JEAN-LOUIS DURET

Stabilité des corps séparablement clos

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. nº 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A8_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 8, 13 p.

STABILITÉ DES CORPS SÉPARABLEMENT CLOS
(d'après Carol WOOD [4])

par Jean-Louis DURET (*)
[Université d'Angers]

Le but de cet exposé est de démontrer que la théorie des corps séparablement clos, de caractéristique et d'invariant d'ERŠOV fixés, est complète, non superstable et stable.

Les notions d'algèbre nécessaires se trouvent par exemple dans N. JACOBSON [2].

Tous les corps considérés sont commutatifs et de caractéristique p non nulle. On notera $\hat{F}$ la clôture séparable de F .

1. Définitions et préliminaires algébriques.

Si a est élément d'un corps F commutatif de caractéristique p , le polynôme $X^p - a$ est irréductible dans F , ou bien a , dans F , une racine multiple d'ordre p ; on en déduit immédiatement par récurrence que $[F : F^p]$ (où F^p est le sous-corps de F des puissances p-ième) est une puissance de p .

1.1. Définition. - On appelle invariant d'Eršov du corps F de caractéristique p , et on note $\tau(F)$:

- l'entier naturel n si $[F : F^p]$ est fini et égal à p^n .
- Le symbole ∞ si $[F : F^p]$ n'est pas fini.

1.2. Définition et proposition. - On dit que les éléments $a_1 , \ldots , a_n$ de F sont p-indépendants (ou que l'ensemble $\{a_1 , \ldots , a_n\}$ est p-libre dans F) si, et seulement si, on a :

$$[F^p(a_1 , \ldots , a_n) : F^p] = p^n$$

1.3. Définition. - Un sous-ensemble E de F est dit p-libre sur F si, et seulement si, tout sous-ensemble fini de E est p-libre dans F .

1.4. PROPOSITION. - L'ensemble $\{a_i \ ; \ i \in I\}$ est p-libre dans F si, et seulement si, $\{\prod_{i\in I} a_i^{\sigma(i)} \ ; \ \sigma \in p^{(I)}\}$ est linéairement libre sur F^p .

1.5. PROPOSITION. - Tout sous-ensemble d'un ensemble p-libre est p-libre.

(*) Jean-Louis DURET, Mathématiques, Université d'Angers, Boulevard Lavoisier, 49045 ANGERS CEDEX.

1.6. Définition. - On dit que E est une p-base de F si, et seulement si, E est p-libre dans F et maximal (parmi les ensembles p-libres).

1.7. PROPOSITION. - E est une p-base de F si, et seulement si, E est p-libre dans F et p-générateur de F, c'est-à-dire :

$$F^p(E) = F$$

1.8. PROPOSITION. - Tout sous-ensemble p-libre dans F s'étend en une p-base de F.

1.9. PROPOSITION. - Toutes les p-bases d'un corps ont même cardinal.

1.10. - Soient L le langage des corps $\{0 , 1 , + , \cdot , - , {}^{-1}\}$ et $\mathcal{L}$ le langage obtenu en ajoutant à L les prédicats Q_m, $m > 1$, où Q_m est un prédicat m-aire. Soient $M = p^m$, $\{\sigma_1 , \ldots , \sigma_M\} = p^m$, et $\Xi_m(x_1 , \ldots , x_m)$ la formule :

$$\forall \lambda_1 , \ldots , \lambda_M \left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i^p \left(\prod_{j=1}^{m} x_j^{\sigma_i(j)}\right) = 0 \Longrightarrow \bigwedge_{i=1}^{M} \lambda_i = 0\right)$$

(on a $F \models \Xi_m(a_1 , \ldots , a_m)$ si, et seulement si, $a_1 , \ldots , a_m$ sont p-indépendants dans F).

Soient les énoncés :

$$\vartheta_m = \forall x_1 , \ldots , x_m \ (Q_m(x_1 , \ldots , x_m) \Longleftrightarrow \Xi(x_1 , \ldots , x_m))$$

$$\varphi_n = \exists x_1 , \ldots , x_n \ (Q_n(x_1 , \ldots , x_n)) .$$

Soit T la théorie des corps de caractéristique p dans le langage L. On dit d'un corps qu'il est séparablement clos si, et seulement si, il n'a pas d'extension algébrique séparable propre ; la théorie des corps séparablement clos de caractéristique p, soit SCF, est élémentaire dans le langage L ; elle est en effet axiomatisable par exemple par T, et un ensemble infini d'énoncés disant que, pour chaque entier naturel non nul n, tout polynôme irréductible à une indéterminée de degré n, est de la forme $g(X^p)$ où g est un polynôme à une indéterminée. Soient pour n entier naturel

$$T_n = T \cup \{\vartheta_m \ ; \ m \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg \varphi_{n+1}\}$$

la théorie des corps commutatifs de caractéristique p et d'invariant d'Eršov au plus n.

$$SCF_n = SCF \cup \{\vartheta_m \ ; \ m \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi_n \wedge \neg \varphi_{n+1}\}$$

la théorie des corps séparablement clos de caractéristique p et d'invariant d'Eršov n.

$$T_\infty = T \cup \{\vartheta_m \ ; \ m \in \mathbb{N}\}$$

$$S\,C\,F_\infty = S\,C\,F \cup \{\theta_m \ ; \ m \in \underset{\sim}{N}\} \cup \{\varphi_n \ ; \ n \in \underset{\sim}{N}\}$$

la théorie des corps séparablement clos de caractéristique p et d'invariant d'Eršov infini.

