A. BESSERVE

# Le cercle et les surfaces cerclées en géométrie conforme

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1915

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1915__8__R1_0>

N° D'ORDRE
1566.

# THÈSES

PRÉSENTEES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,


**Par M. A. BESSERVE.**


---

1re THÈSE. — Le cercle et les surfaces cerclées en géométrie conforme.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

---

**Soutenues le juin 1915 devant la Commission d'Examen.**

---

MM. Émile PICARD, *Président.*
CARTAN, VESSIOT, *Examinateurs.*


PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.



55630 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MON PÈRE.

A

MONSIEUR ERNEST VESSIOT.

Hommage reconnaissant et respectueux.

A. BESSERVE.

# TABLE DES MATIÈRES.

## PREMIÈRE THÈSE.

## SECONDE THÈSE.

# PREMIÈRE THÈSE.

## LE
# CERCLE ET LES SURFACES CERCLÉES
## EN GÉOMÉTRIE CONFORME.

### INTRODUCTION.

1. Les transformations conformes, c'est-à-dire celles qui laissent invariante l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$, changent un cercle (C) en un cercle ($\Gamma$); les deux cercles coincident quand on effectue certaines de ces transformations.

Le système des deux équations

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad z = 0$$

admet quatre transformations infinitésimales conformes :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(x^2 - y^2 - z^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 2xz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(y^2 - z^2 - x^2 - R^2)\frac{\partial f}{\partial y} + 2yz\frac{\partial f}{\partial z} + 2xy\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(z^2 - x^2 - y^2 + R^2)\frac{\partial f}{\partial z} + 2zx\frac{\partial f}{\partial x} + 2yz\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les deux sphères de rayon nul passant par le cercle (C) sont changées, dans une transformation conforme, en deux sphères de rayon nul passant par le cercle ($\Gamma$); cette propriété nous conduit à définir le cercle par les six quantités $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$ coordonnées des centres des deux sphères. Si nous considérons les six quantités $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ comme les coordonnées d'un point de l'espace à six dimensions, nous pouvons faire correspondre à tout point de cet espace un cercle dans l'espace à trois dimensions, et inversement. Les quantités $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$ sont imaginaires conjuguées quand le cercle est réel.

Les formules qui lient les coordonnées du cercle (C) aux coordonnées du cercle (Γ) (Chap. II) définissent un groupe (G) à six variables et à dix paramètres, isomorphe au groupe conforme. Désignons par $X_i f$, $X_i^1 f$ les quantités obtenues en remplaçant $x$, $y$, $z$ successivement par $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$ dans les transformations infinitésimales du groupe conforme, les transformations infinitésimales du groupe (G) sont (Chap. II) :

$$X_i f + X_i^1 f \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10).$$

L'équation $(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2 = 0$, qui exprime que le rayon du cercle est nul, est invariante par les transformations du groupe (G).

2. Considérons la figure formée par deux cercles; soient $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$ les coordonnées des foyers A, B du premier cercle; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les coordonnées des foyers C, D du deuxième cercle. Les invariants de cette figure, par rapport au groupe conforme, sont les invariants de quatre points de ce groupe, c'est-à-dire les intégrales du système complet :

$$X_i f + X_i^1 f + \xi_i f + \xi_i^1 f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10).$$

Les premiers membres de ces équations représentent les sommes des quantités obtenues en remplaçant, dans les transformations conformes, $x$, $y$, $z$ successivement par $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Ce système complet de dix équations à douze variables admet deux intégrales distinctes :

$$\rho^2 = \frac{\Sigma(a-\alpha)^2 . \Sigma(a_1 - \alpha_1)^2}{\Sigma(a_1 - a)^2 . \Sigma(\alpha_1 - \alpha)^2} = \frac{\overline{AC}^2 . \overline{BD}^2}{\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2},$$

$$\rho_1^2 = \frac{\Sigma(a_1-\alpha)^2 . \Sigma(a - \alpha_1)^2}{\Sigma(a_1 - a)^2 . \Sigma(\alpha_1 - \alpha)^2} = \frac{\overline{BC}^2 . \overline{AD}^2}{\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2},$$

en représentant par $\Sigma(a-\alpha)^2$ la somme $(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2$.

Nous limitons notre étude aux cercles dont le rayon n'est pas nul, ce qui revient à supposer AB et CD différents de zéro; si R, $R_1$ sont les rayons des cercles,

$$\overline{AB}^2 = -4R^2, \qquad \overline{CD}^2 = -4R_1^2.$$

Les propriétés du système de deux cercles (¹), invariantes par les transformations conformes, peuvent s'exprimer au moyen des deux invariants $\rho$, $\rho_1$ et, par suite, au moyen des éléments du triangle invariable construit avec les longueurs $OO_1 = 1$, $OI = \rho$, $O_1I = \rho_1$.

La distance du sommet I au côté opposé $OO_1$ est donnée par la relation

$$4\overline{IH}^2 = (\rho+\rho_1+1)(\rho+\rho_1-1)(\rho-\rho_1+1)(-\rho+\rho_1+1).$$

Soient $\mathcal{R}$ le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, V son volume ; nous avons

$$(3V.\mathcal{R})^2 = 4^2 R^4. R_1^4. \overline{IH}^2.$$

Il existe une sphère réelle orthogonale aux deux cercles lorsque $\overline{IH}^2$ est positif. Si $\overline{IH}^2$ est négatif, les points de rencontre du cercle C avec le plan du cercle $\Gamma$ sont, l'un intérieur à $(\Gamma)$, l'autre extérieur. La condition de rencontre des deux cercles est $IH = 0$; les quatre foyers sont sur une sphère de rayon nul; l'angle $\omega$ des tangentes aux deux cercles au point de rencontre est défini par l'équation

$$\cos^2\omega = (\rho^2-\rho_1^2)^2.$$

Lorsque les deux cercles ne se rencontrent pas, nous sommes conduits à dire que l'angle $\omega$ défini par l'équation

$$\cos^2\omega = (\rho^2-\rho_1^2)^2$$

est encore l'angle des deux cercles. Soient M le milieu du côté $OO_1$ du triangle invariable, H le pied de la hauteur; nous avons la relation

$$\cos^2\omega = 4\overline{MH}^2.$$

(¹) Kœnigs, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888. — E. v. Weber, *Archiv der Math. und Phys.*, 3ᵉ série, 1904.

Le triangle est rectangle quand $\omega = 0$; il est isoscèle quand $\omega = \frac{\pi}{2}$. Nous pouvons dire, dans ce dernier cas, que les cercles sont orthogonaux. Soient, en coordonnées pentasphériques,

$$\sum_i A_i x_i = 0, \qquad \sum_i B_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10)$$

les équations des deux sphères de rayon nul passant par le cercle (C) et

$$\sum_i C_i x_i = 0, \qquad \sum_i D_i x_i = 0$$

les équations des sphères de rayon nul passant par le cercle $(\Gamma)$; en prenant comme figure de référence le pentasphère orthogonal formé par les trois faces d'un trièdre trirectangle et deux sphères orthogonales ayant pour centre le sommet du trièdre et pour rayon 1 et $\sqrt{-1}$, les coefficients de l'équation $\Sigma A_i x_i = 0$ sont

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = 2b, \qquad A_3 = 2c,$$
$$A_4 = a^2 + b^2 + c^2 - 1, \qquad A_5 = -i(a^2 + b^2 + c^2 + 1).$$

Considérons deux sphères orthogonales passant par le cercle (C) :

$$S = \sum_i (A_i + \lambda^2 B_i) = 0,$$

$$T = \sum_i (A_i - \lambda^2 B_i) = 0,$$

et deux sphères orthogonales passant par le cercle $(\Gamma)$ :

$$\sigma = \sum_i (C_i + \mu^2 D\ ) = 0,$$

$$\tau = \sum_i (C_i - \mu^2 D_i) = 0.$$

Les sphères S, T sont respectivement orthogonales aux sphères $\tau$, $\sigma$ si $\lambda$, $\mu$ satisfont aux deux équations

$$\overline{AC}^2 + \lambda^2 \overline{BC}^2 - \mu^2 \overline{AD}^2 - \lambda^2 \mu^2 \overline{BD}^2 = 0,$$
$$\overline{AC}^2 - \lambda^2 \overline{BC}^2 + \mu^2 \overline{AD}^2 - \lambda^2 \mu^2 \overline{BD}^2 = 0.$$

Les angles $\delta = (\widehat{S, \sigma})$ et $\delta' = (\widehat{T, \tau})$ sont alors définis par les relations

$$\cos^2\delta = (\rho + \rho_1)^2,$$
$$\cos^2\delta' = (\rho - \rho_1)^2.$$

Revenons à la figure formée par deux cercles orthogonaux : le triangle invariable correspondant est isoscèle, $\rho = \rho_1$, et les trois angles $\widehat{S\tau}$, $\widehat{T\sigma}$, $\widehat{T\tau}$ sont droits; par chaque cercle passe une sphère orthogonale à l'autre.

Si nous considérons deux sens de parcours sur un cercle, nous pouvons former avec ce cercle deux *cycles* en prenant chaque foyer du cercle comme *sommet* d'un cycle ; deux cycles sont dits dans une position *minima* lorsque leurs sommets sont situés sur une droite minima; l'une des quantités $\rho$, $\rho_1$ est nulle, soit par exemple $\rho = 0$. Dans cette hypothèse, les deux quantités $(\rho + \rho_1)^2$, $(\rho - \rho_1)^2$ se réduisent à une seule, $\rho_1^2$.

Si les foyers A, C sont situés sur une droite minima ainsi que les foyers B, D, les conditions d'orthogonalité des sphères S, $\tau$ et des sphères $\sigma$, T se ramènent à une seule; les sphères passant par le cercle (C) coupent le cercle ($\Gamma$) sous le même angle $\delta$ et les sphères passant par ($\Gamma$) coupent (C) sous le même angle $\delta$.

Les cercles sont dits dans la position *orthosphérique*, lorsque chacun des deux cycles de (C) est dans la position minima avec chacun des deux cycles de ($\Gamma$). Dans cette hypothèse,

$$\rho = \rho_1 = 0, \qquad \delta = \delta' = \frac{\pi}{2}.$$

Toute sphère passant par le cercle (C) est orthogonale au cercle ($\Gamma$) et inversement. Chacun des cercles passe par les foyers de l'autre. Les cercles sont situés dans deux plans rectangulaires qui se coupent suivant la ligne des centres; cette ligne est divisée harmoniquement par les deux cercles.

3. Si les coordonnées $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ sont fonctions d'un paramètre variable $t$, le cercle (C) engendre une surface et le point correspondant de l'espace à six dimensions $R_6$ décrit une courbe. Les invariants

différentiels des surfaces cerclées par rapport au groupe conforme sont donc les invariants des courbes de l'espace $R_6$ par rapport au groupe (G) prolongé. En égalant à zéro les transformations infinitésimales du groupe (G) prolongé au premier ordre (Chap. IV), nous obtenons un système complet de dix équations aux dérivées partielles à douze variables qui admet deux intégrales distinctes :

$$\Delta^4 = 2^4 \frac{\Sigma a'^2 . \Sigma a_1'^2}{(\Sigma A^2)^2},$$
$$\Delta_1^4 = 2^4 \left[ 2 \frac{\Sigma A a' . \Sigma A a_1'}{(\Sigma A^2)^2} - \frac{\Sigma a' a_1'}{\Sigma A^2} \right]^2;$$

les accents désignent une dérivation par rapport à $t$, et nous avons posé

$$A = a_1 - a, \qquad B = b_1 - b, \qquad C = c_1 - c,$$
$$\Sigma A^2 = A^2 + B^2 + C^2, \qquad \Sigma a'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Nous pouvons former avec les deux invariants relatifs $\Delta$, $\Delta_1$ une combinaison indépendante du choix du paramètre, par exemple $I_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ou encore $K^4 = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}$.

Nous devons trouver une interprétation de ces invariants en considérant le triangle invariable relatif à deux cercles infiniment voisins (Chap. V).

Remplaçons, dans les expressions de $\rho^2$, $\rho_1^2$, les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ par $a + a'dt + \ldots$, $b + b'dt + \ldots$, ... et limitons les développements aux termes du plus bas degré en $dt$, nous avons

$$\rho^2 = \frac{\Delta^4}{16} dt^4 + \ldots, \qquad \rho_1^2 = 1 - \frac{\Delta_1^2}{2} dt^2 + \ldots;$$
$$\overline{IH}^2 = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{16} dt^4 + \ldots, \qquad \sin^2\omega = \Delta_1^2 dt^2 + \ldots.$$

Le rapport $\frac{16 \overline{IH}^2}{\sin^4\omega}$ a une limite qui est l'invariant absolu du premier ordre $\frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}$; nous trouvons ainsi une analogie avec les surfaces réglées : *Le rapport de la distance* $2\sqrt{IH}$ *à l'angle de deux cercles infiniment voisins a une limite.* Soit $ds$ l'angle de deux cercles infiniment voisins, $\frac{ds^2}{dt^2} = \Delta_1^2$. Considérons la courbe décrite par le sommet I du triangle invariable quand le cercle $(\Gamma)$ se rapproche indéfiniment du cercle (C), et la tangente OT au point O à cette courbe :

$$\operatorname{tang}^2 \widehat{TOO_1} = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}.$$

L'angle $\widehat{TOO_1}$ est égal à l'angle de deux sphères remarquables passant par le cercle générateur de la surface (Chap. VI).

Toute sphère (S) passant par le cercle est en général tangente à la surface en deux points, les points de rencontre du cercle avec le plan caractéristique de la sphère. Les plans caractéristiques des sphères (S) passent par une même droite, les cordes de contact passent par un point fixe. Deux des sphères (S) sont des sphères points de centres $a, b, c$ et $a_1, b_1, c_1$ foyers du cercle. Deux de ces sphères ont leurs points de contact confondus; aux points M, $M_1$ où ces deux sphères F, $F_1$, que nous appellerons *sphères fondamentales*, touchent la surface, la génératrice est tangente à une ligne de courbure de la surface (1). Les *points de courbure* M, $M_1$, ainsi que les courbes de la surface décrites par ces points, sont conservés dans une transformation conforme; l'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères fondamentales vérifie la relation

$$\operatorname{tang}^2 \widehat{FF_1} = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}.$$

Le rapport anharmonique des quatre sphères, sphères fondamentales et sphères focales, est égal à $e^{2i\widehat{FF_1}}$; cette quantité représente encore le carré du rapport anharmonique défini sur le cercle par les points de courbure et les points de contact imaginaires d'une sphère focale; les quatre points de contact des sphères focales forment un rapport anharmonique égal à $\cos^2 \frac{\widehat{FF_1}}{2}$.

4. Les invariants différentiels du second ordre sont les intégrales

(1) Les propriétés des points de contact des sphères passant par le cercle, en particulier celles des points de courbure, ont été démontrées par M. Demartres (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885).

du système complet formé en égalant à zéro les transformations infinitésimales du groupe (G) prolongé au deuxième ordre (Chap. VII). Ce système de dix équations aux dérivées partielles à dix-huit variables a huit intégrales distinctes; nous pouvons former avec ces intégrales six combinaisons distinctes qui ne dépendent pas du choix du paramètre $t$. Nous avons ainsi un système d'invariants absolus fondamentaux; l'un d'eux est l'invariant absolu du premier ordre que nous avons interprété comme *paramètre de distribution*.

Lorsque les points de courbure M, $M_1$ sont réels, nous pouvons donner des invariants du second ordre l'interprétation géométrique réelle suivante : Soient $ds$ l'angle de deux génératrices consécutives; $d\psi$, $d\psi_1$ les angles des sphères fondamentales F, $F_1$, avec les sphères infiniment voisines; $d\psi'$, $d\psi'_1$ les angles que font, avec les sphères infiniment voisines, les sphères F', $F'_1$, tangentes à la surface aux points M, $M_1$, et qui ont pour centres les centres de courbure principaux non situés sur l'axe; $d\chi$ l'angle que fait avec la sphère infiniment voisine la sphère orthogonale à deux génératrices consécutives; les quantités

$$\frac{d\psi}{ds},\quad \frac{d\psi_1}{ds},\quad \frac{d\psi'}{ds},\quad \frac{d\psi'_1}{ds},\quad \frac{d\chi}{ds}$$

sont des invariants absolus du second ordre.

$d\psi$, $d\psi_1$ et l'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères fondamentales vérifient les relations

$$\frac{d\psi_1}{ds} - \frac{d\psi}{ds} - \frac{d\widehat{FF_1}}{ds} = 0;$$

$d\psi'$, $d\psi'_1$ sont liés à l'angle $i$ du cercle avec la trajectoire du point de courbure M par la relation

$$\cot i = \frac{d\psi'}{d\psi}.$$

Si $\widehat{F'F'_1}$ désigne l'angle des sphères F', $F'_1$, la quantité $\cos\widehat{F'F'_1}$ est encore un invariant du second ordre.

5. Soit I un invariant absolu d'ordre $q$; la quantité $\frac{dI}{ds}$ est un invariant absolu d'ordre $q+1$. Tous les invariants absolus d'ordre supérieur à 2 peuvent s'obtenir ainsi (Chap. X), en partant des invariants du second ordre.

6. Les familles de surfaces cerclées, invariantes par les transformations conformes, sont définies par des systèmes d'équations qui admettent le groupe (G) ou les groupes prolongés. Ces systèmes d'équations peuvent se diviser en deux classes (Chap. XI). Les systèmes de la première classe n'entraînent pas la nullité de tous les déterminants du dixième ordre de la matrice formée avec les coefficients des transformations infinitésimales prolongées au premier ordre ; les systèmes de la deuxième classe entraînent la nullité de tous ces déterminants. Les systèmes de la première classe s'obtiennent en égalant à zéro un certain nombre d'invariants différentiels, les systèmes de la deuxième classe renferment l'équation

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2 = 0,$$

qui exprime que le rayon du cercle générateur est nul, ou les deux équations

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ a' & b' & c' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \Sigma \mathrm{A}\dfrac{a_1 + a}{2} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \Sigma a\, a' & b' & c' \\ \Sigma a_1 a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui expriment que la génératrice est le cercle caractéristique d'une sphère (Chap. XIII). Le système d'invariants absolus fondamentaux ne convient plus ; il y aura lieu de faire une étude spéciale des invariants. Nous déterminerons plus loin les invariants des surfaces enveloppes de sphères, mais nous ne nous occuperons pas des surfaces engendrées par un cercle de rayon nul ; ces dernières peuvent être envisagées comme des surfaces réglées. Cherchons à caractériser les surfaces correspondant aux équations obtenues en égalant à zéro les invariants différentiels.

7. L'équation $\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0$, obtenue en égalant à zéro l'invariant absolu du premier ordre $\operatorname{tang}^2 \widehat{\mathrm{FF}_1} = \dfrac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}$, exprime que deux génératrices infiniment voisines ont un point commun ; la condition de rencontre de deux cercles est $\mathrm{IH} = 0$ ; or $\overline{\mathrm{IH}}^2 = \dfrac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{16} dt^4 + \ldots$ (Chap. XII).

Les sphères fondamentales sont confondues ainsi que les *points de* *courbure*. Le cercle reste tangent à la trajectoire du *point de courbure*.

Déterminons dans quelques cas particuliers les équations finies des surfaces correspondant à l'équation considérée. Soient C le centre du cercle; $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées de ce point; R le rayon; CXYZ un trièdre mobile trirectangle; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ les cosinus directeurs des axes, l'axe CX étant parallèle à la caractéristique du plan du cercle et CZ perpendiculaire à ce plan; on peut passer d'une position du trièdre mobile à la position infiniment voisine par une translation suivie d'une rotation; nous désignerons par $u$, $v$, $w$ les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse du point C, et par $p$, $q$, $r$ les composantes de la rotation ($q = 0$). Une surface réelle sera définie par six équations :

$$\begin{aligned} a &= x_0 + i\mathrm{R}\alpha_3, & a_1 &= x_0 - i\mathrm{R}\alpha_3,\\ b &= y_0 + i\mathrm{R}\beta_3, & b_1 &= y_0 - i\mathrm{R}\beta_3,\\ c &= z_0 + i\mathrm{R}\gamma_3, & c_1 &= z_0 - i\mathrm{R}\gamma_3 \end{aligned}$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

R vérifiant l'équation $\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0$, qui peut s'écrire

$$(1) \qquad p^2\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 - 2pvw\mathrm{R}\mathrm{R}' - p^2u^2\mathrm{R}^2 + w^2(u^2 + v^2).$$

I. Toutes les surfaces de la famille, engendrées par des cercles concentriques, satisfont aux équations $u = v = w = 0$ et à l'équation (1) qui devient

$$p^2\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 = 0;$$

on peut avoir $\mathrm{R} = \text{const.}$, les surfaces sont les sphères, ou $p = 0$, les cercles sont dans un même plan.

II. Toutes les surfaces de la famille, pour lesquelles $u = 0$, sont engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère [1], car l'équation (1) devient

$$p\mathrm{R}\mathrm{R}' - wv = 0.$$

III. Toutes les surfaces de la famille, pour lesquelles $w = 0$, c'est-à-dire pour lesquelles le plan de la génératrice reste tangent à la

(1) Enneper, *Zeitschrift fur Math.*, 1869.

courbe décrite par le centre du cercle, satisfont à l'équation (1), qui devient

$$R'^2 - u^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad R = \pm \int u\,dt.$$

La caractéristique passe par le centre, le cercle reste tangent à la trajectoire du *point de courbure* qui a pour équations

$$\xi = x_0 \pm R\alpha_1, \qquad \eta = y_0 \pm R\beta_1, \qquad \zeta = z_0 \pm R\gamma_1.$$

IV. Toutes les surfaces de la famille, pour lesquelles $w = \pm pR$, c'est-à-dire pour lesquelles la caractéristique est tangente au cercle, satisfont à l'équation (1) qui devient

$$R'^2 = v^2, \qquad \text{d'où} \qquad R = \pm \int v\,dt.$$

Une conséquence des deux équations précédentes est $\left(\frac{w}{p}\right)' - v = 0$.

Les coordonnées relatives du point où la caractéristique touche son enveloppe sont

$$X = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{w}{p}\right)' - v\right], \qquad Y = -\frac{w}{p}, \qquad Z = 0;$$

elles deviennent, si $r$ est différent de zéro,

$$X = 0, \qquad Y = \pm R, \qquad Z = 0.$$

Le plan de la génératrice est alors le plan osculateur d'une courbe tracée sur la surface, et la génératrice est tangente à cette courbe.

Si, avec les équations $w = \pm pR$, $R' = \pm v$, on a l'équation $r = 0$, le point où la caractéristique touche son enveloppe est indéterminé. La surface qui a pour équations finies

$$\begin{aligned} a &= 1 - it, & a_1 &= 1 + it, \\ b &= t, & b_1 &= t, \\ c &= t + i, & c_1 &= t - i \end{aligned}$$

répond à ces conditions. Le plan de la génératrice a pour équation

$$z - tx = 0;$$

il passe par une droite fixe. On peut définir la surface par l'équation

$$x^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(x^2 + yz + z^2) + z^2 = 0.$$

7. Toutes les surfaces engendrées par des cercles passant par un point fixe appartiennent évidemment à la famille de surfaces considérée. Les foyers de la génératrice sont sur la sphère de rayon nul qui a pour centre le point fixe. Soient U, V deux fonctions de $t$; $U_0$, $V_0$ les fonctions imaginaires conjuguées; les équations finies de la surface engendrée par un cercle passant par l'origine des coordonnées sont

$$\begin{aligned} a &= U^2 - V^2, & a_1 &= U_0^2 - V_0^2, \\ b &= i(U^2 + V^2), & b_1 &= -i(U_0^2 + V_0^2), \\ c &= 2UV, & c_1 &= 2U_0V_0. \end{aligned}$$

8. L'invariant relatif $\Delta^2$ peut s'écrire $\frac{1}{R^2}\frac{d\sigma}{dt}\frac{d\sigma'}{dt}$; $d\sigma$, $d\sigma'$ désignent les éléments d'arcs des focales; il fait connaître deux équations invariantes

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0, \qquad \frac{d\sigma'}{dt} = 0.$$

Ces équations expriment que les focales sont des courbes minima. Deux génératrices consécutives sont dans la *position minima*.

Lorsque le cercle générateur n'est pas le cercle caractéristique d'une enveloppe de sphères, les *points de courbure* sont imaginaires, les sphères fondamentales deviennent les sphères focales.

Soient U une fonction quelconque de $t$, $U_0$ la fonction imaginaire conjuguée : les surfaces réelles à focales isotropes ont pour équations finies :

$$\begin{aligned} a &= (1-t^2)U'' + 2tU' - 2U, & a_1 &= (1-t^2)U_0'' + 2tU_0' - 2U_0, \\ ib &= (1+t^2)U'' - 2tU' + 2U, & -ib_1 &= (1+t^2)U_0'' - 2tU_0' + 2U_0, \\ c &= 2tU'' - 2U', & c_1 &= 2tU_0'' - 2U_0'. \end{aligned}$$

Rappelons quelques propriétés intéressantes démontrées par M. Demartres :

« Les seules surfaces dont chaque génératrice circulaire coupe à angle constant toutes les lignes de courbure sont les surfaces anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant un système de droites isotropes. »

« Le tore est la seule surface engendrée par un cercle de rayon constant et telle que, dans chacune de ses positions, ce cercle coupe sous un même angle toutes les lignes de courbure. »

« Les seules surfaces cerclées à focale isotrope qui soient décomposées en carrés par les génératrices circulaires et leurs trajectoires orthogonales sont les anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant une ligne de distance nulle. »

9. L'équation $\Delta_1 = 0$ exprime que l'angle de deux génératrices consécutives est nul. Nous pouvons mettre cette équation sous la forme suivante :

$$R'^2 - p^2 R^2 + w^2 - u^2 - v^2 = 0. \tag{1}$$

I. Toutes les surfaces de la famille engendrées par des cercles dont le plan est parallèle à un plan fixe, c'est-à-dire pour lesquelles $p = 0$, satisfont à l'équation

$$R = \pm \int \sqrt{u^2 + v^2 - w^2}\, dt = \pm \int \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2 - dz_0^2}$$

si l'on prend comme plan fixe le plan des $xy$.

*a*. Lorsque $z_0 = \text{const.}$, on a une suite de cercles situés dans le même plan, le rayon est égal à l'arc de la ligne des centres, chaque cercle est tangent au cercle infiniment voisin.

*b*. Lorsque $y_0 = z_0$, le lieu des centres est une courbe plane; $R = \pm x_0 + \text{const.}$; le cercle reste tangent à un plan fixe. Soit, par exemple, la surface

$$\begin{aligned} a &= U, & a_1 &= U, \\ b &= t, & b_1 &= t, \\ c &= t + iU, & c_1 &= t - iU, \end{aligned}$$

U désignant une fonction arbitraire de $t$.

Le plan de la génératrice a pour équation $z - t = 0$.

Le rayon du cercle est $R = U$.

Nous pouvons mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(z - y)^2 + x^2 - 2x\, U(z) = 0,$$

$U(z)$ désignant la fonction obtenue en remplaçant $t$ par $z$ dans U.

II. Toutes les surfaces de la famille engendrées par des cercles concentriques satisfont aux équations

$$u = v = w = 0, \qquad R'^2 = p^2 R^2 \qquad \text{ou} \qquad R = e^{\pm\int p\, dt};$$

soit par exemple la surface spirale

$$\begin{aligned} a &= \quad i e^t \cos t, & a_1 &= - i e^t \cos t, \\ b &= - i e^t \sin t, & b_1 &= \quad i e^t \sin t, \\ c &= 0, & c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Le plan de la génératrice a pour équation $x \cos t - y \sin t = 0$. Le rayon est égal à $e^t$. Les sphères fondamentales sont orthogonales; l'angle V du plan tangent avec le plan du cercle en un point défini par l'angle $\varphi$ du rayon avec la caractéristique est donné par l'équation

$$\operatorname{tang} V = \sin \varphi.$$

L'angle V est constant le long des courbes $\varphi = \text{const}$. Cette surface admet la transformation infinitésimale

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

III. Toutes les surfaces de la famille dont la génératrice est le cercle caractéristique d'une sphère satisfont aux équations

$$(2) \qquad u = 0, \qquad wv - pRR' = 0$$

et à l'équation (1).

Si nous remplaçons, dans l'équation (1), $u$ et $w$ par leurs valeurs tirées des équations (2), où nous supposons $v$ différent de zéro, nous avons

$$(R'^2 - v^2)(p^2 R^2 + v^2) = 0.$$

Les surfaces réelles sont données par l'équation

$$R'^2 - v^2 = 0.$$

L'enveloppe de la sphère osculatrice d'une courbe gauche appartient à la famille considérée, elle satisfait aux équations

$$u = 0, \qquad w = \pm pR, \qquad R = \pm \int v\, dt.$$

Les foyers du cercle décrivent des courbes minima, car deux génératrices consécutives ayant deux points communs, on a la condition de rencontre

$$\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0,$$

l'hypothèse $\Delta_1 = 0$ entraîne $\Delta = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d\sigma}{dt}\frac{d\sigma'}{dt} = 0.$$

Lorsque la caractéristique du plan de la génératrice est fixe, la surface est une anallagmatique à déférente plane dont les deux points doubles sont confondus.

10. L'équation obtenue en égalant à zéro l'invariant absolu du second ordre $\frac{d\psi}{ds}$, $d\psi$ désignant l'angle d'une sphère fondamentale avec la sphère infiniment voisine, exprime que le point de contact de la sphère avec la surface est un ombilic. Le point de contact qui est un *point de courbure* décrit alors une ligne ombilicale. Par exemple, soit $q$ une constante arbitraire; les surfaces définies par les équations

$$\begin{aligned} a &= i e^{qt} \cos t, & a_1 &= -i e^{qt} \cos t, \\ b &= -i e^{qt} \sin t, & b_1 &= i e^{qt} \sin t, \\ c &= 0, & c_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{2q \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}},$$

admettent une ligne ombilicale, intersection de la surface avec le plan $z = 0$.

11. Les surfaces anallagmatiques, c'est-à-dire engendrées par un cercle qui reste orthogonal à une sphère fixe, sont définies par deux équations invariantes du second ordre. On a immédiatement les équations finies de ces surfaces, en exprimant que les foyers décrivent des courbes situées sur une même sphère : si U, V sont deux fonctions de $t$, et $U_0$, $V_0$ les fonctions imaginaires conjuguées, $\mathcal{R}$ le rayon de la sphère directrice, les équations de la surface sont

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 - UV}{U - V}\mathcal{R}, & a_1 &= \frac{1 - U_0V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R}, \\ b &= i\frac{1 + UV}{U - V}\mathcal{R}, & b_1 &= -i\frac{1 + U_0V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R}, \\ c &= \frac{U + V}{U - V}\mathcal{R}, & c_1 &= \frac{U_0 + V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R}. \end{aligned}$$

12. Déterminons une surface cerclée dont le *paramètre de distri-*

*bution* K soit constant, différent de zéro, et dont les autres invariants soient aussi constants.

Prenons des génératrices concentriques, les quantités $u$, $v$, $w$ sont nulles et l'équation $\frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4} = K^4$ peut s'écrire

$$\left[\frac{2\frac{pR}{R'}}{1-\left(\frac{pR}{R'}\right)^2}\right]^2 = K^4.$$

L'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères fondamentales est constant : $\tang^2 \widehat{FF_1} = K^4$; l'intégrale de l'équation précédente est donc

$$R = e^{\cot\frac{\widehat{FF_1}}{2}\int p\,dt}.$$

On peut constater que cette valeur de R rend tous les autres invariants constants si les composantes $p$, $r$ de la rotation sont dans un rapport constant. Nous pouvons par exemple prendre les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a = \phantom{-}i e^{qt} p \cos t, & a_1 = -i e^{qt} p \cos t, \\ b = -i e^{qt} p \sin t, & b_1 = \phantom{-}i e^{qt} p \sin t, \\ c = \phantom{-}i e^{qt}\sqrt{1-p^2}, & c_1 = -i e^{qt}\sqrt{1-p^2}, \end{array}\right.$$

les lettres $p$, $q$ désignent des constantes.

Le plan de la génératrice a pour équation

$$xp\cos t - yp\sin t + z\sqrt{1-p^2} = 0;$$

la génératrice coupe donc le plan des $xy$ sous un angle constant.

La surface définie par les équations (1) est une surface spirale, elle admet la *transformation spirale infinitésimale*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + q\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Le plan tangent à la surface le long des courbes $\varphi =$ const. fait un angle constant avec le plan du cercle générateur; $\varphi$ est l'angle du rayon passant par un point du cercle avec la caractéristique de son plan.

Les *points de courbure* décrivent sur la surface deux spirales logarithmiques, ces courbes sont des lignes ombilicales, elles coupent les génératrices sous un angle constant.

13. Deux surfaces cerclées sont échangeables par une transformation conforme si les deux courbes correspondantes de l'espace à six dimensions sont échangeables pàr une transformation du groupe (G). Nous obtiendrons donc les conditions d'équivalence de deux surfaces cerclées en appliquant à ces courbes la méthode de S. Lie. Mettons à part les surfaces à focales isotropes, ainsi que les surfaces définies par des équations invariantes de deuxième classe : surfaces engendrées par un cercle de rayon nul ou par le cercle caractéristique d'une sphère à un paramètre, et désignons les autres surfaces cerclées sous le nom de surfaces cerclées *générales;* nous pouvons alors énoncer le théorème suivant (Chap. XIV) :

*Deux surfaces cerclées générales sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme si, ds désignant un paramètre différentiel et* $I_0, \frac{dI_0}{ds}, I_2, I_3, I_4, I_5$ *leurs six invariants fondamentaux, on a les cinq mêmes relations :*

$$\frac{dI_0}{ds}=f_1(I_0),\qquad I_2=f_2(I_0),\qquad I_3=f_3(I_0),\qquad I_4=f_4(I_0),\qquad I_5=f_5(I_0),$$

*ou les cinq mêmes relations*

$$I_0=\text{const.},\qquad I_\beta=f_1(I_\alpha),\qquad I_\gamma=f_2(I_\alpha),\qquad I_\delta=f_3(I_\alpha),\qquad \frac{dI_\alpha}{ds}=f_4(I_\alpha)$$
$$(I_\alpha\neq\text{const.})$$

($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ désignent les nombres 2, 3, 4, 5), *ou les cinq relations*

$$I_0=\text{const.},\qquad I_2=\text{const.},\qquad I_3=\text{const.},\qquad I_4=\text{const.},\qquad I_5=\text{const.},$$

*et seulement à ces conditions.*

14. Les invariants des surfaces cerclées générales ne conviennent pas aux surfaces enveloppes de sphères à un paramètre. Déterminons les six invariants fondamentaux de ces dernières surfaces : soient $a$, $b$, $c$ les coordonnées du centre de la sphère enveloppée, $\rho$ son rayon ; toute transformation conforme change la sphère en une autre sphère, les formules qui permettent de passer des coordonnées $a$, $b$, $c$, $\rho$ aux coordonnées de la sphère transformée, définissent un groupe (G') iso-

morphe au groupe conforme (Chap. XV). Les invariants différentiels des surfaces engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère à un paramètre sont les invariants différentiels du groupe (G′) prolongé. Soient $ds_1$ l'angle de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine, et I un invariant différentiel absolu d'ordre $q$, la quantité $\frac{dI}{ds_1}$ est un invariant absolu d'ordre $q+1$ (Chap. XXI). Tous les invariants différentiels peuvent se calculer en partant d'un système de six invariants absolus fondamentaux comprenant : un invariant du second ordre $m$, deux invariants du troisième ordre $\frac{dm}{ds_1}$, $n$, et trois invariants du quatrième ordre $\frac{d^2m}{ds_1^2}$, $\frac{dn}{ds_1}$, $\mathfrak{P}$ (Chap. XVII à XXIV).

Nous pouvons donner de ces invariants les interprétations géométriques suivantes (Chap. XIX et XXV) : L'invariant du second ordre $m$ est égal à $\frac{ds}{ds_1}$, $ds$ désignant l'angle de deux cercles caractéristiques consécutifs.

Soient $d\sigma$, $d\sigma'$ les éléments d'arcs des focales, nous avons

$$m^2 = \frac{1}{R^2}\frac{d\sigma}{ds_1}\cdot\frac{d\sigma'}{ds_1};$$

considérons les points de la génératrice situés dans le plan osculateur du lieu des centres de l'enveloppée et, en chacun de ces points, la sphère de courbure autre que l'enveloppée; l'angle $\Psi$ de ces deux sphères vérifie la relation

$$m^2 = -\left(1 + \tan^2\frac{\Psi}{2}\right).$$

Un invariant absolu du troisième ordre est la quantité $\frac{d\beta}{ds_1}$, $d\beta$ désignant l'angle que fait avec la sphère infiniment voisine la sphère passant par les points caractéristiques et orthogonale au cercle caractéristique. Un invariant absolu du quatrième ordre est $\mathfrak{P} = \frac{d\pi}{ds_1}$, $d\pi$ désignant l'angle que fait avec la sphère infiniment voisine la sphère ($\delta$) orthogonale à trois cercles caractéristiques consécutifs.

Un autre invariant du même ordre est $\frac{d\gamma}{ds_1}$, $d\gamma$ désignant l'angle que fait, avec la sphère infiniment voisine, la sphère orthogonale à $(\delta)$ et passant par le cercle caractéristique de $(\delta)$.

L'introduction des coordonnées pentasphériques permet de consi dérer les invariants des surfaces enveloppes de sphères à un paramètre par rapport au groupe conforme, comme les invariants des courbes d'un espace elliptique à quatre dimensions par rapport au groupe des mouvements de cet espace; $m$, $n$, $\mathfrak{P}$ sont les trois courbures. M. R. Le Vavasseur a étudié les invariants à ce point de vue et a donné une interprétation géométrique des trois courbures (¹).

15. Les familles de surfaces enveloppes de sphères à un paramètre, invariantes par les transformations conformes, sont definies par les systèmes d'équations qui admettent le groupe $(G')$ ou les groupes prolongés. Ces systèmes d'équations peuvent se diviser en deux classes : les systèmes de la première classe n'entrainent pas la nullité de tous les déterminants du dixième ordre de la matrice formée avec les coefficients des transformations infinitésimales du groupe prolongé au troisième ordre (Chap. XXII); les systèmes d'équations de la deuxième classe entrainent la nullité de tous ces déterminants. Les systèmes d'équations de la première classe s'obtiennent en égalant à zéro un certain nombre d'invariants; l'équation $\frac{ds_1}{dt} = 0$, obtenue en égalant à zéro l'invariant relatif du premier ordre, exprime que l'angle de deux sphères enveloppées consécutives est nul; la surface est une surface canal isotrope. L'équation $m = 0$ exprime que les foyers décrivent des courbes minima et que l'angle de deux génératrices consécutives est nul; les enveloppes de sphères de rayon différent de zéro pour lesquelles $m$ est nul sont les anallagmatiques à déférente plane dont les points doubles sont confondus et l'enveloppe de la sphère osculatrice d'une courbe gauche (Chap. XX) Lorsque l'enveloppée est orthogonale à une sphère fixe, on a $\mathfrak{P} = 0$.

Les systèmes d'équations de la deuxième classe renferment l'un au

(¹) R. Le Vavasseur, *Les systèmes de sphères à un paramètre* (*Academie des Sciences de Toulouse*, 10ᵉ série, t. I, 1901).

moins des systèmes d'équations

$$(1) \qquad \rho = 0;$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3) \qquad \frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}\varpi_{11} = 0.$$

Les quantités $\omega_{11}, \omega_{12}, \varpi_{11}, \varpi_{12}$ sont définies par les équations

$$\omega_{11} = a'^2 + b'^2 + c'^2, \qquad \varpi_{11} = \omega_{11} - \rho'^2,$$
$$\omega_{12} = a'a'' + b'b'' + c'c'', \qquad \varpi_{12} = \omega_{12} - \rho'\rho''.$$

L'équation (1) exprime que le rayon de la sphère enveloppée est nul; le système des équations (2) exprime que la sphère enveloppée est orthogonale à deux sphères fixes; les équations (3) expriment que la sphère enveloppée est orthogonale à trois sphères fixes; la surface dégénère en un cercle.

16. L'étude des systèmes d'équations différentielles qui admettent le groupe prolongé nous permet de déterminer les conditions d'équivalence vis-à-vis de ce groupe des courbes de l'espace à quatre dimensions définies par les fonctions $a$, $b$, $c$, $\rho$; ce sont les conditions d'équivalence des enveloppes de sphères à un paramètre vis-à-vis du groupe conforme (Chap. XXVI).

Désignons sous le nom de *surfaces singulières* les surfaces à focales isotropes ($m = 0$), la surface canal isotrope ($ds_1 = 0$) et les surfaces définies par les systèmes d'équations de la deuxième classe; nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

THÉORÈME I. — *Deux surfaces enveloppes de sphères à un paramètre, les surfaces singulières exceptées, sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme si, $ds_1$ désignant l'angle de deux sphères enveloppées consécutives et $m$, $\frac{dm}{ds_1}$, $n$, $\frac{d^2 m}{ds_1^2}$, $\frac{dn}{ds_1}$, $\mathfrak{P}$ leurs six invariants fondamentaux, on a les trois mêmes relations :*

$$\frac{dm}{ds_1} = f_1(m), \qquad n = \;\;{}_{,}(m \qquad \mathfrak{P} = f_3\;\; m$$

($f_1, f_2, f_3$ désignent trois fonctions de $m$), *ou les trois mêmes relations*

$$m = \text{const.}, \qquad \frac{dn}{ds_1} = f_1(n), \qquad \mathfrak{P} = f_2(n),$$

*ou*

$$m = \text{const.}, \qquad n = \text{const.}, \qquad \frac{d\mathfrak{P}}{ds_1} = f(\mathfrak{P}),$$

*ou*

$$m = \text{const.}, \qquad n = \text{const.}, \qquad \mathfrak{P} = \text{const.},$$

*et seulement à ces conditions.*

Lorsque les trois invariants $m$, $n$, $\mathfrak{P}$ sont constants, la surface admet une transformation infinitésimale conforme; on peut l'obtenir en effectuant une transformation conforme sur l'enveloppe des sphères à un paramètre $s_1$ dont les coordonnées pentasphériques sont

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{m\mathfrak{P}}{\sqrt{m^2\mathfrak{P}^2 + n^2 + \mathfrak{P}^2}},\\
x_2 &= X_1 \cos \rho_1 s_1,\\
x_3 &= X_2 \cos \rho_2 s_1,\\
x_4 &= -X_1 \sin \rho_1 s_1,\\
x_5 &= -X_2 \sin \rho_2 s_1;
\end{aligned}
$$

$\rho_1$, $\rho_2$ désignent les solutions de l'équation

$$\rho^4 - (1 + m^2 + n^2 + \mathfrak{P}^2)\rho^2 + m^2\mathfrak{P}^2 + n^2 + \mathfrak{P}^2 = 0,$$

$X_1$, $X_2$ sont définis par les relations

$$X_k = \frac{mn}{\sqrt{\rho_k^2(\rho_k^2 - 1 - m^2)^2 + \rho_k^2 m^2 n^2}} \qquad (k = 1, 2).$$

Les sphères $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$ coupent une sphère fixe sous un angle constant.

