Groupe d'étude en théorie analytique des nombres

Jean-Marc Deshouillers

Problème de Waring pour les bicarrés : le point en 1984

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. nº 33, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A14_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 33, 5 p.

22 avril 1985

PROBLÈME DE WARING POUR LES BICARRÉS : LE POINT EN 1984

par Jean-Marc DESHOUILLERS (*)

Ce texte, rédigé en octobre 1985, ne correspond pas aux exposés oraux. On trouvera en revanche dans les actes du Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (année 1984/85, exposé n° 14) la matière présentée également au Séminaire de Théorie analytique des Nombres de Paris.

Le problème original de Waring (1770) concernant les bicarrés, à savoir que tout nombre (entier positif) est somme d'au plus dix-neuf puissances quatrièmes d'entiers, vient d'être résolu par R. BALASUBRAMANIAN (Bombay), François DRESS (Bordeaux) et l'AUTEUR après plus d'un siècle de résultats partiels. Cette note présente l'état du problème avant cette ultime contribution.

1. La méthode élémentaire.

Il s'agit de variations sur l'exploitation de l'identité

$$\sum_{1\leq r<s\leq 4} ((y_r + y_s)^4 + (y_r - y_s)^4) = 6(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)^2 \tag{1}$$

ou d'une identité équivalente.

C'est ainsi que LIOUVILLE (1859) démontre le premier qu'il existe un entier C minimal (on le note $g(4)$) tel que tout entier (i. e. entier positif) soit somme d'au plus C puissances quatrièmes d'entiers : d'après le théorème de Lagrange (1770), tout entier est somme de quatre carrés et donc, par (1), tout entier de la forme $6x^2$ est B_{12} (i. e. somme d'au plus 12 bicarrés) ; en réappliquant le théorème de Lagrange, on montre alors que tout multiple de 6 est B_{48} et donc tout entier est B_{53} .

En utilisant les formes quadratiques ternaires (e. g. le théorème de Legendre établissant que tout entier est somme de trois carrés si et seulement s'il n'est pas de la forme $4^n(8m + 7)$), on est parvenu à abaisser la valeur 53 de LIOUVILLE jusqu'à 37, résultat obtenu par WIEFERICH en 1909.

En 1970, DRESS utilise les sommes de deux carrés et leur relative abondance, et parvient à montrer que 34 bicarrés suffisent. Un raffinement de sa méthode, joint à une utilisation importante du calcul sur ordinateur lui permet en 1972 de montrer

(*) Jean-Marc DESHOUILLERS, UER de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.
Ce travail est subventionné en partie par l'Université de Bordeaux-I, le CNRS (Laboratoire associé n° 226) et la NSF (bourse MCS-8108814 A03).

que 30 bicarrés suffisent. C'est pour peu de temps, le meilleur résultat connu, mais c'est très certainement la limite de la méthode élémentaire.

2. La méthode du cercle.

On trouvera dans l'article d'ELLISON (1971) une présentation de la "méthode du cercle", introduite par HARDY et LITTLEWOOD peu avant 1920. Pour en savoir plus, les ouvrages de DAVENPORT (1962) et VAUGHAN (1981) sont indispensables.

Dès 1921, HARDY et LITTLEWOOD donnent un équivalent asymptotique du nombre de représentations d'un entier en somme de 21 bicarrés, et en 1925 ils montrent que tout entier assez grand est somme de 19 bicarrés ; leur méthode étant effective, le problème original de Waring est ramené à un calcul fini : nous verrons de quel genre de finitude il s'agit. Mentionnons qu'en 1933 DICKSON démontre que tout entier est somme de 35 bicarrés, et qu'en 1940 S. S. PILLAI annonce que 27 bicarrés suffisent, mais aucune démonstration n'a été publiée et **il est douteux que ce résultat ait été accessible à** l'époque.

Signalons ici que DAVENPORT a démontré en 1939 que tout entier assez grand et congru à $1 , 2 , 3 , \ldots$ ou 14 modulo 16 est somme d'au plus 14 bicarrés. Il en résulte que tout entier assez grand est somme d'au plus 16 bicarrés, ce qui est le meilleur résultat possible puisque KEMPNER a remarqué en 1912 qu'un entier de la forme 31.16^n n'est pas somme de moins de 16 bicarrés. VAUGHAN (1985) vient de remplacer 14 par 13.