1.11. PROPOSITION. - Si F et K sont deux modèles de T_∞, les énoncés suivants sont équivalents :

1° K est une extension séparable de F,

2° K^p est une extension séparable de F^p,

3° F est sous-structure de K pour le langage $\mathcal{L}$,

4° Tout ensemble de F p-libre dans F, l'est dans K,

5° Il existe une p-base de F qui est p-libre dans K.

Démonstration.

1° $\Longleftrightarrow$ 2° : $x \longmapsto x^p$ est un isomorphisme de K sur K^p qui envoie F sur F^p.

2° $\Longrightarrow$ 3° : K^p et $(F^p)^{1/p} = F$ sont linéairement disjoints sur F^p, donc tout ensemble d'éléments de F linéairement indépendants sur F^p est linéairement libre sur K^p, donc 3° d'après 1° - 4°.

3° $\Longrightarrow$ 4° et 4° $\Longrightarrow$ 5° sont évidents.

5° $\Longrightarrow$ 2° : d'après 1° - 4°, il existe une base (linéaire) de F sur F^p qui est linéairement libre sur K^p ; donc F et K^p sont linéairement disjoints sur F^p.

1.12. THÉORÈME. - Si C est un ensemble algébriquement indépendant sur F, et A une p-base de F, alors $A \cup C$ est une p-base de $F(C)$.

Démonstration.

(a) $A \cup C$ est p-libre dans $F(C)$.

$$[F(C)]^p = F^p(C^p)$$

Soit un sous-ensemble fini de $A \cup C$: $\{a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m\}$ ($\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ et $\{c_1, \dots, c_m\} \subset C$). C^p est un ensemble d'éléments algébriquement indépendants sur F, donc sur $F^p(a_1, \dots, a_n) = F'$; donc $F^p(C^p)$ et F' sont linéairement disjoints sur F^p ; une base de F' sur F^p est donc aussi base de $F'(C^p)$ sur $F^p(C^p)$. Comme A est une p-base de F, $a_1, \dots, a_n$ sont p-indépendants, donc

$$[F'(C^p) : F^p(C^p)] = [F' : F^p] = p^n .$$

Soient :

$$F_0 = F'(C^p)$$

$$F_{i+1} = F'(C^p)(c_1 , \dots , c_{i+1}) = F_i(c_{i+1}) .$$

Le degré de F_{i+1} sur F_i est p , car F_i contient c_{i+1}^p , mais ne contient pas c_i ; on a donc :

$$[F_m : F_0] = \prod_{i=0}^{m-1} [F_{i+1} : F_i] = p^m$$

$$[F^p(C^p)(a_1 , \dots , c_m) : F^p(C^p)] = [F_m : F^p(C^p)]$$

$$= [F_m : F_0] \times [F'(C^p) : F^p(C^p)] = p^{m+n}$$

donc $\{a_1 , \dots , a_n , c_1 , \dots , c_m\}$ est p-libre.

(b) $A \cup C$ <u>est</u> <u>p-génératrice</u>.

Soit $\frac{P}{Q}$ un élément de $F(C)$ (P et Q éléments de $F[C]$)

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{Q^p} \times P\, Q^{p-1} .$$

Il suffit donc de remarquer que $\{\prod_{c\in C} c^{\sigma(c)} ; \sigma \in \{0 , \dots , p-1\}^{(C)}\}$ engendre $F[C]$ sur $F^p[C^p]$.

1.13. THÉORÈME. - <u>Si</u> K <u>est une extension algébrique séparable de</u> F , <u>une</u> p-<u>base de</u> F <u>est</u> p-<u>base de</u> K .

<u>Démonstration</u>. - Soit A une p-base de F .

(a) A <u>est</u> p-<u>libre dans</u> K : En effet, K^p est une extension séparable de F^p (prop. 1.11) ; donc K^p et F sont linéairement disjoints sur F^p ; on conclut à l'aide de 1° - 4°.

