GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

MICHEL BALAZARD

Sur un théorème de Halasz et Sarközy

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 2 (1985-1986), exp. nº 17, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1985-1986__2__A10_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
3e année, 1985/86, n° 17, 9 p.

14 avril 1986

SUR UN THÉORÈME DE HALASZ ET SARKÖZY

par Michel BALAZARD (*)

1. Introduction.

Dans cet exposé, nous présentons diverses techniques menant à des résultats concernant la distribution des valeurs des fonctions arithmétiques additives (les fonctions $f : \underset{\sim}{N}^* \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ vérifiant $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous m , $n \in \underset{\sim}{N}^*$, premiers entre eux). D'une manière générale, il s'agit d'étudier la quantité

$$N(x , f , c) := \sum_{n \leqslant x, f(n)=c} 1 ,$$

pour f additive, x et c réels.

Dans cette étude, la quantité suivante s'avère d'une grande importance

$$E(x) := \sum_{p \leqslant x, f(p) \neq 0} \frac{1}{p} .$$

On a, par exemple, le résultat suivant (cf. [2], tome 2, chap. 21) :

THÉORÈME 1 (G. HALASZ, 1975). - Il existe une constante absolue $A_0 > 0$ telle que $N(x , f , c) \leqslant A_0 (x/\sqrt{E(x)})$, pour tout $x \geqslant 1$, tout réel c et toute fonction additive f .

On retrouve en particulier un ancien résultat d'ERDÖS : Si une fonction additive f vérifie $\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = + \infty$, alors l'ensemble $\{n ; n \in \underset{\sim}{N}^* \text{ et } f(n) = c\}$ est de densité nulle pour tout réel c .

Soit E une partie de l'ensemble P des nombres premiers $p_1 < p_2 < \dots$ la suite ordonnée des éléments de E . Nous nous intéresserons ici à la fonction $f=\Omega_E$ définie par $\Omega_E(n) = \mathrm{Card}\{(p , k) \in E \times \underset{\sim}{N}^* ; p^k | n\}$. $\Omega_E(n)$ est le nombre total des facteurs appartenant à E , dans la décomposition de n en produit de nombres premiers.

On notera $N(x , \Omega_E , k) = N_E(x , k)$. La quantité $E(x)$ vaut ici $\sum_{p \leqslant x, p \in E} \frac{1}{p}$.

Le théorème évoqué dans le titre est le suivant (cf. [5] et [10]) :

THÉORÈME 2 (G. HALASZ, 1972 ; A. SARKÖZY, 1977). - Soit $\delta \in \,]0 , 1[$. On a :

$$N_E(x , k) \ll_\delta x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!} \tag{1}$$

pour tout E , tout $x \geqslant 3$ et tout entier naturel k tels que

$$k + 1 \leqslant (2 - \delta) E(x) .$$

(*) Michel BALAZARD, Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

(2) $$N_E(x\ ,\ k) \gg_\delta xe^{-E(x)} \frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

pour tout E , tout $x \geq 3$ et tout entier naturel k tels que $1 \leq k \leq (2-\delta)\, E(x)$, $E(x) \geq c(\delta)$, où $c(\delta)$ est une constante positive ne dépendant que de δ .

Remarquons ici que (2) ne donne aucune minoration pour $N_E(x\ ,\ 0)$; ce problème est l'objet du petit crible d'ERDÖS et RUSZA (cf. [3], [7] et [8]).

Par une combinaison d'arguments élémentaires et analytiques que nous esquisserons au paragraphe 2, G. HALASZ avait, en 1972, démontré (1), mais n'obtenait (2) que pour l'un des deux entiers k et $k+1$. Il prouvait en fait :

$$N_E(x\ ,\ k) + N_E(x\ ,\ k+1) \gg_\delta xe^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!} ,$$

sous les hypothèses de (2).

En 1977, A. SARKÖZY démontrait (2) en utilisant, en plus des idées de G. HALASZ, un procédé élémentaire dû à P. ERDÖS, I. RUSZA et lui-même. Nous décrivons ce procédé au paragraphe 3.

