathfrak{N}t = 3$  est impossible.

$\mathfrak{N}t = 4$  donne  $t = \pm 2$  ou  $t = \pm 2i$ ,  $t^2 = \pm 4$ , ceci fournit la solution  $u = \pm 4$ ,  $t = \pm 2$  trouvée au début.

$\mathfrak{N}t = 5$  donne  $t = \pm 1 \pm 2i$  ou  $t = \pm 2 \pm i$ , c'est-à-dire  $t^2 = -3 \pm 4i$  ou  $t^2 = 3 \pm 4i$ . Les valeurs correspondantes de  $4 + 3t^2$  sont

$$4 + 3t^2 = 4 + 3(-3 \pm 4i) = -5 \pm 12i$$

et

$$4 + 3t^2 = 4 + 3(3 \pm 4i) = 13 \pm 12i.$$

La deuxième hypothèse est à rejeter, car  $\mathfrak{N}(13 \pm 12i) = 169 + 144 = 313$

J.

non carré parfait et la première donne

$$4 + 3t^2 = -5 \pm 12i$$

dont la norme  $25 + 144 = 169$  est carré parfait de 13.

En s'appuyant sur l'identité  $13 = 3^2 + 2^2$ , on reconnaît de suite que

$$-5 \mp 12i = (\pm 2 \pm 3i)^2;$$

de façon plus précise

$$\begin{aligned} -5 + 12i &= (2 + 3i)^2 = (-2 - 3i)^2, \\ -5 - 12i &= (2 - 3i)^2 = (-2 + 3i)^2. \end{aligned}$$

On trouve donc les huit solutions possibles

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon(2 + 3i\varepsilon') \\ t &= \varepsilon''(1 + 2i\varepsilon') \end{aligned} \quad (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1).$$

Il faut voir encore celles qui rendent  $\Re\left(\frac{u + t\sqrt{3}}{2}\right) > 1$

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \frac{\varepsilon(2 + 3i\varepsilon') + \varepsilon''\sqrt{3}(1 + 2i\varepsilon')}{2} = \frac{2\varepsilon + \varepsilon''\sqrt{3} + \varepsilon'i(3\varepsilon + 2\varepsilon''\sqrt{3})}{2}$$

dont la norme est

$$\frac{7 + 4\varepsilon\varepsilon''\sqrt{3} + 21 + 12\varepsilon\varepsilon''\sqrt{3}}{4} = \frac{28 + 16\varepsilon\varepsilon''\sqrt{3}}{4}$$

qui n'est  $> 1$  que si  $\varepsilon\varepsilon'' = +1$ . Il faut donc supposer  $\varepsilon = \varepsilon''$  et l'on a les quatre solutions

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon(2 + 3i\varepsilon'), \\ t &= \varepsilon(1 + 2i\varepsilon'), \end{aligned}$$

pour lesquelles

$$\text{Norme}\left(\frac{u + t\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{28 + 16\sqrt{3}}{4} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Ces quatre solutions donnent à  $\frac{u + t\sqrt{3}}{2}$  la même norme que la solution  $u = \pm 4, t = \pm 2$  dont on est parti; on doit donc trouver pour ces quatre solutions

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}\right),$$

$\omega$  représentant une quelconque des quatre racines sixièmes imaginaires de l'unité, et c'est bien ce qui est, car une telle racine est

$$\omega = \frac{\varepsilon + i\varepsilon''\sqrt{3}}{2}$$

et l'on trouve

$$\omega(2 + \sqrt{3}) = \frac{2\varepsilon + 3i\varepsilon'' + \sqrt{3}(\varepsilon + 2i\varepsilon'')}{2}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u = 2\varepsilon + 3i\varepsilon'', \\ t = \varepsilon + 2i\varepsilon'', \end{cases}$$

et il suffit de poser  $\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$  pour retomber sur les formules précédentes.

Les hypothèses  $\varkappa t = 6$  et  $\varkappa t = 7$  sont impossibles.

$\varkappa t = 8$  donne

$$t = 2(\pm 1 \pm i), \quad t^2 = \pm 8i, \quad 4 + 3t^2 = 4 \pm 24i = 4(1 \pm 6i)$$

dont la norme  $16(1 + 36)$  n'est pas carré parfait. L'hypothèse est donc à rejeter.

