GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

FRANÇOIS GRAMAIN

Non-minimalité de la clôture différentielle II : la preuve de M. Rosenlicht

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A5_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 5, 7 p.

NON-MINIMALITÉ DE LA CLÔTURE DIFFÉRENTIELLE
II : LA PREUVE DE M. ROSENLICHT

par François GRAMAIN (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

1. L'espace des différentielles de Kähler.

Soit $\mathbb{Q} \subset k \subset K$ des corps, et E un K-espace vectoriel.

Définition. - Une application $\lambda : K \dashrightarrow E$ est une k-dérivation de E si on a

$$\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)\ , \quad \lambda(xy) = x\ \lambda(y) + y\ \lambda(x)$$

pour tout $(x\ ,\ y) \in K^2$ et $\lambda\,|_k = 0$.

On définit alors $\Omega^1_{K/k}$, l'espace des k-différentielles de K (ou différentielles de Kähler) et $d : K \dashrightarrow \Omega^1_{K/k}$ comme la solution du problème universel suivant :

Trouver un K-espace vectoriel Ω , et $d : K \dashrightarrow \Omega$ une k-dérivation tels que, pour tout K-espace vectoriel E et pour toute k-dérivation $\lambda : K \dashrightarrow E$, il existe une unique application K-linéaire $\xi_\lambda : \Omega \dashrightarrow E$ telle que $\lambda = \xi_\lambda \circ d$.

On peut réaliser $\Omega^1_{K/k}$ de la manière suivante : Soit $\mathcal{K}$ le K-module libre sur les symboles $\{\delta x\ ;\ x \in K\}$, et soit $\mathcal{M}$ le sous-K-module engendré par

$$\{\delta(x + y) - \delta x - \delta y\ ,\ \delta(xy) - x\delta y - y\delta x\ ,\ \delta a\ ;\ a \in k\ ,\ x\ ,\ y \in K\}\ .$$

En d'autres termes, $\mathcal{M}$ est le plus petit sous-K-module de $\mathcal{K}$ tel que la composée d de la projection canonique $\mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{M}$ et de $\delta : K \dashrightarrow \mathcal{K}$ soit une k-dérivation. On vérifie alors facilement que $\Omega = \mathcal{K}/\mathcal{M}$ et d sont solution du problème universel. En particulier, le K-espace vectoriel $\Omega^1_{K/k}$ est engendré par l'ensemble des dx $(x \in K)$.

PROPOSITION 1. - <u>On a</u> $\dim_K \Omega^1_{K/k} = \deg\, \mathrm{tr}_k\, K$. <u>Plus précisément, si</u> $(t_1\ ,\ \dots\ ,\ t_n)$ <u>est une base de transcendance de</u> K <u>sur</u> k , <u>alors</u> $(dt_1\ ,\ \dots\ ,\ dt_n)$ <u>est une base de</u> $\Omega^1_{K/k}$ <u>sur</u> K .

Démonstration. - Si $x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n \in K$ sont algébriquement dépendants sur k , soit $P \in k[X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_n]$ un polynôme non nul, tel que $P(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n) = 0$. Quitte à réindexer les x_i , supposons que P est de degré minimal en X_1 et que ce degré est $\geqslant 1$. Comme d est une k-dérivation, on a

---

(*) François GRAMAIN, 31 rue Parmentier, 94550 CHEVILLY-LARUE.

$$0 = d(P(x_1 , \dots , x_n)) = \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial P}{\partial x_i} (x_1 , \dots , x_n)\, dx_i \,.$$

Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire entre les dx_i , à coefficients dans K , et elle est non triviale car $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ $(x_1 , \dots , x_n) \neq 0$, d'après les hypothèses faites sur P .

Cela montre, en particulier, que si $(t_1 , \dots , t_n)$ est une base de transcendance de K sur k , alors $(dt_1 , \dots , dt_n)$ engendre $\Omega^1_{K/k}$.

Inversement, supposons que $t_1 , \dots , t_n \in K$ sont algébriquement indépendants sur k . Nous allons montrer que les dt_i sont K-linéairement indépendants. Pour tout i , il existe une k-dérivation D_i de K telle que $D_i(t_j) = \delta_{ij}$ (où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$). En effet, soit $\{t_j\}_{j\in I}$ (où $I \supset \{1,2,\dots,n\}$) une base de transcendance de K sur k . Il est facile de construire $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ sur l'anneau de polynômes $k[\{t_j\}_{j\in I}]$, de l'étendre au corps des fractions rationnelles $k(\{t_j\}_{j\in I})$ et, l'extension $K/k(\{t_j\}_{j\in I})$ étant algébrique, D_i s'étend à K ([Bo], chapitre V, § 16).

