GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

FRANÇOIS GRAMAIN

Non-minimalité de la clôture différentielle I : la preuve de S. Shelah

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A4_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
Vol. 3, 1980-1982, n° 4, 9 p.

NON-MINIMALITÉ DE LA CLÔTURE DIFFÉRENTIELLE

I : LA PREUVE DE S. SHELAH

par François GRAMAIN (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

1. Définitions et résultat.

Un corps différentiel K est un corps commutatif muni d'une dérivation, c'est-à-dire d'une application $D : K \to K$ vérifiant

$$D(x + y) = D(x) + D(y) \quad \text{et} \quad D(xy) = x\, D(y) + y\, D(x) \quad (\text{pour tout } (x , y) \in K^2) .$$

On a l'habitude de noter x' au lieu de $D(x)$. Alors $C(K) = \{x \in K ; x' = 0\}$ est évidemment un corps, le corps des constantes de K. Dans tout cet exposé, on ne considère que des corps de caractéristique zéro, donc $\mathbb{Q} \subset C(K)$.

Exemples.

- C, un corps de constantes, est un corps différentiel (en abrégé c. d.),
- $C(X)$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée,
- le corps des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$,
- $F = \bigcup_{t \in \mathbb{R}, \varphi > 0} \{f$ méromorphes sur $\operatorname{Re} z < t$, $|\operatorname{Im} z| < \varphi\}$.

Dans ces trois derniers exemples, la dérivation est la dérivation habituelle des fonctions.

On dit qu'un c. d. K est différentiellement clos si tout système formé d'une équation différentielle $P(x , x' , x'' , \dots , x^{(n)}) = 0$ (où $P \in K[X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots]$) et d'une inéquation d'ordre inférieur, $Q(x , x' , \dots , x^{(n-1)}) \neq 0$ a une solution $x \in K$.

Un des intérêts de cette notion est le fait qu'on a un "Nullstellensatz" pour les corps différentiellement clos.

Soit K un c. d. ; on appelle clôture différentielle de K un surcorps différentiel $\hat{K}$ de K tel que $\hat{K}$ soit différentiellement clos et que, pour tout surcorps différentiel différentiellement clos L de K, $\hat{K}$ soit K-isomorphe (en tant que c. d.) à un sous-corps de L.

L'existence d'une telle clôture a été montrée par L. BLUM [Bl] en 1968, et son unicité (à K-isomorphisme près) par S. SHELAH [Sh 1] en 1972. On peut montrer que le

---

(*) François GRAMAIN, 31 rue Parmentier, 94550 CHEVILLY-LARUE.

corps $C(\hat{K})$ des constantes de $\hat{K}$ est la clôture algébrique $\overline{C(K)}$ du corps des constantes de K .

En 1973, indépendamment les uns des autres, E. R. KOLCHIN [K], M. ROSENLICHT [R] et S. SHELAH [Sh 2] ont montré que la clôture différentielle d'un c. d. de caractéristique zéro n'est pas (en général) minimale, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à un de ses sous-corps propres (on a donc une chaîne infinie strictement décroissante de sous-corps différentiels de $\hat{K}$, tous isomorphes à $\hat{K}$, en tant que corps différentiels).

Pour obtenir ce résultat, il suffit de construire une équation différentielle polynômiale à coefficients constants (par exemple à coefficients rationnels) $P(x , x') = 0$ telle que, si $x_1 , \dots , x_n$ sont n solutions distinctes non constantes, alors elles sont algébriquement indépendantes (sur $\mathbb{Q}$). En effet, d'après un résultat de G. SACKS [Sa] des éléments algébriquement indépendants sont "indiscernables", ce qui permet de montrer la non-minimalité de $\hat{\mathbb{Q}}$.