Reste  $\varkappa t = 9$ , qui donne

$$t = \pm 3 \quad \text{ou} \quad t = \pm 3i; \quad \text{c'est-à-dire} \quad t^2 = \pm 9, \quad 4 + 3t^2 = 4 \pm 27 = \begin{cases} 31 \\ -23 \end{cases}$$

hypothèses à rejeter.

*Conclusion.* — On peut donc choisir, pour plus petite solution de  $u^2 - 3t^2 = 4$ , la solution

$$\boxed{U = 1, \quad T = 2.}$$

Toutes les solutions entières de cette équation seront donc données par la relation

$$\boxed{\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega(2 + \sqrt{3})^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty),$$

et  $\omega$  étant une racine sixième quelconque de l'unité.

Toutes les solutions entières réelles  $(u_1, t_1)$  sont données par

$$\frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2} = \pm (2 + \sqrt{3})^n \quad (1) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

et les solutions complexes  $(u, t)$  s'en déduisent par

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \omega \frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^3 = 1, \quad \omega = \frac{-1 + i\varepsilon\sqrt{3}}{2} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

ce qui donne

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{-u_1 + 3i\varepsilon t_1}{2}, \\ t &= \frac{i\varepsilon u_1 - t_1}{2}, \end{aligned}}$$

évidemment entières puisque  $u_1$  et  $t_1$  sont pairs.

---

(1) Il est visible que ces solutions réelles sont toutes formées de nombres pairs.

*Application de ces résultats aux substitutions du groupe de Picard.* — Les substitutions que nous étudions admettent un multiplicateur  $K$

$$\left( \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} = K \frac{Z - z_1}{Z - \bar{z}_1} \right)$$

racine de

$$K^2 - (u^2 - 2)K + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$K = \frac{u^2 - 2 + \sqrt{u^2(u^2 - 4)}}{2}.$$

Nous venons de déterminer tous les entiers complexes  $u$  pour lesquels

$$u^2 - 4 = At^2,$$

$A$  entier réel positif <sup>(1)</sup> et  $t$  entier complexe.

Pour de tels couples  $(u, t)$ , on a

$$K = \frac{u^2 - 2 + ut\sqrt{A}}{2} = \frac{(u + t\sqrt{A})^2 + u^2 - At^2 - 4}{4} = \left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)^2.$$

Pour  $A = 1$ , on n'a trouvé que

$$\begin{cases} u = \pm 2 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = 0 \\ t = \pm 2i \end{cases}$$

et ceci donne

$$K = \pm 1,$$

c'est-à-dire la substitution unité ou une substitution hyperbolique *de période 2* (symétrie non euclidienne).

Pour  $A > 1$  et  $\neq 3$ , on a trouvé que toute solution de  $u^2 - 4 = At^2$  était formée de nombres  $(u, t)$  tous deux réels ou tous deux purement imaginaires. Dans ces conditions *donc*  $K$  est réel, positif si  $u$  et  $t$  sont réels, négatif si  $u$  et  $t$  sont purement imaginaires.

*On n'obtient ainsi que des substitutions hyperboliques* <sup>(2)</sup>.

Pour  $A = 3$ , on a vu que les solutions de  $u^2 - 4 = 3t^2$  étaient, ou bien des solutions  $(u_1, t_1)$  formées de *nombres réels pairs*, ou bien des solutions *complexes*  $(u, t)$  formées à l'aide de solutions *réelles*  $(u_1, t_1)$  par la formule

$$\frac{u + t\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\varepsilon\sqrt{3}}{2} \frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2}; \quad \begin{cases} u = \frac{-u_1 + 3i\varepsilon t_1}{2}, \\ t = \frac{i\varepsilon u_1 - t_1}{2}. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Qu'on peut supposer sans diviseur carré (et impair même si l'on veut).

