GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

MARIE-JOSÉ BERTIN

Nouvelles applications d'un théorème de Pisot

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 22, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A5_0>

NOUVELLES APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE PISOT

par Marie-José BERTIN (*)

Introduction. - En 1938 paraissait aux Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, la thèse de Charles Pisot, intitulée "La répartition modulo un et les nombres algébriques". L'auteur y étudiait, de manière originale, un système de suites dépendant de plusieurs paramètres, à l'aide de méthodes de calcul différentiel utilisant abondamment le théorème des accroissements finis.

L'idée générale se résume ainsi. Considérons par exemple, le système de deux suites

$$\begin{cases} u_n = \lambda\,\alpha^n \\ u_{n+1} = \lambda\,\alpha^{n+1} \end{cases}$$

dépendant des deux paramètres λ et α. Associons à ce système, la suite (f_n) de difféomorphismes d'un ouvert W_2 de $\underset{\sim}{R}^2$ sur un ouvert $V_{2,n}$ de $\underset{\sim}{R}^2$

$$\begin{aligned} f_n : \quad & W_2 \longrightarrow V_{2,n} \\ & (\lambda , \alpha) \longmapsto (\lambda\,\alpha^n , \lambda\,\alpha^{n+1}) , \end{aligned}$$

puis la suite (φ_n) des difféomorphismes réciproques

$$\begin{aligned} \varphi_n : \quad & V_{2,n} \longrightarrow W_2 \\ & (u_n , u_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{u_n^{n+1}}{u^n} , \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Partant alors d'un vecteur $\vec{b}_0$ de $V_{2,0}$, à coordonnées entières, nous pouvons définir une suite de vecteurs $\vec{b}_n$ de $V_{2,n}$, à coordonnées entières, telle que la suite $\varphi_n(\vec{b}_n)$ converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers un vecteur $\vec{\beta}$ de W_2. La convergence de cette dernière suite est alors assurée par le bon choix de l'ouvert W_2 (qui correspond au bon choix du vecteur $\vec{b}_0$) et du vecteur $\vec{b}_h$ (qui correspond à la définition d'une suite appelée aujourd'hui E-suite de Pisot).

Après avoir rappelé le théorème de Pisot, énoncé et démontré ici sous une forme différente de celle présentée dans la thèse, j'appliquerai ses résultats, d'une part à l'étude des F-suites de Boyd, améliorant parfois les résultats de Boyd obtenus par une autre méthode, d'autre part à l'étude de suites généralisant les E-suites de Pisot, appelées ici E(2)-suites.

THÉORÈME 1. - Soit A_p un ouvert de $\underset{\sim}{R}^p$, et $(f_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de difféomorphismes de A_p sur un ouvert $W_{p,n}$ de $\underset{\sim}{R}^p$, vérifiant

(*) Marie-José BERTIN, 16 avenue du Général Malleret-Joinville, 94140 ALFORTVILLE.

$$f_{n,j} = f_{n-1,j+1} , \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1 , \quad n \geqslant 1 .$$

Désignons par W_p un pavé ouvert de $\underset{\sim}{R}^p$ de composantes $(W_p)_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, tel que $\overline{W}_p$ soit contenu dans A_p .

Notons $V_{p,n}$ l'ouvert $f_n(W_p)$. Supposons enfin que les difféomorphismes φ_n , réciproques des difféomorphismes f_n , vérifient les inégalités

$$|D_p \varphi_{n,j}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \psi_{n,j} , \quad \vec{\alpha} \in W_p ,$$

les séries $\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m,j}$ étant convergentes pour $j \in J$, J étant un ensemble d'indices non vide, $J \subset [1 , p]$.

(Nous noterons $\Psi_{k-1,j}$ la somme $\sum_{m=k}^{\infty} \psi_{m,j}$.)

A partir du vecteur $\vec{b}_0 = (a_0 , a_1 , \ldots , a_{p-1})$, à coordonnées entières, élément de $V_{p,0}$, tel que le pavé B_0 vérifie l'inclusion

$$B_0 = B(\varphi_0(\vec{b}_0) , \tfrac{1}{2} \Psi_0) \subset W_p$$

définissons le vecteur $\vec{b}_n = (a_n , \ldots , a_{n+p-1})$, à coordonnées entières, élément de $V_{p,n}$, par l'inégalité

$$\|\vec{b}_n - f_n(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}))\| \leqslant \frac{1}{2} .$$

Alors les suites de nombres réels $\varphi_{n,j}(\vec{b}_n)$ convergent vers un nombre réel β_j élément de $(W_p)_j$, lorsque n tend vers $+\infty$, l'indice j appartenant à l'ensemble J . Nous avons en outre les inégalités

$$|\beta_j - \varphi_{0,j}(\vec{b}_0)| \leqslant \frac{1}{2} \Psi_{0,j} , \quad j \in J .$$

Posons $\vec{\tilde{b}}_n = f_n(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}))$.

Nous avons donc

(1) $$\varphi_n(\vec{\tilde{b}}_n) = \varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}) \in W_p , \text{ soit } \vec{\tilde{b}}_n \in V_{p,n} .$$

Puisque les f_n vérifient les relations

$$f_{n,j} = f_{n-1,j+1} , \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1 ,$$

de même les φ_n vérifient

$$\varphi_{n,j} = \varphi_{n-1,j+1} , \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1 .$$

D'où

$$f_{n,j}(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1})) = \tilde{b}_{n,j} = f_{n-1,j+1}(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}))$$

$$= b_{n-1,j+1} , \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1 .$$

Le vecteur $\vec{b}_{n-1}$ étant à coordonnées entières, nous en déduisons que le vecteur $\vec{\tilde{b}}_n$ a ses $p-1$ premières composantes à coordonnées entières.

