GROUPE D'ÉTUDE DE THÉORIES STABLES

BRUNO POIZAT

Travaux publiés par les membres du groupe « théories stables »

Groupe d'étude de théories stables, tome 3 (1980-1982), exp. n° 11, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1980-1982__3__A11_0>

TRAVAUX PUBLIÉS PAR LES MEMBRES DU GROUPE "THÉORIES STABLES"

par Bruno POIZAT (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Ces dernières années, une bonne moitié des exposés du Groupe d'étude de Théories stables a été consacrée à des travaux personnels qui ont été publiés, ou vont l'être bientôt, dans des périodiques réguliers. On ne peut donc les reproduire ici ; mais, comme le lecteur de cet ouvrage trouvera dans ces travaux le prolongement de ce qui est publié ici, ainsi que dans les deux recueils précédents, j'ai pensé qu'il lui serait utile que je dressasse leur liste, et que j'en indiquasse brièvement le contenu.

A. Approche générale de la stabilité

[1] LASCAR (Daniel) and POIZAT (Bruno). - An introduction to forking, J. of symb. Logic, t. 44, 1979, p. 330-350.

Le manifeste du groupe : ordre fondamental, héritiers, cohéritiers, théorème de la borne, de la relation d'équivalence finie, rangs, etc., exposé plus ramassé, mais en substance identique, à ce qu'on trouve dans les exposés 1 et 4 de "Théories stables, I".

[2] POIZAT (Bruno). - Théories instables, J. of symb. Logic, t. 46, 1981, p. 513-522.

Une approche encore plus douce de la stabilité, permettant de simplifier sensiblement l'exposé de [1] ; la notion essentielle est celle de types " M-spéciaux", ayant une définition infinitaire sur M (dans le langage de SHELAH "they does not split over M "), et les suites indiscernables qui leur sont associées ; la propriété d'indépendance est caractérisée en terme de suites sécables, et aussi, grâce à un lemme combinatoire sur les ultrafiltres, à partir du nombre de cohéritiers que peut avoir un type donné : cela donne un critère très maniable dans la pratique.

[3] POIZAT (Bruno). - Post-scriptum à "Théories instables", J. of symb. Logic (à paraître).

Sur une simplification, due à SHELAH, de la preuve du critère de [2] : comment retrouver un fils spécial, s'il n'y a pas propriété d'indépendance, à partir de sa suite de Morley.

(*) Bruno POIZAT, Mathématiques, UER 47, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

[4] PARIGOT (Michel). - Théories d'arbres, J. of symb. Logic (à paraître).

Un arbre est un ordre partiel dans lequel les minorants d'un élément quelconque forment une chaîne ; l'auteur montre que, comme dans le cas des chaînes (mais c'est évidemment beaucoup plus compliqué !), une théorie d'arbre a un caractère "local" : il dissèque ses arbres en "morceaux", et montre que les propriétés modèle-théoriques des arbres se traitent morceau par morceau. Cela permet de déterminer les cohéritiers d'un type donné et de montrer qu'aucune théorie d'arbre n'a la propriété d'indépendance.

[5] POIZAT (Bruno). - Paires de structures stables, J. of symb. Logic (à paraître).

Une "belle paire" de modèles de T est la donnée d'un modèle M de T , plongé dans une de ses extensions élémentaires N très saturée, dans le langage obtenu en ajoutant à celui de T un symbole relationnel unaire pour interpréter M . Cet article caractérise la propriété de recouvrement fini, introduite par KEISLER, en termes de belles paires ; stabilité et ordre fondamental de la théorie des belles paires.

[6] POIZAT (Bruno). - Élimination des imaginaires (à paraître).

Une théorie "élimine les imaginaires" si pour elle le passage à T^{eq} est inutile, les éléments imaginaires, définis par SHELAH, étant déjà présents dans T . Exemples: théories des corps algébriquement clos, théorie des corps différentiellement clos de caractéristique nulle ; conséquences pour la théorie de Galois classique (par un passage dans la "Théorie de Galois abstraite" de KRASNER) et la théorie de Galois des équations différentielles.

[7] PILLAY (Anand). - Instability and theories with few models, Proc. Amer. math. Soc., t. 80, 1980, p. 461-468.