<sup>(2)</sup>  $K$  n'est égal à 1 que si l'on prend la solution  $u = \pm 2, t = 0$ ; Norme  $\left( \frac{u + t\sqrt{A}}{2} \right)$  pouvant devenir aussi grand qu'on veut, on voit qu'il y a des substitutions modulaires hyperboliques pour lesquelles  $|K|$  est aussi grand qu'on veut.

Pour les solutions réelles  $(u_1, t_1)$ ,  $K = \left(\frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2}\right)^2$  est réel et positif et l'on obtient des substitutions hyperboliques.

D'ailleurs, pour toute solution complexe, on a encore

$$K = \omega \left(\frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (1), \quad \omega^3 = 1, \quad \omega = \frac{-1 + i\varepsilon\sqrt{3}}{2} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

et l'on voit ainsi que l'argument de  $K$  est identique à celui de  $\omega$ ; c'est donc un argument de  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .

Et ceci prouve qu'on obtient ainsi des substitutions loxodromiques dont la puissance troisième, et par suite toutes les puissances d'ordre  $3p$  ( $p$  entier réel positif ou négatif) sont des substitutions hyperboliques.

## 2° ÉTUDE DE L'ÉQUATION (2) : $u^2 - Ait = 4$ .

$A$  est un entier réel qu'on peut supposer positif (en changeant au besoin  $t$  en  $it$ ), sans diviseur carré (qui pourrait rentrer dans  $t$ ), et impair [car la relation  $2i = (1+i)^2$  donnerait, si  $A$  était égal à  $2A'$  ( $A'$  impair),

$$Ait^2 = 2A'it^2 = A'(1+i)^2t^2,$$

et l'on serait ramené à une équation du type (1),  $u^2 - A't^2 = 4$ ].

Nous écrivons encore l'équation

$$\frac{u + t\sqrt{Ai}}{2} \frac{u - t\sqrt{Ai}}{2} = 1,$$

en choisissant par exemple pour  $\sqrt{Ai}$  celle des deux racines de l'entier  $Ai$  qui a un argument égal à  $+\frac{\pi}{4}$ .

On voit, en posant  $u = 2u'$ ,  $t = 2t'$ , que l'équation (2) a une infinité de solutions paires  $u'^2 - Ait'^2 = 1$  (voir le Mémoire de Dirichlet).

Il est facile d'ailleurs de voir que, dans nos hypothèses, toutes les solutions entières de (2) sont paires.

(1) D'ailleurs  $|K| = \left(\frac{u_1 + t_1\sqrt{3}}{2}\right)^2$ . Si l'on prend la solution particulière  $u_1 = \pm 2$ ,  $t_1 = 0$ , et celle-là seulement, on obtient une solution modulaire elliptique de période 3, car alors

$$K = \omega = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}},$$

c'est le résultat bien connu déjà annoncé sur les substitutions elliptiques du groupe de Picard.

Pour toute autre solution,  $|K| \neq 1$  et l'on a bien une substitution loxodromique dont la puissance troisième est hyperbolique.

Effectivement, en posant

$$u = 2m + \varepsilon,$$

$$t = 2n + \eta,$$

il faudra

$$\varepsilon^2 - A i \eta^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

$\varepsilon$  et  $\eta$  ont une des quatre valeurs 0, 1,  $i$ ,  $1 + i$ .

$A$  est impair. Il est alors facile de voir que *la seule hypothèse possible sur  $\varepsilon$  et  $\eta$  est  $\varepsilon = \eta = 0$  pour satisfaire à la congruence précédente.* C'est dire que  $u$  et  $t$  sont pairs.

En effet  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon^2 = 1$  donne

$$1 - A i \eta^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{et} \quad A \equiv \pm 1 \pmod{4};$$

il faut donc

$$1 \pm i \eta^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

et ceci est impossible, car  $\eta^2$  n'a que les quatre valeurs 0, 1,  $-1$ ,  $2i$ .

$\varepsilon = i$ ,  $\varepsilon^2 = -1$  donne

$$-1 - A i \eta^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{ou encore} \quad -1 \pm i \eta^2 \equiv 0$$

qui est encore impossible.

Enfin  $\varepsilon = 1 + i$ ,  $\varepsilon^2 = 2i$  donne

$$2i - A i \eta^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{ou} \quad 2i \pm i \eta^2 \equiv 0$$

qui est encore impossible.

