MICHEL MENDÈS FRANCE

**La chaine d'Ising imaginaire ou la suite de Rudin Shapiro**

*Groupe d'étude en théorie analytique des nombres*, tome 1 (1984-1985), exp. nº 35, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A16_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 35, 7 p.



6 mai 1985

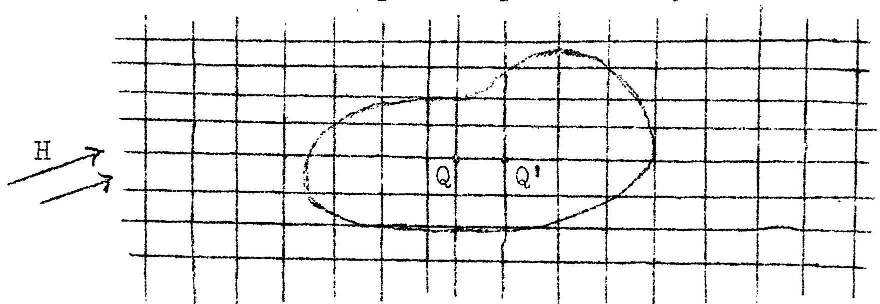
# LA CHAINE D'ISING IMAGINAIRE OU LA SUITE DE RUDIN SHAPIRO

par Michel MENDÈS FRANCE (*)

(d'après un travail fait en commun avec J. P. ALLOUCHE [1] et [2])

## 1. Le modèle d'Ising.

Le modèle d'Ising est une tentative d'explication de la substance magnétique. On suppose que l'espace est composé d'un réseau régulier $\underset{\sim}{Z}^d$ ( $d \geqslant 1$ **est la dimension** de l'espace) aux sommets (sites) duquel on place des spins à valeurs $\pm 1$ .




On suppose qu'il y a $N$ sommets intérieurs à l'objet étudié. En fin de calcul, $N$ tendra vers l'infini, ce qui revient à dire que la maille du réseau tend vers $0$ .

Chaque site interagit avec ses $2d$ voisins immédiats. Si $\mu_Q$ et $\mu'_{Q'}$ sont des spins aux sites $Q$ et $Q'$ respectivement, le champ d'interaction entre les deux sites est

$$\begin{cases} -\mu_Q \, \mu_{Q'} \, J & \text{si } Q \text{ et } Q' \text{ sont voisins } (Q \neq Q') \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La constante de couplage $J$ est supposée positive non nulle.

Si la substance étudiée est soumise à un champ externe $H$ , le champs magnétique total est donné par "l'hamiltonien"

$$\mathcal{H}(\mu) = -J \sum \mu_Q \, \mu_{Q'} - H \sum \mu_Q ,$$

où la première somme est étendue à tous les couples $Q$ , $Q'$ voisins, et où la seconde somme est étendue aux $N$ sites $Q$ . $\mu = (\mu_Q)$ représente l'une des $2^N$ configurations possibles.

L'un des postulats fondamentaux de la physique statistique est que la probabilité d'une configuration donnée $\mu^0$ est

$$P(\mu^0) = \exp(-\beta \, \mathcal{H}(\mu^0)/Z$$

---

(*) Michel MENDÈS FRANCE, Mathématiques, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

où $\beta = 1/kT$ est l'inverse de la température de l'objet étudié, où $k$ est la constante de Boltzmann, et où $Z$ est la fonction de partition

$$Z = Z(N , \beta , H) = \sum_{\mu \in \{-1,+1\}^N} \exp(- \beta \mathcal{H}(\mu)) .$$

Ainsi, pour $T = \infty$, toutes les configurations sont équiprobables

$$P(\mu^0) = 1/2^N ,$$

ce qui correspond à une "phase gazeuse" ou liquide. Pour $T = 0$, seule la configuration d'énergie minimale $\mathcal{H}(\mu)$ a pour probabilité $1$, les autres configurations ayant une probabilité nulle. On dit qu'on est en "phase cristalline".

Toute la problématique attachée au modèle d'Ising est de comprendre comment lorsque $T$ décroit de $+\infty$ à $0$, on passe brusquement d'une phase à l'autre. Bien entendu, cette transition ne peut avoir bien tant que $N$ reste fini, car les probabilités $P$ et la fonction de partition, sont des fonctions analytiques de $T$.

