CHANTAL BERLINE

Stabilité et algèbre. 4. Groupes

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 4, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A4_0>

Théories stables
(B. POIZAT)
2e année, 1978/79, n° 4, 8 p.

STABILITÉ ET ALGÈBRE

4. Groupes

par Chantal BERLINE (*)
[Université Paris-7]

A. Préliminaires

Soit G un groupe, et A un sous-ensemble de G. Le centralisateur de A dans G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de A ; on le note $C_G(A)$. Le centre de G est le centralisateur de G dans G ; on le note $Z(G)$. L'indice dans G d'un sous-groupe H de G est le nombre de classes à gauche (= nombre de classes à droite) de G modulo H si ce nombre est fini, " ∞ " sinon ; on le note $[G : H]$. Le groupe G est abélien-par-fini (resp. nilpotent-par-fini) s'il a un sous-groupe normal abélien (resp. nilpotent) d'indice fini. Pour les définitions de résoluble et nilpotent nous renvoyons à [7]. G est localement résoluble (resp. localement nilpotent) si tous ses sous-groupes de type fini sont résolubles (resp. nilpotents).

L est ici le langage des groupes, avec ou sans symbole pour l'inverse ; comme dans les exposés précédents, définissable sous-entend : sans paramètres, G-définissable signifie définissable par une formule de L à paramètres dans G, c'est-à-dire par une formule de $L(G)$. Le groupe G sera dit connexe s'il n'a pas de sous-groupe G-définissable d'indice fini (cette notion de connexité "définissable" est introduite dans [2] ; voir aussi [3] et [4]). Il est clair qu'un groupe G quelconque a au plus un sous-groupe G-définissable connexe d'indice fini ; s'il en a un c'est l'intersection de tous les sous-groupes G-définissables d'indice fini de G ; c'est un sous-groupe caractéristique de G, c'est-à-dire invariant par tout automorphisme de G, en particulier c'est un sous-groupe normal de G ; on l'appelle composante connexe de G, et on le note G^0. Il doit être également clair que si G a une composante connexe, G n'a qu'un nombre fini de sous-groupes définissables d'indice fini. Enfin G^0 est définissable sans paramètres dans G : supposons en effet G^0 définissable par la formule $\varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in G$, alors G^0 est aussi définissable par la formule

$$\forall \bar{y} \, [\text{"}\varphi(\cdot, \bar{y}) \text{ est un sous-groupe d'indice } n_0\text{"} \rightarrow \varphi(x, \bar{y})] ,$$

où n_0 est l'indice de G^0 dans G.

(*) Chantal BERLINE, Mathématiques, Université Paris-7, Aile 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

B. Condition de chaîne des groupes stables, application aux groupes $\aleph_0$-catégoriques stables

Nous savons déjà qu'une structure stable n'a pas de suite infinie strictement décroissante de sous-ensembles uniformément définissables (exposé 1, Corollaire 12). Pour les groupes, on dispose d'un théorème plus puissant.

THÉORÈME 1 [6]. - *Soit G un groupe stable, $\varphi(x, \overline{y})$ une formule de L à $m+1$ variables libres. Alors il existe un entier n tel que toute intersection de sous-groupes de G définissables à l'aide de φ est intersection d'au plus n d'entre eux.*

Démonstration. - Supposons le contraire. Il existerait alors, pour tout n, une suite $\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_n$ de m-uplets telle que, pour tout $j \leqslant n$, le sous-ensemble G_j défini par $\varphi(x, \overline{b}_j)$ soit un groupe, et

$$G_1 \supsetneq G_1 \cap G_2 \supsetneq \dots \supsetneq G_n .$$

Montrons qu'il existe alors dans G des éléments $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$G \models \varphi(a_i, \overline{b}_j) \text{ si, et seulement si, } j < i .$$