(b) A <u>est</u> p-<u>génératrice dans</u> K : Soit α un élément de K ; $F(\alpha)$ est séparable sur F , donc (prop. 1.11) $F(\alpha)^p = F^p(\alpha^p)$ est séparable sur F^p , donc $F^p(\alpha^p)$ et F sont linéairement disjoints sur F^p . Donc $\{\prod_{a\in A} a^{\sigma(a)} ; \sigma \in p^{(A)}\}$ qui est une base de F sur F^p , est aussi une base de $F[F^p(\alpha^p)]$ sur $F^p(\alpha^p)$; or on a :

$$F[F^p(\alpha^p)] = F[\alpha^p] = F(\alpha^p) ;$$

de plus, comme $F(\alpha)$ est algébrique et séparable sur F , $F(\alpha)$ est algébrique et séparable sur $F(\alpha^p)$, ce qui implique que le polynôme $X - \alpha^p \in F(\alpha^p)[X]$ n'est pas irréductible sur $F(\alpha^p)$, donc que α est élément de $F(\alpha^p)$, c'est-à-dire qu'on a $F(\alpha^p) = F(\alpha)$. Donc α est combinaison linéaire à coefficients dans $F^p(\alpha^p)$, donc dans K^p , des éléments de $\{\prod_{a\in A} a^{\sigma(a)}\ ;\ \sigma \in p^{(A)}\}$, ce qu'il fallait démontrer.

1.14. COROLLAIRE. - Une p-base de F est p-base de $\hat{F}$

1.15. Exemples. - T_0 est la théorie des corps parfaits.

Soient Y_i , $i \in \omega$, des indéterminées et, pour $m \in \omega + 1$, soit :

$$F_m = \underset{\sim}{F}_p((Y_i)^{1/p^j}\ ;\ i \in m\ ,\ \text{et}\ j \in \underset{\sim}{N}) \models T_0 \ .$$

Le degré de transcendance de F_m sur $\underset{\sim}{F}_p$ est m (et donc ces corps sont non isomorphes deux à deux).

Soient X_i , $i \in \omega$, des indéterminées (distinctes des Y_i), et, pour $n \in \omega+1$, soit :

$$F_m^n = F_m(X_i\ ;\ i \in n) \models T_n \qquad \text{(d'après Th. 1.12)} .$$

Le degré de transcendance de F_m^n sur $\underset{\sim}{F}_p$ est $m + n$ (donc ces corps sont non isomorphes deux à deux).

$$\widehat{F_m^n} \models S\,C\,F_n \qquad \text{(d'après Cor. 1.14)} .$$

Le corps $\widehat{F_m^n}$ a même degré de transcendance sur $\underset{\sim}{F}_p$ que F_m^n . Les F_m^n sont donc non isomorphes deux à deux.

Tous les corps considérés sont dénombrables, mais on obtient des exemples de cardinalité supérieure par exemple en remplaçant $\underset{\sim}{F}_p$ par un corps parfait non dénombrable, par exemple algébriquement clos, ou encore en augmentant le nombre des Y_i .

1.16. THÉORÈME. - Soit K une extension séparable de F . Si A est une p-base de F , B une p-base de K contenant A , alors $C = B - A$ est algébriquement indépendant sur F .

Démonstration. - Soit C' inclus dans C une base de transcendance de K sur F ; $A \cup C'$ est une p-base de $F(C')$ (th. 1.12), p-libre dans K (puisqu'inclus dans B). Donc K est une extension algébrique séparable de $F(C')$ (prop. 1.11) ; il en résulte que $A \cup C'$ est une p-base de K (th. 1.13), incluse dans la p-base B , donc égale à B . D'où, $C' = C$, C est donc algébriquement libre sur F .

1.17. THÉORÈME. - Soit K une extension séparable de F avec $F \models T_n$, $K \models S\,C\,F_n$. Alors tout système de polynômes à coefficients dans F , à un nombre fini d'indéterminées, qui a une solution dans K , en a une dans $\hat{F}$.

Démonstration. - Un anneau de polynômes sur un corps, à un nombre fini d'indéterminées étant noethérien, on se ramène à un nombre fini de polynômes. Soient $f_1, \dots, f_q$ ces polynômes, $(x_1, \dots, x_r)$ une solution dans K de ce système. Soit :

$$K' = F(x_1, \dots, x_r) \subset K$$

K' est séparable sur F (puisque K l'est), et finiment engéndré, donc séparablement engendré ; soient $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ une base de transcendance séparante de K' sur F, χ un élément de K' algébrique séparable et engendrant K' sur $F(\xi_1, \dots, \xi_m)$;

$$K' = F(\xi_1, \dots, \xi_m, \chi) .$$

Soit $\Lambda(X) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_{i}(\xi) X^i \in F(\xi_1, \dots, \xi_m)[X]$ le polynôme minimal de χ sur $F(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Ce polynôme est séparable donc a un terme : $\mu(\vec{\xi})\, X^t$, où $\mu(\vec{\xi})$ est un élément non nul de $F(\xi_1, \dots, \xi_m)$, et où p ne divise pas t.

