GROUPE D'ÉTUDE EN
THÉORIE ANALYTIQUE
DES NOMBRES

JEAN-PIERRE BOREL

Un résultat probabiliste en répartition Modulo 1

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 27, p. 1
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A9_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 27, 1 p.

28 janvier 1985

UN RÉSULTAT PROBABILISTE EN RÉPARTITION MODULO 1

d'après Michael BOSHERNITZAN

par Jean-Pierre BOREL [1]

Il s'agit d'un résultat [2] qui entraîne l'existence de suites à croissance relativement rapide d'entiers, $U = (u_n)_{n\geqslant 0}$, et qui vérifient la propriété suivante de répartition modulo 1 :

$$\begin{cases} \forall\ \alpha \notin \mathbb{Q}\ , & \alpha U \text{ est équirépartie modulo } 1 \\ \forall\ q \geq 2\ , & U \text{ est équirépartie modulo } q\ . \end{cases}$$

Ces propriétés en font des suites de Poincaré (c'est en fait le cas pour toutes les translatées de U).

La méthode consiste à travailler sur des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, puis à se ramener à des suites d'entiers par un schéma classique. Le théorème essentiel est alors le suivant.

THÉORÈME. - <u>Soient</u> $(n_k)_{k\geqslant 1}$ <u>et</u> $(m_k)_{k\geqslant 1}$ <u>deux suites d'entiers vérifiant</u> :

$$\begin{cases} \forall\ k \geqslant 1\ , \quad m_k > n_k > 0 \\ \lim_{k\to\infty} m_k - n_k = +\infty \\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{m_k} = 1\ . \end{cases}$$

<u>Alors presque toute suite</u> $X = (x_k)_{k\geqslant 1}$ <u>de nombres réels vérifiant</u> $m_k > x_k > n_k$ $(k \geqslant 1)$ <u>est telle que</u> αX <u>est équirépartie</u> modulo 1 , <u>pour tout</u> α <u>réel non nul</u>.

La démonstration utilise des arguments classiques de probabilités, inégalité de Bernstein essentiellement.

---

[1] Jean-Pierre BOREL, 8 avenue Président Coty, 87100 LIMOGES.

[2] BOSHERNITZAN (Michael). - Homogeneously distributed sequences and Poincaré sequences of integers of sublacunary growth, Monatsh. für Math., t. 96, 1983, p. 173-181.