Il faut souligner que les méthodes élémentaires utilisées par G. HALASZ et A. SARKÖZY sont de natures différentes. Dans [5], il s'agit plutôt de la méthode de Tchebytchef, et dans [10] d'une méthode combinatoire utilisant le principe du crible de Brun.

Au paragraphe 4, nous exposerons nos résultats concernant l'ordre de grandeur de $N_E(x\ ,\ k)$ pour les valeurs de $k > (2-\delta)\, E(x)$. Signalons que cet exposé reprend, et approfondit certains points évoqués lors d'un précédent exposé devant ce même groupe d'étude (cf. [1]).

2. La méthode de G. HALASZ.

(a) Partie analytique. - Le point de départ est l'étude de la fonction génératrice de l'ensemble des entiers n vérifiant $\Omega_E(n) = k$. Il s'agit de la série $\sum_{n=1,\Omega_E(n)=k}^{+\infty} (1/n^\sigma)$, convergente si $\sigma > 1$ (dans ce qui suit, seules interviennent les valeurs réelles de σ). On peut donner deux autres expressions de cette série, d'une part

(3) $$\int_{1^-}^{+\infty} u^{-\sigma}\, dN_E(u\ ,\ k) = \sigma \int_1^{+\infty} u^{-\sigma-1}\, N_E(u\ ,\ k)\, du$$

et d'autre part

(4) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^\sigma}\, z^{-k-1}\, dz .$$

(3) est obtenue en intégrant par parties. (4) découle de la formule de Cauchy, le cercle $|z| = r$ étant parcouru dans le sens positif ; il suffit de vérifier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} (r^{\Omega_E(n)}/n^\sigma)$. En fait,

$$F(z\ ,\ \sigma) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^\sigma} = \prod_{p\in E} \frac{1}{1-(z/p^\sigma)} \prod_{p\notin E} \frac{1}{1-(1/p^\sigma)}\ ,$$

où la série et les produits convergent absolument pour $|z| < p_1$ et $\sigma > 1$: cela découle du théorème du produit eulérien.

On va maintenant obtenir un encadrement de la deuxième intégrale de (3) au moyen de l'expression (4). Le rayon d'intégration r peut être choisi arbitrairement dans $]0\ ,\ p_1[$, mais on va supposer $0 < r < 2 - \delta$, afin que les constantes implicites dans les termes d'erreurs à venir ne dépendent au plus que de δ .

Pour estimer (4), on utilise le principe de la méthode du col : on choisit r de sorte que la portion de cercle proche du point réel $z = r$ fournisse la contribution principale à l'intégrale. Pour commencer, on exprime $F(z\ ,\ \sigma)$ au moyen de $F(r\ ,\ \sigma)$ en utilisant les produits eulériens. On obtient :

$$F(z\ ,\ \sigma) = F(r\ ,\ \sigma)(e^{(z-r)E(y)} + \text{reste}$$

où y est défini par l'égalité $\sigma = 1 + (1/\log y)$.

On reporte cette relation dans (4), on choisit r optimalement $(r = (k+1)/E(y))$, et on exprime $F(r\ ,\ \sigma)$ au moyen de $F(1\ ,\ \sigma) = \zeta(\sigma) \sim 1/(\sigma - 1) = \log y$ pour arriver à l'estimation :

$$\sum_{n=1,\Omega_E(n)=k}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} = e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} (\log y)\ e^{O_\delta(1)} \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{E(y)}}\right)\right)\ ,$$

d'où l'encadrement

$$e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} \log y \ll_\delta \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u\ ,\ k)}{u^{\sigma+1}}\, du \ll_\delta e^{-E(y)} \frac{E(y)^k}{k!} \log y$$

où $\sigma = 1 + (1/\log y)$, $k + 1 \leqslant (2-\delta)\,E(y)$ et $E(y) \geqslant c(\delta)$ pour la minoration.