Soit alors $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, dt_j = 0$ avec des $\lambda_j \in K$ une relation de dépendance linéaire entre les dt_j . La propriété universelle de $(\Omega^1_{K/k} , d)$ fournit un ξ_i K-linéaire associé à D_i . On a donc

$$\xi_i(\sum_{1\leq j\leq n} \lambda_j\, dt_j) = 0 = \sum_{1\leq j\leq n} \lambda_j\, D_i(t_j) = \lambda_i \,,$$

et la relation de dépendance linéaire est triviale : les dt_j sont K-linéairement indépendants.

PROPOSITION 2. - <u>Pour toute dérivation</u> $D : K \to K$ <u>telle que</u> $D(k) \subset k$, <u>il existe une application</u> $D^1 : \Omega^1_{K/k} \to \Omega^1_{K/k}$ <u>vérifiant</u> $D^1(\omega + \eta) = D^1\omega + D^1\eta$ $D^1(x\omega) = (Dx)\,\omega + x\, D^1\omega$, $D^1(dx) = d(Dx)$, <u>pour tous</u> $\omega , \eta \in \Omega^1_{K/k}$ <u>et</u> $x \in K$.

<u>Démonstration</u>. - Reprenons les notations ci-dessus relatives à la réalisation de $\Omega^1_{K/k}$. On définit d'abord $D' : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ par

$$D'(\sum_i x_i\, \delta y_i) = \sum_i ((Dx_i)\, \delta y_i + x_i\, \delta(Dy_i)) \,.$$

Il est clair que $D'\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, donc que D' induit une application $D^1 : \mathcal{K}/\mathfrak{M} \to \mathcal{K}/\mathfrak{M}$. On vérifie immédiatement que D^1 a les propriétés annoncées.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> D <u>une dérivation de</u> K <u>telle que</u> $D(k) \subset k$, <u>et soit</u> $C = k \cap \operatorname{Ker} D$ <u>le corps des constantes de</u> K <u>muni de la dérivation</u> D . <u>Alors, si</u> x <u>et</u> $y \in K$ <u>sont algébriquement dépendants sur</u> C , <u>on a</u> $D^1(x\,dy) = d(x\,Dy)$.

<u>Démonstration</u>. - C'est le lemme 1 de [R1], et il y en a une autre preuve dans [R2] (Proposition 5), où on trouvera tous les résultats de ce premier paragraphe.

Par définition de D^1 , on a

$$D^1(x\ dy) = D(x)\ dy + x\ D^1(dy) = D(x)\ dy + x\ d(Dy)$$

et d étant une dérivation, on a $d(x\ Dy) = D(y)\ dx + x\ d(Dy)$. Il suffit donc de montrer que $D(x).dy = D(y).dx$.

Si x et y sont algébriques sur C, alors $dx = dy = 0$ (voir la Proposition 1) et le résultat est prouvé.

Sinon, on peut supposer x transcendant sur C. Soit $P \in C[X, Y]$ irréductible tel que $P(x, y) = 0$. Alors $P(x, Y)$ est irréductible sur $C(x)$ et $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \neq 0$. Appliquons d et D à l'égalité $P(x, y) = 0$. Puisque $C \subset \operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} d$, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x, y)\ dx + \frac{\partial P}{\partial Y}(x, y)\ dy = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^1_{K/k}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X}(x, y)\ Dx + \frac{\partial P}{\partial Y}(x, y)\ Dy = 0 \quad \text{dans} \quad K.$$

Comme $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y) \neq 0$, on en déduit $D(x).dy = D(y).dx$.

Remarque. - Il ne faut pas interpréter cela comme un système linéaire homogène en les inconnues $\frac{\partial P}{\partial X}(x, y)$ et $\frac{\partial P}{\partial Y}(x, y)$ dont le déterminant serait nul, puisque l'une des équations concerne des éléments du corps K et l'autre des vecteurs de $\Omega^1_{K/k}$, mais il suffit de calculer $D(y)$ et dy à l'aide de ces deux équations.

