Gérald Tenenbaum

Sur un problème de crible et ses applications

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 24, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A7_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 24, 7 p.

7 janvier 1985

SUR UN PROBLÈME DE CRIBLE ET SES APPLICATIONS

par Gérald TENENBAUM (*)

La répartition des facteurs premiers d'un entier est une donnée cruciale de quantité de problèmes arithmétiques. Elle apparaît souvent sous forme de conditions liant les tailles relatives des facteurs. Soit

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i \tag{1.1}$$

la décomposition canonique d'un entier générique dont les facteurs premiers, non nécessairement distincts, sont rangés par ordre croissant $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_k$. On pose alors

$$n_j = \begin{cases} 1 & , \quad (j = 1) , \\ \prod_{i<j} p_i & , \quad (1 < j \leqslant k) . \end{cases} \tag{1.2}$$

La plupart des questions de taille relative se posent en termes de comparaison de p_j et n_j, ce qui est en accord avec le principe d'Erdös [2] que la croissance de $\log p_j$ est normalement exponentielle.

Ainsi, dans le crible de Rosser-Iwaniec (cf. par exemple [11]) les ensembles $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$, sont-ils définis par des conditions du type

$$\max_{j\in J} p_j^{\beta}\left(\frac{n}{n_j}\right) < D , \tag{1.3}$$

où β est un paramètre $\geqslant 1$, et J un sous ensemble donné de $\{1 , 2 , \dots , k\}$.

ERDÖS a souvent eu l'occasion d'utiliser le fait que

$$R(n) := \max_{1\leqslant j\leqslant k} (\log n_j)/\log p_j$$

est normalement à croissance très lente. On a en fait [3]

$$R(n) = (1 + o(1)) \frac{\text{logloglog } n}{\text{loglogloglog } n}$$

pour presque tout n. Un résultat plus précis est établi dans l'important travail de BOVEY [1] qui contient en particulier une étude fine de la répartition des quantités $\log n_j/\log p_j$.

Nous nous intéressons ici à une condition du type (1.3) dans le cas $\beta = 1$, $J = \{1 , 2 , \dots , k\}$. Notant $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de n (avec la convention $P^-(1) = \infty$), nous définissons la fonction F de Schinzel-Szekeres par :

(*) Gérald TENENBAUM, Mathématiques, Université de Nancy-I, B. P. 239, 54506 VANDOEUVRE CEDEX.

$$(1.4) \qquad F(n) := \begin{cases} 1 & , \quad (n = 1) , \\ \max\{dP^-(d) \ ; \ d|n , \ d > 1\} , & (n > 1) . \end{cases}$$

Cette fonction a été implicitement considérée par SCHINZEL et SZEKERES dans [15] en relation avec un problème de crible sur lequel nous reviendrons plus loin. Il est immédiat que le maximum apparaissant dans la définition (1.4) est nécessairement atteint pour un diviseur d de la forme n/n_j , $1 \leqslant j \leqslant k$. Dans l'esprit de (1.3), nous introduisons les fonctions de répartition

$$D(x , y) := \mathrm{card}\{n \leqslant x \ ; \ F(n) \leqslant yn\} ,$$

$$E(x , y) := \mathrm{card}\{n \leqslant x \ ; \ F(n) \leqslant yx\} ,$$

initialement définies pour $x \geqslant 1$, $y > 0$. On a trivialement $F(n) \geqslant nP^-(n) \geqslant 2n$ pour tout $n > 1$, donc $D(x , y) \leqslant 1$ pour $y < 2$.

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> γ , λ <u>des réels tels que</u>

$$\gamma > 5/3 , \quad \lambda > \frac{5}{3}\left(1 - \frac{\log\psi}{\psi}\right) = 4,20001\ldots , \quad \left(\psi = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) .$$

<u>On a, pour</u> $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$(1.5) \qquad \frac{x}{u} L(u , y) \ll_{\gamma,\lambda} D(x , y) \leqslant E(x , y) \ll \frac{x}{u} \log(2u) ,$$

<u>où l'on a posé</u> $u = (\log x)/\log y$ <u>et</u>

$$L(u , y) = \begin{cases} (\log u)^{-\lambda} , & (2 \leqslant y \leqslant \exp\{(\log\log x)^{\gamma}\}) , \\ 1 , & (y > \exp\{(\log\log x)^{\gamma}\}) . \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de Riemann, on peut choisir

$$L(u , y) = \begin{cases} (\log\log 3u)^{-\xi} , & (2 \leqslant y \leqslant (\log x)^{2+\varepsilon}) , \\ 1 , & (y > (\log x)^{2+\varepsilon}) , \end{cases}$$

avec $\xi = 1 - \frac{\log \psi}{\psi} = 2,52001\ldots$.