Les équations différentielles utilisées sont

$$x'(1 + x) - x = 0 \qquad ([R] \text{ et } [Sh2])$$

et

$$x' = x^3 - x^2 \qquad ([K] \text{ et } [R]).$$

La preuve de E. R. KOLCHIN consiste en de l'algèbre élémentaire sur les polynômes (avec des calculs assez compliqués) et semble peu susceptible de généralisations. Celle de M. ROSENLICHT utilise un "arsenal" algébrique qui peut s'appliquer à un grand nombre d'équations et a donné lieu à des généralisations récentes et très intéressantes [Br] ; elle fait l'objet de l'exposé suivant de ce recueil. Quant à celle de S. SHELAH, elle utilise un modèle de c. d. formé de fonctions méromorphes (le corps F donné en exemple ci-dessus) et des résultats de théorie des nombres transcendants. Dans cet exposé, nous explicitons cette démonstration et les résultats profonds sur lesquels elle repose. Il s'agit donc de montrer le lemme 4 de [Sh2] qui est le suivant :

THÉORÈME. - <u>Soit</u> K <u>un corps différentiel de caractéristique zéro et</u> $y_1, \cdots, y_n \in K$ n <u>solutions non nulles</u> (<u>i. e. non constantes</u>) <u>de</u> $y' = y/(1 + y)$. <u>Alors</u> $y_1, \cdots, y_n$ <u>sont algébriquement indépendants sur la clôture algébrique</u> $\overline{\mathbb{Q}}$ <u>de</u> $\mathbb{Q}$.

2. Deux résultats de base et quelques lemmes.

Le premier résultat de base utilisé par S. SHELAH est le théorème de Puiseux.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $P \in \mathbb{C}[X_1 , \dots , X_n , Y]$ <u>un polynôme de degré</u> ≥ 1 <u>en</u> Y . <u>Si</u> $f_1 , \dots , f_n$ <u>sont des fonctions analytiques sur le disque</u> $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < r\}$, <u>il existe un réel</u> $r' > 0$, <u>un entier</u> $k > 0$ <u>et une fonction</u> (<u>série de Puiseux</u>)

$$f(z) = \sum_{\nu=\nu_0}^{+\infty} a_\nu z^{\nu/k} \quad (\text{où } \nu_0 \in \mathbb{Z})$$

analytique en la variable $z^{1/k}$ sur $\{z \in \mathbb{C} ;\ 0 < |z| < r'\}$, telle que $P(f_1 , \dots , f_n ; f) = 0$ pour $0 < |z| < \min(r , r')$. En particulier, f est analytique en z sur $\{z \in \mathbb{C} ;\ 0 < |z| < r' ,\ |\arg z| < \varphi\}$ pour tout $\varphi \leq \pi$.

On trouvera la preuve de ce théorème dans [P] (volume 2, chapitre 13). Il s'agit d'un théorème des fonctions implicites, dont la version algébrique (i. e. si l'on ne s'interesse pas à la convergence des séries) est le fait que, si k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, la clôture algébrique du corps $k((T))$ des séries formelles est le corps $\bigcup_{n\geq 1} k((T^{1/n}))$ des séries de Puiseux (voir, par exemple [W]).

Le deuxième résultat de base est le théorème de Lindemann-Weierstrass.

THÉORÈME 2. - Soit $\alpha_1 , \dots , \alpha_n \in \bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ n nombres algébriques distincts. Alors les e^{α_i} $(1 \leq i \leq n)$ sont $\bar{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

On utilisera en fait son corollaire immédiat.

COROLLAIRE. - Soit $\alpha_1 , \dots , \alpha_n \in \bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors les e^{α_i} $(1 \leq i \leq n)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (ou $\bar{\mathbb{Q}}$).

La démonstration repose sur les propriétés analytiques de la fonction exponentielle et généralise la preuve par HERMITE de la transcendance de e et celle par LINDEMANN de la transcendance de π (voir, par exemple, [Ba] chapitre 1).