Théorème II. — *Deux enveloppes de sphères orthogonales à deux sphères fixes sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme si l'invariant m vérifie la même relation*

$$\frac{dm}{ds_1} = f(m) \qquad (m \neq \text{const.}),$$

*ou la même relation*

$$m = \text{const.} \qquad (m \neq 0),$$

*et seulement à ces conditions.*

Dans le premier cas, les surfaces admettent une transformation infinitésimale conforme, ce sont des inverses de cônes.

Dans le second cas, les surfaces admettent deux transformations infinitésimales conformes; on peut les obtenir en effectuant une transformation conforme sur un cylindre de révolution ou sur un cône de révolution ou sur un tore.

Deux cercles de rayon différent de zéro (enveloppes de sphères orthogonales à trois sphères fixes) sont toujours échangeables par une transformation conforme; le cercle admet quatre transformations infinitésimales conformes.

17. L'étude des invariants différentiels des surfaces cerclées, par rapport au groupe conforme, conduit à une classification de ces surfaces. Les résultats obtenus nous ont amenés à distinguer les surfaces cerclées générales, qui admettent les invariants $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$, et les conditions d'équivalence de ces surfaces en donnent une classification; parmi les autres surfaces, nous avons étudié celles qui sont engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère, et les conditions d'équivalence que nous venons d'énoncer donnent une classification de celles de ces surfaces qui admettent les trois courbures $m$, $n$, $\mathfrak{P}$.

## CHAPITRE I.

### ÉQUATIONS FINIES DU GROUPE CONFORME.

Le groupe conforme est le groupe qui laisse invariante l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Les dix transformations infinitésimales de ce groupe sont (1) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

(1) Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*.

et

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}+2xz\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$(y^2-z^2-x^2)\frac{\partial f}{\partial y}+2yz\frac{\partial f}{\partial z}+2yx\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$(z^2-x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}+2zx\frac{\partial f}{\partial x}+2zy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les sept premières transformations définissent le groupe des similitudes; les équations finies de ce sous-groupe sont :

$$x'=\delta(A\ x+B\ y+C\ z)-\lambda,$$
$$y'=\delta(A'x+B'y+C'z)-\mu,$$
$$z'=\delta(A''x+B''y+C''z)-\nu.$$

Les lettres $\delta$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ désignent des paramètres et les lettres A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″, des fonctions de trois paramètres, les angles de rotation $\theta$, $\varphi$, $\psi$ autour des axes, qui satisfont aux conditions d'orthogonalité.

Déterminons les équations finies du groupe à un paramètre qui a pour transformation infinitésimale

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}+2xz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Soit $\alpha$ le paramètre; intégrons le système d'équations

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}=d\alpha.$$

Désignons par $C_1$, $C_2$, $C_3$ trois constantes arbitraires; les trois équations ont pour système intégral

$$\frac{y}{z}=C_1,\qquad \frac{z}{x^2+y^2+z^2}=C_2,\qquad \frac{x}{x^2+y^2+z^2}=C_3+\alpha.$$

Introduisons pour $\alpha = 0$ les conditions

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z';$$

nous obtenons

$$\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}, \qquad \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \alpha = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

ou bien, en résolvant par rapport à $x'$, $y'$, $z'$,

$$x' = \frac{x - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2\alpha x + \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$y' = \frac{y}{1 - 2\alpha x + \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$z' = \frac{z}{1 - 2\alpha x + \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Ce sont les équations finies du groupe considéré.

Soit $\beta$ le paramètre du groupe défini par la deuxième transformation du second degré

$$(y^2 - z^2 - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} + 2yz\frac{\partial f}{\partial z} + 2yx\frac{\partial f}{\partial x},$$

ses équations finies sont :

$$x' = \frac{x}{1 - 2\beta y + \beta^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$y' = \frac{y - \beta(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2\beta y + \beta^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$z' = \frac{z}{1 - 2\beta y + \beta^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

La dernière transformation infinitésimale

$$(z^2 - x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial z} + 2zx\frac{\partial f}{\partial x} + 2zy\frac{\partial f}{\partial y}$$

définit un groupe à un paramètre $\gamma$ qui a pour équations finies

$$x' = \frac{x}{1 - 2\gamma z + \gamma^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$y' = \frac{y}{1 - 2\gamma z + \gamma^2(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$z' = \frac{z - \gamma(x^2 + y^2 + z^2)}{1 - 2\gamma z + \gamma^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Effectuons le produit des trois transformations du second degré; nous obtenons les équations finies d'un groupe à trois paramètres :

$$
(\Sigma) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)}{\omega}, \\
y' &= \frac{y - \beta(x^2 + y^2 + z^2)}{\omega}, \\
z' &= \frac{z - \gamma(x^2 + y^2 + z^2)}{\omega};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\omega = 1 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2).
$$

Les transformations $(\Sigma)$ peuvent s'obtenir en effectuant le produit S.T.S; si nous désignons par (S) l'inversion

$$
x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad
y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad
z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}
$$

et par (T) la translation

$$
x' = x - \alpha, \quad
y' = y - \beta, \quad
z' = z - \gamma.
$$

Les coordonnées $x, y, z$ et les coordonnées transformées par $(\Sigma)$ vérifient la relation

$$
x^2 + y^2 + z^2 = \omega(x'^2 + y'^2 + z'^2).
$$

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, qui admet le groupe $(\Sigma)$, permet d'exprimer une des coordonnées, $z$ par exemple, en fonction des deux autres; les trois transformations du second degré se réduisent alors à une seule :

$$
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},
$$

et l'intégrale de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ nous donne les équations

$$
y - mx = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0
$$

($m$ constante arbitraire) des courbes qui admettent les transformations du second degré.

En effectuant le produit des similitudes par les transformations du second degré, nous obtenons les transformations conformes :

$$x' = \delta\left[A\,\frac{x-\alpha(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + B\,\frac{y-\beta(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + C\,\frac{z-\gamma(x^2+y^2+z^2)}{\omega}\right] - \lambda,$$

$$y' = \delta\left[A'\,\frac{x-\alpha(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + B'\,\frac{y-\beta(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + C'\,\frac{z-\gamma(x^2+y^2+z^2)}{\omega}\right] - \mu,$$

$$z' = \delta\left[A''\,\frac{x-\alpha(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + B''\,\frac{y-\beta(x^2+y^2+z^2)}{\omega} + C''\,\frac{z-\gamma(x^2+y^2+z^2)}{\omega}\right] - \nu;$$

$$\omega = 1 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2).$$

---

## CHAPITRE II.

### LE GROUPE CONFORME DU CERCLE.

1. Soient $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$ les coordonnées des centres de deux sphères de rayon nul ; les équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0,$$
$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = 0$$

définissent un cercle dont le rayon R est donné par la relation

$$-4R^2 = (a_1-a)^2 + (b_1-b)^2 + (c_1-c)^2.$$

Nous allons effectuer les transformations conformes sur ce cercle et déterminer les six équations qui lient les coordonnées des foyers du cercle transformé aux coordonnées $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$ des foyers du cercle considéré.

Effectuons d'abord les transformations ($\Sigma$) sur

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

nous obtenons :

$$(1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$
$$=\frac{\Delta}{\mathbb{O}'}\left\{\left[x'-\frac{a-\alpha(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right]^2\right.$$
$$\left.+\left[y'-\frac{b-\beta(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right]^2+\left[z'-\frac{c-\gamma(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right]^2\right\},$$
$$\Delta=1-2(\alpha a+\beta b+\gamma c)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2),$$
$$\mathbb{O}'=1+2(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Si nous désignons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les coordonnées du centre de la sphère transformée, les transformations qui expriment l'échange des centres sont :

$$\mathcal{A}=\frac{a-\alpha(a^2+b^2+c^2)}{\Delta},$$
$$\mathcal{B}=\frac{b-\beta(a^2+b^2+c^2)}{\Delta},$$
$$\mathcal{C}=\frac{c-\gamma(a^2+\beta^2+c^2)}{\Delta}.$$

Ces équations définissent encore des transformations du second degré ; nous pouvons les obtenir en remplaçant $x, y, z$ par $a, b, c$ dans les transformations $(\Sigma)$.

2. Effectuons sur $(x'-\mathcal{A})^2+(y'-\mathcal{B})^2+(z'-\mathcal{C})^2$ les similitudes

$$\bar{x}=\delta(A\,x'+B\,y'+C\,z')-\lambda,$$
$$\bar{y}=\delta(A'x'+B'y'+C'z')-\mu,$$
$$\bar{z}=\delta(A''x'+B''y'+C''z')-\nu,$$

la relation (1) devient

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$
$$=\frac{\Delta}{\delta^2\mathbb{O}'_1}\Big(\big\{\bar{x}-[\delta(A\,\mathcal{A}+B\,\mathcal{B}+C\,\mathcal{C})-\lambda]\big\}^2$$
$$+\big\{\bar{y}-[\delta(A'\mathcal{A}+B'\mathcal{B}+C'\mathcal{C})-\mu]\big\}^2$$
$$+\big\{\bar{z}-[\delta(A''\mathcal{A}+B''\mathcal{B}+C''\mathcal{C})-\nu]\big\}^2\Big),$$

$\mathbb{O}'_1$ désignant la transformée de $\mathbb{O}'$.

La sphère $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ est donc changée par les transformations conformes en une autre sphère dont le centre a pour coordonnées

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \delta(A\,\mathcal{A} + B\,\mathcal{B} + C\,\mathcal{C}) - \lambda,\\ \bar{b} &= \delta(A'\,\mathcal{A} + B'\,\mathcal{B} + C'\,\mathcal{C}) - \mu,\\ \bar{c} &= \delta(A''\,\mathcal{A} + B''\,\mathcal{B} + C''\,\mathcal{C}) - \nu.\end{aligned}$$

Si nous effectuons les transformations conformes sur le cercle

$$\begin{aligned}(x-a\ )^2 + (y-b\ )^2 + (z-c\ )^2 &= 0,\\ (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 &= 0,\end{aligned}$$

nous obtenons encore un cercle, et les coordonnées $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$; $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$ des foyers du cercle transformé sont exprimées en fonctions de $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$ par les équations :

$$(\mathrm{G})\left\{\begin{aligned}\bar{a} &= \delta\left[A\,\frac{a-\alpha(a^2+b^2+c^2)}{\Delta} + B\,\frac{b-\beta(a^2+b^2+c^2)}{\Delta} + C\,\frac{c-\gamma(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right] - \lambda,\\ \bar{b} &= \delta\left[A'\,\frac{a-\alpha(a^2+b^2+c^2)}{\Delta} + B'\,\frac{b-\beta(a^2+b^2+e^2)}{\Delta} + C'\,\frac{c-\gamma(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right] - \mu,\\ \bar{c} &= \delta\left[A''\,\frac{a-\alpha(a^2+b^2+c^2)}{\Delta} + B''\,\frac{b-\beta(a^2+b^2+c^2)}{\Delta} + C''\,\frac{c-\gamma(a^2+b^2+c^2)}{\Delta}\right] - \nu;\\ \overline{a_1} &= \delta\left[A\,\frac{a_1-\alpha(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + B\,\frac{b_1-\beta(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + C\,\frac{c_1-\gamma(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1}\right] - \lambda,\\ \overline{b_1} &= \delta\left[A'\,\frac{a_1-\alpha(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + B'\,\frac{b_1-\beta(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + C'\,\frac{c_1-\gamma(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1}\right] - \mu,\\ \overline{c_1} &= \delta\left[A''\,\frac{a_1-\alpha(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + B''\,\frac{b_1-\beta(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1} + C''\,\frac{c_1-\gamma(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}{\Delta_1}\right] - \nu.\end{aligned}\right.$$

Ces équations définissent un groupe, elles montrent comment se fait l'échange des foyers du cercle; c'est pourquoi nous appellerons ce groupe le *groupe conforme du cercle* ou simplement le groupe (G).

Les transformations infinitésimales de ce groupe sont :

$$Z_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a_1}, \qquad Z_2 f = \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b_1}, \qquad Z_3 f = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial c_1},$$

$$Z_4 f = a\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial a} + a_1\frac{\partial f}{\partial b_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial a_1},$$

$$Z_5 f = b\frac{\partial f}{\partial c} - c\frac{\partial f}{\partial b} + b_1\frac{\partial f}{\partial c_1} - c_1\frac{\partial f}{\partial b_1},$$

$$Z_6 f = c\frac{\partial f}{\partial a} - a\frac{\partial f}{\partial c} + c_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial c_1},$$

et

$$Z_7 f = a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + c_1\frac{\partial f}{\partial c_1},$$

$$Z_8 f = (a^2 - b^2 - c^2)\frac{\partial f}{\partial a} + 2ab\frac{\partial f}{\partial b} + 2ac\frac{\partial f}{\partial c}$$
$$+ (a_1^2 - b_1^2 - c_1^2)\frac{\partial f}{\partial a_1} + 2a_1b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + 2a_1c_1\frac{\partial f}{\partial c_1},$$

$$Z_9 f = (b^2 - c^2 - a^2)\frac{\partial f}{\partial b} + 2bc\frac{\partial f}{\partial c} + 2ba\frac{\partial f}{\partial a}$$
$$+ (b_1^2 - c_1^2 - a_1^2)\frac{\partial f}{\partial b_1} + 2b_1c_1\frac{\partial f}{\partial c_1} + 2b_1a_1\frac{\partial f}{\partial a_1},$$

$$Z_{10} f = (c^2 - a^2 - b^2)\frac{\partial f}{\partial c} + 2ca\frac{\partial f}{\partial a} + 2cb\frac{\partial f}{\partial b}$$
$$+ (c_1^2 - a_1^2 - b_1^2)\frac{\partial f}{\partial c_1} + 2c_1a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + 2c_1b_1\frac{\partial f}{\partial b_1}.$$

### Équations et systèmes d'équations qui admettent le groupe conforme du cercle.

Les ystème des équations aux dérivées partielles obtenues en égalant à zéro les opérateurs du groupe (G) n'a pas d'intégrales, car il renferme dix équations et six variables. Les systèmes d'équations qui admettent le groupe (G) doivent donc annuler tous les déterminants du même ordre de la matrice formée avec les coefficients des opérateurs; ils renfermeront tous l'une au moins des équations obtenues en égalant à zéro l'un des déterminants du sixième ordre de cette matrice, par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -b & a & 0 & -b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & -c & b & 0 & -c_1 & b_1 \\ a & b & c & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est égal au produit

$$(b_1 - b)[(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2].$$

L'équation

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} = 0$$

admet toutes les transformations du groupe (G). L'équation $b_1 - b = 0$ ne peut appartenir qu'à un système d'équations renfermant en même temps les équations $a_1 - a = 0$, $c_1 - c = 0$, et le cercle serait indéterminé. Les transformations

$$\mathrm{X}f = a\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial a} + a_1\frac{\partial f}{\partial b_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial a_1}$$

et

$$\mathrm{Y}f = b\frac{\partial f}{\partial c} - c\frac{\partial f}{\partial b} + b_1\frac{\partial f}{\partial c_1} - c_1\frac{\partial f}{\partial b_1}$$

donnent

$$\mathrm{X}(b_1 - b) = a_1 - a,$$
$$\mathrm{Y}(b_1 - b) = c - c_1.$$

---

## CHAPITRE III.

### INVARIANTS ET PROPRIETÉS INVARIANTES D'UN SYSTÈME DE DEUX CERCLES.

Considérons la figure formée par deux cercles; soient $a$, $b$, $c$ et $a_1$, $b_1$, $c_1$ les coordonnées des foyers A, B du premier cercle; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les coordonnées des foyers C, D du deuxième cercle. Les invariants de cette figure, par rapport au groupe conforme, sont les invariants de quatre points de ce groupe, c'est-à-dire les intégrales du système complet

$$\mathrm{X}_i f + \mathrm{X}_i^1 f + \xi_i f + \xi_i^1 f = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 10)$$

Les premiers membres de ces dix équations représentent les sommes des quantités obtenues en remplaçant, dans les transformations infinitésimales conformes, $x, y, z$ successivement par $a, b, c$, $a_1, b_1, c_1$; $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$. Ce système complet de dix équations à douze variables admet deux intégrales distinctes :

$$\rho^2 = \frac{\Sigma(a-\alpha)^2\,\Sigma(a_1-\alpha_1)^2}{\Sigma(a_1-a)^2\,\Sigma(\alpha_1-\alpha)^2} = \frac{\overline{AC}^2\,\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2\,\overline{CD}^2},$$

$$\rho_1^2 = \frac{\Sigma(a_1-\alpha)^2\,\Sigma(a-\alpha_1)^2}{\Sigma(a_1-a)^2\,\Sigma(\alpha_1-\alpha)^2} = \frac{\overline{BC}^2\,\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2\,\overline{CD}^2}$$

$$[\Sigma(a-\alpha)^2 = (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2].$$

Nous limitons notre étude aux cercles dont le rayon n'est pas nul, ce qui revient à supposer $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ différents de zéro; soient R, $R_1$ les rayons des deux cercles, nous avons

$$\overline{AB}^2 = (2Ri)^2 = -4R^2, \qquad \overline{CD}^2 = -4R_1^2.$$

Si l'on effectue une inversion en prenant pour pôle un des sommets du tétraèdre ABCD, trois des cercles circonscrits aux faces du trièdre deviennent des droites qui forment un triangle invariable (¹) $OIO_1$ de côtés $OO_1 = 1$, $OI = \rho$, $O_1I = \rho_1$. Les propriétés invariantes d'un système de deux cercles (²) peuvent s'exprimer au moyen des deux invariants $\rho$, $\rho_1$ ou au moyen des éléments du triangle invariable.

Soit IH la perpendiculaire abaissée du sommet I sur le côté $OO_1$, nous avons :

$$\overline{IH}^2 = \frac{1}{4}(\rho+\rho_1+1)(\rho-\rho_1+1)(\rho+\rho_1-1)(-\rho+\rho_1+1),$$

$$\overline{IH}^2 = \frac{-1}{4\,\overline{AB}^4\,\overline{CD}^4}\begin{vmatrix} 0 & \overline{AB}^2 & \overline{AC}^2 & \overline{AD}^2 \\ \overline{BA}^2 & 0 & \overline{BC}^2 & \overline{BD}^2 \\ \overline{CA}^2 & \overline{CB}^2 & 0 & \overline{CD}^2 \\ \overline{DA}^2 & \overline{DB}^2 & \overline{DC}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soient $\mathcal{R}$ le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, V le volume. Nous pouvons remplacer (³) le déterminant par $-4^3(3V\mathcal{R})^2$;

(¹) DARBOUX, *Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. I, 1872, p. 341.

(²) KOENIGS, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1888. — E. v. WEBER. *Archiv der Math und Physik*, 3ᵉ série, 1904.

(³) DARBOUX, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, 1905, p. 37.

nous obtenons

$$\overline{IH}^2 = \left(\frac{3V\mathfrak{R}}{4R^2R_1^2}\right)^2.$$

Lorsque

$$\overline{IH}^2 = \frac{1}{4}(\rho+\rho_1+1)(\rho-\rho_1+1)(\rho+\rho_1-1)(-\rho+\rho_1+1)$$

est positif, il existe une sphère réelle orthogonale aux deux cercles.

Lorsque $\overline{IH}^2$ est négatif, les points de rencontre du cercle (A, B) avec le plan du cercle (C, D) sont l'un intérieur au cercle (C, D), l'autre extérieur. Lorsque $\overline{IH}^2$ est nul, les quatre foyers sont sur une sphère de rayon nul; les deux cercles ont un point commun qui est le centre de la sphère.

Calculons l'angle $\omega$ des tangentes aux deux cercles au point de rencontre.

Soient $l$, $m$, $n$ les coefficients de direction de la tangente au cercle (A, B); $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les coefficients de direction de la tangente au cercle (C, D); $x, y, z$ les coordonnées du point commun.

Les coefficients de direction sont définis par les équations

$$\begin{aligned}
&\Sigma(x-a)l = (x-a)l + (y-b)m + (z-c)n = 0,\\
&\Sigma(x-a_1)l = 0,\\
&\Sigma(x-\alpha)\lambda = 0,\\
&\Sigma(x-\alpha_1)\lambda = 0;
\end{aligned}$$

l'angle $\omega$ est donné par la formule

$$\cos^2\omega = \frac{(\Sigma l\lambda)^2}{\Sigma l^2\,\Sigma\lambda^2}.$$

Si nous tenons compte des équations

$$\Sigma(x-a)^2 = \Sigma(x-a_1)^2 = \Sigma(x-\alpha)^2 = \Sigma(x-\alpha_1)^2 = 0,$$

nous trouvons

$$\Sigma l\lambda = \frac{1}{4}\left(\overline{AC}^2\,\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2\,\overline{BC}^2\right)^2,$$

$$\Sigma l^2 = -\frac{1}{4}\overline{AB}^4, \qquad \Sigma\lambda^2 = -\frac{1}{4}\overline{CD}^4$$

et

$$\cos^2\omega = (\rho^2 - \rho_1^2)^2.$$

Lorsque les deux cercles ne se rencontrent pas, nous appellerons *angle des deux cercles* l'angle $\omega$ défini par l'équation précédente. On peut constater que cette définition est, en définitive, celle que M. Kœnigs a proposée sous la forme suivante : « Les sphères passant par le cercle (A, B) tracent sur l'axe du cercle (C, D) une involution; si N, $N_1$ sont les points doubles de cette involution, l'angle des deux cercles est la quantité $\frac{1}{2i}\log(NN_1, CD)$, l'expression $(NN_1, CD)$ désignant le rapport anharmonique des quatre points. »

Soient M le milieu du côté $OO_1$ du triangle invariable, H le pied de la hauteur correspondante; nous avons

$$\cos^2\omega = 4\overline{MH}^2.$$

Si $\omega = 0$, le triangle est rectangle;

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, le triangle est isoscèle, nous dirons que les cercles sont orthogonaux.

Considérons un pentasphère orthogonal formé par les trois faces d'un trièdre trirectangle et deux sphères orthogonales ayant pour centre le sommet du trièdre et pour rayon 1 et $\sqrt{-1}$. Les coordonnées $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ d'un point, relatives à cette figure de référence, sont liées aux coordonnées cartésiennes par les formules [1]

$$\lambda x_1 = x, \qquad \lambda x_2 = y, \qquad \lambda x_3 = z,$$
$$2\lambda x_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\lambda x_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

$\lambda$ désignant un facteur de proportionnalité.

L'équation d'une sphère de rayon nul

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$$

devient, en coordonnées pentasphériques,

$$2ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + (\Sigma a^2 - 1)x_4 - i(\Sigma a^2 + 1)x_5 = 0.$$

Nous désignerons les coefficients par $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$.

---

(1) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 216; *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, p. 136.

Le cercle (A, B) sera défini par les équations

$$\begin{matrix} \Sigma A_i x_i = 0 \\ \Sigma B_i x_i = 0 \end{matrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5);$$

le cercle (C, D) par les équations

$$\Sigma C_i x_i = 0,$$
$$\Sigma D_i x_i = 0.$$

Prenons deux sphères orthogonales passant par le cercle (A, B)

$$\text{(S)} \qquad \sum_i (A_i + \lambda^2 B_i) = 0,$$

$$\text{(T)} \qquad \sum_i (A_i - \lambda^2 B_i) = 0$$

et deux sphères orthogonales passant par le cercle (C, D) :

$$(\sigma) \qquad \sum_i (C_i + \mu^2 D_i) = 0,$$

$$(\tau) \qquad \sum_i (C_i - \mu^2 D_i) = 0.$$

Nous pouvons déterminer $\lambda$ et $\mu$ de telle sorte que les sphères (S), (T) soient respectivement orthogonales aux sphères $(\tau)$, $(\sigma)$. Il suffit que $\lambda$, $\mu$ vérifient les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{AC}^2 + \lambda^2 \overline{BC}^2 - \mu^2 \overline{AD}^2 - \lambda^2 \mu^2 \overline{BD}^2 = 0, \\ \overline{AC}^2 - \lambda^2 \overline{BC}^2 + \mu^2 \overline{AD}^2 - \lambda^2 \mu^2 \overline{BD}^2 = 0 \end{cases}$$

L'angle $(\widehat{S, \sigma})$ des sphères (S), $(\sigma)$ et l'angle $(\widehat{T, \tau})$ des sphères (T), $(\tau)$ sont alors définis par les équations

$$\cos^2 (\widehat{S, \sigma}) = (\rho + \rho_1)^2,$$
$$\cos^2 (\widehat{T, \tau}) = (\rho - \rho_1)^2.$$

Pour obtenir, par exemple, la première équation, il suffit d'appliquer la formule

$$\cos^2 (\widehat{S, \sigma}) = \frac{\left[ \sum_i (A_i + \lambda^2 B_i)(C_i + \mu^2 D_i) \right]^2}{\sum_i (A_i + \lambda^2 B_i)^2 \sum_i (C_i + \mu^2 D_i)^2};$$

on remplace $\lambda^2$, $\mu^2$ par les racines du système d'équations (1) et l'on tient compte des relations

$$\begin{aligned}
&\Sigma A_i^2 = \Sigma B_i^2 = \Sigma C_i^2 = \Sigma D_i^2 = 0,\\
&\Sigma A_i B_i = -2\overline{AB}^2,\\
&\Sigma A_i C_i = -2\overline{AC}^2,\\
&\Sigma B_i C_i = -2\overline{BC}^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse $\omega = \frac{\pi}{2}$, nous avons $\rho = \rho_1$ et, par suite,

$$\widehat{\sigma, T} = \widehat{S\tau} = \widehat{T\tau} = \frac{\pi}{2}.$$

Par le cercle (A, B) passe une sphère T orthogonale au cercle (C, D) et par le cercle (C, D) une sphère $\tau$ orthogonale au cercle (A, B).

Considérons deux sens de parcours sur un cercle, nous pouvons former avec ce cercle deux *cycles*, en prenant chaque foyer du cercle comme *sommet* d'un cycle; deux cycles sont dits dans une position *minima* lorsque leurs sommets sont situés sur une droite minima; l'une des quantités $\rho$, $\rho_1$ est nulle; si par exemple les cycles (A), (C) sont dans une position minima, nous avons $\rho = 0$ et

$$(\rho + \rho_1)^2 = (\rho - \rho_1)^2 = \rho_1^2;$$

si en même temps les cycles (B), (D) sont dans une position minima, nous pouvons écrire $\overline{AC} = \overline{BD} = 0$; les équations (1) se réduisent à une seule :

$$\lambda^2 \overline{BC}^2 - \mu^2 \overline{AD}^2 = 0.$$

A une sphère quelconque ($\sigma$) passant par le cercle (C, D) correspondent toujours deux sphères orthogonales (S), (T) passant par le cercle (A, B) et telles que

$$\widehat{\sigma, T} = \frac{\pi}{2},$$
$$\cos^2\left(\widehat{S, \sigma}\right) = \rho_1^2.$$

L'angle $\hat{\delta}$ du cercle (A, B) avec une sphère quelconque ($\sigma$) passant par (C, D) est donc constant et vérifie la relation

$$\cos^2 \delta = \rho_1^2.$$

Le même raisonnement montre que l'angle du cercle (C, D) avec une sphère quelconque (S) passant par (A, B) est égal à $\delta$. Supposons chacun des deux cycles du cercle (A, B) dans la position minima avec chacun des deux cycles du cercle (C, D). Dans ce cas,

$$\rho = \rho_1 = 0, \qquad \widehat{S, \sigma} = \widehat{T, \tau} = \frac{\pi}{2}.$$

Toute sphère passant par le cercle (A, B) est orthogonale au cercle (C, D), et inversement. Chacun des cercles passe par les foyers de l'autre; les cercles sont situés dans deux plans rectangulaires qui se coupent suivant la ligne des centres; cette ligne est divisée harmoniquement par les deux cercles. Les cercles sont dits *conjugués* ou encore dans la position *orthosphérique*.

---

## CHAPITRE IV.

### INVARIANTS DIFFERENTIELS DU PREMIER ORDRE DES SURFACES CERCLÉES, PAR RAPPORT AUX TRANSFORMATIONS CONFORMES.

1. Supposons les coordonnées $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$ des foyers du cercle, fonctions d'un paramètre $t$. Les invariants différentiels du premier ordre de la surface engendrée par le cercle, relativement au groupe conforme, sont les invariants du groupe (G), prolongé au premier ordre, et les invariants de ce groupe sont les intégrales du système des équations aux dérivées partielles obtenues en égalant à zéro les opérateurs.

Formons les opérateurs du groupe prolongé : introduisons les variables

$$a' = \frac{da}{dt}, \qquad b' = \frac{db}{dt}, \qquad c' = \frac{dc}{dt}; \qquad a'_1 = \frac{da_1}{dt}, \qquad b'_1 = \frac{db_1}{dt}, \qquad c'_1 = \frac{dc_1}{dt};$$

les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \cdots$ dans la transformation prolongée sont les dérivées des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \cdots$ dans la transformation correspondante du groupe (G).

Nous avons ainsi les dix opérateurs :

$$X_1 f = Z_1 f,$$
$$X_2 f = Z_2 f,$$
$$X_3 f = Z_3 f,$$
$$X_4 f = Z_4 f + a' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial a'} + a'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1} - b'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1},$$
$$X_5 f = Z_5 f + b' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial b'} + b'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1} - c'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1},$$
$$X_6 f = Z_6 f + c' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial c'} + c'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1} - a'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1},$$
$$X_7 f = Z_7 f + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + a'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1} + b'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1} + c'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1},$$
$$\begin{aligned} X_8 f = Z_8 f &+ 2(aa' - bb' - cc') \frac{\partial f}{\partial a'} + 2(a'b + ab') \frac{\partial f}{\partial b'} + 2(a'c + ac') \frac{\partial f}{\partial c'} \\ &+ 2(a_1 a'_1 - b_1 b'_1 - c_1 c'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1} + 2(a'_1 b_1 + a_1 b'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1} + 2(a'_1 c_1 + a_1 c'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} X_9 f = Z_9 f &+ 2(bb' - cc' - aa') \frac{\partial f}{\partial b'} + 2(b'c + bc') \frac{\partial f}{\partial c'} + 2(b'a + ba') \frac{\partial f}{\partial a'} \\ &+ 2(b_1 b'_1 - c_1 c'_1 - a_1 a'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1} + 2(b'_1 c_1 + b_1 c'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1} + 2(b'_1 a_1 + b_1 a'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} X_{10} f = Z_{10} f &+ 2(cc' - aa' - bb') \frac{\partial f}{\partial c'} + 2(c'a + ca') \frac{\partial f}{\partial a'} + 2(c'b + cb') \frac{\partial f}{\partial b'} \\ &+ 2(c_1 c'_1 - a_1 a'_1 - b_1 b'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1} + 2(c'_1 a_1 + c_1 a'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1} + 2(c'_1 b_1 + c_1 b'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1}; \end{aligned}$$

$Z_1 f, Z_2 f, \ldots, Z_{10} f$ sont les opérateurs du groupe (G).

Les invariants différentiels sont les intégrales du système d'équations $X_i f = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, 10$) ou du système équivalent obtenu en remplaçant $X_8 f$, $X_9 f$, $X_{10} f$ par les combinaisons :

$$X_8 f - (b + b_1) X_4 f + (c + c_1) X_6 f - (a + a_1) X_7 f - (bb_1 + cc_1 - aa_1) X_1 f + (ab_1 + ba_1) X_2 f + (ac_1 + ca_1) X_3 f,$$
$$X_9 f - (c + c_1) X_5 f + (a + a_1) X_4 f - (b + b_1) X_7 f - (cc_1 + aa_1 - bb_1) X_2 f + (bc_1 + cb_1) X_3 f + (ba_1 + ab_1) X_1 f,$$
$$X_{10} f - (a + a_1) X_6 f + (b + b_1) X_5 f - (c + c_1) X_7 f - (aa_1 + bb_1 - cc_1) X_3 f + (ca_1 + ac_1) X_1 f + (cb_1 + bc_1) X_2 f.$$

Le système des trois équations $X_1 f = 0, X_2 f = 0, X_3 f = 0$ admet neuf intégrales indépendantes :

$$a', \quad b', \quad c'; \qquad a'_1, \quad b'_1, \quad c'_1; \qquad A = a_1 - a, \qquad B = b_1 - b, \qquad C = c_1 - c.$$

Prenons ces quantités comme nouvelles variables dans les équations $X_1 f = 0$, $X_5 f = 0$, ..., nous obtenons :

$$Y_1 f = A \frac{\partial f}{\partial B} - B \frac{\partial f}{\partial A} + a' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial a'} + a'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1} - b'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1} = 0,$$

$$Y_2 f = B \frac{\partial f}{\partial C} - C \frac{\partial f}{\partial B} + b' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial b'} + b'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1} - c'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1} = 0,$$

$$Y_3 f = C \frac{\partial f}{\partial A} - A \frac{\partial f}{\partial C} + c' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial c'} + c'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1} - a'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1} = 0,$$

$$Y_4 f = A \frac{\partial f}{\partial A} + B \frac{\partial f}{\partial B} + C \frac{\partial f}{\partial C} + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + a'_1 \frac{\partial f}{\partial a'_1} + b'_1 \frac{\partial f}{\partial b'_1} + c'_1 \frac{\partial f}{\partial c'_1} = 0,$$

$$\begin{aligned} Y_5 f = \; & (A a'_1 - B b'_1 - C c'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1} + (B a'_1 + A b'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1} + (A c'_1 + C a'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1} \\ & - (A a' - B b' - C c') \frac{\partial f}{\partial a'} - (B a' + A b') \frac{\partial f}{\partial b'} - (A c' + C a') \frac{\partial f}{\partial c'} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_6 f = \; & (B b'_1 - C c'_1 - A a'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1} + (C b_1 + B c'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1} + (B a'_1 + A b'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1} \\ & - (B b' - C c' - A a') \frac{\partial f}{\partial b'} - (C b' + B c') \frac{\partial f}{\partial c'} - (B a' + A b') \frac{\partial f}{\partial a'} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_7 f = \; & (C c'_1 - A a'_1 - B b'_1) \frac{\partial f}{\partial c'_1} + (A c'_1 + C a'_1) \frac{\partial f}{\partial a'_1} + (C b'_1 + B c'_1) \frac{\partial f}{\partial b'_1} \\ & - (C c' - A a' - B b') \frac{\partial f}{\partial c'} - (A c' + C a') \frac{\partial f}{\partial a'} - (C b' + B c') \frac{\partial f}{\partial b'} = 0. \end{aligned}$$

Les six intégrales distinctes du système formé par les trois premières équations sont :

$$\begin{array}{ll} A^2 + B^2 + C^2, & A a' + B b' + C c', \\ a'^2 + b'^2 + c'^2, & A a'_1 + B b'_1 + C c'_1, \\ a'^2_1 + b'^2_1 + c'^2_1, & a' a'_1 + b' b'_1 + c' c'_1. \end{array}$$

La quatrième équation montre que les intégrales doivent être homogènes en A, B, C, $a'$, $b'$, $c'$, $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$. Nous sommes donc conduits à prendre comme nouvelles variables dans les trois dernières équations :

$$\lambda = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad \mu = \frac{a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$\alpha = \frac{A a' + B b' + C c'}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad \beta = \frac{A a_1' + B b_1' + C c_1'}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad \theta = \frac{a' a_1' + b' b_1' + c' c_1'}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ces équations deviennent :

$$2A\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - 2A\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + a_1' \frac{\partial f}{\partial \beta} - a' \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2(a_1'\alpha - a'\beta)\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

$$2B\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - 2B\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + b_1' \frac{\partial f}{\partial \beta} - b' \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2(b_1'\alpha - b'\beta)\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

$$2C\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - 2C\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + c_1' \frac{\partial f}{\partial \beta} - c' \frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2(c_1'\alpha - c'\beta)\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & a_1' & a' \\ B & b_1' & b' \\ C & c_1' & c' \end{vmatrix}$$

est en général différent de zéro; nous pouvons donc résoudre les équations précédentes par rapport à $\frac{\partial f}{\partial \mu}, \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}$, et nous obtenons le système jacobien :

$$\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2\beta \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} + 2\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

Les deux intégrales distinctes de ce système sont $\lambda\mu$ et $2\alpha\beta - \theta$. Désignons-les par $\frac{1}{16}\Delta^4$ et $\frac{1}{4}\Delta_1^2$, et revenons aux anciennes variables, nous avons :

$$\Delta^4 = 16 \frac{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2)}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

$$\Delta_1^2 = 4\left[2\frac{(Aa' + Bb' + Cc')(Aa_1' + Bb_1' + Cc_1')}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} - \frac{a'a_1' + b'b_1' + c'c_1'}{A^2 + B^2 + C^2}\right].$$

Les quantités $\Delta$, $\Delta_1$ sont les invariants relatifs des surfaces cerclées par rapport aux transformations conformes, relatifs en ce sens qu'ils changent quand on prend un nouveau paramètre. En effet, si $\tau$ est un paramètre lié à $t$ par l'équation $t = g(\tau)$, nous avons

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{da}{dt} g', \qquad \frac{db}{d\tau} = \frac{db}{dt} g', \qquad \dots$$

Nous pouvons former une combinaison des quantités $\Delta$, $\Delta_1$, indépendante de $g'$, par exemple

$$I_0^4 = \frac{\Delta_1^4}{\Delta^4};$$

$I_0$ est un invariant absolu.

En résumé, nous avons trouvé un système de dix transformations $X_i f (i = 1, 2, \dots, 10)$ qui permet de reconnaître un invariant du premier ordre des surfaces cerclées : une fonction de $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $a', b', c'$; $a'_1, b'_1, c'_1$ définit un invariant si elle vérifie les équations

$$X_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, 10),$$

et tout invariant absolu du premier ordre peut être obtenu avec l'invariant absolu fondamental $I_0^4 = \frac{\Delta_1^4}{\Delta^4}$.

2. Pour interpréter géométriquement les invariants $\Delta_1$, $\Delta$, $I_0$, et les équations invariantes obtenues en égalant ces quantités à zéro, il nous sera utile de connaître leurs expressions en fonction du rayon R du cercle et des quantités $u$, $v$, $w$, $p$ définies de la manière suivante [1] :

Soit C le centre du cercle; considérons un trièdre trirectangle CXYZ, CZ étant dirigé suivant l'axe du cercle et CX parallèle à la caractéristique de son plan, et un trièdre fixe dont les axes $x$, $y$, $z$ coïncideraient à l'instant initial avec les axes X, Y, Z; on peut passer d'une position du système mobile à la position infiniment voisine par une translation suivie d'une rotation.

