Groupe d'étude de théories stables

Bruno Poizat

Beaucoup de modèles à peu de frais

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. nº 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A9_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 9, 7 p.

BEAUCOUP DE MODÈLES À PEU DE FRAIS

par Bruno POIZAT (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Il est de notoriété publique que SHELAH sait faire beaucoup de modèles d'une théorie instable T, qui sont de cardinal λ donné, et qui sont en outre κ-saturés pour un κ raisonnable par rapport à λ. Il emploie la méthode suivante : il part d'un "squelette" C, c'est-à-dire d'une chaîne indicernable ordonnée par une formule, et fabrique un modèle $M(C)$ qui est en un certain sens "atomique" ou "premier" sur C (il part d'un modèle d'Ehrenfeucht et le κ-sature sans réaliser dans $M(C)$ trop de coupures de C) ; il reste alors à montrer que si C et C' sont des chaînes très différentes, alors $M(C)$ et $M(C')$ ne peuvent être isomorphes ; pour tout cela, on consultera Saharon SHELAH [2], p. 444 et suivantes.

Je vais montrer ici un cas très particulier de ce résultat de Shelah, mais j'emploierai une méthode qui aura le double avantage de la souplesse et de la simplicité ; mes modèles ne sont pas exactement des modèles "premiers" au-dessus d'un motif (car ils réalisent certains types et en omettent d'autres) et je n'ai pas besoin de construction du genre de celle d'Ehrenfeucht : la seule chose qui limite la taille de mes modèles, c'est le théorème de Lovenheim-Skolem ! A cause de cette souplesse d'emploi, je pourrai construire des modèles ayant une propriété de saturation plus forte que la κ-saturation, la κ-resplendance, que je définis dans une première partie.

Dans mon esprit, il n'est pas clair que la construction de Shelah permette de faire des modèles κ-resplendants.

1. Modèles resplandants.

Soit T une théorie complète dans un langage L, et soit M un modèle de T ; je note $L(M)$ le langage obtenu en ajoutant à L un nom pour chaque élément de M, et $T(M)$ le "diagramme" de M, c'est-à-dire tous les énoncés (et pas seulement les énoncés sans quanteurs) de $L(M)$ qui sont vrais pour M. Les modèles de $T(M)$ sont donc les extensions élémentaires de M.

On dit que M est resplendant (excusez l'anglicisme : faut-il dire "resplendissant" ?) s'il a la propriété suivante : pour tout énoncé f d'un langage étendant $L(M)$, et qui soit consistant avec $T(M)$ (i. e. $T(M) \cup \{f\}$ est consistant), on

---

(*) Bruno POIZAT, Mathématiques, UER 47, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

peut trouver sur la base de M une interprétation des nouveaux symboles (relationnels ou fonctionnels) qui apparaissent dans f de manière à en faire un modèle de f .

Par exemple, si L est de signature finie, un modèle resplendant est homogène : si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont même type, il existe un automorphsime s de M qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$, car l'énoncé qui exprime cela est consistant avec $T(M)$.

Cette notion de modèle resplendant, introduite par BARWISE et SCHLIPF, est très pertinente pour la théorie des modèles, et il est étonnant qu'elle n'ait pas eu plus de succès ; ce qui est plus surprenant encore, c'est que ce qui fait qu'on ne la néglige pas totalement, c'est que, dans le cas où tout est dénombrable, cette notion équivaut à celle de modèle récursivement saturé qui, elle, est un mélange incongru de récursivité et de théorie des modèles !

On sait que les modèles resplendants existent :

PROPOSITION A. - <u>Un modèle</u> M <u>de</u> T , <u>de cardinal supérieur ou égal à celui du langage de</u> T , <u>a une extension élémentaire resplendante de même cardinal</u>.

<u>Preuve</u>. - Rappelons un cas particulier simple du "lemme de consistance disjointe" : si $T(M) \cup T_1$ et $T(M) \cup T_2$ sont deux théories consistantes, dont le langage commun se réduit à $T(M)$, alors $T(M) \cup T_1 \cup T_2$ est consistante. Cela se montre aisément grâce à une chaîne de modèles, en utilisant le fait que si M_1 et M_2 sont deux modèles de $T(M)$, alors l'un se plonge élémentairement dans une ultra-puissance de l'autre. Et on le généralise sans problème au cas de plusieurs théories au lieu de deux seulement.

Soit donc M notre modèle, de cardinal λ , et considérons un exemplaire de chaque énoncé consistant avec $T(M)$; par un exemplaire, j'entends que nous ne répétons pas des énoncés qui ne diffèrent que par le nom des symboles ajoutés (ou encore que nous travaillons avec un ensemble dénombrable fixé de nouveaux symboles, une infinité pour chaque arité). Nous avons donc λ tels énoncés.

