GROUPE D'ÉTUDE EN
THÉORIE ANALYTIQUE
DES NOMBRES

J. O. SHALLIT

Sur certains produits liés aux sommes des chiffres

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. nº 3, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A1_0>

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 3, 5 p.

4 novembre 1985

Sur certains produits liés aux sommes des chiffres

J. O. Shallit

U. E. R. de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex
France

Department of Computer Science
University of Chicago
1100 E. 58th St.
Chicago, IL 60637
USA

I. Introduction.

En 1978, Woods [7] a demandé

Quelle est la limite de la suite suivante:

$$x_0 = 1/2, \quad x_1 = \frac{1/2}{3/4}, \quad x_2 = \frac{\frac{1/2}{3/4}}{\frac{5/6}{7/8}}, \ldots\ ?$$

(Chaque terme est le numérateur du terme suivant). Les valeurs sont faciles à calculer:

$$x_0 = 0,5000;$$

$$x_1 = 0,6666;$$

$$x_2 = 0,7000;$$

et $x_{10} = 0,7071$; donc il semble que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Robbins [5] a trouvé une belle démonstration de l'équation (1) qui est très simple. On considère plutôt la suite

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+3}{x+2}}, \ldots$$

et on s'intéresse au cas $x = 1$. Soit

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+5}{x+4} \cdot \frac{x+7}{x+6} \cdots$$

La fonction $f(x)$ est bien définie parce qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+4k+1}{x+4k} \cdot \frac{x+4k+2}{x+4k+3} \right)^{\pm 1} \tag{2}$$

$$= \prod_{k \geq 0} \left(1 + \frac{2}{(x+4k)(x+4k+3)} \right)^{\pm 1}$$

$$= \prod_{k \geq 0} (1 + O(k^{-2}))^{\pm 1},$$

qui montre que le produit converge pour tout x tel que les dénominateurs de (2) ne s'annulent pas.

On vérifie immédiatement que

$$f(x) = \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+2k}{x+2k+1} \right)^{(-1)^{s_2(k)}} \tag{3}$$

où $s_2(k)$ est la somme des chiffres du développement de k en base 2. Comme $s_2(2k) = s_2(k)$ et $s_2(2k+1) = s_2(k) + 1$, on a

$$f(x) = \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+4k}{x+4k+1} \right)^{(-1)^{s_2(2k)}} \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+4k+2}{x+4k+3} \right)^{(-1)^{s_2(2k+1)}}$$

$$= \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+4k}{x+4k+2} \right)^{(-1)^{s_2(k)}} \prod_{k \geq 0} \left(\frac{x+4k+3}{x+4k+1} \right)^{(-1)^{s_2(k)}}$$

$$= f(\frac{x}{2}) f(\frac{x+1}{2})^{-1}.$$

Donc, en faisant $x = 1$, on trouve que

$$f(1)^2 = f(1/2).$$

$f(x)$ est continue et dérivable en $x = 0$; donc en employant la règle de l'Hôpital on trouve que

$$f(1/2) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x/2)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}f'(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2};$$

et par conséquent $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

II. Généralisations.

Maintenant nous voudrions trouver une bonne généralisation du résultat ci-dessus.

Théorème.

Soit k entier, $k \geq 2$. Soit $s_k(n)$ la somme des chiffres de n en base k. Soit $1 \leq j \leq k-1$. Alors

$$\prod_{i \geq 0} \frac{c_i + 1}{d_i + 1} = k^{-1/k}$$

où les c_i, d_i sont les entiers uniques tels que

$$ki \leq c_i, d_i < k(i+1)$$

et $s_k(c_i) \equiv j - 1 \pmod{k}$, $s_k(d_i) \equiv j \pmod{k}$.

La démonstration se trouve dans [6]. Elle employe le lemme suivant:

Lemme.

Il existe des équations fonctionnelles pour les $A_j(x)$:

$$A_1(x) = \frac{A_1(\frac{x}{k})A_2(\frac{x+k-1}{k})A_3(\frac{x+k-2}{k}) \cdots A_{k-1}(\frac{x+2}{k})}{A_1(\frac{x+1}{k})A_2(\frac{x+1}{k}) \cdots A_{k-1}(\frac{x+1}{k})} \tag{4}$$

$$A_2(x) = \frac{A_1(\frac{x+1}{k})A_2(\frac{x}{k})A_3(\frac{x+k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+3}{k})}{A_1(\frac{x+2}{k})A_2(\frac{x+2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+2}{k})} \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$A_{k-1}(x) = \frac{A_1(\frac{x+k-2}{k})A_2(\frac{x+k-3}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x}{k})}{A_1(\frac{x+k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+k-1}{k})} \tag{6}$$

III. Autres résultats.

Allouche et Cohen [1] ont obtenu les résultats ci-dessus en regardant deux séries de Dirichlet liées à la fonction $s_q(n)$:

$$f(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{\varsigma^{s_q(n)}}{(n+1)^s};$$

$$g(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{\varsigma^{s_q(n)}}{n^s}.$$

(Ici ς est une racine q—ème de l'unité.) Ils ont démontré que

$$\sum_{m\geq 0} x^{s_q(m)} \log_q \left(\frac{m+1}{q\lfloor \frac{m}{q} \rfloor + q} \right) = \frac{1}{x-1}, \tag{7}$$

si $x^q = 1$.

Récemment, avec Allouche, Cohen, et Mendès France, j'ai montré que l'équation (7) est en fait vérifiée pour tout x tel que

$$\sup(|x|^{q-1}, |1 + x + \cdots + x^{q-1}|) < q.$$

La démonstration pour $|x| < 1$ est très simple [2].

L'équation (3) ci-dessus suggère l'existence d'une équation semblable liée à la fonction $a_0(n)$ qui compte le nombre d'occurrences du chiffre "0" (et non du chiffre "1") dans le développement de n en base 2. En fait, on a

$$\prod_{k\geq 1}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{a_0(k)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il existe des formules analogues pour les fonctions $a_w(n)$ qui comptent le nombre d'apparitions d'un bloc de chiffres w [3].

Il faut aussi mentionner que les valeurs des fonctions $A_j(x)$ ont récemment paru dans un article intéressant de Flajolet [4].

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche et H. Cohen, Dirichlet series and curious infinite products, *Bull. Lond. Math. Soc.* **17** (1985) 531-538.

[2] J.-P. Allouche, H. Cohen, M. Mendès France et J. O. Shallit, De nouveaux curieux produits infinis, en préparation.

[3] J.-P. Allouche et J. O. Shallit, Infinite products associated with counting blocks in binary strings, en préparation.

[4] P. Flajolet et G. Nigel Martin, Probabilistic counting algorithms for data base applications, *J. Comp. System Sci.* **31** (1985) 182-209.

[5] David Robbins, Solution to Problem E 2692, *Am. Math. Monthly* **86** (1979) 394-5.

[6] J. O. Shallit, On infinite products associated with sums of digits, *J. Number Theory* **21** (1985) 128-134.

[7] Donald R. Woods, Elementary Problem Proposal E 2692, *Am. Math. Monthly* **85** (1978) 48.