Groupe d'étude de théories stables

Bruno Poizat

Modèles premiers d'une théorie totalement transcendante

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A8_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
2e année, 1978/79, n° 8, 7 p.

MODÈLES PREMIERS D'UNE THÉORIE TOTALEMENT TRANSCENDANTE

par Bruno POIZAT (*)

Dans ce qui suit, on considère une théorie T complète totalement transcendante, non nécessairement dénombrable. Nous savons que sur tout ensemble de paramètres A il existe un unique modèle construit $M(A)$, et même que c'est l'unique modèle premier sur A (car $K(T) = \omega$; voir exposé précédent).

1. Suites indicernables atomiques.

THÉORÈME 1.

1° S'il n'existe pas dans $M(A)$ de suite infinie indicernable sur A, $M(A)$ est minimal et c'est l'unique modèle atomique sur A.

2° S'il existe dans $M(A)$ une suite infinie indicernable sur A, $M(A)$ n'est pas minimal et il y a des modèles atomiques sur A de cardinal arbitrairement grand.

1° Si $M(A)$ n'est pas minimal, ou bien si ce n'est pas l'unique modèle atomique sur A, on peut trouver M atomique sur A ayant une extension élémentaire N propre et atomique sur A. Soit alors a dans $N - M$; le type de a sur A étant isolé, il est réalisé par un élément a_0 de M ; le type de a sur $A \cup \{a_0\}$ étant isolé, il est réalisé par un élément a_1 de M, etc. On construit ainsi une suite $a_0, \dots, a_n, \dots$ croissante dans M, et nous savons qu'elle devient de Morley au bout d'un nombre fini de pas : en supprimant éventuellement un nombre fini de ses éléments, on obtient une suite indicernable sur A, atomique sur A, qui est donc réalisée dans $M(A)$.

2° Si dans $M(A)$ il y a une suite $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ infinie et indicernable sur A, elle est donc atomique sur A ; par totale indicernabilité, le type de a_0 sur $A \cup \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ n'est pas isolé ; par conséquent le modèle premier sur $A \cup \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ ne contient pas a_0, c'est une restriction élémentaire propre de $M(A)$, qui n'est pas minimal.

Et la suite indicernable s de longueur λ qui prolonge cette suite est aussi atomique sur A ; par transitivité, le modèle premier sur $A \cup s$, qui est de cardinal λ, est atomique sur A.

Définition. - Soient $A \subset B$, B atomique sur A ; $p \in S_1(B)$ est dit atomique sur A s'il est réalisable dans un modèle M contenant B et atomique sur A.

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU.

LEMME 1. - Le type de a sur B est atomique sur A si, et seulement si, pour tout $\bar{b}$ de B, le type de $\bar{b}^\frown a$ sur A est isolé.

Cette condition signifie que $B \cup \{a\}$ est atomique sur A, soit encore que le modèle premier sur $B \cup \{a\}$ est atomique sur A.

LEMME 2 (voir [1], exposé n° 2). - Soient $A \subset M \prec N$, N atomique sur A ; si $p \in S_1(M)$ est atomique sur A, son héritier q sur N est atomique sur A.

Soit $\bar{b} \in M$ tel que p soit l'unique extension non déviante de $p/A \cup \{\bar{b}\}$ (prendre une formule de même rang de Morley que p et de degré de Morley 1) et soit a réalisant q. Pour tout $\bar{c}$ de N, comme N est atomique sur $A \cup \{\bar{b}\}$, il existe $\bar{c}'$ dans M réalisant le type de $\bar{c}$ sur $A \cup \{\bar{b}\}$; les uples $\bar{b}^\frown\bar{c}^\frown a$ et $\bar{b}^\frown\bar{c}'^\frown a$ ont même type sur A, et celui de la seconde est isolé.