Comme pour l'équation (1) on voit que, de deux solutions entières ( $u$ ,  $t$ ) et ( $u'$ ,  $t'$ ), distinctes de (2), on déduit une troisième solution ( $u''$ ,  $t''$ ) entière par

$$\frac{u'' + t'' \sqrt{A i}}{2} = \frac{u + t \sqrt{A i}}{2} \frac{u' + t' \sqrt{A i}}{2},$$

$$u'' = \frac{u u' + A t t'}{2},$$

$$t'' = \frac{u t' + t u'}{2}.$$

En effet,  $u''$  et  $t''$  sont évidemment entiers et pairs puisque  $u$  et  $t$  ainsi que  $u'$  et  $t'$  le sont,

$$\frac{u'' - t'' \sqrt{A i}}{2} = \frac{u - t \sqrt{A i}}{2} \frac{u' - t' \sqrt{A i}}{2}.$$

D'où

$$u''^2 - t''^2 A i = 4.$$

On a de même une quatrième solution entière ( $u'''$ ,  $t'''$ ) par

$$\frac{u''' + t''' \sqrt{\Lambda} i}{2} = \frac{u + t \sqrt{\Lambda} i}{2} = \frac{u + t \sqrt{\Lambda} i}{2} \frac{u' - t' \sqrt{\Lambda} i}{2}.$$

On passe de suite à la recherche des solutions entières ( $u$ ,  $t$ ) qui donnent à  $\Re \left( \frac{u + t \sqrt{\Lambda} i}{2} \right)$  la valeur 1. Elles sont telles que

$$\begin{aligned} \Re(u) + \Re(t \sqrt{\Lambda} i) &= 4, \\ \Re(u) + \Lambda \Re(t) &= 4 \end{aligned}$$

comme il a déjà été vu pour (1).

Si  $\Lambda > 4$ , les seules solutions sont  $t = 0$ ,  $u = \pm 2$ .

Restent les deux hypothèses  $\Lambda = 1$  et  $\Lambda = 3$ .

$\Lambda = 1$  ( $u^2 - t^2 = 4$ ). — On a d'abord  $u = \pm 2$ ,  $t = 0$  toujours.

$\Re t = 1$ ,  $\Re u = 3$  est impossible ainsi que  $\Re u = 1$ ,  $\Re t = 3$ .

$\Re u = 0$ ,  $\Re t = 4$ ,  $t = \pm 2$  ou  $\pm 2i$  est encore impossible.

$\Re u = \Re t = 2$  donnerait

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i, & t &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 i & (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 = \pm 2), \\ u^2 &= 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 i, & t^2 &= 2\varepsilon_3 \varepsilon_4 i, \\ u^2 - t^2 &= 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 i + 2\varepsilon_3 \varepsilon_4 \end{aligned}$$

qui ne peut pas être égal à 4.

Donc, pour  $\Lambda = 1$ ,  $\Re \frac{u + t \sqrt{\Lambda} i}{2}$  n'est = 1 que pour les solutions  $u = \pm 2$ ,  $t = 0$ .

Pour  $\Lambda = 3$  ( $u^2 - 3it^2 = 4$ ),

$$\Re(u) + 3 \Re t = 4.$$

L'hypothèse  $\Re t = 1 = \Re(u)$  donne

$$\begin{aligned} t^2 &= \pm 1, \\ u^2 &= \pm 1, \end{aligned}$$

et, pour aucun choix de ces valeurs,  $u^2 - 3it^2$  n'est réel. L'hypothèse est donc à rejeter et seules restent les solutions  $u = \pm 2$ ,  $t = 0$ .

Donc, *quel que soit*  $\Lambda$ , il n'y a que deux solutions entières de  $u^2 - \Lambda it^2 = 4$  rendant  $\Re \left( \frac{u + t \sqrt{\Lambda} i}{2} \right) = 1$  et ce sont les *deux solutions opposées*  $u = \pm 2$ ,  $t = 0$  (1).

---

(1) Tous ces résultats sont d'ailleurs immédiats quand on remarque que toute solution entière ( $u$ ,  $t$ ) est formée de nombres pairs.