On sait qu'une théorie qui n'est pas oméga-catégorique et qui n'a qu'un nombre fini de modèles dénombrables ne peut être superstable ; ici, l'auteur montre que si en outre elle satisfait des hypothèses techniques supplémentaires, elle est instable; il trouve tout simplement une formule ayant la propriété de l'ordre.

[8] PILLAY (Anand). - A class of aleph-zéro-categorical theories, Z. für math. Logik, t. 27, 1981, p. 411-418.

Une tentative de formaliser la notion de théorie ω-catégorique par "manque de structure", pour laquelle les automorphismes du modèle dénombrable s'obtiennent simplement à partir de bijections entre certains ensembles infinis. Une théorie est dite "très simple" si elle a un modèle avec un arbre d'automorphismes d'une certaine forme ; ces théories sont toutes ω-catégoriques, ω-stables, avec ordre fondamental fini, et non-finiment-axiomatisables.

B. Groupes stables

[9] POIZAT (Bruno). - Sous-groupes définissables d'un groupe stable, J. of symb. Logic, t. 46, 1981, p. 137-146.

Introduction d'un "ordre stratifié", inspiré de l'ordre fondamental, permettant de définir pour un groupe stable des types "génériques" (ce sont ici les types de strate maximum), précédemment définis par ZILBER, CHERLIN et SHELAH pour un groupe superstable (dans ce cas, ce sont les types de RC , ou de RU maximum). Dans un groupe superstable, il y a toujours des types de RU maximum ; dans un groupe stable, un sous-groupe infiniment définissable est intersection de sous-groupes définissables.

[10] POIZAT (Bruno). - Groupes stables, avec types génériques réguliers, J. of symb. Logic (à paraître).

Reprise plus facile à lire des résultats de [9], et de ce qu'il faut savoir pour aborder l'étude des groupes stables : application à la démonstration de résultats connus, inconnus, ou à moitié connus sur les groupes, corps, etc., stables et superstables. Le principal : un groupe stable, avec types génériques réguliers (par exemple un groupe superstable de RU ω^α) est abélien par fini.

[11] BERLINE (Chantal). - Groupes superstables, Thèse Doctorat d'Etat, Université Paris-7, 1982.

Définition d'une notion de type α-générique, généralisant celle de générique, donnant un nouveau et puissant moyen d'investigation des groupes superstables : grâce à une utilisation subtile des "inégalités de Lascar" sur le rang U , elle met en évidence des sous-groupes définissables de G en des rangs dépendant du développement de Cantor de RU(G) . Comme applications : un groupe superstable a un gros sous-groupe abélien ; démonstration très courte du fait qu'un corps superstable est commutatif (et algébriquement clos : résultat de Cherlin) ; classification des groupes de RU $\omega^\alpha.2$ et $\omega^\alpha.3$.

C. Modules

[12] BOUSCAREN (Elisabeth). - Existentially closed modules : types and prime models "Model theory of algebra and arithmetic", [1979. Karpacz], p. 31-43. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 834).

Description de l'ordre fondamental de la théorie T_R des modules existentiellement clos sur un anneau cohérent R ; existence de modèles premiers pour T_R lorsque R est un anneau de Von Neumann : il y en a un sur tout ensemble de paramètres si, et seulement si, l'algèbre de Boole des idempotents de R est atomique, ce qui donne des exemples de théories T_R non superstable, mais avec des modèles premiers.

[13] PILLAY (Anand) and PREST (Mike). - Forking and push-out in modules, Proc. London math. Soc., Series 3 (à paraître).

Caractérisation dans un langage purement algébrique de la déviation des types dans les modules.

[14] PILLAY (Anand). - Countable modules (à paraître).

Montre que si une théorie de module n'est pas ω-catégorique, elle a un type non isolé (sur $\emptyset$) superstable, et même de RU fini. Cela implique naturellement que cette théorie a une infinité de modèles dénombrables.

[15] PILLAY (Anand). - Omiting types for normal theories (à paraître).

Démonstration de la conclusion de [14] par une toute autre méthode : une formule $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ est dite normale si, pour tout $\bar{a}$ et tout $\bar{b}$, $\alpha(x, \bar{b})$ et $\alpha(x, \bar{a})$ sont égaux ou disjoints ; et T est dite normale si toute formule équivaut à une combinaison booléenne de formules normales (exemple : les modules). Une telle théorie est stable, et satisfait un théorème très fort d'omission des types : si elle n'est pas ω-catégorique, elle a une infinité de modèles dénombrables.