COROLLAIRE 1. - $A \subset B \subset C$, C atomique sur A ; tout type p de $S_1(B)$ atomique sur A a un fils sur C atomique sur A.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que C est un modèle ; p est réalisable par un élément a d'un modèle M atomique sur A contenant B ; plongeons $M(B)$ dans M : le type p' de a sur $M(B)$ est atomique sur A, et fils de p. Mais C contient aussi une copie de $M(B)$, et l'héritier p'' de p' sur C est d'après le lemme 2 atomique sur A.

COROLLAIRE 2. - $A \subset B$, B atomique sur A ; il existe M contenant B, atomique sur A, et réalisant tous les types de $S_1(B)$ atomiques sur A.

Clair d'après le corollaire 1.

On peut alors, lorsqu'on est placé dans le deuxième cas du théorème 1 (existence d'une suite infinie indicernable atomique) définir la notion de modèle atomique-saturé sur A : M sera dit ainsi s'il est de cardinal $\lambda > |A|$, et si pour tout B, $A \subset B \subset M$, $|B| < \lambda$, tout type de $S_1(B)$ atomique sur A est réalisé dans M. Le corollaire 2 permet de montrer l'existence d'un tel modèle pour tout $\lambda > |A|$ par la méthode habituelle, et il suffit d'un classique va-et-vient pour montrer son unicité et ses propriétés d'universalité (pour les modèles atomiques sur A de cardinal au plus λ) et d'homogénéité.

2. Caractérisation de Shelah du modèle premier.

THÉORÈME 2. - $M(A)$ ne contient pas de suite non dénombrable indicernable sur A.

Supposons qu'il existe dans $M(A)$ une suite indicernable $a_0, \ldots, a_n, \ldots, a_\alpha, \ldots$ de longueur ω_1 ; nous savons qu'à partir d'un certain n elle devient la suite de Morley d'un type stationnaire p, et quitte à ajouter à A ces n premiers éléments ($M(A)$ reste construit sur $A \cup \{a_0 , \ldots , a_{n-1}\}$) nous pouvons supposer que cela se produit dès le début. Considérons le modèle premier N sur $A \cup \{a_0 , \ldots , a_n , \ldots\}$, $n < \omega$: comme le type de a_ω sur cet ensemble n'est pas isolé, cette suite est une suite indicernable maximale dans N , et comme $M(A)$ se plonge dans N , N contient par ailleurs un exemplaire $s = \{a'_0, \ldots, a'_\alpha, \ldots\}$ de longueur ω_1 de la suite de Morley de p ; mais par superstabilité un n-uple extrait de $\{a_0 , \ldots , a_n , \ldots\}$ ne peut faire dévier sur A qu'un nombre fini d'éléments de l'ensemble indépendant s , et il en reste qui ne dévient pas, donc qu'on peut ajouter à $\{a_0 , \ldots , a_n , \ldots\}$ en prolongeant la suite de Morley, ce qui contredit la maximalité de cet ensemble indicernable.

Définition. - Soient $A \subset B \subset M$; B sera dite normale sur A si, pour tout b de B , tous les éléments de M ayant même type que b sur A sont dans B .

PROPOSITION 1. - *Soient M un modèle atomique sur A , et B , $A \subset B \subset M$, une partie de M normale sur A . Alors M est atomique sur B .*