De là se tire que, si deux solutions  $(u, t)$ ,  $(u', t')$  entières de (2) donnent la même valeur à  $\mathfrak{X} \left( \frac{u + t\sqrt{Ai}}{2} \right)$ , elles sont *identiques* ou *opposées*,

$$\begin{cases} u = \varepsilon u' \\ t = \varepsilon t' \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

*Conséquence.* — Si  $u = \alpha + \beta i$ ,  $t = \gamma + \delta i$  est solution entière de

$$(2) \quad u^2 - Ait^2 = 4,$$

il est visible immédiatement que

$$u' = -\alpha + \beta i, \quad t' = \delta + \gamma i$$

sera une autre solution entière, car les deux expressions

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2A\gamma\delta \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta - A(\gamma^2 - \delta^2)$$

dont la première est égale à 4 et la deuxième à 0 puisque  $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$  est solution de (2) conservent les mêmes valeurs quand on y change  $\alpha$  de signe et permute  $\gamma$  et  $\delta$ .

Envisageant les deux nombres

$$\frac{\alpha + \beta i + \sqrt{Ai}(\gamma + \delta i)}{2}$$

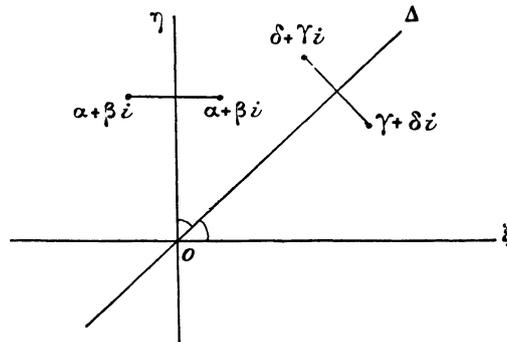
et

$$\frac{-\alpha + \beta i + \sqrt{Ai}(\delta + \gamma i)}{2},$$

on voit que :

1°  $\alpha + \beta i$  et  $-\alpha + \beta i$  sont figurés par deux points symétriques relativement à l'axe imaginaire  $O\eta$  dans le plan  $O\xi\eta$  de la variable complexe.

Fig. 97.



2°  $\delta + \gamma i$  et  $\gamma + \delta i$  sont figurés par deux points symétriques par rapport à la bissectrice  $\Delta$  de l'angle  $\xi O\eta$ .

$\sqrt{Ai}$  ayant l'argument  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\sqrt{Ai}(\delta + \gamma i)$  et  $\sqrt{Ai}(\gamma + \delta i)$  seront figurés par deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire  $O\eta$ , qui se déduit de  $\Delta$  par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

Donc les deux nombres

$$\frac{\alpha + \beta i + \sqrt{Ai}(\gamma + \delta i)}{2},$$

$$\frac{-\alpha + \beta i + \sqrt{Ai}(\delta + \gamma i)}{2}$$

sont figurés par deux points symétriques relativement à  $O\eta$ . *Ces deux nombres ont donc même norme.*

La conclusion est que les deux solutions entières  $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$  et  $(-\alpha + \beta i, \delta + \gamma i)$  sont *identiques ou opposées*.

On a donc

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i &= \varepsilon(-\alpha + \beta i) \\ \gamma + \delta i &= \varepsilon(\delta + \gamma i) \end{aligned} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

$\varepsilon = +1$  donne  $\alpha = 0, \gamma = \delta$ ;

$\varepsilon = -1$  donne  $\beta = 0, \gamma = -\delta$ .

