Groupe d'étude de théories stables

Françoise Delon

Types sur $\mathbb{C}((x))$

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 5, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A5_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
2e année, 1978/79, n° 5, 29 p.

TYPES SUR $\underset{\sim}{C}((X))$

par Françoise DELON (*)
[Université Paris-7]

La théorie des corps valués henséliens de caractéristique résiduelle nulle est bien connue depuis les travaux d'AX, de KOCHEN et d'ERŠOV [E]. Un des points délicats de leur étude était de trouver dans le corps K une représentation de son groupe de valuation : les premiers articles d'AX et de KOCHEN [AK] ne considéraient ainsi que des corps valués dans des $\underset{\sim}{Z}$-groupes, c'est-à-dire des modèles de $\langle \underset{\sim}{Z}, +, 0, 1, \geqslant\rangle$; KOCHEN [K] résoud définitivement le problème en montrant que tout corps ω_1-saturé contient un relèvement de son groupe de valuation. Nous nous plaçons ici dans un cas volontairement simple : le corps résiduel $\overline{K}$ de caractéristique nulle est supposé clos par radicaux. Dans ces conditions, si K est hensélien, il contient des sous-groupes multiplicatifs isomorphes à val K, et ces sous-groupes sont aisément caractérisables (lemme 3). Nous obtenons alors (théorème 5) une description complète des types sur les modèles K, qui se répartissent en trois familles :

- des types résiduels, accroissant $\overline{K}$,
- des types valuationnels, accroissant val K,
- des types immédiats, réalisables dans une extension immédiate de K.

Une approche analogue est faite dans [CK], mais il y a dans le langage utilisé deux prédicats pour les relèvements respectifs de val K et $\overline{K}$ dans K, ce qui augmente considérablement les ensembles définissables. Une fois décrits les types sur un modèle, nous pouvons étudier la stabilité d'une façon très fine : l'instabilité est évidente du fait de l'ordre sur le groupe de valuation, mais, en un certain sens, le degré d'instabilité de K ne peut dépasser ceux de $\overline{K}$ ou val K : K a la propriété d'indépendance si, et seulement si, $\overline{K}$ ou val K l'a (théorème 8). Le résultat s'établit grâce à l'analyse des extensions remarquables des types d'un modèle à un autre ; le cas des types immédiats est particulièrement intéressant : on connaît l'existence de corps maximaux ; sur une telle structure tous les types immédiats sont réalisés. Ainsi, si $p \in S_1(M)$ est immédiat, et si $N \succ M$ est maximal, un cohéritier de p sur N ne peut être immédiat : on verra qu'il est en fait valuationnel.

(*) Françoise DELON, UER Mathématiques, aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

On applique en particulier l'étude précédente aux corps de séries formelles, ce qui établit que, si k^* est divisible, $k((X))$ a la propriété d'indépendance si, et seulement si, k l'a. Pour mener à bien cette illustration, un chapitre est consacré aux $\underset{\sim}{Z}$-groupes. On y décrit complètement les types (sur un ensemble de paramètres quelconque), leur définissabilité, leurs héritiers et cohéritiers. Ce chapitre X peut être lu de façon indépendante.

Dans le cas d'un corps résiduel de caractéristique nulle, mais non clos par racines, la description des types valuationnels est plus complexe. Ainsi, si K est le corps des séries formelles généralisées sur $\underset{\sim}{Q}$, à exposants dans $\underset{\sim}{Z}^*$, où $\underset{\sim}{Z}^*$ est un modèle non standard des entiers, considérons les types sur $\underset{\sim}{Q}((X))$ de $x = X^{2\alpha}$ et $y = 2X^{2\alpha}$, $\alpha \in \underset{\sim}{Z}^* - \underset{\sim}{Z}$. On voit aussitôt que x est un carré, ce que n'est pas y, et que donc les types sont distincts alors qu'ils correspondent à la même coupure infinie sur $\operatorname{val} K$; en fait le coefficient 2 de y intervient ; les types valuationnels et résiduels interfèrent plus ou moins. Mais le résultat $k((X))$ a la p. i., si, et seulement si, k l'a, reste vrai.

I. Corps valués. Définition et propriétés

Définition. - Un corps valué K est un corps muni d'une surjection, appelée valuation, $K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$, où G est un groupe ordonné (noté additivement), ∞ un élément supérieur à tous les éléments de G et absorbant pour $+$, vérifiant :

$\operatorname{val}(x) = \infty$ si, et seulement si, $x = 0$,

$\operatorname{val}(x + y) \geq \operatorname{Min}[\operatorname{val}(x), \operatorname{val}(y)]$,

$\operatorname{val}(x \cdot y) = \operatorname{val}(x) + \operatorname{val}(y)$.

Dans un corps valué, on définit l'anneau de valuation $A = \{x \in K ; \operatorname{val}(x) \geq 0\}$. C'est un anneau local, d'idéal maximal $I = \{x \in K ; \operatorname{val}(x) > 0\}$; les éléments de $A - I$ sont appelés les unités de A. Le corps résiduel $\overline{K}$ de K est le corps A/I ; on notera $\overline{x}$ la classe de $x \in A$.

Définition. - Un anneau valué est un anneau muni d'une application ayant toutes les propriétés précédemment indiquées, sauf éventuellement la surjectivité dans $G \cup \{\infty\}$.

1° $\operatorname{val}(g) = \infty$ si, et seulement si, $g = 0$,

$\operatorname{val}(gg') = \operatorname{val}(g) + \operatorname{val}(g')$.

Dans l'inégalité $\operatorname{val}(g + g') \geq \inf(\operatorname{val}(g), \operatorname{val}(g'))$, l'égalité est réalisée si $\operatorname{val}(g) \neq \operatorname{val}(g')$; plus généralement on a

$$\operatorname{val}(g_1 + \dots + g_n) = \operatorname{val}(g_2) \quad \text{si} \quad \operatorname{val}(g_1) < \operatorname{val}(g_2) < \dots < \operatorname{val}(g_n).$$

2° Si A est un anneau valué, à valeurs dans un semi-groupe, il existe un seul prolongement de la valuation au corps de fraction de A, il est défini par

$$\mathrm{val}(ab^{-1}) = \mathrm{val}(a) - \mathrm{val}(b) .$$

3° Exemples.

(a) $K = k(X)$ muni de la valuation usuelle sur les polynômes et fractions rationnelles ; $\mathrm{val}\, K = \underset{\sim}{Z}$, $A_{\mathrm{val}} = k[X]$, $\overline{K} \simeq k$.

(b) Sur un corps K quelconque, la valuation triviale envoie 0 sur ∞ et tout élément non nul sur 0 . Nous utiliserons ultérieurement le résultat suivant : Si la valuation est triviale sur K elle est triviale sur toute extension algébrique L de K . En effet, tout élément $x \in L$ est racine d'un polynôme sur K , soit $\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i = 0$. Cette somme ne peut être nulle que s'il y a deux termes au moins de plus basse valuation, soit : $\mathrm{val}(a_p\, x^p = \mathrm{val}(a_q\, x^q$, donc

$$(p - q)\, \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(a_q\, a_p^{-1}) = 0 .$$

4° Extension de corps valués.

A l'extension de corps valués $K \subset L$, on associe l'extension résiduelle $\overline{K} \subset \overline{L}$ et celle des groupes de valuation ; si on a $\overline{K} = \overline{L}$ et $\mathrm{val}\, K = \mathrm{val}\, L$ l'extension $K \subset L$ est dite immédiate.

Soit $K \subset L$ une extension de corps ; une valuation sur K admet (au moins) un prolongement à L .

5° Corps valués complets et maximaux.

Quand la valuation sur K est à valeurs réelles, on lui associe la métrique définie par :

$$d(g , g') = \exp[- \mathrm{val}(g - g')] ,$$

métrique dans laquelle l'inégalité triangulaire prend une forme très forte : tout triangle est isocèle. On sait alors définir le complété $\hat{K}$ de K , qui est muni canoniquement d'une structure de corps valué prolongeant celle de K , et qui est une extension immédiate de K . C'est cette construction qui donne le corps de séries formelles

$$k((X)) = \{\sum_{n_0}^{\infty} a_p\, X^p \ ; \ n_0 \in \underset{\sim}{Z} , \ a_p \in k\}$$

à partir de $k(X)$.

Si la valuation n'est pas à valeurs réelles, la notion de corps valué complet se généralise en corps maximal : un corps valué est dit maximal lorsqu'il n'admet aucune extension immédiate propre.

6° Corps valués henséliens.

Un corps valué K est dit hensélien lorsqu'il a la propriété de Hensel : Soit un polynôme unitaire $P(t) \in K[t]$, dont tous les coefficients sont de valuation ≥ 0 .

Si le polynôme résiduel $\overline{P}(t)$ admet une racine simple $a \in \overline{K}$, alors P admet une racine $b \in K$ avec $\overline{b} = a$.

PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) K *est hensélien.*

(ii) *Soit* $P(t)$ *unitaire* $\in K[t]$ *admettant une décomposition résiduelle* $\overline{P}=A_1.A_2$ *où* A_1 , $A_2 \in \overline{K}[t]$ *sont premiers entre eux. Alors il existe* B_1 , $B_2 \in K[t]$ *tels qu'on ait* $P = B_1.B_2$, $\overline{B}_1 = A_1$ *et* $\overline{B}_2 = A_2$.

(iii) *La valuation sur* K *se prolonge de façon unique à toute extension algébrique de* K .

PROPOSITION. - *Un corps maximal est hensélien.*

PROPOSITION.

(i) *Soit* K *hensélien,* $K \subset L$ *une extension algébrique de* K , $\ell \in L$ *admettant pour polynôme minimal sur* K , *le polynôme* $t^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \dots + a_1\, t + a_0$; *pour la seule valuation de* L *prolongeant celle de* K , *tous les conjugués de* ℓ *ont même valuation égale à* $\frac{1}{n}\,\mathrm{val}(a_0)$.

(ii) *Si* K *est un corps hensélien de caractéristique résiduelle* 0, L *une extension algébrique finie de* K , *on a* :

$$[L : K] = [\overline{L} : \overline{K}](\mathrm{val}\ L\ ;\ \mathrm{val}\ K)$$

où $(\mathrm{val}\ L\ ;\ \mathrm{val}\ K)$ *est l'indice de* $\mathrm{val}\ K$ *dans* $\mathrm{val}\ L$.

(iii) *Soit* K *un corps valué hensélien, avec* $\mathrm{caract}(\overline{K}) = 0$, $\overline{K}$ *algébriquement clos et* $\mathrm{val}\ K$ *divisible. Alors* K *est algébriquement clos.*

(iv) *Soient* $K \subset L$ *deux corps valués,* $\mathrm{caract}(\overline{L}) = 0$. *Si* K *est hensélien,* $\overline{K}$ *relativement algébriquement clos dans* $\overline{L}$ *et* $\mathrm{val}\ K$ *pur dans* $\mathrm{val}\ L$, *alors* K *est relativement algébriquement clos dans* L .

Clôture hensélienne : Si K est un corps valué, il existe une extension $\tilde{K}$ de K telle que

(i) $\tilde{K}$ est hensélienne,

(ii) tout corps hensélien contenant K contient une image K-isomorphe de $\tilde{K}$.

Cette extension est unique à K-isomorphisme près ; on l'appelle clôture hensélienne de K , notée $\tilde{K}$. C'est une extension immédiate de K qui s'obtient de la façon suivante : Si K_S est la clôture séparable de K et si on a prolongé sur K_S , val en val_S , $\tilde{K}$ est le corps des invariants du groupe d'automorphismes $\{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_S/K)\ ;\ \mathrm{val}_S \circ \sigma = \mathrm{val}_S\}$.