Par suite, seule la p-ième composante de $\vec{b}_n$ diffère de la p-ième composante de $\vec{\bar{b}}_n$.

Le théorème des accroissements finis nous permet alors d'écrire l'inégalité

$$(2)\quad |\varphi_{n,j}(\vec{b}_n) - \varphi_{n,j}(\vec{\bar{b}}_n)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{z\in[\vec{b}_n,\vec{\bar{b}}_n]} |D_p(\varphi_{n,j}(z))| \leqslant \frac{1}{2}\,\psi_{n,j}\ .$$

Nous en déduisons aussitôt les inclusions

$$B_n = B(\varphi_n(\vec{b}_n)\ ,\ \tfrac{1}{2}\,\Psi_n) \subset B(\varphi_n(\vec{\bar{b}}_n)\ ,\ \tfrac{1}{2}\,\Psi_{n-1}) = B(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1})\ ,\ \tfrac{1}{2}\,\Psi_{n-1}) = B_{n-1}\ .$$

D'où

$$B_n \subset B_{n-1} \subset B_{n-2} \ldots \subset B_0 \subset W_p\ .$$

Pour j dans J, nous avons défini une suite $\varphi_{n,j}(\vec{b}_n)$ appartenant au fermé $(\overline{W}_p)_j$ de $\underset{\sim}{R}$. Par suite, si nous montrons que les $\varphi_{n,j}(\vec{b}_n)$ forment une suite de Cauchy de $\underset{\sim}{R}$, nous aurons prouvé la convergence des $\varphi_{n,j}(\vec{b}_n)$ vers β_j. Or, nous avons par définition,

$$(2')\qquad |\varphi_{n+1,j}(\vec{b}_{n+1}) - \varphi_{n,j}(\vec{b}_n)| = |\varphi_{n+1,j}(\vec{b}_{n+1}) - \varphi_{n+1,j}(\vec{\bar{b}}_{n+1})|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\,\psi_{n+1,j}\ ,\ \text{d'après (2)},$$

et, par hypothèse, la série de terme général $(\psi_{n,j})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ converge.

Nous en déduisons, en outre, après sommation,

$$|\varphi_{n+1,j}(\vec{b}_{n+1}) - \varphi_{0,j}(\vec{b}_0)| \leqslant \frac{1}{2}\,\psi_{0,j}\ ,$$

et puisque la suite $\varphi_{n+1,j}(\vec{b}_{n+1})$ converge vers β_j, pour n tendant vers $+\infty$,

$$|\beta_j - \varphi_{0,j}(\vec{b}_0)| \leqslant \frac{1}{2}\,\psi_{0,j}\ .$$

THÉORÈME 2. – <u>Faisons les mêmes hypothèses que dans le théorème 1, et supposons en outre</u> $J = [1\ ,\ p]$. <u>Nous savons alors qu'il existe un vecteur</u> $\vec{\beta}$ de W_p, <u>limite des</u> $\varphi_n(\vec{b}_n)$, <u>pour</u> n <u>tendant vers</u> $+\infty$.

<u>Posons</u> $\vec{\epsilon}_n = f_n(\vec{\beta}) - \vec{b}_n$, $F_{n,n+k} = f_n \circ \varphi_{n+k}$, $k \geqslant 1$, <u>et désignons par</u> $(F_{n,n+k})_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, <u>la j-ième composante de l'application</u> $F_{n,n+k}$.

<u>S'il existe un entier</u> j <u>tel que les</u>

$$D_p((F_{n,n+k})_j\ (a_{n+k}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n+k+p-1}\ ,\ a_{n+k+p} + u))$$

<u>soient majorés pour</u> $|u| \leqslant \frac{1}{2}$ <u>par le terme général</u> s_k <u>d'une série numérique convergente, alors la suite des</u> $\vec{\epsilon}_n$ <u>est bornée.</u>

Nous pouvons écrire

$$\vec{\epsilon}_n = f_n(\vec{\beta}) - f_n(\vec{\beta}_n)\ ,\ \text{en posant}\ \vec{\beta}_n = \varphi_n(\vec{b}_n)\ .$$

De même, par définition même de $\vec{b}_n$, nous avons

$$\vec{b}_n = f_n(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1})) + \vec{\omega}_n \quad \text{avec} \quad \|\vec{\omega}_n\| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$= f_n(\vec{\beta}_{n-1}) + \vec{\omega}_n ,$$

soit

(3) $$\vec{\beta}_{n-1} = \varphi_n(\vec{b}_n - \vec{\omega}_n) .$$

Ecrivons alors $\vec{\epsilon}_n$ sous la forme

$$\vec{\epsilon}_n = f_n(\vec{\beta}_{n+1}) - f_n(\vec{\beta}_n) + f_n(\vec{\beta}_{n+2}) - f_n(\vec{\beta}_{n+1}) + \dots + f_n(\vec{\beta}_{n+j}) - f_n(\vec{\beta}_{n+j-1})$$
$$+ f_n(\vec{\beta}) - f_n(\vec{\beta}_{n+j}).$$

Comme les β_n tendent vers β, pour n tendant vers $+\infty$, nous en déduisons l'égalité

$$\vec{\epsilon}_n = \sum_{k\geqslant 1}[f_n(\vec{\beta}_{n+k}) - f_n(\vec{\beta}_{n+k-1})] .$$

D'où, d'après (3),

$$\vec{\epsilon}_n = \sum_{k\geqslant 1}[f_n(\varphi_{n+k}(\vec{b}_{n+k})) - f_n(\varphi_{n+k}(\vec{b}_{n+k} - \vec{\omega}_{n+k}))]$$

$$= \sum_{k\geqslant 1}[F_{n,n+k}(\vec{b}_{n+k}) - F_{n,n+k}(\vec{b}_{n+k} - \vec{\omega}_{n+k})] .$$

Or, par définition de la suite $\vec{b}_n$, seule la composante p-ième de $\vec{\omega}_{n+k}$ est non nulle. Par suite, en appliquant le théorème des accroissements finis et l'hypothèse de majoration, il vient

$$|\epsilon_{n,j}| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k\geqslant 1} s_k .$$

Par suite, la suite $\vec{\epsilon}_n$ est bornée.