D. Corps, corps valués, corps différentiels

[16] DURET (Jean-Louis). - Les corps faiblement algébriquement clos non séparablement clos ont la propriété d'indépendance, "Model theory of algebra and arithmetic", [1979. Karpacz], p. 136-162. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 834).

Un corps k est dit faiblement algébriquement clos si tout idéal absolument premier de $k[X_1, \dots, X_n]$ y a un zéro ; exemple : les modèles infinis de la théorie des corps finis ("corps pseudo-finis"). Il est montré ici que tous ces corps, qui ne sont pas séparablement clos, et même les corps contenant un tel sous-corps relativement algébriquement clos, sont instables, avec propriété d'indépendance. Dans l'introduction, une discussion sur les propriétés connues de stabilité/instabilité des corps.

[17] DELON (Françoise). - Espaces ultramétriques (à paraître).

Un espace ultramétrique est formé d'une chaîne I , d'un ensemble X , et d'une application symétrique d de X^2 dans I qui satisfait l'inégalité ultramétrique. L'espace (I , X , d) est dit riche s'il est existentiellement clos parmi les espaces qui ont le même I ; par exemple, l'espace ultramétrique d'un corps valué de corps résiduel infini est riche. L'auteur montre que ces espaces forment une classe élémentaire, dont elle détermine facilement la théorie ; ensuite elle classifie les types au-dessus d'un modèle d'une théorie d'espace riche, et détermine héritiers et cohéritiers ; comme conséquence : un espace riche n'a pas la propriété d'indépendance. Le premier exemple, du à SHELAH, d'une théorie avec plusieurs modèles premiers non isomorphes, était une théorie d'espaces riches : ce résultat est systématisé ici de façon agréable.

[18] BRESTOVSCHI (Michel). - Déviation et indépendance algébrique de solutions génériques d'équations différentielles du second ordre, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 294, 1982, série I, p. 609-612.

L'auteur introduit une famille d'équations différentielles $P = 0$ du second ordre à coefficients constants, dont il montre d'abord que le type associé $I(P)$ est de $RU = 1$, bien que de $RD = 2$ (cela implique que $I(P)$ est orthogonal aux constantes). Il montre ensuite que dans tout corps différentiellement clos, de corps de constantes C, $I(P, C)$ a une infinité de réalisations indépendantes au-dessus de C ; plus précisément, il montre que, pour tout corps différentiel k, si a et b sont deux réalisations de $I(P, k)$ qui sont algébriquement liées au-dessus de k, alors leur liaison est très particulière. Il utilise des méthodes analogues à celles de ROSENLICHT (pour des équations du premier ordre), mais dans une situation plus difficile : comme ses équations sont d'ordre 2, il doit travailler dans la deuxième puissance extérieure du module des différentielles de Kähler.

E. Modèles d'Ehrenfeucht pour une théorie instable

[19] CHARRETTON (Christine) et POUZET (Maurice). - Les chaînes dans les modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290, 1980, série A, p. 715-717 ; et Chains in Ehrenfeucht-Mostowski models, Fund. Math., Warszawa (à paraître).

Soient I une chaîne, R une relation binaire, et F une famille dénombrable de fonctions f, de I^n dans la base de R, telles que la base de R soit la réunion des images des f ; R est dite I-invariante (sous-entendu : relativement à la famille F) si I est indiscernable (dans l'ordre) pour les formules du type $R(f(a_1, \dots, a_n), g(b_1, \dots, b_m))$, et du type $f(a_1, \dots, a_n) = g(b_1, \dots, b_m)$, où f et g sont dans F.

Les auteurs montrent d'abord que si R est un ordre partiel (ou même seulement une relation binaire sans cycles) I-invariant, on peut le renforcer en un ordre total I-invariant (pour la même famille F) ; ensuite quand la famille F est réduite à une seule fonction f, qu'une chaîne I-invariante est presque le produit lexicographique d'un nombre fini de copies de I et de son inverse.