PROPOSITION 4. - *Soit u_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et v des éléments de K, avec $u_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et $c_1, \dots, c_n$, n éléments de k, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors $c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \in \Omega^1_{K/k}$ est nul si, et seulement si, $d\,u_1 = \dots = d\,u_n = dv = 0$ (i. e. $u_1, \dots, u_n$ et v algébriques sur k).*

Démonstration. - La parenthèse est conséquence de la proposition 1. On peut supposer que $K = k(u_1, \dots, u_n, v)$, et il suffit de prouver que si u_1 est transcendant sur k, alors $\omega = c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \neq 0$. Soit $(u_1, t_2, \dots, t_m)$ une base de transcendance de K sur k. La propriété universelle de $\Omega^1_{K/k}$ appliquée à la dérivation $K \dashrightarrow \Omega^1_{K/k(t_2,\dots,t_m)}$ fournit un homomorphisme $\varphi : \Omega^1_{K/k} \dashrightarrow \Omega^1_{K/k(t_2,\dots,t_m)}$, et si $\varphi(\omega) \neq 0$, alors $\omega = 0$. On peut donc, quitte à remplacer k par $k(t_2, \dots, t_m)$, supposer K algébrique sur $k(u_1)$. On peut aussi, quitte à agrandir K, supposer que l'extension $K/k(u_1)$ est galoisienne. Alors, si $\omega = 0$, pour tout $\sigma \in \operatorname{Gal}(K/k(u_1))$, on a

$$\omega^\sigma = c_1 \frac{d\sigma u_1}{\sigma u_1} + \dots + c_n \frac{d\sigma u_n}{\sigma u_n} + d\sigma v = 0,$$

et en ajoutant toutes ces égalités on obtient une égalité du type $\omega = 0$, où c_1 est remplacé par $c_1[K : k(u_1)]$ et les u_i (pour $i \geqslant 2$) et v sont remplacés par des éléments de $k(u_1)$.

On s'est ramené à prouver que $\omega = c_1 \frac{du_1}{u_1} + \dots + c_n \frac{du_n}{u_n} + dv \neq 0$ si u_1 est transcendant sur k et $u_2, \dots, u_n$, $v \in K = k(u_1)$, c'est-à-dire dans le cas d'un corps de fractions rationnelles à une indéterminée. Le résultat est alors immédiat si on utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles : les c_i étant $\underline{Q}$-linéairement indépendants, dans l'expression de ω, il restera un terme en $\frac{du_1}{u_1}$ qui ne pourra pas disparaître.

C. Q. F. D.

Remarque. - L'astuce qui permet de se ramener au cas où $K = k(u_1)$ est un corps de fractions rationnelles (et qui apparaît dans [R2]) simplifie énormément la démonstration de ce résultat dû à James AX [A] qui devait utiliser la théorie des résidus sur les corps de fonctions algébriques d'une variable.

2. Le théorème de M. Rosenlicht [R1].

Nous donnons un énoncé qui généralise un peu (et sans difficulté !) la proposition 1 de [R1].

THÉORÈME. - Soit k un corps différentiel de caractéristique zéro, C le corps des constantes de k, et K une extension différentielle de k dont les constantes sont algébriques sur k. Soit $C(x)$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée sur C, et f un élément non nul de $C(x)$ tel que

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{1\leq i\leq n} c_i \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x}(x)}{u_i(x)} + \frac{\partial v}{\partial x}(x), \text{ où } c_i \in C \ (1 \leq i \leq n), \ u_i \text{ et } v \in C(x) .$$

Soit x_1 et $x_2 \in K$ des solutions respectives de $x_1' = a_1 f(x_1)$ et $x_2' = a_2 f(x_2)$, avec a_1 et $a_2 \in C^\times$. Si x_1 et x_2 sont algébriquement dépendants sur k, alors l'un des x_i $(1 \leq i \leq 2)$ est algébrique sur k, ou bien $a_2(v(x_1))' = a_1(v(x_2))'$.

Remarque. - Rappelons qu'une extension différentielle K d'un corps différentiel k, muni de la dérivation $D : k \to k$, est un sur-corps K de k, muni d'une dérivation $D' : K \to K$ telle que $D'|_k = D$. Comme d'habitude, on notera $y' = D'(y)$ si $y \in K$. Dans [R1], Maxwell ROSENLICHT montre que l'hypothèse d'algébricité faite sur les constantes de K est superflue.