(b) <u>Partie élémentaire</u>. - On vient d'estimer une intégrale contenant $N_E(u\ ,\ k)$ (en fait, sa transformée de Mellin), et il s'agit d'en déduire une estimation de la quantité $N_E(x\ ,\ k)$ elle-même. Pour cela, on va utiliser sa définition et employer l'astuce "logarithmique" de Tchebytchef :

$$\sum_{n\leqslant x,\Omega_E(n)=k} \log n = \sum_{n\leqslant x,\Omega_E(n)=k} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d\leqslant x} \Lambda(d)\ N_E\left(\frac{x}{d}\ ,\ k - \Omega_E(d)\right)\ ,$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt. En négligeant les puissances de nombres premiers d'exposant $\geqslant 2$, on aboutit à :

$$\sum_{n\leqslant x,\Omega_E(n)=k} \log n = \sum\nolimits'_{p\leqslant x} \log p\ N_E\left(\frac{x}{p}\ ,\ k-1\right) + \sum\nolimits''_{p\leqslant x} \log p\ N_E\left(\frac{x}{p}\ ,\ k\right) + \text{reste}$$

où $\sum'$ et $\sum''$ indiquent des sommations portant respectivement sur les nombres premiers de E et de $P \setminus E$. Nous les majorons trivialement par des sommations portant sur tous les nombres premiers. Ainsi, pour $u \geqslant x$,

$$\log\sqrt{x}\,(N_E(x\ ,\ k) - \sqrt{x}) \leqslant \sum_{n\leqslant x,\Omega_E(n)=k} \log n \leqslant \sum_{n\leqslant u,\Omega_E(n)=k} \log n$$

$$\leqslant \sum_{p\leqslant u} \log p\left[N_E\left(\frac{u}{p}\ ,\ k-1\right) + N_E\left(\frac{u}{p}\ ,\ k\right)\right] + \text{reste}\ ,$$

d'où, par intégration entre x et $2x$,

$$\frac{1}{2} \log x \, N_E(x , k) \, x \leqslant \int_x^{2x} \sum_{p\leqslant u} \log p [N_E(\frac{u}{p} , k - 1) + N_E(\frac{u}{p} , k)] \, du + \text{reste}$$

$$= \int_1^x [N_E(u , k - 1) + N_E(u , k)] \sum_{p\leqslant 2x/u} p \log p \, du + \text{reste}$$

$$\ll x^2 \int_1^x \frac{N_E(u , k - 1)}{u^2} du + x^2 \int_1^x \frac{N_E(u , k)}{u^2} du + \text{reste} .$$

Si on pose $\sigma = 1 + (1/\log x)$, on a $u^{-2} = (u^{\sigma-1}/u^{\sigma+1}) \leqslant (x^{\sigma-1}/u^{\sigma+1}) = (e/u^{\sigma+1})$ si $u \leqslant x$, donc

$$x \log x \, N_E(x , k) \ll x^2 \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u , k - 1)}{u^{\sigma+1}} du + x^2 \int_1^{+\infty} \frac{N_E(u , k)}{u^{\sigma+1}} du + \text{reste} .$$

En utilisant le résultat de la partie analytique avec $y = x$, et en montrant que le reste est négligeable, on aboutit bien à

$$N_E(x , k) \ll_\delta x e^{-E(x)} \left(\frac{E(x)^{k-1}}{(k - 1)!} + \frac{E(x)^k}{k!}\right) \ll_\delta x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!} .$$

Pour la minoration, les détails techniques sont un peu plus pénibles. En particulier, on ne peut pas minorer Σ' et Σ'' par Σ . L'idée est alors de travailler sur la quantité $N_E(x , k) + N_E(x , k + 1)$, car on peut regrouper les sommes

$$\Sigma''_{p\leqslant x} \log p \, N_E(\frac{x}{p} , k) \quad \text{et} \quad \Sigma'_{p\leqslant x} \log p \, N_E(\frac{x}{p} , k) \quad \text{en} \quad \Sigma_{p\leqslant x} \log p \, N_E(\frac{x}{p} , k) .$$

3. Une méthode combinatoire de P. ERDÖS, I. RUSZA et A. SARKÖZY.

Nous décrivons cette méthode dans son cadre original (cf. [4]). En effet, sa mise en oeuvre pour la démonstration de (2) fait intervenir des difficultés supplémentaires qui masquent un peu les idées essentielles de ce procédé. Il s'agit de démontrer le fait suivant :

THÉORÈME 3 (P. ERDÖS, I. RUSZA, A. SARKÖZY 1973). - Il existe deux constantes absolues $\epsilon > 0$ et $A > 0$ telles que, pour toute fonction additive f , pour tout réel $c \neq 0$ et tout $x \geqslant A$, on ait : $N(x , f , c) \leqslant (1 - \epsilon) x$.