Notations.

- $\overline{K}$ est le corps résiduel de K .

- $\tilde{K}$ la clôture hensélienne.
- $\underset{\sim}{K}$ la clôture algébrique.
- K^* le groupe multiplicatif de K (ou son support $= K - \{0\}$).

II. Langage

Notre travail ayant pour but d'étudier les types des éléments d'un corps valué, nous travaillerons avec un langage à un seul type de variables (il aurait été naturel de prendre trois types de variables pour, respectivement, les éléments du corps, du corps résiduel, et du groupe de valuation). Un langage adéquat a été défini dans [M, MK, VdD] ; $\mathcal{L}$ est le langage des anneaux auquel on adjoint un prédicat binaire div , avec $\mathrm{div}(x , y)$ si, et seulement si, $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(y)$. Cette relation est un préordre total. Si K est un corps muni de la relation div , val K apparaît comme l'ordre quotient associé au préordre div ; la valuation d'un élément de x est sa classe dans cet ordre et l'addition sur val K est la projection de la multiplication sur K . Le corps résiduel est alors défini comme usuellement.

L'équivalence entre les deux définitions des corps valués est aisée à vérifier. Formellement, nous continuerons à utiliser la notation usuelle. Mais la formulation de nos démonstrations, en particulier aux paragraphes VII et VIII n'est correcte que si le seul type de variables correspond aux éléments du corps.

AX, KOCHEN et ERŠOV ont montré que la traduction au 1er ordre de la maximalité d'un corps était la propriété de Hensel. Notre démonstration de ce résultat, en utilisant la simplification d'un cas particulier évite le recours à des modèles saturés et explicite le va-et-vient souvent dissimulé dans les démonstrations.

III. Classification des types sans quantificateurs sur un corps valué

Soit $K \subset M$ deux corps valués, $x \in M$. Pour décrire le type de x sur K , on introduit l'ensemble

$$I_K(x) = \{g \in \mathrm{val}\ K \ ;\ \text{il existe } k \in K \text{ tel que } M \models \mathrm{val}(x - k) \geq g\} \ ;$$

$I_K(x)$ est un segment initial de val K . Si $k \in K$, $\ell \in L$, $g \in \mathrm{val}\ K$, vérifient :

$$\mathrm{val}(x - k) > g \quad \text{et} \quad \mathrm{val}(\ell) = g \ ,$$

on a

$$\mathrm{val}[x - (k + \ell)] = g \ ;$$

$I_K(x)$ coïncide donc avec l'ensemble

$$\{g \in \mathrm{val}\ K \ ;\ \text{il existe } k \in K \text{ tel que } \mathrm{val}(x - k) = g\} \ .$$

En général $I_K(x)$ et $\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\}$ sont distincts, on a seulement la relation

$$I_K(x) = \{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\} \cap \mathrm{val}\, K .$$

On va distinguer les cas suivants :

1° $\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\} \subset \mathrm{val}\, K$ et $I_K(x)$ a un plus grand élément. On dira alors que x est *résiduel* sur K .

2° $\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\} \subset \mathrm{val}\, K$ et $I_K(x)$ n'a pas de plus grand élément ; x sera dit *immédiat* sur K .

3° Il existe $k_0 \in K$ tel que $\mathrm{val}(x-k_0) \notin \mathrm{val}\, K$. Dans ce cas, les relations :

$$\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\} = I_K(x) \cup \{\mathrm{val}(x-k_0)\} ,$$

$$I_K(x) < \mathrm{val}(x-k_0) ,$$

se déduisent de l'égalité

$$\mathrm{val}(x-k) = \mathrm{val}[(x-k_0) + (k_0 - k)]$$

où $x - k_0$ et $k_0 - k$ ont nécessairement des valuations distinctes. On dira que x est *valuationnel* sur K .

Cette terminologie se justifiera lors de la description précise des types. Remarquons que la distinction des types peut se faire de la façon suivante :

1° type résiduel : $I_K(x) = \{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\}$ et $I_K(x)$ admet un plus grand élément.

2° type valuationnel : $\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\} = I_K(x) \cup \{g_0\}$ avec $g_0 > I_K(x)$.

3° type immédiat : $\{\mathrm{val}(x-k)\ ;\ k \in K\}$ n'admet pas de plus grand élément.

IV. Types résiduels

THÉORÈME 1. - *Soient* $K \subset M$ *deux corps valués henséliens,* $\overline{K}$ *(de caractéristique* 0 *) algébriquement clos dans* $\overline{M}$, $x \in M$ *résiduel sur* K . *Alors :*

(i) *Il existe* $a_x \in K^*$ *et* $b_x \in K$ *tels que*

$$\mathrm{val}(a_x\, x + b_x) = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \overline{a_x\, x + b_x} \notin \overline{K} .$$

(ii) *Il existe un corps* K_x *vérifiant* $K \subset K_x \subset M$ *et* $x \in K_x$, $\overline{K}_x$ *algébriquement clos dans* $\overline{M}$, $\mathrm{val}\, K_x = \mathrm{val}\, K$, *le type de* K-*isomorphisme de corps valué de* K_x *ne dépend que du type de* $\overline{K}$-*isomorphisme de* $\overline{K}_x$.

LEMME 1. - *Soit* K *un corps valué hensélien,* $\overline{K}$ *de caractéristique nulle,* K_0 *un sous-corps de* K *trivialement valué, et maximal pour cette propriété. Alors le passage au reste établit un isomorphisme de* K_0 *dans* $\overline{K}$.

Démonstration. - On considère la famille $\mathcal{K}$ des sous-corps de K sur lesquels la valuation est triviale ; $\mathcal{K}$ n'est pas vide, parce que contenant $\underset{\sim}{Q}$. En effet, pour tout entier n, on a

$$\mathrm{val}(n) = \mathrm{val}(1 + \ldots + 1) \geqslant 0$$

et supposer $\mathrm{val}(n) > 0$ contredirait la caractéristique nulle de $\overline{K}$. Par ailleurs, $\mathcal{K}$ est inductif. Soit K_0 un élément maximal de $\mathcal{K}$:

(a) Le passage au reste établit une injection de K_0 dans $\overline{K}$.

Soit $x , y \in K_0$, d'où les relations $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y) = 0$. Si x et y avaient même reste, on aurait $\mathrm{val}(x - y) > 0$, et donc $x = y$, puisque la valuation est triviale sur K_0.

(b) K_0 est algébriquement clos dans K.

La valuation étant triviale sur K_0, elle l'est sur toute extension algébrique de K_0. Soit en effet x vérifiant $\sum_{n\leqslant N} a_n x^n = 0$, $a_n \in K_0$, $n = 0 \ldots N$. Cette égalité ne peut avoir lieu que si dans le premier membre les valuations des termes de plus basse valuation sont égales, c'est-à-dire

$$\mathrm{val}(a_p\, x^p) = \mathrm{val}(a_q\, x^q)$$
$$\mathrm{val}(x^{p-q}) = \mathrm{val}(a_p^{-1}\, a_q) = 0 .$$

L'affirmation résulte alors de la maximalité de K_0.

(c) $\overline{K}_0$ est algébriquement clos dans $\overline{K}$.

Soit $p(x) \in \overline{K}_0(X)$, unitaire, irréductible, admettant une racine dans $\overline{K}$. Nous sommes en caractéristique 0, cette racine est donc simple et par la propriété de Hensel, si $P(X) \in K_0[X]$ avec $\overline{P} = p$, $d^0(P) = d^0(p)$ et P admet une racine $a \in K$; par (b), $a \in K_0$ et p, donc P, est du premier degré.

(d) Le passage au reste établit une surjection de K_0 sur $\overline{K}$.

Supposons qu'il existe $x \in K$ tel que

$$\overline{x} \neq \overline{k} , \quad \forall\, k \in K_0 .$$

D'après (c), $\overline{x}$ est transcendant sur $\overline{K}_0$, c'est-à-dire que, pour tout $P \in K_0[X]$, on a $\overline{P}(\overline{x}) \neq 0$, et donc $\mathrm{val}(P(x)) = 0$.

La valuation serait triviale sur $K_0(x)$, ce qui contredirait la maximalité de K_0.

LEMME 2. - Soit M un corps valué, $M_0 \subset M$ tel que le passage au reste établisse un isomorphisme α entre M_0 et $\overline{M}$, $K \subset M$ tel que $K_0 = \alpha^{-1}(\overline{K})$ soit inclus dans K. Alors :

(i) K et M_0 sont linéairement disjoints au-dessus de K_0.

(ii) Tout élément $m \in K[M_0]$ s'écrit $m = \sum_{r=1}^{n} k_i\, m_i$, avec $k_1 , \ldots , k_n \in K$, $m_1 , \ldots , m_n \in M_0$ et $\mathrm{val}(k_1) < \mathrm{val}(k_2) < \ldots < \mathrm{val}(k_n)$.

(iii) $\operatorname{val} KM_0 = \operatorname{val} K$.

(iv) Soit L un corps intermédiaire $K_0 \subset L \subset M_0$; les propriétés (i), (ii) et (iii) restent alors vraies si on remplace M_0 par L . On a de plus, $\overline{KL} = \overline{L}$.

Démonstration. - Remarquons d'abord que la condition $\alpha^{-1}(\overline{K}) \in K$ équivaut à $\alpha^{-1}(\overline{K}) = K \cap M_0$ puisque $K \cap M_0$ est un sous-corps valué trivialement de K .

(i) Soit $m_1 , \ldots , m_n \in M_0$ liés au-dessus de K . Il existe $k_1 , \ldots , k_n \in M$ tels que $\sum_{n=1}^{n} k_i m_i = 0$, on peut choisir les k_i tous de valuation positive et un au moins de valuation exactement nulle. On a donc $\sum \overline{k}_i \overline{m}_i = 0$, où un des k_i est non nul. En appliquant α^{-1} , on voit que les m_i sont liés sur K_0 .

(ii) Soit $m = \sum_{n=1}^{n} k_i m_i \in K[M_0]$, et supposons qu'on ait :

$$\operatorname{val}(k_1) = \operatorname{val}(k_2) \leq \operatorname{val}(k_i) \ , \quad i = 3 , \ldots , n .$$

On a donc

$$k_1^{-1} k_2 = \alpha^{-1}(\overline{k_1^{-1} k_2}) + v \ , \text{ avec } \operatorname{val}(v) > 0 \ ,$$

soit

$$\begin{aligned} k_1 m_1 + k_2 m_2 &= k_1[m_1 + \alpha^{-1}(\overline{k_1^{-1} k_2})m_2 + vm_2] \\ &= k_1[m_1 + \alpha^{-1}(\overline{k_1^{-1} k_2})m_2] + (k_1 v)m \end{aligned}$$

ce qui est une nouvelle écriture de m dans laquelle le nombre de termes de plus basse valuation a diminué d'un. On itère éventuellement pour obtenir une écriture dans laquelle tous les k_i soient de valuations distinctes.

(iii) Soit $m \in K[M_0]$. On choisit une écriture $m = \sum_{n=1}^{n} k_i m_i$, $\operatorname{val}(k_1) < \operatorname{val}(k_2) < \ldots < \operatorname{val}(k_n)$; on a donc $\operatorname{val}(m) = \operatorname{val}(k_1)$, ce qui établit les égalités $\operatorname{val} K[M_0] = \operatorname{val} KM_0 = \operatorname{val} K$.