D'autre part, l'hypothèse faite sur f est toujours réalisée si C est algébriquement clos. Pour le voir, il suffit de décomposer $1/f(x)$ en éléments simples.

Démonstration. - Il est clair qu'on peut supposer $K = k(x_1, x_2)$. Si aucun des x_i n'est algébrique sur k et s'ils sont algébriquement dépendants sur k, on a $\deg \mathrm{tr}_k(K) = 1$, donc $\dim_K \Omega^1_{K/k} = 1$, d'après la proposition 1. Ainsi $\Omega^1_{K/k}$ est engendré par dx_j ou par $dx_j/f(x_j)$. Il existe donc $c \in K^\times$ tel que $dx_2/f(x_2) = c\, dx_1/f(x_1)$. On va montrer que c est une constante de K. Si on note D la dérivation de K qui en fait une extension différentielle de k, la proposition

3 appliquée à $x = 1/f(x_j)$ et $y = x_j$ montre que

$$D^1\left(\frac{dx_j}{f(x_j)}\right) = d\left(\frac{x_j'}{f(x_j)}\right) = d(a_j) = 0 ,$$

car $a_j \in k$.

Comme l'a remarqué Michel BRESTOVSKI, la proposition 3 est inutile pour obtenir ce résultat, mais elle simplifie seulement les calculs : En effet, l'application de la proposition 2 fournit, compte tenu des propriétés de d, le calcul suivant :

$$D^1\left(\frac{dx_j}{f(x_j)}\right) = D\left(\frac{1}{f(x_j)}\right) dx_j + \frac{1}{f(x_j)} D^1(dx_j) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)^2} x_j' \, dx_j + \frac{1}{f(x_j)} d(x_j')$$

$$= - a_j f(x_j) \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)^2} dx_j + \frac{1}{f(x_j)} d(a_j f(x_j)) = - a_j \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)} dx_j + a_j \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_j)}{f(x_j)} dx_j = 0 ,$$

où l'on a encore utilisé $d\, a_j = 0$ (pour le calcul de $d(a_j f(x_j))$). La généralisation de la proposition 3, donnée par Michel BRESTOVSKI [Br], pour l'étude d'équations différentielles d'ordre $\geqslant 2$, est plus utile car les calculs qu'elle simplifie sont beaucoup plus longs.

On a donc, d'après la proposition 2,

$$0 = D^1\left(\frac{dx_2}{f(x_2)}\right) = D^1\left(c \frac{dx_1}{f(x_1)}\right) = D(c) \frac{dx_1}{f(x_1)} + c\, D^1\left(\frac{dx_1}{f(x_1)}\right) = D(c) \frac{dx_1}{f(x_1)} ,$$

d'où $D(c) = c' = 0$, et c est une constante de K, donc un élément algébrique sur k.

Utilisons maintenant la forme de f :

$$\frac{dx_j}{f(x_j)} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x}(x_j)}{u_i(x_j)} dx_j + \frac{\partial v}{\partial x}(x_j)\, dx_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i \frac{d(u_i(x_j))}{u_i(x_j)} + d(v(x_j)) ,$$

car d est une k-dérivation de K. On a donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i \frac{d(u_i(x_2))}{u_i(x_2)} + d(v(x_2)) = c\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i \frac{d(u_i(x_1))}{u_i(x_1)} + d(v(x_1))\right) ,$$

mais c est algébrique sur k, donc $dc = 0$ (proposition 1), et on en déduit

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\left(\frac{d(u_i(x_2))}{u_i(x_2)} - \frac{d(c\, u_i(x_1))}{u_i(x_1)}\right) + d(v(x_2) - c\, v(x_1)) = 0 .$$

La proposition 4 montre alors que $d(v(x_2) - c\, v(x_1)) = 0$, d'où l'on tire

$$a_1(v(x_2))' = a_1 \frac{\partial v}{\partial x}(x_2).x_2' = a_1 a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_2) f(x_2) = a_1 a_2 \frac{d(v(x_2))}{dx_2/f(x_2)}$$

$$= a_1 a_2 \frac{c\, d(v(x_1))}{c\, dx_1/f(x_1)} = a_1 a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_1) f(x_1) = a_2 \frac{\partial v}{\partial x}(x_1).x_1' = a_2(v(x_1))' ,$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> C <u>un corps de constantes de caractéristique zéro, et</u> $f(x) = x(1+x)^{-1}$ <u>(ou</u> $f(x) = x^3 - x^2$). <u>Soit</u> $\hat{C}$ <u>la clôture différentielle de</u> C , <u>et</u> $x_1, \ldots, x_m \in \hat{C}$ <u>des solutions distinctes non constantes de</u> $x_i' = a_i\, f(x_i)$, <u>où</u> $a_i \in C^{\times}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. <u>Alors</u> $x_1, \ldots, x_m$ <u>sont algébriquement indépendants sur</u> C .