Commençons par quelques observations.

Remarque 1. - L'hypothèse $c \neq 0$ est essentielle comme le montre l'exemple de la fonction $f \equiv 0$, ou celui de $f = v_p$ (valuation p-adique) avec $p > 1/\epsilon$.

Remarque 2. - Intuitivement, le théorème 3 nous dit qu'une fonction additive est toujours "loin" d'être une constante non nulle : si $c \neq 0$ et $x \geqslant A$, la proportion d'entiers $n \leqslant x$ vérifiant $f(n) \neq c$ est toujours $\geqslant \epsilon$.

Remarque 3. - Dans [4], le théorème 3 est démontré avec $A = 1$, $\epsilon = 10^{-1000}$. Les auteurs annoncent qu'ils peuvent obtenir $\epsilon = 10^{-1}$. Ils montrent d'autre part que ϵ ne peut être supérieur ou égal à $1 - \log 2$ (notons que $\epsilon \leqslant 1/2$ est évident, comme le montre le choix : f = fonction caractéristique des nombres pairs et $c = 1$). Il semble que la détermination de la meilleure constante ϵ soit un problème encore ouvert.

Nous présentons maintenant la démonstration du théorème 3.

Étape 1. - On peut supposer $f(n) = 0$ pour $n \leqslant C'$, où C' est une constante absolue assez grande. En effet, dans le cas contraire, le plus petit entier m , tel que $f(m) \neq 0$ (nous écartons le cas trivial de la fonction f identiquement nulle), est une puissance de nombres premiers $p_0^{a_0} \leqslant C'$. Notons alors :

$\mathfrak{N}(x , f , c) = \{n \in \mathbb{N}^* ; n \leqslant x \text{ et } f(n) = c\}$,

$\mathfrak{M} = \{n' \in \mathbb{N}^* ; p_0^{a_0} \| n'\}$, de sorte que $N(x , f , c) = \operatorname{card} \mathfrak{N}(x , f , c)$.

On définit une bijection entre $\mathfrak{M}$ et une partie de $\{1 , \ldots , [x]\} \setminus \mathfrak{N}(x , f , c)$ par les correspondances

$$n' \longmapsto n' \quad \text{si} \quad f(n') \neq c$$

$$n' \longmapsto \frac{n'}{p_0^{a_0}} \quad \text{si} \quad f(n') = c .$$

Par conséquent

$$[x] - N(x , f , c) \geqslant \operatorname{card} \mathfrak{M} = \left[\frac{x}{p_0^{a_0}}\right] - \left[\frac{x}{p_0^{a_0+1}}\right]$$

et

$$N(x , f , c) \leqslant x\left(1 - \frac{1}{p_0^{a_0}} + \frac{1}{p_0^{a_0+1}}\right) + 1 \leqslant x\left(1 - \frac{1}{2C'}\right) + 1 \leqslant x\left(1 - \frac{1}{3C'}\right) \quad \text{si} \quad x \geqslant 6C' .$$

Dans les étapes suivantes, on supposera que $x \geqslant A$, les constantes absolues C' et A étant fixées à des valeurs suffisamment grandes pour que les inégalités que nous écrivons soient vérifiées.

Étape 2. - Dit grossièrement, on va montrer que, si $E(x)$ n'est ni trop grand ni trop petit, l'inégalité $N(x , f , c) \leqslant (1 - (1/20))\, x$ est vérifiée même si $c = 0$ (c'est important pour l'étape 5).