A. - Application des théorèmes précédents à la convergence d'une E-suite de Pisot, $E(a_0 , a_1)$ [2]

DÉFINITION 3. - Une E-suite de Pisot $E(a_0 , a_1)$ est une suite d'entiers positifs obtenue à partir des deux entiers positifs a_0 et a_1, par la relation

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - (a_n^2/a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2} , \quad n \geqslant 1 .$$

Considérons les difféomorphismes f_n de l'ouvert W_2 de $\mathbb{R}^2$ sur l'ouvert $V_{2,n}$ de $\mathbb{R}^2$, où W_2 vérifie l'inclusion

$$W_2 \subset \{(\lambda , \alpha)\ \lambda > \nu > 0 , \ \alpha > 1 + \tau , \ \tau > 0\} .$$

Les applications f_n sont bien des difféomorphismes puisque la matrice jacobienne a pour déterminant $\lambda\alpha^{2n}$.

De plus, les difféomorphismes réciproques sont les difféomorphismes φ_n

$$\varphi_n : V_{2,n} \longrightarrow W_2$$
$$(u_n , u_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{u_n^{n+1}}{u_{n+1}^n} , \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) .$$

Un calcul nous conduit alors aux formules :

$$D_2(\varphi_{n,1}(u_n , u_{n+1}) = - n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^{n+1} , \quad D_2 \varphi_{n,2}(u_n , u_{n+1}) = \frac{1}{u_n} .$$

D'où :

$$D_2 \varphi_{n,1}(f_n(\vec{\alpha})) = - \frac{n}{\alpha^{n+1}} , \quad D_2 \varphi_{n,2}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{1}{\lambda \alpha^n} .$$

Nous obtenons alors les majorations :

$$D_2 \varphi_{n,1}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \frac{n}{(1 + \tau)^{n+1}} , \quad |D_2 \varphi_{n,2}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \frac{1}{\nu(1 + \tau)^n} ,$$

et, de même

$$\Psi_0 = (\Psi_{0,1} , \Psi_{0,2}) = \left(\sum_{n\geq1} \frac{n}{(1 + \tau)^{n+1}} , \sum_{n\geq1} \frac{1}{\nu(1 + \tau)^n}\right) = \left(\frac{1}{\tau^2} , \frac{1}{\nu\tau}\right) .$$

La condition $B_0 \subset W_2$ donne alors les inégalités :

$$a_0 - \frac{1}{2\tau^2} \geqslant \nu , \quad \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2\nu\tau} \geqslant 1 + \tau .$$

La suite $\vec{b}_n$ est définie par les inégalités :

$$\|\vec{b}_n - f_n(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}))\| = \|(a_n , a_{n+1}) - (a_n , \frac{a_n^2}{a_{n-1}})\| \leqslant \frac{1}{2} .$$

C'est la définition même d'une **E-suite de Pisot.**

Nous obtenons alors le théorème 4 dû à Pisot [2].

THÉORÈME 4 (PISOT). - Soient a_0 et a_1 deux entiers positifs vérifiant l'inégalité $a_1 \geqslant a_0 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a_0}$, et $E(a_0 , a_1)$ la E-suite de Pisot associée, c'est-à-dire définie par les inégalités :

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - (a_n^2/a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2} , \quad n \geqslant 1 .$$

Sous ces hypothèses, le rapport a_{n+1}/a_n possède une limite α , pour n tendant vers $+\infty$, et nous avons l'inégalité

(4) $$\left|\frac{a_1}{a_0} - \alpha\right| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2a_0}} .$$

De même, le rapport a_n^{n+1}/a_{n+1}^n possède une limite λ , pour n augmentant indéfiniment, et nous avons l'inégalité

(5) $$|a_0 - \lambda| < \min(9/8((a_1/a_0) - 1)^2 , a_0/3)$$

Le nombre α est toujours supérieur à 1, et les nombres α obtenus à partir des entiers a_0 et a_1 sont partout denses. De plus, en posant $\lambda\alpha^n = a_n + \epsilon_n$, nous avons, pour n assez grand :

$$|\epsilon_n| \leqslant c' \quad \text{avec} \quad c' > \frac{1}{2(\alpha - 1)^2} .$$

La démonstration de ce théorème utilise donc les théorèmes 1 et 2.

La détermination de W_2 résulte de la condition $\tau^2 \nu > 1$ soit $a_0((a_1/a_0) - 1)^2 > \frac{27}{8}$ ou encore

$$a_1 \geqslant a_0 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2} a_0} .$$

Cette dernière condition entraîne $a_0 < (3/2)\nu$ et $(a_1/a_0) - 1 < \frac{3}{3}\tau$.

Grâce aux inégalités :

$$|a_0 - \lambda| < \frac{1}{2\tau^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_1}{a_0} - \alpha\right| < \frac{1}{2\nu\tau} ,$$

le théorème 1 entraîne (4) et (5).

La détermination de $F_{n,n+k}$ donne :

$$F_{n,n+k}(a_{n+k} , a_{n+k+1}) = \left(\frac{a_{n+k}^{k+1}}{a_{n+k+1}^{k}} , \frac{a_{n+k}^{k}}{a_{n+k+1}^{k-1}}\right)$$

et

$$D_2 F_{n,n+k}(a_{n+k} , a_{n+k+1}) = \left(- k\left(\frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}}\right)^{k+1} , -(k-1)\left(\frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}}\right)^{k}\right) .$$

La convergence vers α, pour n tendant vers $+\infty$, de la suite a_{n+k+1}/a_{n+k}, entraîne alors la majoration :

$$|D_2(F_{n,n+k})_1 (a_{n+k} , a_{n+k+1} + u)| \leqslant \frac{k}{(\alpha - \epsilon)^{k+1}} , \quad |u| \leqslant \frac{1}{2} .$$

Le théorème 2 entraîne aussitôt la majoration de ϵ_n.