Le principe de la démonstration du théorème de S. Shelah est de montrer le résultat dans F , puis d'utiliser un argument de transfert pour obtenir le théorème général. On doit donc étudier certaines solutions analytiques de l'équation différentielle considérée.

LEMME 1. - Soit $y \neq 0$ une solution de l'équation $y'(1 + y) = y$ analytique sur un ouvert connexe $D \subset \mathbb{C}$. Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $y(z)\, e^{y(z)} = e^{z+c}$ pour tout $z \in D$.

Il existe une unique solution $f_0(z)$ analytique sur $\{\operatorname{Re} z < - t_0\}$ (avec $t_0 > 0$ assez grand) vérifiant $f_0(z)\, e^{f_0(z)} = e^z$ et $f_0(z) \to 0$ quand $\operatorname{Re} z \to - \infty$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$ avec $x < - t_0$, on a $f_0(x) \in \mathbb{R}$.

Soit $y \neq 0$ une solution analytique sur $D_{t,\varphi} = \{z \in \mathbb{C} ;\ \operatorname{Re} z < - t ,\ |\operatorname{Im} z| < \varphi\}$ (où t et φ sont deux réels avec $\varphi > 0$) vérifiant $y \to 0$ quand $\operatorname{Re} z \to - \infty$ Alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $y(z) = f_0(z + c)$ et, pour $\operatorname{Re} z \to - \infty$, on a $y = e^{z+c}(1 + o(1))$.

Démonstration. - Si $y = y(z)$ est une solution de l'équation $y'(1 + y) = y$, analytique sur D , alors $g(z) = y \exp(y)$ est analytique sur D et $g'(z) = (1 + y)\, y' \exp(y) = y \exp(y) = g(z)$, donc, puisque $g \neq 0$, on a

$g(z) = \exp(z + c)$.

La fonction entière $\varphi(z) = z \exp(z)$ a pour dérivée à l'origine $\varphi'(0) = (1 + z) \exp(z)]_{z=0} = 1$, donc elle est injective au voisinage de 0 , et c'est une application ouverte. Elle induit donc un isomorphisme analytique, noté encore φ , d'un voisinage V de 0 sur un voisinage de 0 , par exemple $\{z \in \underset{\sim}{C} \ ; \ |z| < \exp(-t_0)\} = W$. Si on choisit V assez petit, i. e. t_0 assez grand, φ et φ^{-1} conservent les réels. En effet, il est clair que $\varphi(\underset{\sim}{R}) \subset \underset{\sim}{R}$. Inversement, pour $\rho < 1$, on a

$$\varphi(\rho\, e^{i\vartheta}) = \rho \exp(\cos \vartheta + i(\vartheta + \rho \sin \vartheta))$$

et la fonction $\vartheta \mapsto \vartheta + \rho \sin \vartheta$ est croissante sur $]0 , \pi[$ d'image $]0 , \pi[$. Cela montre que $\varphi^{-1}(V \cap \underset{\sim}{R}) \subset \underset{\sim}{R}$.

Soit f_0 une solution de l'équation différentielle, analytique sur $D = \{z \in \underset{\sim}{C} \ ; \ \operatorname{Re} z < -t_0\}$, tendant vers zéro quand $\operatorname{Re} z \to -\infty$ et telle que $f_0(z) \exp(f_0(z)) = \exp(z)$. Soit $\log$ une détermination analytique du logarithme qui envoie $W' = \{z \in \underset{\sim}{C} \ ; \ |z| < \exp(-t_0)\} \setminus \{z \in \underset{\sim}{R} \ ; \ z < 0\}$ dans D . Alors $\varphi \circ f_0 \circ \log$ est l'identité sur W' , donc $f_0 \circ \log = \varphi^{-1}$ et $f_0 = \varphi^{-1} \circ \exp$, d'où l'unicité de f_0 et le fait qu'elle soit périodique de période $2i\pi$.