Soient, pour $i = 1, \dots, r$,

$$x_i = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{P_{i,j}(\vec{\xi})}{Q_{i,j}(\vec{\xi})} \chi^j$$

et, pour $i = 1, \dots, q$,

$$\overline{\overline{f_i}}[X] = f_i\Big(\sum_{j=0}^{s-1} \frac{P_{1,j}(\vec{\xi})}{Q_{1,j}(\vec{\xi})} \chi^j, \dots, \sum_{j=0}^{s-1} \frac{P_{r,j}(\vec{\xi})}{Q_{r,j}(\vec{\xi})} \chi^j\Big) \in F(\vec{\xi})[X]$$

χ est racine de $\overline{\overline{f_i}}$ qui est donc divisible par $\Lambda(X)$. Soient, pour $i = 1, \dots, q$,

$$g_i = \frac{\overline{\overline{f_i}}}{\Lambda} \qquad F(\xi_1, \dots, \xi_m)[X] .$$

Soient alors $a_1, \dots, a_m$ des éléments de $\hat{F}$ tels que $(a_1, \dots, a_m)$ ne soit solution d'aucun des polynômes suivants (polynômes éléments de $F[\xi_1, \dots, \xi_m]$ en considérant les ξ comme des indéterminées) :

- $Q_{i,j}(\vec{\xi})$ pour tous i et j,
- les dénominateurs des coefficients de $\Lambda(X)$,
- les dénominateurs des coefficients des g_i pour tout i,
- le numérateur de $\mu(\vec{\xi})$.

(De tels a existent car il n'y a qu'un nombre fini de polynômes, et $\hat{F}$ est infini.) Le polynôme à coefficients dans $\hat{F}$: $\Lambda'(X) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(\vec{a})\, X^i$ est séparable, car il a un terme $\mu(\vec{a})\, X^t$, où $\mu(\vec{a})$ n'est pas nul, et t n'est pas divisible par p ; Λ' a donc une racine dans $\hat{F}$, soit b. On a, pour $i = 1, \dots, q$

(avec un abas de notation aisément compréhensible),

$$\overline{f_i}(\vec{a}\ , b) = \Lambda'(b) \times g_i(\vec{a}\ , b) = 0$$

$$\Sigma_{j=0}^{s-1} \frac{P_{1,j}(\vec{a})}{Q_{1,j}(\vec{a})} b^j\ , \ \ldots\ , \Sigma_{j=0}^{s-1} \frac{P_{r,j}(\vec{a})}{P_{r,j}(\vec{a})} b^j)$$

est la solution cherchée.

2. Complétude.

2.1. LEMME. - Soient K un modèle de $S\,C\,F_n$, F une sous-structure de K (pour le langage $\mathcal{L}$) également modèle de $S\,C\,F_n$. Si F et K ont une p-base commune, alors F est existentiellement clos dans K .

Démonstration. - Soit A une p-base commune à F et K , et soit φ un énoncé existentiel à paramètres dans F vrai dans K ; cet énoncé est équivalent à une disjonction d'énoncés de la forme :

$$\exists\, x_1,\ldots,x_m (\bigwedge_{i=1}^{q} P_i(\vec{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{r} R_i(\vec{x}) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{s} Q_{M_i}(\vec{a}_i,\vec{x}_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{t} \neg\, Q_{N_i}(\vec{b}_i,\vec{x}''_i))\ ,$$

où P_i et R_j sont des polynômes sur F à m variables, $\vec{a}_k$ et $\vec{b}_\ell$ sont des suites d'éléments de F , $\vec{x}'_i$ et $\vec{x}''_i$ des sous-suites de $x_1\ , \ldots\ , x_m$; soit Ψ un énoncé de cette forme satisfait par K et pris parmi les énoncés dont φ est la disjonction. Soient $\chi_1\ , \ldots\ , \chi_m$ des éléments de K "satisfaisant" Ψ . Soit A' le sous-ensemble fini de A constitué des éléments des $\vec{a}_i$ et des $\vec{b}_i$ et des éléments de A qui interviennent dans l'écriture des χ_i comme combinaisons linéaires à coefficients dans K^p des éléments de la base de K sur K^p déduite de A , c'est-à-dire : $\{\prod_{a\in A} a^{\sigma(a)}\ ;\ \sigma\ \ p^{(A)}\}$; soit

$$B = \{\alpha_1\ , \ldots\ , \alpha_k\} = \{\prod_{a\in A'} a^{\sigma(a)}\ ;\ \sigma \in p^{(A')}\}\ .$$

Soit, pour $i = 1\ , \ldots\ , m$,

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{k} (\chi_i^j)^p\, \alpha_j$$

K satisfait $Q_{M_i}(\vec{a}_i\ , \vec{\chi}_i)$; posons : $\vec{a}_i = a_i^1\ , \ldots\ , a_i^{\ell_i}\ ,\ \chi'_i = \chi'^1_i,\ldots,\chi'^{M_i-\ell_i}_i$; parmi les déterminants d'ordre p^{M_i} extraits de la matrice des coefficients des éléments

$$\prod_{j=1}^{\ell_i} (a_i^j)^{e_j} \prod_{j=1}^{M_i-\ell_i} (\chi'^j_i)^{f_j} \quad (0 \leqslant e_j \leqslant p-1\ ,\ 0 \leqslant f_j \leqslant p-1)$$