B. - Application des théorèmes 1 et 2 à la convergence d'une F-suite de Boyd.

Nous allons montrer comment les théorèmes 1 et 2 permettent l'étude de telles suites, et fournissent une condition suffisante de convergence du même type mais plus forte que celle de BOYD, avec des renseignements sur l'ensemble des points limites plus précis que ceux obtenus, par BOYD [1], avec une méthode différente.

DÉFINITION 5. - Une suite d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée F-suite de Boyd, et notée $F(a_0 , a_1 , a_2)$, si elle est définie à partir des entiers a_0, a_1 et a_2 par les inégalités :

$$- \frac{1}{2} < a_{n+2} + a_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}(a_n + a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2} , \quad n \geqslant 1 .$$

(L'entier a_{n+2} est déterminé de façon unique sauf pour a_n nul. Dans ce cas, pour $n \geqslant 2$, il suffit de prendre $a_{n+2} = - a_{n-2}$.)

Considérons les difféomorphismes f_n de l'ouvert W_3 de $\underset{\sim}{R}^3$ sur l'ouvert $V_{3,n}$ de $\underset{\sim}{R}^3$ associés et définis par une F-suite de Boyd,

$$f_n : \quad W_3 \longrightarrow V_{3,n}$$

$$(\lambda , \mu , \theta) \longmapsto (\lambda\theta^n + \mu\theta^{-n} , \lambda\theta^{n+1} + \mu\theta^{-(n+1)} , \lambda\theta^{n+2} + \mu\theta^{-(n+2)})$$

$$W_3 \subset \{(\lambda , \mu , \theta) \in \underset{\approx}{R}^3 , \quad \theta > 1 + \tau , \quad \tau > 0\} .$$

Si la F-suite de Boyd vérifie $a_n > 0$ pour $n > 0$, les applications f_n sont bien des difféomorphismes, car la matrice jacobienne a pour déterminant $- \theta^{-3}(\theta^2 - 1)(\lambda\theta^{n+1} + \mu\theta^{-(n+1)})$. Les difféomorphismes réciproques φ_n des f_n sont alors définis par

$$\varphi_n : \quad V_{3,n} \longrightarrow W_3$$

$$(u_n , u_{n+1} , u_{n+2}) \longmapsto \left(\frac{(u_n - \theta u_{n+1})\,\theta^{-n}}{1 - \theta^2} , \frac{(u_{n+1} - \theta u_n)\,\theta^{n+1}}{1 - \theta^2} , \theta\right)$$

avec

$$\theta = \frac{u_{n+2} + u_n + \sqrt{(u_{n+2} + u_n)^2 - 4u_{n+1}^2}}{2u_{n+1}} .$$

Le nombre θ vérifie l'équation $\theta^2 u_{n+1} - (u_n + u_{n+2})\,\theta + u_{n+1} = 0$,

et nous obtenons

$$D_3\, \varphi_{n,1}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{-n\lambda}{\sqrt{\Delta_n}} - \frac{2\theta^2\lambda}{\sqrt{\Delta_n}(\theta^2 - 1)} + \frac{\theta^{-n+2}}{(\theta^2 - 1)^2}$$

(5') $D_3\, \varphi_{n,3}(f_n(\vec{\alpha})) = \dfrac{\theta}{\sqrt{\Delta_n}}$ avec $\sqrt{\Delta_n} = \sqrt{(u_n + u_{n+2})^2 - 4u_{n+1}^2} = u_{n+1}\,\dfrac{\theta^2 - 1}{\theta}$.

Considérons alors une F-suite de Boyd $F(a_0 , a_1 , a_2)$ vérifiant $a_0 \neq 0$, $a_1/a_0 \geqslant 1 + \tau$. Nous aurons alors

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda\theta^2 + \mu\theta^{-2}}{\lambda\theta + \mu\theta^{-1}} = \frac{(\lambda\theta + \mu\theta^{-1})(\theta + \theta^{-1})}{\lambda\theta + \mu\theta^{-1}} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda\theta + \mu\theta^{-1}} .$$

Soit

$$\frac{a_2}{a_1} \geqslant 1 + \tau + \frac{1}{1 + \tau} - \frac{1}{1 + \tau} = 1 + \tau ,$$

et de même, nous pourrions montrer

(6) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 + \tau , \quad n \geqslant 1 .$$

Pour $a_0 = 0$, l'inégalité $a_2/a_1 \geqslant 1 + \tau$ étant automatiquement vérifiée, les inégalités (6) le seront également.

Les inégalités (6) entraînent alors les majorations

$$|D_3\, \varphi_{n,1}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \psi_{n,1} = n\frac{(1+\tau)^2}{\tau^2}\,\frac{1}{(1+\tau)^{n+1}} + \frac{3(1+\tau)^4}{\tau^4(1+\tau)^n}$$

$$|D_3\, \varphi_{n,3}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \psi_{n,3} = \frac{(\tau+1)^2}{\tau(\tau+2)\, a_1(1+\tau)^n} ,$$

et de même, nous obtenons

$$\Psi_0 = (\Psi_{0,1} , \Psi_{0,2}) = \left(\frac{(1+\tau)^2}{\tau^4} + 3\,\frac{(1+\tau)^4}{\tau^5} , \frac{(\tau+1)^2}{2a_1\, \tau^2(\tau+2)}\right) .$$

La condition $B_0 \subset W_3$ donne l'inégalité

$$\frac{a_2 + a_0 + \sqrt{(a_2+a_0)^2 - 4a_1^2}}{2a_1} - \frac{(\tau+1)^2}{2a_1\, \tau^2(\tau+2)} \geqslant 1 + \tau .$$

La suite $\vec{b}_n$ est définie par

$$\|\vec{b}_n - f_n(\varphi_{n-1}(\vec{b}_{n-1}))\|$$

$$= \|(a_n , a_{n+1} , a_{n+2}) - (a_n , a_{n+1} , - a_n + \frac{a_{n+1}}{a_n}(a_{n+1} + a_{n-1}))\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

C'est la définition même d'une F-suite de Boyd.