Enfin, si y est une solution analytique sur $D_{t,\varphi}$, telle que $y \to 0$ quand $\operatorname{Re} z \to -\infty$, il existe $c \in \underset{\sim}{C}$ tel que $y \exp(y) = \exp(z + c)$. Alors $f(z) = y(z - c)$ est une solution analytique sur un translaté de $D_{t,\varphi}$, et elle vérifie $f \exp(f) = \exp(z)$ et $f \to 0$ quand $\operatorname{Re} z \to -\infty$. Un raisonnement analogue au précédent montre que f coincide avec f_0 sur son domaine de définition, donc que $y = f_0(z + c)$.

De plus, pour $\operatorname{Re} z \to -\infty$, $y \to 0$, donc $\exp(y) \to 1$ et $y(1+o(1)) = \exp(z+c)$, ce qui achève la preuve du lemme.

C. Q. F. D.

On utilisera aussi le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $Q \in \underset{\sim}{Q}[X_1 , \ldots , X_n , Y]$ <u>un polynôme de degré</u> ≥ 1 <u>en</u> Y . <u>Il existe des intervalles ouverts non vides</u> $I_i \subset \underset{\sim}{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>et un réel</u> t_1 <u>tels que, si</u> $b_i \in I_i$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>et</u> $Q(e^{b_1} , \ldots , e^{b_n} , e^{b}) = 0$, <u>alors</u> $\max(b_i , \operatorname{Re} b) \leq t_1$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $b_1^0 , \ldots , b_n^0 \in \underset{\sim}{R}$ tels que les $\exp(b_i^0)$ soient algébriquement indépendants sur $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ (leur existence est conséquence du théorème 2). Si les b_i restent dans des intervalles assez petits contenant respectivement les b_i^0 , par continuité, les coefficients de $Q(\exp(b_1) , \ldots , \exp(b_n) , Y) \in \underset{\sim}{C}[Y]$ restent non nuls. Alors $\exp(b)$, qui est fonction continue de ces coefficients, reste borné, d'où le résultat annoncé. On peut évidemment remplacer t_1 par n'importe quel réel

$> t_1$, donc choisir $t_1 \geqslant 0$.

C. Q. F. D.

3. La preuve du théorème.

Expliquons d'abord l'idée de la démonstration, qui se fait par récurrence sur n .

Quitte à rajouter des constantes à K , on peut supposer que $K \supset \bar{\mathbb{Q}}$, le corps des nombres algébriques. Soit $y_1, \dots, y_n \in K$ des solutions algébriquement indépendantes sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de l'équation $y'(1+y) = y$, et soit $y \in K$ une solution, non nulle et algébrique sur $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n)$. Soit $P \in \bar{\mathbb{Q}}[y_1, \dots, y_n][Y]$ le polynôme minimal de y . Il s'agit de voir que, pour un certain i $(1 \leq i \leq n)$, on a $P = Y - y_i$. Pour cela on réalise cette situation dans le corps différentiel $F = \bigcup_{t \in \mathbb{R}, \varphi > 0} \{f \; ; \; f$ méromorphe sur $D_{t,\varphi}\}$. Le paragraphe 2 permet de trouver $f_1, \dots, f_n \in F$, algébriquement indépendantes sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et solutions de $y'(1+y)=y$, et $f \in F$ telle que $P(f_1, \dots, f_n, f) = 0$. On a donc un isomorphisme de corps (pas encore de corps différentiels) entre $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n, y)$ et $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \cdots, f_n, f)$. Mais le premier corps est un sous-corps différentiel de K , et $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n)$ est isomorphe en tant que corps différentiel à $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n)$ muni de la dérivation des fonctions analytiques, car les y_i et les f_i sont solutions de la même équation différentielle du premier ordre. Or $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n, f)$ est une extension algébrique de $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n) \simeq \bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n)$, la dérivation sur $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n)$ s'étend donc de manière unique en une dérivation sur $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \cdots, f_n, f)$ qui de plus, en fait un corps différentiel isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n, y)$ (voir [B6], chapitre V, § 16). Or la dérivation, au sens des fonctions analytiques, est aussi une dérivation de $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n, f)$. En effet, si