On voit alors que si κ, et si R est un ordre partiel I-invariant, toute sous-chaîne de R de cardinal κ contient une sous-chaîne de même cardinal plongeable dans I ou dans son inverse. Si on part de chaînes I' et I'' très différentes, cela permet de faire beaucoup de modèles d'Ehrenfeucht non isomorphes, et même très disjoints (sans partie commune de cardinal κ) pour toute théorie T ayant la propriété de l'ordre strict.

Dans un article en préparation, les auteurs montreront même que si I contient la chaîne des rationnels, et se plonge dans son opposée, toute chaîne I-invariante se plonge dans $I^{<\omega}$ ordonné lexicographiquement. D'où un meilleur controle de la classe des modèles d'Ehrenfeucht d'une théorie T comme ci-dessus.

F. Théorie de la dimension

[20] LASCAR (Daniel). - Ordre de Rudin-Keisler et poids dans les théories stables, Z. für math. Logik, t. 28, 1982, p. 413-430.

Définition d'un ordre "p domine q" , semblable à l'ordre de Rudin-Keisler, mais plus convenable pour la théorie des modèles. Preuve, pour une théorie ω-stable, de l'équivalence entre orthogonalités forte et faible.

[21] PILLAY (Anand). - Weakly homogeneous models, Proc. Amer. math. Soc., Series 3, t. 86, 1982, p. 126-132.

Un modèle M est dit faiblement homogène si, chaque fois que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans M ont même type fort (sur $\emptyset$), ils se correspondent par un automorphisme de M ; deux définitions par va-et-vient sont montrées être équivalentes à cette notion, pour les modèles dénombrables d'une théorie totalement transcendante. Comme conséquence, cela ne change pas la définition de supposer en outre que l'isomorphisme qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ conserve les types forts ; et deux modèles dénombrables faiblement homogènes qui réalisent les même types sont isomorphes.

[22] BOUSCAREN (Elisabeth) and LASCAR (Daniel). - Countable models of non-multidimensional ω-stable theories (à paraître).

Une très claire introduction à la théorie de la dimension, avec des points de présentation originaux (en particulier la définition des "types réguliers non multidimensionnels"), et surtout le résultat suivant : si T est ω-stable non multidimensionnelle, tous ses modèles sont faiblement homogènes (voir [21]).

[23] BOUSCAREN (Elisabeth). - Countable models of multidimensionnal ω-stable theories (à paraître).

Dans [22], il est montré que tous les modèles dénombrables d'une théorie ω-stable sont presque homogènes si, et seulement si, tous les types réguliers multidimensionnels de $S_1(\bar{a})$ ont une dimension infinie dans le modèle premier au-dessus de $\bar{a}$. Dans le cas contraire, et sous une hypothèse supplémentaire qui est toujours vraie si α_T est fini, l'auteur construit 2^{ω} modèles dénombrables non faiblement homogènes ; avec le dernier résultat de [21], cela résoud la conjecture de Vaught pour les théories ω-stables avec α_T fini.

[24] PILLAY (Anand). - Dimension theory for elementary extension of a model, J. of symb. Logic, t. 47, 1982, p. 147-160.

L'auteur montre que si M est une structure dénombrable sans ensemble infini de n-uples ordonné par une formule (mais la théorie de M peut être instable !) ,

alors M a une infinité d'extensions élémentaires dénombrables deux-à-deux non M-isomorphes ; sa méthode consiste à reproduire, dans un cadre instable, des techniques de stabilité (types réguliers, etc.)

[25] PILLAY (Anand). - A note on tight stable theories (à paraître).

Nette amélioration de [7] : T est dite "sérrée" (tight) si chaque fois que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ ont un type isolé, $\bar{a} \wedge \bar{b}$ aussi ; dans [7], on montrait que si T est serrée, stable et non-ω-catégorique, elle a au moins 4 modèles dénombrables ; ici, en faisant apparaître un type régulier convenable, on montre qu'elle en a une infinité.

[26] LASCAR (Daniel). - Résolution entre rang $\mathbf{u}$ et poids, Fund. Math., Warszawa, (à paraître).

Amélioration de la majoration du poids d'un type superstable en fonction du développement de Cantor de son rang U (par la somme des facteurs entiers, au lieu de leur produit) ; orthogonalité de deux types qui n'ont pas d'exposants communs dans le développement de Cantor de leur RU . Dans T^{eq} , si T est superstable, un type régulier est RK équivalent à un type de RU ω^{α} .
