JEAN-PAUL ALLOUCHE

Sur certains produits infinis

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. n° 4, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A2_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 4, 2 p.

18 novembre 1985

SUR CERTAINS PRODUITS INFINIS

par Jean-Paul ALLOUCHE (*)

Cet exposé est un peu la suite de celui proposé ici l'an dernier et résume trois articles, l'un en collaboration avec H. COHEN [1], le second avec H. COHEN, M. MENDÈS-FRANCE et J. O. SHALLIT [2], le troisième avec J. O. SHALLIT [3].

A l'origine un résultat de WOODS et ROBBINS ([6], [4]) généralisé par J. O. SHALLIT [5], puis par H. COHEN et l'auteur [1] stipule que

$$(1/2)^{a(0)}\ (3/4)^{a(1)}\ (5/6)^{a(2)} \ldots = 2^{-1/2}$$

où $a(n) = (-1)^{s(n)}$ et $s(n)$ est la somme des chiffres de n en base 2.

Le produit infini ci-dessus inspire une conjecture proposée dans [5] et prouvée dans [1].

Définissons la suite $b(n)$ par

$$b(0) = 1 ,$$

$$\prod_{k<n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{b(k)} < 2^{-1/2} , \text{ alors } b(n) = -1 ,$$

$$\prod_{k<n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{b(k)} > 2^{-1/2} , \text{ alors } b(n) = 1 .$$

Alors la suite $b(n)$ vérifie

$$b(n) = (-1)^{s(n)} .$$

Dans [2] les auteurs établissent le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit $s_q(n)$ la somme des chiffres de n en base q.

- Si $\sup(|x|^{q-1} , |1 + x + \ldots + x^{q-1}|) < q$, alors

$$\sum_{n\geqslant 0} x^{s_q(n)} \log \frac{n+1}{q[n/q] + q} = \frac{-\log q}{1-x} ,$$

et l'on peut dans ce domaine de convergence dériver sous le signe somme à n'importe quel ordre.

- Si $\sup(|x|^{q-1} , |1 + x + \ldots + x^{q-1}|) > q$, la série ci-dessus diverge.

(*) Jean-Paul ALLOUCHE, UER Mathématiques et Informatique, UA 226, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

Ceci permet de donner les valeurs de nouveaux produits infinis, par exemple

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-3/2)^{s(n)}} = 2^{-2/5} ,$$

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{s(n)(-1)^{s(n)}} = 2^{1/4}$$

($s(n)$ est toujours la somme des chiffres de n en base 2) .

Dans ce même article les auteurs remplacent $s_q(n)$ par $u(n)$, le nombre 11 dans le développement binaire de n (de sorte que $(-1)^{u(n)}$ est la suite de Rudin-Shapiro), et montrent par exemple

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}\right)^{(-1)^{u(n)}} = 2^{-1/2} .$$

Enfin dans un travail en préparation [3], J. O. SHALLIT et l'auteur étudient des produits infinis où intervient plus généralement le nombre d'apparitions d'un mot w dans le développement binaire de n .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE (Jean-Paul) and COHEN (Henri). - Dirichlet series and curious infinite products, Bull. of London math. Soc., t. 17, 1985, p. 531-538.

[2] ALLOUCHE (Jean-Paul), COHEN (Henri), MENDÈS-FRANCE (Michel) et SHALLIT (J. O.). - De nouveaux curieux produits infinis, Acta Arithm. Warszawa, t. 49, 1987, (à paraître).

[3] ALLOUCHE (Jean-Paul) et SHALLIT (J. O.). - (En préparation).

[4] ROBBINS (David). - Solution to problem E2692, Amer. math. Monthly, t. 86, 1979, p. 394-395.

[5] SHALLIT (J. O.). - On infinite products associated with sums of digits, J. of Number Theory, t. 21, 1985, p. 128-134.

[6] WOODS (Donald R.). - Elementary problem proposal, E2692, Amer. math. Monthly, t. 85, 1978, p. 48.