L'encadrement (1.5) est susceptible d'applications assez surprenantes. Nous en développerons trois.

La première concerne les entiers dont les diviseurs sont peu espacés. Si l'on désigne par

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\tau = n$$

la suite croissante des diviseurs de n , nous verrons ultérieurement que l'on a

$$(1.6) \qquad \frac{F(n)}{n} = \max_{1 \leqslant i < \tau(n)} (d_{i+1}/d_i) , \quad (n > 1) .$$

$D(x\,,\,y)$ est donc exactement la fonction de répartition du membre de droite de (1.6). Cela jette un éclairage différent sur l'encadrement (1.5). Par exemple, le nombre $Z(x)$ des entiers $n \leqslant x$ ayant au moins un diviseur dans chaque intervalle $(2^k\,,\,2^{k+1}]$, $0 \leqslant k < (\log n)/\log 2$, satisfait à $D(x\,,\,2) \leqslant Z(x) \leqslant D(x\,,\,4)$; il est donc, à une puissance de $\log\log x$ près, de l'ordre de $x/\log x$. Nous avons étudié dans [18] le nombre $H_k(x)$ des entiers $\leqslant x$ possédant au moins un diviseur dans $(2^k\,,\,2^{k+1}]$. On a

$$(1.7) \qquad x k^{-\delta} L_1(k) < H_k(x) < x k^{-\delta} L_2(k)$$

pour $x > 1$, $1 \leqslant k \leqslant (\log x)/\log 4$, où l'exposant δ vaut

$$(1.8) \qquad \delta = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}08607\ldots ,$$

et L_1, L_2, sont des fonctions à croissance lente, précisées dans [18], qui tendent vers 0 à l'infini. L'estimation (1.5) met donc en évidence le caractère <u>fortement dépendant</u> des conditions de divisibilité impliquées : sur des bases d'indépendance ou de faible dépendance probabiliste, on aurait dû <u>a priori</u> conjecturer que $Z(x)$ était considérablement plus petit que sa valeur réelle. Le cas où y est une puissance fixe de x est lié au problème de la fonction de répartition, au sens de la Théorie des fonctions arithmétiques, de

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max_{1\leqslant i<\tau(n)} \log(d_{i+1}/d_i) .$$

L'existence de la densité $f(z)$ de la suite des entiers n tels que $\psi(n) < z$, $0 < z \leqslant 1$, a été établie dans [17]. Le théorème 1 implique que

$$c_1\, z \leqslant f(z) \leqslant c_2\, z \log(2/z) , \quad (0 \leqslant z \leqslant 1) ,$$

ce qui améliore l'encadrement prouvé dans [17].

La seconde application concerne les <u>nombres pratiques</u>. On dit qu'un entier n est pratique si tout entier $m \leqslant n$ s'écrit comme somme de diviseurs distincts de n. On montre alors [16] que cette représentabilité s'étend à tous les

$$m \leqslant \sigma(n) := \textstyle\sum_{d|n} d .$$

On peut établir facilement par récurrence que la propriété suivante caractérise les nombres pratiques [16]

$$(1.9) \qquad p_j \leqslant \sigma(n_j) + 1 , \quad (1 \leqslant j \leqslant k) .$$

Les estimations actuellement disponibles pour le nombre $P(x)$ de nombres pratiques $\leqslant x$ sont peu satisfaisantes.

Le meilleur encadrement connu est

$$x \exp\{-\alpha(\log\log x)^2\} < P(x) < x(\log x)^{-\beta} ,$$

où α est une constante > 0, [12], et $\beta < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2} - 1\right)^2 = 0{,}09798\ldots$, [9].

Le résultat suivant découle simplement du théorème 1.

THÉORÈME 2. - <u>Le nombre</u> λ <u>étant choisi comme indiqué dans l'énoncé du théorème</u> 1, <u>on a</u>, <u>pour</u> $x \geqslant 16$,

$$\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{-\lambda} \ll_{\lambda} P(x) \ll \frac{x}{\log x} \log\log x \log\log\log x .$$

<u>Démonstration</u>. - Le critère (1.9) fournit immédiatement le lien avec le théorème 1 : on a

$$D(\frac{x}{2} , 2) \leqslant P(x) \leqslant D(x , C \log\log x) \tag{1.10}$$

pour une constante positive convenable C .