(iv) Les propriétés (i), (ii) et (iii) s'établissent comme précédemment. Pour ce qui est des corps résiduels, un élément $m \in KL$ s'écrit $(\sum_{i=1}^{n} k_i \ell_i)(\sum_{i=1}^{n'} k_i' \ell_i')^{-1}$ où les k_i et les k_i' sont rangés par valuation croissante. Si $\operatorname{val}(m) = 0$, on a nécessairement

$$\operatorname{val}(k_1) = \operatorname{val}(k_1') \quad \text{et} \quad \overline{m} = \overline{(k_1 k_1'^{-1})} \overline{\ell}_1 . \overline{\ell_1'^{-1}} \in \overline{L} .$$

Démonstration du théorème 1.

(i) Soit g_0 le plus grand élément de $I_K(x)$, on a donc

$$\operatorname{val}(x - k) = g_0 = \operatorname{val}(k_0) \ , \quad k \in K \ , \quad k_0 \in K^* \ ;$$

$(x - k)k^{-1}$ est un élément de valuation nulle, et s'il avait même reste qu'un élément $k' \in K$, on aurait $\operatorname{val}[(x - k)k_0^{-1} - k'] > 0$, soit

$$\operatorname{val}(x - k - k_0 k') > \operatorname{val}(k_0) .$$

(ii) Soit dans K un sous-corps K_0 isomorphe à $\overline{K}$, construit comme il est indiqué dans le lemme 1. Pour pouvoir choisir comme corps M_0 isomorphe à $\overline{M}$ un corps contenant K_0 et $y = a_x x + b_x$, il suffit de montrer que $K_0(y)$ est valué trivialement. Or pour un polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \in K_0[X]$, on a

$$\mathrm{val}(P(y)) \geq \inf_{i=0,\dots,n}\{\mathrm{val}(p_i\, y^i)\} = 0 ,$$

et $P(y)$ n'est pas de valuation strictement positive, puisque $\overline{y}$ n'est pas algébrique sur $\overline{K}$. Soit donc M_0 ainsi choisi et soit L , $K_0 \subset L \subset M_0$, L algébriquement clos dans M_0 et contenant y . Par le lemme 2 (iv), si $K_x = KL$, on a $\overline{K}_x = \overline{L}$ isomorphe à L et val K_x = val K. De plus L et K sont linéairement disjoints au-dessus de K_0 , on a donc KL $K \otimes_{K_0} L$, et si L' est isomorphe à L par un K_0-isomorphisme π , π s'étend de façon naturelle de K_x dans K'_x = KL' : si $\ell = \sum_{i=1}^{n} k_i \ell_i \in K[L]$, $k_1 , \dots , k_n \in K$, $\ell_1 , \dots , \ell_n \in L$, $\mathrm{val}(k_1) < \dots < \mathrm{val}(k_n)$,

$$\pi(m) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, \pi(\ell_i) ,$$

et

$$\mathrm{val}[\pi(m)] = \mathrm{val}(k_1) = \mathrm{val}(m) ,$$

π est donc un K-isomorphisme de corps valués de K_x dans K'_x .

V. Types valuationnels

THÉORÈME 2. - Soit $K \subset M$ deux corps valués henséliens, $\overline{M}$ et $\overline{K}$ de caractéristique nulle et clos par radicaux, val K sous-groupe pur de val M . Soit $x \in M$ valuationnel sur K . Alors il existe un corps K_x vérifiant :

- $K \subset K_x \subset M$, $x \in K_x$,
- $\overline{K}_x = \overline{K}$,
- val K_x sous-groupe pur de val M .
- le type de K-isomorphisme de corps valué de K_x ne dépend que du type de (val K)-isomorphisme de val K_x .

LEMME 3. - Soit un corps valué hensélien tel que $\overline{K}$ soit de caractéristique nulle et clos par radicaux, H un sous-groupe de $(K^* , \circ)$ sur lequel la valuation est injective, et maximal pour cette propriété. Alors la valuation établit un isomorphisme de H sur val K .

Démonstration. - Avec les hypothèses faites sur K , un élément $k \in K$ est puissance n si, et seulement si, $\mathrm{val}(k)$ est divisible par n : en effet, si $\mathrm{val}(k) = n\, \mathrm{val}(k_1)$ avec $k_1 \in K$, considérons l'équation

$$X^n - k k_1^{-n} = 0 .$$

L'équation résiduelle a toutes ses solutions distinctes puisque nous sommes en caractéristique nulle. Ces solutions se relèvent en racines n-ièmes de $k k_1^{-n}$.

Supposons la valuation non triviale sur K (le lemme est trivial sinon) et considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-groupes multiplicatifs de K^* sur lesquels la valuation est injective ; $\mathcal{H}$ est non vide car pour tout x de valuation non nulle, $\mathcal{H}$ contient le groupe $\{x^n ; n \in \underset{\sim}{Z}\}$, et il est inductif. Par le théorème de Zorn, $\mathcal{H}$ contient au moins un élément maximal H. Ce groupe a les propriétés suivantes :

(a) Par construction, <u>la valuation est injective sur</u> H.

(b) $\mathrm{val}\, H$ <u>est un sous-groupe pur de</u> $\mathrm{val}\, K$:

Soit $h_0 \in H$ de valuation divisible par p premier, h_0 est alors une puissance p-ième dans K, $h_0 = k_0^p$. Considérons l'idéal :

$$I = \{m \in \underset{\sim}{Z} ;\ \exists\, h \in H \text{ vérifiant } \mathrm{val}(hk_0^m) = 0\} ;$$

manifestement p est dans I et il n'y a donc que deux possibilités :

– $I = \underset{\sim}{Z}$, auquel cas il existe $h_1 \in H$ tel que $\mathrm{val}(k_0) = \mathrm{val}(h_1)$ et donc, par injectivité de la valuation sur H, $h_0 = h_1^p$.

– $I = p\underset{\sim}{Z}$; une égalité

$$\mathrm{val}(hk_0^m) = 0 , \quad h \in H ,$$

n'est donc possible que si on a $m = pm'$, ce qui permet de se ramener dans H, où val est injective :

$$\mathrm{val}(hh_0^{m'}) = 0 \Longrightarrow hh_0^{m'} = 1 \Longrightarrow hk_0^m = 1 .$$

La valuation est donc injective sur $H(k_0)$ ce qui contredirait la maximalité de H.

(c) <u>La valuation établit une surjection de</u> H <u>sur</u> $\mathrm{val}\, K$.

Supposons par l'absurde l'existence de $x \in K$ tel que :

$$\forall\, h \in H , \quad \mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(h) ,$$

et montrons qu'alors la valuation serait injective sur $H(x)$: soient $n \in \underset{\sim}{Z}$ et $h \in H$ vérifiant :

$$\mathrm{val}(x^n h) = 0 ;$$

alors n divise $\mathrm{val}(h)$, qui est donc une puissance n-ième <u>dans</u> H, soit $h = h_1^n$; d'où $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(h_1^{-1})$, contradiction.

LEMME 4. – <u>Soient</u> M <u>un corps valué</u>, G <u>un sous-groupe de</u> $(M^*, .)$ <u>tel que la valuation établisse un isomorphisme</u> β <u>entre</u> G <u>et</u> $\mathrm{val}\, M$, K <u>un sous-corps de</u> M <u>contenant</u> $H = \beta^{-1}(\mathrm{val}\, K)$. <u>Alors</u> :

(i) <u>Tout élément</u> $m \in K[G]$ <u>s'écrit</u> $\sum_{i=1}^{n} k_i g_i$ <u>avec</u> $k_1, \ldots, k_n \in K$, $g_1, \ldots, g_n \in G$ <u>et</u> $\mathrm{val}(k_1 g_1) < \mathrm{val}(k_2 g_2) < \ldots < \mathrm{val}(k_n g_n)$.

(ii) $\overline{K(G)} = \overline{K}$.

(iii) Si on remplace G par un groupe F , $H \subset F \subset G$, les propriétés (i) et (ii) restent vraies et on a de plus $\operatorname{val} K(F) = \operatorname{val} F$.

Démonstration.

(i) Soit $m = \sum_{i=1}^{n} g_i k_i \in K[G]$ avec $\operatorname{val}(g_\ell k_\ell) = \operatorname{val}(g_j k_j)$. On a alors

$$\operatorname{val}(g_\ell g_j^{-1}) = \operatorname{val}(k_\ell^{-1} k_j) \in \operatorname{val} K ,$$

donc

$$g_\ell g_j^{-1} \in H \quad \text{et} \quad g_\ell k_\ell + g_j k_j = g_j(k_j + g_\ell g_j^{-1} k_\ell) .$$

(ii) Un élément de $K(G)$ s'écrit $\ell = (\sum g_i k_i)(\sum g_i' k_i')^{-1}$ où les $g_i k_i$ d'une part, et les $g_i' k_i'$ d'autre part, sont rangés par valuation croissante. Si ℓ est de valuation nulle, on a nécessairement $\operatorname{val}(g_1 k_1) = \operatorname{val}(g_1' k_1')$ donc $g_1 g_1'^{-1} \in H$, et ℓ a même reste que $(g_1 g_1'^{-1}) k_1 k_1'^{-1}$ qui est dans K . Le corps résiduel ne s'est donc pas accru entre K et $K(G)$.

(iii) Les démonstrations précédentes restent valables si F remplace G . Un élément $f \in K[F]$ s'écrit $f = \sum_{i=1}^{n} f_i k_i$, où les $f_i k_i$ sont de valuation croissante. On a donc $\operatorname{val}(f) = \operatorname{val}(f_1) + \operatorname{val}(k_1) \in \operatorname{val} F$.

LEMME 5. - Soient $K \subset M$ et $H \subset G$ comme dans le lemme précédent, $k_1, \dots, k_n \in K$. Quels que soient $g_1 , \dots g_n \in G$, il existe $h_1 , \dots , h_n \in H$ tels que :

$$\sum h_i k_i = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \sum g_i k_i = 0 .$$

Démonstration. - On a $\sum g_i k_i = 0$; si les $g_i k_i$ sont ordonnés par valuation croissante, il y a au moins deux termes de plus basse valuation. Si on regroupe les termes de la somme sous la forme :

$$g_1(k_1 + g_1^{-1} g_2 k_2 + \dots + g^{-1} g_{n_1-1} k_{n_1-1}) + g_{n_1}(\dots)$$
$$+ \dots + g_{n_\ell}(k_{n_\ell} + g_{n_\ell}^{-1} g_{n_\ell+1} k_{n_\ell+1} + \dots + g_{n_\ell}^{-1} g_n k_n)$$

où

$$\begin{aligned} &\operatorname{val}(g_1 k_1) = \operatorname{val}(g_i k_i) , && 1 \leqslant i < n_1 \\ &< \operatorname{val}(g_{n_1} k_{n_1}) = \operatorname{val}(g_i k_i) , && n_1 \leqslant i < n_2 \\ &< \dots < \operatorname{val}(g_{n_\ell} k_{n_\ell}) = \operatorname{val}(g_i k_i) , && n_\ell \leqslant i \leqslant n \end{aligned}$$

le nombre de termes a diminué.

Les coefficients des g_{n_j} sont dans K , puisque si $n_j \leqslant i < n_{j+1}$, on a :

$$\operatorname{val}(g_{n_j}^{-1} g_i) = \operatorname{val}(k_{n_j} k_i^{-1}) \in \operatorname{val} K \quad \text{donc} \quad g_{n_j}^{-1} g_i \in H .$$

En itérant, on arrive à une expression

$$g_{n_{j_0}} L(k_1 , \dots , k_n) = 0$$

où L est une forme linéaire dont les coefficients sont des produits de termes $g_i^{-1} g_j$, appartenant à H.

<u>Démonstration du théorème</u> 2. - Soit dans K un sous-groupe multiplicatif H isomorphe à $\mathrm{val}\, K$ (cf. lemme 3).