Nous désignerons par $u$, $v$, $w$ les composantes de la vitesse du centre C et par $p$, $q$, $r$ les composantes de la rotation, suivant les axes mobiles. Les cosinus directeurs des axes mobiles étant les neuf quan-

---

(1) ENNEPER (*loc. cit.*).

tités $\alpha_1$, $\beta_1$, ... du tableau :

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $y$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $z$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

et les coordonnées du point C étant $\frac{a+a_1}{2}$, $\frac{b+b_1}{2}$, $\frac{c+c_1}{2}$, les quantités $u$, $v$, $w$ sont définies par les équations

$$u = \frac{a'+a'_1}{2}\alpha_1 + \frac{b'+b'_1}{2}\beta_1 + \frac{c'+c'_1}{2}\gamma_1,$$
$$v = \frac{a'+a'_1}{2}\alpha_2 + \frac{b'+b'_1}{2}\beta_2 + \frac{c'+c'_1}{2}\gamma_2,$$
$$w = \frac{a'+a'_1}{2}\alpha_3 + \frac{b'+b'_1}{2}\beta_3 + \frac{c'+c'_1}{2}\gamma_3.$$

Résolvons ces équations par rapport à $\frac{a'+a'_1}{2}$, $\frac{b'+b'_1}{2}$, $\frac{c'+c'_1}{2}$; nous avons :

$$\frac{a'+a'_1}{2} = u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3,$$
$$\frac{b'+b'_1}{2} = u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3,$$
$$\frac{c'+c'_1}{2} = u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3$$

D'autre part, les foyers P de coordonnées $a$, $b$, $c$ et $P_1$ de coordonnées $a_1$, $b_1$, $c_1$ sont deux points de l'axe du cercle définis par $\overline{CP} = Ri$, $\overline{CP_1} = -Ri$; si nous désignons par A, B, C les différences $a_1 - a$, $b_1 - b$, $c_1 - c$, nous avons

$$\alpha_3 = -\frac{A}{2Ri}, \qquad \beta_3 = -\frac{B}{2Ri}, \qquad \gamma_3 = -\frac{C}{2Ri}$$

et

$$A^2 + B^2 + C^2 = -4R^2.$$

Différentions les deux membres de cette équation, nous obtenons

$$AA' + BB' + CC' = -4RR'; \tag{1}$$

A′, B′, C′ sont les paramètres directeurs de la normale au plan caractéristique du plan du cercle, et l'axe des X est par hypothèse parallèle à la caractéristique; nous avons donc

(2) $$A'\alpha_1 + B'\beta_1 + C'\gamma_1 = 0.$$

La composante $p$ de la rotation suivant l'axe des X est donnée par la formule

$$\alpha_2\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \gamma_2\gamma'_3 = -p,$$

d'où

(3) $$A'\alpha_2 + B'\beta_2 + C'\gamma_2 = 2pRi.$$

Résolvons les équations (1), (2), (3) par rapport à A', B', C', nous trouvons :

$$\frac{a'_1 - a'}{2} = (pR\alpha_2 - R'\alpha_3)i,$$
$$\frac{b'_1 - b'}{2} = (pR\beta_2 - R'\beta_3)i,$$
$$\frac{c'_1 - c'}{2} = (pR\gamma_2 - R'\gamma_3)i.$$

Le système de ces trois équations et des trois équations précédentes en $\frac{a'+a'_1}{2}$, $\frac{b'+b'_1}{2}$, $\frac{c'+c'_1}{2}$ nous donne :

(I) $$\left\{\begin{aligned} a' &= u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3 + (R'\alpha_3 - pR\alpha_2)i,\\ a'_1 &= u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3 - (R'\alpha_3 - pR\alpha_2)i,\\ b' &= u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3 + (R'\beta_3 - pR\beta_2)i,\\ b'_1 &= u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3 - (R'\beta_3 - pR\beta_2)i,\\ c' &= u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3 + (R'\gamma_3 - pR\gamma_2)i,\\ c'_1 &= u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3 - (R'\gamma_3 - pR\gamma_2)i; \end{aligned}\right.$$

si nous posons

$$\sigma\lambda = a'^2 + b'^2 + c'^2, \qquad \sigma\mu = a'^2_1 + b'^2_1 + c'^2_1,$$
$$\sigma\alpha = Aa' + Bb' + Cc', \qquad \sigma\beta = Aa'_1 + Bb'_1 + Cc'_1,$$
$$\sigma\theta = a'a'_1 + b'b'_1 + c'c'_1,$$
$$(\sigma = A^2 + B^2 + C^2),$$

nous avons les formules de transformation :

(II) $$\left\{\begin{aligned} \sigma\lambda &= u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2 + 2(wR' + vpR)i,\\ \sigma\mu &= u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2 - 2(wR' - vpR)i,\\ \sigma\alpha &= \phantom{-}2RR' - 2Rwi,\\ \sigma\beta &= -2RR' - 2Rwi,\\ \sigma\theta &= u^2 + v^2 + w^2 + p^2R^2 + R'^2\\ &\qquad (\sigma = -4R^2). \end{aligned}\right.$$

Si nous tenons compte de ces relations, les invariants s'écrivent :

$$
\text{(III)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
\Delta_1^2 &= \frac{u^2+v^2-R'^2-w^2+p^2R^2}{R^2},\\
\Delta^4 &= \frac{(u^2+v^2-R'^2+w^2-p^2R^2)^2+4(wR'-vpR)^2}{R^4},\\
I_0^4 &= \frac{(u^2+v^2-R'^2-w^2+p^2R^2)^2}{(u^2+v^2-R'^2+w^2-p^2R^2)^2+4(wR'-vpR)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous pouvons ajouter à ce tableau l'invariant absolu :

$$
\begin{aligned}
K^4 = \frac{1-I_0^4}{I_0^4} &= 4\,\frac{u^2(w^2-p^2R^2)+(wv-pRR')^2}{(u^2+v^2-R'^2-w^2+p^2R^2)^2}\\
&= 4\,\frac{(u^2+v^2-R'^2)(w^2-p^2R^2)+(wR'-vpR)^2}{(u^2+v^2-R'^2-w^2+p^2R^2)^2}.
\end{aligned}
$$

---

## CHAPITRE V.

### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS RELATIFS ET DE L'INVARIANT ABSOLU DU PREMIER ORDRE.

Considérons le triangle invariable relatif à deux cercles (A, B) et (C, D).

Soient $a, b, c$ les coordonnées du foyer A; $a_1, b_1, c_1$ les coordonnées de B; $\alpha, \beta, \gamma$ les coordonnées de C; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées de D; les longueurs $\rho, \rho_1$ des côtés OI, $O_1$I du triangle sont définies par les équations

$$
\rho^2 = \frac{\Sigma(a-\alpha)^2\,\Sigma(a_1-\alpha_1)^2}{\Sigma(a_1-a)^2\,\Sigma(\alpha_1-\alpha)^2},
$$

$$
\rho_1^2 = \frac{\Sigma(a_1-\alpha)^2\,\Sigma(a-\alpha_1)^2}{\Sigma(a_1-a)^2\,\Sigma(\alpha_1-\alpha)^2}.
$$

Remplaçons $\alpha, \beta, \gamma$ par $a+a'dt+\ldots$, $b+b'dt+\ldots$, $c+c'dt+\ldots$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ par $a_1+a_1'dt+\ldots$, $b_1+b_1'dt+\ldots$, $c_1+c_1'dt+\ldots$, et limitons les développements aux termes du plus bas degré en $dt$, nous avons

$$\rho^2 = \frac{\Delta^4}{16} dt^4 + \ldots,$$

$$\rho_1^2 = 1 - \frac{\Delta_1^2}{2} dt^2 + \ldots.$$

La distance IH du sommet I à la base $OO_1$ et l'angle $\omega$ des deux cercles sont définis par les équations

$$\overline{IH}^2 = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{16} dt^4 + \ldots,$$

$$\sin^2 \omega = \Delta_1^2 \, dt^2 + \ldots.$$

Si nous désignons par $ds$ l'angle de deux cercles infiniment voisins, nous avons

$$\Delta_1^2 = \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Les relations précédentes nous montrent que le rapport

$$\frac{16 \, \overline{IH}^2}{\sin^4 \omega}$$

a une limite qui est l'invariant absolu du premier ordre :

$$\frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}.$$

Nous trouvons ainsi une analogie avec les surfaces réglées :

« *Le rapport de la distance* $2\sqrt{\mathrm{IH}}$ *à l'angle de deux cercles infiniment voisins a une limite.* »

Considérons, d'autre part, la courbe décrite par le sommet I du triangle invariable, quand le cercle (C, D) se rapproche indéfiniment du cercle (A, B); soit OT la tangente au point O à cette courbe; nous avons

$$\operatorname{tang}^2 \widehat{O_1OT} = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}.$$

## CHAPITRE VI.

### AUTRES INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'INVARIANT ABSOLU DU PREMIER ORDRE.

1. Considérons une sphère $(s)$ passant par la génératrice circulaire; son équation est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\Lambda[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2]=0.$$

Déterminons les points de la génératrice où la normale à la surface et la normale à la sphère $(s)$ sont confondues. Soient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x-a)a'+(y-b)b'+(z-c)c', \\ f_1(x, y, z) &= (x-a_1)a'_1+(y-b_1)b'_1+(z-c_1)c'_1. \end{aligned}$$

Les coefficients directeurs de la normale à la surface sont les coefficients de $dx$, $dy$, $dz$ dans l'équation

$$\begin{aligned} &[(x-a)f_1-(x-a_1)f]\,dx \\ &\quad+[(y-b)f_1-(y-b_1)f]\,dy+[(z-c)f_1-(z-c_1)f]\,dz=0, \end{aligned}$$

obtenue en éliminant $dt$ entre les équations

$$\begin{aligned} (x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz-f(x, y, z)\,dt &= 0, \\ (x-a_1)\,dx+(y-b_1)\,dy+(z-c_1)\,dz-f_1(x, y, z)\,dt &= 0. \end{aligned}$$

Les coefficients directeurs de la normale à la sphère sont

$$x-a+\Lambda(x-a_1), \qquad y-b+\Lambda(y-b_1), \qquad z-c+\Lambda(z-c_1).$$

Si nous supposons le rayon du cercle différent de zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients des deux normales soient proportionnels est

$$f(x, y, z)+\Lambda f_1(x, y, z)=0,$$

équation du plan caractéristique de la sphère $(s)$.

Ce résultat montre que chaque sphère $(s)$ est bitangente à la surface aux points de rencontre $m$, $m'$ de la génératrice avec le plan caractéristique de la sphère. En particulier, les sphères de rayon nul, ou *sphères focales*, sont bitangentes à la surface aux points de rencontre de la génératrice avec les plans

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0,$$

correspondant à $\Lambda = 0$, $\Lambda = \infty$.

Tous les plans caractéristiques des sphères $(s)$ passent par une droite fixe; par suite, toutes les cordes de contact des sphères $(s)$ avec la surface passent par un point fixe, le point G, où la droite fixe rencontre le plan du cercle; d'où involution des points de contact sur le cercle. Le rapport anharmonique de quatre sphères $(s)$ est égal au rapport anharmonique des quatre cordes de contact.

Les coordonnées du centre S d'une sphère $(s)$ sont

$$\frac{a + \Lambda a_1}{1 + \Lambda}, \quad \frac{b + \Lambda b_1}{1 + \Lambda}, \quad \frac{c + \Lambda c_1}{1 + \Lambda};$$

$\Lambda$ est égal au rapport $\dfrac{\overline{SP}}{\overline{P_1S}}$, P, $P_1$ désignant les foyers du cercle.

Nous avons $\overline{P_1P} = 2Ri$, et le centre C du cercle étant le milieu de $\overline{P_1P}$ :

$$\frac{\overline{SP}}{\Lambda} = \frac{\overline{SP_1}}{-1} = \frac{2\,\overline{SC}}{\Lambda - 1} = \frac{\overline{P_1P}}{\Lambda + 1} = \frac{2Ri}{\Lambda + 1},$$

d'où

$$\overline{SC} = Ri\frac{\Lambda - 1}{\Lambda + 1}.$$

Soit (V) l'angle de la sphère $(s)$ avec le plan du cercle

$$(1) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{R}{\overline{CS}} = i\frac{\Lambda + 1}{\Lambda - 1}.$$

Si $\Lambda = 1$, on a $\operatorname{tang} V = \infty$; la sphère $(s)$ a pour centre le point C; son plan caractéristique a pour équation

$$f(x, y, z) + f_1(x, y, z) = 0.$$

Si $\Lambda = -1$, on a $\operatorname{tang} V = 0$; la sphère devient le plan du cercle, son plan caractéristique a pour équation

$$f(x, y, z) - f_1(x, y, z) = 0.$$

D'après (1), l'angle de deux sphères ($s$) est donné par la formule

$$\cos^2\left(\widehat{\Lambda, \Lambda_1}\right) = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda)^2}{4\Lambda\Lambda_1} \tag{2}$$

ou

$$\widehat{\Lambda, \Lambda_1} = \frac{1}{2i} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_1}. \tag{3}$$

$\frac{\Lambda}{\Lambda_1}$ est le rapport anharmonique défini par les foyers P, $P_1$ et les centres S, $S_1$ des deux sphères.

Une sphère ($s$) pour laquelle les deux points de contact $m$, $m'$ avec la surface sont confondus conservera sa définition dans une transformation conforme; déterminons la valeur correspondante de $\Lambda$.

Soient Q le point de rencontre du plan caractéristique de la sphère avec l'axe du cercle, $h$ la distance du point C au plan.

Les deux points $m$, $m'$ seront confondus si le plan caractéristique est tangent au cercle, ce qu'exprime la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\overline{CQ}^2} + \frac{1}{R^2}. \tag{4}$$

Si nous remplaçons dans l'équation du plan caractéristique $x, y, z$ par $\frac{a + ta_1}{1 + t}$, $\frac{b + tb_1}{1 + t}$, $\frac{c + tc_1}{1 + t}$, et si nous désignons par $\alpha$, $\beta$ les rapports $\frac{Aa' + Bb' + Cc'}{A^2 + B^2 + C^2}$, $\frac{Aa'_1 + Bb'_1 + Cc'_1}{A^2 + B^2 + C^2}$, nous obtenons

$$t = \frac{\beta}{\alpha}\Lambda,$$

quantité qui détermine les coordonnées du point Q; par suite,

$$\overline{QC} = Ri\frac{t - 1}{t + 1} = Ri\frac{\Lambda\beta - \alpha}{\Lambda\beta + \alpha}.$$

Les coordonnées du centre C sont $\frac{a + a_1}{2}$, $\frac{b + b_1}{2}$, $\frac{c + c_1}{2}$, et la distance de ce point au plan caractéristique est donnée par la formule

$$h^2 = \frac{\left[f\left(\frac{a+a_1}{2}, \frac{b+b_1}{2}, \frac{c+c_1}{2}\right) + \Lambda f_1\left(\frac{a+a_1}{2}, \frac{b+b_1}{2}, \frac{c+c_1}{2}\right)\right]^2}{(a'+\Lambda a'_1)^2 + (b'+\Lambda b'_1)^2 + (c'+\Lambda c'_1)^2}.$$

Désignons par $\lambda$, $\mu$ les rapports $\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{A^2+B^2+C^2}$, $\frac{a'^2_1+b'^2_1+c'^2_1}{A^2+B^2+C^2}$ ; la relation précédente s'écrit

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\Lambda^2\mu + 2\theta\Lambda + \lambda}{-R^2(\alpha - \Lambda\beta)^2}.$$

Si nous remplaçons, dans (4), $\frac{1}{h^2}$ et $\frac{1}{\overline{QC}^2}$ par les valeurs trouvées, nous obtenons

$$\mu\Lambda^2 - \frac{\Delta_1^2}{2}\Lambda + \lambda = 0.$$

Aux deux racines F, $F_1$ de cette équation du second degré en $\Lambda$ correspondent deux sphères (F), ($F_1$) passant par le cercle; soient M le point où la sphère (F) touche la surface, $M_1$ le point de la sphère ($F_1$); les points M, $M_1$ sont les points de contact avec la génératrice des tangentes issues du point G.

Les sphères (F), ($F_1$) sont tangentes à la surface en deux points consécutifs; ce sont donc des sphères de courbure. Aux deux points M, $M_1$ la génératrice est tangente à une ligne de courbure de la surface.

Les *points de courbure* M, $M_1$ gardant leur définition dans une transformation conforme, leurs trajectoires sont deux lignes de la surface qui se conservent, comme les lignes de courbure, dans une transformation conforme.

L'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères (F), ($F_1$), que nous désignerons sous le nom de *spheres fondamentales*, verifie d'après (2) la relation

$$\cos^2 \widehat{FF_1} = \frac{(F+F_1)^2}{4\,FF_1} = \frac{\Delta_1^4}{16\lambda\mu} = \frac{\Delta_1^4}{\Delta^4};$$

nous avons donc

$$I_0^4 = \cos^2 \widehat{FF_1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}^2 \widehat{FF_1} = \frac{1 - I_0^4}{I_0^4},$$

invariant du Chapitre V.

2. Le rapport anharmonique des quatre sphères : sphères fondamentales et sphères focales, est égal à $\frac{F}{F_1}$; or nous avons, d'après (3),

$$\widehat{FF_1} = \frac{1}{2i}\log\frac{F}{F_1}$$

ou

$$\frac{F}{F_1} = e^{2i(\widehat{F,F_1})}.$$

3. L'invariant absolu fondamental $I_0$ peut s'interpréter encore de la manière suivante : nous pouvons écrire

$$I_0^4 = \left[\frac{a'a'_1 + b'b'_1 + c'c'_1}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\sqrt{a_1'^2+b_1'^2+c_1'^2}} - 2\,\frac{\left(-\frac{A}{2Ri}a' - \frac{B}{2Ri}b' - \frac{C}{2Ri}c'\right)\left(-\frac{A}{2Ri}a'_1 - \frac{B}{2Ri}b'_1 - \frac{C}{2Ri}c'_1\right)}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\sqrt{a_1'^2+b_1'^2+c_1'^2}}\right]^2,$$

ou bien, en désignant par $\widehat{VV_1}$ l'angle des vitesses des foyers, par $\widehat{VZ}$, $\widehat{V_1Z}$ les angles de ces vitesses avec l'axe du cercle

$$I_0^4 = \left(\cos\widehat{VV_1} - 2\cos\widehat{VZ}\cos\widehat{V_1Z}\right)^2.$$

4. Dans le cas particulier où les vitesses des foyers sont dans un même plan avec l'axe du cercle, nous pouvons remplacer $\cos\widehat{VV_1}$ par

$$\cos\widehat{VZ}\cos\widehat{V_1Z} + \sin\widehat{VZ}\sin\widehat{V_1Z};$$

nous obtenons

$$I_0^4 = \cos^2\left(\widehat{VZ} + \widehat{V_1Z}\right).$$

Nous pouvons considérer $I_0^2$ comme la limite d'un invariant de quatre points :

Effectuons une inversion sur les quatre points P, $P_1$, Q, $Q_1$. Nous avons, entre les angles du quadrilatère $PP_1QQ_1$ et les angles du quadrilatère qui a pour sommets les points transformés P′, $P'_1$, Q′, $Q'_1$, la relation

$$\left(\widehat{P'Q',P'P'_1}\right) + \left(\widehat{Q'_1P'_1,Q'_1Q'}\right) = \left(\widehat{PP_1,PQ}\right) + \left(\widehat{Q_1Q,Q_1P_1}\right) + 2k\pi,$$

et les cosinus des deux sommes

$$(\widehat{PP_1, PQ}) + (\widehat{Q_1Q, Q_1P_1}) \quad \text{et} \quad (\widehat{P'Q', P'P'_1}) + (\widehat{Q'_1P'_1, Q'_1Q'})$$

sont égaux. Si le point Q se rapproche indéfiniment de P et le point $Q_1$ de $P_1$, la première quantité devient la somme des angles que forment avec l'axe les vitesses des foyers P, $P_1$.

5. Déterminons quelques propriétés invariantes se rattachant à l'invariant absolu fondamental :

A tout point S de l'axe du cercle correspond une sphère $(s)$ tangente à la surface en deux points $m$, $m'$ du cercle, et une droite $mm'$ passant par un point fixe G. Le rapport anharmonique de quatre points S est donc égal au rapport anharmonique des quatre droites correspondantes issues de G. Considérons en particulier les tangentes GM, $GM_1$ à la génératrice et les droites $Gm$, $Gm_1$ passant par les points de contact $m, m'$ et $m_1$, $m'_1$ des sphères focales; les points M, $M_1$ sont les points de contact des sphères fondamentales, avec la surface; si $\mu$, $\mu_1$ sont les points de rencontre avec $MM_1$ des cordes $Gm$, $Gm_1$, et $\Omega$, $\Omega_1$ les centres des *sphères fondamentales*, le rapport anharmonique $(\mu, \mu_1, M, M_1)$ est égal au rapport anharmonique $(P, P_1, \Omega, \Omega_1)$. Or, on démontre facilement la relation suivante entre le rapport anharmonique des quatre points du cercle $m, m_1, M, M_1$ et le rapport anharmonique des points $\mu$, $\mu_1$, M, $M_1$ :

$$(m, m_1, M, M_1)^2 = (\mu, \mu_1, M, M_1);$$

donc

$$(m, m_1, M, M_1)^2 = (P, P_1, \Omega, \Omega_1) = e^{2i\widehat{FF_1}}.$$

6. Calculons le rapport anharmonique des quatre points $m$, $m'$, $m_1$, $m'_1$, points de contact des sphères focales avec la surface.

Prenons pour axes de coordonnées les axes mobiles (Chap. IV); les nouvelles coordonnées X, Y, Z sont liées à $x, y, z$ par les formules

$$x = \frac{a + a_1}{2} + X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha_3,$$

$$y = \frac{b + b_1}{2} + X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta_3,$$

$$z = \frac{c + c_1}{2} + X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3.$$

Les équations $f(x, y, z) = 0$, $f_1(x, y, z) = 0$ des plans caractéristiques des sphères focales deviennent, si l'on tient compte des formules (I),

$$uX + (v - pRi)Y + (w + R'i)Z + R(R' - wi) = 0,$$
$$uX + (v + pRi)Y + (w - R'i)Z + R(R' + wi) = 0.$$

Les cordes de contact $mm'$, $m_1m'_1$ ont donc pour équations

$$uX + (v - pRi)Y + R(R' - wi) = 0,$$
$$uX + (v + pRi)Y + R(R' + wi) = 0.$$

Soit $\varphi$ l'angle que fait avec l'axe CX le rayon aboutissant à l'un des points de contact; ces points sont déterminés par les équations

$$u\cos\varphi + (v - pRi)\sin\varphi + R' - wi = 0,$$
$$u\cos\varphi + (v + pRi)\sin\varphi + R' + wi = 0$$

ou

$$A_1 \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} + B_1 \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + C_1 = 0,$$

$$A_2 \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} + B_2 \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + C_2 = 0,$$

si nous posons

$$A_1 = R' - u - wi, \qquad B_1 = 2(v - pRi), \qquad C_1 = u + R' - wi,$$
$$A_2 = R' - u + wi, \qquad B_2 = 2(v + pRi). \qquad C_2 = u + R' + wi.$$

Nous savons que l'un des rapports anharmoniques des quatre points ainsi définis est égal à

$$\frac{2(A_1C_2 + A_2C_1) - B_1B_2 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}\sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}}{2(A_1C_2 + A_2C_1) - B_1B_2 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}\sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}},$$

et en remplaçant $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ par leurs valeurs, le rapport devient

$$\frac{w^2 - p^2R^2 - (u^2 + v^2 - R'^2) + \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2)^2 + 4(vpR - wR')^2}}{w^2 - p^2R^2 - (u^2 + v^2 - R'^2) - \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2)^2 + 4(vpR - wR')^2}},$$

et nous avons

$$I_0^4 = \frac{(u^2+v^2-R'^2-w^2+p^2R^2)^2}{(u^2+v^2+w^2-p^2R^2-R'^2)^2+4(vpR-wR')^2};$$

donc, le rapport anharmonique est égal à

$$\frac{I_0^2-1}{I_0^2+1};$$

il dépend uniquement de l'invariant absolu fondamental du premier ordre, c'est à-dire de l'angle des sphères fondamentales.

7. Les considérations précédentes nous permettent de donner une autre interprétation géométrique de l'invariant relatif $\Delta$.

Soient $\Omega$, $\Omega_1$ les centres des sphères fondamentales; $\rho$, $\rho_1$ leurs rayons; F, $F_1$ les racines de l'équation $\mu\Lambda^2 - \frac{\Delta_1^2}{2}\Lambda + \lambda = 0$; nous avons

$$\rho^2 = R^2 + \overline{C\Omega}^2 = \frac{4R^2F}{(F+1)^2},$$
$$\rho_1^2 = \frac{4R^2F_1}{(F_1+1)^2}.$$

Le produit de ces deux quantités est une fonction symétrique des racines de l'équation en $\Lambda$; il est égal à

$$\rho^2\rho_1^2 = R^4\frac{16\lambda\mu}{\left(\lambda+\mu+\frac{\Delta_1^2}{2}\right)^2}$$

et, d'après les formules (II),

$$\rho^2\rho_1^2 = \frac{R^4\Delta^4}{p^4\left(1-\frac{w^2}{p^2R^2}\right)^2},$$

d'où

$$\Delta^2 = p^2\frac{\rho\rho_1}{R^2}\left(1-\frac{w^2}{p^2R^2}\right).$$

Interprétons le dernier facteur.

Le plan caractéristique du plan de la génératrice a pour équation

$$f(x, y, z) - f_1(x, y, z) = 0$$

et, par rapport aux axes mobiles,

$$pY - \frac{R'}{R}Z + w = 0.$$

L'équation de la caractéristique est donc

$$pY + w = 0.$$

Aux deux points A, $A_1$ où cette droite rencontre le cercle, le plan tangent à la surface est le plan du cercle, car on a

$$\operatorname{tang} V = i\frac{\Lambda + 1}{\Lambda - 1} = 0.$$

Le cercle est tangent en ces points à une ligne asymptotique de la surface (¹).

Soit $\Phi$ l'angle que forme avec l'axe CX le rayon aboutissant à l'un de ces points, nous avons

$$\cos^2\Phi = 1 - \frac{w^2}{p^2R^2}.$$

$\Delta^2$ peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta^2 = \frac{\rho\rho_1}{R^2} p^2 \cos^2\Phi.$$

---

## CHAPITRE VII.

### INVARIANTS DIFFERENTIELS DU SECOND ORDRE DES SURFACES CERCLÉES.

Les invariants différentiels du second ordre des surfaces cerclées par rapport au groupe conforme sont les invariants du groupe (G) prolongé au second ordre. Introduisons les variables

$$a'' = \frac{da'}{dt}, \quad b'' = \frac{db'}{dt}, \quad c'' = \frac{dc'}{dt}, \quad a''_1 = \frac{da'_1}{dt}, \quad b''_1 = \frac{db'_1}{dt}, \quad c''_1 = \frac{dc'_1}{dt}.$$

(¹) DEMARTRES, *Annales de l'École Normale,* 3ᵉ série, t. II, 1885, p. 135.

Les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a''}$, $\frac{\partial f}{\partial b''}$, $\cdots$ de la transformation infinitésimale $X'_i f$ prolongée au deuxième ordre sont les dérivées par rapport à $t$ des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a'}$, $\frac{\partial f}{\partial b'}$, $\cdots$ dans la transformation $X_i f$ prolongée au premier ordre.

Les dix transformations prolongées au deuxième ordre sont donc :

$$X'_1 f = X_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a_1},$$

$$X'_2 f = X_2 f = \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial b_1},$$

$$X'_3 f = X_3 f = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial c_1},$$

$$X'_4 f = X_4 f + a''_1 \frac{\partial f}{\partial b''_1} - b''_1 \frac{\partial f}{\partial a''_1} + a'' \frac{\partial f}{\partial b''} - b'' \frac{\partial f}{\partial a''},$$

$$X'_5 f = X_5 f + b''_1 \frac{\partial f}{\partial c''_1} - c''_1 \frac{\partial f}{\partial b''_1} + b'' \frac{\partial f}{\partial c''} - c'' \frac{\partial f}{\partial b''},$$

$$X'_6 f = X_6 f + c''_1 \frac{\partial f}{\partial a''_1} - a''_1 \frac{\partial f}{\partial c''_1} + c'' \frac{\partial f}{\partial a''} - a'' \frac{\partial f}{\partial c''},$$

$$X'_7 f = X_7 f + a'' \frac{\partial f}{\partial a''} + b'' \frac{\partial f}{\partial b''} + c'' \frac{\partial f}{\partial c''} + a''_1 \frac{\partial f}{\partial a''_1} + b''_1 \frac{\partial f}{\partial b''_1} + c''_1 \frac{\partial f}{\partial c''_1},$$

$$\begin{aligned} X'_8 f = X_8 f &+ 2(a'^2 - b'^2 - c'^2 + aa'' - bb'' - cc'')\frac{\partial f}{\partial a''} + 2(ab'' + 2a'b' + a''b)\frac{\partial f}{\partial b''} + 2(ca'' + 2c'a' + ac'')\frac{\partial f}{\partial c''} \\ &+ 2(a'^2_1 - b'^2_1 - c'^2_1 + a_1 a''_1 - b_1 b''_1 - c_1 c''_1)\frac{\partial f}{\partial a''_1} + 2(a_1 b''_1 + 2a'_1 b'_1 + a''_1 b_1)\frac{\partial f}{\partial b''_1} + 2(c_1 a''_1 + 2c'_1 a'_1 + a_1 c''_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_9 f = X_9 f &+ 2(b'^2 - c'^2 - a'^2 + bb'' - cc'' - aa'')\frac{\partial f}{\partial b''} + 2(bc'' + 2b'c' + b''c)\frac{\partial f}{\partial c''} + 2(ab'' + 2a'b' + ba'')\frac{\partial f}{\partial a''} \\ &+ 2(b'^2_1 - c'^2_1 - a'^2_1 + b_1 b''_1 - c_1 c''_1 - a_1 a''_1)\frac{\partial f}{\partial b''_1} + 2(b_1 c''_1 + 2b'_1 c'_1 + b''_1 c_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1} + 2(a_1 b''_1 + 2a'_1 b'_1 + b_1 a''_1)\frac{\partial f}{\partial a''_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'_{10} f = X_{10} f &+ 2(c'^2 - a'^2 - b'^2 + cc'' - aa'' - bb'')\frac{\partial f}{\partial c''} + 2(ca'' + 2c'a' + c''a)\frac{\partial f}{\partial a''} + 2(bc'' + 2b'c' + cb'')\frac{\partial f}{\partial b''} \\ &+ 2(c'^2_1 - a'^2_1 - b'^2_1 + c_1 c''_1 - a_1 a''_1 - b_1 b''_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1} + 2(c_1 a'' + 2c'_1 a'_1 + c''_1 a_1)\frac{\partial f}{\partial a''_1} + 2(b_1 c''_1 + 2b'_1 c'_1 + c_1 b''_1)\frac{\partial f}{\partial b''_1} \end{aligned}$$

Les invariants du groupe défini par ces dix transformations infinitésimales sont les intégrales du système d'équations $X'_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ ou du système équivalent obtenu en remplaçant $X'_8 f$,

$X'_9 f$, $X'_{10} f$ par les combinaisons

$$X'_{10}f-(a+a_1)X'_6f+(b+b_1)X'_5f-(c+c_1)X'_7f-(aa_1+bb_1-cc_1)X'_3f+(ca_1+ac_1)X'_1f+(cb_1+bc_1)X'_2f,$$

$$X'_8\,f-(b+b_1)X'_4f+(c+c_1)X'_6f-(a+a_1)X'_5f-(bb_1+cc_1-aa_1)X'_1f+(ab_1+ba_1)X'_2f+(ac_1+ca_1)X'_3f,$$

$$X'_9\,f-(c+c_1)X'_5f+(a+a_1)X'_4f-(b+b_1)X'_7f-(cc_1+aa_1-bb_1)X'_2f+(bc_1+cb_1)X'_3f+(ba_1+ab_1)X'_1f,$$

combinaisons indépendantes, qui ne renferment plus

$$\frac{\partial f}{\partial a},\quad \frac{\partial f}{\partial b},\quad \frac{\partial f}{\partial c},\quad \frac{\partial f}{\partial a_1},\quad \frac{\partial f}{\partial b_1},\quad \frac{\partial f}{\partial c_1}.$$

Le système des trois équations

$$X'_1 f=0,\qquad X'_2 f=0,\qquad X'_3 f=0$$

admet quinze intégrales distinctes :

$$a_1-a,\qquad b_1-b,\qquad c_1-c;$$
$$a',\quad b',\quad c';\qquad a'_1,\quad b'_1,\quad c'_1;\qquad a'',\quad b'',\quad c'';\qquad a''_1,\quad b''_1,\quad c''_1.$$

Désignons $a_1-a$, $b_1-b$, $c_1-c$ par les lettres A, B, C, et prenons les quinze quantités A, B, C, $a'$, $b'$, $\dots$, $c''_1$ comme nouvelles variables dans les équations $X'_4 f=0$, $\dots$, $X'_{10}f=0$; nous obtenons :

$$Y'_1 f=Y_1 f+a''_1\frac{\partial f}{\partial b''_1}-b''_1\frac{\partial f}{\partial a''_1}+a''\frac{\partial f}{\partial b''}-b''\frac{\partial f}{\partial a''}=0,$$

$$Y'_2 f=Y_2 f+b''_1\frac{\partial f}{\partial c''_1}-c''_1\frac{\partial f}{\partial b''_1}+b''\frac{\partial f}{\partial c''}-c''\frac{\partial f}{\partial b''}=0,$$

$$Y'_3 f=Y_3 f+c''_1\frac{\partial f}{\partial a''_1}-a''_1\frac{\partial f}{\partial c''_1}+c''\frac{\partial f}{\partial a''}-a''\frac{\partial f}{\partial c''}=0,$$

$$Y'_4 f=Y_4 f+a''_1\frac{\partial f}{\partial a''_1}+b''_1\frac{\partial f}{\partial b''_1}+c''_1\frac{\partial f}{\partial c''_1}+a''\frac{\partial f}{\partial a''}+b''\frac{\partial f}{\partial b''}+c''\frac{\partial f}{\partial c''}=0,$$

$$\begin{aligned}Y'_5 f=Y_5 f&+(\mathrm{A}a''_1-\mathrm{B}b''_1-\mathrm{C}c''_1+2a_1'^2-2b_1'^2-2c_1'^2)\frac{\partial f}{\partial a''_1}+(\mathrm{B}a''_1+\mathrm{A}b''_1+4a'_1b'_1)\frac{\partial f}{\partial b''_1}+(\mathrm{A}c''_1+\mathrm{C}a''_1+4a'_1c'_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1}\\&-(\mathrm{A}a''-\mathrm{B}b''-\mathrm{C}c''-2a'^2+2b'^2+2c'^2)\frac{\partial f}{\partial a''}-(\mathrm{B}a''+\mathrm{A}b''-4a'b')\frac{\partial f}{\partial b''}-(\mathrm{A}c''+\mathrm{C}a''-4a'c')\frac{\partial f}{\partial c''}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y'_6 f=Y_6 f&+(\mathrm{B}b''_1-\mathrm{C}c''_1-\mathrm{A}a''_1+2b_1'^2-2c_1'^2-2a_1'^2)\frac{\partial f}{\partial b''_1}+(\mathrm{C}b''_1+\mathrm{B}c''_1+4b'_1c'_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1}+(\mathrm{B}a''_1+\mathrm{A}b''_1+4b'_1a'_1)\frac{\partial f}{\partial a''_1}\\&-(\mathrm{B}b''-\mathrm{C}c''-\mathrm{A}a''-2b'^2+2c'^2+2a'^2)\frac{\partial f}{\partial b''}-(\mathrm{C}b''+\mathrm{B}c''-4b'c')\frac{\partial f}{\partial c''}-(\mathrm{B}a''+\mathrm{A}b''-4b'a')\frac{\partial f}{\partial a''}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y'_7 f=Y_7 f&+(\mathrm{C}c''_1-\mathrm{A}a''_1-\mathrm{B}b''_1+2c_1'^2-2a_1'^2-2b_1'^2)\frac{\partial f}{\partial c''_1}+(\mathrm{A}c''_1+\mathrm{C}a''_1+4c'_1a'_1)\frac{\partial f}{\partial a''_1}+(\mathrm{C}b''_1+\mathrm{B}c''_1+4c'_1b'_1)\frac{\partial f}{\partial b''_1}\\&-(\mathrm{C}c''-\mathrm{A}a''-\mathrm{B}b''-2c'^2+2a'^2+2b'^2)\frac{\partial f}{\partial c''}-(\mathrm{A}c''+\mathrm{C}a''-4c'a')\frac{\partial f}{\partial a''}-(\mathrm{C}b''+\mathrm{B}c''-4c'b')\frac{\partial f}{\partial b''}=0.\end{aligned}$$

Les intégrales distinctes de l'équation $Y'_1 f = 0$ s'obtiennent en intégrant le système des quatorze équations différentielles suivantes

$$\frac{dA}{-B} = \frac{dB}{A} = \frac{dC}{0} = \frac{da'}{-b'} = \frac{db'}{a'} = \frac{dc'}{0} = \frac{da'_1}{-b'_1} = \frac{db'_1}{a'_1} = \frac{dc'_1}{0}$$
$$= \frac{da''}{-b''} = \frac{db''}{a''} = \frac{dc''}{0} = \frac{da''_1}{-b''_1} = \frac{db''_1}{a''_1} = \frac{dc''_1}{0}$$

ou le système équivalent

$$\frac{dA}{-B} = \frac{dB}{A} = \frac{dC}{0}, \qquad \frac{a'\,dA + b'\,dB + c'\,dC}{Ab' - Ba'} = \frac{A\,da' + B\,db' + C\,dc'}{Ba' - Ab'},$$
$$\frac{da'}{-b'} = \frac{db'}{a'} = \frac{dc'}{0}, \qquad \frac{a'_1\,dA + b'_1\,dB + c'_1\,dC}{Ab'_1 - Ba'_1} = \frac{A\,da'_1 + B\,db'_1 + C\,dc'_1}{Ba'_1 - Ab'_1},$$
$$\frac{da'_1}{-b'_1} = \frac{db'_1}{a'_1} = \frac{dc'_1}{0}, \qquad \frac{a''\,dA + b''\,dB + c''\,dC}{Ab'' - Ba''} = \frac{A\,da'' + B\,db'' + C\,dc''}{Ba'' - Ab''},$$
$$\frac{da''}{-b''} = \frac{db''}{a''} = \frac{dc''}{0}, \qquad \frac{a''_1\,dA + b''_1\,dB + c''_1\,dC}{Ab''_1 - Ba''_1} = \frac{A\,da''_1 + B\,db''_1 + C\,dc''_1}{Ba''_1 - Ab''_1},$$
$$\frac{da''_1}{-b''_1} = \frac{db''_1}{a''_1} = \frac{dc''_1}{0}.$$

Ces équations admettent les quatorze intégrales distinctes

$$\begin{array}{lll}
\sigma = A^2 + B^2 + C^2, & C, & \sigma\lambda = a'^2 + b'^2 + c'^2, \\
\sigma\alpha = Aa' + Bb' + Cc', & c', & \sigma\mu = a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2, \\
\sigma\beta = Aa'_1 + Bb'_1 + Cc'_1, & c'_1, & \sigma\nu = a''^2 + b''^2 + c''^2, \\
\sigma\gamma = Aa'' + Bb'' + Cc'', & c'', & \sigma\rho = a_1''^2 + b_1''^2 + c_1''^2, \\
\sigma\delta = Aa''_1 + Bb''_1 + Cc''_1, & c''_1. &
\end{array}$$

Prenons ces quantités $\sigma$, $\alpha$, $\beta$, ... comme variables, les équations $Y'_2 f = 0$, $Y'_3 f = 0$ deviennent

$$B\frac{\partial f}{\partial C} + b'_1\frac{\partial f}{\partial c'_1} + b'\frac{\partial f}{\partial c'} + b''_1\frac{\partial f}{\partial c''_1} + b''\frac{\partial f}{\partial c''} = 0,$$
$$A\frac{\partial f}{\partial C} + a'_1\frac{\partial f}{\partial c'_1} + a'\frac{\partial f}{\partial c'} + a''_1\frac{\partial f}{\partial c''_1} + a''\frac{\partial f}{\partial c''} = 0.$$

Nous pouvons remplacer ces deux équations par le système équi valent :

$$(\mathrm{B}a'_1 - \mathrm{A}b'_1)\frac{\partial f}{\partial c'_1} + (\mathrm{B}a' - \mathrm{A}b')\frac{\partial f}{\partial c'} + (\mathrm{B}a''_1 - \mathrm{A}b''_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1} + (\mathrm{B}a'' - \mathrm{A}b'')\frac{\partial f}{\partial c''} = 0.$$

$$(\mathrm{B}a'_1 - \mathrm{A}b'_1)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{C}} + (a'_1 b' - a' b'_1)\frac{\partial f}{\partial c'} + (a'_1 b''_1 - a''_1 b'_1)\frac{\partial f}{\partial c''_1} + (a'_1 b'' - a'' b'_1)\frac{\partial f}{\partial c''} = 0.$$

Les coefficients sont des fonctions des nouvelles variables définies par les identités :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}a' - \mathrm{A}b' &= \sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\lambda - \alpha^2) - (c' - \mathrm{C}\alpha)^2}\sqrt{\sigma},\\
\mathrm{B}a'_1 - \mathrm{A}b'_1 &= \sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\mu - \beta^2) - (c'_1 - \mathrm{C}\beta)^2}\sqrt{\sigma},\\
\mathrm{B}a'' - \mathrm{A}b'' &= \sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\nu - \gamma^2) - (c'' - \mathrm{C}\gamma)^2}\sqrt{\sigma},\\
\mathrm{B}a''_1 - \mathrm{A}b''_1 &= \sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\rho - \delta^2) - (c''_1 - \mathrm{C}\delta)^2}\sqrt{\sigma},
\end{aligned}$$

$$(\sigma - \mathrm{C}^2)(a'_1 b' - a' b'_1) = (\sigma\alpha - \mathrm{C}c')(\mathrm{B}a'_1 - \mathrm{A}b'_1) - (\sigma\beta - \mathrm{C}c'_1)(\mathrm{B}a' - \mathrm{A}b'),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La première équation admet donc les trois intégrales distinctes

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Theta &= \arcsin\frac{c'_1 - \mathrm{C}\beta}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\mu - \beta^2)}} - \arcsin\frac{c' - \mathrm{C}\alpha}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\lambda - \alpha^2)}},\\
\Phi &= \arcsin\frac{c'_1 - \mathrm{C}\beta}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\mu - \beta^2)}} - \arcsin\frac{c'' - \mathrm{C}\gamma}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\nu - \gamma^2)}},\\
\Psi &= \arcsin\frac{c'_1 - \mathrm{C}\beta}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\mu - \beta^2)}} - \arcsin\frac{c''_1 - \mathrm{C}\delta}{\sqrt{(\sigma - \mathrm{C}^2)(\rho - \delta^2)}}.
\end{aligned}\right.$$

Or, nous avons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\Theta &= \frac{a' a'_1 + b' b'_1 + c' c'_1 - \sigma\alpha\beta}{\sqrt{\sigma^2(\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2)}},\\
\cos\Phi &= \frac{a'' a'_1 + b'' b'_1 + c'' c'_1 - \sigma\beta\gamma}{\sqrt{\sigma^2(\mu - \beta^2)(\nu - \gamma^2)}},\\
\cos\Psi &= \frac{a''_1 a'_1 + b''_1 b'_1 + c''_1 c'_1 - \sigma\beta\delta}{\sqrt{\sigma^2(\mu - \beta^2)(\rho - \delta^2)}}.
\end{aligned}\right.$$

Les quantités

$$\sigma,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \rho,$$

$$\begin{aligned}
\sigma\theta &= a' a'_1 + b' b'_1 + c' c'_1,\\
\sigma\varphi &= a'' a'_1 + b'' b'_1 + c'' c'_1,\\
\sigma\psi &= a''_1 a'_1 + b''_1 b'_1 + c''_1 c'_1
\end{aligned}$$

sont donc douze intégrales distinctes des équations $\mathrm{Y}'_1 f = 0$, $\mathrm{Y}'_2 f = 0$;

on reconnaît facilement qu'elles vérifient aussi $Y'_3 f = 0$; ce sont les douze intégrales du système des trois équations

$$Y'_1 f = 0, \qquad Y'_2 f = 0, \qquad Y'_3 f = 0.$$

Les trois formes

$$\begin{aligned} \sigma l &= a' a'' + b' b'' + c' c'', \\ \sigma m &= a' a''_1 + b' b''_1 + c' c''_1, \\ \sigma n &= a'' a''_1 + b'' b''_1 + c'' c''_1 \end{aligned}$$

sont aussi des intégrales du même système.