On montre que la quantité intéressante à étudier est en fait "l'énergie libre"

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z(N , \beta , H) .$$

Nous ne discuterons pas de ce problème ici. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage classique de Colin THOMPSON [9] qui est une excellente introduction à la physique statistique. Il y apprendra que le modèle d'Ising à 1 dimension n'a pas de transition de phase. Le modèle a été résolu à 2 dimensions par ONSAGER, en 1944, dans le cas d'un champ externe $H = 0$ ; il y a alors transition de phase. Le cas $d \geq 3$ est à ce jour sans solution.

Dans notre exposé, nous nous plaçons dans le cadre de loin le plus simple $d = 1$. La fonction de partition est alors

$$Z(N , \beta , H) = \sum_{\mu} \exp(\beta J \textstyle\sum_{q=0}^{N-2} \mu_q \mu_{q+1} + \beta H \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q) .$$


Une simplification supplémentaire consiste à considérer le modèle cyclique où on identifie le site $N$ au site $0$. La fonction de partition prend alors la forme légèrement plus symétrique

$$Z_{cycl}(N , \beta , H) = \sum_{\mu} \exp(\beta J \textstyle\sum_{q=0}^{N-1} \mu_q \mu_{q+1} + \beta H \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q) .$$

Nous nous proposons de montrer comment on calcule explicitement $Z_{cycl}$, et comment en considérant des températures imaginaires, on peut obtenir de nouveaux résultats concernant la suite de Rudin-Shapiro.

Cet exposé est un compte rendu d'un travail récent fait conjointement avec Jean-Paul ALLOUCHE ([1] et [2]).

## 2. Calcul de $Z_{cycl}$

Nous reproduisons le calcul dû à KRAMERS et WANNIER [5], exposé dans THOMPSON [9]. On a

$$Z_{cycl} = \sum_{\mu} \prod_{q=0}^{N-1} \exp[\beta J\ \mu_q\ \mu_{q+1} + 1/2\ \beta H(\mu_q + \mu_{q+1})] .$$

Soit $L$ la matrice

$$L = \begin{pmatrix} L(1\ ,\ 1) & L(1\ ,\ -1) \\ L(-1\ ,\ 1) & L(1\ ,\ 1) \end{pmatrix}$$

où

$$L(\varepsilon\ ,\ \varepsilon') = \exp(\beta J\ \varepsilon\ \varepsilon' + 1/2\ \beta(\varepsilon + \varepsilon')) .$$

Alors

$$Z_{cycl} = \sum_{\mu} L(\mu_0\ ,\ \mu_1)\ L(\mu_1\ ,\ \mu_2)\ \ldots\ L(\mu_{N-1}\ ,\ \mu_0) = \sum_{\mu_0=\pm 1} L^N(\mu_0\ ,\ \mu_0) ,$$

où $L^N(\varepsilon\ ,\ \varepsilon')$ représente l'élément $(\varepsilon\ ,\ \varepsilon')$ de la matrice $L^N$. Ainsi

$$Z_{cycl} = \mathrm{Trace}(L^N) .$$

Si donc, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les deux valeurs propres de la matrice $L$,

$$Z_{cycl} = \lambda_1^N + \lambda_2^N ,$$

d'où

$$Z_{cycl} = [e^{\beta J}\ \mathrm{ch}\ \beta H + (e^{2\beta J}\ \mathrm{sh}^2\ \beta H + e^{-2\beta J})^{1/2}]^N + [e^{\beta J}\ \mathrm{ch}\ \beta H - (e^{2\beta J}\ \mathrm{sh}^2\ \beta H + e^{-2\beta J})^{1/2}]^N .$$

## 3. La suite de Rudin-Shapiro.

Considérons la somme exponentielle

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \pm \exp 2i\pi n\theta$$

où la suite $\pm$ est arbitraire. Sa moyenne $L^2$ est

$$\left(\int_0^1 |S(N)|^2\ d\theta\right)^{1/2} = \sqrt{N}$$

d'où on conclut

$$\max_{\theta} |S(N)| \geq \sqrt{N} .$$

W. RUDIN [7] d'une part, et H. S. SHAPIRO [8] d'autre part, ont découvert indépendemment l'un de l'autre qu'il existe un choix des signes $\varepsilon(n) = \pm 1$ tel que

$$\max_{\theta} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon(n)\ \exp 2i\pi n\theta \right| \leq (2 + \sqrt{2})\ \sqrt{N} .$$

Leur démonstration est la suivante. On définit récursivement la suite des polynômes $P_n(X)$ , $Q_n(X)$

$$\begin{cases} P_0(X) = Q_0(X) = 1 \\ P_{n+1}(X) = P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = Q_n(X) - X^{2^n} Q_n(X) . \end{cases}$$

On constate que $P_n$ et $Q_n$ sont de degré $2^n$ et que les polynômes sont à coefficients $\pm 1$.