L'estimation du théorème 2 découle trivialement de (1.5) et (1.10). Pour montrer (1.10), on observe d'abord que, puisque $\sigma(2n) \geqslant 2n$, une condition suffisante pour que $2n$ soit pratique est (avec la notation (1.2))

$$p_j \leqslant 2n_j , \quad (1 \leqslant j \leqslant k) . \tag{1.11}$$

En effet, si $2^s \| n' = 2n$, alors (1.9) est trivialement satisfaite pour n' si $1 \leqslant j \leqslant s$, car $p_j = 2$, et découle de (1.11) si $j > s$ car $n'_j = 2n_j$. Comme nous l'avons précédemment remarqué, (1.11) équivaut à $F(n) \leqslant 2n$, d'où la minoration de (1.10). La majoration provient de l'inégalité classique [8]

$$\sigma(n) \leqslant C_1 n \log\log n$$

qui implique que tout entier $n \leqslant x$ satisfaisant (1.9) satisfait aussi

$$F(n) \leqslant n(\max_{1\leqslant j\leqslant \tau(n)} (\sigma(n_j)/n_j) + 1) \leqslant n(C_1 \log\log x + 1) \leqslant C n \log\log x .$$

Notre troisième application du théorème 1 porte sur le "petit crible" d'Erdös et Ruzsa ([4], [14]).

Si A est une suite d'entiers, finie ou non, on désigne par $F(x , A)$ le nombre des entiers $\leqslant x$ qui ne sont divisibles par aucun élément de A . Dans [4], ERDÖS et RUZSA introduisent la quantité

$$H(x , K) := \min_A F(x , A) , \quad (K > 0) ,$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des suites A telles que $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} \leqslant K$.

Dans [14], RUZSA montre que, pour tout $K \geqslant 1$ fixé, on a

$$\frac{\log H(x , K)}{\log x} = e^{1-K} + o(1) , \quad (x \to \infty) .$$

Le cas $K = 1$ est particulièrement intéressant. Il constitue en quelque sorte la frontière à partir de laquelle la minoration naïve

$$F(x , A) \geqslant \sum_{n\leqslant x} (1 - \sum_{\substack{a|n \\ a\in A}} 1) = [x] - \sum_{a\in A} [\frac{x}{a}]$$

est inopérante. RUZSA montre que

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x\,,\,1) \ll \frac{x}{(\log x)^{\delta}}\,(\log\log x)^{\rho}$$

où δ est défini par (1.8) et $\rho = -\dfrac{\log\log 2}{\log 2} = 0{,}52876\ldots$. Nous établirons aussi le résultat suivant comme une conséquence relativement simple du théorème 1.

THÉORÈME 3. - <u>On a, pour</u> $x \geqslant 3$,

$$\frac{x}{\log x} \ll H(x\,,\,1) \ll \frac{x}{\log x}\,(\log\log x)^{2}\,.$$

Essentiellement fondée sur l'exploitation inductive des propriétés multiplicatives de la fonction F de Schinzel-Szekeres, la méthode utilisée pour prouver le théorème 1 procède cependant de deux techniques assez différentes. La minoration est obtenue en considérant les quantités

$$D_{t,z}(x\,,\,y)\ ,\quad E_{t,z}(x\,,\,y)\ ,$$

analogues de $D(x\,,\,y)$, $E(x\,,\,y)$, obtenues en imposant aux entiers dénombrés la condition supplémentaire d'avoir tous leurs facteurs premiers dans l'intervalle $(t\,,\,z]$. On peut alors mettre en évidence l'existence d'équations fonctionnelles, dont l'itération conduit à l'évaluation souhaitée. Comme c'est souvent le cas lors de la mise en oeuvre d'une telle méthode, l'étape d'initialisation est cruciale. En l'occurrence, elle nécessite un résultat auxiliaire qui possède peut-être un intérêt propre. Cela concerne la quantité

$$\theta(x\,,\,y\,,\,z) = \mathrm{card}\{n \leqslant x\ ;\quad p|n \Longrightarrow y < p \leqslant z\} \tag{1.12}$$

estimée par FRIEDLANDER dans [5] lorsque y et z sont des puissances fixes de x .