Calculons $l$, $m$, $n$ en fonction des douze intégrales distinctes précédemment trouvées. Les résultats nous serviront dans la suite. Considérons les angles

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \Phi - \Theta, \\ \mathrm{M} &= \Psi - \Theta, \\ \mathrm{N} &= \Phi - \Psi. \end{aligned}$$

Les formules (1) donnent

$$\cos \mathrm{L} = \frac{l - \alpha\gamma}{\sqrt{(\lambda - \alpha^2)(\nu - \gamma^2)}},$$

et les formules (2)

$$\cos \mathrm{L} = \frac{(\theta - \alpha\beta)(\varphi - \beta\gamma) + \sqrt{(\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2) - (\theta - \alpha\beta)^2}\sqrt{(\mu - \beta^2)(\nu - \gamma^2) - (\varphi - \beta\gamma)^2}}{(\mu - \beta^2)\sqrt{(\lambda - \alpha^2)(\nu - \gamma^2)}};$$

ces deux valeurs de $\cos \mathrm{L}$ nous permettent de calculer $l$; nous obtenons de la même manière $m$, $n$ :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} l &= \alpha\gamma + \frac{(\theta - \alpha\beta)(\varphi - \beta\gamma) + \sqrt{(\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2) - (\theta - \alpha\beta)^2}\sqrt{(\mu - \beta)^2(\nu - \gamma^2) - (\varphi - \beta\gamma)^2}}{\mu - \beta^2}, \\ m &= \alpha\delta + \frac{(\psi - \beta\delta)(\theta - \alpha\beta) + \sqrt{(\mu - \beta^2)(\rho - \delta^2) - (\psi - \beta\delta)^2}\sqrt{(\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2) - (\theta - \alpha\beta)^2}}{\mu - \beta^2}, \\ n &= \gamma\delta + \frac{(\varphi - \beta\gamma)(\psi - \beta\delta) + \sqrt{(\mu - \beta^2)(\nu - \gamma^2) - (\varphi - \beta\gamma)^2}\sqrt{(\mu - \beta^2)(\rho - \delta^2) - (\psi - \beta\delta)^2}}{\mu - \beta^2}. \end{aligned} \right.$$

L'équation $Y'_4 f = 0$ montre que les intégrales du système $Y'_i f = 0$, doivent être homogènes et de degré zéro. Nous sommes donc amenés à prendre comme nouvelles variables dans les équations

$$Y'_5 f = 0, \qquad Y'_6 f = 0, \qquad Y'_7 f = 0$$

les quantités

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu,\quad \rho,\quad \theta,\quad \varphi,\quad \psi,$$

ou des fonctions de ces quantités :

$$\Delta^2 = 4\sqrt{\lambda\mu} \quad \text{au lieu de } \lambda, \qquad \Delta_1^2 = 4(2\alpha\beta - \theta) \quad \text{au lieu de } \theta.$$

$$\Delta' = \frac{8}{\Delta^3}(\lambda\psi - 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\lambda\mu + \mu l) \quad \text{au lieu de } \nu,$$

$$\Delta'_1 = \frac{-2}{\Delta_1}(2\beta\lambda + \beta\Delta_1^2 - 2\alpha\delta - 2\alpha\mu - \alpha\Delta_1^2 - 2\beta\gamma + m + \varphi) \quad \text{au lieu de } \rho,$$

car les équations (3) montrent que $\Delta'$ et $\Delta'_1$ dépendent respectivement de $\nu$ et $\rho$.

Après ce changement de variables, les trois équations s'écrivent

$$\begin{aligned}
&a'\frac{\partial f}{\partial\alpha} - a'_1\frac{\partial f}{\partial\beta} - (4a'\alpha - a'' - 2A\lambda)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (4a'_1\beta + a''_1 - 2A\mu)\frac{\partial f}{\partial\delta} \\
&\quad - 2A\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} - 2(\gamma a'_1 - \beta a'' + 2a'\theta - \lambda a'_1)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(A\psi + a'_1\mu)\frac{\partial f}{\partial\psi} = 0, \\
&b'\frac{\partial f}{\partial\alpha} - b'_1\frac{\partial f}{\partial\beta} - (4b'\alpha - b'' - 2B\lambda)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (4b'_1\beta + b''_1 - 2B\mu)\frac{\partial f}{\partial\delta} \\
&\quad - 2B\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} - 2(\gamma b'_1 - \beta b'' + 2b'\theta - \lambda b'_1)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(B\psi + b'_1\mu)\frac{\partial f}{\partial\psi} = 0, \\
&c'\frac{\partial f}{\partial\alpha} - c'_1\frac{\partial f}{\partial\beta} - (4c'\alpha - c'' - 2C\lambda)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (4c'_1\beta + c''_1 - 2C\mu)\frac{\partial f}{\partial\delta} \\
&\quad - 2C\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} - 2(\gamma c'_1 - \beta c'' + 2c'\theta - \lambda c'_1)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(C\psi + c'_1\mu)\frac{\partial f}{\partial\psi} = 0.
\end{aligned}$$

Additionnons ces équations après les avoir multipliées respectivement par A, B, C, ou $a'$, $b'$, $c'$, ou $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$. Le déterminant de ces neuf quantités étant en général différent de zéro, nous obtenons trois équations distinctes :

$$Xf = \alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \beta\frac{\partial f}{\partial\beta} - (4\alpha^2 - \gamma - 2\lambda)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (4\beta^2 + \delta - 2\mu)\frac{\partial f}{\partial\delta}$$
$$- 2(2\alpha\theta - \lambda\beta)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(\psi + \mu\beta)\frac{\partial f}{\partial\psi} - 2\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} = 0,$$

$$Yf = \theta\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \mu\frac{\partial f}{\partial\beta} - (4\alpha\theta - \varphi - 2\beta\lambda)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (\psi + 2\beta\mu)\frac{\partial f}{\partial\delta}$$
$$- 2\left(2\theta^2 + \gamma\mu - \beta\varphi - \frac{\Delta^4}{16}\right)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(\beta\psi + \mu^2)\frac{\partial f}{\partial\psi} - 2\beta\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} = 0,$$

$$Zf = \lambda\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \theta\frac{\partial f}{\partial\beta} - (2\alpha\lambda - l)\frac{\partial f}{\partial\gamma} - (4\beta\theta - 2\alpha\mu + m)\frac{\partial f}{\partial\delta}$$
$$- 2(\gamma\theta - \beta l + \lambda\theta)\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2(\alpha\psi + \mu\theta)\frac{\partial f}{\partial\psi} - 2\alpha\mu\frac{\partial f}{\partial\mu} = 0$$
$$\left(\lambda = \frac{\Delta^4}{16\mu}\right).$$

Les quantités $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta'$, $\Delta'_1$ sont des intégrales du système d'équations

$$Y'_5 f = 0, \qquad Y'_6 f = 0, \qquad Y'_7 f = 0;$$

les intégrales de l'équation $Xf = 0$ sont avec $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta'$, $\Delta'_1$, les quantités

$$x = \alpha\beta,$$
$$y = \frac{\mu}{\beta^2},$$
$$z = \frac{2\mu + \delta - 4\beta^2}{\sqrt{\mu}},$$
$$g = \frac{\varphi + 2(2\alpha\theta - \lambda\beta)}{2\beta(2\alpha\theta - \lambda\varphi)},$$
$$h = \sqrt{\mu}\,(4\alpha^2 + \gamma - 2\lambda),$$
$$k = \frac{\psi - 2\beta\mu}{\beta^2}.$$

Les intégrales $\Delta'$, $\Delta'_1$ peuvent se mettre sous la forme

$$\Delta' = \frac{\Delta}{2}\left(\frac{k}{y} + \frac{l}{\lambda} + 2\alpha\right),$$
$$\Delta'_1 = \frac{2}{\Delta_1}\left[\frac{2h}{\sqrt{y}} - \left(8x^2 - \Delta_1^2 x - \frac{\Delta^4}{8y}\right)g - (m + \beta\Delta_1^2 - 2\alpha\delta - 2\alpha\mu)\right].$$

Nous sommes conduits à prendre comme nouvelles variables, dans les équations $Yf = 0$, $Zf = 0$, les quantités

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \Delta_1, \quad \Delta_1', \quad x, \quad y, \quad z, \quad h$$

et

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{2h}{\sqrt{y}} - \left(8x^2 - \Delta_1^2 x - \frac{\Delta^4}{8y}\right) g \qquad \text{au lieu de } g,$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{k}{y} \qquad \text{au lieu de } k.$$

Les deux équations deviennent après ce changement de variables

$$Y'f = \left(xy + \frac{\Delta_1^2}{4} - 2x\right)\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ 2y(1-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\mathfrak{z}_2\sqrt{y} - z)\frac{\partial f}{\partial z} + (\mathfrak{z}_1\sqrt{y} - h)\frac{\partial f}{\partial h} = 0,$$

$$Z'f = \left(2x^2y - xy\frac{\Delta_1^2}{4} - \frac{\Delta^4}{16}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - 2y^2\left(x - \frac{\Delta_1^2}{4}\right)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+ \left(xyz - \frac{\Delta_1\Delta_1'}{2}\sqrt{y} + \mathfrak{z}_1\sqrt{y}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(hxy + \frac{\Delta^4\sqrt{y}}{16}\mathfrak{z}_2 - \frac{\Delta^3\Delta'}{8}\sqrt{y}\right)\frac{\partial f}{\partial h} = 0.$$

Nous voyons que $\mathfrak{z}_1$ et $\mathfrak{z}_2$ sont deux intégrales du système $Y_i f = 0$.
Les intégrales de $Y'f = 0$ sont :

$$X = \frac{4xy - \Delta_1^2}{\sqrt{y - 1}},$$

$$Y = 4\,\frac{h\sqrt{y} - \mathfrak{z}_1}{\sqrt{y - 1}},$$

$$Z = 4\,\frac{z\sqrt{y} - \mathfrak{z}_2}{\sqrt{y - 1}}.$$

Si nous désignons par $C_1$, $C_2$, $C_3$ les quantités

$$C_1 = \Delta_1^4 - \Delta^4,$$
$$C_2 = \Delta^4\mathfrak{z}_2 + 4\Delta_1^2\mathfrak{z}_1 - 2\Delta^3\Delta',$$
$$C_3 = 4(\Delta_1^2\mathfrak{z}_2 + 4\mathfrak{z}_1 - 2\Delta_1\Delta_1'),$$

et si nous prenons X, Y, Z comme nouvelles variables, l'équation

$Z'f = 0$ devient

$$(X^2 + C_1)\frac{\partial f}{\partial X} + (XY + C_2)\frac{\partial f}{\partial Y} + (XZ + C_3)\frac{\partial f}{\partial Z} = 0,$$

équation qui admet deux intégrales distinctes

$$\mathfrak{J}_3 = \frac{C_1 Z - C_3 X}{C_1\sqrt{X^2 + C_1}}, \qquad \mathfrak{J}_4 = \frac{C_1 Y - C_2 X}{C_1\sqrt{X' + C_1}}.$$

Nous avons ainsi les huit intégrales distinctes du système $Y_i f = 0$ :

$$\Delta, \quad \Delta_1, \quad \Delta', \quad \Delta'_1, \quad \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \mathfrak{J}_3, \quad \mathfrak{J}_4.$$

Leurs expressions en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... sont données par les formules

$$\Delta^4 = 16\lambda\mu,$$
$$\Delta_1^2 = 4(2\alpha\beta - \theta),$$
$$\Delta' = \frac{8}{\Delta_3}(l\mu + \psi\lambda - 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\lambda\mu),$$
$$\Delta'_1 = \frac{2}{\Delta_1}(\alpha\Delta_1^2 - \beta\Delta_1^2 - 2\beta\lambda + 2\alpha\delta + 2\alpha\mu + 2\beta\gamma - \varphi - m),$$
$$\mathfrak{J}_1 = 2\beta\gamma - 2\beta\lambda + \alpha\Delta_1^2 - \varphi,$$
$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\psi}{\mu} - 2\beta,$$
$$\mathfrak{J}_3 = \frac{16\left\{\begin{array}{l}(2\mu + \delta)[(\theta - \alpha\beta)^2 - (\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2)] \\ \quad + \lambda\beta\psi - m\alpha\mu + \delta(\mu\alpha^2 - \lambda\beta^2) + (\theta - 2\alpha\beta)(\alpha\psi - \beta m)\end{array}\right\}}{\sqrt{\mu}(\Delta^4 - \Delta_1^4)\sqrt{-(\mu - \beta')(\lambda - \alpha^2) + (\theta - \alpha\beta)^2}},$$
$$\mathfrak{J}_4 = \frac{16\sqrt{\mu}\left\{\begin{array}{l}(-2\lambda + \gamma)[(\theta - \alpha\beta)^2 - (\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2)] \\ \quad + \mu\alpha l - \lambda\beta\varphi + \gamma(\lambda\beta^2 - \mu\alpha^2) + (\theta - 2\alpha\beta)(\beta l - \alpha\varphi)\end{array}\right\}}{(\Delta^4 - \Delta_1^4)\sqrt{-(\mu - \beta^2)(\lambda - \alpha^2) + (\theta - \alpha\beta)^2}}.$$

Ces huit intégrales sont les invariants des surfaces cerclées par rapport aux transformations conformes; ces invariants sont relatifs, ils changent quand on prend un nouveau paramètre. Soit un paramètre $\tau$ lié à $t$ par l'équation

$$t = g(\tau),$$

nous avons

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{da}{dt}g', \qquad \frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{d^2a}{dt^2}g'^2 + \frac{da}{dt}g'';$$

et si nous plaçons un trait au-dessus d'une quantité pour indiquer que le paramètre est $\tau$, nous avons

$$\overline{\Delta}^2 = g'^2\Delta^2, \qquad \overline{\Delta}_1^2 = g'^2\Delta_1^2,$$
$$\overline{\Delta}' = g'^2\Delta' + g''\Delta, \qquad \overline{\Delta}_1' = g'^2\Delta_1' + g''\Delta_1,$$
$$\overline{\mathfrak{I}}_1 = g'^3\mathfrak{I}_1 + g'g''\frac{\Delta_1^2}{4}, \qquad \overline{\mathfrak{I}}_2 = g'\mathfrak{I}_2 + \frac{g''}{g'},$$
$$\overline{\mathfrak{I}}_3 = \frac{\mathfrak{I}_3}{g'}. \qquad \overline{\mathfrak{I}}_4 = g'\mathfrak{I}_4.$$

Nous pouvons former, avec ces quantités, six combinaisons distinctes qui ne renferment plus $g'$, $g''$ ; ce sont les six invariants absolus

$$I_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$
$$I_1 = \frac{I_0'}{\Delta_1} \qquad \left(I_0' = \frac{dI_0}{dt}\right),$$
$$I_2 = \frac{\mathfrak{I}_2 - \frac{\Delta'}{\Delta}}{i\Delta_1} = \frac{1}{\Delta_1}\left[\frac{1}{2i}\left(\frac{\psi}{\mu} - \frac{l}{\lambda}\right) - \frac{\alpha+\beta}{i}\right] = \frac{1}{\Delta_1}\left[\frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{\alpha+\beta}{i}\right],$$
$$I_3 = \frac{2\mathfrak{I}_1 - \frac{\Delta_1\Delta_1'}{2}}{i\Delta_1^3},$$
$$I_4 = \frac{\mathfrak{I}_4}{i\Delta_1} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$
$$I_5 = \frac{\Delta^2}{4i\Delta_1}\mathfrak{I}_3$$

En résumé, nous avons formé un système de dix opérateurs $X_i'f\,(i = 1, 2, \ldots, 10)$ qui permet de reconnaître un invariant du second ordre des surfaces cerclées : Une fonction de $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ et de leurs dérivées premières et secondes définit un invariant si elle vérifie les équations $X_i'f = 0$, et tout invariant absolu du second ordre peut être obtenu avec les six invariants absolus fondamentaux $I_0$, $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$.

Calculons les expressions de ces invariants en fonction des variables $u$, $v$, $w$, $p$, $r$, R.

En différentiant les formules (1) et en tenant compte des relations connues entre les cosinus directeurs des axes mobiles, leurs dérivées et les composantes $p$, $r$ de la rotation, nous obtenons les expressions de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\psi$, $l$, $m$ en fonction de $u$, $v$, $w$, $p$, $r$, $R$; et si nous remplaçons $\alpha$, $\beta$, ... par les expressions trouvées, dans $I_0$, $I_1$, $I_2$, ..., nous avons

$$
(\mathrm{IV})\quad \left\{
\begin{aligned}
& I_0^4 = \frac{(w^2 - p^2R^2 - u^2 - v^2 + R'^2)^2}{(w^2 - p^2R^2 + u^2 + v^2 - R'^2)^2 + 4(wR' - vpR)^2}, \\
& I_1 = \frac{I_0'}{\Delta_1} = \frac{dI_0}{ds}, \\
& I_2 = \frac{1}{\Delta_1}\left\{ \frac{1}{2}\, \frac{\left[\dfrac{2(vpR - wR')}{u^2 + v^2 - R'^2 + w^2 - p^2R^2}\right]'}{1 + \left[\dfrac{2(vpR - wR')}{u^2 + v^2 - R'^2 + w^2 - p^2R^2}\right]^2} - \frac{w}{R} \right\} \qquad \left(\Delta_1 = \frac{ds}{dt}\right), \\
& I_3 = \frac{1}{2R^3\Delta_1^3}\left\{ w^2\left[w + \left(\frac{RR'}{w}\right)'\right] - p^2R^2\left[w + \left(\frac{v}{p}\right)'\right]\right. \\
& \qquad\qquad \left. - u(3uw + 2pR^2r) - 3v(wv - pRR') \right\}, \\
& I_4 = \frac{-2W_1pu}{R^4\Delta_1(\Delta_1^4 - \Delta^4)}\left\{ u\left[u + \left(\frac{wv - pRR'}{pu}\right)' + r\frac{w}{p}\right]\right. \\
& \qquad\qquad \left. + (v - pRi)\left[v - \left(\frac{w}{p}\right)' + r\frac{wv - pRR'}{pu}\right]\right\}, \\
& \text{en posant} \\
& \qquad W_1 = \sqrt{a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2} \\
& \qquad\quad = \sqrt{u^2 + v^2 - R'^2 + w^2 - p^2R^2 - 2i(wR' - vpR)}, \\
& I_5 = \frac{2Wpu}{R^4\Delta_1(\Delta_1^4 - \Delta^4)}\left\{ u\left[u + \left(\frac{wv - pRR'}{pu}\right)' + r\frac{w}{p}\right]\right. \\
& \qquad\qquad \left. + (v + pRi)\left[v - \left(\frac{w}{p}\right)' + r\frac{wv - pRR'}{pu}\right]\right\}, \\
& \qquad W = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} \\
& \qquad\quad = \sqrt{u^2 + v^2 - R'^2 + w^2 - p^2R^2 + 2i(wR' - vpR)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il nous sera facile d'interpréter géométriquement les quantités entre crochets et les invariants eux-mêmes. Nous connaissons déjà la signification géométrique de l'invariant absolu du premier ordre $I_0$.

## CHAPITRE VIII.

### INTERPRETATION GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS DU SECOND ORDRE $I_1$, $I_2$.

1. Calculons l'angle $d\psi$ d'une *sphère fondamentale* avec la sphère fondamentale infiniment voisine; désignons par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les coordonnées du centre et par $\rho$ le rayon; nous avons

$$(1)\qquad \frac{d\psi^2}{dt^2}=\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2-\rho'^2}{\rho^2}.$$

Les quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\rho$ sont données (Chap. VI) par les formules

$$(2)\qquad \xi=\frac{a+\Lambda a_1}{1+\Lambda},\qquad \eta=\frac{b+\Lambda b_1}{1+\Lambda},\qquad \zeta=\frac{c+\Lambda c_1}{1+\Lambda},\qquad \rho^2=\frac{4R^2\Lambda}{(1+\Lambda)^2}.$$

Nous savons que $\Lambda$ est racine de l'équation

$$(3)\qquad \mu\Lambda^2-\frac{\Delta_1^2}{2}\Lambda+\lambda=0.$$

En différentiant les équations (2) et tenant compte de (3), nous obtenons comme valeur de $\frac{d\psi^2}{dt^2}$

$$\frac{d\psi^2}{dt^2}=-\left(\frac{1}{2}\frac{\Lambda'}{\Lambda}+\alpha+\beta\right)^2$$

ou

$$\frac{d\psi^2}{dt^2}=\left[\frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\left(\log\frac{1}{\Lambda}\right)-\frac{\alpha+\beta}{i}\right]^2.$$

La relation $\cos\widehat{FF_1}=\frac{\Delta_1^2}{\Delta^2}$ qui donne l'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères fondamentales permet d'exprimer les racines de l'équation (2) en fonction de cet angle

$$\Lambda=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,e^{i\widehat{FF_1}},\qquad \Lambda_1=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,e^{-i\widehat{FF_1}};$$

par suite

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}-\frac{\alpha+\beta}{i}-\frac{1}{2}\frac{d\widehat{FF_1}}{dt}$$

et l'angle de la deuxième sphère fondamentale avec la sphère infiniment voisine sera donné par l'équation

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{\alpha+\beta}{i} + \frac{1}{2}\frac{d\widehat{FF_1}}{dt}.$$

Nous trouvons dans le deuxième membre l'invariant

$$\Delta_1 I_2 = \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{\alpha+\beta}{i};$$

$\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\psi_1}{dt}$ peuvent donc s'écrire

$$\frac{d\psi}{dt} = \Delta_1 I_2 - \frac{1}{2}\frac{d\widehat{FF_1}}{dt},$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \Delta_1 I_2 + \frac{1}{2}\frac{d\widehat{FF_1}}{dt}.$$

Ajoutons membre à membre, puis retranchons, nous obtenons après avoir remplacé $\Delta_1$ par $\frac{ds}{dt}$, $ds$ désignant l'angle de la génératrice avec la génératrice infiniment voisine,

$$\frac{d\psi_1}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = 2 I_2,$$

(4)
$$\frac{d\psi_1}{ds} - \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\widehat{FF_1}}{ds}.$$

Différentions l'équation $I_0^2 = \cos\widehat{FF_1}$, nous avons

$$I_1 = \frac{dI_0}{ds} = \pm\frac{\sqrt{1-I_0^4}}{2 I_0}\frac{d\widehat{FF_1}}{ds},$$

et la formule (4) peut s'écrire

$$I_1 = \pm\frac{\sqrt{1-I_0^4}}{2 I_0}\left(\frac{d\psi}{ds} - \frac{d\psi_1}{ds}\right).$$

Les expressions de $\frac{d\psi}{ds}$, $\frac{d\psi_1}{ds}$ en fonction de $I_0\, I_1\, I_2$ sont

$$\frac{d\psi}{ds} = I_2 \pm \frac{I_0 I_1}{\sqrt{1-I_0^4}},$$

$$\frac{d\psi_1}{ds} = I_2 \mp \frac{I_0 I_1}{\sqrt{1-I_0^4}}.$$

2. On obtient encore un invariant du second ordre qui dépend des invariants fondamentaux $I_0, I_1, I_2$ en formant $\cos\widehat{F'F'_1}$, $F', F'_1$ désignent les sphères autres que les sphères fondamentales, qui sont tangentes à la surface aux *points de courbure*, et dont le centre est un centre de courbure principale.

Soient $M$, $M_1$ les *points de courbure;* $C$ le centre du cercle, $\varphi = \widehat{CX, CM}$, $\varphi_1 = \widehat{CX, CM_1}$; $\rho'$ $\rho'_1$ les rayons des sphères $F', F'_1$; $V$ l'angle du plan tangent à la surface avec le plan du cercle. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ du centre de la sphère $F'$ sont

$$x = R\rho'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R}\right)\cos\varphi,$$

$$y = R\rho'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R}\right)\sin\varphi,$$

$$z = \rho'\cos V.$$

Les coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ du centre de la sphère $F'_1$ s'obtiennent en remplaçant dans ces formules $\varphi$ par $\varphi_1$, $\rho'$ par $\rho'_1$; et l'angle $\widehat{F'F'_1}$ est défini par l'équation

$$\cos\widehat{F'F'_1} = \frac{\rho'^2 + \rho_1'^2 - \Sigma(x - x_1)^2}{2\rho'\rho'_1}.$$

Si nous remplaçons $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ par leurs valeurs en fonction de $\varphi$, $\varphi_1$, nous avons

$$(5)\quad \cos\widehat{F'F'_1} = \cos(V - V_1) - 2R^2\sin^2\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R}\right)\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{\sin V_1}{R}\right).$$

Calculons les quantités $\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R}$ et $\frac{1}{\rho'_1} - \frac{\sin V_1}{R}$.

La somme des courbures en un point quelconque de la génératrice défini par l'angle $\varphi$ du rayon avec la caractéristique est égale à (1)

$$\frac{1}{RH}\left(pR\sin\varphi + R\frac{\partial V}{\partial t} + Q - N\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right).$$

(1) DEMARTRES, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885, p. 131.

Les lettres M, N, Q, H désignent les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} M &= u\cos\varphi + v\sin\varphi + R', \\ N &= rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi, \\ Q &= w + pR\sin\varphi, \\ H^2 &= M^2 + Q^2. \end{aligned}$$

Or, aux *points de courbure*, on a $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, si H est différent de zéro. En effet, soient

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= uX + (v - pRi)Y + R(R' - wi) = 0, \\ f_1(X, Y) &= uX + (v + pRi)Y + R(R' + wi) = 0 \end{aligned}$$

les équations des cordes de contact des sphères focales (Chap. VI, nos 1, 6). Une sphère quelconque

$$\Sigma(x - a)^2 + \Lambda\Sigma(x - a_1)^2 = 0,$$

passant par le cercle, est tangente à la surface aux points du cercle situés sur la droite

$$f(X, Y) + \Lambda f_1(X, Y) = 0.$$

Si nous remplaçons Λ par la valeur tirée de cette équation dans la formule qui donne l'angle de la sphère avec le plan de la génératrice (Chap. VI)

$$\tang V = i\frac{\Lambda + 1}{\Lambda - 1},$$

nous obtenons

$$\tang V = \frac{Q}{M}.$$

Différentions par rapport à φ, nous avons

$$H^2\frac{\partial V}{\partial \varphi} = (pRR' - wv)\cos\varphi + uw\sin\varphi + pRu.$$

Or l'équation

$$(pRR' - wv)X + uwY + pR^2u = 0$$

définit la polaire du point G, commun aux cordes de contact, ce point ayant pour coordonnées

$$X = \frac{wv - pRR'}{pu}, \qquad Y = -\frac{w}{p},$$

et nous savons d'autre part que les *points de courbure* sont situés sur cette polaire.

$\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ étant nulle, la somme des courbures s'écrit

$$\frac{1}{RH}\left(p R \sin\varphi + R\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \frac{Q}{RH}.$$

La quantité $\frac{Q}{RH} = \frac{\sin V}{R}$ est l'une des courbures principales au point M (Chap. VI); la deuxième courbure est donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{RH}\left(p R \sin\varphi + R\frac{\partial V}{\partial t}\right);$$

par suite,

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R} = \frac{1}{\rho'} - \frac{Q}{RH} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{w}{R}\right). \tag{6}$$

$\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ étant nulle, nous avons

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\left(\log\frac{1}{\Lambda}\right)$$

car V est défini par l'équation

$$\operatorname{tang} V = i\frac{\Lambda + 1}{\Lambda - 1};$$

et, d'après les formules (II) du Chapitre IV,

$$\frac{w}{R} = \frac{\alpha + \beta}{i}.$$

Ainsi aux *points de courbure*, c'est-à-dire avec la condition $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{w}{R} = \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\frac{1}{\Lambda} - \frac{\alpha + \beta}{i}$$

et, d'après les résultats obtenus au paragraphe précédent,

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{w}{R} = \frac{d\psi}{dt}, \tag{7}$$

$d\psi$ désignant l'angle de la sphère fondamentale avec la sphère infiniment voisine.

L'équation (6) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R} = \frac{1}{H}\frac{d\psi}{dt};$$

au deuxième *point de courbure*, nous aurons

$$\frac{1}{\rho'_1} - \frac{\sin V_1}{R} = \frac{1}{H_1}\frac{d\psi_1}{dt}.$$

La quantité $H_1$ est ce que devient $H$ quand on remplace l'angle $\varphi$ par la valeur $\varphi_1$ relative au deuxième point de courbure.

Calculons $\sin^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$; les angles $\varphi$ et $\varphi_1$ étant racines de l'équation,

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

nous obtenons

$$\sin^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2} = \pm\frac{HH_1}{R^2\Delta^2}.$$

Si nous remplaçons $\sin^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$, $\frac{1}{\rho'} - \frac{\sin V}{R}$, $\frac{1}{\rho'_1} - \frac{\sin V_1}{R}$ par les valeurs que nous venons d'obtenir, dans la formule (5), nous avons,

$$\cos\widehat{F'F'_1} = \cos(V - V_1) \pm \frac{2}{\Delta^2}\frac{d\psi}{dt}\frac{d\psi_1}{dt},$$

$V - V_1$ est égal à l'angle $\widehat{FF_1}$ des sphères fondamentales, nous pouvons donc remplacer $\cos(V - V_1)$ par $\cos\widehat{FF_1}$ et, d'autre part, $\Delta^2$ par $\frac{\Delta_1^2}{\cos\widehat{FF_1}}$ ou $\frac{1}{\cos\widehat{FF_1}}\cdot\frac{ds^2}{dt^2}$; la formule devient

$$\cos\widehat{F'F'_1} = \cos\widehat{FF_1}\left(1 \pm 2\frac{d\psi}{ds}\frac{d\psi_1}{ds}\right).$$

3. Considérons la *sphère harmonique* (¹) $\mathfrak{K}$ en un *point de courbure* M; elle est tangente à la surface en M, et l'inverse de son rayon est la demi somme des courbures $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\sin V}{R}\right)$. L'angle de la sphère harmo-

(¹) THYBAUT, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXVIII, 1899, p. 1274.

nique $\mathcal{H}$ et de la sphère harmonique $\mathcal{H}_1$ au deuxième *point de courbure* est donné par la formule (5)

$$\cos(\widehat{\mathcal{H}, \mathcal{H}_1}) = \cos\widehat{FF_1} - 2R^2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{\sin V}{R}\right)-\frac{\sin V}{R}\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho'_1}+\frac{\sin V_1}{R}\right)-\frac{\sin V_1}{R}\right]$$

ou

$$\cos\left(\widehat{\mathcal{H}, \mathcal{H}_1}\right) = \cos\widehat{FF_1} + \frac{1}{4}\left[\cos\widehat{F'F_1} - \cos\widehat{FF_1}\right].$$

4. D'après les formules (II) du Chapitre IV, les vitesses des foyers sont

$$\sqrt{\sigma\lambda} = \sqrt{u^2+v^2-R'^2+w^2-p^2R^2+2i(wR'-vpR)},$$
$$\sqrt{\sigma\mu} = \sqrt{u^2+v^2-R'^2+w^2-p^2R^2-2i(wR'-vpR)}.$$

Le module de ces deux quantités imaginaires conjuguées est $R\Delta$, car on a trouvé (Chap. IV)

$$R^4\Delta^4 = (u^2+v^2-R'^2+w^2-p^2R^2)^2+4(wR'-vpR)^2.$$

Les arguments $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ vérifient les relations

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-2i\varepsilon}, \qquad \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

et, d'après les résultats du Chapitre VII,

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\alpha+\beta}{i}\right).$$

5. Dans l'hypothèse $\widehat{FF_1} = 0$ les sphères fondamentales sont confondues, la valeur correspondante de $\Lambda$ est $\sqrt{\frac{l}{\mu}}$; l'angle V de la sphère fondamentale avec le plan du cercle vérifie les relations

$$\tang V = i\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}-1}, \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2i}\frac{d}{dt}\log\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}};$$

par suite,

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{\alpha+\beta}{i}\right).$$

## CHAPITRE IX.

### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS $I_3$, $I_4$, $I_5$.

1. Le point G commun aux cordes de contact avec la surface, des sphères bitangentes, appartenant à la caractéristique et au plan radical des sphères décrites sur deux génératrices infiniment voisines, est le centre d'une sphère coupant orthogonalement ces deux génératrices (¹). Calculons l'angle $d\chi$ de cette sphère avec la sphère infiniment voisine.

Les coordonnées du point G sont

$$X = \frac{wv - pRR'}{pu}, \qquad Y = -\frac{w}{p}, \qquad Z = 0.$$

Les projections sur les axes mobiles du déplacement infiniment petit du point G sont

$$\begin{aligned}
\delta X &= u\,dt - r\,Y\,dt + dX,\\
\delta Y &= v\,dt + r\,X\,dt + dY,\\
\delta Z &= 0.
\end{aligned}$$

Remplaçons X, Y par leurs valeurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X}{dt} &= u + \left(\frac{wv - pRR'}{pu}\right)' + r\frac{w}{p},\\
\frac{\delta Y}{dt} &= v - \left(\frac{w}{p}\right)' + r\,\frac{wv - pRR'}{pu},\\
\frac{\delta Z}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

Soient $\varphi$, $\varphi_1$ les projections de la vitesse du point G sur les rayons

(¹) DEMARTRES, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. II, 1885, p. 148.

du cercle perpendiculaires aux cordes de contact des sphères focales (Chap. VI, n° 6)

$$uX + (v - pRi)Y + R(R' - wi) = 0,$$
$$uX + (v + pRi)Y + R(R' + wi) = 0;$$

ces projections $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1$ sont données par les équations

$$\mathfrak{V} = \frac{u\dfrac{\partial X}{dt} + (v - pRi)\dfrac{\partial Y}{dt}}{\sqrt{u^2 + (v - pRi)^2}},$$
$$\mathfrak{V}_1 = \frac{u\dfrac{\partial X}{dt} + (v + pRi)\dfrac{\partial Y}{dt}}{\sqrt{u^2 + (v + pRi)^2}}.$$

Les expressions des invariants $I_4$ et $I_5$ en fonction des variables $u$, $v$, $w$, R, $r$, $p$ (Chap. VIII) nous montrent que ces deux invariants s'expriment d'une manière simple en fonction des quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1$.

Nous avons

$$I_4 = \frac{-2pu\sqrt{u^2 + (v - pRi)^2}}{R^4\Delta_1(\Delta_1^4 - \Delta^4)} W_1\mathfrak{V},$$
$$I_5 = \frac{2pu\sqrt{u^2 + (v + pRi)^2}}{R^4\Delta_1(\Delta_1^4 - \Delta^4)} W\mathfrak{V}_1.$$

Les quantités W, $W_1$ sont les vitesses des foyers P, $P_1$.

Nous pouvons introduire le rayon $\mathcal{R}$ de la sphère orthogonale à deux cercles infiniment voisins

$$\mathcal{R}^2 = X^2 + Y^2 - R^2 = \frac{R^4(\Delta^4 - \Delta_1^4)}{4p^2u^2}.$$

Les invariants $I_4$, $I_5$ peuvent s'écrire

$$I_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^2 + v^2 - p^2R^2 - 2vpRi}{p^2u^2}}\,\frac{W_1\mathfrak{V}}{\mathcal{R}^2\Delta_1},$$
$$I_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^2 + v^2 - p^2R^2 + 2vpRi}{p^2u^2}}\,\frac{W\mathfrak{V}_1}{\mathcal{R}^2\Delta_1}.$$

2. L'angle $d\chi$ de la sphère (G) orthogonale à deux cercles infiniment voisins, avec la sphère infiniment voisine, est donné par

l'équation

$$\frac{d\chi^2}{dt^2}=\frac{\frac{\delta X^2}{dt^2}+\frac{\delta Y^2}{dt^2}+\frac{\delta Z^2}{dt^2}-\frac{d\mathcal{R}^2}{dt^2}}{\mathcal{R}^2}.$$

Les coordonnées du centre (G) vérifient les relations

$$X\frac{\delta X}{dt}+Y\frac{\delta Y}{dt}=\mathcal{R}\frac{d\mathcal{R}}{dt},$$
$$X^2+Y^2-R^2=\mathcal{R}^2,$$

et $\frac{d\chi^2}{dt^2}$ peut s'écrire

$$\frac{d\chi^2}{dt^2}=\frac{1}{\mathcal{R}^4}\left[\frac{\delta X^2}{dt^2}(Y^2-R^2)+\frac{\delta Y^2}{dt^2}(X^2-R^2)-2\frac{\delta X}{dt}\frac{\delta Y}{dt}XY\right].$$

Or, si nous remplaçons $I_4$, $I_5$ par les valeurs précédemment obtenues, en fonction de $\frac{\delta X}{dt}$, $\frac{\delta Y}{dt}$, nous trouvons

$$I_4^2+I_5^2-2I_0^2I_4I_5=\frac{1}{\Delta_1^2\mathcal{R}^4}\left[\frac{\delta X^2}{dt^2}(Y^2-R^2)+\frac{\delta Y^2}{dt^2}(X^2-R^2)-2\frac{\delta X}{dt}\frac{\delta Y}{dt}XY\right];$$

par suite,

$$\frac{1}{\Delta_1^2}\frac{d\chi^2}{dt^2}=I_4^2+I_5^2-2I_0^2I_4I_5,$$

ou bien, en introduisant l'angle $ds$ de la génératrice avec la génératrice infiniment voisine,

$$\frac{d\chi^2}{ds^2}=I_4^2+I_5^2-2I_0^2I_4I_5.$$

Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

*$d\chi$ désignant l'angle de la sphère* (G) *avec la sphère infiniment voisine, la quantité $\frac{d\chi}{ds}$ est un invariant absolu du second ordre qu'on peut obtenir avec les invariants fondamentaux* $I_0$, $I_4$, $I_5$.

3. L'angle $i$ de la trajectoire d'un point de courbure M avec la génératrice est un invariant par les transformations conformes, puisque les *points de courbure* conservent leur définition. L'invariant $\sin i$ est du second ordre et il dépend des invariants fondamentaux qui renferment $r$. Soit $\varphi$ l'angle du rayon CM avec la caractéristique, les coor-

données relatives de M sont

$$R\cos\varphi,\quad R\sin\varphi,\quad 0;$$

les accroissements de ces coordonnées relativement aux axes fixes sont

$$\delta x = M\,dt\cos\varphi + (N\,dt + R\,d\varphi)\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\delta y = M\,dt\sin\varphi + (N\,dt + R\,d\varphi)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\delta z = Q\,dt,$$

d'après les formules générales

$$\delta x = u\,dt - ry\,dt + dx,$$
$$\delta y = v\,dt + (rx - pz)\,dt + dy,$$
$$\delta z = w\,dt + py\,dt + dz,$$

et le déplacement infiniment petit $d\sigma$ de M vérifie la relation

$$d\sigma^2 = H^2\,dt^2 + (N\,dt + R\,d\varphi)^2.$$

L'inclinaison $i$ de la trajectoire est donnée par l'équation

$$\sin i = \frac{H\,dt}{d\sigma}.$$

Or $d\sigma$ renferme la quantité $N = rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi$ et, par suite, $r$; $d\varphi$ s'obtient en différentiant totalement l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0.$$

4. Les angles $d\psi$, $d\psi'$ que forment les *sphères de courbure* en deux points consécutifs d'une ligne quelconque et l'inclinaison $i$ de cette ligne sur une ligne de courbure vérifient la relation [1]

$$\cot i = \frac{d\psi'}{d\psi}.$$

---

[1] Demartres, *Sur la torsion sphérique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXI, juillet 1897).

Si nous appliquons cette propriété aux sphères F, $F'$ et aux sphères $F_1$, $F'_1$, relatives aux *points de courbure* M, $M_1$, nous voyons que l'angle $d\psi'$ de la sphère $F'$ avec la sphère infiniment voisine et l'angle $d\psi'_1$ de la sphère $F'_1$ avec la sphère infiniment voisine donneront deux invariants du second ordre dépendant de $r$

$$\frac{d\psi'}{ds}, \quad \frac{d\psi'_1}{ds}.$$

---

## CHAPITRE X.

### INVARIANTS DIFFÉRENTIELS D'ORDRE SUPÉRIEUR A DEUX.

1. Soient I un invariant absolu d'ordre $q$ et $t$ le paramètre.

Plaçons un trait au-dessus d'une quantité pour indiquer que le paramètre est $\tau$, lié à $t$ par l'équation $t = g(\tau)$. Si nous effectuons le changement de variable dans l'invariant *absolu* I, nous obtenons $\bar{I}$ et par suite

$$(1) \qquad dI = d\bar{I}.$$

Le changement de variable effectué dans les invariants relatifs $\Delta$, $\Delta_1$ donne

$$(2) \qquad \Delta_1\, dt = \bar{\Delta}_1\, d\tau, \qquad \Delta\, dt = \bar{\Delta}\, d\tau.$$

D'après (1) et (2), nous avons

$$\frac{dI}{\Delta_1 dt} = \frac{d\bar{I}}{\bar{\Delta}_1 d\tau}, \qquad \frac{dI}{\Delta dt} = \frac{d\bar{I}}{\bar{\Delta} d\tau}.$$

Les quotients $\frac{dI}{\Delta_1 dt}$, $\frac{dI}{\Delta dt}$ sont donc des invariants absolus, et les quantités $\Delta_1\, dt$, $\Delta\, dt$ des *paramètres différentiels*. Si $ds$ est l'angle de deux génératrices consécutives, nous savons que $ds$ est égal à $\Delta_1 dt$ et l'invariant $\frac{dI}{\Delta_1 dt}$ peut s'écrire $\frac{dI}{ds}$. Une différentiation, par rapport à $s$ effectuée sur un invariant absolu d'ordre $q$ donne un invariant absolu d'ordre $q+1$.