Disjoignons le vocabulaire de tous ces énoncés ; d'après le lemme de consistance disjointe, nous obtenons une théorie consistante avec $T(M)$, ayant un modèle M_0 de cardinal λ , dont la réduite au langage de T est une extension élémentaire de M : on voit que tout énoncé consistant avec $T(M)$ est réalisable sur M_0 ; on recommence à partir de M_0 (et pas seulement de la réduite à L de M_0 !) et on répète ω fois. A la limite, on a ce qu'on cherche

Je définis maintenant une notion de modèle κ-resplendant, parallèle à celle de modèle κ-saturé. M est dit κ-resplendant si, pour toute théorie Θ dont le langage comprend, en plus des symboles de L , strictement moins de κ symboles de constantes dans M , et strictement moins de κ nouveaux symboles (relationnels, fonctionnels), et telle que $\Theta \cup T(M)$ soit consistante, il est possible d'interpréter sur M les nouveaux symboles de manière à obtenir un modèle de Θ .

Comme un type, c'est une théorie dans un langage où on ajoute un nouveau symbole de constante, on voit qu'un modèle κ-resplendant est κ-saturé. Si au lieu de dire que Θ avait moins de κ nouveaux symboles, on avait dit que Θ comprenait moins de κ axiomes, on aurait généralisé la notion de modèle κ-compact au lieu de modèle κ-saturé ; les deux notions obtenues coïncident quand κ excède le cardinal de T .

La proposition suivante généralise la proposition 2, ainsi que le théorème classique d'existence de modèles κ-saturés :

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> $2^{\kappa} \geq |T|$, <u>tout modèle</u> M <u>de</u> T <u>de cardinal inférieur ou égal à</u> 2^{κ} <u>a une extension élémentaire</u> κ^{+}<u>-resplendante de cardinal</u> 2^{κ} .

<u>Preuve</u>. - On considère une copie de chaque théorie Θ possible : il y en a au plus 2^{κ} ; on en disjoint les vocabulaires, et on forme ainsi une théorie qui est consistante d'après le lemme de consistance disjointe, qui a donc un modèle M_0 , de cardinal 2^{κ} . Et on répète κ^{+} fois.

La κ-resplendance est la propriété maximum de saturation et d'homogénéité qu'on puisse imaginer ; il est donc naturel de se demander si un modèle saturé est resplendant ; c'est ce qu'affirme le théorème suivant, qu'on trouve dans SHELAH [2] (p. 8, conclusion 1.13) ; on notera que sa démonstration n'est pas si élémentaire, puisqu'elle utilise de la stabilité.

PROPOSITION 3. - <u>Un modèle saturé de cardinal</u> κ (i. e. κ-<u>saturé et de cardinal</u> κ) <u>est resplendant</u>, <u>et même</u> κ-<u>resplendant</u>.

<u>Preuve</u>. - Soit M_0 notre modèle, et soit Θ une théorie consistante avec $T(M_0)$, faisant intervenir un ensemble A de paramètres, $A \subseteq M_0$, $|A| < \kappa$, et moins de κ nouveaux symboles ; $\Theta \cup T(M_0)$ a un modèle N_0 , de cardinal κ . Et comme le modèle saturé est κ-universel, le réduit de N_0 au langage de T se plonge élémentairement dans une copie M_1 de M_0 .

En répétant κ fois le procédé, on obtient une chaîne N_α , $\alpha < \kappa$, de modèles de $\Theta \cup T(M_0)$, tous de cardinal κ , imbriquée dans une chaîne M_α de modèles de T , tous isomorphes au modèle saturé M_0 . La limite N des N_α est un modèle de $\Theta \cup T(M_0)$, dont le réduit au langage de T est la limite M des M_α .

Supposons d'abord que κ soit régulier ; dans ce cas M est κ-saturé, car une partie B de M de cardinal inférieur à κ est contenue dans un M_α , et tout type sur B y est réalisé. Comme M est de cardinal κ , c'est encore le modèle saturé de cardinal κ , et M est isomorphe, et même A-isomorphe, à M_0 ; en conséquence on peut trouver une réalisation de Θ sur M_0 .