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in \bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n)[X]$$

est le polynôme minimal de f , par dérivation (au sens analytique), on a

$$f'(z)\left(\sum_{i=0}^{m} i\, a_i\, f^{i-1}(z)\right) + \sum_{i=0}^{m} a_i'\, f^i(z) = 0 ,$$

et comme le degré de f est exactement m , le coefficient de $f'(z)$ est non nul, et $f'(z) \in \bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n, f)$. Par suite ces deux dérivations coïncident, et $\bar{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_n, f) \subset F$ est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n, y) \subset K$, en tant que corps différentiel. Il en résulte que f est, comme y , solution de $y'(1+y) = y$. Il suffit donc de montrer que f est égal à l'un des f_i pour savoir que $y = y_i$, c'est-à-dire prouver le théorème.

Voici maintenant la démonstration du théorème :

Si $n = 1$, le résultat est immédiat, car un élément algébrique sur le corps $C(K)$ des constantes de K est lui-même constant (soit $X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m \in C(K)$ le polynôme minimal de y . Par dérivation de $y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m = 0$, on obtient $y'(m\, y^{m-1} + \dots + a_{m-1}) = 0$, d'où $y' = 0$ puisque le degré de y sur $C(K)$ est m), et car la seule solution constante de $y'(1+y) = y$ est $y = 0$.

Sinon, soit $y_1, \dots, y_n \in K$ des solutions algébriquement indépendantes sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de $y'(1+y) = y$, et $y \in K$ une solution non nulle, algébrique sur $\bar{\mathbb{Q}}(y_1, \dots, y_n)$, de polynôme minimal $P \in \bar{\mathbb{Q}}[y_1, \dots, y_n][Y]$.

Soit $Q \in \bar{\mathbb{Q}}[y_1, \dots, y_n, Y]$ la partie homogène de plus bas degré de P, considéré comme polynôme en $n+1$ indéterminées. Si le degré en Y de Q est $\geqslant 1$, le lemme 2 lui associe des intervalles I_i et un réel $t_1 \geqslant 0$. Si Q est indépendant de Y (on verra plus loin, à la trosième étape, qu'en fait ce n'est pas le cas), on pose $t_1 = 0$, et on choisit pour I_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ un intervalle ouvert non vide quelconque formé de réels négatifs.

Soit $t < -t_0 - t_1$ un réel fixé. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $a_i \in I_i$ tel que $f_0(t + a_i) = p_i + q_i \alpha_i$ avec $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$, $q_i \neq 0$ et $\alpha_i = \sqrt[m_i]{2}$, où les m_i sont des entiers naturels vérifiant $m_i > k\ell$ et $m_{i+1} = (1 + k\ell)\, m_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, avec k = degré total de P et $\ell = [L : \mathbb{Q}]$, où L est le sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$ engendré par les coefficients de P, considéré comme polynôme en $n+1$ indéterminées.

Nous allons décomposer la suite de la démonstration en plusieurs étapes (qui ne sont pas celles du lemme 4 de [Sh 2]) :

<u>Première étape</u>. - Les $f_i(z) = f_0(z + t + a_i) \in F$ sont algébriquement indépendantes sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

En effet, les $f_0(t + a_i) \in \bar{\mathbb{Q}}$ et sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, car, par construction, la suite des corps $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ est strictement croissante. Le corollaire du théorème 2 montre donc que les $\exp(f_0(t + a_i))$ sont algébriquement indépendants. Comme les $f_0(t + a_i)$ sont algébriques et non nuls (car $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, ou car f_0 ne s'annule pas), les $\exp(t + a_i) = f_0(t + a_i)\exp(f_0(t + a_i))$ sont aussi algébriquement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit alors $R \in \bar{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul. Il s'agit de voir que $R(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. La fonction $g(z) = R(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in F$ et, pour $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$, on a $f_i(z) = (\exp(t + a_i + z))(1 + o(1)) \to 0$ (lemme 1). La partie principale de $g(z)$ est donc obtenue à partir de la composante homogène de plus bas degré R_0 de R, et si $\deg R_0 = m$, c'est