La valuation est injective sur $H(y)$, où $y = x - a_x$ (on aurait sinon $n\, \mathrm{val}(y) \in \mathrm{val}\, K$, pour un entier n), on peut donc choisir comme groupe G isomorphe à $\mathrm{val}\, M$, un groupe contenant $H(y)$. Soit F un sous-groupe pur de G, $H(y) \subset F \subset G$ et si on pose $K_x = K(F)$, seule la dernière propriété demandée à K_x n'est pas une conséquence immédiate du lemme 4. Soit donc F', $H(y) \subset F' \subset G$, F' image de F par un H-isomorphisme χ et considérons la correspondance :

$$\sum k_i f_i \longrightarrow \sum k_i \chi(f_i) , \quad k_i \in K , \quad f_i \in F .$$

On veut qu'elle définisse une application γ de $K_x = K(F)$ dans $K'_x = K(F')$, c'est-à-dire que deux écritures distinctes d'un élément de K_x conduisent à deux écritures d'un même élément de K'_x. Par différence, on se ramène à montrer :

$$\sum k_i f_i = 0 \Longrightarrow \sum k_i \chi(f_i) = 0 .$$

Par le lemme 5,

$$\sum k_i f_i = 0 \text{ si, et seulement si, } L(k_1 , \dots , k_n) = 0$$

où L est une forme linéaire dont les coefficients sont des produits de termes $g_j^{-1} g_i$ qui appartiennent à H et sont donc invariants par χ. On a donc : $L(k_1 , \dots , k_n) = 0$ si, et seulement si, $L_\chi(k_1 , \dots , k_n) = 0$ si, et seulement si $\sum k_i \chi(f_i) = 0$. Par ailleurs, χ commute avec la valuation.

VI. Types immédiats

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> $K \subset M$ <u>deux corps valués henséliens</u>, $\overline{K}$ <u>de caractéristique</u> 0 <u>algébriquement clos dans</u> $\overline{M}$, $\mathrm{val}\, K$ <u>sous-groupe pur de</u> $\mathrm{val}\, M$, $x \in M$ <u>immédiat sur</u> K. <u>Alors</u> :

(i) $K(x)$ <u>est une extension immédiate de</u> K,

(ii) <u>le type de</u> K-<u>isomorphisme de corps valué de</u> $K(x)$ <u>ne dépend que d'une suite</u> $(g_\alpha ; a_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$, <u>où</u> $(g_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$ <u>est une suite cofinale de</u> $I_K(x)$, <u>et</u> $a_\alpha \in K$ <u>satisfait</u> $\mathrm{val}(x - a_\alpha) = g_\alpha$.

<u>Démonstration</u>.

(i) Nous procédons en six étapes :

(a) $\forall\, k \in K$, $\mathrm{val}(x - k) \in \mathrm{val}\, K$ et $\exists\, x_0 \in K$, $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(x_0) < \mathrm{val}(x-x_0)$.

Le premier point est, par définition, une propriété d'un type immédiat ; pour le second, il suffit de prendre $x_0 \in K$ tel que $\mathrm{val}(x) < \mathrm{val}(x - x_0)$: un tel x_0 existe puisque $I_K(x)$ n'a pas d'élément maximal.

(b) $\forall\, a, b \in K$, $[\mathrm{val}(ax+b) = 0 \Rightarrow \overline{ax+b} \in \overline{K}]$.

Si $ax + b$ est de valuation nulle, on a $\mathrm{val}(a^{-1}) = \mathrm{val}(x + ba^{-1})$ et $a^{-1} \in I_K(x)$; il existe donc $c \in K$ vérifiant $\mathrm{val}(x - c) > \mathrm{val}(a^{-1})$; on vérifie qu'on a alors

$$\overline{ax+b} = \overline{ac+b} \in \overline{K}$$

(c) <u>Si</u> $c_1 \ldots c_n$ <u>sont des algébriques conjugués sur</u> K, <u>on a</u> $\mathrm{val}(x - c_1) = \ldots = \mathrm{val}(x - c_n)$.

Remarquons d'abord que la valuation des $x - c_i$ est définie sans ambiguité puisque ce sont des éléments algébriques sur une structure hensélienne. Les c_i restent conjugués sur M du fait que K est algébriquement clos dans M ; les $x - c_i$ sont donc conjugués sur M.

(d) $\forall\, c \in \underset{\sim}{K}$, $\exists\, k \in K$, $\mathrm{val}(x-k) \neq \mathrm{val}(c-k)$.

On raisonne par l'absurde. Soient $c_1 \in \underset{\sim}{K}$ contredisant (d), $P(X) \in K[X]$ son polynôme minimal sur K, $c_2 \ldots c_n$ ses conjugués ; on a :

$$\mathrm{val}(c_i - \frac{p_{n-1}}{n}) = \mathrm{val}(x - \frac{p_{n-1}}{n}) = \mathrm{val}(k)$$

pour un $k \in K$, d'après (a). Introduisons les éléments $x' = (x - (p_{n-1}/n))k^{-1}$ et $c_i' = (c_i - (p_{n-1}/n))k^{-1}$, $i = 1 \ldots n$, tous de valuation nulle. Les c_i' sont conjugués sur K, et leur polynôme minimal Q n'a pas de terme de degré $n-1$, mais a par contre un terme constant de valuation exactement 0. Le polynôme résiduel n'est donc pas une puissance n-ième ; si on montre qu'il n'est pas irréductible, la décomposition se remontera en une décomposition de Q sur K, ce qui donnera la contradiction cherchée.

Or par (b) il existe $\ell \in K$ tel que $\overline{x}' = \overline{\ell}$, c'est-à-dire $\mathrm{val}(x' - \ell) > 0$; les valuations de $(x' - \ell)$ et des $(c_i' - \ell)$ sont égales, et donc $\overline{c_i'} = \overline{\ell}$, ce qui montre que $\overline{\ell}$ est une racine de $\overline{Q}$.

(e) $\forall\, t \in K(x)$, $\mathrm{val}(t) \in \mathrm{val}\, K$.

Il suffit d'étudier le cas où t est un polynôme unitaire irréductible ; le cas d'un polynôme de degré 1 a été résolu en (a) ; soit $t \in K(x)$, t s'écrit :

$$t(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - c_i)$$

où les c_i sont conjugués sur K et les termes $\mathrm{val}(x - c_i)$ donc tous égaux. On choisit d'après (d) $k \in K$ vérifiant : $\mathrm{val}(x - k) \neq \mathrm{val}(c_i - k)$; on a alors :

- ou bien $\mathrm{val}(x - c_i) = \mathrm{val}(x - k) \in \mathrm{val}\, K$,
- ou bien $\mathrm{val}(x - c_i) = \mathrm{val}(k - c_i)$.

Or les $(k - c_i)$ sont des algébriques conjugués de degré n sur K ; si le terme constant de leur polynôme minimal est c, on a $\mathrm{val}(k - c_i) = \dfrac{\mathrm{val}(c)}{n}$ et donc

$$\mathrm{val}(t(x)) = \mathrm{val}(c) \in \mathrm{val}\, K.$$

(f) $\forall\, t \in K(x)$, $\mathrm{val}(t) = 0$ <u>implique</u> $\bar{t} \in \bar{K}$.

On a précédemment montré qu'un polynôme en x est valué dans $\mathrm{val}\,K$; pour établir (f) il suffit donc de montrer que pour tout polynôme $t \in K[X]$ irreductible et unitaire, il existe $k \in K$ tel qu'on ait

$$\mathrm{val}(t(x)) = \mathrm{val}(k) < \mathrm{val}(t(x) - k) .$$

Soit donc $t(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - c_i)$ où les c_i sont conjugués sur K , et distinguons les trois cas :

- $\mathrm{val}(x) < \mathrm{val}(c_i)$.

On a alors :

$$\mathrm{val}(x - c_i) = \mathrm{val}(x) < \mathrm{val}(c_i) ,$$
$$\mathrm{val}(1 - x^{-1} c_i) = \mathrm{val}(1) < \mathrm{val}(x^{-1} c_i) ,$$

soit

$$\overline{1 - x^{-1} c_i} = \bar{1} ,$$

donc

$$\overline{\pi(1 - x^{-1} c_i)} = \bar{1} .$$

Soit l'égalité cherchée, avec $k = x_0^n$ où $x_0 \in K$ vérifie

$$\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(x_0) < \mathrm{val}(x - x_0) \qquad \text{(cf. (a))}.$$

- $\mathrm{val}(x) > \mathrm{val}(c_i)$.

On a alors :

$$\overline{xc_i^{-1} - 1} = \bar{1} ,$$
$$\overline{\pi(xc_i^{-1} - 1)} = \bar{1} .$$

Soit l'égalité cherchée avec $k = \pi c_i$.

- $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(c_i)$.

Par (d), il existe k K tel que $\mathrm{val}(x - k) \neq \mathrm{val}(c_i - k)$. On écrit alors

$$t(x) = \pi[(x - k) - (c_i - k)]$$

et l'on est ramené à un des cas précédents.

(ii) (a) <u>La donnée d'une telle suite</u> $(g_\alpha ; a_\alpha)_{a < \alpha_0}$ <u>détermine toutes les valuations</u> $\mathrm{val}(x - k)$, $k \in K$.

$$\forall\, k \in K ,\ \exists\, \alpha < \alpha_0 ,\ \mathrm{val}(x - k) < \mathrm{val}(x - a_\alpha) ,$$

donc, $\mathrm{val}(x - k) = \mathrm{val}(k - a_\alpha)$.

(b) <u>Elle détermine le type de</u> <u>K-isomorphisme de corps valué de</u> $K(x)$.

Si x est non réalisé dans K , il est transcendant sur K (par(d)) ; le type de corps de $K(x)$ est donc bien défini ; par ailleurs on sait valuer $K(x)$, car toujours par (d), on connaît $\mathrm{val}(x - c)$, $\forall\, c$ algébrique sur K .

VII. Types sur les modèles

THÉORÈME 4. - Soient C un corps de caractéristique 0 et clos par radicaux, G un groupe ordonné. Alors la théorie $T = T(C, G)$ des corps valués henséliens, de corps résiduel $\equiv C$ et de groupe de valuation $\equiv G$ est complète.

Démonstration. - Soient M_1 et M_2 deux modèles ω_1-saturés de $T(C, G)$. La démonstration se fait par va-et-vient entre sous-structures $K_i \subset M_i$, $i = 1$, 2 , ayant les propriétés : (*)

- K_i hensélien.
- $\overline{K}_i$ algébriquement clos dans $\overline{M}_i$.
- $\mathrm{val}\, K_i$ sous-groupe pur de $\mathrm{val}\, M_i$.
- K_i dénombrable.

1° La famille considérée d'isomorphismes partiels n'est pas vide : si on choisit, par le lemme 1, un relèvement R_i de $\overline{K}_i$ dans K_i , la saturation de K_i se transmet à R_i . Tout sous-corps dénombrable de R_1 admet donc une image isomorphe dans R_2 , et inversement.

2° Propriété de va-et-vient.

Soit K_i un sous-corps de M_i ayant les propriétés (*), f un isomorphisme de corps valués $K_1 \longrightarrow K_2$, $x \in M_1 - K_1$; on veut prolonger f en x . Si x est résiduel sur K_1 , appliquons le théorème 1 : soit $y = ax + b$, $a \in K_1^*$, $b \in K_1$ tel que $\overline{y} \notin \overline{K}_1$; il nous faut trouver $y_2 \in K_2$ tel que $t(\overline{y}_2 , \overline{K}_2) = t(\overline{y}_1 , \overline{K}_1)$; un tel y_2 existe par saturation de $\overline{K}_2$ (le corps K_x construit dans le théorème 1 n'était pas hensélien, mais la clôture hensélienne existe et est une extension immédiate). De la même façon les théorèmes 2 et 3 résolvent les cas où x est valuationnel, ou immédiat sur K_1 .