Dans le cas où κ est singulier, il est également vrai que M est κ-saturé, ce qui donne la même conclusion ; je rappelle brièvement pourquoi. D'abord T est stable, puisqu'elle a un modèle saturé de cardinal singulier, et même $\kappa(T)$ est non cofinal dans κ (voir POIZAT [1]). Si donc $B \subset M$, $|B| < \kappa$, $p \in S_1(B)$, et q est un fils de p sur M, q est pour un certain α **héritier de sa restriction** q_α à M_α ; et on peut trouver une restriction N de M_α, de cardinal au plus κ, tel que q_α hérite de sa restriction à N, et que M_α contienne une copie de la suite de Morley de longueur κ de ce dernier type (en effet, q_α ne dévie pas sur un certain ensemble C de cardinal strictement inférieur à κ ; si $\kappa > |T|$, prendre un modèle quelconque N contenant C et de cardinal inférieur à κ ; sinon utiliser le fait que T est stable en κ) ; or un n-uple extrait de B ne peut faire dévier que moins (et même strictement moins) de $\kappa(T)$ éléments de cette suite, et par conséquent tous, sauf au plus $|B| \times \kappa(T)$ d'entre eux, réalisent p.

On comparera cette dénomstration avec celle du théorème d'existence de modèles saturés pour une théorie stable.

Réciproquement, pour une théorie stable, un modèle resplendant aura tendance à être carrément saturé : on ne pourra donc en faire beaucoup de cardinal donné ! En effet :

PROPOSITION 4. - <u>Si</u> T <u>est une théorie stable, un modèle</u> $|T|^+$-<u>resplendant de</u> T <u>est saturé</u>.

<u>Preuve</u>. - Soit donc M un modèle $|T|^+$-resplendant de T de cardinal κ ; soient $A \subset M$, $|A| < \kappa$, $p \in S_1(A)$, et q un fils de p sur M ; il existe une restriction élémentaire N de M, de cardinal $|T|$, tel que q soit héritier de sa restriction à N.

On considère alors la théorie suivante, dont le langage nomme chaque élément de N, et comporte en outre un symbole de prédicat unaire S et un symbole de fonction unaire f, dont les axiomes expriment que f est une bijection entre S et le modèle tout entier, et que tout n-uple formé d'éléments de S distincts réalise le début de la suite de Morley de q/N.

C'est une théorie consistante avec $T(M)$, et réalisable sur M par $|T|^+$-resplendance. Par conséquent il y a dans M une suite de Morley de longueur κ pour q/N, dont presque tous les éléments réalisent p (car $\kappa > |T|$).

M est donc κ-saturé.

On peut voir, plus précisément, que si T est stable, et si M est un modèle de T qui est $|T|^+$-saturé et ω^+-resplendant, alors il est saturé. En effet, si on reprend la démonstration précédente, on voit par $|T|^+$-saturation que M réalise une suite de Morley $s = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ de longueur ω de q/N ; or on sait que q est le type moyen de s, qu'il est l'unique extension non déviante de sa restriction à s ; et on voit, par ω^+-resplendance, que s peut être prolongée en une suite (i. e. un ensemble) indicernable de longueur κ, d'où la conclusion.

Dans le cas totalement transcendant, un modèle ω-resplendant est saturé : en effet, tout type sur M est l'unique extension non déviante d'une de ses restrictions à un ensemble fini de paramètres. Dans le cas superstable, il faut supposer en outre que M est $(\omega + \epsilon)$-saturé, i. e. que tout type fort sur un ensemble fini de paramètres est réalisé dans M, pour conclure de même.

Remarque. - Comme les construction de SHELAH restent valables dans les classes pseudo-élémentaires, pour voir si ses méthodes permettent de construire des modèles resplendants, il est naturel de se demander à quelle condition ces derniers forment une classe pseudo-élémentaire (ou sont raisonnablement proches d'une classe pseudo-élémentaire) ; c'est toujours le cas pour une structure ω-catégorique.

En effet, si $f(\bar{a}, r)$ est un énoncé, faisant intervenir des paramètres $\bar{a}$ dans M, et un nouveau symbole relationnel r, sa consistance avec $T(M)$ ne dépend que du type de $\bar{a}$. Soit alors ϑ la formule caractérisant les types qui conviennent ; ajoutons au langage de T un prédicat $\rho(\bar{x}, \bar{y})$, et à T l'axiome exprimant que si $\bar{a}$ satisfait ϑ, $f(\bar{a}, \rho(\bar{a}, \bar{y}))$ est vrai. Si on appelle T_1 la collection de tous ces axiomes, les modèles resplendants de T sont ceux qui sont les réduits de modèles de T_1.

Exercice. - Montrer que si T est superstable et ω-catégorique, alors tout modèle resplendant de T est saturé (Hint : D'après CHERLIN et LACHLAN, l'ordre fondamental de T est fini).