2. Avec les cinq invariants absolus fondamentaux du second ordre, nous pouvons former cinq invariants absolus distincts du troisième ordre

$$\frac{d\mathrm{I}_1}{ds}, \quad \frac{d\mathrm{I}_2}{ds}, \quad \ldots, \quad \frac{d\mathrm{I}_5}{ds}.$$

Or il ne peut pas y avoir plus de cinq invariants absolus distincts du troisième ordre ; en prolongeant les transformations $\mathrm{X}'_i f$ on introduit six variables nouvelles $a'''$, $b'''$, $c'''$, $a'''_1$, $b'''_1$, $c'''_1$ et, par suite, six intégrales distinctes qui donnent seulement cinq invariants absolus. Nous pouvons répéter le raisonnement pour les invariants d'ordre superieur; nous aurons donc par différentiation tous les invariants absolus d'ordre supérieur à deux.

## CHAPITRE XI.

### FAMILLES DE SURFACES CERCLÉES INVARIANTES PAR LES TRANSFORMATIONS CONFORMES.

Les familles de surfaces cerclées invariantes par les transformations conformes seront définies par les systèmes d'équations qui admettent le groupe (G) ou les groupes prolongés.

Nous avons vu que tout système d'équations admettant le groupe (G) doit renfermer l'équation invariante $\mathrm{R}=0$ ou

$$(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2=0.$$

Les équations $\mathrm{X}_i f=0$ $(i=1, 2, \ldots, 10)$, obtenues en égalant à zéro les transformations du groupe (G), prolongées au premier ordre, forment un système complet; elles sont linéairement indépendantes (aucune d'entre elles ne provient d'une combinaison linéaire à coefficients constants ou non des autres équations). Les déterminants du dixième ordre de la matrice ($\mathfrak{M}$) formée avec les coefficients des transformations $X_i f$ ne sont donc pas tous identiquement nuls. Les équations formées avec les transformations prolongées au $n^{\text{ième}}$ ordre jouissent des mêmes propriétés, la matrice correspondante s'obtient en ajoutant à la matrice ($\mathfrak{M}$) un certain nombre de colonnes.

Nous diviserons les systèmes d'équations qui admettent les transformations prolongées, en deux classes. Les systèmes de la première classe n'entrainent pas la nullite de tous les déterminants du dixième ordre formés avec la matrice ($\mathfrak{M}$); les systèmes d'équations de la deuxième classe entrainent la nullité de tous les déterminants du dixième ordre de la matrice ($\mathfrak{M}$).

Nous savons que les systèmes d'équations de la première classe s'obtiennent en egalant à zéro un certain nombre d'invariants différentiels. Par exemple, l'intégrale

$$\Delta^4 = 16 \frac{(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2)}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

du système $X_i f = 0$ formé avec les transformations prolongées jusqu'au premier ordre, donne les deux équations

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0, \qquad a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2 = 0,$$

qui admettent les transformations $X_i f$.

Tous les systèmes d'équations de la deuxième classe doivent posséder l'une au moins des équations obtenues en égalant à zéro l'un des déterminants du dixième ordre de la matrice ($\mathfrak{M}$).

Soient

$$E = \begin{vmatrix} A & B & C \\ a' & b' & c' \\ a_1' & b_1' & c_1' \end{vmatrix},$$

$$E_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}[A(a_1 + a) + B(b_1 + b) + C(c_1 + c)] & B & C \\ aa' + bb' + cc' & b' & c' \\ a_1 a_1' + b_1 b_1' + c_1 c_1' & b_1' & c_1' \end{vmatrix}.$$

Si nous formons le déterminant de la matrice ($\mathfrak{M}$) dont les termes sont les coefficients de

$$\frac{\partial f}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \quad \frac{\partial f}{\partial c}, \quad \frac{\partial f}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a'}, \quad \frac{\partial f}{\partial b'}, \quad \frac{\partial f}{\partial c_1'}, \quad \frac{\partial f}{\partial a_1'},$$

dans les transformations $X_i f (i = 1, 2, \ldots, 10)$, nous trouvons

$$2A(a'^2 + b'^2 + c'^2)(A^2 + B^2 + C^2)^2(E_1 - a_1 E).$$

Étudions l'équation $A = 0$; nous avons

$$X_4(A) = -B, \qquad X_5(A) = C;$$

l'équation $A = 0$ ne peut donc appartenir qu'à un système renfermant en même temps les équations $B = 0$, $C = 0$ et le cercle serait indéterminé; l'équation $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ est invariante.

L'équation $a_1 E - E_1 = 0$ ne peut appartenir qu'à un système d'équations renfermant l'équation $R = 0$ ou l'équation $E = 0$.

Enfin il est facile de vérifier que le système des deux équations $E = 0$, $E_1 = 0$ admet les transformations $X_i f$.

Ces équations expriment que la génératrice est le cercle caractéristique d'une sphère (Chap. XIII).

---

## CHAPITRE XII.

### SURFACES CERCLÉES CORRESPONDANT A DES ÉQUATIONS INVARIANTES DE LA PREMIÈRE CLASSE.

### I.

1. Exprimons que le *paramètre de distribution* K est nul : Nous avons $K^4 = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{\Delta_1^4}$, d'où l'équation invariante

$$\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0.$$

Cette équation donne la condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles infiniment voisins aient un point commun. Nous avons vu, en effet, que la condition de rencontre de deux cercles (Chap. III) était $IH = 0$; or, nous avons

$$\overline{IH}^2 = \frac{\Delta^4 - \Delta_1^4}{16} dt^4 + \ldots.$$

L'équation qui définit les *points de courbure*

$$\mu\Lambda^2 - \frac{\Delta_1^2}{2}\Lambda + \lambda = 0$$

a deux racines égales (Chap. VI), les *sphères fondamentales* sont confondues. Le cercle générateur reste tangent à une courbe de la surface, trajectoire du point de courbure.

Déterminons dans quelques cas particuliers les équations finies des surfaces correspondant à l'équation considérée.

Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées relativement aux axes fixes du centre C de la génératrice; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ les cosinus directeurs de l'axe du cercle; R son rayon. Lorsque ces quantités sont des fonctions déterminées d'un paramètre $t$, les équations finies de la surface engendrée sont

$$\text{(V)}\qquad \left\{\begin{array}{ll} a = x_0 + i\mathrm{R}\alpha_3, & a_1 = x_0 - i\mathrm{R}\alpha_3, \\ b = y_0 + i\mathrm{R}\beta_3, & b_1 = y_0 - i\mathrm{R}\beta_3, \\ c = z_0 + i\mathrm{R}\gamma_3, & c_1 = z_0 - i\mathrm{R}\gamma_3. \end{array}\right.$$

Les variables $u, v, w, p, r$ (Chap. IV) sont définies par les équations

$$\text{(VI)}\qquad \left\{\begin{array}{l} p^2 = \alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2, \\ r = \dfrac{1}{p^2}\begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_3' & \beta_3' & \gamma_3' \\ \alpha_3'' & \beta_3'' & \gamma_3'' \end{vmatrix}, \\ u^2 + v^2 + w^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2, \\ -vp = \alpha_3' x_0' + \beta_3' y_0' + \gamma_3' z_0', \\ w = \alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0' + \gamma_3 z_0'. \end{array}\right.$$

Si nous choisissons arbitrairement $x_0, y_0, z_0$ et les cosinus directeurs $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, le rayon R sera donné par l'équation $\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0$, qui peut s'écrire, d'après les formules (III) du Chapitre IV,

$$(1)\qquad p^2\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 - 2pvw\mathrm{R}\mathrm{R}' - p^2u^2\mathrm{R}^2 + w^2(u^2 + v^2) = 0.$$

2. *Toutes les surfaces de la famille, engendrées par des cercles concentriques non situés dans un même plan, sont des sphères.*

En effet, si le centre du cercle est fixe, nous avons $u = v = w = 0$ et l'équation (1) devient

$$p^2\mathrm{R}^2\mathrm{R}'^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{R} = \text{const.}$$

puisque nous supposons $p$ différent de zéro

3. *Toutes les surfaces de la famille pour lesquelles* $u = 0$ *peuvent être engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère.*

Lorsqu'on a l'équation $u = 0$, l'équation (1) devient

$$pRR' - wv = 0.$$

Interprétons ces deux équations :

Parmi les plans caractéristiques des sphères passant par le cercle, il y en a un qui renferme le centre du cercle, ce plan sera le plan du cercle si la droite commune aux plans caractéristiques est elle même dans le plan du cercle.

Le plan caractéristique de la sphère de rayon R passant par le cercle a pour équation (Chap. VI) par rapport aux axes mobiles

$$uX + vY + wZ + RR' = 0.$$

Le plan caractéristique du plan du cercle a pour équation

$$pRY - R'Z + Rw = 0.$$

Or l'intersection de ces deux plans est dans le plan $Z = 0$ si l'on a

$$u = 0, \qquad pRR' - wv = 0.$$

Deux génératrices consécutives ont alors deux points communs.

4. *Toutes les surfaces de la famille, engendrees par un cercle dont le plan reste tangent à la courbe décrite par le centre, satisfont à l'équation*

$$R = \pm \int u\,dt.$$

Nous avons par hypothèse $w = 0$, l'équation (1) devient

$$R'^2 - u^2 = 0.$$

La caractéristique du plan du cercle $pY + w = 0$ devient l'axe des X du trièdre mobile.

L'angle $\varphi$ que fait avec l'axe des X le rayon passant par un *point de courbure* est donné par l'équation

$$(wv - pRR')\cos\varphi - uw\sin\varphi - pRu = 0$$

ou

$$\cos\varphi = \pm 1.$$

La génératrice reste donc tangente à la courbe dont les équations, par rapport aux axes fixes, sont

$$x = x_0 \pm R\alpha_1, \qquad y = y_0 \pm R\beta_1, \qquad z = z_0 \pm R\gamma_1.$$

Les cosinus directeurs $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ de l'axe des X sont définis par les équations

$$p\alpha_1 = \beta_3\gamma'_3 - \gamma_3\beta'_3, \qquad p\beta_1 = \gamma_3\alpha'_3 - \alpha_3\gamma'_3, \qquad p\gamma_1 = \alpha_3\beta'_3 - \alpha'_3\beta_3.$$

Soit $U(t)$ une fonction arbitraire du paramètre $t$; une des surfaces satisfaisant aux conditions précédentes est définie par les équations

$$\begin{aligned} x_0 &= t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right), & \alpha_3 &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ y_0 &= U(t), & \beta_3 &= 0, \\ z_0 &= -t^2, & \gamma_3 &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{aligned}$$
$$R = U(t).$$

Le cercle générateur reste, dans ce cas, tangent à la courbe plane

$$x = t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \qquad y = 0, \qquad z = -t^2.$$

5. *Toutes les surfaces de la famille engendrées par un cercle qui reste tangent à la caractéristique de son plan satisfont à l'équation* $R = \pm \int v\,dt$ ; *le plan du cercle est alors le plan osculateur d'une courbe tracée sur la surface, et le cercle reste tangent à cette courbe.*

Lorsque la caractéristique est tangente au cercle on a $w = \pm pR$, et l'équation (1) donne $v = \pm R'$. Une conséquence de ces deux équations est

$$\left(\frac{w}{p}\right)' - v = 0.$$

Or, les coordonnées relatives du point où la caractéristique touche son enveloppe sont

$$X = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{w}{p}\right)' - v\right], \qquad Y = -\frac{w}{p}, \qquad Z = 0;$$

elles deviennent, en supposant $r$ différent de zéro,

$$X = 0, \qquad Y = \pm R, \qquad Z = 0;$$

ce sont les coordonnées du point de contact du cercle avec la caractéristique de son plan.

Lorsque $r$ est nul, le point où la caractéristique touche son enveloppe est indéterminé.

La surface définie par les équations

$$\begin{aligned} a &= 1 - it, & a_1 &= 1 + it, \\ b &= t, & b_1 &= t, \\ c &= t + i, & c_1 &= t - i \end{aligned}$$

satisfait aux conditions précédentes ; le plan de la génératrice a pour équation

$$\Sigma \alpha_3 (x - x_0) = 0,$$

c'est-à-dire

$$tx - z = 0. \tag{2}$$

Le rayon R vérifie la relation

$$R^2 = 1 + t^2 = x_0^2 + z_0^2.$$

La génératrice est donc constamment tangente à l'axe des $y$, son plan tourne autour de cet axe.

Éliminons $t$ entre l'équation (2) et l'équation de la sphère de rayon R passant par le cercle

$$(x - 1)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 = 1 + t^2 ;$$

nous obtenons l'équation cartésienne de la surface

$$x^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(x^2 + yz + z^2) + z^2 = 0.$$

6. *Toutes les surfaces engendrées par des cercles passant par un point fixe appartiennent évidemment à la famille de surfaces considérée. Les foyers de la génératrice sont sur la sphère de rayon nul qui a pour centre le point fixe.*

Soient U, V deux fonctions de $t$ ; $U_0$, $V_0$ les fonctions imaginaires conjuguées; les équations finies de la surface engendrée par un cercle passant par l'origine des coordonnées sont

$$\begin{aligned} a &= U^2 - V^2, & a_1 &= U_0^2 - V_0^2, \\ b &= i(U^2 + V^2), & b_1 &= -i(U_0^2 + V_0^2), \\ c &= 2UV, & c_1 &= 2U_0V_0. \end{aligned}$$

Si nous prenons par exemple $U = 1$, $V = it$, l'équation du plan de la génératrice est

$$(1 - t^2)y + 2tz = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x_0 = 1 + t^2, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0.$$

Le rayon est égal à $1 + t^2$; la génératrice reste donc tangente au plan des $yz$ pendant que son centre décrit l'axe des $x$ et que son plan tourne autour de cet axe.

L'équation cartésienne de la surface est

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 y^2 - 8xy^2(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$- 8xz^2(x^2 + y^2 + z^2) + 16x^2(y^2 + z^2) = 0.$$

## II.

L'invariant relatif $\Delta$ fait connaître deux équations invariantes

(3) $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0, \qquad a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2 = 0.$$

Ces équations expriment que les foyers de la génératrice décrivent des courbes minima. Pour les surfaces réelles, si l'un des foyers décrit une courbe minima, il en est de même de l'autre foyer; deux génératrices consécutives sont dans la *position minima*.

Soit S le centre d'une *sphère fondamentale;* le rapport $\Lambda = \dfrac{\overline{SP}}{\overline{P_1S}}$, $P$, $P_1$ désignant les foyers, est défini (Chap. VI) par l'équation

$$\Lambda^2 \Sigma a_1'^2 - \frac{\Sigma A^2}{2} \cdot \Delta_1^2 . \Lambda + \Sigma a'^2 = 0;$$

supposons le coefficient de $\Lambda$ différent de zéro, les deux racines de cette équation sont dans le cas des *surfaces à focales isotropes*

$$\Lambda = 0, \qquad \Lambda = \infty;$$

les sphères focales deviennent les sphères *fondamentales;* les *points de courbure* sont imaginaires, ils se trouvent sur deux plans isotropes tangents à la surface et définis par les équations

$$\Sigma(x - a)a' = 0, \qquad \Sigma(x - a_1)a_1' = 0.$$

Soient U une fonction arbitraire de $t$, $U_0$ la fonction imaginaire conjuguée ; les surfaces réelles à focales isotropes ont pour équations finies

$$\begin{aligned} a &= (1-t^2)U'' + 2tU' - 2U, & a_1 &= (1-t^2)U''_0 + 2tU'_0 - 2U_0, \\ ib &= (1+t^2)U'' - 2tU' + 2U, & -ib_1 &= (1+t^2)U''_0 - 2tU'_0 + 2U_0, \\ c &= 2tU'' - 2U', & c_1 &= 2tU''_0 - 2U'_0. \end{aligned}$$

Les formules (II) du Chapitre IV permettent de remplacer les équations (3) par les équations

$$(3') \qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2 + 2(wR' - vpR)i = 0, \\ u^2 + v^2 + w^2 - p^2R^2 - R'^2 - 2(wR' - vpR)i = 0, \end{cases}$$

ou encore, en choisissant pour paramètre l'arc de la ligne des centres, par les équations

$$(4) \qquad p^2R^2 + R'^2 = 1,$$

$$(5) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

$$(6) \qquad wR' - vpR = 0.$$

Une conséquence de ces équations est

$$u^2 = \frac{p^2R^2 - w^2}{p^2R^2},$$

ou

$$u^2 = \cos^2\Phi,$$

si l'on désigne par $\Phi$ l'angle que fait, avec la caractéristique, le rayon passant par l'un des points de rencontre de cette droite avec le cercle.

Les deux autres composantes $v$, $w$ de la vitesse du centre peuvent s'exprimer en fonction de $\Phi$ et de l'angle $\Theta$ du plan du cercle avec son plan caractéristique. L'équation de ce plan caractéristique, par rapport aux axes mobiles, est

$$pY - \frac{R'}{R}Z + w = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{pR}{R'}.$$

Il résulte de cette équation et des équations (4), (5), (6)

$$\begin{aligned} pR &= \sin\Theta, & R' &= \cos\Theta, \\ v &= -\sin\Phi\cos\Theta, & w &= -\sin\Phi\sin\Theta. \end{aligned}$$

Calculons avec ces variables l'angle $ds$ de deux génératrices consécutives, nous obtenons

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2\frac{\sin^2\Theta\cos^2\Phi}{R^2}.$$

L'angle $ds$ est nul lorsque la caractéristique est tangente au cercle, $\cos\Phi = 0$, ou lorsque le plan du cercle est fixe.

Il existe une relation simple entre R, l'angle $ds$ et le rayon $\mathfrak{R}$ de la sphère orthogonale à deux génératrices consécutives. Nous avons (Chap. IX) la formule

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{R^4(\Delta^4 - \Delta_1^4)}{4p'u^2},$$

elle devient

$$\mathfrak{R}^2 = -\frac{R^4}{2}\cdot\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Les angles $\Theta$ et $\Phi$ que nous venons d'introduire donnent une interprétation géométrique du changement de variables dont M. Demartres s'est servi pour démontrer les propriétés suivantes :

*Les seules surfaces dont chaque génératrice circulaire coupe à angle constant toutes les lignes de courbure sont les surfaces anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant un système de droites isotropes.*

*Le tore est la seule surface engendrée par un cercle de rayon constant, et telle que, dans chacune de ses positions, ce cercle coupe sous un même angle toutes les lignes de courbure.*

*Les seules surfaces cerclées à focales isotropes qui soient décomposées en carrés par les génératrices circulaires et leurs trajectoires orthogonales sont les anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant une ligne de distance nulle.*

Considérons la surface qui a pour focales les deux hélices minima :

$$\begin{aligned} a &= i\cos t, & a_1 &= -i\cos t,\\ b &= i\sin t, & b_1 &= -i\sin t,\\ c &= t + i\sqrt{q^2-1}, & c_1 &= t - i\sqrt{q^2-1} \qquad (q = \text{const.}). \end{aligned}$$

Cette surface est un *hélicoïde* engendré par un cercle de rayon $q$, dont le centre décrit l'axe des $z$.

L'équation du plan de ce cercle est

$$x \cos t + y \sin t + \sqrt{q^2 - 1}\,(z - t) = 0.$$

Éliminons $t$ entre cette équation et l'équation d'une sphère passant par le cercle

$$x^2 + y^2 + (z - t)^2 = q^2;$$

nous obtenons l'équation cartésienne de l'hélicoïde

$$x^2 + y^2 + \left(z + \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}\right)^2 = 1.$$

L'angle $ds$ de deux génératrices consécutives est donné par l'équation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{q}.$$

La surface admet la transformation infinitésimale

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}.$$

### III.

L'équation remarquable $\Delta_1 = 0$ exprime que l'angle $ds$ de deux génératrices consécutives est nul; d'après les formules (III), nous pouvons l'écrire

$$(7) \qquad R'^2 - p^2 R^2 + w^2 - u^2 - v^2 = 0.$$

1. *Toutes les surfaces de la famille, engendrées par les cercles dont le plan reste parallèle à un plan fixe, satisfont à l'équation* $R = \pm \int \sqrt{u^2 + v^2 - w^2}\, dt$.

Nous avons par hypothèse $p = 0$, l'équation (7) devient

$$R'^2 = u^2 - v^2 + w^2.$$

Si nous prenons comme plan fixe le plan des $xy$, et si nous tenons compte des formules (VI), nous avons

$$R = \pm \int \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2 - dz_0^2}.$$

*a*. Lorsque $z_0$ est égale à une constante $q$, les équations (V) s'écrivent

$$\begin{aligned} a &= x_0, & a_1 &= x_0, \\ b &= y_0, & b_1 &= y_0, \\ c &= q \pm i\int\sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}, & c_1 &= q \mp i\int\sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}. \end{aligned}$$

Ces équations définissent une suite de cercles dans le même plan ; le rayon de chaque cercle est égal à l'arc de la ligne des centres ; chaque cercle est tangent au cercle infiniment voisin ; l'enveloppe de ces cercles est une développante du lieu des centres ; les focales sont des courbes minima.

*b*. Lorsque $y_0 = z_0$ le lieu des centres est une courbe plane ; le rayon de la génératrice étant égal à $\pm x_0 +$ const., celle-ci reste tangente à un plan fixe.

Soit U une fonction arbitraire de $t$ ; la surface définie par les équations

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{U}, & a_1 &= \mathrm{U}, \\ b &= t, & b_1 &= t, \\ c &= t + i\mathrm{U}, & c_1 &= t - i\mathrm{U} \end{aligned}$$

répond aux conditions précédentes.

On a $\mathrm{R}^2 = \mathrm{U}^2$ ; le plan de la génératrice a pour équation

$$z - t = 0.$$

Éliminons $t$ entre cette équation et celle de la sphère de rayon R passant par la génératrice

$$(x - \mathrm{U})^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2 = \mathrm{U}^2,$$

nous obtenons l'équation cartésienne de la surface

$$(y - z)^2 + x^2 - 2x\mathrm{U}(z) = 0.$$

Dans le cas particulier $\mathrm{U} = t$, on a l'équation d'un *cône*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zx - 2zy = 0.$$

2. *Toutes les surfaces de la famille, engendrées par des cercles concentriques, satisfont à l'équation* $R = e^{\pm\int p\,dt}$.

Soit $p$ une constante, les équations

$$\begin{aligned} a &= \phantom{-}i e^{pt} p \cos t, & a_1 &= -i e^{pt} p \cos t, \\ b &= -i e^{pt} p \sin t, & b_1 &= \phantom{-}i e^{pt} p \sin t, \\ c &= \phantom{-}i e^{pt} \sqrt{1-p^2}, & c_1 &= -i e^{pt} \sqrt{1-p^2} \end{aligned}$$

définissent une *surface spirale* répondant aux conditions précédentes. On a $R = e^{pt}$ et le plan de la génératrice a pour équation

$$x p \cos t - y p \sin t + z \sqrt{1-p^2} = 0.$$

L'angle V du plan tangent avec le plan du cercle en un point défini par l'angle $\varphi$ du rayon avec la caractéristique est donné par l'équation $\operatorname{tang} V = \sin \varphi$.

3. Les surfaces engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère satisfont aux équations

$$(8) \qquad u = 0, \qquad wv - pRR' = 0;$$

l'angle V du plan tangent avec le plan de la génératrice d'une surface cerclée est donné par la formule (Chap. VIII)

$$\operatorname{tang} V = \frac{pR \sin\varphi + w}{v \sin\varphi + u \cos\varphi + R'},$$

on a pour les enveloppes de sphères

$$\operatorname{tang} V = \frac{pR}{v} = \frac{w}{R'}$$

Si nous tenons compte des relations précédentes, l'équation (7) devient

$$(R'^2 - v^2)(1 + \operatorname{tang}^2 V) = 0.$$

*L'enveloppe de la sphère osculatrice d'une courbe gauche appartient à la famille considérée, elle satisfait à l'équation* $R = \pm \int v\,dt$.

En effet, les coordonnées du point où la caractéristique touche son enveloppe, par rapport aux axes mobiles, sont

$$X = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{w}{p}\right)' - v\right], \qquad Y = -\frac{w}{p}, \qquad Z = 0.$$

Ces coordonnées deviennent, pour les surfaces considérées,

$$X = 0, \qquad Y = \pm R, \qquad Z = 0,$$

par suite,

$$\left(\frac{w}{p}\right)' = v, \qquad w = \pm pR,$$

d'où

$$R' = \pm v,$$

et l'équation (7) est vérifiée.

*Les foyers de la génératrice décrivent des courbes minima.*

En effet, dans le cas des enveloppes de sphères à un paramètre, deux génératrices consécutives ont deux points communs; la condition de rencontre est donc vérifiée et l'on a

$$\Delta^4 - \Delta_1^4 = 0;$$

pour les surfaces considérées, l'hypothèse $\Delta_1 = 0$ entraîne donc

$$\Delta = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$\frac{d\sigma}{dt}\frac{d\sigma'}{dt} = 0,$$

$d\sigma$, $d\sigma'$ désignant les éléments d'arcs des focales.

Lorsque la caractéristique du plan de la génératrice est fixe, la surface est une anallagmatique à déférente plane dont les deux points doubles sont confondus; avec l'équation $R'^2 - v^2 = 0$, on a encore l'équation

$$r = 0.$$

IV.

*L'équation obtenue en égalant à zéro l'invariant absolu du second ordre* $\frac{d\psi}{ds}$, *$d\psi$ désignant l'angle d'une sphère fondamentale avec la sphère infiniment voisine, exprime que le point de contact de la sphère avec la surface est un ombilic.*

En effet, les directions principales (1) en un point M de la génératrice défini par l'angle $\varphi = \widehat{CX, CM}$ font avec le cercle un angle ($i$) vérifiant l'équation

$$2H\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cot 2i = N\frac{\partial V}{\partial \varphi} + w - R\frac{\partial V}{\partial t}.$$

L'équation $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ exprime que M est un *point de courbure;* d'autre part, nous avons vu (Chap. VIII) que l'angle $d\psi$ d'une sphère fondamentale avec la sphère infiniment voisine et l'angle V de cette sphère avec le plan du cercle étaient liés par l'équation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{w}{R}.$$

L'équation $\frac{d\psi}{ds} = 0$ exprime donc que le *point de courbure* M décrit une *ligne ombilicale.*

Considérons par exemple la *surface spirale* définie par les équations

$$\begin{aligned} a &= \quad i e^{qt}\cos t, & a_1 &= -i e^{qt}\cos t,\\ b &= -i e^{qt}\sin t, & b_1 &= i e^{qt}\sin t,\\ c &= 0, & c_1 &= 0 \end{aligned}$$
$$(q = \text{const.}).$$

Le plan de la génératrice a pour équation

$$x\cos t - y\sin t = 0;$$

---

(1) DEMARTRES, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885.

son rayon est égal à $e^{qt}$, et l'équation cartésienne de la surface est

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^{2q.\text{arc tang}\frac{x}{y}}.$$

L'angle V du plan tangent avec le plan du cercle est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{pR}{R'} \sin\varphi \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\sin\varphi}{q}.$$

L'équation $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ qui définit les *points de courbure* devient

$$\cos\varphi = 0.$$

La caractéristique du plan de la génératrice étant l'axe des $z$ du trièdre fixe, les points $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ sont situés dans le plan des $xy$.

Le lieu des *points de courbure* est formé de deux spirales logarithmiques définies par l'équation

$$x^2 + y^2 = e^{2q\,\text{arc tang}\frac{x}{y}}.$$

D'autre part, l'équation $\frac{d\psi}{ds} = 0$ est vérifiée, car on a

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad w = 0.$$

Les *points de courbure* décrivent donc des *lignes ombilicales*.

## V.

Soient X, Y les coordonnées du point G centre de la sphère orthogonale à deux génératrices consécutives et $\mathcal{R}$ son rayon; entre ces quantités et les composantes $\frac{\partial X}{dt}$, $\frac{\partial Y}{dt}$ de la vitesse absolue du point G nous avons (Chap. IX) la relation

$$X\frac{\partial X}{dt} + Y\frac{\partial Y}{dt} = \mathcal{R}\mathcal{R}';$$

cette relation montre que le rayon est constant quand le point G est fixe. Les conditions pour que la surface soit anallagmatique sont donc

$$\frac{\delta X}{dt} = 0, \qquad \frac{\delta Y}{dt} = 0.$$

Ces deux équations peuvent s'obtenir en formant une combinaison des invariants $I_4$ et $I_5$, car nous avons

$$I_4 = -2\frac{W_1 p u}{R^4 \Delta_1 (\Delta_1^4 - \Delta^4)}\left[u\frac{\delta X}{dt} + (v - pRi)\frac{\delta Y}{dt}\right],$$

$$I_5 = 2\frac{W p u}{R^4 \Delta_1 (\Delta_1^4 - \Delta^4)}\left[u\frac{\delta X}{dt} + (v + pRi)\frac{\delta Y}{dt}\right].$$

On obtient immédiatement les équations finies d'une surface anallagmatique en prenant pour focales des courbes tracées sur une même sphère; soient U, V deux fonctions de $t$, et $U_0$, $V_0$ les fonctions imaginaires conjuguées, $\mathcal{R}$ une constante égale au rayon de la sphère directrice; les équations d'une surface réelle sont

$$a = \frac{1 - UV}{U - V}\mathcal{R}, \qquad a_1 = \frac{1 - U_0 V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R},$$

$$b = i\frac{1 + UV}{U - V}\mathcal{R}, \qquad b_1 = -i\frac{1 + U_0 V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R},$$

$$c = \frac{U + V}{U - V}\mathcal{R}, \qquad c_1 = \frac{U_0 + V_0}{U_0 - V_0}\mathcal{R}.$$

## VI.

Déterminons une surface cerclée dont le paramètre de distribution K soit constant, différent de zéro et dont les autres invariants soient constants. D'après les formules (III), nous avons

$$K^4 = 4\frac{u^2(w^2 - p^2R^2) + (wv - pRR')^2}{(u^2 + v^2 - w^2 + p^2R^2 - R'^2)^2}.$$

Si nous prenons des génératrices concentriques, les quantités $u$, $v$, $w$ sont nulles et l'équation précédente peut s'écrire

$$K^4 = \left(\frac{2\dfrac{pR}{R'}}{1 - \left(\dfrac{pR}{R'}\right)^2}\right)^2.$$

Introduisons l'angle $\widehat{FF_1}$ des *sphères fondamentales*, nous avons

$$K^4 = \operatorname{tang}^2 \widehat{FF_1},$$

d'où

$$\frac{pR}{R'} = \operatorname{tang} \frac{\widehat{FF_1}}{2},$$

et en intégrant nous obtenons

$$R = e^{\cot \frac{FF_1}{2} \int p\,dt}.$$

Si nous remplaçons R par cette valeur et $u$, $v$, $w$ par zéro, les autres invariants absolus fondamentaux (formules IV) deviennent

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0,$$

$$I_4^2 = I_5^2 = \frac{-\operatorname{tang}^2 \frac{\widehat{FF_1}}{2}}{4 \cos \widehat{FF_1}} \cdot \frac{r^2}{p^2}.$$

$\widehat{FF_1}$ est constant par hypothèse; pour que tous les invariants soient constants, il suffit que le rapport $\frac{r}{p}$ des composantes de la rotation soit constant. Soient $p$, $q$ deux constantes arbitraires; choisissons pour cosinus directeurs de l'axe de la génératrice

$$\alpha_3 = p \cos t, \qquad \beta_3 = -p \sin t, \qquad \gamma_3 = \sqrt{1 - p^2}$$

et pour rayon

$$R = e^{qt}.$$

Nous avons

$$\Sigma \alpha_3'^2 = p^2, \qquad r^2 = 1 - p^2.$$

La surface engendrée répond à la question, les équations finies sont

$$\begin{aligned}
a &= \phantom{-} i e^{qt} p \cos t, & a_1 &= - i e^{qt} p \cos t,\\
b &= - i e^{qt} p \sin t, & b_1 &= \phantom{-} i e^{qt} p \sin t,\\
c &= \phantom{-} i e^{qt} \sqrt{1 - p^2}, & c_1 &= - i e^{qt} \sqrt{1 - p^2}.
\end{aligned}$$

L'équation du plan de la génératrice est

$$p \cos t\, x - p \sin t\, y + \sqrt{1 - p^2}\, z = 0;$$

cette génératrice fait avec le plan des $xy$ un angle constant.

La surface admet la *transformation spirale infinitésimale* [1]

$$q\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)+y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

C'est une surface *spirale*.

Éliminons $t$ entre l'équation du plan du cercle et l'équation de la sphère de rayon R passant par ce cercle

$$x^2+y^2+z^2=e^{2qt},$$

nous obtenons

$$px\cos\log(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2q}}-py\sin\log(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2q}}+\sqrt{1-p^2}\,z=0;$$

ou encore, en posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,

$$\rho^2 e^{2q\theta}=\frac{e^{2q\arc\cos\left(\frac{-\sqrt{1-p^2}}{p}\frac{z}{\rho}\right)}}{1+\frac{z^2}{\rho^2}}.$$

La surface est engendrée par des courbes spirales gauches, intersections de cônes de révolution $\frac{z}{\rho}=$ const., et de cylindres ayant pour directrices des spirales logarithmiques $\rho e^{q\theta}=$ const.

Le plan caractéristique du plan de la génératrice a pour équation

$$x\sin t+y\cos t=0;$$

ce plan est perpendiculaire à la trace du plan du cercle sur le plan des $xy$; la caractéristique est donc perpendiculaire à cette trace et devient l'axe des X du trièdre mobile.

L'équation qui donne les valeurs de $\varphi$ fixant les *points de courbure* est

$$\cos\varphi=0.$$

Les *points de courbure* $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\frac{3\pi}{2}$ sont alors les points de rencontre de la génératrice avec le plan des $xy$, et les courbes engendrées par ces points sur la surface sont des spirales logarithmiques définies

(1) D'après la définition de S. Lie (*Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, p. 260).

par l'équation

$$x^2 + y^2 = e^{2q \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}.$$

*Le plan tangent à la surface, le long des courbes* $\varphi =$ const., *fait un angle constant avec le plan du cercle.*

On a, en effet, en désignant par V l'angle du plan tangent avec le plan de la génératrice,

$$\operatorname{tang} V = \frac{pR}{R'} \cdot \sin\varphi$$

ou encore

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang} \frac{\widehat{FF_1}}{2} \cdot \sin\varphi; \tag{9}$$

le coefficient de $\sin\varphi$ est constant, il ne dépend que du paramètre de distribution K.

En particulier, aux *points de courbure* on a

$$\operatorname{tang} V = \pm \operatorname{tang} \frac{\widehat{FF_1}}{2};$$

les *sphères fondamentales* sont symétriques par rapport au plan de la génératrice.

L'équation (9) donne encore la variation du plan tangent le long de la génératrice.

Les trajectoires des *points de courbure* sont des lignes ombilicales, car on a

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{w}{R} = 0;$$

elles coupent la génératrice sous un angle constant ($i$) défini (Chap. IX) par l'équation

$$\cot i = \frac{1 - p^2}{p^2 + q^2}.$$

*Remarque.* — Rappelons que les surfaces qui admettent un groupe de similitudes à un paramètre sont les cylindres, les cônes, les surfaces de révolution, les hélicoïdes et les surfaces spirales; que les surfaces qui admettent plus de $\infty^1$ transformations conformes sont le plan et la sphère, et dans ce cas le groupe est à six paramètres, ou bien sont transformables par une transformation conforme en un cylindre ou en un cône de révolution, ou encore en un tore, et dans ce cas le groupe conforme est à deux paramètres (¹).

La sphère $x^2+y^2+z^2-\rho^2=0$ admet les transformations infinitésimales conformes

$$z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z},\qquad x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x},\qquad y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(x^2-y^2-z^2-\rho^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}+2xz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(y^2-z^2-x^2-\rho^2)\frac{\partial f}{\partial y}+2yz\frac{\partial f}{\partial z}+2yx\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(z^2-x^2-y^2-\rho^2)\frac{\partial f}{\partial z}+2zx\frac{\partial f}{\partial x}+2zy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

## CHAPITRE XIII.

### SURFACES DEFINIES PAR DES SYSTÈMES D'EQUATIONS DE LA DEUXIÈME CLASSE.

Les systèmes d'équations de la deuxième classe, qui admettent le groupe (G) prolongé, renferment l'équation

$$(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2=0,$$

exprimant que le rayon de la génératrice est nul, ou les deux équations

$$\mathrm{E}=\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ a' & b' & c' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\mathrm{E}_1=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}[\mathrm{A}(a_1+a)+\mathrm{B}(b_1+b)+\mathrm{C}(c_1+c)] & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ a\,a'+b\,b'+c\,c' & b' & c' \\ a_1a'_1+b_1b'_1+c_1c'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}=0.$$

Ces équations définissent les surfaces enveloppes de sphères.

(¹) AMALDI, *Le superficie con infinite trasformazioni conformi in sè stesse* (*Atti del. reale Acc. dei Lincei,* t. X, 1901).

En effet, si le plan du cercle, dont l'équation est

$$Ax + By + Cz - \frac{1}{2}[A(a_1 + a) + B(b_1 + b) + C(c_1 + c)] = 0,$$

se confond avec le plan caractéristique de l'une des sphères passant par le cercle, et dont l'équation est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda[(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2] = 0,$$

les trois plans définis par les équations

$$\begin{gathered}(x-a\ )a' + (y-b\ )b' + (z-c\ )c' = 0,\\ (x-a_1)a'_1 + (y-b_1)b'_1 + (z-c_1)c'_1 = 0,\\ Ax + By + Cz - \frac{1}{2}[A(a_1 + a) + B(b_1 + b) + C(c_1 + c)] = 0\end{gathered}$$

doivent passer par une même droite; or le système des deux équations $E = 0$, $E_1 = 0$ exprime précisément cette condition.

Dans le calcul des invariants des surfaces cerclées les plus générales, nous avons supposé les quantités $\Sigma A^2$, $\Sigma a'^2$, $\Sigma a_1'^2$, E, $E_1$, différentes de zéro; il sera donc nécessaire de faire une étude spéciale des invariants des surfaces singulières pour lesquelles ces quantités sont nulles.

## CHAPITRE XIV.

### EQUIVALENCE DES SURFACES CERCLEES GÉNÉRALES VIS-A-VIS DU GROUPE CONFORME.

Une surface cerclée est définie par six fonctions de $t$ : $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$. A deux surfaces cerclées distinctes $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ correspondent deux courbes distinctes $(\Gamma)$, $(\Gamma_1)$ dans l'espace à six dimensions, et à chaque transformation conforme transformant $(\Sigma)$ en $(\Sigma_1)$ correspond une transformation du groupe (G) transformant $(\Gamma)$ en $(\Gamma_1)$; les conditions d'équivalence des surfaces cerclées vis-à-vis du groupe conforme s'obtiendront donc en déterminant les conditions d'équivalence des courbes $(\Gamma)$ vis-à-vis du groupe (G).

Supposons cinq coordonnées $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, d'un point de la courbe $(\Gamma)$ exprimées en fonction de la sixième $c$. Pour obtenir $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, il faut connaître au moins cinq équations différentielles indépendantes. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ les ordres respectifs des cinq équations différentielles de l'ordre le plus bas, et supposons

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \varepsilon.$$

Si nous considérons $a, b, a_1, b_1, c_1$ comme des dérivées d'ordre zéro, nous voyons qu'il y aura $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ dérivées qui ne seront assujetties à aucune condition

$$\begin{array}{lllll}
a, & a', & a'', & \ldots, & a^{(\alpha-1)}, \\
b, & b', & b'', & \ldots, & b^{(\beta-1)}, \\
a_1, & a_1', & a_1'', & \ldots, & a_1^{(\gamma-1)}, \\
b_1, & b_1', & b_1'', & \ldots, & b_1^{(\delta-1)}, \\
c_1, & c_1', & c_1'', & \ldots, & c_1^{(\varepsilon-1)}.
\end{array}$$

Imaginons les coordonnées $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, développées suivant les puissances de $c-c_0$, $c_0$ étant une valeur particulière attribuée au paramètre $c$. Nous pouvons choisir arbitrairement les valeurs des $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ premières dérivées pour $c=c_0$, de sorte que si nous calculons les dérivées d'ordre supérieur au moyen des équations différentielles données, nous obtenons des développements qui dépendent de $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ constantes arbitraires. Si nous envisageons une courbe $(\Gamma)$ qui n'admet aucune des transformations du groupe (G), elle se transforme en $\infty^{10}$ courbes différentes, quand nous effectuons les transformations du groupe (G). Pour que les cinq équations différentielles représentent une famille de $\infty^{10}$ courbes, invariante par le groupe (G), il faut donc que l'on ait

$$(1) \qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 10,$$

et que le système des cinq équations différentielles soit invariant par les transformations du groupe (G) prolongé.

Les systèmes d'équations invariants par le groupe (G) prolongé peuvent posséder l'équation

$$(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2=0$$

(le rayon du cercle générateur est nul), ou les deux équations

$$E = 0, \qquad E_1 = 0$$

(la génératrice est le cercle caractéristique d'une sphère), ou l'une des deux équations $\Sigma a'^2 = 0$, $\Sigma a_1'^2 = 0$, ou bien ces deux équations (surfaces à focales isotropes); ou enfin cinq équations définies par des relations distinctes entre les invariants absolus. Nous ne nous occuperons que de ces derniers systèmes d'équations et nous désignerons les surfaces cerclées correspondantes sous le nom de *surfaces cerclées générales*.