Par la même démonstration de va-et-vient, on établit le théorème suivant.

THÉORÈME 4'. - Soient $K \subset M$ deux corps valués henséliens, $\overline{K} \prec \overline{M}$ de caractéristique 0 et clos par radicaux, $\mathrm{val}\, K \prec \mathrm{val}\, M$. On a alors $K \prec M$.

Nous apprenons donc à posteriori, que les types sans quantificateurs, décrits dans les théorèmes 1, 2 et 3, étaient les types complets de notre théorie ; d'où le théorème 5, avec la notation : soit $M \prec N$ des modèles d'une théorie, $n \in N$; $t(n , M)$ désigne le type de n sur M .

THÉORÈME 5. - Les types $p(x)$ sur un modèle K de $T(C , G)$ se classent en trois espèces :

1° Type résiduel, caractérisé par un couple $(a_x , b_x) \in K^* \times K$ tel que $a_x x + b_x \notin \overline{K}$ et par $t(\overline{a_x x + b_x} , \overline{K})$.

2° Type valuationnel, caractérisé par $a_x \in K$ tel que $\mathrm{val}(x - a_x) \notin \mathrm{val}\, K$, et par $t(\mathrm{val}(x - a_x) , \mathrm{val}\, K)$.

3° Type immédiat, caractérisé par une suite $(g_\alpha ; a_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$, où $(g_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$ est une suite cofinale de $I_K(x)$ et $\mathrm{val}(x - a_\alpha) = g_\alpha$.

COROLLAIRE 1. - Soient $K \models T$, $H' > \mathrm{val}\, K$, $C' > \overline{K}$. Alors il existe $K' > K$ tel que :

- $\mathrm{val}\, K' = H'$ et $\overline{K'} = C'$.

- Toute extension $L > K$ vérifiant $\overline{L} > \overline{C'}$ et $\mathrm{val}\, L > H'$ contient une sous-structure élémentaire K-isomorphe à K' .

Démonstration. - Soit $L \models T$ vérifiant $L > K$, $\overline{L} > C'$ et $\mathrm{val}\, L > H'$.

On relève dans L , $\overline{L}$ en L_0 et $\mathrm{val}\, L$ en G_0 , tels que K contienne ses relèvements, K_0 de corps résiduel et H_0 de groupe de valuation. Soient C'_0 et H'_0 les relèvements de C' et H' . Par le théorème 1, la structure de $K(C'_0)$ est indépendante du relèvement choisi. Puis, on ajoute un par un les éléments de H'_0 à $K(C'_0)$, en prenant à chaque étape la clôture pure du groupe dans G_0 , et la clôture hensélienne. Par le théorème 2 la structure ainsi obtenue ne dépend que du type de H' sur H . En conclusion, $K' = \widetilde{K(C'_0 , H'_0)}$.

COROLLAIRE 2.

(i) Si les théories de C et de G admettent un modèle premier, il en est de même de $\mathrm{Th}(C , G)$.

(ii) Si les théories de C et de G admettent des modèles atomiques au-dessus de tout ensemble de paramètres, il en est de même de $\mathrm{Th}(C , G)$.

Démonstration.

(i) Soient M un modèle ω_1-saturé, M_0 et G_0 des relèvements de $\overline{M}$ et $\mathrm{val}\, M$ dans M ; M_0 contient m modèle premier de $\mathrm{Th}(\overline{M})$ et G_0 contient g modèle premier de $\mathrm{Th}(\mathrm{val}\, M)$. Alors $m(g)$ est isomorphe au corps des fractions rationnelles à coefficients dans m et à exposants dans g et $\widetilde{m(g)}$ est un modèle premier de $T(\overline{M} ; \mathrm{val}\, M)$.

(ii) Soit $A \subset M$; prenons A_1 clôture algébrique relative de A dans M ; A_1 est hensélien, $\overline{A_1}$ est algébriquement clos dans $\overline{M}$ et $\mathrm{val}\, A_1$ pur dans $\mathrm{val}\, M$ (grâce à la propriété : si $m \in M$, $s \in \mathbb{N}^*$, $M \models \exists n \ (m = n^s)$ si, et seulement si, $\mathrm{val}\, M \models s \mid \mathrm{val}(m))$. Les théorèmes 1 et 2 s'appliquent donc. On prend dans A_1 des relèvements a_1 de $\overline{A_1}$ et g_1 de $\mathrm{val}\, A_1$, puis dans M des relèvements a

de $\overline{M}$ et g de val M, vérifiant $a_1 \subset a$ et $g \subset g_1$. Alors a (resp. g) contient un modèle atomique $\mathfrak{M}(a_1)$ (resp. $\mathfrak{M}(g_1)$) au-dessus de a_1 (resp. g_1). La structure $A_1(\mathfrak{M}(a_1), \mathfrak{M}(g_1))$ est atomique sur A.

VIII. Elimination des quantificateurs

Le langage précédemment défini et utilisé était le langage des corps auquel on avait adjoint un prédicat binaire pour la relation $\mathrm{val}(x) \geqslant \mathrm{val}(y)$. Mais les techniques utilisées restent applicables si on lui adjoint des symboles exclusivement relationnels $\mathbb{S}$ ayant l'une ou l'autre des deux propriétés :

1° $\mathbb{S}$ relève un symbole défini sur le groupe de valuation, c'est-à-dire, si $x, y \in M \models T$ on a : $\mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y) \Longrightarrow [\mathbb{S}(x)$ si, et seulement si, $\mathbb{S}(y)]$.

2° $\mathbb{S}$ relève un symbole défini sur $\overline{M}$ c'est-à-dire, n'est défini en x et y que si $\mathrm{val}(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{val}(y) \geqslant 0$; on a alors : $\overline{x} = \overline{y} \Longrightarrow \mathbb{S}(x)$ si, et seulement si, $\mathbb{S}(y)$.

Soit, par exemple, $\mathbb{S}$ satisfaisant la première propriété ; $\mathbb{S}$ passe alors au quotient modulo les entiers de l'anneau de valuation ; soit $\mathbb{S}$ val la relation ainsi obtenue sur le groupe de valuation. Soit $M \models T$, $g \subset M^*$, g relevant val M ; tout $x \in M$ a même valuation qu'un élément $x_1 \in g$ et on a donc $\mathbb{S}(x)$ si, et seulement si, $\mathbb{S}(x_1)$. Remarque analogue pour une relation $\mathbb{S}$ satisfaisant la propriété 2, en introduisant $\mathbb{S}-$, projection de $\mathbb{S}$ sur le corps résiduel.

On complète les démonstrations des lemmes 2 et 4 pour établir les lemmes suivants:

Soit $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ où les symboles de $\mathfrak{A}_i$ ont la propriété i, $i = 1$ ou 2.

LEMME 6. - Soient $K \subset M$, $K_0 \subset L \subset M_0$ comme dans le lemme 2 ; de plus, M est une $\mathcal{L}'$-structure. Alors le type de K-isomorphisme de KL pour $\mathcal{L}'$ ne dépend que du type de K_0-isomorphisme de L pour $\{0\ 1 + \cdot\} \cup \{\mathbb{S}-, \mathbb{S} \in \mathfrak{A}_2\}$.

LEMME 7. - Soient $K \subset M$, $H \subset F \subset G$ comme dans le lemme 4, où de plus M est une $\mathcal{L}'$-structure. Alors le type de K-isomorphisme de $K(F)$ pour $\mathcal{L}'$ ne dépend que du type de H-isomorphisme de F pour $\{0 + \leqslant\} \cup \{\mathbb{S}\ \mathrm{val}, \mathbb{S} \in \mathfrak{A}_1\}$.

THÉORÈME 6. - Soient M et N deux corps valués henséliens munis des prédicats de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ et vérifiant :

$\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont de caractéristique 0 et clos par radicaux,

$\overline{M} \equiv \overline{N}$ pour $\{0, 1, +, \cdot\} \cup \{\mathbb{S}-, \mathbb{S} \in A_2\}$,

val $M \equiv$ val N pour $\{0, +, \leqslant\} \cup \{\mathbb{S}\ \mathrm{val}; \mathbb{S} \in A_1\}$.

Alors on a $M \equiv N$ pour $\mathcal{L}'$.

La preuve de ce théorème reproduit celle du théorème 5 à partir des lemmes 6 et

7 ; mais ces lemmes conduisent surtout à un théorème d'élimination des quantificateurs :

THÉORÈME 7. – Soit M un corps valué hensélien muni des prédicats de $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ vérifiant :

$\overline{M}$ est de caractéristique 0 , clos par radicaux et admet l'élimination des quantificateurs (e. q.) dans le langage $\{0\ 1 + .\} \cup \{S - , S \in \mathfrak{A}_2\}$

val M admet e. q. dans le langage $\{0 + \leq\} \cup \{S_{val} , S \in A_1\}$.

Alors M admet q. e. dans $\mathcal{L}'$.

Démonstration. – On utilise le test de Shoenfield : M admet EQ dans $\mathcal{L}'$ si, et seulement si, quels que soient les couples $A_1 \subsetneq_{\mathcal{L}'} M_1$, $A_2 \subsetneq_{\mathcal{L}'} M_2$:

$M_1 \equiv M_2 \equiv M$ pour $\mathcal{L}'$,

M_1 est dénombrable,

M_2 est ω_1-saturé,

$A_2 = f(A_1)$ où f est un isomorphisme pour $\mathcal{L}'$, alors

il existe M_1' , $A_2 \subset M_1' \subset M_2$, M_1' image de M_1 par un isomorphisme (pour $\mathcal{L}'$) prolongeant f .

Soit donc $A_i \subset M_i$ comme ci-dessus. On commence par étendre f aux clôtures henséliennes des A_i . Puis, on prend $a_1 \subset \bar{A}_1$ relevant $\overline{A}_1$, $g_1 \subset A_1^*$ relevant val A_1 ; on pose $a_2 = f(a_1)$ et $g_2 = f(a_2)$. Il existe alors un relèvement m_i (resp. G_i) de $\overline{M}_i$ (resp. val M_i) contenant a_i (resp. g_i) ; m_1 est alors dénombrable et m_2 ω_1-saturé (en tant que corps muni des prédicats $S -$, $S \in \mathfrak{A}_2$) ; on applique le test de Shoenfield pour utiliser l'élimination des quantificateurs résiduelle : il existe m_1' , $a_1 \subset m_1' \subset m_2$, m_1' image de m_1 par un isomorphisme prolongeant $f \restriction a_1$; et on a par le lemme 6 $m_1.\tilde{A}_1 \simeq m_1'.\tilde{A}_2$. Le lemme 7 permet de la même façon d'étendre le groupe de valuation ; on est ainsi ramené au cas où les extensions $A_i \subset M_i$ sont immédiates (et A_i hensélien). Mais alors un point de M_1 est caractérisé par une suite dénombrable de A_1 l'approchant ; il suffit de lui donner pour image une limite dans M_2 (qui existe par ω_1-saturation) de la suite image par f .

IX. Héritiers. Cohéritiers. Définissabilité

LEMME 8. – Soit $K \prec M$ deux modèles de T , $p \subset S_1(K)$, $q \in S_1(M)$.

(i) Si q hérite ou cohérite de p , on a

$$I_M(q) \cap \text{val } K = I_K(p) .$$

(ii) Si p n'est pas valuationnel et si q cohérite de p , alors $I_K(p)$ est cofinal dans $I_M(q)$.

Démonstration.