Pour ce qui est du nombre de représentations, HUA (1938) donne un équivalent du nombre de représentations comme somme de 17 bicarrés. La méthode de DAVENPORT ne permet pas d'obtenir ce résultat, en revanche la méthode de HUA ne donne aucune minoration du nombre de représentations en somme de 16 bicarrés.

AULUCK (1940) démontre que tout entier supérieur à $\exp(\exp(205))$ est somme de 19 bicarrés, ce qui est un nombre parfaitement inaccessible pour l'instant.

3. La contribution de THOMAS (1973-1974).

Dans sa thèse en 1973, THOMAS explicite tous les calculs relatifs à la version "Davenport" de la méthode du cercle. Il obtient ainsi que tout entier supérieur à 10^{1409} est somme de 19 bicarrés. Selon ses estimations, la vérification par le calcul de la conjecture de Waring pour les bicarrés prendrait environ un "quintillion" d'années, ce qui est beaucoup, même s'il ne s'agit que d'un quintillion américain. Avec les différentes astuces connues à ce jour et les moyens de calcul actuels, cette valeur est toujours inaccessible aujourd'hui (de même que toute valeur supérieure à 10^{600}). THOMAS démontre également dans sa thèse que tout entier supérieur à 10^{568} est somme de 22 bicarrés et que tout entier est somme de 23 bicarrés.

L'année suivante, THOMAS (1974) reprend la partie numérique de son travail en basant son "escalade" sur des sommes de 6 bicarrés, à la place des sommes de 7 bicarrés utilisées dans sa thèse. Il démontre ainsi que tout entier inférieur à $10^{568,7}$ est somme de 22 bicarrés ; avec le résultat de sa thèse précédemment cité, cela implique que tout entier est somme de 22 bicarrés. Il annonce également que tout entier inférieur à 10^{310} est somme de 19 bicarrés, mais, comme nous allons le voir, la démonstration qu'il indique implique seulement que tout entier inférieur à $10^{233,5}$ est somme de 19 bicarrés. Cette erreur a une fâcheuse conséquence : la borne $10^{233,5}$ ne permet pas de démontrer par la méthode développée par BALASUBRAMANIAN (1979) que 21 bicarrés suffisent.

Reprenons les calculs de THOMAS concernant l'escalade de DICKSON, que l'on peut voir comme une descente gloutonne : pour démontrer que N est somme k bicarrés, il suffit de démontrer que $N - ([N^{1/4}]^4)$ est somme de $k-1$ bicarrés ; on remarque que $N - ([N^{1/4}]^4) \leqslant 4N^{3/4} + O(N^{1/2})$. En fait, si l'on veut arriver sur une somme de 6 bicarrés, il faut également gérer, à certaines étapes, la parité du bicarré que l'on ôte ; dans ce cas, on ôte de N, soit $[N^{1/4}]^4$, soit $([N^{1/4}]-1)^4$, et la taille du nombre à représenter comme somme de $k-1$ bicarrés est au plus $8N^{3/4} + O(N^{1/2})$. Nous suivons maintenant la démarche de THOMAS (1974) : la méthode la plus brutale pour démontrer les lemmes 1.2 et 1.3 conduit à effectuer 10^{11} additions en stockant les résultats sur 40 Méga-octets, le problème peut aisément se fractionner, et il est donc tout à fait accessible ; admettons-le.

Pour démontrer le théorème 3.3, THOMAS nous indique qu'il effectue des escalades successives de types C , A , 5B , B' , 5B après avoir expliqué en détail la signification de ces différents types et détaillé les 3 premières étapes. Voici la signification des symboles utilisés et le tableau que j'obtiens ; chaque ligne, à partir de la seconde, se lit ainsi :

par une escalade de type t à partir de la ligne précédente, tout entier de l'intervalle $[S_k , 10^x]$ dont le reste dans la division par 16 est entre ℓ et m, est somme de k bicarrés ; où $S_k = 76\ 124\ 880$ pour $k \leqslant 13$ et $S_k = 1.22.10^9$ pour $k \geqslant 14$.