Soit $\bar{a}$ un uple extrait de M , et soit $f(\bar{x} , \bar{b})$ une formule à paramètres dans B , de même rang de Morley et de même degré de Morley que le type de $\bar{a}$ sur B ; comme le type de $\bar{a}$ sur $A \cup \{\bar{b}\}$ est isolé, on peut supposer en outre que cette formule isole le type de $\bar{a}$ sur $A \cup \{\bar{b}\}$. Je dis alors que cette formule isole le type de $\bar{a}$ sur B ; sinon il existe $\bar{c}$ dans B et g tels que $f(\bar{x},\bar{b}) \wedge g(\bar{x},\bar{c})$ ainsi que $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge \neg g(\bar{x} , \bar{c})$ soient consistants ; soit $h(\bar{y} , \bar{b})$ une formule isolant le type de $\bar{c}$ sur $A \cup \{\bar{b}\}$. Comme $f(\bar{x} , \bar{b})$ définit un type complet sur $A \cup \{\bar{b}\}$, $\bar{a}$ satisfait $(\exists \bar{y})\ f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge g(\bar{x} , \bar{y}) \wedge h(\bar{y} , \bar{b})$ ainsi que $(\exists \bar{y})$ $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge \neg g(\bar{x} , \bar{y}) \wedge h(\bar{y} , \bar{b})$, et comme on est dans un modèle, il existe $\bar{c}'$ et $\bar{c}''$ dans M tels que $\bar{a}$ satisfasse $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge g(\bar{x} , \bar{c}') \wedge h(\bar{c}' , \bar{b})$ ainsi que $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge \neg g(\bar{x} , \bar{c}'') \wedge h(\bar{c}'' , \bar{b})$; mais par normalité $\bar{c}'$ et $\bar{c}''$ sont dans B , et ces deux formules ont même rang et même degré de Morley que le type de $\bar{a}$ sur B ; et comme $\bar{c}'$ et $\bar{c}''$ ont même type que $\bar{c}$ sur $A \cup \{\bar{b}\}$, on en déduit que les formules $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge g(\bar{x} , \bar{c})$ et $f(\bar{x} , \bar{b}) \wedge \neg g(\bar{x} , \bar{c})$ ont même rang et même degré de Morley, ce qui est absurde.

THÉORÈME 3 (SHELAH). - *$M(A)$ est le seul modèle atomique sur A qui ne contienne que des suites indicernables sur A au plus dénombrables.*

Soit donc M atomique sur A , ne contenant que des suites indicernables dénombrables, et soit f une formule à paramètres dans A . Je vais montrer par induction sur le rang de Morley α de f qu'il y a une construction de f^M ; cela donnera le résultat en prenant pour f la tautologie.

Choisissons s'il existe a_0 dans f^M de rang de Morley α sur A , puis si c'est possible a_1 dans f^M de rang de Morley α sur $A \cup \{a_1\}$, etc., et on construit une suite ordinale $s = \{\ldots a_\mu \ldots\}$ d'éléments de f^M , chacun étant de rang de Morley α sur les précédents, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le faire.

En conséquence, chaque élément de f^M est de rang de Morley strictement inférieur à α sur $A \cup s$, donc aussi sur $A \cup s'$ pour un certain fragment fini s' de s.

Je dis que la suite s est en fait finie ou dénombrable ; en effet la formule f ne peut contenir qu'un nombre fini de type de rang de Morley α, chacun étant de multiplicité finie puisqu'on est dans une théorie totalement transcendante ; donc les a_μ se répartissent en un nombre fini de types forts sur A, et ceux de même types forts étant indépendants constituent une suite de Morley, donc un ensemble indicernable, qui est au plus dénombrable par hypothèse. On renumérote alors la suite par ω, $s = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$.

On construit alors f^M de la manière suivante ; on commence par énumérer les formules à paramètres dans A impliquant $f(x)$ et de rang de Morley strictement inférieur : si f_1 est la première, on peut construire f_1^M par hypothèse d'induction, et l'ensemble alors construit étant normal, M reste atomique dessus, et évidemment l'hypothèse de dénumérabilité des suites indicernables est conservée, si bien qu'on peut passer à la construction de la seconde, etc. (comme une réunion de parties normales est normale, on n'a aucun problème aux étapes limites). Cela étant, ajoutons a_0 : M reste atomique, et on peut passer à la construction des formules à paramètres dans l'ensemble déjà construit et de rang strictement inférieur à α ; une fois que c'est fini, on ajoute a_2, etc. ... On obtient bien à la fin, une construction de f^M car tout élément de f^M finit par être de rang de Morley strictement inférieur à α sur $A \cup \{a_0, \dots, a_n\}$.

Remarques.

1° Ceci constitue en fait une preuve, la première historiquement de l'unicité du modèle premier pour T totalement transcendante. En effet, un modèle premier, se plongeant dans le modèle construit satisfait les hypothèses du théorème.