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant, précisant un résultat de BOYD [1].

THÉORÈME 6. - <u>Soient</u> a_0 , a_1 , a_2 <u>trois entiers positifs</u> (<u>sauf peut être</u> $a_0 = 0$) <u>vérifiant les inégalités</u>

$$\frac{a_1}{a_0} - 1 \geqslant \frac{1}{a_1^{1/3}} , \quad a_2 + a_0 - 2a_1 + \sqrt{(a_2+a_0)^2 - 4a_1^2} > 3a_1^{2/3}$$

(la première condition est supprimée si a_0 est nul et la deuxième vérifiée si $a_2 + a_0 - 2a_1 > \frac{3}{2}\, a_1^{2/3}$).

<u>Soit</u> $F(a_0 , a_1 , a_2)$ <u>la suite déduite de proche en proche</u>, <u>à partir de</u> a_0 , a_1 <u>et</u> a_2 , <u>des inégalités</u>

$$-\frac{1}{2} < a_{n+2} + a_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}(a_{n+1} + a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2} , \quad n \geqslant 1 .$$

<u>Sous ces hypothèses</u>, <u>les nombres</u>

$$\theta_n = \frac{a_n + a_{n+2} + \sqrt{(a_n + a_{n+2})^2 - 4a_{n+1}^2}}{2a_{n+1}} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{(a_n - \theta_n\, a_{n+1})\, \theta_n^{-n}}{1 - \theta_n^2}$$

<u>sont bien définis pour</u> $n \geqslant 0$, <u>et tendent respectivement vers</u> θ <u>et</u> λ , <u>lorsque</u> n <u>tend vers</u> $+\infty$.

Nous avons en outre les inégalités

$$\left|\frac{a_0 - \theta_0\, a_1}{1 - \theta_0^2} - \lambda\right| \leqslant 26 a_1^{5/3} \ , \quad |\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{a_1^{1/3}} \ ,$$

θ_0 désignant la racine supérieure à 1 de l'équation

$$X^2 - \frac{a_2 + a_0}{a_1} X + 1 = 0 \ .$$

Les nombres λ sont positifs ; les nombres θ sont supérieurs à 1 et partout denses.

Les hypothèses faites entraînent $a_n > 0$ pour $n > 0$. Par suite, les applications f_n associées sont des difféomorphismes pour $n \geqslant 0$, et les nombres θ_n, $n \geqslant 0$, sont bien définis,,car la condition $(a_n + a_{n+2})^2 - 4a_{n+1}^2 > 0$ est vérifiée pour $n \geqslant 0$.

La démonstration utilise les résultats du théorème 1. La détermination de W_3 résulte de l'étude de l'ouvert de $\underset{\sim}{R}$ défini par

$$y = \tau + \frac{(\tau + 1)^2}{2a_1\ \tau^2(\tau + 2)} \ , \quad \tau > 0 \ ,$$

et cette application est croissante pour

$$1 - \frac{(\tau + 1)(\tau^2 + 3\tau + 4)}{2a_1\ \tau^3(\tau + 2)^2} > 0 \ ,$$

soit encore pour $2a_1 \tau^3 > \tau + 1$. Nous obtenons alors

$$y > \frac{3}{2}\tau \quad \text{et} \quad \frac{(\tau + 1)^2}{2a_1\ \tau^2(\tau + 2)} < \frac{1}{a_1^{1/3}} \ .$$

De plus, la suite étant géométrique au sens de BOYD [1], c'est-à-dire $a_n > 0$ pour $n \geqslant 0$ et $\liminf(a_{n+1}/a_n) > 1$, il en résulte, d'après un lemme de Boyd,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = t > 1 \ , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{n+1}}{a_{n+1}^n} = \ell > 0 \ ,$$

et $\varepsilon_n = a_n - \ell t^n$ borné.

De la relation

$$\theta + \frac{1}{\theta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = t + \frac{1}{t} \ ,$$

nous en déduisons alors $\theta = t$ puisque $\theta t > 1$.

Nous pouvons maintenant montrer que les $\eta_n = a_n - a_{n+1}\,\theta - \lambda\theta^n(1 - \theta^2)$ sont bornés.

Nous avons tout d'abord :

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^{n+1}} - \frac{a_n - a_{n+1}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^n}\right| = \frac{a_{n+1}}{(\theta^2-1)\,\theta^n}\ \left|\theta + \frac{1}{\theta} - \frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}\right| ,$$

et, d'après les majorations (5') et (2')

$$|\theta - \theta_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\Psi_{n,3} \leqslant \frac{\theta^2}{2(\theta^2-1)}\ \frac{1+\tau}{\tau}\ \frac{1}{a_{n+1}} , \quad \left|\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\,\Psi_{n,3} .$$

D'où

$$\left|\theta + \frac{1}{\theta} - \left(\theta_n + \frac{1}{\theta_n}\right)\right| = \left|\theta + \frac{1}{\theta} - \frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant \frac{\theta^2 - (1+\tau)}{(\theta^2-1)\,\tau}\ \frac{1}{a_{n+1}} ,$$

ce qui entraîne

(7) $$\left|\frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^{n+1}} - \frac{a_n - a_{n+1}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^n}\right| \leqslant K\,\theta^{-n} .$$

Nous en déduisons alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^{n+1}} = \ell_1 .$$

De l'inégalité

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^{n+1}} - \frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta_{n+1}}{(1-\theta_{n+1}^2)\,\theta_{n+1}^{n+1}}\right| \leqslant K'\,\frac{(n+2)}{\theta^{n+1}} ,$$

et par passage à la limite, en utilisant la relation

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta_{n+1}}{(1-\theta_{n+1}^2)\,\theta_{n+1}^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \lambda_{n+1} = \lambda ,$$

il vient $\ell_1 = \lambda$.