Supposons d'abord que $c \neq 0$. Si n appartient à $\mathfrak{N}(x , f , c)$, on a $f(n) \neq 0$, et on est donc dans l'un des deux cas suivants (au moins) :

. soit il existe un nombre premier p tel que $p \| n$ (donc $p \leqslant x$) et $f(p) \neq 0$,

. soit il existe une puissance de nombre premier p^α , avec $\alpha \geqslant 2$, telle que $p^\alpha \| n$ et $f(p^\alpha) \neq 0$ (donc $p^\alpha > C'$) . On en déduit que

$$N(x , f , c) \leqslant \sum_{p \leqslant x, f(p) \neq 0} \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{p^\alpha > C', \alpha \geqslant 2} \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] \leqslant x(E(x) + D) \quad \text{où} \quad D = \frac{1}{p^\alpha} .$$

Supposons maintenant $c = 0$. On a l'implication suivante :

. s'il existe un unique nombre premier $p \leqslant x$ vérifiant $p \| n$ et $f(p) \neq 0$,

. et si aucune puissance de nombre premier $p^\alpha > C'$, avec $\alpha \geqslant 2$, ne vérifie $p^\alpha \| n$, alors $f(n) \neq 0$, c'est-à-dire $n \notin \mathfrak{N}(x , f , 0)$. On en déduit que :

$$[x] - N(x\,,\,f\,,\,0) \geq \sum_{\substack{p\leq x\\ f(p)\neq 0}} [\frac{x}{p}] - 2 \sum_{\substack{p\leq q\leq x\\ f(p)\neq 0\\ f(q)\neq 0}} [\frac{x}{pq}] - \sum_{\substack{p^\alpha > C'\\ \alpha\geq 2}} [\frac{x}{p^\alpha}]\,,$$

d'où $N(x\,,\,f\,,\,0) \leq x(1 - E(x) + (\pi(x)/x) + E(x)^2 + D)$.

On veut donc que $E(x) + D$ et $1 - E(x) + (\pi(x)/x) + E(x)^2 + D$ soient $\leq 1 - (1/20)$. Comme $\pi(x/x)$ et D sont $\leq 1/50$ (si C' et A sont assez grands), il suffit que $1/10 \leq E(x) \leq 1/9$.

Les raisonnements utilisés ci-dessus pour majorer $N(x\,,\,f\,,\,c)$ sont proches de cas simples du crible de Brun. Rappelons le principe de ce crible : si $A_1\,,\cdots,\,A_k$ sont des ensembles finis, et si $S_\ell = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_\ell\leq k} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\ell})$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2j} (-1)^{\ell-1} S_\ell \leq \mathrm{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leq \sum_{\ell=1}^{2j'+1} (-1)^{\ell-1} S_\ell$$

pour tous les entiers $j\,,\,j'$ tels que $0 \leq 2j \leq k$, $1 \leq 2j' + 1 \leq k$, alors que $\mathrm{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-1} S_\ell$ (principe d'inclusion-exclusion).

D'après l'étape 2, le théorème 3 est démontré si $E(x) + D \leq 1 - \varepsilon$.

Si $\varepsilon = 1/20$, il suffit que $E(x) \leq 93/100$ (car $D \leq 1/50$). Quitte à augmenter C' , A et à diminuer ε , nous allons maintenant montrer le résultat pour un x vérifiant $x \geq A$ et $E(x) > 93/100$. Cela va se faire en "propageant" le résultat de l'étape 2 au moyen d'ensembles de multiples.

Étape 3. – Montrons que, si $E(x) > 93/100$, il existe $m \geq C'$ tel que

$m \leq x^{9/20}$ et $1/10 \leq E(u) \leq 1/9$ pour tout u tel que $m^{99/100} \leq u \leq m$.

Il suffit de définir m comme le plus grand entier $\geq C'$ vérifiant $E(m) \leq 1/9$. En effet, si $m^{99/100} \leq u \leq m$, on a :

. d'une part, $E(u) \leq E(m) \leq 1/9$,

. d'autre part,

$$E(u) \geq E(m^{99/100}) \geq E(m) - \sum_{m^{99/100}<p\leq m} \frac{1}{p} = E(m) - \log\frac{100}{99} + O(\frac{1}{\log m})$$

$$\geq E(m+1) - \frac{1}{m+1} - \log\frac{100}{99} + O(\frac{1}{\log m}) \geq \frac{1}{9} - \log\frac{100}{99} + O(\frac{1}{\log m}) \geq \frac{1}{10}$$

si C' est assez grand. De même,

$$E(x^{9/20}) \geq E(x) - \log\frac{20}{9} + O(\frac{1}{\log x}) \geq 0{,}93 - \log\frac{20}{9} + O(\frac{1}{\log x}) \geq \frac{1}{9} \geq E(m)\ A\,,$$

si A est assez grand, donc $m \leq x^{9/20}$.