2° Ce théorème m'amène à poser deux questions, d'une voix hésitante :

(i) $A \subset B$, B atomique sur A et ne contenant pas de suite non dénombrable indicernable sur A ; B se plonge-t-il dans $M(A)$?

(ii) $A \subset B \subset C$; C constructible sur A et atomique sur B ; C est-il constructible sur B ? (On peut se poser cette question même si T n'est pas totalement transcendante.)

3. Clôture atomiquement algébrique.

Définition. - Un type $p \in S_1(A)$ isolé est dit *atomiquement algébrique* s'il existe un cardinal λ qui limite le nombre de réalisations de p dans tout modèle atomique sur A. On appellera clôture atomique-algébrique $Cl(A)$ de A l'ensemble des réalisations dans $M(A)$ des types atomiquement algébriques.

PROPOSITION 2. - p *est atomiquement algébrique si, et seulement si, il n'y a* pas sur A de suite indicernable infinie et atomique d'éléments de type p si, et seulement si, chaque fois que $A \subset M \prec N$, avec N atomique sur A, toutes les réalisations de p dans N sont dans M.

S'il y a une suite indicernable infinie atomique d'éléments de type p, on peut la prolonger aussi loin qu'on veut ; si p peut être réalisé $|A|^*$ fois dans un modèle N atomique sur A, une de ces réalisations sera en dehors de $M(A)$; et si $a \in N - M$, on construit dans M une suite croissante, qui finit par devenir indicernable, d'éléments réalisant de type de a sur A.

Remarque. – Par homogénéité de $M(A)$, tout élément de $M(A) - Cl(A)$ est le début d'une suite indicernable dénombrable.

COROLLAIRE 3. – $Cl(A)$ est l'intersection des A-plongements de $M(A)$ dans lui-même.

COROLLAIRE 4. – Si M est atomique sur A, l'ensemble des éléments de M atomiquement-algébriques sur A est élémentairement isomorphe à (i. e. de même type sur A que) $Cl(A)$.

COROLLAIRE 5. – Soit M un modèle atomique sur A, et $A \subset X \subset M$; tout uple extrait de $Cl(A) \subset M$ a un type isolé sur X.

En effet, le modèle premier sur X, une fois plongé dans M, doit contenir $Cl(A)$.

PROPOSITION 3. – Soit M un modèle atomique sur A, et $A \subset X \subset M$ tel que M soit atomique sur X ; alors si Y est un ensemble obtenu à partir de X en lui ajoutant et en lui retranchant des éléments de $Cl(A) - A$, M est aussi atomique sur Y.

Ajoutons d'abord à X tous les éléments de $Cl(A)$: on obtient un ensemble Z normal sur X, donc M reste atomique sur Z. Retranchons maintenant de manière à obtenir Y ; soit $\overline{a}$ dans M, dont le type sur Z est déterminé par $f(\overline{x},\overline{b},\overline{c})$, avec $\overline{b} \in Y$, $\overline{c} \in Cl(A) - A$; comme le type de $\overline{c}$ sur Y est isolé par une formule $g(\overline{y}, \overline{b}')$, le type de $\overline{a}$ sur Y est isolé par $(\exists\, \overline{y})\ f(\overline{x},\overline{b},\overline{y}) \wedge g(\overline{y},\overline{b}')$.

COROLLAIRE 6. – Toute énumération de $M(A)$ obtenue à partir d'une construction de $M(A)$ en changeant de place les éléments de $Cl(A)$ en est encore une construction.

COROLLAIRE 7. – Etant données deux suites de même type, de longueur quelconque, extraites de $Cl(A)$, elles se correspondent par un A-automorphisme élémentaire (i. e. conservant les types, i. e. se prolongeant en un automorphisme de $M(A)$) de $Cl(A)$.

Considérer deux constructions de $M(A)$ commençant par ces deux suites et appliquer le va-et-vient de Ressayre.