THÉORÈME 4. - <u>Pour tout</u> δ , $0 < \delta < 1$, <u>il existe des constantes</u> $A = A(\delta)$ <u>et</u> $y_0 = y_0(\delta)$ <u>telles que l'on ait</u>

$$\theta(x\,,\,y\,,\,z) - \theta(\tfrac{x}{2}\,,\,y\,,\,z) \geqslant \frac{x}{\log y}\,(Aw)^{-3w}\ , \tag{1.13}$$

<u>où l'on a posé</u> $w := (\log x)/\log z$, <u>pour tout triplet</u> $(x\,,\,y\,,\,z)$ <u>tel que</u>

$$y_0 < y \leqslant z^{(1-\delta)/2}\ ,\quad z \leqslant x\ .$$

<u>Remarques</u>. - La condition $y > y_0$ ne peut être supprimée, comme le montre l'exemple $y = 2$, $z = 9/2$. Seules les puissances de 3 sont alors comptées dans $\theta(x\,,\,y\,,\,z)$ et le membre de gauche de (1.13) est nul pour une infinité de valeurs entières de x . On ne peut pas non plus affaiblir la condition $\delta > 0$: pour $y = \sqrt{(x/2)}$, $z = x/2$, on a

$$\theta(x\,,\,y\,,\,z) - \theta(\tfrac{x}{2}\,,\,y\,,\,z) = \sum_{\substack{\sqrt{x/2}<p\leqslant q\leqslant\sqrt{2x}\\ pq\leqslant x}} 1 \leqslant \pi(\sqrt{2x})^{2} \ll \frac{x}{(\log x)^{2}}\,.$$

Enfin, il découle facilement des résultats de FRIEDLANDER que la minoration (1.13) est essentiellement optimale : on ne peut y remplacer $(Aw)^{-3w}$ par w^{-w}.

La majoration du théorème 1 est prouvée par une technique peut-être nouvelle. On établit l'existence d'une sorte de "facteur intégrant" pour la somme

$$D(x\ ,\ y) = \sum_{\substack{n \leq x \\ F(n) \leq yn}} 1\ .$$

Un argument taubérien élémentaire permet ensuite d'estimer $D(x\ ,\ y)$ à partir de la somme pondérée associée, le passage à $E(x\ ,\ y)$ résultant d'un découpage facile.

L'auteur tient à exprimer ici ses remerciements à Carl POMERANCE pour de fructueuses conversations lors de la préparation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOVEY (J. D.). - On the size of prime factors of integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 33, 1977, p. 65-80.

[2] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.

[3] ERDÖS (P.). - On some properties of prime factors of integers, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 617-623.

[4] ERDÖS (P.) and RUZSA (I. Z.). - On the small sieve, I : Sifting by primes, J. of Number Theory, t. 12, 1980, p. 385-394.

[5] FRIEDLANDER (J. B.). - Integers free from large and small primes, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 33, 1976, p. 565-576.

[6] HALASZ (G.). - Remarks to my paper : "On the distribution of additive and the mean value of multiplicative arithmetic functions", Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 23, 1972, p. 425-432.

[7] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[8] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 5e édition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1979.

[9] HAUSMAN (M.) and SHAPIRO (H. N.). - On pratical numbers, Commun. pure and appl. Math., t. 37, 1984, p. 705-713.

[10] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers. Large sieves and zero-density theorems. - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).

[11] IWANIEC (H.) - Rosser's sieve - Bilinear forms of the remainder terms - Some applications, "Recent progress in analytic number theory", vol. 1, p. 203-230. - London, New York, Toronto [etc.], Academic Press, 1981.

[12] MARGENSTERN (M.). - Résultats et conjectures sur les nombres pratiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 299, 1984, série I, p. 895-898.

[13] NORTON (K. K.). - On the number of restricted prime factors of an integer, I, Illinois J. of Math., t. 20, 1976, p. 681-705.

[14] RUZSA (I. Z.). - On the small sieve, II : Sifting by composite numbers, J. of Number Theory, t. 14, 1982, p. 260-268.

[15] SCHINZEL (A.) et SZEKERES (G.). - Sur un problème de M. Paul Erdös, Acta Scient. Math., Szeged, t. 20, 1959, p. 221-229.

[16] STEWART (B. M.). - Sums of distinct divisors, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 779-785.

[17] TENENBAUM (G.). - Lois de répartition des diviseurs, 5 , J. of London math. Soc., Series 2, t. 20, 1979, p. 165-176.

[18] TENENBAUM (G.). - Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, Comp. Math., Groningen, t. 51, 1984, p. 243-263.

Le détail des démonstrations des résultats présentés ici est à paraître dans un article portant le même titre, aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.