Pour $n = 1$, c'est clair. Esquissons la démonstration pour $n \geqslant 2$: on choisit a_n dans $\bigcap_{i=1}^{n-1} G_i - \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, puis on prend un élément c_{n-1} dans $\bigcap_{i=1}^{n-2} G_i - \bigcap_{i=1}^{n-1} G_i$ (on convient que $\bigcap_{i=1}^{0} G_i = G$). Dans G, on a donc $\varphi(c_{n-1}, \overline{b}_j)$ si $j < n-1$, et $\neg\varphi(c_{n-1}, \overline{b}_{n-1})$. Si de plus on a $\neg\varphi(c_{n-1}, \overline{b}_n)$, on prend $a_{n-1} = c_{n-1}$, sinon on prend $a_{n-1} = c_{n-1}\, a_n$. Pour un $n \geqslant 3$, il faut encore définir a_{n-2}. Soit $c_{n-2} \in \bigcap_{i=1}^{n-3} G_i - \bigcap_{i=1}^{n-2} G_i$. Si c_{n-2} n'est ni dans G_{n-1} ni dans G_n, on prend $a_{n-2} = c_{n-2}$, s'il est dans G_{n-1}, $a_{n-1}\, c_{n-2}$ n'y est pas, et on pose alors $a_{n-2} = a_{n-1}\, c_{n-2}$ ou $a_n\, a_{n-1}\, c_{n-2}$ suivant que $a_{n-1}\, c_{n-2}$ est dans G_n ou pas. Si c_{n-2} est dans G_n et pas dans G_{n-1}, on prend $a_{n-2} = c_{n-2}\, a_n$. Et si $n > 3$, on continue ! (la formalisation rigoureuse de la démonstration est laissée au lecteur qui pourra d'ailleurs la trouver dans [6].) G a donc la propriété de l'ordre et est par conséquent instable (exposé 1, théorème 10).

COROLLAIRE 2 [6]. - *Tout groupe stable $\aleph_0$-catégorique G a une composante connexe.*

Démonstration. - Il suffit de montrer que l'intersection G^0 des sous-groupes G-définissables d'indice fini de G est intersection d'un nombre fini d'entre eux. Associons à toute formule libre $\varphi(x, \overline{y})$ de L, l'intersection G_φ des sous-groupes de G d'indice fini définissables à l'aide de la formule φ. Puisque G est stable, G_φ est intersection d'un nombre fini de ces sous-groupes (théorème 1), donc G_φ est d'indice fini n_φ dans G. Il s'ensuit aussi que G_φ est définissable par la formule sans paramètres :

$$\forall \overline{y}\, [\text{"}\varphi(\cdot, \overline{y}) \text{ est un sous-groupe d'indice } n_\varphi\text{"} \rightarrow \varphi(x, \overline{y})] .$$

G^0 est par définition, l'intersection de tous les G_φ . Comme G est $\aleph_0$-catégorique, il n'a qu'un nombre fini de sous-ensembles définissables, et tous les G_φ sont égaux à un nombre fini d'entre eux. Q.E.D.

COROLLAIRE 3 [1]. - <u>Si G est un groupe stable le centralisateur dans G de tout sous-ensemble H de G est G-définissable. Plus précisément, il y a un entier $n \geq 1$ tel que</u>

$$\forall H \subset G \, , \quad \exists h_1 , \ldots , h_n \in H \, , \quad C_G(H) = C_G(h_1 , \ldots , h_n) \, .$$

<u>Démonstration</u>. - $C_G(H) = \bigcap_{h \in H} C_G(h) = \bigcap_{h \in H} \{x \; ; \; xh = hx\}$.

COROLLAIRE 4 [1]. - <u>Un groupe stable localement nilpotent est résoluble.</u>

<u>Démonstration</u>. - Admettons qu'un groupe localement nilpotent G , dont tous les centralisateurs différents de G sont $2k - 1$ résolubles, est $2k + 1$ résoluble (démonstration dans [1], p. 273), et montrons par récurrence sur n qu'un groupe G localement nilpotent qui n'a pas de suite strictement décroissante du type

$$G \supsetneq C_G(a_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C_G(a_1) \cap \ldots \cap C_G(a_n)$$

est $2n - 1$ résoluble. Pour $n = 1$ c'est clair, supposons-le vrai pour $n - 1$. Soit $b \in G - Z(G)$, $H = C_G(b)$, et $b_1 , \ldots , b_{n-1}$ des éléments de H . Pour tout $1 \leq i \leq n - 1$,

$$C_H(b_i) = C_G(b_i) \cap H = C_G(b_i) \cap C_G(b) \, ,$$

donc aucun $H = C_G(b)$ n'a de suite du type :

$$H \supsetneq C_G(b_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C_G(b_1) \cap \ldots \cap C_G(b_{n-1}) \, .$$

Par hypothèse de récurrence, tous les $C_G(b)$, $b \in G - Z(G)$, sont $2n - 3$ résolubles, et G est donc $2n - 1$ résoluble.

On peut comparer avec les deux résultats suivants de Felgner :

THÉORÈME 5 [5]. - <u>Un groupe stable $\aleph_0$-catégorique localement nilpotent est nilpotent. Un groupe stable $\aleph_0$-catégorique localement résoluble est résoluble.</u>

Ces résultats et le corollaire 2 servent, avec de nombreux autres ingrédients, à démontrer le théorème suivant que nous nous contenterons d'énoncer.