dans la base B , il y en a un qui n'est pas nul ; ce déterminant est un polynôme des χ_i^j (même si tous n'apparaissent pas) à coefficients dans F^p ; soit $\Psi_i(\chi_1^1\ , \ldots\ , \chi_m^N)$. Procédons de même pour $\neg\, Q_{N_i}(\vec{b}_i\ , \vec{x}''_i)$; soit

$$\lambda_i^j(x_1^1 , \ldots , x_m^N) , \quad j = 1 , \ldots , J_i ,$$

les déterminants extraits, qui sont donc tous nuls. Le corps K satisfait donc :

$$\exists x_1 , \ldots , x_n , x_1^1 , \ldots , x_n^N \left(\bigwedge_{i=1}^q P_i(\vec{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^r R_i(\vec{x}) \neq 0\right.$$

$$\wedge \bigwedge_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^N (x_i^j)^p \alpha_j = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^s \gamma_i(x_1^1 , \ldots , x_m^N) \neq 0$$

$$\left.\wedge \bigwedge_{i=1}^t \bigwedge_{j=1}^{J_i} \lambda_i^j(x_1^1 , \ldots , x_m^N) = 0\right) .$$

Cet énoncé est du type :

$$\exists y_1 , \ldots , y_\mu \left(\bigwedge_{i=1}^\rho S_i(y_1 , \ldots , y_\mu) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^\tau T_i(y_1 , \ldots , y_\mu) \neq 0\right)$$

qui est équivalent à

$$\exists y_1,\ldots,y_\mu , z_1,\ldots,z_\tau \left(\bigwedge_{i=1}^\rho S_i(y_1,\ldots,y_\mu) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^\tau z_i T_i(y_1,\ldots,y_\mu) = 0\right.$$

D'après le théorème 1.17, cet énoncé est satisfait par F , "refaisant à l'envers" ce qui a été fait en tenant compte de ce que A est une p-base de F , on voit que F satisfait φ .

2.2. LEMME. - Soient F satisfaisant $S \mathbf{C} F_\infty$, et C un ensemble algébriquement libre sur F . F est existentiellement clos dans $\widehat{F(C)}$.

Démonstration. - Soit φ un énoncé existentiel de $\mathcal{L}(F)$ satisfait par $\widehat{F(C)}$. Soit A une p-base de F ; $A \cup C$ est une p-base de $\widehat{F(C)}$ (1.12 et 1.14). Soient T_1 l'ensemble des énoncés $f(\vec{c}) \neq 0$ où f est un polynôme non nul à coefficients dans F , et $\vec{c}$ une suite d'éléments de C , et T_2 l'ensemble des énoncés $Q_m(\vec{a} , \vec{c})$, où m est un entier naturel non nul, $\vec{a}$ une suite d'éléments de A , $\vec{c}$ une suite d'éléments de C , la somme des longueurs de $\vec{a}$ et $\vec{c}$ étant m . Soit $\mathcal{E}$ la théorie (dans le langage $\mathcal{L}(F \cup C)$) :

$$\text{Diag}\, F \cup S \mathbf{C} F \cup \{\vartheta_m \; ; \; m \in \mathbb{N}\} \cup T_1 \cup T_2 .$$

L'énoncé φ est conséquence de $\mathcal{T}$; soit en effet K un modèle de $\mathcal{T}$; il s'agit de démontrer que K satisfait φ ; le sous-ensemble de K des réalisations des éléments de F est un sous-corps de K , F' , isomorphe à F ; les réalisations des éléments de C constituent un ensemble D algébriquement libre sur F' (car K satisfait T_1) ; comme K satisfait $S \mathbf{C} F$, il contient $\widehat{F'(D)}$; $\widehat{F'(D)}$ est donc isomorphe à $\widehat{F(C)}$, et satisfait donc φ ; $A' \cup D$ (A' ensemble des réalisations des éléments de A) est une p-base de $F'(D)$ qui est p-libre dans K (car K est un modèle de T_2) ; $\widehat{F'(D)}$ est donc une sous-structure de K pour le langage $\mathcal{L}$; φ étant existentiel, K satisfait φ .

φ est donc conséquence d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{C}$; il existe donc un sous-ensemble fini de T_1 , T_1' , et un sous-ensemble fini de T_2 , T_2' tel que φ soit conséquence de

$$\text{Diag } F_0 \cup S \subset F \cup \{\theta_m \; ; \; m \in \underset{\sim}{N}\} \cup T_1' \cup T_2' .$$

Soient $a_1 , \dots , a_q$ les éléments de A qui apparaissent dans $T_1' \cup T_2'$, $c_1 , \dots , c_r$ les éléments de C qui apparaissent dans $T_1' \cup T_2'$. Soit $f(c_1,\cdots,c_r)$ le produit des polynômes qui apparaissent dans T_1' . L'énoncé φ est conséquence de :

$$\mathcal{C}' = \text{Diag } F \cup S \subset F \cup \{\theta_m \; ; \; m \in \underset{\sim}{N}\} \cup \{f(\vec{c}) \neq 0 , Q_{q+r}(a_1 , \dots , a_q , c_1 , \dots , c_r)\}.$$

Or F satisfait $\mathcal{C}'$; en effet, on peut réaliser les $c_1 , \dots , c_r$ par des éléments de $A - \{a_1 , \dots , a_q\}$ qui n'annulent pas $f(\vec{c})$, ce qui est possible car $A - \{a_1 , \dots , a_q\}$ est infini. Le corps F satisfait donc F .