Nous devons choisir les ordres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ des cinq équations différentielles de manière à vérifier l'équation (1) et les conditions

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \varepsilon.$$

Or, nous pouvons faire sur $\alpha$ trois hypothèses :

$$\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \qquad \alpha = 2.$$

1° $\alpha = 0$. L'équation correspondante est

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2 = 0.$$

Le rayon de la génératrice est nul, nous écartons ce cas.

2° $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Nous ne pouvons former de systèmes de deux équations du premier ordre qu'avec des équations mises à part.

3° $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 3$. Les cinq relations entre les invariants jusqu'au troisième ordre sont de la forme

$$I_0 = \text{const.}, \qquad I_\beta = f_1(I_\alpha), \qquad I_\gamma = f_2(I_\alpha), \qquad I_\delta = f_3(I_\alpha), \qquad \frac{dI_\alpha}{ds} = f_4(I_\alpha),$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ désignant les nombres 2, 3, 4, 5 pris à partir de l'un d'eux; $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ des fonctions arbitraires. Nous supposons que $I_\alpha$ n'est pas constant.

Nous laissons de côté les solutions que pourraient donner les équations mises à part.

4° $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 2$. Les cinq équations définies par des relations entre les invariants jusqu'au deuxième ordre sont de la forme

$$\frac{dI_0}{ds}=f_1(I_0), \qquad I_2=f_2(I_0), \qquad I_3=f_3(I_0), \qquad I_4=f_4(I_0), \qquad I_5=f_5(I_0 .$$

Considérons les surfaces cerclées qui admettent une transformation infinitésimale conforme, et *les courbes* $(\Gamma)$ *correspondantes qui admettent une transformation infinitésimale du groupe* (G). Lorsqu'une multiplicité admet $m$ transformations d'un groupe à $p$ paramètres, elle se transforme quand on effectue toutes les transformations du groupe, en $\infty^{p-m}$ multiplicités différentes et inversement (¹). Le système des cinq équations qui définit la courbe $(\Gamma)$ doit donc être tel que l'on ait

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=9 \qquad \text{et} \qquad \alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \varepsilon.$$

Trois cas seulement peuvent se présenter :

1° $\alpha=0$. L'équation correspondante a été mise à part;

2° $\alpha=1$, $\beta=1$. Les systèmes d'équations correspondants ont été écartés, il n'existe qu'un invariant absolu du premier ordre;

3° $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=2$, $\delta=2$, $\varepsilon=2$. Le système d'équations formé avec les invariants jusqu'au deuxième ordre ne peut être que de la forme suivante :

$$I_0=\text{const.}, \qquad I_2=\text{const.}, \qquad I_3=\text{const.}, \qquad I_4=\text{const.}, \qquad I_5=\text{const.}$$

Considérons enfin *les courbes* $(\Gamma)$ *qui admettent plus d'une transformation infinitésimale du groupe* (G); les nombres entiers $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, doivent vérifier les relations suivantes, où $k$ désigne un nombre inférieur ou égal à 8 :

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=k, \qquad \alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \varepsilon.$$

Nous ne pouvons alors faire que deux hypothèses : $\alpha=0$ et $\alpha=1$ avec $\beta=1$; les équations correspondantes ont été mises à part.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

**Théorème** : *Deux surfaces cerclées générales sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme si, ds désignant un paramètre différentiel*

(¹) Lie, *Vorlesungen uber continuierliche Gruppen*, p. 683.

*et* $I_0$, $\frac{dI_0}{ds}$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$ *leurs six invariants absolus fondamentaux, on a les cinq mêmes relations*

$$\frac{dI_0}{ds}=f_1(I_0), \qquad I_2=f_2(I_0), \qquad I_3=f_3(I_0), \qquad I_4=f_4(I_0), \qquad I_5=f_5(I_0)$$

($f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$ désignant cinq fonctions de $I_0$) *ou les cinq mêmes relations*

$$I_0=\text{const.}, \qquad I_\beta=f_1(I_\alpha), \qquad I_\gamma=f_2(I_\alpha), \qquad I_\delta=f_3(I_\alpha), \qquad \frac{dI_\alpha}{ds}=f_4(I_\alpha)$$
$$(I_\alpha\neq\text{const.})$$

($\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ désignent les nombres 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux), *ou les cinq mêmes relations*

$$I_0=\text{const.}, \qquad I_2=\text{const.}, \qquad I_3=\text{const.}, \qquad I_4=\text{const.}, \qquad I_5=\text{const.}$$

*et seulement à ces conditions.*

---

## CHAPITRE XV.

### INVARIANTS DES SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES A UN PARAMÈTRE PAR RAPPORT AUX TRANSFORMATIONS CONFORMES.

#### Le groupe conforme de la sphère.

Dans l'énoncé des conditions d'équivalence des surfaces cerclées vis-à-vis du groupe conforme, nous avons mis à part les surfaces enveloppes de sphères. Nous allons déterminer les conditions relatives à ces surfaces.

Si nous effectuons les transformations conformes sur la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2=0,$$

les quatre équations qui lient les coordonnées du centre et le rayon de la sphère transformée aux quantités $a$, $b$, $c$, $\rho$ sont les équations finies d'un groupe (G′) à quatre variables et à dix paramètres. Les invariants différentiels de ce groupe sont les invariants différentiels des surfaces enveloppes de sphères par rapport au groupe conforme. Déterminons les équations finies et les transformations infinitésimales du groupe (G′)

que nous appellerons le « groupe conforme de la sphère ». Effectuons d'abord les transformations du second degré

$$x' = \frac{x - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)}{\mathfrak{D}},$$

$$y' = \frac{y - \beta(x^2 + y^2 + z^2)}{\mathfrak{D}},$$

$$z' = \frac{z - \gamma(x^2 + y^2 + z^2)}{\mathfrak{D}}.$$

Soient

$$\Delta = 1 - 2(a\alpha + b\beta + c\gamma) + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$\Delta_1 = \Delta - \rho^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$
$$\mathfrak{D}' = 1 + 2(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

nous obtenons

$$\frac{\Delta}{\mathfrak{D}'}\left\{\left[x' - \frac{a - \alpha(a^2 + b^2 + c^2)}{\Delta}\right]^2 + \left[y' - \frac{b - \beta(a^2 + b^2 + c^2)}{\Delta}\right]^2 \right.$$
$$\left. + \left[z' - \frac{c - \gamma(a^2 + b^2 + c^2)}{\Delta}\right]^2 - \frac{\rho^2 \mathfrak{D}'}{\Delta}\right\},$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\Delta_1}{\mathfrak{D}'}\left[(x' - \mathcal{A})^2 + (y' - \mathcal{B})^2 + (z' - \mathcal{C})^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_1^2}\right]$$

en posant

$$\mathcal{A} = \frac{a - \alpha\varpi}{\Delta}, \qquad \mathcal{B} = \frac{b - \beta\varpi}{\Delta_1}, \qquad \mathcal{C} = \frac{c - \gamma\varpi}{\Delta_1}, \qquad \varpi = a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2.$$

Effectuons les similitudes sur la fonction (1); les équations finies de ces transformations sont

$$\bar{x} = \delta(A\, x' + B\, y' + C\, z') - \lambda,$$
$$\bar{y} = \delta(A'\, x' + B'\, y' + C'\, z') - \mu,$$
$$\bar{z} = \delta(A''\, x' + B''\, y' + C''\, z') - \nu.$$

Nous obtenons

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - \rho^2$$
$$= \frac{\Delta_1}{\delta^2 \mathfrak{D}'_1}\left[(\bar{x} - \bar{a})^2 + (\bar{y} - \bar{b})^2 + (\bar{z} - \bar{c})^2 - \bar{\rho}^2\right],$$

en désignant par $\varpi'_1$ la transformée de $\varpi'$, et en posant

$$(\mathrm{G}')\quad \begin{cases} \bar{a} = \delta\left(\mathrm{A}\,\dfrac{a-\alpha\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{B}\,\dfrac{b-\beta\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{C}\,\dfrac{c-\gamma\varpi}{\Delta_1}\right) - \lambda, \\ \bar{b} = \delta\left(\mathrm{A}'\,\dfrac{a-\alpha\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{B}'\,\dfrac{b-\beta\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{C}'\,\dfrac{c-\gamma\varpi}{\Delta_1}\right) - \mu, \\ \bar{c} = \delta\left(\mathrm{A}''\,\dfrac{a-\alpha\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{B}''\,\dfrac{b-\beta\varpi}{\Delta_1} + \mathrm{C}''\,\dfrac{c-\gamma\varpi}{\Delta_1}\right) - \nu, \\ \bar{\rho} = \dfrac{\delta\rho}{\Delta_1}, \end{cases}$$

nous avons ainsi les équations finies du groupe (G′).

Les quantités A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″ sont définies en fonction des rotations par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \sin\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi, & \mathrm{A}' &= \sin\theta\cos\varphi, \\ \mathrm{B} &= \cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \sin\theta\cos\psi, & \mathrm{B}' &= \cos\theta\cos\varphi, \\ \mathrm{C} &= \cos\varphi\sin\psi, & \mathrm{C}' &= -\sin\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}'' &= \sin\theta\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta, \\ \mathrm{B}'' &= \cos\theta\sin\varphi\cos\psi - \sin\theta\sin\psi, \\ \mathrm{C}'' &= \cos\varphi\cos\psi. \end{aligned}$$

Les valeurs des paramètres correspondant à la transformation identique sont

$$\alpha = \beta = \gamma = \lambda = \mu = \nu = \theta = \varphi = \psi = 0,$$
$$\delta = 1;$$

par suite,

$$\mathrm{A}' = \mathrm{C}' = \mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{A}'' = \mathrm{B}'' = 0, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B}' = \mathrm{C}'' = 1.$$

Posons

$$\mathrm{S} = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2,$$
$$\bar{\mathrm{S}} = (\bar{x}-\bar{a})^2 + (\bar{y}-\bar{b})^2 + (\bar{z}-\bar{c})^2 - \bar{\rho}^2.$$

Les calculs précédents donnent

$$\mathrm{S} = \frac{\Delta_1}{\varpi'_1\delta^2}\bar{\mathrm{S}}, \qquad \rho = \frac{\Delta_1}{\delta}\bar{\rho};$$

par suite,

$$\frac{\mathrm{S}}{\rho} = \frac{1}{\varpi'_1\delta}\,\frac{\bar{\mathrm{S}}}{\bar{\rho}}.$$

Le coefficient $\dfrac{1}{\varpi'_1\delta}$ ne dépend pas des quantités $a$, $b$, $c$, $\rho$.

Il en résulte que les coordonnées pentasphériques restent invariables quand on soumet une figure à une transformation conforme pourvu que l'on rapporte la nouvelle figure aux sphères orthogonales qui dérivent des sphères primitives par la transformation considérée.

### Transformations infinitésimales.

Considérons un groupe à quatre variables et à dix paramètres défini par les équations

$$\bar{a}_i = f_i(a_k, \alpha_h) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4;\ h = 1, 2, \ldots 10).$$

Désignons par l'indice o la valeur que prend une fonction des paramètres $\alpha_h$ quand on leur donne la valeur correspondant à la transformation identique et posons

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h}\right)_0 = \xi_{hi}.$$

Nous savons que les dix transformations infinitésimales $X_h f$ du groupe sont données par les équations

$$X_h f = \sum_{i=1}^{i=4} \xi_{hi} \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, 10)$$

et que la forme générale des transformations infinitésimales des sous-groupes à un paramètre est

$$Y f = \sum_{h=1}^{h=10} \lambda_h X_h f,$$

$\lambda_h$ désignant des constantes arbitraires.

Or nous avons, en différentiant les équations finies du groupe,

$$d\bar{a}_i = \sum_h \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h} d\alpha_h,$$

$$(d\bar{a}_i)_0 = \sum_h \xi_{hi}\, d\alpha_h;$$

par suite,

$$Y f = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial f}{\partial a_i} (d\bar{a}_i)_0.$$

Nous formerons le deuxième membre de cette égalité et, en y considérant les $d\alpha_h$ comme des constantes arbitraires $\lambda_h$, nous obtiendrons une expression de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=10} \lambda_h X_h f,$$

où les coefficients des $\lambda_h$ seront les quantités cherchées.

Pour les valeurs des paramètres correspondant à la transformation identique, nous avons en revenant au groupe (G′)

$$(\Delta_1)_0 = 1, \qquad (d\Delta_1)_0 = -2(a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma),$$
$$dA' = d\theta, \quad dA = 0, \quad dA'' = d\psi, \quad dB' = 0, \quad dB = -d\theta,$$
$$dB'' = d\varphi, \quad dC = d\psi, \quad dC' = -d\varphi, \quad dC'' = 0;$$

d'où, en posant $a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = \varpi$,

$$(d\bar{a})_0 = (2a^2 - \varpi)\,d\alpha + 2ab\,d\beta + 2ac\,d\gamma + c\,d\psi - b\,d\theta + a\,d\delta - d\lambda,$$
$$(d\bar{b})_0 = (2b^2 - \varpi)\,d\beta + 2\,bc\,d\gamma + 2ab\,d\alpha + a\,d\theta - c\,d\varphi + b\,d\delta - d\mu.$$
$$(d\bar{c})_0 = (2c^2 - \varpi)\,d\gamma + 2ac\,d\alpha + 2bc\,d\beta + b\,d\varphi - a\,d\psi + c\,d\delta - d\nu,$$
$$(d\bar{\rho})_0 = 2a\rho\,d\alpha + 2b\rho\,d\beta + 2c\rho\,d\gamma + \rho\,d\delta.$$

Formons

$$\frac{\partial f}{\partial a}(d\bar{a})_0 + \frac{\partial f}{\partial b}(d\bar{b})_0 + \frac{\partial f}{\partial c}(d\bar{c})_0 + \frac{\partial f}{\partial \rho}(d\bar{\rho})_0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left[(2a^2 - \varpi)\frac{\partial f}{\partial a} + 2ab\frac{\partial f}{\partial b} + 2ac\frac{\partial f}{\partial c} + 2a\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] d\alpha \\
&+ \left[(2b^2 - \varpi)\frac{\partial f}{\partial b} + 2bc\frac{\partial f}{\partial c} + 2ab\frac{\partial f}{\partial a} + 2b\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] d\beta \\
&+ \left[(2c^2 - \varpi)\frac{\partial f}{\partial c} + 2ac\frac{\partial f}{\partial a} + 2bc\frac{\partial f}{\partial b} + 2c\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] d\gamma \\
&+ \left(a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + \rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) d\delta \\
&+ \left(a\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial a}\right) d\theta + \left(b\frac{\partial f}{\partial c} - c\frac{\partial f}{\partial b}\right) d\varphi + \left(c\frac{\partial f}{\partial a} - a\frac{\partial f}{\partial c}\right) d\psi \\
&- \frac{\partial f}{\partial a}\,d\lambda - \frac{\partial f}{\partial b}\,d\mu - \frac{\partial f}{\partial c}\,d\nu.
\end{aligned}$$

Les opérateurs du groupe sont les coefficients des différentielles $d\alpha$, $d\beta$, ... :

$$
(\mathrm{G}') \quad \left\{ \begin{array}{l}
\mathrm{A}_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial a}, \\[2mm]
\mathrm{A}_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial b}, \\[2mm]
\mathrm{A}_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial c}, \\[2mm]
\mathrm{A}_4 f = b\dfrac{\partial f}{\partial a} - a\dfrac{\partial f}{\partial b}, \\[2mm]
\mathrm{A}_5 f = c\dfrac{\partial f}{\partial b} - b\dfrac{\partial f}{\partial c}, \\[2mm]
\mathrm{A}_6 f = a\dfrac{\partial f}{\partial c} - c\dfrac{\partial f}{\partial a}, \\[2mm]
\mathrm{A}_7 f = a\dfrac{\partial f}{\partial a} + b\dfrac{\partial f}{\partial b} + c\dfrac{\partial f}{\partial c} + \rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \\[2mm]
\mathrm{A}_8 f = (2a^2 - \varpi)\dfrac{\partial f}{\partial a} + 2ab\dfrac{\partial f}{\partial b} + 2ac\dfrac{\partial f}{\partial c} + 2a\rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \\[2mm]
\mathrm{A}_9 f = (2b^2 - \varpi)\dfrac{\partial f}{\partial b} + 2bc\dfrac{\partial f}{\partial c} + 2ab\dfrac{\partial f}{\partial a} + 2b\rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \\[2mm]
\mathrm{A}_{10} f = (2c^2 - \varpi)\dfrac{\partial f}{\partial c} + 2ac\dfrac{\partial f}{\partial a} + 2bc\dfrac{\partial f}{\partial b} + 2a\rho\dfrac{\partial f}{\partial \rho}.
\end{array} \right.
$$

Le groupe obtenu est holoédriquement isomorphe au groupe conforme; si nous formons les crochets de deux opérateurs, nous avons les mêmes constantes de structure :

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_8) = 2\mathrm{A}_7, & (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_9) = -2\mathrm{A}_4, & (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_{10}) = 2\mathrm{A}_6, & (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_7) = \mathrm{A}_1, \\
(\mathrm{A}_7, \mathrm{A}_8) = \mathrm{A}_8, & (\mathrm{A}_7, \mathrm{A}_9) = \mathrm{A}_9, & (\mathrm{A}_7, \mathrm{A}_{10}) = \mathrm{A}_{10}, & (\mathrm{A}_7, \mathrm{A}_4) = 0, \\
(\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_8) = -\mathrm{A}_9, & (\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_9) = -\mathrm{A}_8, & (\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_{10}) = 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(\mathrm{A}_{10}, \mathrm{A}_8) = 0, & (\mathrm{A}_{10}, \mathrm{A}_9) = 0. & &
\end{array}
$$

Le groupe (G′) n'a pas d'invariants; le nombre de variables est égal au nombre d'opérateurs linéairement indépendants.

## CHAPITRE XVI.

### ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'EQUATIONS QUI ADMETTENT LE GROUPE CONFORME DE LA SPHÈRE.

Les équations et les systèmes d'équations qui admettent le groupe (G′) doivent annuler tous les déterminants du même ordre de la matrice formée avec les coefficients des opérateurs $X_i f$.

Un determinant du troisième ordre est égal à 1 ; par suite, aucune équation et aucun système d'équations ne peuvent annuler tous les déterminants d'ordre inferieur à 4. Si nous désignons par $\varpi$ la quantité $a^2+b^2+c^2-\rho^2$, un déterminant du quatrième ordre s'écrit

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \rho \\ \varpi-2a^2 & -2ab & -2ac & -2a\rho \\ -2ba & \varpi-2b^2 & -2bc & -2b\rho \\ -2ac & -2bc & \varpi-2c^2 & -2c\rho \end{vmatrix} = -\varpi^3\rho.$$

L'équation $\rho=0$ admet tous les opérateurs du groupe. Nous avons d'autre part

$$X_1(\varpi)=2a, \qquad X_2(\varpi)=2b, \qquad X_3(\varpi)=2c,$$

ce qui nous montre qu'un système d'équations admettant les opérateurs $X_i f$ ne peut posséder l'équation $\varpi=0$ sans posséder en même temps les équations $a=0$, $b=0$, $c=0$, et alors l'équation $\varpi=0$, c'est-à-dire $a^2+b^2+c^2-\rho^2=0$, se réduit à $\rho=0$. Nous pouvons conclure que tout système d'équations qui admet le groupe (G′) doit posséder l'équation invariante

$$\rho=0.$$

---

## CHAPITRE XVII.

### INVARIANT DIFFERENTIEL DU PREMIER ORDRE.

Nous obtiendrons les invariants différentiels du premier ordre des surfaces enveloppes de sphères en calculant les invariants du groupe (G′) prolongé au premier ordre.

Introduisons les variables

$$a' = \frac{da}{dt}, \qquad b' = \frac{db}{dt}, \qquad c' = \frac{dc}{dt}, \qquad \rho' = \frac{d\rho}{dt}.$$

Les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a'}, \frac{\partial f}{\partial b'}, \cdots$ dans la transformation prolongée sont les dérivées des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \cdots$ dans la transformation considérée.

Les dix opérateurs du groupe prolongé sont donc :

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial a},$$

$$B_2 f = \frac{\partial f}{\partial b},$$

$$B_3 f = \frac{\partial f}{\partial c},$$

$$B_4 f = A_4 f + b' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial b'},$$

$$B_5 f = A_5 f + c' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial c'},$$

$$B_6 f = A_6 f + a' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial a'},$$

$$B_7 f = A_7 f + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'},$$

$$B_8 f = A_8 f + 2(2aa' - \varpi_{01})\frac{\partial f}{\partial a'} + 2(a'b + b'a)\frac{\partial f}{\partial b'} + 2(a'c + c'a)\frac{\partial f}{\partial c'} + 2(a'\rho + a\rho')\frac{\partial f}{\partial \rho'}$$

(en posant $\varpi_{01} = aa' + bb' + cc' - \rho\rho'$),

$$B_9 f = A_9 f + 2(2bb' - \varpi_{01})\frac{\partial f}{\partial b'} + 2(b'c + c'b)\frac{\partial f}{\partial c'} + 2(a'b + ab')\frac{\partial f}{\partial a'} + 2(b'\rho + b\rho')\frac{\partial f}{\partial \rho'},$$

$$B_{10} f = A_{10} f + 2(2cc' - \varpi_{01})\frac{\partial f}{\partial c'} + 2(c'a + a'c)\frac{\partial f}{\partial a'} + 2(b'c + c'b)\frac{\partial f}{\partial b'} + 2(c'\rho + c\rho')\frac{\partial f}{\partial \rho'}.$$

Ces opérateurs ne sont pas linéairement indépendants; nous avons

$$\begin{aligned} &c' B_4 f + a' B_5 f + b' B_6 f \\ &\quad + (b'c - bc') B_1 f + (ac' - a'c) B_2 f + (ba' - ab') B_3 f \equiv 0. \end{aligned}$$

Le système des équations $B_i f = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, 10$) admet une intégrale que nous allons calculer.

Une intégrale du système $B_i f = 0$ doit appartenir au système équivalent :

$$Y_1 f = b' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial b'} = 0,$$

$$Y_2 f = c' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial c'} = 0,$$

$$Y_3 f = a' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial a'} = 0,$$

$$Y_4 f = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0.$$

$$Y_5 f = a\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + (2aa' - \varpi_{01}) \frac{\partial f}{\partial a'} + (a'b + ab') \frac{\partial f}{\partial b'} + (a'c + ac') \frac{\partial f}{\partial c'} + (a'\rho + a\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

$$Y_6 f = b\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + (2bb' - \varpi_{01}) \frac{\partial f}{\partial b'} + (b'c + bc') \frac{\partial f}{\partial c'} + (b'a + ba') \frac{\partial f}{\partial a'} + (b'\rho + b\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

$$Y_7 f = c\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + (2cc' - \varpi_{01}) \frac{\partial f}{\partial c'} + (c'a + ca') \frac{\partial f}{\partial a'} + (c'b + cb') \frac{\partial f}{\partial b'} + (c'\rho + c\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0.$$

Remplaçons $Y_5 f = 0$, $Y_6 f = 0$, $Y_7 f = 0$ par les équations

$$Y_5 f - a Y_4 f - c Y_3 f + b Y_1 f = 0,$$
$$Y_6 f - b Y_4 f - a Y_1 f + c Y_2 f = 0,$$
$$Y_7 f - c Y_4 f - b Y_2 f + a Y_3 f = 0;$$

nous obtenons le système équivalent :

$$Z_1 f = b' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial b'} = 0,$$

$$Z_2 f = c' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial c'} = 0,$$

$$Z_3 f = a' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial a'} = 0,$$

$$Z_4 f = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

$$Z_5 f = \rho' \frac{\partial f}{\partial a'} + a' \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

$$Z_6 f = \rho' \frac{\partial f}{\partial b'} + b' \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

$$Z_7 f = \rho' \frac{\partial f}{\partial c'} + c' \frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0.$$

Les équations $Z_1 f = 0$, $Z_2 f = 0$, $Z_3 f = 0$ admettent les trois intégrales

$$\rho, \quad \rho', \quad a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Prenons comme variables dans les autres équations $\rho$, $\rho'$ et $\varpi_{11} = a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2$, elles se réduisent à deux :

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'} + 2\varpi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varpi_{11}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho'} = 0,$$

et finalement à l'équation

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + 2\varpi_{11} \frac{\partial f}{\partial \varpi_{11}} = 0,$$

qui admet l'intégrale

$$\mathrm{L} = \frac{\varpi_{11}}{\rho^2} = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2}{\rho^2}.$$

Soit $ds_1$ l'angle de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine, nous avons

$$\mathrm{L} = \frac{ds_1^2}{dt^2}.$$

Nous trouvons une autre interprétation géométrique de l'invariant différentiel du premier ordre en introduisant l'arc $l$ de la trajectoire du centre des sphères enveloppées :

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\rho^2} \frac{dl^2}{dt^2}\left(1 - \frac{d\rho^2}{dl^2}\right) = \frac{1}{\rho^4} \frac{dl^2}{dt^2}\left(\rho^2 - \rho^2 \frac{d\rho^2}{dl^2}\right),$$

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{R}^2}{\rho^4} \frac{dl^2}{dt^2};$$

$\rho^2 \dfrac{d\rho^2}{dl^2}$ est le carré de la distance du point $(a, b, c)$ au plan

$$(x - a)\, da + (y - b)\, db + (z - c)\, dc + \rho\, d\rho = 0;$$

R désigne le rayon du cercle caractéristique.

## CHAPITRE XVIII.

### EQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE QUI ADMETTENT LE GROUPE ($G'$) PROLONGÉ.

Nous pouvons former, avec l'invariant relatif L, l'équation invariante $L=0$, qui exprime que la sphère enveloppée est tangente à la sphère infiniment voisine; on a $d\rho=dl$; l'arc $l$ du lieu des centres $(\Omega)$ est égal au rayon $\rho$ de la sphère enveloppée. Les coordonnées du point de contact de la sphère avec la sphère infiniment voisine satisfont aux équations

$$\frac{x-a}{da}=\frac{y-b}{db}=\frac{z-c}{dc}=\frac{-\rho\,d\rho}{d\rho'}=\frac{-\rho}{d\rho}=-\frac{l}{dl},$$

d'où

$$x=a-l\frac{da}{dl},$$

$$y=b-l\frac{db}{dl},$$

$$z=c-l\frac{dc}{dl}.$$

Ce point décrit donc une développante $(\Gamma)$ de la courbe $(\Omega)$; le cercle caractéristique se réduit à un couple de droites isotropes, intersection de la sphère avec un de ses plans tangents. L'enveloppe est formée de deux surfaces réglées à génératrices isotropes; c'est la « surface canal isotrope » (¹), les deux systèmes de lignes de courbure sont confondus avec les génératrices isotropes, la ligne $(\Gamma)$ est un lieu d'ombilics de la surface.

Les autres équations et systèmes d'équations qui admettent le groupe prolongé doivent annuler tous les déterminants d'un même ordre de la matrice formée avec les coefficients des $B_i f (i=1, 2, \ldots, 10)$. Le système des équations $B_i f=0$ renferme huit variables et admet une intégrale; les déterminants de la matrice, d'ordre supérieur ou égal à 8, sont identiquement nuls. Les systèmes d'équations qui

(¹) E. VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*.

admettent le groupe doivent donc renfermer l'une au moins des équations obtenues en égalant à zéro un déterminant du septième ordre, par exemple le déterminant :

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & -b & 0 & c' & -b' & 0 \\
-c & 0 & a & -c' & 0 & a' & 0 \\
a & b & c & a' & b' & c' & \rho' \\
2a^2-\varpi & 2ab & 2ac & 2(2aa'-\varpi_{01}) & 2(ab'+a'b) & 2(ac'+a'c) & 2(a\rho'+a'\rho)
\end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est égal au produit

$$2a'c'\rho(a'^2+b'^2+c'^2-\rho'^2).$$

Les équations $\rho=0$ et $a'^2+b'^2+c'^2-\rho'^2=0$ ont déjà été obtenues; étudions l'équation $a'=0$.

$$\begin{aligned}
&B_1\ (a')=B_2(a')=B_3(a')=B_5(a')=B_7(a')=0,\\
&B_4\ (a')=b',\\
&B_6\ (a')=-c',\\
&B_8\ (a')=2(aa'-bb'-cc'+\rho\rho'),\\
&B_9\ (a')=2(bb'-cc'-aa'+\rho\rho'),\\
&B_{10}(a')=2(cc'-aa'-bb'+\rho\rho').
\end{aligned}$$

Ces résultats nous montrent qu'un système d'équations qui renfermerait l'équation $a'=0$ devrait renfermer en même temps les équations $b'=0$, $c'=0$, et l'une des deux équations $\rho=0$, $\rho'=0$; les quatre quantités $a, b, c, \rho$ seraient alors constantes, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Tous les systèmes d'équations obtenus avec la matrice doivent donc renfermer l'équation $\rho=0$.

---

## CHAPITRE XIX.

### INVARIANT DIFFÉRENTIEL DU SECOND ORDRE.

1. Les invariants différentiels du second ordre des surfaces enveloppes de sphères sont les invariants du groupe (G′) prolongé au second ordre. Introduisons les variables

$$a''=\frac{da'}{dt},\qquad b''=\frac{db'}{dt},\qquad c''=\frac{dc'}{dt},\qquad \rho''=\frac{d\rho'}{dt},$$

les coefficients des quantités $\frac{\partial f}{\partial a''}$, $\frac{\partial f}{\partial b''}$, $\frac{\partial f}{\partial c''}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho''}$ dans la transformation prolongée sont les dérivées des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a'}$, $\frac{\partial f}{\partial b'}$, $\frac{\partial f}{\partial c'}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho'}$ de la transformation $B_i f$; les dix transformations du groupe prolongé au second ordre sont :

$$C_1 f = B_1 f = \frac{\partial f}{\partial a},$$

$$C_2 f = B_2 f = \frac{\partial f}{\partial b},$$

$$C_3 f = B_3 f = \frac{\partial f}{\partial c},$$

$$C_4 f = B_4 f + b''\frac{\partial f}{\partial a''} - a''\frac{\partial f}{\partial b''},$$

$$C_5 f = B_5 f + c''\frac{\partial f}{\partial b''} - b''\frac{\partial f}{\partial c''},$$

$$C_6 f = B_6 f + a''\frac{\partial f}{\partial c''} - c''\frac{\partial f}{\partial a''},$$

$$C_7 f = B_7 f + a''\frac{\partial f}{\partial a''} + b''\frac{\partial f}{\partial b''} + c''\frac{\partial f}{\partial c''} + \rho''\frac{\partial f}{\partial \rho''},$$

$$\begin{aligned} C_8 f = B_8 f &+ 2(2a'^2 - \varpi_{11} + 2aa'' - \varpi_{02})\frac{\partial f}{\partial a''} + 2(a''b + 2a'b' + ab'')\frac{\partial f}{\partial b''} \\ &+ 2(a''c + 2a'c' + ac'')\frac{\partial f}{\partial c''} + 2(a''\rho + 2a'\rho' + a\rho'')\frac{\partial f}{\partial \rho''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_9 f = B_9 f &+ 2(2b'^2 - \varpi_{11} + 2bb'' - \varpi_{02})\frac{\partial f}{\partial b''} + 2(b''c + 2b'c' + bc'')\frac{\partial f}{\partial c''} \\ &+ 2(b''a + 2b'a' + ba'')\frac{\partial f}{\partial a''} + 2(b''\rho + 2b'\rho' + b\rho'')\frac{\partial f}{\partial \rho''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{10} f = B_{10} f &+ 2(2c'^2 - \varpi_{11} + 2cc'' - \varpi_{02})\frac{\partial f}{\partial c''} + 2(c''a + 2c'a' + ca'')\frac{\partial f}{\partial a''} \\ &+ 2(c''b + 2c'b' + cb'')\frac{\partial f}{\partial b''} + 2(c''\rho + 2c'\rho' + c\rho'')\frac{\partial f}{\partial \rho''}. \end{aligned}$$

Les invariants sont les intégrales du système d'équations

$$C_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10)$$

ou du système équivalent obtenu en remplaçant

$$C_8 f, \quad C_9 f, \quad C_{10} f$$

par les combinaisons linéaires

$$\frac{1}{2} C_8 f - a C_7 f - c C_6 f + b C_4 f,$$

$$\frac{1}{2} C_9 f - b C_7 f - a C_4 f + c C_5 f,$$

$$\frac{1}{2} C_{10} f - c C_7 f - b C_5 f + a C_6 f,$$

et en supprimant tous les termes en $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$.

Les équations de ce système sont :

$$Y_1 f = b' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial b'} + b'' \frac{\partial f}{\partial a''} - a'' \frac{\partial f}{\partial b''} = 0.$$

$$Y_2 f = c' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial c'} + c'' \frac{\partial f}{\partial b''} - b'' \frac{\partial f}{\partial c''} = 0,$$

$$Y_3 f = a' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial a'} + a'' \frac{\partial f}{\partial c''} - c'' \frac{\partial f}{\partial a''} = 0,$$

$$Y_4 f = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'} + a'' \frac{\partial f}{\partial a''} + b'' \frac{\partial f}{\partial b''} + c'' \frac{\partial f}{\partial c''} + \rho'' \frac{\partial f}{\partial \rho''} = 0,$$

$$Y_5 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial a'} + a'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (2a'^2 - \varpi_{11} + \rho\rho'') \frac{\partial f}{\partial a''} + 2a'b' \frac{\partial f}{\partial b''} + 2a'c' \frac{\partial f}{\partial c''} + (a''\rho + 2a'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''} = 0,$$

$$Y_6 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial b'} + b'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (2b'^2 - \varpi_{11} + \rho\rho'') \frac{\partial f}{\partial b''} + 2b'c' \frac{\partial f}{\partial c''} + 2a'b' \frac{\partial f}{\partial a''} + (b''\rho + 2b'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''} = 0,$$

$$Y_7 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial c'} + c'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (2c'^2 - \varpi_{11} + \rho\rho'') \frac{\partial f}{\partial c''} + 2a'c' \frac{\partial f}{\partial a''} + 2b'c' \frac{\partial f}{\partial b''} + (c''\rho + 2c'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''} = 0.$$

Les trois équations $Y_1 f = 0$, $Y_2 f = 0$, $Y_3 f = 0$ admettent six intégrales indépendantes :

$$\rho, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2,$$
$$\rho', \quad a''^2 + b''^2 + c''^2,$$
$$\rho'', \quad a'a'' + b'b'' + c'c''.$$

Posons

$$\varpi_{12} = a'a'' + b'b'' + c'c'' - \rho'\rho'',$$
$$\varpi_{22} = a''^2 + b''^2 + c''^2 - \rho''^2,$$

et prenons comme nouvelles variables les six quantités

$$\rho, \quad \rho', \quad \rho'',$$
$$L = \frac{\varpi_{11}}{\rho^2}, \qquad L' = 2\frac{\varpi_{12} - \rho\rho' L}{\rho^2}, \qquad \varpi_{22}.$$

Le nombre des équations se réduit à quatre après ce changement de variables, car L′ est une intégrale ; ces équations sont :

$$Z_1 f = a'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (a''\rho + 2a'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2(2a'\varpi_{12} - a''\varpi_{11})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$Z_2 f = b'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (b''\rho + 2b'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2(2b'\varpi_{12} - b''\varpi_{11})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$Z_3 f = c'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (c''\rho + 2c'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2(2c'\varpi_{12} - c''\varpi_{11})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$Z_4 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'} + \rho''\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2\varpi_{22}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0.$$

Les trois quantités $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ ne sont pas linéairement indépendantes. Nous pouvons considérer $Z_3 f$ comme définie en fonction de $Z_1 f$, $Z_2 f$ par l'équation

$$(b''c' - b'c'')(a'Z_2 f - b'Z_1 f) - (a'b'' - b'a'')(b'Z_3 f - c'Z_2 f) = 0$$

et le système se ramène aux trois équations

$$T_1 f = a'Z_2 f - b'Z_1 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho''} - 2\varpi_{11}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$T_2 f = a''Z_2 f - b''Z_1 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + 2\rho'\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 4\varpi_{12}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$T_3 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'} + \rho''\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2\varpi_{22}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}}.$$

Nous pouvons remplacer $\varpi_{11}$ par $\rho^2 L$, $\varpi_{12}$ par $\frac{1}{2}\rho^2 L' + \rho\rho' L$; les équations deviennent :

$$\frac{1}{\rho}T_1 f = \frac{\partial f}{\partial\rho''} - 2\rho L\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$T_2 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + 2\rho'\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2\rho(\rho L + 2\rho' L)\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0,$$
$$T_3 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'} + \rho''\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 2\varpi_{22}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{22}} = 0.$$

Ce système de trois équations renferme quatre variables et admet l'intégrale

$$M = \frac{\rho\varpi_{22} - 4\rho'\varpi_{12} + 2\rho''\varpi_{11}}{\rho^3}.$$

En résumé, le groupe prolongé au second ordre admet trois invariants :

$$L = \frac{\varpi_{11}}{\rho^2}, \qquad M, \qquad L' = 2\,\frac{\varpi_{12} - \rho\rho' L}{\rho^2}.$$

Nous pouvons former une combinaison de ces trois invariants, indépendante du choix du paramètre ; c'est l'invariant absolu

$$m^2 = \frac{LM - \frac{1}{4}L'^2 - L^3}{L^3}.$$

2. Pour interpréter géométriquement cet invariant, introduisons les variables $w$, $p$, R :

$$w = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' - \omega_{11}\rho'^2}{\omega_{11}^{\frac{3}{2}}},$$

$$p = -\frac{\sqrt{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2}}{\omega_{11}},$$

$$R^2 = \rho^2\,\frac{\varpi_{11}}{\omega_{11}}.$$

Nous trouvons

$$m^2 = (p^2 R^2 - w^2)\,\frac{\rho^6}{R^6}\left(\frac{dt}{dl}\right)^2$$

($l$ désigne l'arc de la trajectoire du centre de l'enveloppée).

L'angle $\Phi$ que forme l'axe des X avec le rayon qui passe par l'un des points caractéristiques est donné par l'équation

$$\cos^2\Phi = \frac{p^2 R^2 - w^2}{p^2 R^2};$$

nous avons donc

$$m^2 = \cos^2\Phi\,\frac{\rho^6}{R^4}\left(p\,\frac{dt}{dl}\right)^2.$$

Or, la courbure $h$ de la trajectoire du centre de l'enveloppée est égale à $-p\,\dfrac{dt}{dl}$; par suite,

$$m^2 = \frac{\rho^6}{R^4}\,h^2\cos^2\Phi.$$

3. Introduisons un autre élément géométrique : considérons en un point du cercle caractéristique, la ligne de courbure non circulaire ; le centre de courbure correspondant décrit une conique quand le point considéré décrit le cercle.

Soit V l'angle que fait la sphère enveloppée avec le plan (X, Y) du cercle ; la conique est l'intersection du cône des normales

$$X^2 + Y^2 = (R - Z \operatorname{tang} V)^2$$

avec le plan (1)

$$pY + \varpi - Z \operatorname{tang} V \frac{dV}{dt} = 0;$$

ce plan est perpendiculaire au plan ZOY, plan osculateur du lieu du centre $\Omega$ de la sphère et passe par la caractéristique $pY + \varpi = 0$ du plan du cercle.

Soient $\gamma_1$, $\gamma_2$ les points de la conique situés dans le plan ZOY et les points correspondants $K_1$, $K_2$ du cercle. L'angle $\Psi$ des sphères de centre $\gamma_1$, $\gamma_2$ et de rayon $\rho_1 = \overline{K_1\gamma_1}$, $\rho_2 = \overline{K_2\gamma_2}$ est donné par la formule

$$1 + \cos\Psi = \frac{\overline{\gamma_1\gamma_2}^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}{2\rho_1\rho_2}.$$

Si nous tenons compte des relations

$$\overline{\gamma_1\gamma_2}^2 = (\rho - \rho_1)^2 + (\rho - \rho_2)^2 - 2(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\cos 2V,$$
$$\sin V = \frac{R}{\rho},$$

nous avons

$$1 + \cos\Psi = 2R^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right).$$

$ds_1$ désignant l'angle de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine, $\varphi$ l'angle que fait avec OX le rayon relatif à un point quelconque du cercle ; la différence des courbures en ce point est (Chap. VIII)

$$\frac{\sin V}{\varpi + pR\sin\varphi}\,\frac{ds_1}{dt}.$$

(1) DEMARTRES, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885, p. 146.