(i) Supposons qu'il existe $g \in \text{val } K - I_K(p)$ et $m \in M$ tels qu'on ait

$$q \vdash \text{val}(x - m) \geqslant g \,.$$

- si q hérite de p, il existe $k \in K$ tel que

$$p \vdash \text{val}(x - k) \geqslant g \text{ , contradiction}$$

- si q cohérite de p, il existe $a \in K$ tel que

$$M \models \text{val}(a - m) \geqslant g \,,$$

Soit par inégalité triangulaire :

$$q \vdash \text{val}(x - a) \geqslant g \,,$$

donc

$$p \vdash \text{val}(x - a) \geqslant g \text{ , contradiction.}$$

(ii) Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in I_M(q)$, $g > v$, $\forall\, v \in I_K(p)$. Alors $g = \text{val}(x - m)$ pour un élément $m \in M$. Si q cohérite de p, il existe $a \in K$ tel que $g = \text{val}(a - m)$, soit par inégalité triangulaire $\text{val}(x - a) \geqslant g$. Or, si p n'est pas valuationnel, $\text{val}(x - a)$ est dans $I_K(p)$, contradiction.

LEMME 9. - Soient $K < M$ deux modèles de T, $p(x) \in S_1(K)$ résiduel. Les cohéritiers de p sur M sont les types $q(y)$ vérifiant :

- q est résiduel,
- $a_y = a_x$ et $b_y = b_x$,
- $t(\overline{a_x y + b_x}, \overline{M})$ cohérite de $t(\overline{a_x x + b_x}, \overline{K})$.

Démonstration. - Si q cohérite de p et vérifie $\overline{a_x y + b_x} = \overline{m} \in \overline{M}$, on a $\overline{a_x \alpha + b_x} = \overline{m}$ pour un $\alpha \in M$ et donc $\overline{m} \in \overline{K}$, contradiction. Ceci montre que q est résiduel pour le même couple (a_x , b_x). Il est alors uniquement déterminé par $t(\overline{a_x y + b_x}, \overline{M})$; le reste est évident.

LEMME 10. - Soient $K < M$ deux modèles de T, $p(x) \in S_1(K)$ valuationnel. Les cohéritiers de p sur M sont exactement les types $q(y)$ vérifiant :

- q est valuationnel.
- $a_y = a_x$.
- $t(\text{val}(x - a_x), \text{val } M)$ cohérite de $t(\text{val}(x - a_x), \text{val } K)$.

Démonstration. - S'il existe $g \in \text{val } M$ tel que $\text{val}(y - a_x) = g$, on a $g > v$, $\forall\, v \in I_K(p)$, par définition de a_x. Si q cohérite de p, il existe $\alpha \in K$ tel que

$$K \models \text{val}(\alpha - a_x) = g$$

donc $g \in \text{val } K$, donc $g \in I_K(x)$, contradiction ; q est donc valuationnel pour le même a_x . Le reste suit.

LEMME 11. - Soit $K \prec M$; $p(x) \in S_1(K)$ est immédiat.

(i) Si M ne réalise pas p , p a un unique fils sur M ; ce fils est immédiat et défini par le même ensemble $\{(g , a_g) ; g \in I_K(p)\}$.

(ii) Si M réalise en x_0 , les cohéritiers de $p(x)$ sont exactement les types $q(y)$ vérifiant :

- q est valuationnel,
- $a_y = x_0$,
- $I_K(p)$ est cofinal dans $I_M(q)$,
- $t(\mathrm{val}(y - x_0) , \mathrm{val}\ M)$ cohérite "à gauche" de sa restriction à $\mathrm{val}\ K$, c'est-à-dire soit $v = \mathrm{val}(y - x_0)$, si $t(v , \mathrm{val}\ M) \vdash \varphi(v , \vec{g})$, il existe $v_0 \in \mathrm{val}\ K$ tel qu'on ait $t(v , \mathrm{val}\ K) \vdash v_0 < v$ et $\mathrm{val}\ M \models \varphi(v_0 , \vec{g})$.

Démonstration.

(i) On montre que $I_K(x)$ est cofinal dans $\{\mathrm{val}(x - m) ; m \in M\}$. On aurait sinon, pour un élément $m_0 \in M$: $I_K(x) < \mathrm{val}(x - m_0)$, donc

$$\mathrm{val}(m_0 - a_g) = \mathrm{val}[(m_0 - x) + (x - a_g)] = g$$

et m_0 réaliserait p , contradiction. L'ensemble $\{\mathrm{val}(x - m) ; m \in M\}$ n'admet donc pas de plus grand élément ; on a vu que cela caractérisait les types immédiats.

(ii) Les fils $q(y)$ de p sur M vérifient

(1) $$\mathrm{val}(y - x_0) \gtrsim g , \quad \forall g \in I_K(p) .$$

Cette condition est suffisante pour que $p \subset q$, car on a alors

$$\mathrm{val}(y - k) = \mathrm{val}[(y - x_0) + (x_0 - k)] = \mathrm{val}(x_0 - k) , \quad \forall k \in K .$$

Si, de plus, q cohérite de p , $I_K(p)$ est cofinal dans $I_M(q)$, la relation (1) ci-dessus n'est possible que si y est valuationnel associé à x_0. Soient une formule φ des groupes ordonnés et $\vec{g} \in \mathrm{val}\ M$ tels que :

$$t(\mathrm{val}(y - x_0) , \mathrm{val}\ M) \vdash \varphi(v , \vec{g}) ,$$

c'est-à-dire

$$q \vdash \varphi(\mathrm{val}(y - x_0) , \vec{g}) ;$$

puisque q cohérite de p , pour un $k \in K$, on a

$$\mathrm{val}\ M \models \varphi(\mathrm{val}(k - x_0) , \vec{g})$$

et x_0 étant immédiat sur K , $\mathrm{val}(k - x_0)$ est dans $I_K(p)$; ce qui montre que $t(\mathrm{val}(y - x_0) , \mathrm{val}\ M)$ cohérite à gauche de sa restriction à $\mathrm{val}\ K$.

Réciproquement si $q(y)$ satisfait les hypothèses de l'énoncé, il est caractérisé par $t(\mathrm{val}(y - x_0) , \mathrm{val}\ M) = t(v,\mathrm{val}\ M)$. Il suffit donc d'étudier les formules de ce type pour voir si q cohérite de p. Soit $\vec{g} \in \mathrm{val}\, M$ et ψ une formule des groupes ordonnés tels que

$$q \vdash \psi(\mathrm{val}(y - x_0)\ ,\ \vec{g})\ ,$$

c'est-à-dire

$$t(v) \vdash \psi(v\ ,\ \vec{g})\ .$$

Si $t(v)$ cohérite "à gauche", il existe $v_0 \in \mathrm{val}\, K$, $v_0 < v$ vérifiant :

$$\mathrm{val}\, M \models \psi(v_0\ ,\ \vec{g})\ .$$

De l'inégalité $v_0 < v$, on déduit que v_0 est dans $I_K(x)$ et s'écrit $v_0 = \mathrm{val}(x_0 - k)$ pour un $k \in K$; on a donc :

$$M \models \psi(\mathrm{val}(k - x_0)\ ,\ \vec{g})\ .$$

C.Q.F.D.

THÉORÈME 8. - <u>La théorie</u> $T(C\ ,\ G)$ <u>a la propriété d'indépendance</u> (p. i.) <u>si, et seulement si,</u> C <u>ou</u> G <u>l'a.</u>

<u>Démonstration.</u> - On utilise l'équivalence : T n'a pas la p. i. si, et seulement si, $\forall\ \lambda$, pour tous modèles $M < N$ de T, $\overline{\overline{M}} = \lambda$, tout type sur M admet sur N au plus 2^λ cohéritiers (ref. : Exercices de stabilité n° 15 dans Théories stables, 1977/78, et N° 6, Ibidem 1978/79).

Si la théorie du corps résiduel a la p. i., soit $C < C'$ deux modèles, $t \in S_1(C)$ admettant plus de 2^λ cohéritiers sur C'. On sait alors construire (corollaire 2) $K < K' < K''$ modèles de $T(C\ ,\ G)$ et $x \in K''$ vérifiant : $\overline{K} = C$, $\overline{K}' = C'$ et $t(\overline{x}\ ,\ \overline{K}) = t$. Par le lemme 7, chaque cohéritier de t sur C' se relève en un cohéritier de $t(x\ ,\ K)$ sur K'. Même chose si $\mathrm{val}\, K$ a la p. i.

Considérons l'implication inverse. Il est évident qu'un type résiduel ou valuationnel ne peut avoir plus de 2^λ cohéritiers. Reste le cas d'un type immédiat. Soit $M < M'$, $\overline{\overline{M}} = \lambda$, $p \in S_1(M)$ immédiat. Si M' ne réalise pas p, p admet sur M' un seul fils donc un seul cohéritier. Si M' réalise p un cohéritier $p'(y)$ est valuationnel pour une coupure déterminée, la seule dans laquelle $I_M(x)$ soit cofinal. Dans cette coupure seuls sont acceptables les types sur $\mathrm{val}\, M'$ cohéritant de leur restriction à $\mathrm{val}\, M$. Dénombrons-les : il y a au plus 2^λ types sur $\mathrm{val}\, M$, chacun d'eux a au plus 2^λ cohéritiers sur $\mathrm{val}\, M'$. Au total au plus 2^λ types sont susceptibles de cohériter de leur restriction à $\mathrm{val}\, M$.

Reste le choix de a_y, qu'on peut prendre égal à tout élément de K' réalisant p, mais ce choix est indifférent : si y_1 et y_2 correspondent à deux choix différents, on a, pour tout $m \in M'$:

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(y_1 - m) &= \mathrm{val}(y_1 - a_{y_1} + a_{y_1} - a_{y_2} + a_{y_2} - y_2 + y_2 - m) \\ &= \mathrm{val}(y_2 - m)\ ,\ \text{si}\ \mathrm{val}(y_2 - m) \in I_M(y)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(y_1 - m) &= \mathrm{val}(y_1 - a_{y_1}) \\ &= \mathrm{val}(y_2 - a_{y_2}) \\ &= \mathrm{val}(y_2 - m) \quad , \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Un type immédiat ne peut donc pas avoir plus de 2^λ cohéritiers.

PROPOSITION 1. - Les types résiduels dont le type de reste est définissable sont définissables. Les types valuationnels dont le type de valuation est définissable sont définissables.

Démonstration. - Le critère de définissabilité est l'unicité de l'héritier sur toute extension élémentaire. Soit $p(x)$ un type résiduel sur K, il ne représente pas (en m) la formule $\overline{a_x x + b_x} = \overline{m}$; un héritier $q(y)$ sur $M \succ K$ ne la représente pas non plus et reste donc résiduel pour le même couple (a_x , b_x) ; de plus, $t(\overline{y} ; \overline{M})$ hérite de $t(\overline{x} ; \overline{K})$. Même raisonnement pour un type valuationnel.

X. Types sur $\underset{\sim}{Z}$-groupes

Nous décrivons les types sur les ensembles de paramètres ; outre les résultats classiques nous prouvons que la théorie des $\underset{\sim}{Z}$-groupes, évidemment instable, n'a pas la propriété d'indépendance.

Le langage est $\{0 , + , \leq , 1\}$. Un $\underset{\sim}{Z}$-groupe G est un groupe commutatif ordonné discret, vérifiant pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$ l'axiome :

$$\forall x , \exists y , \ [(x = ny) \vee (x = ny + 1) \vee \ldots \vee (x = ny + n - 1)]$$

où 1 est le plus petit élément positif. Il est équivalent de dire qu'il existe dans G une division euclidienne.