Ainsi $P_n(\exp 2i\pi\upsilon)$ est une somme exponentielle du type $S(2^n)$. Par ailleurs

$$|P_n(e^{2i\pi\upsilon})|^2 + |Q_n(e^{2i\pi\upsilon})|^2 = 2[|P_{n-1}(e^{2i\pi\upsilon})|^2 + |Q_{n-1}(e^{2i\pi\upsilon})|^2]$$

donc

$$|P_n(e^{2i\pi\upsilon})|^2 + |Q_n(e^{2i\pi\upsilon})|^2 = 2^n(P_0^2 + Q_0^2) = 2^{n+1}$$

et par suite

$$|P_n(e^{2i\pi\upsilon})| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{2^n} .$$

Si on pose donc

$$P_n(X) = \varepsilon(0) + \varepsilon(1) X + \varepsilon(2) X^2 + \dots + \varepsilon(2^n - 1) X^{2^n-1} ,$$

on a

$$|\textstyle\sum_{k=0}^{2^n-1} \varepsilon(k) \exp 2i\pi k\upsilon| \leqslant \sqrt{2}.\sqrt{2^n} .$$

Remarquant ensuite que tout entier $N$ s'écrit sous la forme

$$N = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots \quad n_0 > n_1 > \dots$$

l'inégalité se prolonge en

$$|\textstyle\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon(k) \exp 2i\pi k\upsilon| \leqslant (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N} .$$

La constante $(2 + \sqrt{2})$ ne semble pas optimale (communication orale de B. SAFFARI). Notre préoccupation ici n'est pas tant d'améliorer la constante, mais plutôt d'étendre le champ de validité de l'inégalité.

## 4. La suite de Rudin-Shapiro et la chaîne d'Ising.

J. BRILLHART et L. CARLITZ [3] ont donné une expression remarquable des coefficients $\varepsilon(n)$ de Rudin-Shapiro. Considérons le développement binaire de $n$

$$n = \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)\, 2^q , \quad e_q(n) = 0 , 1 .$$

Les chiffres $e_q(n)$ sont tous nuls pour $q > (\log n)/(\log 2)$ en sorte que la somme est finie. On constate que

$$\varepsilon(n) = \exp i\pi \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)\, e_{q+1}(n) ;$$

$\varepsilon(n)$ compte donc le nombre d'apparitions modulo 2 du mot 11 dans l'écriture binaire de $n$.

Considérons plus généralement

$$\varepsilon(n , x , y) = \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)) ,$$

où $x$ et $y$ sont des paramètres réels donnés.

Pour $x = 1/2$ , $y = 0$ , cette suite se réduit à $\varepsilon(n)$ .

THÉORÈME 1. - Soit $\gamma(x , y)$ le plus grand des deux nombres

$$|\cos(\pi x + \pi y) \pm (- \sin^2(\pi x + \pi y) + e^{-2i\pi x})^{1/2}|$$

et soit

$$\alpha(x , y) = \frac{\log \gamma(x , y)}{\log 2} .$$

Alors

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n))| \leqslant c\, N^{\alpha(x,y)} + 1$$

où $c$ est une constante absolue. L'exposant $\alpha(x , y)$ est optimale.

En particulier, si $\varepsilon(n)$ est la suite de Rudin-Shapiro

$$|\sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon(n) \exp(y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n))| \leqslant c \sqrt{N} .$$

Nous ne donnerons pas ici le détail [1] de la démonstration ; nous préférons en donner une esquisse rapide.