Appliquons cette formule aux cas particuliers $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ :

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{\sin V}{w + pR} \frac{ds_1}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} = \frac{\sin V}{w - pR} \frac{ds_1}{dt};$$

d'où

$$1 + \cos\Psi = \frac{2R^2 \sin^2 V}{w^2 - p^2R^2} \frac{ds_1^2}{dt^2},$$

$$\cos^2\frac{\Psi}{2} = \frac{R^4}{\rho^2} \frac{1}{w^2 - p^2R^2} \frac{ds_1^2}{dt^2},$$

$$1 + \tang^2\frac{\Psi}{2} = \frac{\rho^2}{R^4}(w^2 - p^2R^2)\frac{\rho^2}{\varpi_{11}};$$

or

$$\varpi_{11} = \frac{R^2}{\rho^2}\omega_{11} = \frac{R^2}{\rho^2}\frac{dl^2}{dt^2},$$

donc

$$1 + \tang^2\frac{\Psi}{2} = \frac{\rho^6}{R^6}(w^2 - p^2R^2)\frac{dt^2}{dl^2},$$

$$1 + \tang^2\frac{\Psi}{2} = -m^2.$$

4. Soit $ds$ l'angle de deux cercles caractéristiques infiniment voisins ; nous avons

$$m^2 = \frac{ds^2}{ds_1^2}.$$

En effet, les formules (III) (Chap. IV) donnent

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{u^2 + v^2 - R'^2 - w^2 + p^2R^2}{R^2}.$$

Si la génératrice est le cercle caractéristique d'une sphère, on a

$$u = 0, \qquad R' = \frac{wv}{Rp},$$

d'où

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{p^2R^2 - w^2}{R^4} \frac{v^2 + p^2R^2}{p^2};$$

or le rayon $\rho$ de l'enveloppée vérifie la relation (Chap. XII)

$$\rho^2 = \frac{v^2 + p^2R^2}{p^2};$$

par conséquent,

(1) $$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{p^2 R^2 - \varpi^2}{R^4} \rho^2.$$

Soit $l$ l'arc de la ligne des centres de l'enveloppée; nous avons trouvé

$$m^2 = \frac{p^2 R^2 - \varpi^2}{R^6} \rho^6 \frac{dt^2}{dl^2}.$$

$$\frac{ds_1^2}{dt^2} = \frac{R^2}{\rho^4} \frac{dl^2}{dt^2},$$

d'où

(2) $$m^2 = \frac{p^2 R^2 - \varpi^2}{R^4} \rho^2 \frac{dt^2}{ds_1^2}$$

et, d'après (1),

(3) $$m^2 = \frac{ds^2}{ds_1^2}.$$

5. Deux génératrices consécutives ayant deux points communs, la condition de rencontre $\Delta' - \Delta'_1 = 0$ est vérifiée, les invariants relatifs $\Delta, \Delta_1$ des surfaces cerclées générales deviennent égaux; nous avons alors

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d\sigma}{dt} \frac{d\sigma'}{dt},$$

si $d\tau$, $d\tau'$ désignent les éléments d'arcs des focales; l'équation (3) peut donc s'écrire

$$m^2 = \frac{1}{R^2} \frac{d\sigma}{ds_1} \frac{d\sigma'}{ds_1}.$$

## CHAPITRE XX.

### EQUATIONS ET SYSTÈMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE QUI ADMETTENT LE GROUPE (G') PROLONGE.

Les équations invariantes de la première classe sont de la forme

$$m = \text{const.}$$

L'équation $m = 0$ exprime que les foyers du cercle caractéristique décrivent des courbes minima et que l'angle de deux génératrices consécutives est nul; d'après l'équation (2) du Chapitre XIX, pour que $m$ soit nul, on doit avoir, en supposant le rayon de l'enveloppée différent de zéro,

$$w = \pm p\mathrm{R};$$

la génératrice est alors tangente à la caractéristique de son plan; si cette droite est fixe, on a une anallagmatique à déférente plane dont les deux points doubles sont confondus; dans le cas contraire, la génératrice est le cercle osculateur de la courbe décrite par son point de contact avec la droite, la surface est l'enveloppe de la sphère osculatrice d'une courbe gauche.

Tous les déterminants du dixième ordre de la matrice formée avec les coefficients des transformations prolongées jusqu'au deuxième ordre sont nuls; les systèmes d'équations de la deuxième classe doivent donc renfermer l'une au moins des équations obtenues en égalant à zéro l'un des déterminants du neuvième ordre, par exemple le déterminant formé avec les coefficients de

$$\frac{\partial f}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \quad \frac{\partial f}{\partial c}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial f}{\partial a'}, \quad \frac{\partial f}{\partial b'}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho'}, \quad \frac{\partial f}{\partial a''}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho''},$$

c'est-à-dire

$$4\rho^3 c'(b''c' - b'c'')(b''a' - b'a'');$$

nous étudierons ces systèmes d'équations en même temps que les équations invariantes du troisième ordre.

---

## CHAPITRE XXI.

### INVARIANTS DIFFÉRENTIELS DU TROISIÈME ORDRE.

Les invariants différentiels du troisième ordre des surfaces enveloppes de sphères sont les invariants du groupe (G') prolongé au troisième ordre. Introduisons les variables

$$a''' = \frac{da''}{dt}, \qquad b''' = \frac{db''}{dt}, \qquad c''' = \frac{dc''}{dt}, \qquad \rho''' = \frac{d\rho''}{dt}.$$

Les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a'''}$, $\frac{\partial f}{\partial b'''}$, $\frac{\partial f}{\partial c'''}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho'''}$ dans la transformation prolongée sont les dérivées des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial a''}$, $\frac{\partial f}{\partial b''}$, $\frac{\partial f}{\partial c''}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho''}$ dans la transformation prolongée au second ordre.

Les dix transformations ainsi obtenues sont :

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial a},$$

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial b},$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial c},$$

$$X_4 f = C_4 f + b''' \frac{\partial f}{\partial a'''} - a''' \frac{\partial f}{\partial b'''},$$

$$X_5 f = C_5 f + c''' \frac{\partial f}{\partial b'''} - b''' \frac{\partial f}{\partial c'''},$$

$$X_6 f = C_6 f + a''' \frac{\partial f}{\partial c'''} - c''' \frac{\partial f}{\partial a'''},$$

$$X_7 f = C_7 f + a''' \frac{\partial f}{\partial a'''} + b''' \frac{\partial f}{\partial b'''} + c''' \frac{\partial f}{\partial c'''} + \rho''' \frac{\partial f}{\partial \rho'''},$$

$$\begin{aligned} X_8 f = C_8 f &+ 2[2aa''' - \varpi_{03} + 3(2a'a'' - \varpi_{12})]\frac{\partial f}{\partial a'''} + 2[a'''b + 3(a''b' + b''a') + b'''a]\frac{\partial f}{\partial b'''} \\ &+ 2[a'''c + 3(a''c' + a'c'') + ac''']\frac{\partial f}{\partial c'''} + 2[a'''\rho + 3(a''\rho' + a'\rho'') + a\rho''']\frac{\partial f}{\partial \rho'''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_9 f = C_9 f &+ 2[2bb''' - \varpi_{03} + 3(2b'b'' - \varpi_{12})]\frac{\partial f}{\partial b'''} + 2[b'''c + 3(b''c' + c''b') + c'''b]\frac{\partial f}{\partial c'''} \\ &+ 2[b'''a + 3(b''a' + b'a'') + ba''']\frac{\partial f}{\partial a'''} + 2[b'''\rho + 3(b''\rho' + b'\rho'') + b\rho''']\frac{\partial f}{\partial \rho'''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{10} f = C_{10} f &+ 2[2cc''' - \varpi_{03} + 3(2c'c'' - \varpi_{12})]\frac{\partial f}{\partial c'''} + 2[c'''a + 3(c''a' + c'a'') + a'''c]\frac{\partial f}{\partial a'''} \\ &+ 2[c'''b + 3(c''b' + c'b'') + cb''']\frac{\partial f}{\partial b'''} + 2[c'''\rho + 3(c''\rho' + c'\rho'') + c\rho''']\frac{\partial f}{\partial \rho'''}. \end{aligned}$$

(Nous avons posé $\varpi_{03} = aa''' + bb''' + cc''' - \rho\rho'''$.)

Les invariants sont les intégrales du système d'équations $X_i f = 0$ ou du système équivalent obtenu en supprimant les termes en $\frac{\partial f}{\partial a}$,

$\frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ et en remplaçant $X_8 f$, $X_9 f$, $X_{10} f$ par

$$\begin{aligned}
Y_5 f &= X_8\, f + 2b X_4 f - 2c X_6 f - 2a X_7 f,\\
Y_6 f &= X_9\, f + 2c X_5 f - 2a X_4 f - 2b X_7 f,\\
Y_7 f &= X_{10} f + 2a X_6 f - 2b X_5 f - 2c X_7 f.
\end{aligned}$$

Les équations de ce système sont :

$$Y_1 f = b' \frac{\partial f}{\partial a'} - a' \frac{\partial f}{\partial b'} + b'' \frac{\partial f}{\partial a''} - a'' \frac{\partial f}{\partial b''} + b''' \frac{\partial f}{\partial a'''} - a''' \frac{\partial f}{\partial b'''} = 0,$$

$$Y_2 f = c' \frac{\partial f}{\partial b'} - b' \frac{\partial f}{\partial c'} + c'' \frac{\partial f}{\partial b''} - b'' \frac{\partial f}{\partial c''} + c''' \frac{\partial f}{\partial b'''} - b''' \frac{\partial f}{\partial c'''} = 0,$$

$$Y_3 f = a' \frac{\partial f}{\partial c'} - c' \frac{\partial f}{\partial a'} + a'' \frac{\partial f}{\partial c''} - c'' \frac{\partial f}{\partial a''} + a''' \frac{\partial f}{\partial c'''} - c''' \frac{\partial f}{\partial a'''} = 0,$$

$$\begin{aligned}
Y_4 f = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} &+ a' \frac{\partial f}{\partial a'} + b' \frac{\partial f}{\partial b'} + c' \frac{\partial f}{\partial c'} + \rho' \frac{\partial f}{\partial \rho'}\\
&+ a'' \frac{\partial f}{\partial a''} + b'' \frac{\partial f}{\partial b''} + c'' \frac{\partial f}{\partial c''} + \rho'' \frac{\partial f}{\partial \rho''} + a''' \frac{\partial f}{\partial a'''} + b''' \frac{\partial f}{\partial b'''} + c''' \frac{\partial f}{\partial c'''} + \rho''' \frac{\partial f}{\partial \rho'''} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_5 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial a'} &+ a'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (\rho\rho'' - \varpi_{11} + 2a'^2) \frac{\partial f}{\partial a''} + 2a'b' \frac{\partial f}{\partial b''} + 2a'c' \frac{\partial f}{\partial c''} + (a''\rho + 2a'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''}\\
&+ (\rho\rho''' - 3\varpi_{12} + 6a'a'') \frac{\partial f}{\partial a'''} + 3(a''b' + b''a') \frac{\partial f}{\partial b'''} + 3(a''c' + a'c'') \frac{\partial f}{\partial c'''} + [3(a''\rho' + a'\rho'') + a'''\rho] \frac{\partial f}{\partial \rho'''} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_6 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial b'} &+ b'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (\rho\rho'' - \varpi_{11} + 2b'^2) \frac{\partial f}{\partial b''} + 2b'c' \frac{\partial f}{\partial c''} + 2a'b' \frac{\partial f}{\partial a''} + (b''\rho + 2b'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''}\\
&+ (\rho\rho''' - 3\varpi_{12} + 6b'b'') \frac{\partial f}{\partial b'''} + 3(b''c' + c''b') \frac{\partial f}{\partial c'''} + 3(b''a' + a'b'') \frac{\partial f}{\partial a'''} + [3(b''\rho' + b'\rho'') + b'''\rho] \frac{\partial f}{\partial \rho'''} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7 f = \rho\rho' \frac{\partial f}{\partial c'} &+ c'\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + (\rho\rho'' - \varpi_{11} + 2c'^2) \frac{\partial f}{\partial c''} + 2a'c' \frac{\partial f}{\partial a''} + 2b'c' \frac{\partial f}{\partial b''} + (c''\rho + 2c'\rho') \frac{\partial f}{\partial \rho''}\\
&+ (\rho\rho''' - 3\varpi_{12} + 6c'c'') \frac{\partial f}{\partial c'''} + 3(c''a' + a''c') \frac{\partial f}{\partial a'''} + 3(c''b' + b'c'') \frac{\partial f}{\partial b'''} + [3(c''\rho' + c'\rho'') + c'''\rho] \frac{\partial f}{\partial \rho'''} = 0.
\end{aligned}$$

Le système des trois équations

$$Y_1 f = 0, \qquad Y_2 f = 0, \qquad Y_3 f = 0$$

admet les dix intégrales indépendantes :

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= a'^2 + b'^2 + c'^2, & \omega_{12} &= a'a'' + b'b'' + c'c'',\\
\omega_{22} &= a''^2 + b''^2 + c''^2, & \omega_{13} &= a'a''' + b'b''' + c'c''',\\
\omega_{33} &= a'''^2 + b'''^2 + c'''^2, & \omega_{23} &= a''a''' + b''b''' + c''c''',
\end{aligned}$$

$$\rho, \quad \rho', \quad \rho'', \quad \rho'''.$$

Nous pouvons prendre comme nouvelles variables :

$$L = \frac{\varpi_{11}}{\rho^2}, \qquad L' = \frac{2}{\rho^3}(\rho\varpi_{12} - \rho'\varpi_{11}),$$
$$M = \frac{2\rho''\varpi_{11} - 4\rho'\varpi_{12} + \rho\varpi_{22}}{\rho^3},$$
$$L'' = \frac{2}{\rho^4}[(3\rho'^2 - \rho\rho'')\varpi_{11} - 4\rho\rho'\varpi_{12} + \rho^2\varpi_{22} + \rho^2\varpi_{13}],$$
$$M' = \frac{2}{\rho^4}[(\rho\rho''' - 3\rho'\rho'')\varpi_{11} + 6\rho'^2\varpi_{12} - 3\rho\rho'\varpi_{22} - 2\rho\rho'\varpi_{13} + \rho^2\varpi_{23}],$$
$$\rho, \quad \rho', \quad \rho'', \quad \varpi_{33} = \omega_{33} - \rho'''.$$

Les quantités L, L′, L″, M, M′ sont intégrales du système.

Ce changement de variables donne dans les quatre dernières équations :

$$Z_1 f = a'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (a''\rho + 2a'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''}$$
$$+ [a'''\rho + 3(a''\rho' + a'\rho'')]\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 6(a''\varpi_{13} + a'\varpi_{23} - a'''\varpi_{12})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$Z_2 f = b'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (b''\rho + 2b'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''}$$
$$+ [b'''\rho + 3(b''\rho' + b'\rho'')]\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 6(b''\varpi_{13} + b'\varpi_{23} - b'''\varpi_{12})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$Z_3 f = c'\rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + (c''\rho + 2c'\rho')\frac{\partial f}{\partial\rho''}$$
$$+ [c'''\rho + 3(c''\rho' + c'\rho'')]\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 6(c''\varpi_{13} + c'\varpi_{23} - c'''\varpi_{12})\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$Z_4 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'} + \rho''\frac{\partial f}{\partial\rho''} + \rho'''\frac{\partial f'}{\partial\rho'''} + 2\varpi_{33}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0.$$

Remplaçons les trois premières équations par les combinaisons

$$(c'b'' - b'c'')Z_1 + (a'c'' - a''c')Z_2 + (a''b' - a'b'')Z_3 = 0,$$
$$(a'c''' - c'a''')Z_2 + (b'a''' - a'b''')Z_3 + (b'''c' - b'c''')Z_1 = 0,$$
$$(a'''b'' - b'''a'')Z_3 + (c''b''' - c'''b'')Z_1 + (c'''a'' - c''a''')Z_2 = 0.$$

Nous obtenons le système jacobien :

$$T_1 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho'''} - 6\varpi_{12}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$T_2 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho''} - 3\rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 6\varpi_{13}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$T_3 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho'} + 2\rho'\frac{\partial f}{\partial\rho''} + 3\rho''\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 6\varpi_{23}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0,$$
$$T_4 f = \rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial f}{\partial\rho'} + \rho''\frac{\partial f}{\partial\rho''} + \rho'''\frac{\partial f}{\partial\rho'''} + 2\varpi_{33}\frac{\partial f}{\partial\varpi_{33}} = 0.$$

$\varpi_{12}$, $\varpi_{13}$, $\varpi_{23}$, sont des fonctions de $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, $\rho'''$ définies par les équations

$$\varpi_{12} = \frac{1}{2}\rho^2 L' + \rho\rho' L,$$

$$\rho^2\varpi_{13} = \frac{1}{2}\rho^4(L'' - 2M) + 3\rho^3\rho'' L - 3\rho^2\rho'^2 L,$$

$$\rho^3\varpi_{23} = \frac{1}{2}\rho^5 M' + \rho^4\rho'(L'' + M) + 3\rho^3 L'\rho'^2 + (3\rho'\rho'' - \rho\rho''')\rho^3 L.$$

Le système des équations $Tf = 0$ admet une intégrale et une seule :

$$N = \frac{1}{\rho^4}[3(2\rho'\rho''' - 3\rho''^2)\varpi_{11} + 6(3\rho'\rho'' - \rho\rho''')\varpi_{12}$$
$$- 9\rho'^2\varpi_{22} + 6(\rho\rho'' - 2\rho'^2)\varpi_{13} + 6\rho\rho'\varpi_{23} - \rho^2\varpi_{33}].$$

En résumé les intégrales du groupe G′ prolongé au troisième ordre sont :

$$L = \frac{\varpi_{11}}{\rho^2},$$

$$L' = 2\,\frac{\varpi_{12} - \rho\rho' L}{\rho^2},$$

$$M = \frac{\rho\varpi_{22} - 4\rho'\varpi_{12} + 2\rho''\varpi_{11}}{\rho^3},$$

$$L'' = \frac{2}{\rho^4}[(3\rho'^2 - \rho\rho'')\varpi_{11} - 4\rho\rho'\varpi_{12} + \rho^2(\varpi_{22} + \varpi_{13})],$$

$$M' = \frac{2}{\rho^4}[(\rho\rho''' - 3\rho'\rho'')\varpi_{11} + 6\rho'^2\varpi_{12} - 3\rho\rho'\varpi_{22} - 2\rho\rho'\varpi_{13} + \rho^2\varpi_{23}],$$

$$N = \frac{1}{\rho^4}[3(2\rho'\rho''' - 3\rho''^2)\varpi_{11} + 6(3\rho'\rho'' - \rho\rho''')\varpi_{12} - 9\rho'^2\varpi_{22}$$
$$+ 6(\rho\rho'' - 2\rho'^2)\varpi_{13} + 6\rho\rho'\varpi_{23} - \rho^2\varpi_{33}].$$

Nous pouvons former avec ces six invariants, trois combinaisons indépendantes du choix du paramètre, c'est à-dire trois invariants absolus distincts. Nous connaissons déjà un de ces invariants :

$$m^2 = \frac{ML - \frac{1}{4}L'^2 - L^4}{L^3}.$$

Nous obtenons un deuxième invariant absolu en formant

$$\frac{\frac{dm}{dt}}{\sqrt{L}} = \frac{[2(M'L + ML') - L'L'']L - 6L'\left(ML - \frac{1}{4}L'^2\right)}{2mL^4\sqrt{L}}.$$

D'une manière générale, soit I un invariant absolu ; la quantité $\dfrac{\frac{dI}{dt}}{\sqrt{L}}$ est encore un invariant absolu. En effet, considérons un nouveau paramètre $\tau$ lié à $t$ par l'équation $t = g(\tau)$, nous avons

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{dI}{dt} g'; \tag{1}$$

d'autre part,

$$\sqrt{L} = \frac{\sqrt{\varpi_{11}}}{\rho} = \frac{1}{\rho}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2}$$

donne

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{a_\tau'^2 + b_\tau'^2 + c_\tau'^2 - \rho_\tau'^2} = \frac{g'}{\rho}\sqrt{a_t'^2 + b_t'^2 + c_t'^2 - \rho_t'^2}. \tag{2}$$

Divisons membre à membre les équations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{\dfrac{dI}{d\tau}}{\dfrac{1}{\rho}\sqrt{a_\tau'^2 + b_\tau'^2 + c_\tau'^2 - \rho_\tau'^2}} = \frac{\dfrac{dI}{dt}}{\dfrac{1}{\rho}\sqrt{a_t'^2 + b_t'^2 + c_t'^2 - \rho_t'^2}}.$$

L'invariant $\dfrac{I'}{\sqrt{L}}$ ne change donc pas quand on prend un nouveau paramètre, c'est un invariant absolu ; $\sqrt{L}\,dt$ est un *paramètre différentiel*.

Soit $ds_1$ l'angle de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine, nous avons trouvé $\sqrt{L} = \dfrac{ds_1}{dt}$; l'invariant absolu $\dfrac{I'}{\sqrt{L}}$ peut donc s'écrire $\dfrac{dI}{ds_1}$. Si nous prenions $s_1$ comme paramètre, nous obtiendrions un nouvel invariant absolu par une simple différentiation par rapport à $s_1$.

Les deux invariants $m$ et $\dfrac{dm}{ds_1}$ sont indépendants de l'intégrale N. Nous pouvons donc choisir comme troisième invariant fondamental tout invariant absolu du troisième ordre renfermant N ou simplement $\varpi_{33} = a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 - \rho'''^2$, quantité qui n'entre pas dans les autres intégrales. Un invariant du troisième ordre qui dépend de $\varpi_{33}$ est la quantité $\dfrac{d\beta}{ds_1}$; $d\beta$ désigne l'angle que fait, avec la sphère infiniment voisine, la sphère passant par les points caractéristiques et orthogonale au cercle caractéristique (Chap. XXV).

Soient X, Y, Z les coordonnées relatives du centre de cette sphère; $\rho_1$ son rayon; $\delta X$, $\delta Y$, $\delta Z$ les accroissements de ces coordonnées par rapport aux axes fixes. On a

$$\frac{d\beta^2}{dt^2} = \frac{\frac{\delta X^2}{dt^2} + \frac{\delta Y^2}{dt^2} + \frac{\delta Z^2}{dt^2} - \rho_1'^2}{\rho^2} \qquad (X = o, Z = o),$$

$$\frac{\delta X}{dt} = u + qZ - rY + \frac{dX}{dt} = -rY,$$

$$\frac{\delta Y}{dt} = v + rX - pZ + \frac{dY}{dt} = v + Y',$$

$$\frac{\delta Z}{dt} = w + pY + \frac{dZ}{dt} = w + pY.$$

Désignons par $Y_1$ l'ordonnée des points caractéristiques :

$Y_1$ est donnée par l'équation de la caractéristique : $w + pY = o$.

Y vérifie la relation $R^2 = Y.Y_1$.

Le rayon $\rho_1$ est défini par l'équation $\rho_1'^2 = Y^2 - R^2$.

L'invariant $\frac{d\beta}{ds_1}$ dépend donc de $r$, et par suite de $\varpi_{33}$, car on a

$$r'' = \frac{\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{vmatrix}}{(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}'^2)^2}\,\omega_{11}.$$

Un autre invariant du troisième ordre peut s'obtenir de la manière suivante : Considérons les courbes (C), ($C_1$) de la surface, décrites par les points caractéristiques A, $A_1$; ces courbes, ainsi que les points caractéristiques se conservent dans une transformation conforme; la sphère (S), passant par le cercle osculateur en un point A de la courbe (C) et orthogonale à la sphère enveloppée, garde sa définition dans une transformation conforme; son centre est le centre de courbure géodésique de la courbe (C). Soit $\theta$ l'angle de la sphère (S) et de la sphère ($S_1$) relative au deuxième point caractéristique $A_1$; la quantité $\cos\theta$ est un invariant différentiel du troisième ordre par rapport au groupe conforme.

# CHAPITRE XXII.

## ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT LE GROUPE PROLONGÉ AU TROISIÈME ORDRE.

Les transformations prolongées au troisième ordre sont linéairement indépendantes, les systèmes d'équations qui admettent le groupe se divisent en deux classes :

Les systèmes de la première classe s'obtiennent en égalant à zéro un certain nombre d'invariants.

Les systèmes d'équations de la deuxième classe doivent rendre nuls tous les déterminants d'un même ordre de la matrice formée avec les coefficients des transformations $X_i f$; chacun de ces systèmes doit posséder l'une au moins des équations obtenues en égalant à zéro l'un quelconque des déterminants du dixième ordre; considérons par exemple le déterminant formé avec les coefficients de

$$\frac{\partial f}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \quad \frac{\partial f}{\partial c}, \quad \frac{\partial f}{\partial a'}, \quad \frac{\partial f}{\partial b'}, \quad \frac{\partial f}{\partial c'}, \quad \frac{\partial f}{\partial a''}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho'}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho''}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho'''};$$

il est égal au produit

$$\rho^3 (b'c'' - b''c')(a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2) \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix}.$$

Nous trouvons quatre équations :

$$\rho = 0,$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2 = 0,$$

$$\delta_1 = b'c'' - b''c' = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois premières équations ont déjà été obtenues ; étudions l'équation

$$\delta_1 = 0.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
&X_1\ (\delta_1) = X_2(\delta_1) = X_3(\delta_1) = 0,\\
&X_4\ (\delta_1) = a''c' - c''a',\\
&X_5\ (\delta_1) = 0,\\
&X_6\ (\delta_1) = a''b' - b''a',\\
&X_7\ (\delta_1) = 2\delta_1,\\
&X_8\ (\delta_1) = 2\,b(a'c'' - a''c') - 2\,c(a'b'' - a''b'),\\
&X_9\ (\delta_1) = 2[\ \ (\rho\rho'c'' + \varpi_{11}c' - c'\rho\rho'') - 2\,a(a''c' - a'c'')],\\
&X_{10}(\delta_1) = 2[-(\rho\rho'b'' + \varpi_{11}b' - b'\rho\rho'') + 2\,a(a'b'' - a''b')].
\end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \delta_2 = a''\rho\rho' - a'\rho\rho'' + a'\varpi_{11} = 0$$

admet le groupe, car les équations $X_i(\delta_2) = 0$ sont des conséquences de ces mêmes équations ; nous pourrons remplacer $\delta_2 = 0$ par

$$\omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}\varpi_{11} = 0.$$

Pour étudier l'équation $\delta = 0$, nous remplacerons le système $X_i f = 0$ par le système $Y_i f = 0$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, 7$).

Nous trouvons :

$$\begin{aligned}
&Y_1(\delta) = Y_2(\delta) = Y_3(\delta) = 0,\\
&Y_4(\delta) = \delta,\\
&Y_5(\delta) = \begin{vmatrix} \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix},\\
&Y_6(\delta) = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix},\\
&Y_7(\delta) = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Toutes les équations $Y_i(\delta) = 0$ sont donc des conséquences des équations

$$\delta = 0, \qquad \bar{\delta} = \begin{vmatrix} \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

Le système de ces deux équations admet le groupe, car les équations $Y_i(\bar{\delta}) = 0$ sont aussi des conséquences de ces mêmes équations :

$$Y_1(\bar{\delta}) = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix},$$

$$Y_2(\bar{\delta}) = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \end{vmatrix},$$

..................................

En résumé tous les systèmes d'équations de la deuxième classe ne peuvent être formés qu'avec l'un ou l'autre des trois systèmes d'équations :

$$\rho = 0;$$

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}\varpi_{11} = 0;$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0, \qquad \bar{\delta} = \begin{vmatrix} \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation $\rho = 0$ exprime que le rayon de la sphère enveloppée est nul.

Les trois équations

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}\varpi_{11} = 0$$

montrent que l'enveloppe se réduit à un cercle ; l'enveloppée est orthogonale à trois sphères fixes passant par les foyers du cercle.

En effet, les équations $\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}$ expriment que le lieu des centres des sphères enveloppées est une droite et l'équation

$$\omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}(\omega_{11} - \rho'^2) = 0$$

exprime que la projection $w$ de la vitesse du centre du cercle caractéristique sur l'axe de ce cercle est nulle ; on a

$$w = \frac{\omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}(\omega_{11} - \rho'^2)}{\omega_{11}^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Le rayon du cercle caractéristique est constant, car si nous différentions les deux membres de l'équation $R^2 = \rho^2 - \frac{\rho^2\rho'^2}{\omega_{11}}$, nous obtenons

$$R' = \frac{\rho' w}{\sqrt{\varpi_{11}}}.$$

Au troisième système d'équations $\delta = 0$, $\bar{\delta} = 0$ correspondent les surfaces enveloppes de sphères orthogonales à deux sphères fixes, c'est-à-dire les anallagmatiques à déférente plane. En effet, les équations $\delta = 0$, $\bar{\delta} = 0$ expriment que les trois plans

$$\begin{aligned}
(x-a)a' + (y-b)b' + (z-c)c' + \rho\rho' &= 0,\\
(x-a)a'' + (y-b)b'' + (z-c)c'' + \rho\rho'' - \varpi_{11} &= 0,\\
(x-a)a''' + (y-b)b''' + (z-c)c''' + \rho\rho''' - 3\varpi_{12} &= 0
\end{aligned}$$

passent par une droite fixe ; or toute surface enveloppe de sphères dont les cercles de courbure sont situés dans des plans passant par une droite fixe D est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une courbe arbitraire tracée dans un plan perpendiculaire à D et qui rencontre cette droite en deux points fixes réels ou imaginaires([1]).

Nous pouvons encore considérer ces surfaces comme les enveloppes d'une sphère dont le centre décrit une courbe plane et qui reste orthogonale à une sphère, réelle ou imaginaire, dont le centre est dans le plan de la courbe. Prenons pour déférente une conique définie par les équations $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$, $z = 0$ ; soient $\mathcal{R}$ le rayon et $\alpha$, $\beta$, o les coordonnées du centre de la sphère directrice ; la *cyclide* a pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \mathcal{R}^2)^2 - 4A(x-\alpha)^2 - 4B(y-\beta)^2 = 0;$$

elle admet la transformation infinitésimale conforme

$$\left[z^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2 + \mathcal{R}^2\right]\frac{\partial f}{\partial z} + 2z(x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + 2z(y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

([1]) ROUQUET, *Thèse*, p. 39.

Lorsque la conique est bitangente à la sphère directrice, nous avons $\beta = 0$, $\mathcal{R}^2 = B - \frac{B\alpha^2}{A - B}$, et l'équation définit la *cyclide de Dupin :*

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 + \mathcal{R}^2)^2 - 4A(x - \alpha)^2 - 4By^2 = 0.$$

Si nous posons $\mathcal{R}'^2 = \frac{AB\alpha^2}{(A - B)^2} - B$, l'équation précédente peut encore s'écrire

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{A^2\alpha^2}{(A - B)^2} + \mathcal{R}'^2\right]^2 - 4(A - B)\left(x - \frac{A\alpha}{A - B}\right)^2 + 4Bz^2 = 0.$$

Nous mettons ainsi en évidence la deuxième génération anallagmatique à déférente plane, $\mathcal{R}'$ étant le rayon de la nouvelle sphère directrice. La *cyclide de Dupin* admet les deux transformations infinitésimales conformes du second degré :

$$\left[z^2 - (x - \alpha)^2 - y^2 + \mathcal{R}^2\right]\frac{\partial f}{\partial z} + 2z(x - \alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + 2zy\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\left[y^2 - \left(x - \frac{A\alpha}{A - B}\right)^2 - z^2 + \mathcal{R}'^2\right]\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\left(x - \frac{A\alpha}{A - B}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + 2yz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les deux cercles qui ont pour foyers les points doubles sont conjugués et admettent les transformations précédentes.

Lorsque la déférente est un cercle ayant pour centre le centre de la sphère directrice, la surface enveloppe est le *tore*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \mathcal{R}^2)^2 - 4A(x^2 + y^2) = 0.$$

Cette équation admet deux transformations infinitésimales conformes

$$(z^2 - x^2 - y^2 + \mathcal{R}^2)\frac{\partial f}{\partial z} + 2zx\frac{\partial f}{\partial x} + 2zy\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Nous citerons, à propos des cyclides, la classification de ces surfaces par M. Gino Loria, en géométrie conforme [1].

---

[1] Gino Loria, *Mem. della Reale Accadem delle Scienze di Torino*, 2e série, t. XXXVI, 1884.

# CHAPITRE XXIII.

## INVARIANTS DIFFÉRENTIELS DU QUATRIÈME ORDRE.

Ces invariants doivent admettre le groupe (G′) prolongé au quatrième ordre ; ce sont les intégrales du système d'équations

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$X_4 f + b^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}} - a^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}} = 0,$$

$$X_5 f + c^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}} - b^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}} = 0,$$

$$X_6 f + a^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}} - c^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}} = 0,$$

$$X_7 f + a^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}} + b^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}} + c^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}} + \rho^{\text{IV}} \frac{\partial f}{\partial \rho^{\text{IV}}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} X_8 f + [2aa^{\text{IV}} - \varpi_{04} + 4(2a'a''' - \varpi_{13}) + 3(2a''^2 - \varpi_{22})] \frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}} & \\
+ (a^{\text{IV}} b + 4a''' b' + 6a'' b'' + 4a' b''' + ab^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}} & \\
+ (a^{\text{IV}} c + 4a''' c' + 6a'' c'' + 4a' c''' + ac^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}} & \\
+ 2(a^{\text{IV}} \rho + 4a''' \rho' + 6a'' \rho'' + 4a' \rho''' + a\rho^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial \rho^{\text{IV}}} & = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} X_9 f + [2bb^{\text{IV}} - \varpi_{04} + 4(2b'b''' - \varpi_{13}) + 3(2b''^2 - \varpi_{22})] \frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}} & \\
+ (b^{\text{IV}} c + 4b''' c' + 6b'' c'' + 4b' c''' + bc^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}} & \\
+ (b^{\text{IV}} a + 4b''' a' + 6b'' a'' + 4b' a'' + ba^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}} & \\
+ 2(b^{\text{IV}} \rho + 4b''' \rho' + 6b'' \rho'' + 4b' \rho''' + b\rho^{\text{IV}}) \frac{\partial f}{\partial \rho^{\text{IV}}} & = 0
\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2}X_{10}f + [2cc^{\text{IV}} - \varpi_{04} + 4(2c'c''' - \varpi_{13}) + 3(2c''^2 - \varpi_{22})]\frac{\partial f}{\partial c^{\text{IV}}}$$

$$+ \quad (c^{\text{IV}}a + 4c'''a' + 6c''a'' + 4c'a''' + ca^{\text{IV}})\frac{\partial f}{\partial a^{\text{IV}}}$$

$$+ \quad (c^{\text{IV}}b + 4c'''b' + 6c''b'' + 4c'b''' + cb^{\text{IV}})\frac{\partial f}{\partial b^{\text{IV}}}$$

$$+ 2(c^{\text{IV}}\rho + 4c'''\rho' + 6c''\rho'' + 4c'\rho''' + c\rho^{\text{IV}})\frac{\partial f}{\partial \rho^{\text{IV}}} = 0.$$

Ces équations admettent dix intégrales indépendantes; si nous effectuons un changement de variable $t = g(\tau)$, nous introduisons quatre quantités $g'$, $g''$, $g'''$, $g^{\text{IV}}$, dont l'élimination entre les dix intégrales fournit six invariants absolus.

Nous connaissons déjà trois de ces invariants :

$$m, \quad \frac{dm}{ds_1}, \quad n.$$

Avec ces quantités nous pouvons former deux invariants absolus du quatrième ordre :

$$\frac{d^2m}{ds_1^2}, \quad \frac{dn}{ds_1}.$$

Nous choisirons comme sixième invariant absolu fondamental la quantité

$$\mathfrak{P} = \frac{d\pi}{ds_1},$$

$d\pi$ désignant l'angle que fait, avec la sphère infiniment voisine, la sphère orthogonale à trois cercles caractéristiques consécutifs. Formons cet invariant :

Considérons deux cercles caractéristiques infiniment voisins; ils ont deux points communs, les points caractéristiques A, $A_1$ définis par les équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0,$$
$$(x-a)a' + (y-b)b' + (z-c)c' + \rho\rho' = 0,$$
$$(x-a)a'' + (y-b)b'' + (z-c)c'' + \rho\rho'' - \varpi_{11} = 0.$$

Tout point de la droite $AA_1$ a même puissance par rapport à ces deux cercles ; c'est le centre d'une sphère orthogonale aux deux cercles. La droite $AA_1$ engendre une surface développable, enveloppe du plan caractéristique ; elle rencontre la droite caractéristique infiniment voisine en un point $G_1$ ; ce point est le centre d'une sphère orthogonale à trois cercles infiniment voisins ; nous pouvons encore le considérer comme le centre radical de quatre sphères infiniment voisines. Si nous effectuons une transformation conforme sur la surface, la sphère $(G_1)$ conserve sa définition.

Les coordonnées du point $G_1$ commun à deux droites caractéristiques infiniment voisines sont

$$\xi = -\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)', \qquad \eta = -\frac{w}{p}, \qquad \zeta = 0.$$

Les composantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, sur les axes mobiles du déplacement infiniment petit du point $G_1$, sont données par les formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta\xi &= d\xi - r\eta\, dt, \\ \delta\eta &= d\eta + (v + r\xi)\, dt, \\ \delta\zeta &= d\zeta + (w + p\eta)\, dt ; \end{aligned} \right.$$

ce sont les quantités

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \left[-\left(\frac{v}{r}\right)' - \frac{r'}{r^2}\left(\frac{w}{p}\right)' + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)'' + \frac{wr}{p}\right] dt, \\ \delta\eta &= 0, \\ \delta\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Soient $d\pi$ l'angle de la sphère $(G_1)$ avec la sphère infiniment voisine, $\mathcal{R}_1$ son rayon.

L'angle $d\pi$ est donné par la formule

$$d\pi^2 = \frac{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 - d\mathcal{R}_1^2}{\mathcal{R}_1^2},$$

$$(2) \qquad d\pi^2 = \frac{\delta\xi^2 - \mathcal{R}_1'^2\, dt^2}{\mathcal{R}_1^2}.$$

Nous pouvons former avec les équations (1) la combinaison suivante :

$$(3) \qquad \xi\,\delta\xi + \eta\,\delta\eta = (\xi\xi' + \eta\eta' + v\eta)\, dt.$$

Différentions l'équation

$$\mathfrak{R}_1^2 = \xi^2 + \eta^2 - R^2;$$

nous obtenons

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 = \xi\xi' + \eta\eta' - RR';$$

d'autre part, nous avons

$$v\eta = -\frac{vw}{p} = -RR';$$

par suite,

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 = \xi\xi' + \eta\eta' + v\eta$$

et, d'après l'équation (3),

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}'_1 \, dt = \xi \, \delta\xi.$$

La formule (2) peut donc s'écrire

$$d\pi^2 = \frac{\delta\xi^2}{\mathfrak{R}_1^4}(\mathfrak{R}_1^2 - \xi^2),$$

$$d\pi^2 = \frac{\delta\xi^2}{\mathfrak{R}_1^4}(\eta^2 - R^2) = \frac{\delta\xi^2}{\mathfrak{R}_1^4}\,\frac{w^2 - p^2R^2}{p^2}.$$

Remplaçons $\delta\xi$ par la valeur trouvée précédemment, nous obtenons

$$d\pi^2 = \frac{w^2 - p^2R^2}{p^2\mathfrak{R}_1^4}\left[-\left(\frac{v}{r}\right)' - \frac{r'}{r^2}\left(\frac{w}{p}\right)' + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)'' + \frac{wr}{p}\right]^2 dt^2.$$

Introduisons l'angle $ds_1$ de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine; nous avons

$$ds_1^2 = L\,dt^2;$$

en divisant membre à membre les deux dernières équations nous obtenons l'invariant absolu

$$\frac{d\pi^2}{ds_1^2} = \frac{w^2 - p^2R^2}{Lp^2\mathfrak{R}_1^4}\left[-\left(\frac{v}{r}\right)' - \frac{r'}{r^2}\left(\frac{w}{p}\right)' + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)'' + \frac{wr}{p}\right]^2.$$

## CHAPITRE XXIV.

### INVARIANTS DIFFERENTIELS D'ORDRE SUPERIEUR A QUATRE.

Soient $ds_1$ l'angle de la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine, I un invariant absolu du quatrième ordre; nous avons un invariant absolu du cinquième ordre en formant $\frac{dI}{ds_1}$. Avec les trois invariants distincts du quatrième ordre, nous pourrons donc former trois invariants absolus du cinquième ordre; or, on ne peut trouver que trois invariants distincts du cinquième ordre, car si nous prolongeons le groupe jusqu'au cinquième ordre, nous introduisons quatre variables :

$$\frac{da^{\text{IV}}}{dt}, \quad \frac{db^{\text{IV}}}{dt}, \quad \frac{dc^{\text{IV}}}{dt}, \quad \frac{d\rho^{\text{IV}}}{dt}$$

et nous obtenons quatre autres intégrales distinctes qui donnent seulement trois invariants absolus distincts.

Le même raisonnement s'applique aux invariants d'ordre supérieur. Nous pourrons donc les obtenir tous par différentiation.

### SYSTÈMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES QUI ADMETTENT LE GROUPE PROLONGÉ AU $n^{\text{ieme}}$ ORDRE $(n \geqq 4)$.

Les systèmes d'équations de la première classe s'obtiennent en égalant à zéro un certain nombre d'invariants. Les systèmes de la deuxième classe posséderont l'un au moins des systèmes d'équations qui admettent le groupe prolongé au troisième ordre, car ils doivent annuler tous les déterminants du dixième ordre de la matrice formée avec les transformations de ce dernier groupe.

# CHAPITRE XXV.

## LES INVARIANTS DES SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES PAR RAPPORT AU GROUPE CONFORME, CONSIDERES COMME INVARIANTS DU GROUPE DES MOUVEMENTS DANS UN ESPACE ELLIPTIQUE A QUATRE DIMENSIONS.

Considérons un pentasphère orthogonal formé par les trois faces d'un trièdre trirectangle et deux sphères ayant pour centre le sommet du trièdre et pour rayons 1 et $\sqrt{-1}$. Un point quelconque de l'espace est défini par cinq quantités $\xi_i$ liées aux coordonnées cartésiennes $x, y, z$ par les équations

$$\lambda\xi_1 = x, \qquad \lambda\xi_2 = y, \qquad \lambda\xi_3 = z,$$
$$2\lambda\xi_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad 2i\lambda\xi_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

($\lambda$ est un facteur de proportionnalité).

Avec ce système de coordonnées pentasphériques, l'équation d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2 = 0$$

devient

$$2a\xi_1 + 2b\xi_2 + 2c\xi_3 + \xi_4(\varpi - 1) - i\xi_5(\varpi + 1) = 0$$

si

$$\varpi = a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2.$$

Cinq quantités proportionnelles aux coefficients définiront la sphère; nous pouvons prendre

$$(1) \qquad x_1 = \frac{a}{\rho}, \quad x_2 = \frac{b}{\rho}, \quad x_3 = \frac{c}{\rho}, \quad x_4 = \frac{\varpi - 1}{2\rho}, \quad x_5 = \frac{-i(\varpi + 1)}{2\rho},$$

quantités vérifiant la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1.$$

Les équations (1) font correspondre à chaque sphère un point de coordonnées $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ dans un espace elliptique S à quatre dimensions; inversement, à chaque point de cet espace correspond une sphère dont le centre et le rayon sont donnés par les formules

$$a = \rho x_1, \qquad b = \rho x_2, \qquad c = \rho x_3, \qquad \rho = \frac{1}{i x_5 - x_4}.$$

A une famille de sphères à un paramètre correspond une courbe de l'espace S.