$$R_0(e^{t+a_1+z}, \dots, e^{t+a_n+z}) = e^{mz} R_0(e^{t+a_1}, \dots, e^{t+a_n}) \neq 0$$

puisque les e^{t+a_i} sont algébriquement indépendants. Sa partie principale n'étant pas nulle, g ne peut être identiquement nulle et on a le résultat annoncé.

<u>Variante</u>. - On fait la preuve par récurrence sur n, et on est en train de prouver le théorème au rang $n+1$. Comme les $f_i(z)$ ont des valeurs distinctes $f_0(t + a_i)$ au point $z = 0$, elles sont distinctes, et le théorème au rang ne montre qu'elles sont algébriquement indépendantes.

<u>Deuxième étape</u>. - Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(f_1(z), \dots, f_n(z), f_0(z+t+a)) = 0$.

Le théorème 1 montre l'existence d'une fonction $f \in F$ telle que $P(f_1, \dots, f_n, f) = 0$. Il suffit en effet de l'appliquer aux fonctions $f_i(z)$ considérées comme fonctions de la variable $\exp(z)$. Cette fonction f a un développement (de Puiseux) de la forme

$$f(z) = \alpha\, e^{rz} + \sum_{s>r} a_s\, e^{sz}$$

où r et les s sont des rationnels et $\alpha \neq 0$. D'après le deout du paragraphe, f est solution de $y'(1+y) = y$, donc

$$f(z)\exp(f(z)) = \exp(z+b) \quad \text{pour un} \quad b \in \underset{\sim}{C} .$$

On en déduit que $r > 0$. D'abord si $r = 0$, quand $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$, $f(z) \to \alpha$, mais $f(z)\exp(f(z)) = \exp(z+b) \to 0$, et $0 \neq \alpha \exp(\alpha + b)$, donc $r \neq 0$. Si $r < 0$, quand $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$ on a $f(z) = \alpha \exp(rz)\,(1 + o(1))$, donc

$$|f(z)\, e^{f(z)}| = |\alpha\, e^{rz}\, e^{\alpha e^{rz}(1+o(1))}\,(1+o(1))|$$

n'est pas de l'ordre de croissance de $|\exp(z)|$, et $r < 0$ est exclu. par suite $r > 0$ et $f(z) \to 0$ quand $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$, le lemme 1 montre qu'il existe $b \in \underset{\sim}{C}$ tel que $f(z) = f_0(z+b)$, et il suffit de poser $a = b - t$.

<u>Troisième étape</u>. - La fonction $f(z) = f_0(z + t + a)$ est définie en $z = 0$.

Quand $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$, la partie principale de $0 = P(f_1, \dots, f_n, f)$ est identiquement nulle, et elle est donnée par la partie homogène de plus bas degré Q de P : On a $Q(e^{z+t+a_1}, \dots, e^{z+t+a_n}, e^{z+t+a}) = 0$, donc, par homogénéité, $Q(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}, e^{a}) = 0$, et aussi $Q(e^{t+a_1}, \dots, e^{t+a_n}, e^{t+a}) = 0$. Comme les e^{t+a_i} sont algébriquement indépendants, $Q(X_1, \dots, X_n, Y)$ a un degré ≥ 1 en Y, on peut appliquer le lemme 2 à Q et aux $\exp(a_i)$, ce qui fournit $\mathrm{Re}\, a \leq t_1$, d'où $\mathrm{Re}(t + a) < -t_0$ et f est définie en $z = 0$. On a donc :

$$(*) \qquad P(f_0(t+a_1), \dots, f_0(t+a_n), f_0(t+a)) = 0 .$$

<u>Quatrième étape</u>. - $f_0(t+a)$ est algébrique sur $\underset{\sim}{Q}$.