2.3. THÉORÈME. - <u>La théorie</u> $S \, C \, F_n$ (n <u>fini ou infini</u>) <u>est modèle-complète</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit F un modèle de $S \subset F_n$ sous-structure de K modèle de $S \subset F_n$; il s'agit de démontrer que F est existentiellement clos dans K . Si n est fini, une p-base de F est aussi p-base de K (1.9 et 1.11) ; on conclut par le lemme 2.1. Si n est infini, soit A une p-base de F , et $A \cup B$ une p-base de K ; B est algébriquement libre sur F (1.16) ; F est existentiellement clos dans $F(B)$ (2.2) qui est existentiellement clos dans K (2.1).

2.4. THÉORÈME. - <u>La théorie</u> $S \, C \, F_n$ <u>admet un modèle premier</u> :

$$\widehat{\underset{\sim}{F}_p(X_1 , \dots , X_n)} \quad \underline{\text{si}} \quad n \quad \underline{\text{est fini}}$$

$$\widehat{\underset{\sim}{F}_p(X_i \; ; \; i \in \omega)} \quad \underline{\text{si}} \quad n \quad \underline{\text{est infini}}$$

(les X sont des indéterminées).

<u>Démonstration</u>. - Soit K un modèle de $S \, C \, F_n$, A une p-base de K ; l'invariant d'Eršov de $\underset{\sim}{F}_p$ étant 0 , A est algébriquement libre sur $\underset{\sim}{F}_p$. Si <u>n</u> est soit $B = A$; si n est infini, soit B une partie dénombrable de A . $\widehat{\underset{\sim}{F}_p(B)}$ est une sous-structure de K , puisque B <u>qui en</u> est une p-base est <u>p-libre</u> dans K . De plus, $\widehat{\underset{\sim}{F}_p(B)}$ est isomorphe $\widehat{\underset{\sim}{F}_p(X_1 , \dots , X_n)}$ ou à $\widehat{\underset{\sim}{F}_p(X_i \; ; \; i \in \omega)}$ suivant que n est fini ou non.

2.5. COROLLAIRE. - <u>La théorie</u> $S \, C \, F_n$ <u>est complète</u> (<u>et donc aussi la théorie des corps séparablement clos de caractéristique et d'invariant d'Eršov fixés dans le langage</u> L).

<u>Démonstration</u>. - Elle découle de 2.3 et 2.4.

2.6. THÉORÈME. - <u>La théorie</u> $S\,C\,F_n$ <u>est le modèle-complétion de la théorie</u> T_n .

<u>Démonstration</u>. - Compte tenu de 2.3, il suffit de démontrer que T_n est modèle-consistante par rapport à $S\,C\,F_n$, et que T_n a la propriété d'amalgamation.

1° T_n <u>est modèle-consistante avec</u> $S\,C\,F_n$.

Soit F un modèle de T_n . Soit X l'ensemble vide si on a $\tau(F) = n$, un ensemble d'indéterminées de cardinalité $n - \tau(F)$ si n est fini et différent de $\tau(F)$, dénombrable si n est infini et $\tau(F)$ ne l'est pas. Le modèle de T_n , F , est sous-structure de $\widehat{F(C)}$ (séparable sur F car $\widehat{F(C)}$ est séparable sur $F(C)$ et $F(C)$ l'est sur F) qui satisfait $S\,C\,F_n$ (1.12) .

2° T_n <u>a la propriété d'amalgamation</u>.

Soient F , K et K' des modèles de T_n tels que F soit sous-structure de K et de K' . On a

$$\tau(F) \leqslant \tau(K) \quad \text{et} \quad \tau(F) \leqslant \tau(K') .$$

Supposons par exemple : $\tau(K) \geqslant \tau(K')$. Soient A une p-base de F , $A \cup B$ une p-base de K , $A \cup C$ une p-base de K' ; C' un ensemble d'indéterminées tel que $C \cup C'$ ait même cardinal que B .

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[r, phantom, "\subset"] & \hat{K} \\
F \arrow[urr, dash, double] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dash, double] & F(B) \arrow[rr, phantom, "\subset"] \arrow[d, hook] & & \widehat{F(B)} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, hook] \\
K' \arrow[r, phantom, "\subset"] & K'(C') \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & \widehat{K'(C')}
\end{tikzcd}$$

($A \subset B$ signifie " A est sous-structure de B " ; $A \hookrightarrow B$ signifie " A se plonge dans B par un plongement dont la restriction à F est l'identité") .

$\widehat{F(B)}$, $\hat{K}$ et $\widehat{K'(C')}$ sont des modèles de $S\,C\,F_{\tau(K)}$; on termine en remarquant que $S\,C\,F_{\tau(K)}$ a la propriété d'amalgamation (2.3).