Étape 4. – Soit $A(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ de la forme $n = tv$, avec $t \leq m$, $x/m \leq v \leq x/m^{99/100}$ et $(v\,,\,\prod_{p\leq m} p) = 1$. Montrons que $A(x) \geq \eta x$, où η est une constante absolue.

Soit $B(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ de la forme $n = tv$, avec $m^{99/100} \leq t$ et $(v\,,\,\prod_{p\leq m} p) = 1$. $B(x)$ vaut $\sum_{m^{99/100}\leq t\leq m^{298/300}} \Phi(x/t\,,\,m)$, où $\Phi(X\,,\,Y)$

désigne le nombre d'entiers $\leqslant X$ n'ayant que des facteurs premiers $> Y$. Utilisons la minoration $\Phi(X, Y) \geqslant c_1 X/\log Y$ (c_1 constante positive absolue) valable si $Y \geqslant 2$ et X/Y assez grand (voir [6], chapître IV, paragraphe 3) ; si $m^{99/100} \leqslant t \leqslant m^{298/300}$, $x/mt \geqslant x/m^2 \geqslant x^{1/10} \geqslant A^{1/10}$ donc, pour A assez grand,

$$B(x) \geqslant c_1 \sum_{m^{99/100} \leqslant t \leqslant m^{298/300}} \frac{x}{t \log m} \geqslant c_2 x ,$$

où c_2 est une constante positive absolue.

Posons $c_2 = 2\eta$, et considérons un entier $n = tv$, compté dans $B(x)$ mais pas dans $A(x)$. Cela entraîne que $v < x/m$ car $v \leqslant x/t \leqslant x/m^{99/100}$. On a donc

$$n = tv \leqslant m^{298/300} \frac{x}{m} = \frac{x}{m^{1/150}} \leqslant \frac{x}{C'^{1/150}} \leqslant \eta x ,$$

si C' est assez grand. Par suite, $2\eta x \leqslant B(x) \leqslant A(x) + \eta x$ et $A(x) \geqslant \eta x$.

<u>Étape 5</u>. - Soit c un réel (le fait que $c \neq 0$ n'intervient pas ici), et $n = tv$ un entier compté dans $A(x)$ et dans $N(x, f, c)$. On a $f(t) = c - f(v)$, et $t \leqslant x/v$, donc

$$N(x, f, c) \leqslant [x] - A(x) + \sum_{\substack{x/m \leqslant v \leqslant x/m^{99/100} \\ (v, \prod_{p \leqslant m} p) = 1}} N(\frac{x}{v}, f, c - f(v)) .$$

On a $m^{99/100} \leqslant x/v \leqslant m$, donc $1/10 \leqslant E(x/v) \leqslant 1/9$, et $x/v \geqslant A$ si $C' \geqslant A^{100/99}$. D'après l'étape 2, on a

$$N(x, f, c) \leqslant [x] - A(x) + 0{,}95 \sum_{\substack{x/m \leqslant v \leqslant x/m^{99/100} \\ (v, \prod_{p \leqslant m} p) = 1}} \frac{x}{v}$$

$$\leqslant x + 1 - \eta x + 0{,}95(\eta x + \frac{x}{m^{99/100}}) \leqslant (1 - \varepsilon) x ,$$

où ε est une constante positive absolue. Cela achève la démonstration du théorème 3.

4. Compléments sur l'ordre de grandeur de $N_E(x, k)$.

Dans l'étude de $N_E(x, k)$ pour les grandes valeurs de k ($k \geqslant (2 - \delta) E(x)$), le nombre premier p_1 joue un rôle particulier. Cela se comprend puisque les nombres Ω_E-hautement composés (les entiers n vérifiant $\Omega_E(n) \geqslant \Omega_E(m)$ pour tout $m \leqslant n$) sont justement les puissances de p_1. On est ainsi amené à changer la définition de $E(x)$ en posant

$$E(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in E, p \neq p_1}} \frac{1}{p} .$$

Notons $P_k(X) = 1 + X + \dots + X^k/k!$ (somme partielle de la série exponentielle). Nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Il existe une constante absolue K telle que