$M(A)$ n'a cette propriété d'homogénéité que pour les suites finies : un ensemble indicernable dénombrable maximal et un autre de même type mais non maximal ne se correspondent pas par A-automorphisme de $M(A)$.

COROLLAIRE 7. - Tout A-automorphisme élémentaire de $Cl(A)$ dans $Cl(A)$ est surjectif.

D'après le corollaire précédent.

COROLLAIRE 8. - $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$.

En effet, si $a \in M(A) - Cl(A)$, il existe un A-plongement de $M(A)$ dans lui-même tel que a n'appartienne pas à son image ; en faisant subir ensuite à cette image un A-automorphisme qui remet les éléments de $Cl(A)$ dans le bon ordre, on obtient un $Cl(A)$-plongement de $M(A) = M(Cl(A))$ dans lui-même qui évite a.

On peut aussi voir directement que la notion d'algébricité atomique est transitive.

La philosophie de tout ceci est que $Cl(A)$ est la partie incompressible de $M(A)$ et de tout modèle atomique sur A ; $Cl(A)$ contient bien sûr la clôture algébrique de A, ensemble des réalisations (dans n'importe quel modèle) des types sur A qui n'ont qu'un nombre fini de réalisations, mais en général elle ne se réduit pas à cela.

Prenons pour exemple la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique nulle ; soit A un corps de constantes (éléments de dérivée nulle) ; un modèle atomique sur A ne contient pas de constantes transcendantes sur A ; la formule $x' = 1$ isole un type sur A, et si a_0 et a_1 en sont deux réalisations, la différence $a_0 - a_1$ est une constante ; par conséquent, dans un modèle atomique sur A, il n'y a que $|A|$ réalisations de ce type.

La théorie de Galois de Kolchin pour les équations différentielles se passe dans un petit sous-corps de $Cl(A)$; pour cette raison il me semble intéressant d'étudier, pour toute théorie totalement transcendante T, le groupe des A-automorphismes élémentaires de $Cl(A)$.

4. Remarque finale.

LEMME 3. - Si $S_2(A)$ contient un parfait (compact non vide sans points isolés), alors, pour un certain a, $S_1(A \cup \{a\})$ contient un parfait.

Soit X un parfait de $S_2(A)$; si sa première projection est un parfait, on prend a dans A ; sinon elle contient un point isolé, dont l'image réciproque est un ouvert fermé Y de X : en prenant pour a une réalisation de p, on obtient dans $S_1(A \cup \{a\})$ un parfait homéomorphe à Y.

LEMME 4. - Si le type de a sur A et le type de b sur $A \cup \{a\}$ sont isolés et rangés par RM, il en est de même du type de $a\hat{\ }b$ sur A.

Supposons le contraire ; soit $f(x, y)$ la formule isolant le type de $a\hat{\ }b$ sur A, et montons à un modèle $|T|$-saturé contenant A ; $\langle f(x, y)\rangle$ contient alors un parfait X ; si sa première projection est un parfait, il est contenu dans $\langle(\exists y)\ f(x, y)\rangle$, qui isole le type de a sur A, et on obtient une contradiction ; donc il a un point isolé p, qu'on réalise en a', et on trouve un parfait dans $\langle f(a', y)\rangle$: comme a et a' ont même type sur A, on en trouve un aussi dans $\langle f(a, y)\rangle$, ce qui est également impossible.

Le lemme 3 montre que si RM range tous les 1-types (T est totalement transcendante), alors RM range aussi tous les n-types ; c'est plus évident lorsque T est dénombrable, par ω-stabilité. Et le lemme 4 montre que si pour tout A les types rangés par RM sont denses dans $S_1(A)$ (T est quasi totalement transcendante) il en est de même pour les n-types ; dans ce cas, un type isolé est toujours rangé par le rang de Morley, et tout ce que nous avons dit sur les modèles atomiques et premiers, reste valable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Groupe d'étude de Théories stables (Bruno POIZAT), 1re année, 1977/78. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978.