<u>Remarque</u>. - Comme on l'a dit dans l'exposé précédent [G], cela montre que la clôture différentielle $\hat{C}$ de C n'est pas minimale.

<u>Démonstration</u>. - On peut appliquer le théorème aux fractions rationnelles $f(x) = x(1+x)^{-1}$ et $f(x) = x^3 - x^2$, car

$$\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1 = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)}{x} + \frac{\partial}{\partial x}(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\partial x\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\frac{(x-1)}{x}} + \partial x\left(\frac{1}{x}\right) .$$

On a alors $v(x) = x$ (resp. $v(x) = 1/x$) , d'où $(v(x_1))' = x_1' = a_1\, x_1(1+x_1)^{-1}$ (resp. $(v(x_1))' = -x_1'/x_1^2 = -a_1(x_1^3 - x_1^2)/x_1^2 = -a_1(x_1 - 1)$) . Ainsi l'égalité $a_1(v(x_2))' = a_1(v(x_1))'$ se traduit, dans les deux cas, par $x_1 = x_2$. De plus, les seules solutions constantes de $x_i' = a_i\, f(x_i)$ vérifient $f(x_i) = 0$, donc sont 0 (resp. 0 et 1) .

Montrons alors le corollaire par l'absurde : Soit $x_1, \ldots, x_n \in \hat{C}$ des solutions distinctes, non constantes de $x_i' = a_i\, f(x_i)$ et algébriquement dépendantes sur C , avec n minimal.

Si $n = 1$, $x_1 \in \bar{C}$ qui est le corps des constantes de $\hat{C}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $n \geqslant 2$, alors x_n et x_{n-1} sont algébriquement dépendants sur $k = C(x_1, \ldots, x_{n-2})$ et les constantes de $K = \hat{C}$ sont les éléments de $\bar{C}$, clôture algébrique de C , donc algébriques sur k . On peut ainsi appliquer le théorème, qui, d'après ce qui précède, fournit $x_n = x_{n-1}$, c'est-à-dire la contradiction cherchée.

C. Q. F. D.

Dans [R1], Maxwell ROSENLICHT donne ce résultat avec des a_i tous égaux à 1 . Il est intéressant d'introduire ces constantes a_i car, alors, le théorème permet de montrer que si $\varkappa$ est un cardinal infini non dénombrable, il existe $2^{\varkappa}$ corps différentiellement clos (de caractéristique zéro) non isomorphes et de cardinal $\varkappa$. La preuve de ce dernier résultat est due à Saharon SHELAH [S], et on peut la trouver dans l'article de Carol WOOD [W]. Si $\varkappa = \aleph_0$ est dénombrable, le problème du nombre de corps différentiellement clos de caractéristique zéro et de cardinal $\aleph_0$ est encore ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[A] AX (James). - On Schanuel's conjectures, Annals of Math., t. 93, 1971, p. 252-268.

[Bo] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, chapitres 4 à 7. - Paris, Masson, 1981.

[Br] BRESTOVSKI (Michel). - Indépendance algébrique de solutions d'équations différentielles, Thèse 3e cycle, ou C. R. Acad. Sc., t. 294, 1982, p. 609-612.

[G] GRAMAIN (François). - Non-minimalité de la clôture différentielle, I : la preuve de S. Shelah, Groupe d'étude de Théories stables, 3e année, 1981/82, n° 4, 9 p.

[R1] ROSENLICHT (Maxwell). - The non-minimality of the differential closure, Pacific J. of Math., t. 52, 1974, p. 529-537.

[R2] ROSENLICHT (Maxwell). - On Liouville's theory of elementary functions, Pacific J. of Math., t. 65, 1976, p. 485-492.

[S] SHELAH (Saharon). - Differentially closed fields, Israel J. of Math., t. 16, 1973, p. 314-328.

[W] WOOD (Carol). - The model theory of differential fields revisited, Israel J. of Math., t. 25, 1976, p. 331-352.