.../...

t	x	$\mathcal{R}$	k
	9,24	2 , 3 , 4 et conditions mod 5	6
C	10,59	3 , 4	7
A	13,32	4	8
B	16,55	4 , 5	9
B	20,87	4 , 5 , 6	10
B	26,62	4 , 5 , 6 , 7	11
B	34,29	4 , 5 , 6 , 7 , 8	12
B	44,52	4 , ... , 9	13
B'	58,16	1 , 4 , ... , 10	14
B	76,35	1 , 2 , 4 , ... , 11	15
B	100,59	1 , 2 , ... , 12	16
B	132,92	1 , ... , 13	17
B	176,02	1 , ... , 14	18
B	233,50	1 , ... , 15	19
B	310,13	1 , ... , 15	20
B	412,30	1 , ... , 15	21
B	548,53	1 , ... , 15	22

Comme on le voit, la valeur 310 correspond en fait à des sommes de 20 bicarrés, et non à des sommes de 19 : ce tableau nous incite à penser que THOMAS a effectué un pas de trop dans l'escalade. En revanche la valeur 568,7 annoncée pour les sommes de 22 bicarrés peut être atteinte par la méthode qu'il propose : la valeur 548,53 obtenue par un algorithme mal adapté en témoigne.

On notera également que la valeur 10^{143} qu'annonce THOMAS dans le théorème 3.4 concernant les sommes de 16 bicarrés me semble inaccessible par la méthode qu'il préconise : en effet, en n'effectuant que des escalades de type A (le glouton pur) à partir des sommes de 6 bicarrés trouvées, on ne peut dépasser 10^{128} .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AULUCK (F. C.). - On Waring's problem for biquadratics, Proc. Indian Acad. Sc., Section A, t. 11, 1940, p. 437-450.

[2] BALASUBRAMANIAN (R.). - On Waring's problem : $g(4) \leqslant 21$, Hardy Ramanujan J., Bombay, t. 2, 1979, p. 3-31.

[3] DAVENPORT (H.). - On Waring's problem for fourth powers, Annals of Math., Series 2, t. 40, 1939, p. 731-747.

[4] DAVENPORT (H.). - Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalities, the University of Michigan, fall semester, 1962. - Ann Arbor, Ann Arbor Publishers, 1963.

[5] DICKSON (L. E.). - Recent progress on Waring's theorem and its generalizations, Bull. Amer. math. Soc., t. 39, 1933, p. 701-727.

[6] DRESS (F.). - Amélioration de la majoration de $g(4)$ dans le problème de Waring : $g(4) \leqslant 30$, Acta Arithm., Warszawa, t. 22, 1973, p. 137-147.

[7] ELLISON (W. J.). - Waring's problem, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 10-36.

[8] HARDY (G. H.) and LITTLEWOOD (J. E.). - Some problems of "Partitio Numerorum", II : Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates, Math. Z., t. 9, 1921, p. 14-27 ; VI : Further researches in Waring's problem, Math. Z., t. 23, 1925, p. 1-37.

[9] HUA (L.-K.). - On Waring's problem, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 9, 1938, p. 199-202.

[10] KEMPNER (A.). - Bemerkungen zum Waringschen Problem, Math. Annalen, t. 72, 1912, p. 387-399.

[11] LIOUVILLE (J.). - Lectures au Collège de France [voir LEBESGUE (V. A.). - Exercices d'analyse numérique, p. 112-115 . - Paris, Leiber et Faraguet, 1859].

[12] PILLAI (S. S.). - On Waring's problem $g(6) = 73$, Proc. Indian Acad. Sc., Section A, t. 12, 1940, p. 30-40.

[13] THOMAS (H. E.). - A numerical approach to Waring's problem for fourth powers, the University of Michigan, Phil. Doct., 1973.

[14] THOMAS (H. E.). - Waring's problem for twenty two biquadrates, Trans. Amer. math. Soc., t. 193, 1974, p. 427-430.

[15] VAUGHAN (R. C.). - The Hardy-Littlewood method. - Cambridge, New York, Melbourne, Cambridge University Press, 1981 (Cambridge Tracts in Mathematics, 80).