THÉORÈME 6 ([6], [2]). - <u>Tout groupe $\aleph_0$-catégorique stable est nilpotent-par-fini.</u>

On comparera avec le résultat suivant, dont la démonstration est longue et technique :

THÉORÈME 7 [2]. - <u>Tout groupe $\aleph_0$-catégorique ω-stable est abélien-par-fini.</u>

En fait, BAUR, CHERLIN et MACINTYRE donnent, dans [2], une caractérisation totale des groupes ω-stables de rang de Morley fini et $\aleph_0$-catégoriques ainsi que des groupes totalement catégoriques.

Notons que l'on ignore toujours s'il existe des groupes (ou plus généralement des structures) $\aleph_0$-catégoriques et stables mais non ω-stables.

C. Connexité ; application aux groupes ω-stables

LEMME 8 [2]. - Tout groupe ω-stable G a une composante connexe.

Démonstration. - Un groupe G, ω-stable, ayant la condition de chaîne décroissante sur les sous-groupes G définissables (exposé 1, théorème 18), il est clair que l'intersection G^0 des sous-groupes G-définissables d'indice fini de G est intersection d'un nombre fini d'entre eux, donc G a un plus petit sous-groupe G-définissable d'indice fini, G^0.

Soit G un groupe ω-stable, α_G son rang de Morley, et $\deg(G)$ son degré. Rappelons que $\deg(G)$ est le nombre de types de rang α_G à paramètres dans un G' ω-saturé élémentairement équivalent à G. D'autre part, si H est un sous-groupe G-définissable d'indice fini de G, alors $\deg(G) = [G : H] \deg(H)$ (exposé 1, lemme 19).

THÉORÈME 9 [3]. - Si G est un groupe ω-stable,

$$[G : G^0] = \deg(G) .$$

En vertu de ce qui précède, et en rappelant qu'un groupe G est connexe s'il n'a pas de sous-groupes G-définissables d'indice fini, le théorème 9 s'énonce aussi :

THÉORÈME. - Tout groupe ω-stable connexe est de degré 1.

(La réciproque étant trivialement vraie, toujours d'après ce qui précède.)

Démonstration du théorème [cf. aussi [9]]. - Soit G un groupe ω-stable connexe, d son degré. On veut montrer que $d = 1$. Comme le degré et le fait d'être connexe sont préservés par équivalence élémentaire, on peut supposer G ω-saturé.

(a) On commence par montrer que, pour toute formule $\psi(x, \bar{y})$ de $L(G)$,

$$A = \{\bar{y} \in G \; ; \; R_G(\psi(x, \bar{y})) < \alpha_G\}$$

est G-définissable. Soient $p_1, \dots, p_d$ les d types de rang α_G de G. Comme G est stable, ils sont définissables. En particulier, il y a des formules $\delta_1 \psi, \dots, \delta_d \psi$ de $L(G)$ telles que, pour tout $\bar{y}$ de G,

$$p_i \vdash \psi(x, \bar{y}) \text{ si, et seulement si, } G \models \delta_i \psi(\bar{y}) .$$

Comme $R_G(\psi(x, \bar{y}))$ est strictement inférieur à α_G exactement si $\psi(x, \bar{y})$

ne contient aucun des types p_i , on a

$$A = \{\overline{y} \in G \; ; \quad G \models \bigwedge_{i=1}^{d} \neg\, \delta_i\, \psi(\overline{y})\} \, .$$

(b) Une formule φ de $L(G)$ et un élément g de G étant donnés, la translatée $g\varphi$ de φ est définie par

$$G \models (g\varphi)(x) \leftrightarrow \varphi(gx) \, .$$

Elle a même rang que φ (démonstration par récurrence sur la longueur de φ laissée en exercice) et même degré.