(5) $$N_E(x, k) \leqslant e^{Kp_1 \log\log(1+p_1)} \frac{x}{p_1^k} e^{-E(x/p_1^k)} P_k(p_1 E(\frac{x}{p_1^k}))$$

pour tout E, tout $x \geqslant 3$, et tout entier naturel k,

(6) $$N_E(x, k) \geqslant e^{Kp_1 \log p_1} \frac{x}{p_1^k} e^{-E(x/p_1^k)} P_{k-1}(p_1 E(\frac{x}{p_1^k}))$$

pour tout E, tout $x \geqslant 3$, et tout entier naturel k vérifiant

$$1 \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{\log p_1} \quad \text{et} \quad E(\frac{x}{p_1^k}) \geqslant M(p_1) ,$$

où $M(p_1)$ est une constante positive ne dépendant que de p_1.

La démonstration complète du théorème 4 paraîtra ailleurs ; elle est ébauchée dans [1]. Notons que ce théorème généralise, sous une forme moins précise, un résultat de J.-L. NICOLAS (cf. [9]) concernant le cas où $E = P$.

Indiquons pour terminer l'approche de $N_E(x, k)$ qui sert de point de départ à la démonstration de (5). Il s'agit d'une idée due à G. HALASZ, déjà utilisée dans [9].

Notons $P(E)$ l'ensemble $\{p ; p \notin E\} \cup \{p'/p_1 ; p' \in E, p' \neq p_1\}$ considéré comme ensemble de nombres premiers généralisés, et $Z(E)$ l'ensemble des entiers généralisés formé à partir de $P(E)$. Remarquons que $Z(E)$ est exactement, et sans répétition, l'ensemble des $m = n/p_1^{\Omega_E(n)}$, n décrivant l'ensemble des entiers premiers à p_1. On définit alors $\Omega_E(m) = \Omega_E(n)$.

Tout entier n s'écrit de manière unique $n = p_1^{\alpha} n'$, où n' est premier à p_1. On a

$$n \leqslant x \text{ et } \Omega_E(n) = k \iff p_1^{\alpha} n' \leqslant x$$

$$\text{et } \alpha + \Omega_E(n') = k \iff \frac{n'}{p_1^{\Omega_E(n')}} \leqslant \frac{x}{p_1^k} , \quad \Omega_E(n') \leqslant k , \text{ et } \alpha = k - \Omega_E(n').$$

Cela prouve que

$$N_E(x, k) = \sum_{\substack{m \in Z(E) \\ m \leqslant x/p_1^k , \Omega_E(m) \leqslant k}} 1 .$$

En particulier, on voit apparaître sur cette formule la quantité x/p_1^k, présente dans l'énoncé du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALAZARD (Michel). - Sur la fonction $\Omega_E(n)$, Groupe d'étude en Théorie analytique des nombres, 2e année, 1984/85, nº 34, 10 p.

[2] ELLIOTT (P. D. T. A.). - Probabilistic number theory. Vol. I-II. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979-1980 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 239-240).

[3] ERDÖS (P.) and RUZSA (I. Z.). - On the small sieve. I : Sifting by primes, J. of Number Theory, t. 12, 1980, p. 385-394.

[4] ERDÖS (P.), RUSZA (I., Jr.) and SARKÖZI (A.). - On the number of solutions of $f(n) = a$ for additive functions, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 1-9.

[5] HALASZ (G.). - Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 23, 1972, p. 425-432.

[6] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. Vol. 1. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[7] HILDEBRAND (A.). - Sur le "petit crible" de Erdös et Rusza. Actes du colloque du CIRM "Théorie élémentaire et analytique des nombres" [1983. Marseille-Luminy], Publications d'Orsay, 1983.

[8] HILDEBRAND (A.). - Quantitative mean value theorems for non negative multiplicative functions, Acta Arithm., Warszawa (à paraître).

[9] NICOLAS (Jean-Louis). - Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, Acta Arithm., Warszawa, t. 44, 1984, p. 191-200.

[10] SARKÖZY (Andras). - Remarks on a peper of G. Halasz : "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", Period. Math. Hungar., t. 8, 1977, p. 135-150.