La première hypothèse donne

$$\begin{aligned} u &= i u_1, \\ t &= (1 + i)t_1, \end{aligned}$$

$u_1$  et  $t_1$  étant réels et vérifiant l'équation

$$-u_1^2 + 2A t_1^2 = 4$$

ou

$$(3) \quad u_1^2 - 2A t_1^2 = -4.$$

La deuxième hypothèse donne

$$\begin{aligned} u &= u_2, \\ t &= (1 - i)t_2, \end{aligned}$$

$u_2$  et  $t_2$  étant des entiers réels vérifiant l'équation

$$(4) \quad u_2^2 - 2A t_2^2 = 4,$$

et l'on est sûr *a priori* que l'une au moins des deux équations (3), (4), la dernière, a des solutions réelles en nombre infini. D'ailleurs (3) et (4) se simplifient, car  $A$  étant impair, il faut de toute nécessité que les entiers  $(u_1, t_1)$  ou  $(u_2, t_2)$  vérifiant (3) ou (4) soient pairs <sup>(1)</sup>. Et les équations (3) et (4) se

(1) Ce qui, d'ailleurs, a déjà été vérifié antérieurement.

réduisent à

$$(3') \quad u_1'^2 - 2A t_1'^2 = -1 \quad (\text{en posant } u_1 = 2u_1', t_1 = 2t_1')$$

et

$$(4') \quad u_2'^2 - 2A t_2'^2 = 1 \quad (u_2 = 2u_2', t_2 = 2t_2')$$

qui sont deux équations bien connues dont la première (3') n'a pas toujours de solution, tandis que (4') en a toujours une infinité.

La théorie de (2) s'achève comme celle de (1). Il existe une plus petite solution positive (U, T) entière faisant acquérir à  $\mathfrak{K} \frac{u + t\sqrt{Ai}}{2}$  sa plus petite valeur  $> 1$  et toutes les solutions entières de (2) s'en déduisent par

$$\frac{u + t\sqrt{Ai}}{2} = \pm \left( \frac{U + T\sqrt{Ai}}{2} \right)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty).$$

*Application aux substitutions du groupe de Picard.* — Quel que soit A, on a vu que toute solution entière de (2) était d'un des deux types suivants :

$$(a) \quad \begin{cases} u = iu_1 \\ t = (1+i)t_1 \end{cases} \quad (u_1, t_1 \text{ entiers réels),}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u = u_2 \\ t = (1-i)t_2 \end{cases} \quad (u_2, t_2 \text{ entiers réels).}$$

En se servant d'une solution (u, t) de (2), on obtient une substitution modulaire dont le multiplicateur

$$\begin{aligned} K &= \frac{u^2 - 2 + \sqrt{u^2(u^2 - 4)}}{2} \\ &= \frac{u^2 - 2 + ut\sqrt{Ai}}{2} = \frac{(u + t\sqrt{Ai})^2 + u^2 - Ait^2 - 4}{4} = \left( \frac{u + t\sqrt{Ai}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

La substitution inverse a pour multiplicateur

$$\frac{1}{K} = \left( \frac{u - t\sqrt{Ai}}{2} \right)^2.$$

Pour K (comme pour  $\frac{1}{K}$ ) : 1° Pour toute solution du type (a),  $t\sqrt{Ai}$  est un nombre purement imaginaire, comme u (car  $\sqrt{Ai}$  a, comme  $1+i$ , l'argument  $\frac{\pi}{4}$ ).

Donc K est réel et négatif.

2° Pour toute solution du type (b) u est réel et  $t\sqrt{Ai}$  est aussi réel.

Donc K est réel et positif.

En définitive, nous n'obtenons avec les solutions de (2) que des substitutions hyperboliques. Et nous voyons que  $K$  peut être aussi grand qu'on veut, puisque

$$\text{Norme} \frac{u + t\sqrt{A}i}{2} = \left| \left( \frac{u + t\sqrt{A}i}{2} \right)^2 \right|$$

peut l'être; et l'on n'a  $K = 1$  que pour  $u \pm 2, t = 0$ , comme il a déjà été vu précédemment.

---

#### RÉSUMÉ DE CETTE ÉTUDE.

Une substitution  $z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$  du groupe de Picard peut être :

1° Elliptique. Elle s'écrit alors

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = e^{i\theta} \frac{Z - z_1}{Z - z_2}$$

et, nécessairement,  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$  ou  $\theta \equiv \pi$ .

2° Hyperbolique. Elle s'écrit

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = K \frac{Z - z_1}{Z - z_2},$$

$K$  étant un nombre réel positif ou négatif.