(c) Soit alors $\varphi_1 , \ldots , \varphi_d$ une partition de G (i. e. de $x = x$) en formules de rang φ_G et de degré 1 . Pour tout $i \leq d$ et tout $g \in G$, il y a un $j \leq d$ unique tel que

$$R_G(g\varphi_i \cap \varphi_j) = \alpha_G \, ,$$

à savoir le seul j tel que $g\varphi_i$ et φ_j contiennent le même type de rang α_G . On associe ainsi à chaque $g \in G$ la permutation $\theta(g)$ de $\{1 , \ldots , d\}$, définie par

$$\theta(g)(i) = j \quad \text{si, et seulement si,} \quad R_G(g\varphi_i \cap \varphi_j) = \alpha_G \, .$$

θ est un morphisme de G dans le groupe des permutations de $\{1 , \ldots , d\}$, Ker θ est donc un sous-groupe d'indice fini de G . Il est G-définissable, puisque

$$\operatorname{Ker} \theta = \bigcap_{i=1}^{d} \{y \in G \; ; \quad R(y\varphi_i \cap \varphi_i) = \alpha_G\} \, .$$

Comme G est connexe, $\operatorname{Ker} \theta = G$ et, pour tous $i , j \leq d$, $i \neq j$, on a :

(1) $\forall\, g$, $R(g\varphi_i \cap \varphi_i) = \alpha_G$ et $\forall\, g$, $R(g\varphi_i \cap \varphi_j) < \alpha_G$,

de même

(2) $\forall\, g$, $R(\varphi_i\, g \cap \varphi_i) = \alpha_G$ et $\forall\, g$, $R(\varphi_i\, g \cap \varphi_j) < \alpha_G$.

Soit p le type sur G de rang α_G qui est dans φ_1 , et G^* une extension élémentaire de G qui réalise p . Soit $a \in G^*$ réalisant p . En particulier, compte tenu de (1), pour tout $g \in G$, $G^* \models (g\varphi_1)(a)$ ou encore $G^* \models \varphi_1(ga)$. Il en résulte que G est inclus dans $(\varphi_1\, a^{-1})^{G^*}$, le sous-ensemble de G^* défini par la formule $\varphi_1\, a^{-1}$. En particulier,

$$\varphi_2^G \subseteq [\varphi_1\, a^{-1} \cap \varphi_2]^{G^*} \, .$$

D'autre part, φ_2 a pour rang α_G , et $\varphi_1\, a^{-1} \cap \varphi_2$ a un rang strictement inférieur à α_G (par (2) appliqué à G^*) ; pour aboutir à une contradiction si $d \geq 2$, il suffit donc de montrer le résultat suivant :

LEMME 10 [3]. - <u>Soient</u> $M < M^*$ <u>deux réalisations d'un langage</u> L , A <u>un sous-ensemble</u> M-<u>définissable de</u> M <u>et</u> B <u>un sous-ensemble</u> M^*-<u>définissable tels que</u> $A \subset B$. <u>Alors</u> $R(A) \leq R(B)$ <u>où</u> R <u>est le rang de Morley calculé dans</u> $T(M)=T(M^*)$.

Esquisse de démonstration. - On peut supposer la paire (M^*, M) ω-saturée, et travailler avec le rang de Cantor-Bendixon. On montre alors par induction sur l'ordinal α que

$$R(A) \geqslant \alpha \quad \text{implique} \quad R(B) \geqslant \alpha .$$

Nous allons maintenant passer en revue les résultats de Cherlin sur la classification des "groupes de petit rang de Morley", "petit" signifiant : égal à 1, 2 ou 3. Nous nous contenterons de donner la démonstration du plus simple d'entre eux. Pour les autres nous renvoyons à [3].

LEMME 11. - *Tout groupe infini ω-stable contient un sous-groupe abélien infini définissable avec paramètres.*

Démonstration ([3], [8]). - On raisonne par récurrence sur les couples (rang, degré) des groupes munis de l'ordre lexicographique. Supposons le lemme faux. Il existe alors un contre exemple G de (rang, degré) minimal. Par suite, tout sous-groupe propre G-définissable de G est fini (utiliser le lemme 19 de l'exposé 1 pour montrer qu'un sous-groupe propre G-définissable de G a toujours un (rang, degré) strictement inférieur à celui de G). En particulier, G est connexe et son degré est 1. De plus,

(a) Le centralisateur $C(g)$ de tout élément g de $G - Z(G)$ est fini, en particulier tout élément non central de G est d'ordre borné, et par compacité il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que, $\forall\, g \in G$, $g^n = 1$.

(b) Soit p un type sur G de rang de Morley maximum, et a un élément qui réalise p dans une extension élémentaire de G. Soit g un élément non central de G, et $b = aga^{-1}$. Comme $C(g)$ est fini, la formule $b = xgx^{-1}$ est satisfaite par un nombre fini d'éléments, donc a est algébrique sur $G \cup \{b\}$; de même b est algébrique sur $G \cup \{a\}$, il en résulte que les types de a et b sur G ont même rang de Morley (exercice). Comme G est de degré 1, a et b ont même type sur G. En particulier a et g sont conjugués. Par suite, tous les éléments non centraux de G sont conjugués. Comme $Z(G)$ est fini, tout élément non central de G a donc une infinité de conjugués.