Si la relation $(*)$ ci-dessus ne s'évanouit pas, c'est une relation de dépendance algébrique de $f_0(t+a)$ à coefficients dans $\bar{\underset{\sim}{Q}}$. Soit n_0 le plus grand indice i tel que X_i apparaisse dans $P(X_1, \dots, X_n, Y)$. Un tel n_0 existe bien, sinon $P \in \bar{\underset{\sim}{Q}}[Y]$ et $f(z) = f_0(t + a + z)$ serait algébrique sur $\bar{\underset{\sim}{Q}}$, corps de constantes, donc constante. Si tous les coefficients des puissances de $f_0(t+a)$ dans $(*)$ étaient nuls, alors α_{n_0} serait de degré $\leq k$ sur $L(\alpha_{n_0 - 1})$, donc de degré $\leq k\ell\, m_{n_0-1}$ sur $\underset{\sim}{Q}$, ce qui n'est pas, puisque $m_{n_0} = (1 + k\ell)\, m_{n_0-1}$. Cela montre que $f_0(t+a) \in \bar{\underset{\sim}{Q}}$.

<u>Cinquième étape</u>. - $e^{f_0(t+a)}$ est algébrique sur $\bar{\underset{\sim}{Q}}(\{e^{f_0(t+a_i)}\}_{1\leq i\leq n})$.

On a vu dans la troisième étape que

$$Q(e^{t+a_1}, \dots, e^{t+a_n}, e^{t+a}) = 0 ,$$

que l'on peut aussi écrire

$$Q(f_0(t+a_1)\, e^{f_0(t+a_1)}\ , \ldots ,\ f_0(t+a_n)\, e^{f_0(t+a_n)}\ ,\ f_0(t+a)\, e^{f_0(t+a)}) = 0 \ .$$

Mais on a vu à la première étape que les $f_0(t + a_i)\exp(f_0(t + a_i))$ sont algébriquement indépendants, et la quatrième étape montre que $0 \neq f_0(t + a) \in \bar{\mathbb{Q}}$; on a donc le résultat voulu.

Sixième étape. - $P = Y - \sum_{1\leq i\leq n} r_i X_i$, où les $r_i \in \mathbb{Q}$.

Les $f_0(t + a_i)$ et $f_0(t + a) \in \bar{\mathbb{Q}}$, et les $\exp(f_0(t + a_i))$ et $\exp(f_0(t + a))$ sont algébriquement dépendants (quatrième et cinquième étapes). D'après le corollaire du théorème 2, les $f_0(t + a_i)$ et $f_0(t + a)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants. Mais les $f_0(t + a_i)$ ont été choisis $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, donc on a une relation de dépendance de la forme

$$f_0(t + a) = \sum_{1\leq i\leq n} r_i\, f_0(t + a_i)$$

où les $r_i \in \mathbb{Q}$. La relation (*) s'écrit alors

$$P(f_0(t + a_1)\ , \ldots ,\ f_0(t + a_n)\ ,\ \sum_{1\leq i\leq n} r_i\, f_0(t + a_i)) = 0 \ .$$

Ainsi, les $f_0(t + a_i)$ annulent un polynôme de degré $\leq k$ à coefficients dans L . Un raisonnement analogue à celui de la quatrième étape montre que ce n'est possible que si ce polynôme est identiquement nul, c'est-à-dire que

$$P(X_1\ , \ldots ,\ X_n\ ,\ \sum_{1\leq i\leq n} r_i X_i) = 0 \ .$$

Par suite, P est divisible par $Y - \sum_{1\leq i\leq n} r_i X_i$ et, comme P est un polynôme minimal, on a $P = Y - \sum_{1\leq i\leq n} r_i X_i$, à un facteur constant près.

Septième étape. - Il existe i tel que $P = Y - X_i$.