D'où grâce à (7)

$$\left|\lambda - \frac{a_n - a_{n+1}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^n}\right| \leqslant K''\,\theta^{-n} ,$$

et finalement $a_n - a_{n+1}\,\theta - \lambda(1-\theta^2)$ borné.

Or λ est positif ou nul. Si nous avions $\lambda = 0$, nous aurions donc $a_n - a_{n+1}\theta$ borné, d'où la contradiction, car

$$|a_n - a_{n+1}\,\theta| = a_{n+1}\left|\theta - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{et} \quad \theta - 1 < \theta - \frac{a_n}{a_{n+1}} < \theta .$$

Nous venons donc de prouver que λ est positif.

La relation

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n+2}\,\theta}{(1-\theta^2)\,\theta^{n+1}} = \lambda ,$$

et les résultats de BOYD [1] entraînent alors $\ell = \lambda$.

La dernière inégalité du théorème 1 entraîne les majorations

$$\left|\frac{a_0 - \theta_0\, a_1}{1 - \theta_0^2} - \lambda\right| \leqslant 26 a_1^{5/3} \quad \text{et} \quad |\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{a_1^{1/3}} .$$

Cette dernière inégalité nous montre alors que les θ sont partout denses.

C. - Application des théorèmes 1 et 2 à la convergence d'une $E(2)$-suite.

DÉFINITION 7. - Une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée $E(2)$-suite, et notée $E(2)(a_0 , a_1 , a_2 , a_3)$, si elle est définie de proche en proche à partir des entiers a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{vmatrix}} \leqslant \frac{1}{2} , \quad n \geqslant 2 .$$

Considérons les difféomorphismes f_n de l'ouvert W_4 de $\mathbb{R}^4$ sur l'ouvert $V_{4,n}$, associés à une $E(2)$-suite (a_n) .

$$f_n : \quad W_4 \longrightarrow V_{4,n}$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\alpha_1,\alpha_2) \longmapsto (\lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n, \lambda_1\alpha_1^{n+1} + \lambda_2\alpha_1^{n+1} , \lambda_1\alpha_1^{n+2} + \lambda_2\alpha_2^{n+2}, \lambda_1\alpha^{n+3} + \lambda_2\alpha_2^{n+3})$$

Prenons

$$W_4 \subset \{(\lambda_1,\lambda_2 , \alpha_1 , \alpha_2) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ \alpha_1 > 1 + \mu_1 , \ \mu_1 > 0 , \ \alpha_2 > 1 + \mu_2 , \ \mu_2 > 0\}$$

Nous justifierons plus loin, grâce aux conditions initiales vérifiées par la $E(2)$-suite, que les f_n sont des difféomorphismes. En effet, le déterminant de la matrice jacobienne associée vaut

$$-\lambda_1\, \lambda_2(\alpha_1\, \alpha_2)^{2n}\, (\alpha_2 - \alpha_1)^4 = -\frac{1}{\lambda_1\, \lambda_2}\, A_{n+1}^2$$

avec $A_{n+1} = \lambda_1\, \lambda_2(\alpha_1\, \alpha_2)^n\, (\alpha_2 - \alpha_1)^2$.

Les difféomorphismes φ_n réciproques des f_n sont définis par :

$$\varphi_n : \quad V_{4,n} \longrightarrow W_4$$

$$(u_n , u_{n+1} , u_{n+2} , u_{n+3}) \longmapsto \left(\frac{u_n\, \alpha_2 - u_{n+1}}{\alpha_1^n(\alpha_2 - \alpha_1)} , \frac{u_n\, \alpha_1 - u_{n+1}}{\alpha_2^n(\alpha_2 - \alpha_1)} , \alpha_1 , \alpha_2\right)$$

où α_1 et α_2 sont racines de l'équation

$$X^2 - \frac{u_{n+3}\, u_n - u_{n+1}\, u_{n+2}}{u_{n+2}\, u_n - u_{n+1}^2} X + \frac{u_{n+3}\, u_{n+1} - u_{n+2}^2}{u_{n+2}\, u_n - u_{n+1}^2} = 0 .$$

Nous obtenons alors :

$$D_4\, \varphi_{n,1}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{(n+2)\,\alpha_1 - n\,\alpha_2}{\alpha_1^{n+1}(\alpha_2 - \alpha_1)^3}$$

$$D_4\, \varphi_{n,2}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{(n+2)\,\alpha_2 - n\,\alpha_1}{\alpha_2^{n+1}(\alpha_1 - \alpha_2)^3}$$

$$D_4\, \varphi_{n,3}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{1}{\lambda_1\, \alpha_1^n(\alpha_2 - \alpha_1)^2} = \frac{\lambda_2\, \alpha_2^n}{A_{n+1}}$$

$$D_4\, \varphi_{n,4}(f_n(\vec{\alpha})) = \frac{1}{\lambda_2\, \alpha_2^n(\alpha_2 - \alpha_1)^2} = \frac{\lambda_1\, \alpha_1^n}{A_{n+1}} .$$

En supposant $A_1 = a_0\, a_2 - a_1^2 > 0$, la relation

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a_1\, a_3 - a_2^2}{a_0\, a_2 - a_1^2} = \alpha_1\, \alpha_2 \geqslant (1+\mu_1)(1+\mu_2) > 0 ,$$

ainsi que les relations suivantes entraînent $A_n > 0$ pour $n \geqslant 1$. Par suite, les f_n sont des difféomorphismes pour $n \geqslant 0$, et nous avons $\lambda_1\, \lambda_2 > 0$ puisque $A_n = \lambda_1\, \lambda_2(\alpha_1\, \alpha_2)^{n-1}\, (\alpha_2 - \alpha_1)^2$.