(c) $G/Z(G)$ a pour centre $\{1\}$. En effet l'image $\overline{h}$ d'un élément h de G dans $G/Z(G)$ est dans $Z(G/Z(G))$ si, et seulement si, $\forall\, g \in G$, $hgh^{-1}g^{-1} \in Z(G)$. Si $h \notin Z(G)$, $\{gh^{-1}g^{-1} ; g \in G\}$ est infini, et $h^{-1}Z(G)$ est fini. Contradiction.

(d) En résumé, $G_1 = G/Z(G)$ a pour centre $\{1\}$, et a tous ses éléments conjugués et de même ordre fini n. Nous allons montrer que si G_1 est différent de $\{1\}$, alors $n = 2$, et en déduire rapidement les contradictions souhaitées. Soit $g \in G_1$, $g \neq 1$. Soit x tel que $g = xg^{-1}x^{-1}$. On a alors

$$g = x^2gx^{-2} = x^3g^{-1}x^{-3} = \dots = x^n g^{(-1)^n} x^{-n} ,$$

donc $g = g^{(-1)^n}$. Si n est impair $g = g^{-1}$ et $g^2 = 1$, contradiction. Donc n est pair et égal à 2 puisque tous les éléments de G_1 ont même ordre. G_1 est alors commutatif, et son centre est différent de $\{1\}$, contradiction. D'autre part, si G_1 est trivial, $G = Z(G)$ est fini, et là encore contradiction.

Note. - Ce résultat reste vrai pour les groupes superstables.

THÉORÈME 12. - Tout groupe de rang de Morley 1 est abélien-par-fini.

Il revient au même de montrer que tout groupe connexe de rang de Morley 1 est abélien. Soit G un tel groupe. Le sous-groupe abélien G-définissable fourni par le lemme ne peut pas être propre (regarder son rang et son degré). G est donc abélien.

THÉORÈME 13. - Tout groupe de rang de Morley 2 est résoluble-par-fini.

Il en résulte que tout groupe connexe de rang 2 est résoluble.

Soit K un corps. $SL_2(K)$ désigne le groupe des matrices carrées 2×2 à coefficients dans K et de déterminant 1, $PSL_2(K)$ le quotient de $SL_2(K)$ par son centre.

THÉORÈME 14. - Un groupe G non résoluble de rang de Morley 3, qui a un sous-groupe définissable de rang 2, a un centre $Z(G)$ fini, et $G/Z(G)$ est isomorphe à $PSL_2(K)$ pour un corps K algébriquement clos.

On ne sait pas s'il existe des groupes non résolubles de rang de Morley 3 sans sous-groupe définissable de rang 2. La classification des groupes de rang $n \geq 4$ est entièrement ouverte.

Note. - On trouvera des compléments à cet exposé dans les exercices de l'exposé 11.

REFERENCES

[1] BALDWIN (J. T.) and SAXL (J.). - Logical stability in group theory, J. Austral. math. Soc., Série A, t. 21, 1976, p. 267-276.

[2] BAUR (W.), CHERLIN (G.) and MACINTYRE (A.). - Totally categorical groups and rings, J. of Algebra, t. 57, 1979, p. 407-440.

[3] CHERLIN (G.). - Groups of small Morley rank, Annals of math. Logic, t. 17, 1979, p. 1-28.

[4] CHERLIN (G.). - Stable algebraic theories, "Logic Colloquium 78", [1978. Mons]. Edited by M. Boffa, D. Van Dalen, K. McAloon ; p. 53-74. - Amsterdam, North-Holland, 1979 (Studies in Logic, 97).

[5] FELGNER (U.). - Stability and $\aleph_0$-categoricity, "Logic Colloquium 76", [1976. Oxford], Edited by R. O. Gandy and J. M. E. Hyland, p. 301-324. - Amsterdam, North-Holland, 1977 (Studies in Logic, 87).

[6] FELGNER (U.). - $\aleph_0$-categorical stable groups, Math. Z., t. 160, 1978, p. 27-49.

[7] HALL (M.). - The theory of groups, New York, Macmillan Company, 1959.

[8] REINEKE (J.). - Minimale Gruppen, Z. für math. Logik, t. 21, 1975, p. 357-359.

[9] ZIL'BER (B. I.). - Groupes et anneaux dont la théorie est catégorique [en russe, avec sommaire en anglais], Fund. Math., Warszawa, t. 95, 1977, p. 173-188.