Le début du paragraphe montre que $y = \sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i$, d'où l'on déduit, par dérivation,

$$y' = \sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i' = \sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i (1 + y_i)^{-1} \ .$$

D'autre part, on a $y'(1 + y) = y$, donc

$$\sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i (1 + y_i)^{-1} = (\sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i)(1 + \sum_{1\leq i\leq n} r_i y_i)^{-1} \ .$$

Comme les y_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on peut considérer cette dernière égalité comme une identité dans le corps des fractions rationnelles en n indéterminées $\mathbb{Q}(y_1\ , \ldots ,\ y_n)$. Il en résulte que tous les r_i sont nuls sauf un qui vaut 1 . En effet, si $r_i\, r_j \neq 0$ (avec $i \neq j$) , on peut spécialiser l'identité en $y_i = -1 + \epsilon$, $y_j \neq -1$ et $y_j \neq -(1 + r_i y_i)\, r_j^{-1}$, et $y_k = 0$ pour $k \neq i$ et j . On obtient alors

$$(-1 + \epsilon)\, r_i\, \epsilon^{-1} + r_j\, y_j (1 + y_j)^{-1} = ((-1 + \epsilon)\, r_i + r_j\, y_j)(1 + r_i\, y_i + r_j\, y_j)^{-1} \ ,$$

et, si $\epsilon \to 0$, le second membre est borné alors que le premier membre ne l'est pas. Par suite, un seul des r_i est non nul, par exemple r_1, et on a $r_1 y_1 (1 + y_1)^{-1} = r_1 y_1(1 + r_1 y_1)^{-1}$, donc $r_1 = 1$.

Cela achève la preuve du théorème.

Remarque. - On peut, quitte à modifier légèrement cette démonstration, obtenir un résultat un peu plus général : Soit, pour $1 \leq i \leq n$, $y_i \in K$ tels que $y_i \neq 0$ et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$. Si, pour tout i, y_i est solution de l'une des équations différentielles $y'(1 + y) = c_j y$, où $\{c_j\}_{1 \leq i \leq k}$ est une partie de K formée de réels positifs $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors les y_i $(1 \leq i \leq n)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$

Il parait cependant difficile d'obtenir par cette méthode le lemme 6 de [Sh 2]. En revanche, on verra dans l'exposé suivant que la méthode de ROSENLICHT permet d'obtenir le résultat ci-dessus en supposant seulement que les c_j sont des constantes non nulles de K.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAKER (Alan). - Transcendental number theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1975.

[Bl] BLUM (Lenore). - Generalized algebraic structures : a model theoretic approach Ph. D. dissertation, M. I. T., 1968.

[Bo] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, chapitres 4 à 7. - Paris, Masson, 1981.

[Br] BRESTOVSKI (Michel). - Indépendance algébrique de solutions d'équations différentielles, Thèse 3e cycle, ou C. R. Acad. Sc., t. 294, 1982, p. 609-612.

[K] KOLCHIN (E. R.). - Constrained extensions of differential fields, Advances in Math., t. 12, 1974, p. 141-170.

[P] PICARD (Emile). - Traité d'analyse, 3 vol. - Paris, Gauthier-Villars, 1891-1896.

[R] ROSENLICHT (Maxwell). - The non minimality of the differential closure, Pacific J. of Math., t. 52, 1974, p. 529-537.

[Sa] SACKS (G.). - The differential closure of a differential field, Bull. Amer. Math. Soc., t. 78, 1972, p. 629-634.

[Sh1] SHELAH (Saharon). - Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first order theories, J. of Symbolic Logic, t. 37, 1972, p. 107-113.

[Sh2] SHELAH (Saharon). - Differentially closed fields, Israel J. of Math., t. 16, 1973, p. 314-328.

[W] WALKER (Robert J.). - Algebraic curves. - Princeton, Princeton University Press, 1950 (Princeton mathematical Series, 13).