3. Stabilité.

3.1. THÉORIE. - <u>Pour tout</u> n <u>non nul</u>, $S\,C\,F_n$ <u>n'est pas superstable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit F un modèle de $S\,C\,F_n$. Les éléments de $\{F^{p^m} ; m \in \mathbb{N}\}$ sont des sous-corps de F , a fortiori des sous-groupes additifs. De plus, $x \longrightarrow x^{p^m}$ étant un isomorphisme de F sur F^{p^m} qui envoie F^p sur F^{p^m} , on a :

$$[F^{p^m} : F^{p^{m+1}}] = [F : F^p] = n \geqslant 1$$

L'indice du sous-groupe $F^{p^{m+1}}$ dans F^{p^m} est donc infini (car F , et donc $F^{p^{m+1}}$ l'est, un corps fini n'étant pas séparablement clos). Il résulte de [S], (7.5) que la théorie de F n'est pas superstable.

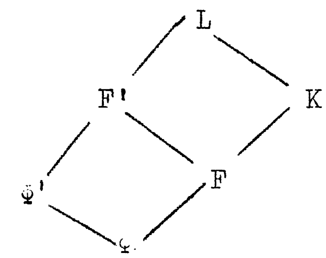
3.2. LEMME. - Soient des corps Φ , Φ' , K , L satisfaisant à :

$$\Phi \subset \Phi' \subset L \ , \quad \Phi \subset K \subset L \ , \quad \Phi' \subset F' \ , \quad \Phi' \text{ est dénombrable.}$$

Alors, il existe des corps dénombrables satisfaisant à :

$$\Phi \subset F \subset F' \subset L \ , \quad F \subset K \ , \quad \Phi' \subset F'$$

F' et K sont linéairement disjoints sur F .



Démonstration. - Soient $F_0 = \Phi$, $F'_0 = \Phi'$. Supposons F_k et F'_k définis ; pour chaque ensemble fini d'éléments de F'_k linéairement dépendants sur K est linéairement indépendants sur F_k , nous fixons une relation de dépendance sur K de ces éléments ; nous prenons pour F_{k+1} le corps engendré sur F_k par les coefficients (éléments de K) de ces relations (des éléments de F'_k linéairement dépendants sur K le sont donc aussi sur F_{k+1}) ; soit $F'_{k+1} = F'_k(F_{k+1})$. Il est clair que les corps :

$$F = \bigcup_{k \in \underset{\sim}{N}} F_k \qquad F' = \bigcup_{k \in \underset{\sim}{N}} F'_k$$

satisfont aux conditions souhaitées.

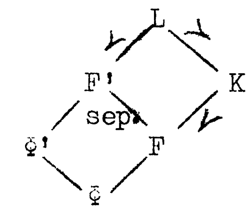
3.3. LEMME. - Soient des corps Φ et Φ' , des modèles de SCF_n L et K satisfaisant à

$$\Phi \subset \Phi' \subset L \ , \quad \Phi \subset K \prec L \ , \quad \Phi' \text{ est dénombrable .}$$

Alors, il existe des modèles dénombrables de SCF_n , F et F' , satisfaisant à

$$\Phi \subset F \subset F' \prec L \ , \quad \Phi \subset F \prec K \prec L \ , \quad \Phi' \prec F'$$

F' est séparable sur F et F' et K sont linéairement disjoints sur F .



Démonstration. - Soient $F_0 = \Phi$, $F'_0 = \Phi'$. Supposons F_{2k} et F'_{2k} définis ; soient F_{2k+1} et F'_{2k+1} deux corps satisfaisant à la conclusion du lemme 3.2 pour $\Phi = F_{2k}$, $\Phi' = F'_{2k}$; soient F_{2k+2} une sous-structure élémentaire dénombrable de K , contenant F_{2k+1} , et F'_{2k+2} une sous-structure élémentaire dénombrable de L , contenant $F'_{2k+1} \cup F_{2k+2}$; les corps :

$$F = \bigcup_{k \in \underset{\sim}{N}} F_k \ , \qquad F' = \bigcup_{k \in \underset{\sim}{N}} F'_k$$

satisfont aux conditions souhaitées. En effet, des égalités

$$F = \bigcup_{k\in \mathbb{N}-\{0\}} F_{2k} \ , \quad F' = \bigcup_{k\in \mathbb{N}-\{0\}} F'_{2k} \ ,$$

on déduit $F' \prec L$ et $F \prec K$, donc F et F' sont des modèles de $S\,C\,F_n$ (puisque K et L en sont), et F est une sous-structure élémentaire de L , donc L est séparable sur F , donc F' est séparable sur F . Des égalités

$$F = \bigcup_{k\in \mathbb{N}} F_{2k+1} \ , \quad F' = \bigcup_{k\in \mathbb{N}} F'_{2k+1} \ ,$$

on déduit que F' et K sont linéairement disjoints sur F .