On considère la somme

$$T(2^N) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp 2i\pi(x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n) e_{q+1}(n) + y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)) ,$$

et on pose

$$e_q(n) = 1/2(1 - \mu_q(n))$$

en sorte que $\mu_q(n)$ est la valeur $\pm 1$ . On obtient alors

$$T(2^N) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp 2i\pi[\frac{x}{4} \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q(n) \mu_{q+1}(n) - \frac{x+y}{2} \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q(n) + N(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}) + \frac{x}{4}(\mu_0(n) - \mu_N(n)] .$$

Le terme $\exp 2i\pi N(\frac{x}{4} + \frac{y}{2})$ se factorise. Une manipulation algébrique simple permet de se débarrasser de "l'effet de bord"

$$\frac{x}{4}(\mu_0(n) - \mu_N(n)) ,$$

et on reconnait alors, à des notations près, la fonction de partition de la chaîne d'Ising cyclique à température $T = -(2J/\pi x)i$ .

La formule obtenue en fin de paragraphe 2 permet alors d'estimer $T(2^N)$ , puis $T(N)$ .

## 5. L'inégalité de Rudin-Shapiro étendue.

Au vu de l'inégalité obtenue par RUDIN et SHAPIRO d'une part et de la dernière inégalité du théorème 1 d'autre part, on peut se poser la question de savoir quel rapport existe entre les deux inégalités.

Rappelons qu'une suite 2-multiplicative $f$ est une suite telle que, pour tous entiers $n \geqslant 0$ , $a \geqslant 1$ et $b \in [0\,,\, 2^n[$ ,

$$f(a2^n + b) = f(a2^n)\, f(b)\ .$$

Appelons $\mathfrak{M}_2$ la classe des suites 2-multiplicatives unimodulaires $|f(n)| = 1$ . Les suites $\exp 2i\pi n\theta$ et $\exp 2i\pi y \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)$ sont dans cette classe.

Il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $f$ soit dans $\mathfrak{M}_2$ est qu'il existe des nombres réels $c_0$ , $c_1$ , $c_2$ , ... tels que

$$f(n) = \exp 2i\pi \sum_{q=0}^{\infty} c_q\, e_q(n)\ .$$

Dans [2], nous établissons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout $x$ réel</u>

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}_2} \Big|\sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp 2i\pi\, x \sum_{q=0}^{\infty} e_q(n)\, e_{q+1}(n)\Big| \leqslant c(x)\, N^{\delta(x)}$$

où

$$\delta(x) = \frac{\log 2(1 + |\cos \pi x|)}{2 \log 2} \quad \text{et} \quad c(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(1 + |\cos \pi x|)} - 1} \leqslant 2 + \sqrt{2}\ .$$

<u>En particulier pour</u> $x = 1/2$

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}_2} \Big|\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, \varepsilon(n)\Big| \leqslant (2 + \sqrt{2})\, \sqrt{N}\ .$$

La preuve de ce théorème est de nature assez différente aussi nous renvoyons le lecteur à notre article [2].

Il faut noter qu'aucun de nos deux résultats ne contient l'autre. Le premier est plus précis mais plus restreint. Enfin, pour terminer, signalons un corollaire immédiat du théorème 2.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $(\sigma(n))$ <u>la suite de Thue-Morse sur les symboles</u> $\pm 1$ . <u>Alors</u>

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} \sigma(n)\, \varepsilon(n)\Big| \leqslant (2 + \sqrt{2})\, \sqrt{N}\ .$$

### BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE (J. P.) et MENDÈS FRANCE (M.). - Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising, Bull. Soc. Math. France (à paraître).

[2] ALLOUCHE (J. P.) and MENDÈS FRANCE (M.). - On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence, Mathematika, London, 1985 (à paraître).

[3] BRILLHART (J.) and CARLITZ (L.). - Note on the Shapiro polynomials, Proc. Amer. math. Soc., t. 25, 1970, p. 114-118.

[4] GELFOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[5] KRAMERS (H. A.) and WANNIER (G. H.). - Statistics of the two-dimensional Ferromagnet. Part I and II, Phys. Rev., 2nd series, t. 60, 1941, p. 252-262 ; p. 263-276.

[6] MENDÈS FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.). - Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, Bull. Soc. math. France, t. 109, 1981, p. 207-215.

[7] RUDIN (W.). - Some theorems on Fourier coefficients, Proc. Amer. math. Soc., t. 10, 1959, p. 855-859.

[8] SHAPIRO (H. S.).- Extremal problems for polynomials and power series (Thesis, Massachussetts Institute of Technology, 1951).

[9] THOMPSON (C. J.). - Mathematical statistical mechanics. - Princeton, Princeton University Press, 1979.