2. Beaucoup de modèles pour une théorie avec propriété d'indépendance.

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

PROPOSITION 5. - *Soient T une théorie ayant la propriété d'indépendance, λ un cardinal tel que $2^\lambda \geqslant |T|$, et κ un cardinal régulier, $\kappa \leq \lambda$; alors T a 2^{2^λ} modèles deux à deux non isomorphes, de cardinal 2^λ, qui sont en outre κ-resplendants et non κ^+-saturés.*

Preuve. - Il existe donc une formule $f(\bar{x}, \bar{y})$, des a_i, $i \in \kappa$, des $\bar{b}_w$, $w \in 2^\kappa$, dans un modèle M de T, tels que $f(a_i, \bar{b}_w)$ est vrai si, et seulement si, $i \in w$.

Si U est un ultrafiltre de parties de λ, nous dirons que la suite extraite de M, $(a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_\lambda, a_{\lambda+1}, \ldots, a_{\lambda+n}, \ldots)$, de longueur $\lambda + \omega$ code U si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $w \subset \lambda$, il existe $\bar{b}_w$ dans M tel que, si $i < \lambda$, $M \models f(a_i, \bar{b}_w)$ si, et seulement si, $i \in w$;

- pour toute formule $g(x , \bar{c})$, à paramètres $\bar{c}$ dans M , il existe un entier m , tel que, pour tout $n \geq m$, $g(a_{\lambda+n} , \bar{c})$ est vraie dans M si, et seulement si $\{i \; ; \; i \in \lambda \text{ et } M \models g(a_i , \bar{c})\}$ est dans l'ultrafiltre U .

Remarquons que, du fait de l'existence des $\bar{b}_w$, une suite ne peut coder qu'au plus un ultrafiltre. Et montrons que tout ultrafiltre U peut être codé par une suite dans un modèle M de cardinal 2^λ .

Pour cela, on part d'un modèle M_0 de cardinal 2^λ , contenant les a_i , $i \in \lambda$, et les $\bar{b}_w$, $w \subset \lambda$; on réalise ensuite en a_λ , dans un modèle M_1 de cardinal 2^λ , le type limite de U sur M_0 (i. e. une formule à paramètre dans M_0 est vérifiée par a_λ si, et seulement si, l'ensemble des $i \in \lambda$ tels qu'elle soit vraie pour a_i est dans U) ; puis on réalise en $a_{\lambda+1}$, dans un modèle M_2 , le type limite de U sur M_1 ; et on répète ω fois : $a_{\lambda+n}$ réalise dans M_{n+1} le type limite de U sur M_n . Et M est la réunion des M_n .

Remarquons que par construction M ne peut être ω^+-saturé ; en effet on voit que tout énoncé sans paramètres (ou à paramètres dans M_0) satisfait par $a_\lambda , \ldots , a_{\lambda+n}$ l'est par des $a_{i_0} , \ldots , a_{i_n}$ d'indice inférieur à λ (faire une récurrence sur n) ; par conséquent le type (incomplet) de $\bar{y}$ affirmant que $f(a_{\lambda+n} , \bar{y})$ est vrai si n est pair, faux si n est impair, est consistant, et est omis dans M .

Montrons maintenant qu'on peut supposer en outre que M est ω-resplendant : en effet, comme il n'y a aucune contrainte sur les M_n , sauf celle de réaliser certains types, on peut combiner ce procédé avec un procédé garantissant la ω-resplendance de la limite analogue à celui de la proposition 2.

Reste à conclure : il y a 2^{2^λ} ultrafiltres distincts, chacun étant codé par une suite de longueur $\lambda + \omega$ extraite d'un modèle convenable (ω-resplendant et non ω^+-saturé) de cardinal 2^λ ; il y a $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$ suite de longueur $\lambda + \omega$ extraites d'un tel modèle, si bien que chacun ne peut coder qu'au plus 2^λ ultrafiltres distincts. Il faut donc qu'il y en ait 2^{2^λ} de non isomorphes.

Nous avons traité le cas $\kappa = \omega$; pour le cas général, on code de la même manière les ultrafiltres par des suites de longueur $\lambda + \kappa$.

Je ne sais pas donner à ma démonstration un caractère vraiment plus général, valable pour tout cardinal (et non pas pour tout cardinal de la forme 2^λ , ou vérifiant une hypothèse voisine) pour une théorie T ayant la propriété d'indépendance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] POIZAT (B.). - Exercices en stabilité, "Groupe d'étude de Théories stables", 2e année, 1978/79, n° 11, 5 p.

[2] SHELAH (S.). - Classification theory and the number of non isomorphic models. - Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland publishing Company, 1978 (Studies in Logic, 92).