Nous pouvons alors faire les majorations :

$$|D_4\, \varphi_{n,3}(f_n(\vec{\alpha}))| = \frac{|\lambda_2\, \alpha_2^n|}{A_n} \leqslant \frac{|a_n|}{A_{n+1}}$$

$$|D_4\, \varphi_{n,4}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \frac{|a_n|}{A_{n+1}} .$$

Or nous pouvons écrire

$$\frac{\frac{A_{n+1}}{a_n}}{\frac{A_n}{a_{n-1}}} = \alpha_1\, \alpha_2 \frac{a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1\, \alpha_2 \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\, \alpha_2\, a_{n-2}} ,$$

puisque $a_n = \lambda_1\, \alpha_1^n + \lambda_2\, \alpha_2^n = (\lambda_1\, \alpha_1^{n-1} + \lambda_2\, \alpha_2^{n-1})(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\, \alpha_2(\lambda_1\, \alpha_1^{n-2} + \lambda_2\, \alpha_2^{n-2})$.

Supposons alors $\alpha_1\, \alpha_2 \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} > 1$, nous obtiendrons :

$$\alpha_1 \alpha_2 \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\frac{A_{n+1}}{a_n}}{\frac{A_n}{a_{n-1}}} \geqslant \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \geqslant \frac{(1 + \mu_1)(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 + \mu_2} > 1 ,$$

soit $\alpha_1 \alpha_2 \frac{a_{n-1}}{a_n} > 1$.

Par suite, si l'on suppose $(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) \frac{a_0}{a_1} > 1$, nous aurons

$$\alpha_1 \alpha_2 \frac{a_{n-1}}{a_n} > 1 \quad \text{pour} \quad n > 1 .$$

De plus, si nous prenons $a_0 > 0$, nous aurons $a_n > 0$ pour $n > 1$, et $a_n/A_{n+1} \leqslant a_{n-1}/(1 + \sigma) A_n$, où σ est donné par l'égalité

$$1 + \sigma = \frac{(1 + \mu_1)(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 + \mu_2} .$$

Nous en déduisons alors les majorations

$$|D_4 \varphi_{n,3}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \psi_{n,3} = \frac{1}{(1 + \sigma)^n} \frac{a_0}{A_1}$$

$$|D_4 \varphi_{n,4}(f_n(\vec{\alpha}))| \leqslant \psi_{n,4} = \frac{1}{(1 + \sigma)^n} \frac{a_0}{A_1} .$$

D'où

$$\Psi_{0,3} = \Psi_{0,4} = \frac{a_0}{\sigma A_1} .$$

La suite $\vec{b}_n$ introduite dans le théorème 1 est alors définie par la condition

$$\|\vec{b}_n - f_n(\varphi_{n-1}(b_{n-1}))\|$$

$$= \left\|(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) - \left(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \frac{a_{n+2}(a_{n+2}a_{n-1} - a_n a_{n+1}) - a_{n+1}(a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2)}{a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2}\right)\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} .$$

C'est la condition de définition de la $E(2)$-suite. Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - <u>Soient</u> a_0 , a_1 , a_2 , a_3 <u>quatre entiers positifs vérifiant</u>

<u>ou bien</u>

$$A_1 = a_0 a_2 - a_1^2 > 0 , \quad (1 + h)^2 \frac{a_0}{a_1} > 1 , \quad \frac{A_2}{a_3 a_0 - a_1 a_2} \geqslant 1 + 2h$$

avec $h = \sqrt{\frac{a_0}{A_1}} + 1$

ou bien

$$A_1 > 0 \ , \quad (1+k)(1+2k)\,\frac{a_0}{a_1} > 1 \ , \quad p_0 - s_0(1+2k) + 1 + 3k + 3k^2 > 0$$

avec $k = \sqrt{\dfrac{a_0}{2A_1}}$, $p_0 = \dfrac{A_2}{A_1}$, $s_0 = \dfrac{a_0\,a_3 - a_1\,a_2}{A_1}$.

Soit $E(2)(a_0 , a_1 , a_2 , a_3)$ la $E(2)$-suite déduite de proche en proche des inégalités

$$-\frac{1}{2} < a_{n+3} - \frac{a_{n+2}(a_{n+2}\,a_{n-1} - a_n\,a_{n+1}) - a_{n+1}(a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2)}{a_{n-1}\,a_{n+1} - a_n^2} \leq \frac{1}{2} \ , \quad n \geqslant 1 \ .$$

Sous ces hypothèses, les suites

$$\theta_n^{\pm} = \frac{a_{n+3}\,a_n - a_{n+1}\,a_{n+2} \pm \sqrt{(a_{n+3}\,a_n - a_{n+1}\,a_{n+2})^2 - 4(a_{n+3}\,a_{n+1} - a_{n+2}^2)(a_n\,a_{n+2} - a_{n+1}^2)}}{a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2}$$

sont bien définies pour $n \geqslant 0$, et tendent vers θ^+ ou θ^- lorsque n tend vers $+\infty$. En outre, les nombres θ^+ et θ^- sont supérieurs à 1 .