On appelle $\underset{\sim}{Z}$ l'ensemble des éléments successeurs finis de 0 et de leurs opposés, $\underset{\sim}{Z}$ est un modèle premier. Dans G on considère la relation d'équivalence $x \equiv y$ si, et seulement si, $x - y \in \underset{\sim}{Z}$; la classe de x est appelée fibre de x et notée x^*. Puisque $\underset{\sim}{Z}$ est convexe, l'ordre passe au quotient et G^* est un groupe ordonné dense. On réservera le terme de coupure sur G aux coupures dont les deux intervalles sont unions de fibres. En particulier, si $G' \succ G$ sont deux $\underset{\sim}{Z}$-groupes, tout élément $x \in G' - G$ définit sur G une coupure, qu'on appellera type d'ordre de x sur G. Appelons type de divisibilité de x, la donnée pour tout entier n du reste de la division de x par n. Remarquons qu'il est contenu dans $t(x ; \emptyset)$ et que le type de divisibilité d'un terme en $x_1 , \ldots , x_n$ est conséquence des types de divisibilité de chacun des x_i.

PROPOSITION 2. - Soient $G \prec G'$ deux $\underset{\sim}{Z}$-groupes, $x \in G' - G$. Il existe une sous-structure $G\langle x\rangle$ de G' qui est un modèle premier au-dessus de G et x.

Démonstration. - Un modèle de T au-dessus de G et x contient nécessairement l'ensemble $G(\{q_n \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}^* \; , \; G' \models x = nq_n + r_n \wedge 0 \leq r_n < n\})$, qui contient lui-même $X = \{y \in G' \; ; \; y = mq_n + g \; , \; m \in \underset{\sim}{Z} \; , \; g \in G\}$. En remarquant que dans l'égalité

$$(1) \quad \begin{aligned}(m_1 q_{n_1} + g_1) + (m_2 q_{n_2} + g_2) \\ = (m_1 n_2 + m_2 n_1) q_{n_1 n_2} + m_1 \frac{r_{n_1 n_2} - r_{n_1}}{n_1} + m_2 \frac{r_{n_1 n_2} - r_{n_2}}{n_2} + g_1 + g_2 .\end{aligned}$$

les termes du genre $(r_{n_1 n_2} - r_{n_1})/n_1$ sont des entiers, on voit que X est un groupe. On a, d'autre part, pour tout $n' \in \underset{\sim}{N}^*$, l'égalité

$$mq_n + g = n'(mq_{nn'}) + g'$$

où $g' = m_1 \dfrac{r_{nn'} - r_n}{n} + g$ est un élément de G qui admet donc dans G un quotient par n'. Cela montre que X est un $\underset{\sim}{Z}$-groupe. C'est donc le modèle $G\langle x\rangle$ annoncé.

PROPOSITION 3. - Soient $G < G'$ deux $\underset{\sim}{Z}$-groupes et $x , y \in G' - G$. Si x et y ont même type de divisibilité et même type d'ordre sur G, $G\langle x\rangle$ et $G\langle y\rangle$ se correspondent dans un G-isomorphisme envoyant x sur y.

Démonstration. - Soient respectivement p_n et q_n les quotients de x et y par n dans G'. L'application f de $G\langle x\rangle$ dans $G\langle y\rangle$ qu'on considère est celle qui envoie $mq_n + g$ sur $mp_n + g$, $m \in \underset{\sim}{Z}$, $g \in G$.

1° Cette application est bien définie : en effet l'égalité $m_1 q_{n_1} + g_1 = m_2 q_{n_2} + g_2$ implique

$$(m_1 n_2 - m_2 n_1) q_{n_1 n_2} + m_1 \frac{r_{n_1 n_2} - r_{n_1}}{n_1} - m_2 \frac{r_{n_1 n_2} - r_{n_1}}{n_2} + g_1 - g_2 = 0 ,$$

ce qui n'est possible, puisque x n'est pas dans G, que si $m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0$. Les termes $m_1 p_{n_1} + g_2$ et $m_2 p_{n_2} + g_2$ sont alors égaux.

2° L'égalité (1) prouve que f est un morphisme de groupe.

3° La position par rapport à 0 des nombres $mp_n + g$ ne dépend que de la coupure x^* sur G ; f est donc un morphisme d'ordre.

4° C'est trivialement une bijection.

PROPOSITION 4. - Soient G et H deux $\underset{\sim}{Z}$-groupes ω_1-saturés, $\vec{g} \in G$, $\vec{h} \in H$ des n-uplets satisfaisant les mêmes relations de divisibilité et les mêmes (in)-égalités à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$. Alors $\vec{g}$ et $\vec{h}$ se correspondent par va-et-vient infini.

Démonstration. - On montre d'abord, par récurrence sur n, que les $\underset{\sim}{Z}$-groupes $\underset{\sim}{Z}\langle g_1\rangle \ldots \langle g_n\rangle$ et $\underset{\sim}{Z}\langle h_1\rangle \ldots \langle h_n\rangle$ sont isomorphes. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que si $(g_1 , \ldots , g_{i+1})$ et $(h_1 , \ldots , h_{i+1})$ satisfont les mêmes inéquations sur $\underset{\sim}{Z}$, alors g_{i+1} a même type d'ordre sur

$\underset{\sim}{Z}\langle g_1\rangle \dots \langle g_i\rangle$ que h_{i+1} sur $\underset{\sim}{Z}\langle h_1\rangle \dots \langle h_i\rangle$; ou de façon équivalente qu'une inéquation en p variables $(x_1 \dots x_p)$ et à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}\langle g_1\rangle \dots \langle g_i\rangle$ est équivalente à une inéquation en $(x_1 , \dots , x_p , g_1 , \dots , g_i)$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, cela est évidemment vrai.

Il faut maintenant, étant donné γ quelconque dans G , construire $\chi \in H$ tel que $\bar{g}\frown\gamma$ et $\bar{h}\frown\chi$ vérifient les mêmes relations de divisibilité et d'ordre. D'après la saturation de H , il suffit de montrer la consistance de l'ensemble obtenu en substituant les h_i aux g_i et γ à χ dans les inéquations et les relations de divisibilité satisfaites par les g_i et χ . Considérons un fragment fini de cet ensemble :

$$\{t(h_1 , \dots , h_n) < mx < t'(h_1 , \dots , h_n)\} \cup \{D_{n_i}(x - r_{n_i}) \; ; \; i = 1 \dots k\}\,.$$

1° Si $t(h_1 , \dots , h_n)^* = t'(h_1 , \dots , h_n)^*$ alors $mx = t(h_1 , \dots , h_n) + p$, avec $p \in \underset{\sim}{Z}$. Dans G , on avait de même

$$m\chi = t(g_1 , \dots , g_n) + p$$

le second membre est donc divisible par m , et χ est dans $\underset{\sim}{Z}\langle g_1\rangle \dots \langle g_n\rangle$. Par isomorphisme $(t(h_1 , \dots , h_n) + p)/m$ existe dans $\underset{\sim}{Z}\langle h_1\rangle \dots \langle h_n\rangle$ et a même type de divisibilité que χ .

2° Si $t(h_1 , \dots , h_n)^* < t'(h_1 , \dots , h)^*$.

Il suffit de prendre dans une fibre comprise entre $(t(h_1 , \dots , h_n)^*)/m$ et $t'(h_1 , \dots , h_n)^*)/m$ un élément x réalisant les D_{n_i} .

COROLLAIRE 3. - <u>La théorie des $\underset{\sim}{Z}$-groupes est complète.</u>

COROLLAIRE 4. - <u>Un n-type sur un $\underset{\sim}{Z}$-groupe est axiomatisé par les inégalités qu'il vérifie et les types de divisibilité de chacune des composantes.</u>

COROLLAIRE 5. - <u>La théorie des $\underset{\sim}{Z}$-groupes admet l'élimination des quantificateurs dans</u> $L' = \{0 , 1 , + , \leq\} \cup \{D_n \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}^*\}$.

<u>Démonstration.</u> - Un n-type est axiomalisable par des formules de L' sans quantificateurs.

COROLLAIRE 6. - <u>La théorie des $\underset{\sim}{Z}$-groupes est modèle complète.</u>

<u>Démonstration.</u> - Il y a élimination des quantificateurs dans L' , dont les nouveaux symboles sont définissables dans l'ancien langage.

LEMME 12. - <u>Soient</u> $G < G'$ <u>deux $\underset{\sim}{Z}$-groupes</u> ; $p \in S_1(G)$. <u>Le cohéritier de</u> p <u>sur</u> G' <u>est unique si</u> p <u>est une coupure infinie ou si</u> G' <u>ne réalise pas</u> x . <u>Sinon il y a deux cohéritiers.</u>

<u>Démonstration.</u> - Un cohéritier p' sur G' a même type de divisibilité que p et doit être tel que $\{g \in G \; ; \; p \vdash g < x\}$ est cofinal dans $\{g \in G' \; ; \; p' \vdash g < x\}$

ou $\{g \in G \; ; \; p \vdash x < g\}$ est coïnitial dans $\{g \in G' \; ; \; p' \vdash x < g\}$ car si a et b sont dans $G' - G$ et dans la coupure définie par x sur G, p' ne peut représenter la formule $a < x < b$. Le lemme est alors évident.

COROLLAIRE 7. - La théorie des $\underset{\sim}{Z}$-groupes n'a pas la propriété d'indépendance.

Les types infinis sont évidemment définissables et admettent sur toute extension élémentaire un seul héritier : le type infini de même signe et de même type de divisibilité. La proposition suivante décrit les héritiers des autres types.

PROPOSITION 5. - Soit p un type non infini sur un $\underset{\sim}{Z}$-groupe G. Alors tout fils p' non réalisé de p sur $G' \succ G$ hérite de p.

Démonstration. - Soit $\varphi(x , \vec{a} , \vec{y})$ une formule à paramètres $\vec{a} \in G$, $\vec{g}' \in G'$ vérifiant $\varphi(x , \vec{a} , \vec{g}') \in p'$. Par l'élimination des quantificateurs et le fait que p' est complet, on se ramène au cas où φ est la conjonction d'un nombre fini de relations D_i et d'égalités ou d'inégalités portant sur des termes en x, $\vec{a}$ et $\vec{g}'$. Si p' n'est pas réalisé, aucune des égalités ne fait intervenir x. Nous allons montrer par récurrence sur la longueur ℓ de $\vec{g}'$, qu'il existe $\vec{g} \in G$ tel qu'on ait $\varphi(x , \vec{a} , \vec{g}) \in p$; l'hypothèse de récurrence est faite pour tout type et toute formule faisant intervenir moins de ℓ paramètres de G'.

Cas a : Si dans φ apparaît une équation entre les $\vec{g}'$, cela permet d'éliminer un de ces paramètres, par exemple g'_0 ; si on décompose $\vec{g}' = \vec{h}'^\frown g'_0$, φ est équivalente à la conjonction d'une formule $\psi(x , \vec{a} , \vec{h}')$ et d'une égalité $g'_0 = t(x , \vec{a} , \vec{h}')$, où $t(x , \vec{a} , \vec{h}')$ est un terme en x, $\vec{a}$ et $\vec{h}'$. L'hypothèse de récurrence appliquée à ψ produit des $\vec{h} \in G$ tels qu'on ait $\psi(x,\vec{a},\vec{h}) \in p$ et donc $\varphi(x , \vec{a} , \vec{h}^\frown t(x , \vec{a} , \vec{h})) \in p$.