Comme cas particulier [commun à 1° ( $\theta \equiv \pi$ ) et à 2°],  $K$  peut être égal à  $-1$ , et la substitution a pour période 2. Elle correspond à une symétrie non euclidienne par rapport à la droite non euclidienne joignant  $z_1, z_2$  (dans l'espace non euclidien de la sphère  $\Sigma$ , ou dans le demi-espace  $O\xi\eta\tau$ ).

3° Parabolique, si des points doubles sont confondus.

4° Loxodromique. Alors elle s'écrit

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = r e^{i\theta} \frac{Z - z_1}{Z - z_2},$$

$\theta$  n'étant congru ni à 0 ni à  $\pi$ , en sorte que  $re^{i\theta}$  n'est pas réel, et  $|r| \neq 1$ .

L'angle  $\theta$  ne peut être commensurable à  $2\pi$  que s'il a l'une des deux valeurs  $\frac{2\pi}{3}$  ou  $-\frac{2\pi}{3}$ . Ceci ne pourra arriver que si  $a + d = u$  est une solution

*complexe entière* de l'équation

$$u^2 - 3t^2 = 4,$$

c'est-à-dire si  $\frac{u^2-4}{3}$  est le carré d'un entier complexe.

Dans tout autre cas,  $\theta$  est incommensurable à  $2\pi$ . On sera certain d'être dans ce cas si Norme  $[(a+d)^2 - 4]$  n'est pas carré parfait.

Si Norme  $[(a+d)^2 - 4]$  est carré parfait, on peut avoir :

1° Une substitution elliptique de période 3 : ceci n'arrive que si

$$a + d = u = \pm 1.$$

2° Une substitution hyperbolique; c'est le cas général. En particulier, si  $a + d = u = \pm 2$ , on a soit la substitution unité, soit une substitution hyperbolique de période 2.

3° Une substitution loxodromique dont la puissance troisième est hyperbolique; ceci n'arrive, comme on l'a dit, que si l'entier  $a + d = u$  complexe est tel que  $\frac{u^2-4}{3}$  soit aussi carré d'un entier complexe  $t$  ( $u$  et  $t$  n'étant, bien sûr, pas réels).

Ainsi se trouve éclaircie l'étude des substitutions *loxodromiques* du groupe de Picard; une telle substitution ne peut être que de l'une des deux espèces suivantes :

1° Substitution d'argument *incommensurable* à  $2\pi$ ; aucune de ses puissances n'est hyperbolique. C'est le cas général.

2° Substitution d'argument  $\frac{2\pi}{3}$  ou  $-\frac{2\pi}{3}$ ; sa puissance troisième et toutes ses puissances d'ordre  $3p$  ( $p$  entier réel) sont hyperboliques.

*Remarque.* — Nous avons, dans tout le cours du Mémoire, appelé *hyperbolique* toute substitution qui se ramenait à  $\frac{z - z_1}{z - z_2} = K \frac{Z - z_1}{Z - z_2}$  avec  $K$  réel. Certains auteurs n'appellent *hyperboliques* que les substitutions du type précédent pour lesquelles  $K$  est réel et *positif*, et rangent les substitutions à  $K$  négatif dans la catégorie loxodromique ( $K = |K|e^{i\pi}$ , si  $K$  est négatif). Avec ces nouvelles conventions, les substitutions loxodromiques du groupe de Picard seraient de deux sortes :

1° Celles pour lesquelles l'argument  $\theta$  de  $K$  est incommensurable à  $2\pi$ ;

2° Celles pour lesquelles l'argument  $\theta$  de  $K$  est  $\pi$  ou  $\pm \frac{2\pi}{3}$  : leurs puissances respectives d'ordre  $2p$  ou  $3p$  ( $p$  entier réel) sont hyperboliques.

Ce Mémoire, envoyé au concours de 1917 pour le prix Bordin, a été couronné par l'Académie des Sciences. Le sujet du concours était le suivant : « *Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques* ».

*Vu et approuvé :*

Paris, le 30 mai 1917.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 30 mai 1917.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

*Pour le Vice-Recteur en congé,*

L'INSPECTEUR CHARGÉ DE L'ADMINISTRATION  
DE L'ACADÉMIE,

ISTRIA.