3.4. LEMME. - Soient Φ et Φ' deux corps, K et L deux modèles de $S\,C\,F_n$ satisfaisant à $\Phi \subset K \prec L$, $\Phi' \subset L$, et Φ' est dénombrable. Alors, il existe des modèles dénombrables de $S\,C\,F_n$, F et F' tels qu'on ait

1° $\Phi \subset F \subset F' \prec L$, $\Phi \subset F \prec K$, $\Phi' \subset F'$,

2° F' est séparable sur F ,

3° K et F' sont linéairement disjoints sur F ,

4° Il existe une p-base de L , B , telle que $B \cap F$, $B \cap F'$ et $B \cap K$ sont respectivement des p-bases de F , F' et K .

Démonstration.

(a) Supposons d'abord n fini. D'après le lemme 3.3, il existe des corps F et F' satisfaisant aux conditions souhaitées à l'exception peut-être de la condition 4° . Mais si B est une p-base de F , d'après 1° et 2°, 1.9 et 1.11, puisque n est fini, B est aussi p-base de F' , K et L , d'où le 4°.

(b) Supposons maintenant n infini. D'après le lemme 3.3, il existe des corps F_0 et F'_0 satisfaisant les conditions voulues à l'exception peut-être du 4° . Soient A une p-base de F , B' une p-base de K contenant A , et B une p-base de L contenant B' . Supposons F_{2k} et F'_{2k} définis. Soit $F_{2k+1} = F_{2k}$. Pour chaque élément x de F'_{2k} , soit l'écriture de cet élément comme combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients dans L^p :

$$x = \sum_{i=0}^{m} (x_i)^p\, b_i \quad (x_i \in L \ , \quad b_i \in B)$$

soit $c(x) = \{x_0 , \dots , x_m , b_0 , \dots , b_m\}$; soit F'_{2k+1} le corps engendré sur F_{2k+1} par $\bigcup_{x\in F'_{2k}} c(x)$. Soient F_{2k+2} et F'_{2k+2} des corps satisfaisant à la conclusion de 3.3 pour $\Phi = F_{2k+1}$ et $\Phi' = F'_{2k+1}$. Les corps :

$$F = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F_{2n} = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F_{2n+1}$$

$$F' = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F'_n = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F'_{2n} = \bigcup_{n\in \mathbb{N}} F'_{2n+1}$$

satisfont aux conditions souhaitées.

3.5. - Soient K et L deux modèles de SCF_n avec $K \subset L$ (donc $K \prec L$, d'après 2.3). Soient α un élément de L, et

$$\Phi = \underset{\sim}{F}_p \ , \quad \Psi' = \underset{\sim}{F}_p(\alpha) \ .$$

Soient F_α et F'_α deux corps satisfaisant à la conclusion de 3.4.

3.6. LEMME. - Avec les notations de 3.5, soient α et β deux éléments de L. Si on a $F_\alpha = F_\beta$, et que F'_α et F'_β sont F_α-isomorphes par un isomorphisme qui envoie α sur β, alors α et β réalisent le même 1-type sur K.

Démonstration. - K et F'_α d'une part, K et F'_β d'autre part étant linéairement disjoints sur $F_\alpha = F_\beta$, il résulte des hypothèses que $K(F'_\alpha)$ et $K(F'_\beta)$ sont K-isomorphes par un isomorphisme qui envoie α sur β. Si B est une p-base de L comme dans 4°, $B' = (B \cap K) \cup (B \cap F'_\alpha)$ est une p-base de $K(F'_\alpha)$ (car p-libre dans $K(F'_\alpha)$ puisque p-libre dans L qui est une extension de $K(F'_\alpha)$, et p-génératrice car $B \cap K$ est p-génératrice dans K et $B \cap F'_\alpha$ dans F'_α). Donc, $K(F'_\alpha)$ (qui a une p-base p-libre dans L) est une sous-structure de L pour le langage $\mathcal{L}$ (1.11), donc d'après l'isomorphisme de $K(F'_\alpha)$ et $K(F'_\beta)$, et d'après 2.6, α et β ont même 1-type sur K.

3.7. COROLLAIRE. - Pour tout entier naturel n, SCF_n **est stable.**

Démonstration. - Soit L un modèle de SCF_n, et K un sous-modèle de L. D'après 3.5, le cardinal de l'ensemble des 1-types sur K réalisés dans L est au plus celui des paires de parties dénombrables de L, c'est-à-dire $|K|^{\aleph_0}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERŠOV (Yu. L.). - Fields with a solvable theory, Soviet Math. Doklady, t. 8, 1967, p. 575-576.

[2] JACOBSON (N.). - Lectures in abstract algebra, vol. III, Theory of fields and Galois theory. - Princeton, Toronto, London [etc.], D. Van Nostrand Company, 1964 (University Series in higher Mathematics).

[3] SHELAH (S.). - The logic model-theorician's guide to stability, Logique et Analyse, nouvelle série, t. 71-72, 1975, p. 241-308.

[4] WOOD (C.). - Notes on the stability of separably closed fields, J. of symb. Logic, t. 44, 1979, p. 412-416.