Prenons pour absolu la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$$

et choisissons comme distance de deux points infiniment voisins la quantité

$$ds_1 = \frac{1}{2i} \log r,$$

$r$ désignant le rapport anharmonique défini par les points A, B de coordonnées $x_i$, $x_i + dx_i$ et les points de rencontre de la droite AB avec l'absolu.

L'élément linéaire de l'espace S est défini par l'équation

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2.$$

En effet, soit $\overline{x_i} = x_i + dx_i$; la droite AB a pour équations

$$X_i = x_i + \lambda \overline{x}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

cette droite rencontre l'absolu aux points définis par les racines $\lambda_1, \lambda_2$ de l'équation

$$\lambda^2 \sum_i \overline{x}_i^2 + 2\lambda \sum_i x_i \overline{x}_i + \sum_i x_i^2 = 0.$$

Or

$$\cos ds_1 = \frac{r+1}{2\sqrt{r}} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

par suite

$$\cos ds_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$$

ou

$$\cos ds_1 = \frac{\Sigma x_i \overline{x}_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma \overline{x}_i^2}}.$$

Si nous remplaçons $\overline{x_i}$ par $x_i + dx_i$ et si nous développons en série, nous avons

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2.$$

Nous savons, d'autre part, que le cosinus de l'angle de deux sphères $x_i$ et $\overline{x_i}$ est égal à

$$\frac{\Sigma x_i \overline{x_i}}{\sqrt{\Sigma \overline{x_i}^2}\sqrt{x_i^2}};$$

l'élément linéaire de l'espace S est donc représenté dans l'espace euclidien à trois dimensions par l'angle de deux sphères infiniment voisines.

Déterminons le groupe des mouvements de l'espace S [1].

Les mouvements dans un espace elliptique sont définis par les transformations

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_5) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

qui laissent invariantes les formes $\Sigma dx_i^2$ et $\Sigma x_i^2$.

Nous devons donc avoir

$$(1) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right)^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} = 0,$$

$$(3) \qquad \sum_i \varphi_i^2 = \sum_i x_i^2$$

$$(k \gtrless l; \ i, k, l = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Différentions (1) par rapport à $x_t$, nous avons

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \, \partial x_t} = 0.$$

Différentions (2), nous trouvons

$$(4) \qquad \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \, \partial x_t} + \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_l \, \partial x_t} = 0.$$

[1] Fubini, *Introduzione alla teoria dei gruppi.*

Une permutation de $l$ et $t$ nous donne

$$(5)\qquad \sum_t \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_t}\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_k\,\partial x_l}+\sum_t \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k}\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_l\,\partial x_t}=0.$$

Permutons $k$ et $t$ dans la même équation (4), nous obtenons

$$(6)\qquad \sum_t \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_k\,\partial x_t}+\sum_t \frac{\partial\varphi_l}{\partial x_t}\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_l\,\partial x_k}=0.$$

Fixons $l$, $t$ et retranchons (6) de la somme des équations (4) et (5), nous avons

$$\sum_t \frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_l\,\partial x_t}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_k}=0\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 5),$$

système de cinq équations linéaires homogènes à cinq inconnues

$$\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_l\partial x_t}.$$

Le déterminant de ces équations ne peut être identiquement nul, c'est le jacobien des $\varphi_t$; par suite, nous devons avoir

$$\frac{\partial^2\varphi_t}{\partial x_l\,\partial x_t}=0;$$

$\varphi_i$ est donc un polynome du premier degré en $x$.

Soit

$$\varphi_t=\sum_t a_{kt}x_k+a_t.$$

Portons cette valeur de $\varphi_t$ dans l'équation (3),

$$\sum_i \varphi_i^2=\sum_i x_i^2.$$

Nous voyons que les $a_t$ sont nuls et, par suite,

$$(7)\qquad x'_t=\sum_k a_{kt}x_k$$

avec les conditions

$$\sum_t a_{kt}^2=1,\qquad \sum_t a_{kt}\,a_{ht}=0\qquad (h\gtrless k;\ h,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 5).$$

Les mouvements dépendent donc de $25 - \frac{5.6}{2} = 10$ paramètres. Comme ils laissent invariante la forme $\sum_i dx_i^2$ qui représente en coordonnées pentasphériques le carré de l'angle de deux sphères infiniment voisines, nous voyons qu'aux mouvements de l'espace S doivent correspondre dans l'espace euclidien les $\infty^{10}$ transformations conformes.

Calculons les invariants du groupe des mouvements de l'espace S. Nous déterminerons d'abord les formules de Frenet relatives aux courbes de cet espace ([1]).

Soient vingt-cinq quantités $x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i^5$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ satisfaisant aux conditions d'orthogonalité

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_i (x_i^l)^2 = 1 \\ &\sum_i x_i^k x_i^l = 0 \end{aligned}\right. \qquad (i, k, l, = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et, par suite, aux conditions

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_i (x_l^i)^2 = 1, \\ &\sum_i x_k^i x_l^i = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons considérer ces quantités $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^5$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ comme cinq solutions du système d'équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx_i^1}{ds_1} = \sum_{l=1}^{l=5} p_{1l}\, x_i^l, \\ &\frac{dx_i^2}{ds_1} = \sum_l p_{2l}\, x_i^l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dx_i^5}{ds_1} = \sum_l p_{5l}\, x_i^l, \end{aligned}\right.$$

([1]) Nous appliquerons la méthode générale exposée par M. C. Guichard dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1912.

les coefficients étant définis par les équations

$$p_{ll} = \sum_{\iota} x_\iota^l \frac{dx_\iota^l}{ds_1},$$

$$p_{kl} = \sum_{\iota} x_\iota^l \frac{dx_\iota^k}{ds_1}.$$

En différentiant les équations (1), nous trouvons

$$p_{ll} = 0,$$
$$p_{kl} = -p_{lk}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$x_\iota^1 = x_\iota, \qquad x_\iota^2 = \alpha_\iota, \qquad x_\iota^3 = \beta_\iota, \qquad x_\iota^4 = \gamma_\iota, \qquad x_\iota^5 = \delta_\iota.$$

Le système des équations (3) devient

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_\iota}{ds_1} = \phantom{-p_{12}x_\iota+{}} p_{12}\alpha_\iota + p_{13}\beta_\iota + p_{14}\gamma_\iota + p_{15}\delta_\iota, \\ \dfrac{d\alpha_\iota}{ds_1} = -p_{12}x_\iota + p_{23}\beta_\iota + p_{24}\gamma_\iota + p_{25}\delta_\iota, \\ \dfrac{d\beta_\iota}{ds_1} = -p_{13}x_\iota - p_{23}\alpha_\iota + p_{34}\gamma_\iota + p_{35}\delta_\iota, \\ \dfrac{d\gamma_\iota}{ds_1} = -p_{14}x_\iota - p_{24}\alpha_\iota - p_{34}\beta_\iota + p_{45}\delta_\iota, \\ \dfrac{d\delta_\iota}{ds_1} = -p_{15}x_\iota - p_{25}\alpha_\iota - p_{35}\beta_\iota - p_{45}\gamma_\iota. \end{cases}$$

Considérons dans l'espace S un point $x_\iota$ d'une courbe (C) et les quantités

$$X_\iota = \lambda x_\iota + \mu \frac{dx_\iota}{ds_1} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, 5);$$

si $s_1$ reste fixe et si $\lambda$, $\mu$ varient de telle sorte qu'on ait

$$\Sigma X_\iota^2 = 1,$$

le point de coordonnées $X_\iota$ décrit la tangente à la courbe (C).

Les équations de la tangente peuvent encore s'obtenir en égalant à zéro trois déterminants distincts formés avec le tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \end{Vmatrix}.$$

Le point de coordonnées

$$X_i = \lambda x_i + \mu \frac{dx_i}{ds_1} + \nu \frac{d^2 x_i}{ds_1^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

décrit le 1-plan osculateur à la courbe, les variables $\lambda$, $\mu$, $\nu$ vérifiant la relation $\sum X_i^2 = 1$.

Les deux équations du 1-plan osculateur s'obtiennent en égalant à zéro deux déterminants formés avec le tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \end{Vmatrix}.$$

Le point de coordonnées

$$X_i = \lambda x_i + \mu \frac{dx_i}{ds_1} + \nu \frac{d^2 x_i}{ds_1^2} + \rho \frac{d^3 x_i}{ds_1^3}$$

décrit le 2-plan osculateur à la courbe; l'équation de ce 2-plan est

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 & x'''_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Choisissons comme axes d'un $4^{\text{èdre}}$ attaché à la courbe : la tangente, la perpendiculaire à la tangente située dans le 1-plan osculateur, c'est-à-dire la première normale; la perpendiculaire à la tangente et à la première normale située dans le 2-plan osculateur, c'est-à-dire la deuxième normale; enfin, la perpendiculaire à la tangente à la première normale et à la deuxième normale.

Les cosinus directeurs $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ de ces quatre droites satisfont aux équations (4).

Nous prenons comme paramètre l'arc $s_1$ de la courbe; la première formule du tableau (4) est donc

$$\frac{dx_i}{ds_1} = \alpha_i,$$

c'est-à-dire

(5) $$p_{12} = 1, \qquad p_{13} = p_{14} = p_{15} = 0$$

Les quantités $\frac{d\alpha_i}{ds_1}$ sont les paramètres directeurs d'une droite située dans le 1-plan osculateur; elles doivent s'exprimer linéairement en fonction de $x_i$, $\alpha_i$, $\beta_i$. La deuxième formule du tableau (4) est donc

$$\frac{d\alpha_i}{ds_1} = -p_{12}\,x_i + p_{23}\,\beta_i,$$

c'est-à-dire $p_{24} = p_{25} = 0$.

Mais $p_{12} = 1$ d'après (5) et

$$\frac{d\alpha_i}{ds_1} = -x_i + p_{23}\,\beta_i.$$

Les quantités $\frac{d\beta_i}{ds_1}$, paramètres directeurs d'une droite située dans le 2 plan osculateur, doivent s'exprimer linéairement en fonction de $x_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Le coefficient de $x_i$ est nul d'après (5); la troisième formule est donc

$$\frac{d\beta_i}{ds_1} = -p_{23}\,\alpha_i + p_{34}\,\gamma_i,$$

c'est-à-dire $p_{35} = 0$.

Les deux dernières formules du tableau (4) deviennent alors

$$\frac{d\gamma_i}{ds_1} = -p_{34}\,\beta_i + p_{45}\,\delta_i,$$
$$\frac{d\delta_i}{ds_1} = -p_{45}\,\gamma_i.$$

Les quantités $p_{23}$, $p_{34}$, $p_{45}$ sont les trois courbures; si nous les remplaçons par $m$, $n$, $\mathfrak{P}$, nous avons

$$\frac{dx_\iota}{ds_1} = \alpha_\iota, \qquad \frac{d\alpha_\iota}{ds_1} = -x_\iota + m\beta_\iota, \qquad \frac{d\beta_\iota}{ds_1} = -m\alpha_\iota + n\gamma_\iota,$$

$$\frac{d\gamma_\iota}{ds_1} = -n\beta_\iota + \mathfrak{P}\delta_\iota, \qquad \frac{d\delta_\iota}{ds_1} = -\mathfrak{P}\gamma_\iota\,;$$

telles sont les formules de Frenet pour l'espace elliptique S.

Indiquons pour abréger les dérivations par un accent; nous avons

$$x''_\iota = \alpha'_\iota = -x_\iota + m\beta_\iota \tag{1}$$

ou

$$m\beta_\iota = x_\iota + x''_\iota.$$

La condition $\sum \beta_\iota^2 = 1$ donne

$$m^2 = \sum_\iota x''^2_\iota - 1\,;$$

c'est l'expression de la première courbure.

Différentions (1), nous obtenons l'équation

$$x'''_\iota = -x'_\iota + m\beta'_\iota + m'\beta_\iota, \tag{2}$$

qui peut s'écrire, d'après les formules de Frenet,

$$mn\gamma_\iota = x'''_\iota + x'_\iota(1+m^2) - \frac{m'}{m}(x_\iota + x''_\iota). \tag{3}$$

La condition $\sum_\iota \gamma_\iota^2 = 1$ donne

$$m^2 n^2 = \sum_\iota x'''^2_\iota - (1+m^2)^2 - m'^2.$$

Nous avons ainsi l'expression de la deuxième courbure $n$.

Si nous différentions (3) et si nous tenons compte des formules de Frenet, nous avons

$$\begin{aligned}\delta_\iota mn\mathfrak{P} = x^{\text{IV}}_\iota - x'''_\iota\left[\frac{(mn)'}{mn} + \frac{m'}{m}\right] + x''_\iota\left[\frac{m'}{m}\frac{(mn)'}{mn} + n^2 + m^2 + 1 - \left(\frac{m'}{m}\right)'\right] \\ + x'_\iota\left[2mm' - \frac{m'}{m} - (1+m^2)\frac{(mn)'}{mn}\right] + x_\iota\left[\frac{m'}{m}\frac{(mn)'}{mn} + n^2 - \left(\frac{m'}{m}\right)'\right].\end{aligned}$$

La condition $\sum_i \delta_i^2 = 1$ donne

$$m^2 n^2 \mathfrak{P}^2 = \sum_i (x_i^{\text{IV}})^2 - m''^2 + 2mm''(1 + m^2 + n^2)$$
$$- (2m'n + mn')^2 - 9m^2m'^2 - (1 + m^2)^3 - m^2n^2(2 + 2m^2 + n^2),$$

relation qui fait connaître l'expression de la troisième courbure $\mathfrak{P}$.

En résumé, les trois courbures sont données par les formules

$$m^2 = \Sigma x_i''^2 - 1,$$
$$n^2 = \frac{1}{m^2}\left[\sum_i x_i'''^2 - (1 + m^2)^2 - m'^2\right],$$
$$\mathfrak{P}^2 = \frac{1}{m^2 n^2}\left[\sum_i (x_i^{\text{IV}})^2 - m''^2 + 2mm''(1 + m^2 + n^2)\right.$$
$$\left. - (2m'n + mn')^2 - 9m^2m'^2 - (1 + m^2)^3 - m^2n^2(2 + 2m^2 + n^2)\right].$$

Les cosinus directeurs du 4^èdre^ sont

$$\alpha_i = x_i',$$
$$\beta_i = \frac{1}{m}(x_i + x_i''),$$
$$\gamma_i = \frac{1}{mn}\left[x_i''' + x_i'(1 + m^2) - \frac{m'}{m}(x_i + x_i'')\right],$$
$$\delta_i = \frac{1}{mn\mathfrak{P}}\left\{x_i^{\text{IV}} - x_i'''\left[\frac{(mn)'}{mn} + \frac{m'}{m}\right]\right.$$
$$+ x_i''\left[\frac{m'}{m}\frac{(mn)'}{mn} + n^2 + m^2 + 1 - \left(\frac{m'}{m}\right)'\right]$$
$$+ x_i'\left[2mm' - (1 + m^2)\frac{(mn)'}{mn} - \frac{m'}{m}\right]$$
$$\left. + x_i\left[\frac{m'}{m}\frac{(mn)'}{mn} + n^2 - \left(\frac{m'}{m}\right)'\right]\right\}.$$

### Application aux surfaces enveloppes de sphères à un paramètre.

Nous pouvons considérer les quantités $x_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ comme les coordonnées de cinq sphères orthogonales deux à deux. La sphère $\alpha_i$ passe par le cercle caractéristique de la sphère $x_i$, la sphère $\beta_i$ passe par les points caractéristiques, elle est orthogonale au cercle caractéristique, la sphère $\delta_i$ est orthogonale à trois cercles caractéristiques consécutifs, la sphère $\gamma_i$ passe par le cercle caractéristique de la sphère $\delta_i$.

Les trois courbures $m$, $n$, $\mathfrak{P}$ nous font connaître un système de six invariants fondamentaux des surfaces enveloppes de sphères par rapport au groupe conforme

$$m, \quad \frac{dm}{ds_1}, \quad n, \quad \frac{d^2 m}{ds_1^2}, \quad \frac{dn}{ds_1}, \quad \mathfrak{P}.$$

Les invariants $m$, $n$, $\mathfrak{P}$ sont précisément les quantités suivantes définies par M. R. Le Vavasseur [1].

Les équations du faisceau de sphères passant par le cercle caractéristique de la sphère $x_i$ s'obtiennent en égalant à zéro trois déterminants du tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \end{Vmatrix}.$$

Les équations du faisceau de sphères passant par le cercle caractéristique de la sphère infiniment voisine $x_i + dx_i$ sont données par le tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 + x'_1\,ds_1 & x_2 + x'_2\,ds_1 & x_3 + x'_3\,ds_1 & x_4 + x'_4\,ds_1 & x_5 + x'_5\,ds_1 \\ x'_1 + x''_1\,ds_1 & x'_2 + x''_2\,ds_1 & x'_3 + x''_3\,ds_1 & x'_4 + x''_4\,ds_1 & x'_5 + x''_5\,ds_1 \end{Vmatrix}.$$

Les deux faisceaux consécutifs ont une sphère commune

$$x_i + x'_i\,ds_1.$$

Il existe une sphère $x'_i - x_i ds_1$ du premier faisceau orthogonale à la sphère $x_i + x'_i ds_1$ et une sphère $x'_i + x''_i ds_1$ du deuxième faisceau orthogonale à la sphère $x_i + x'_i ds_1$; désignons par $d\mu$ l'angle de ces deux

(1) Le Vavasseur, *Les systèmes de sphères à un paramètre* (*Académie des Sciences de Toulouse*, 10e série, t. I, 1901).

sphères :

$$\cos^2 d\mu = \frac{\left[\sum_i (x'_i - x_i\, ds_1)(x'_i + x''_i\, ds_1)\right]^2}{\sum_i (x'_i - x_i\, ds_1)^2 \sum_i (x'_i + x''_i\, ds_1)^2},$$

d'où

$$\frac{d\mu^2}{ds_1^2} = \sum_i x''^2_i - 1,$$

$$\frac{d\mu}{ds_1} = m.$$

D'autre part, les points où le cercle caractéristique de la sphère $x_i$ rencontre le cercle infiniment voisin sont communs aux sphères $x_i$, $x'_i$, $x''_i$, les équations du réseau de sphères passant par ces deux points s'obtiennent en égalant à zéro deux déterminants du tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \end{Vmatrix}.$$

Le réseau de sphères passant par les deux points caractéristiques de la sphère infiniment voisine $x_i + x'_i\, ds_1$ est représenté par les équations déduites du tableau

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 + x'_1\, ds_1 & x_2 + x'_2\, ds_1 & x_3 + x'_3\, ds_1 & x_4 + x'_4\, ds_1 & x_5 + x'_5\, ds_1 \\ x'_1 + x''_1\, ds_1 & x'_2 + x''_2\, ds_1 & x'_3 + x''_3\, ds_1 & x'_4 + x''_4\, ds_1 & x'_5 + x''_5\, ds_1 \\ x''_1 + x'''_1\, ds_1 & x''_2 + x'''_2\, ds_1 & x''_3 + x'''_3\, ds_1 & x''_4 + x'''_4\, ds_1 & x''_5 + x'''_5\, ds_1 \end{Vmatrix}.$$

Les deux réseaux ont un faisceau commun ; les sphères de ce faisceau ont pour coordonnées

$$\xi_i = \lambda(x_i + x'_i\, ds_1) + \mu(x'_i + x''_i\, ds_1),$$

les paramètres $\lambda$, $\mu$ vérifiant la relation $\sum_i \xi_i^2 = 1$.

Il existe une sphère $x_i - m^2 x'_i\, ds_1 + x''_i$ du premier réseau orthogonale aux sphères $\xi_i$, une sphère $x_i + x''_i + (x'_i + x'''_i)\, ds_1$ du deuxième réseau orthogonale aux sphères $\xi_i$ ; désignons par $d\nu$ l'angle de ces deux sphères :

$$\cos^2 d\nu = \frac{\left\{\sum_i (x_i - m^2 x'_i\, ds_1 + x''_i)\,[x_i + x''_i + (x'_i + x'''_i)\, ds_1]\right\}^2}{\sum_i (x_i - m^2 x'_i\, ds_1 + x''_i)^2 \sum_i [x_i + x''_i + (x'_i + x'''_i)\, ds_1]^2},$$

$$\frac{d\nu^2}{ds_1^2} = \frac{1}{m^2}\left[\sum_i x'''^2_i - (1 + m^2) - m'^2\right],$$

$$\frac{d\nu}{ds_1} = n.$$

L'équation

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 & x'''_5 \end{vmatrix} = 0$$

définit la sphère orthogonale à quatre sphères infiniment voisines et, par suite, à trois cercles caractéristiques infiniment voisins.

Si nous prenons comme coordonnées de cette sphère les quantités

$$\delta_a = \frac{1}{m^2 n}\begin{vmatrix} x_b & x_c & x_d & x_e \\ x'_b & x'_c & x'_d & x'_e \\ x''_b & x''_c & x''_d & x''_e \\ x'''_b & x'''_c & x'''_d & x'''_e \end{vmatrix},$$

$a$, $b$, $c$, $d$, $e$ désignant les cinq premiers nombres entiers écrits dans l'ordre naturel à partir de l'un quelconque d'entre eux $a$, nous avons

$$\Sigma\,\delta_a^2 = 1\,;$$

l'angle $d\pi$ de cette sphère avec la sphère infiniment voisine vérifie la relation

$$\frac{d\pi^2}{ds_1^2} = \Sigma(\delta_a \delta'_b - \delta_b \delta'_a)^2,$$

$$\frac{d\pi^2}{ds_1^2} = \frac{1}{m^6 n^4}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 & x''_5 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 & x'''_5 \\ x^{\text{IV}}_1 & x^{\text{IV}}_2 & x^{\text{IV}}_3 & x^{\text{IV}}_4 & x^{\text{IV}}_5 \end{vmatrix}^2.$$

Si nous développons le carré de ce déterminant, nous trouvons

$$\frac{d\pi}{ds_1} = \mathfrak{P}.$$

Les formules de Frenet donnent immédiatement ce résultat ainsi que les angles des sphères $(\alpha_i)$, $(\beta_i)$, $(\gamma_i)$ avec les sphères infiniment voisines ; on a par exemple

$$d\beta^2 = \sum_i d\beta_i^2 = (m^2 + n^2)\, ds_1^2.$$

---

## CHAPITRE XXVI.

### EQUIVALENCE DES SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES VIS-A-VIS DU GROUPE CONFORME.

**1.** A chaque sphère $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0$ d'une famille à un paramètre correspond un point de coordonnées $a$, $b$, $c$, $\rho$ d'un espace à quatre dimensions $R_4$, et à chaque surface enveloppe des sphères de la famille correspond une courbe de cet espace.

A chaque transformation conforme aux variables $x$, $y$, $z$ effectuée sur une surface enveloppe de sphères répond une transformation du groupe (G′) effectuée sur une courbe de l'espace $R_4$.

Nous sommes donc amenés à résoudre le problème de l'équivalence des courbes de l'espace $R_4$ vis-à-vis du groupe (G′).

Supposons trois des coordonnées d'un point exprimées en fonction de la quatrième, $\rho$ par exemple. Pour obtenir ces trois coordonnées, il faudra au moins trois équations différentielles indépendantes; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les ordres respectifs des trois équations de l'ordre le plus bas; nous pouvons supposer $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$. Les équations qui résulteront des précedentes par différentiation par rapport à $\rho$ seront d'ordre

$$\begin{array}{lll} \alpha+1, & \alpha+2, & \ldots; \\ \beta+1, & \beta+2, & \ldots; \\ \gamma+1, & \gamma+2, & \ldots. \end{array}$$

Si nous considérons $a$, $b$, $c$ comme des dérivées d'ordre zéro, nous voyons qu'il y aura $\alpha + \beta + \gamma$ dérivées qui ne seront assujetties à aucune condition :

$$\begin{array}{lllll} a, & a', & a'', & \ldots, & a^{\alpha-1}, \\ b, & b', & b'', & \ldots, & b^{\beta-1}, \\ c, & c', & c''. & \ldots, & c^{\gamma-1}. \end{array}$$

Imaginons les coordonnées $a, b, c$ développées suivant les puissances de $\rho - \rho_0$, $\rho_0$ etant une valeur particulière attribuée à $\rho$, de telle sorte que, si nous calculons les dérivées d'ordre supérieur au moyen des équations différentielles données, nous aurons des développements qui dépendront de $\alpha + \beta + \gamma$ constantes arbitraires. Considérons une courbe qui n'admet aucune des transformations du groupe (G'); elle se transforme en $\infty^{10}$ courbes différentes quand nous effectuons les transformations du groupe (G'). Pour que les trois équations différentielles représentent une famille de $\infty^{10}$ courbes invariante par le groupe (G'), il faut que $\alpha, \beta, \gamma$ vérifient l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 10$ et que le système des trois équations soit invariant par les transformations prolongées du groupe (G'). Nous avons donc à former tous les systèmes de trois équations différentielles qui admettent les transformations prolongées du groupe (G'). Nous avons vu que les systèmes d'équations qui admettent le groupe prolongé se divisent en deux classes : les systèmes d'équations de la première classe s'obtiennent en egalant à zéro un certain nombre d'invariants formés jusqu'au quatrième ordre avec six invariants fondamentaux :

$$m, \quad \frac{dm}{ds_1}, \quad n, \quad \frac{d^2 m}{ds_1^2}, \quad \frac{dn}{ds_1}, \quad \mathfrak{P}$$

($ds_1$ désigne l'angle que fait la sphère enveloppée avec la sphère infiniment voisine) et pour un ordre plus élevé par une différentiation par rapport à $s_1$.

Nous savons que les systèmes d'équations de la deuxième classe, ceux qui annulent tous les déterminants d'un même ordre de la matrice formée avec les coefficients des transformations prolongées, renferment l'un au moins des trois systèmes d'équations :

$$\rho = 0,$$

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}(\omega_{11} - \rho'^2) = 0,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0, \qquad \overline{\delta} = \begin{vmatrix} \rho\rho' & \rho\rho'' - \varpi_{11} & \rho\rho''' - 3\varpi_{12} \\ b' & b'' & b''' \\ c' & c'' & c''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ils définissent l'enveloppe d'une sphère de rayon nul, ou l'enveloppe de sphères orthogonales à trois sphères fixes, ou l'enveloppe de sphères orthogonales à deux sphères fixes. Nous mettrons ces surfaces à part, ainsi que la *surface canal isotrope* et les *surfaces à focales isotropes*, en les désignant toutes sous le nom de *surfaces enveloppes singulières*.

Soit un système de trois équations différentielles d'ordre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tel que

$$\alpha+\beta+\gamma=10 \qquad (\alpha \leqq \beta \leqq \gamma).$$

Nous pouvons faire sur $\alpha$ les quatre hypothèses

$$\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

1° $\alpha=0$; l'équation correspondante ne peut être que $\rho=0$, or nous avons mis à part les enveloppes de sphères de rayon nul.

2° $\alpha=1$; l'équation est $a'^2+b'^2+c'^2-\rho'^2=0$, elle définit une *surface canal isotrope;* nous avons écarté ce cas.

3° $\alpha=2$; l'équation $m=$ const. répond à cette hypothèse, nous pouvons prendre :

I. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$ et les trois équations

$$m=\text{const.}, \qquad n=\text{const.}, \qquad \frac{d\mathfrak{P}}{ds_1}=f(\mathfrak{P}) \qquad (\mathfrak{P}\neq\text{const.}).$$

II. $\alpha=2$, $\beta=4$, $\gamma=4$ et les trois équations

$$m=\text{const.}, \qquad \frac{dn}{ds_1}=f_1(n), \qquad \mathfrak{P}=f_2(n) \qquad (n\neq\text{const.}).$$

4° $\alpha=3$; l'équation $\dfrac{dm}{ds_1}=f_1(m)$ répond à cette hypothèse, nous pouvons prendre $\beta=3$, $\gamma=4$ et les trois relations suivantes entre les invariants

$$\frac{dm}{ds_1}=f_1(m), \qquad n=f_2(m), \qquad \mathfrak{P}=f_3(m) \qquad (m\neq\text{const.}).$$

Considérons *les surfaces qui admettent une transformation infinitésimale conforme;* les quantites $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ doivent vérifier l'équation $\alpha+\beta+\gamma=9$. Les hypothèses $\alpha=0$, $\alpha=1$ ne peuvent convenir qu'aux surfaces mises à part; nous pouvons prendre $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$ et le système d'équations

$$m=\text{const.}, \qquad n=\text{const.}, \qquad \mathfrak{P}=\text{const.}$$

Aux valeurs $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$ correspondent les trois équations

$$\frac{dm}{ds_1} = f(m), \qquad \delta = 0, \qquad \overline{\delta} = 0;$$

ces équations définissent des enveloppes de sphères orthogonales à deux sphères fixes. Ce sont des inverses de cônes.

Considérons *les surfaces qui admettent deux transformations infinitésimales conformes;* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ doivent vérifier l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 8$. Laissant de côté les hypothèses $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, nous pouvons prendre $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$; nous connaissons une équation invariante du second ordre $m = \text{const.}$; nous ne pouvons former qu'une équation du troisième ordre avec les invariants, car $m = \text{const.}$ entraîne $\frac{dm}{ds_1} = 0$, les surfaces qui admettent deux transformations infinitésimales conformes sont donc les enveloppes de sphères orthogonales à deux sphères fixes, définies par trois équations de la forme suivante

$$m = \text{const.}, \qquad \overline{\delta} = 0, \qquad \delta = 0.$$

Pour obtenir $m^2$ nous pouvons calculer $\frac{ds^2}{ds_1^2}$ ou encore $\frac{d\alpha^2}{ds_1^2} - 1$, $d\alpha$ désignant l'angle que fait avec la sphère infiniment voisine la sphère orthogonale à l'enveloppée et passant par le cercle caractéristique (Chap. XXV); pour un tore, si $\rho$ est le rayon de l'enveloppée et $\mathcal{R}$ le rayon de la sphère directrice, on a $m^2 = -\frac{\mathcal{R}^2}{\rho^2 + \mathcal{R}^2}$; un cas d'exception se présente lorsque $\mathcal{R} = i\rho$, $m$ est infini, la surface est une sphère de rayon $\rho$; pour un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est $\theta$ on a $m^2 = -\frac{1}{\cos^2\theta}$; pour un cylindre de révolution on a $m^2 = -1$.

Aucun système de relations entre les invariants ne peut satisfaire à l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 7$. Les valeurs $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ satisfont à l'équation $\alpha + \beta + \gamma = 6$, les équations différentielles correspondantes sont

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}, \qquad \omega_{12}\rho\rho' - \omega_{11}\rho\rho'' + \omega_{11}\varpi_{11} = 0;$$

nous savons que ces trois équations définissent l'enveloppe de sphères orthogonales à trois sphères fixes, c'est-à-dire un cercle; le cercle admet donc quatre transformations infinitésimales conformes.

Aucun système de relations entre les invariants ne répond à l'équation $\alpha + \beta + \gamma = k$, lorsque $k$ désigne un nombre inférieur à 6.

Ces résultats nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

Théorème. — *Deux surfaces enveloppes de sphères à un paramètre, les surfaces singulières exceptées, sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme, si, $ds_1$ désignant l'angle de deux sphères enveloppées consécutives et $m$, $\frac{dm}{ds_1}$, $n$, $\frac{d^2 m}{ds_1^2}$, $\frac{dn}{ds_1}$, $\mathfrak{P}$, les six invariants fondamentaux de ces surfaces, on a les trois mêmes relations :*

$$\frac{dm}{ds_1} = f_1(m), \qquad n = f_2(m), \qquad \mathfrak{P} = f_3(m)$$

($f_1$, $f_2$, $f_3$ désignant trois fonctions arbitraires) *ou les trois mêmes relations :*

$$m = \text{const.}, \qquad \frac{dn}{ds_1} = f_1(n), \qquad \mathfrak{P} = f_2(n),$$

*ou*

$$m = \text{const.}, \qquad n = \text{const.}, \qquad \frac{d\mathfrak{P}}{ds_1} = f(\mathfrak{P}),$$

*ou*

$$m = \text{const.}, \qquad n = \text{const.}, \qquad \mathfrak{P} = \text{const.},$$

*et seulement à ces conditions.*

Deux enveloppes de sphères orthogonales à deux sphères fixes sont équivalentes vis-à-vis du groupe conforme, si pour ces deux surfaces on a la même relation

$$\frac{dm}{ds_1} = f(m) \qquad (m \neq \text{const.});$$

les surfaces admettent alors une transformation infinitésimale conforme, ou la même relation

$$m = \text{const.} \qquad (m \neq 0),$$

elles admettent dans ce cas deux transformations infinitésimales conformes.

Deux cercles de rayon différent de zéro (enveloppes de sphères orthogonales à trois sphères fixes) sont toujours échangeables par une transformation conforme.

Deux sphères de rayon différent de zéro sont toujours échangeables par une transformation conforme, car il existe toujours une transformation du groupe (G′) permettant de passer des coordonnées $a, b, c, \rho$ d'une sphère aux coordonnées d'une autre sphère.

2. Considérons un pentasphère orthogonal mobile comprenant la sphère enveloppée $x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) et la sphère $\alpha_i = \frac{dx_i}{ds_1}$ passant par le cercle caractéristique, nous pouvons choisir (Chap. XXV) les autres sphères $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ de telle sorte que

$$(x_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1), \quad (x_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2), \quad \ldots, \quad (x_5, \alpha_5, \beta_5, \gamma_5, \delta_5)$$

soient cinq solutions du système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_1} = \alpha, \quad \dfrac{d\alpha}{ds_1} = -x + m\beta, \quad \dfrac{d\beta}{ds_1} = -m\alpha + n\gamma, \\ \qquad \dfrac{d\gamma}{ds_1} = -n\gamma + \mathfrak{P}\delta, \quad \dfrac{d\delta}{ds_1} = -\mathfrak{P}\gamma. \end{cases}$$

Si nous donnons aux trois courbures $m, n, \mathfrak{P}$ des valeurs constantes et si nous intégrons le système (1), nous aurons les sphères $(x_i)$ telles que les invariants des surfaces enveloppes de ces sphères à un paramètre soient égaux aux constantes choisies.

Déterminons cinq solutions particulières distinctes

$$(x_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

du système (1); calculons par exemple les constantes X, A, B, C, D, $\rho$ de telle sorte que la solution particulière soit de la forme

$$x = X\cos\rho s_1, \quad \alpha = A\sin\rho s_1, \quad \beta = B\cos\rho s_1, \quad \gamma = C\sin\rho s_1, \quad \delta = D\cos\rho s_1.$$

Ces constantes sont les racines du système d'équations

$$(2) \quad \begin{cases} X\rho + A = 0, \\ A\rho + X - mB = 0, \\ B\rho - mA + nC = 0, \\ C\rho + nB - \mathfrak{P}D = 0, \\ D\rho - \mathfrak{P}C = 0. \end{cases}$$

Les constantes qui définissent la solution particulière

$$x = X\sin\rho s_1, \quad \alpha = A\cos\rho s_1, \quad \beta = B\sin\rho s_1, \quad \gamma = C\cos\rho s_1, \quad \delta = D\sin\rho s_1$$

sont les racines du système d'équations que l'on obtiendrait en changeant $\rho$ en $-\rho$ dans les équations (2).

Les équations (2) sont vérifiées par des valeurs non toutes nulles de X, A, B, C, D, si $\rho$ est racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} \rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho & -m & 0 & 0 \\ 0 & -m & \rho & n & 0 \\ 0 & 0 & n & \rho & -\mathfrak{P} \\ 0 & 0 & 0 & -\mathfrak{P} & \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Posons

$$P = 1 + m^2 + n^2 + \mathfrak{P}^2,$$
$$Q = m^2\mathfrak{P}^2 + n^2 + \mathfrak{P}^2.$$

L'équation précédente peut s'écrire

$$\rho(\rho^4 - P\rho^2 + Q) = 0.$$

Le discriminant est positif :

$$P^2 - 4Q = (1 + m^2 - n^2 - \mathfrak{P}^2)^2 + 4m^2n^2.$$

L'équation a cinq racines réelles :

$$\rho = 0, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}}, \quad -\rho_1, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}}, \quad -\rho_2.$$

Pour $\rho = 0$, le système (2) admet la solution

$$X_0 = \frac{m\mathfrak{P}}{\sqrt{Q}}, \qquad A_0 = 0, \qquad B_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{Q}}, \qquad C_0 = 0, \qquad D_0 = \frac{n}{\sqrt{Q}};$$

ces quantités vérifient la relation

$$X_0^2 + A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 + D_0^2 = 1.$$

Nous remarquons que l'équation

$$(X^2 + B^2 + D^2 - A^2 - C^2)\rho = 0$$

est une conséquence des équations (2). Soit pour $\rho = \rho_1$ la solution $X_1$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ du système (2) vérifiant les relations

$$X_1^2 + B_1^2 + D_1^2 = A_1^2 + C_1^2 = 1.$$

Pour $\rho = -\rho_1$ les valeurs de X, A, B, C, D sont $-X_1$, $-B_1$, $-D_1$, $A_1$, $C_1$, car si l'on remplace simultanément $X, B, D, \rho$ par $-X$, $-B$, $-D$, $-\rho$ dans les équations (2), ces équations ne changent pas.

Soit $X_2$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ la solution pour $\rho = \rho_2$ vérifiant les relations

$$X_2^2 + B_2^2 + D_2^2 = A_2^2 + C_2^2 = 1.$$

Nous avons les cinq solutions particulières du système d'équations (2) :

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = X_0 = \dfrac{m\varphi}{\sqrt{Q}}, & \alpha_1 = A_0 = 0, & \beta_1 = \dfrac{\varphi}{\sqrt{Q}}, & \gamma_1 = 0, & \delta_1 = \dfrac{n}{\sqrt{Q}}, \\
x_2 = \phantom{-}X_1 \cos\rho_1 s_1, & \alpha_2 = A_1 \sin\rho_1 s_1, & \beta_2 = \phantom{-}B_1 \cos\rho_1 s_1, & \gamma_2 = C_1 \sin\rho_1 s_1, & \delta_2 = \phantom{-}D_1 \cos\rho_1 s_1, \\
x_3 = \phantom{-}X_2 \cos\rho_2 s_1, & \alpha_3 = A_2 \sin\rho_2 s_1, & \beta_3 = \phantom{-}B_2 \cos\rho_2 s_1, & \gamma_3 = C_2 \sin\rho_2 s_1, & \delta_3 = \phantom{-}D_2 \cos\rho_2 s_1, \\
x_4 = -X_1 \sin\rho_1 s_1, & \alpha_4 = A_1 \cos\rho_1 s_1, & \beta_4 = -B_1 \sin\rho_1 s_1, & \gamma_4 = C_1 \cos\rho_1 s_1, & \delta_4 = -D_1 \sin\rho_1 s_1, \\
x_5 = -X_2 \sin\rho_2 s_1, & \alpha_5 = A_2 \cos\rho_2 s_1, & \beta_5 = -B_2 \sin\rho_2 s_1, & \gamma_5 = C_2 \cos\rho_2 s_1, & \delta_5 = -D_2 \sin\rho_2 s_1,
\end{array}$$

vérifiant les relations

$$\begin{gathered}
x_i^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 + \delta_i^2 = 1 \qquad (i, h = 1, 2, 3, 4, 5), \\
x_h x_i + \alpha_h \alpha_i + \beta_h \beta_i + \gamma_h \gamma_i + \delta_h \delta_i = 0 \qquad (h \gtrless i), \\
X_k = \frac{mn}{\sqrt{\rho_k^2(\rho_k^2 - 1 - m^2)^2 + \rho_k^2 m^2 n^2}} \qquad (k = 1, 2).
\end{gathered}$$

Une surface répondant à la question sera l'enveloppe des sphères

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m\varphi}{\sqrt{Q}}, \qquad x_2 = X_1 \cos\rho_1 s_1, \qquad x_3 = X_2 \cos\rho_2 s_1, \\ \qquad x_4 = -X_1 \sin\rho_1 s_1, \qquad x_5 = -X_2 \sin\rho_2 s_1. \end{array} \right.$$

Une intégrale générale du système (1) peut se mettre sous la forme

$$x^{(k)} = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + a_{3k} x_3 + a_{4k} x_4 + a_{5k} x_5.$$

Si nous prenons comme coefficients $a_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5$) des constantes satisfaisant aux conditions d'orthogonalité, les $x^{(k)}$ sont les coordonnées pentasphériques des sphères à un paramètre, telles que les invariants de la surface enveloppe de ces sphères soient égaux à des constantes determinées.

Les sphères ($\Sigma$) coupent l'une des sphères du pentasphère fixe sous un angle constant; elles appartiennent à trois complexes du second degré [1] :

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= X_0^2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2),\\
x_2^2+x_4^2 &= X_1^2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2),\\
x_3^2+x_5^2 &= X_2^2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2).
\end{aligned}
$$

Dans la recherche des conditions générales d'équivalence des surfaces enveloppes de sphères à un paramètre, nous avons classé les surfaces dont tous les invariants sont constants parmi celles qui admettent une transformation infinitésimale conforme.

3. L'étude des invariants différentiels des surfaces cerclées par rapport au groupe conforme conduit à une classification de ces surfaces. Les résultats obtenus nous ont amenés à distinguer les surfaces cerclées générales, qui admettent les invariants $I_0$, $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$ et les conditions d'équivalence de ces surfaces en donnent une classification; parmi les autres surfaces, nous avons étudié celles qui sont engendrées par le cercle caractéristique d'une sphère, et les conditions d'équivalence que nous venons d'énoncer donnent une classification de celles de ces surfaces qui admettent les trois courbures $m$, $n$, $\mathfrak{P}$.

---

[1] Ces propriétés des sphères ($\Sigma$) ont été indiquées par M. R. Le Vavasseur (*Académie des Sciences de Toulouse*, 10ᵉ série, t. I, 1901).

*Vu et approuvé :*

Paris, le 8 février 1915.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 8 février 1915.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.