Cas b : φ est une conjonction de la forme

$$\bigwedge_{i\in I} D_{r_i}(t_i) \wedge \bigwedge_{i\in J}(t_i > 0)$$

où les t_i, $i \in I \cup J$, sont des termes en x, $\vec{a}$, $\vec{g}'$. Soit $r = \mathrm{PPCM}(r_i \, , i\in I)$; si des paramètres $\vec{g}''$ satisfont $\vec{g}'' \equiv \vec{g}'$ (modulo r), on a

$$\bigwedge_{i\in I} D_{r_i}(t_i(x , \vec{a} , \vec{g}'')) \in p' .$$

Isolons une des composantes de $\vec{g}'$, soit $\vec{g}' = \vec{h}'^\frown g'_0$, et introduisons comme nouvelle variable de type le quotient y de x par le PPCM des coefficients de g'_0 dans les termes t_i, $i \in J$. Les inégalités de φ s'écrivent

$$\bigwedge_{i\in J_1} g'_0 > \tau_i \wedge \bigwedge_{i\in J_2} g'_0 < \tau_i \wedge \bigwedge_{i\in J_z} \tau_i > 0 ,$$

où les τ_i, $i \in J_1 \cup J_2 \cup J_3$ sont des termes en y, $\vec{a}$ et $\vec{h}'$. Par ailleurs, x est uniquement déterminé par y et réciproquement, x et y sont infinis en même temps. L'hypothèse de récurrence va s'appliquer au type de y. Deux cas se présentent :

- $\tau_j(y, \vec{a}, \vec{h})$ et $\tau_k(y, \vec{a}, \vec{h}')$, pour un $j \in J_1$ et un $k \in J_2$, sont dans une même filière de G^*. On a alors

$$g'_0 = \tau_j(y, \vec{a}, \vec{h}') + \sigma ;$$

puisque G' ne réalise pas p', y ne saurait intervenir dans τ_j, nous sommes donc ramenés au cas a.

- Les termes $\tau_i(y, \vec{a}, \vec{h}')$ appartiennent tous à des fibres distinctes ; on les ordonne, ils vérifient alors :

$$\tau_{i_1}(y, \vec{a}, \vec{h}') < \tau_{i_2}(y, \vec{a}, \vec{h}') < \ldots < \tau_{i_k}(y, \vec{a}, \vec{h}')$$
$$\wedge \bigwedge_{\ell=1}^{k-1} [\tau_{i_{\ell+1}}(y,\vec{a},\vec{h}') - \tau_{i_\ell}(y,\vec{a},\vec{h}') > r] \wedge [\vec{h}' \equiv \vec{S} \text{ (modulo r)}] .$$

où les $\vec{S}$ sont les restes des $\vec{h}'$, modulo r. Cette formule est à $\ell - 1$ paramètres de G' ; on peut la reproduire avec des paramètres $\vec{h} \in G$. L'un des intervalles définis par les $\tau_i(y, \vec{a}, \vec{h}')$ contenait g'_0 ;

- si cet intervalle est (τ_j, τ_{j+1}), on choisit dans G, $g_0 \equiv g'_0$ (modulo r), $g_0 \in (\tau_j(y, \vec{a}, \vec{h}), \tau_{j+1}(y, \vec{a}, \vec{h}))$ ce qui est possible par les axiomes de $\underset{\sim}{Z}$-groupes.

- Si $g'_0 \in (\tau_{i_k}(y, \vec{a}, \vec{h}'), +\infty)$, $\tau_{i_k}(y, \vec{a}, \vec{h})$ n'est pas la coupure infiniment grande ; là encore, on peut donc reproduire la formule avec un

$$g_0 \in (\tau_{i_k}(y, \vec{a}, \vec{h}), +\infty) \cap G, \quad g_0 \equiv g'_0 \text{ (modulo r)},$$

- même chose pour l'intervalle $(-\infty ; i_1(y, \vec{a}, \vec{h}'))$.

COROLLAIRE 8. - <u>Sur un $\underset{\sim}{Z}$-groupe les types définissables sont les types réalisés et les types infinis.</u>

<u>Démonstration</u>. - Le critère de définissabilité utilisé est l'unicité de l'héritier sur toute extension élémentaire.

COROLLAIRE 9. - <u>Sur $\underset{\sim}{Z}$ tous les types sont définissables et c'est le seul $\underset{\sim}{Z}$-groupe possédant cette propriété.</u>

<u>Description de l'ordre fondamental</u>.

Le type de divisibilité et le signe faisant partie du type sur $\emptyset$, deux types de type de divisibilité ou de signes distincts ne sont pas comparables. L'ordre fondamental se compose donc des ensembles incomparables suivants :

- chaque élément de $\underset{\sim}{Z}$ (qui est une constante),
- pour chaque signe et chaque type de divisibilité, la chaîne :

  type infini,
  type non réalisé, non infini,
  type réalisé $\notin \underset{\sim}{Z}$.

XI. Applications au corps $k((X))$

1° Adaptons d'abord le théorème d'élimination des quantificateurs. Soient dans $k((X))$ les prédicats :

- div : x div y si, et seulement si, $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(y)$,
- N : $N(x)$ si, et seulement si, $\mathrm{val}(x) = 1$,
- P_n : $P_n(x)$ si, et seulement si, $\exists\, y\ (y^n = 1)$.

Les P_n relèvent les prédicats D_n de divisibilité dans les $\mathbb{Z}$-groupes. Aussi le théorème 7 et le corollaire 5 ont-ils pour conséquence le résultat suivant.

PROPOSITION 6. - $\mathbb{C}((X))$ admet l'élimination des quantificateurs dans le langage $\{0\ 1\ +\ .\} \cup \{\mathrm{div}\ ,\ N\} \cup \{P_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

2° Les autres applications sont des résultats de stabilité.

PROPOSITION 7. - Soit k de caractéristique 0 et clos par radicaux ; alors $k((X))$ à la p. i. si, et seulement si, k l'a.

COROLLAIRE 10. - $\mathbb{C}((X))$ n'a pas la p. i.

Ce résultat est à rapprocher du fait que les corps pseudo finis ont la p. i. [D]: on connaît donc des corps profinis, c'est-à-dire de groupe de Galois absolu procyclique, ayant ou n'ayant pas la p. i. Par ailleurs, le cas de $\mathbb{C}((X))$ est intéressant car la structure de corps valué est définissable dans la seule structure de corps [A] . Le résultat suivant s'applique encore à $k \equiv \mathbb{C}$.

PROPOSITION 8. - Soit k stable. Alors

(i) tous les types sur $k((X))$ sont définissables,

(ii) les seuls corps $K \equiv k((X))$, sur lesquels tous les types sont définissables, sont les corps de séries $k'((X))$, où $k' \equiv k$.

Démonstration.

(i) Par la proposition 1, la stabilité de k et le corollaire 9, tous les types résiduels et valuationnels sur k sont définissables ; par ailleurs, tous les types immédiats sont réalisés.

(ii) Soit $K \equiv k((X))$ et supposons que $G = \mathrm{val}\ K$ soit une surstructure élémentaire stricte de $\mathbb{Z}$. Considérons alors la coupure sur G de classe inférieure $\{g \in G\ ;\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ tel que $G \models g < n\}$. Si cette coupure est définissable dans G , $\mathbb{Z}$ l'est aussi ; or $\mathbb{Z}$ est un modèle premier minimal des $\mathbb{Z}$-groupes, il ne peut donc pas être définissable dans G . Cela prouve qu'un corps K sur lequel tous les types sont définissables est valué dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas qui nous intéresse, K contient un relèvement de $\overline{K}$ et un relèvement de $\mathrm{val}\ K = \mathbb{Z}$; d'après l'unicité du complété K se plonge dans $\overline{K}((X))$. Il reste à montrer que tous les types immédiats sur K doivent être réalisés. C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME 13. - Soient $p(x)$ immédiat sur $K \subset k((X))$, x_0 une réalisation de p. Alors les héritiers de p sur K_{x_0} sont les types $q(y)$ valuationnels vérifiant $I_{K_{x_0}}(y) = I_K(x)$ et $a_y = x_0$.

Démonstration. - On a vu dans la démonstration du lemme 11 qu'un fils $q(y)$ de p sur K_{x_0} est caractérisé par les relations

$$\mathrm{val}(y - x_0) > g \ , \quad \forall\, g \in I_K(p) \ .$$

Puisque K_{x_0} est extension immédiate de K, on a $I_{K_{x_0}}(q) \neq I_K(p)$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathrm{val}\, K$ et $m \in K_{x_0}$, tels que $g > I_K(p)$ et $\mathrm{val}(y-m)=g$. Une telle situation n'est pas possible puisque q hérite de p ; on a donc $I_{K_{x_0}}(q) = I_K(p)$ et d'après la relation $\mathrm{val}(y - x_0) > I_K(p)$, q est valuationnel avec $a_y = x_0$.

Réciproquement, un tel type $q(y)$ est uniquement défini par le type de $\mathrm{val}(y - x_0)$ sur $\mathrm{val}\, K_{x_0} = \mathrm{val}\, K$. Une formule de q est donc conséquence d'une formule de la forme :

$$\Phi(x) = \varphi(\vec{m}) \wedge [g_1 < \mathrm{val}(y - x_0) < g_2] \wedge \bigwedge_{i=1}^{i_0} D_{n_i}(\mathrm{val}(y - x_0) - r_i) \ ,$$

où φ est une formule à paramètre dans K, $\vec{m} \in K_{x_0}$, $g_1 \in I_K(p)$, $g_2 \notin I_K(p)$, $r_i \in \underset{\sim}{N}$. Puisque $K_{x_0} = \widetilde{K(x_0)}$, $\vec{m}$ est atomique sur $K(x_0)$ et on peut se restreindre au cas où φ est une formule en x_0 (à paramètres dans K) ; soit puisque x_0 est immédiat, à une formule $\mathrm{val}(x_0 - a_g) = g$. Choisissons $v \in I_K(p)$, $v > \max(g_1, g)$, vérifiant $\bigwedge_{i=1}^{i_0} D_{n_i}(v - r_i)$; v s'écrit $v = \mathrm{val}(x - a_v)$. Le type p satisfait la formule $\Phi(a_v)$ et q hérite donc de p.

COROLLAIRE 11. - Parmi les types sur les modèles de $k((X))$, seuls les types réalisés sont stables.

Démonstration. - Soit $M \equiv k((X))$, $p \in S_1(M)$ non réalisé. Il est facile de construire $N \succ M$ sur lequel p admet un fils q immédiat (non réalisé) ; q n'est pas définissable et donc p n'est pas stable.

BIBLIOGRAPHIE

[A] AX (J.). - On the undecidability of power series fields, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 846.

[AK] AX (J.) and KOCHEN (S.). - Diophantine problems over local fields, I and II, Amer. J. of Math., t. 87, 1965, p. 605-630, 631-648 ; III, Annals of Math., t. 83, 1966, p. 437-456.

[CK] CHANG (C.) and KIESLER (J.). - Model Theory. 2nd edition. - Amsterdam, North-Holland, 1977 (Studies in Logic, 73).

[D] DURET (J. L.). - Les corps faiblement algébriquement clos ont la propriété d'indépendance, Thèse 3e cycle, Paris, 1979.

[E] ERSOV (Ju. L.). - On the elementary theory of maximal normed fields, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 165, 1965, p. 21-23.

[K] KOCHEN (S.). - The model theory of local fields, "Logic Conference", Kiel, 1974, p. 384-425. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 499).

[M MK VdD] MACINTYRE (A.), McKENNA (K.) and Van den DRIES (L.). - Elimination of quantifiers in algebraic structures, Advances in Mathematics (à paraître).

Pour tout ce qui concerne les corps valués et plus précisément les corps henséliens, voir :

[R] RIBENBOIM (P.). - Théorie des valuations. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1964 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1964, 9).