En particulier, nous obtenons la convergence des suites

$$\frac{a_{n+3}\,a_n - a_{n+1}\,a_{n+2}}{a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2} \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+3}\,a_{n+1} - a_{n+2}^2}{a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2}$$

respectivement vers les nombres $\theta^+ + \theta^-$ et $\theta^+\,\theta^-$.

Nous pouvons tout d'abord prendre

$$W_4 \subset \{(\lambda_1 , \lambda_2 , \alpha_1 , \alpha_2) \ , \ \alpha_1 > 1 + \mu \ , \ \alpha_2 > 1 + \mu \ , \ \mu > 0\} \ .$$

La détermination de W_4 résulte alors de l'étude de l'ouvert défini par

$$x > \mu + \frac{a_0}{2A_1\,\sigma} = \mu + \frac{a_0(1+2\mu)}{2A_1\,\mu^2} \ .$$

Or la fonction $\mu + (a_0(1+2\mu)/(2A_1\,\mu^2)$ est une fonction croissante de μ pour $\mu > h_0$, h_0 étant la racine de l'équation $x^3\,A_1 - (x+1)\,a_0 = 0$.

C'est également une fonction croissante de μ pour $\mu > h$, avec $h = \sqrt{\dfrac{a_0}{A_1} + \dfrac{1}{2}} > h_0$.

On a alors $x > 2h$, d'où la condition $\theta_0^- > 1 + 2h$, condition entraînée par

$$\frac{p_0}{s_0} = \frac{\theta_0^-\,\theta_0^+}{\theta_0^- + \theta_0^+} > 1 + 2h \ , \quad \text{soit} \quad \frac{A_2}{a_3\,a_0 - a_1\,a_2} \geqslant 1 + 2h \ .$$

Mais nous pouvons essayer de déterminer W_4 de façon optimale en prenant

$$W_4 \subset \{(\lambda_1 , \lambda_2 , \alpha_1 , \alpha_2) \ , \ \alpha_1 > 1 + \mu_1 \ , \ \alpha_2 > 1 + \mu_2 \ , \ \mu_1 > 0 \ , \ \mu_2 > 0\}$$

La détermination de W_4 résulte alors de l'étude de l'ouvert défini par

$$x > \mu_1 + \frac{a_0}{2A_1} \frac{1 + \mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}$$

$$y > \mu_2 + \frac{a_0}{2A_1} \frac{1 + \mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} .$$

Le jacobien de l'application associée est alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\mu_2 + 1}{\mu_1^2 \mu_2} \dfrac{a_0}{2A_1} & - \dfrac{\mu_1 + 1}{\mu_2^2 \mu_1} \dfrac{a_0}{2A_1} \\ \\ - \dfrac{\mu_2 + 1}{\mu_1^2 \mu_2} & 1 - \dfrac{\mu_1 + 1}{\mu_1 \mu_2^2} \dfrac{a_0}{2A_1} \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut

$$1 - \frac{a_0}{2A_1} \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1 + \mu_2}{(\mu_1 \mu_2)^2} .$$

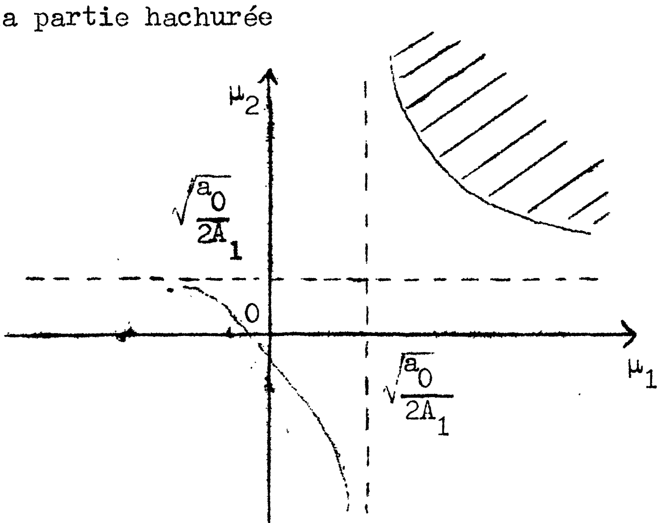
Par suite, si

$$\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1 + \mu_2}{(\mu_1 \mu_2)^2} \frac{a_0}{2A_1} < 1 ,$$

ou encore si

(8) $$\sqrt{\frac{2A_1}{a_0}} \frac{\mu_1 \mu_2}{1 + \mu_1 + \mu_2} > 1 ,$$

l'application précédente est un homéomorphisme. La condition (8) correspond dans le plan (μ_1 , μ_2) à la partie hachurée



La condition (8) peut encore s'écrire

$$\frac{a_0}{2A_1} \frac{1 + \mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} < \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{2A_1}} \ ,$$

ce qui donne les conditions initiales

(9) $$\theta_0^- > 1 + \mu_1 + \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{2A_1}} \ , \quad \theta_0^+ > 1 + \mu_2 + \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{2A_1}} \ ,$$

où l'on a supposé par exemple $\mu_1 \leqslant \mu_2$.

En posant $\theta_0^- + \theta_0^+ = s_0$, $\theta_0^- \theta_0^+ = p_0$, $k = \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{2A_1}}$, nous pouvons alors déduire de (8) et (9) la condition

(10) $$p_0 - s_0(1 + 2k) + 1 + 3k + 3k^2 > 0$$

où $p_0 = \frac{A_2}{A_1}$, $s_0 = \frac{a_3 a_0 - a_1 a_2}{A_1}$, $k = \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{2A_1}}$.

En outre, il faut ajouter la condition d'obtention des majorations $\psi_{n,3}$ et $\psi_{n,4}$, soit $(a_0/a_1)(1 + k)(1 + 2k) > 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOYD (D. W.). - Some integer sequences related to Pisot sequences, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 34, 1979, p. 295-305.

[2] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math., Paris, 1938).